Chapitre 8

Espaces de Sobolev

Dans ce cours, nous nous limiterons aux espaces de Sobolev modelés sur L^2.

8.1 Définition des espaces de Sobolev sur $\mathbb{R}^d$

Définition 8.1.1 *Soit s un réel, on dit qu'une distribution tempérée u appartient à* l'espace de Sobolev d'indice *s, noté $H^s(\mathbb{R}^d)$, ou simplement H^s en l'absence d'ambiguïté, si et seulement si*

$$\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d;(1+|\xi|^2)^s\, d\xi).$$

et l'on note

$$\|u\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2\, d\xi.$$

Proposition 8.1.1 *Pour tout s réel, l'espace H^s, muni de la norme $\|\cdot\|_{H^s}$, est un espace de Hilbert.*

Démonstration. Le fait que la norme $\|\cdot\|_{H^s}$ provienne du produit scalaire

$$(u|v)_{H^s} \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s \widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}(\xi)}\, d\xi$$

est évident. Démontrons que H^s est un espace complet. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de H^s. Par définition de la norme, la suite $(\widehat{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de l'espace $L^2(\mathbb{R}^d;(1+|\xi|^2)^s\, d\xi)$, lequel est complet. Donc, il existe une fonction $\widetilde{u}$ appartenant à l'espace $L^2(\mathbb{R}^d;(1+|\xi|^2)^s\, d\xi)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|\widehat{u}_n - \widetilde{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^d;(1+|\xi|^2)^s d\xi)} = 0. \tag{8.1}$$

Comme $L^2(\mathbb{R}^d;(1+|\xi|^2)^s\, d\xi)$ est inclus dans l'espace des distributions tempérées $\mathscr{S}'$, on peut poser $u = \mathscr{F}^{-1}\widetilde{u}$. Par construction, c'est un élément de H^s et d'après (8.1), on a bien $\|u_n - u\|_{H^s} \to 0$ quand $n \to +\infty$. $\square$

Pour dire brièvement les choses, la transformation de Fourier est un isomorphisme isométrique de H^s sur $L^2(\mathbb{R}^d;(1+|\xi|^2)^s d\xi)$. En particulier, $H^0 = L^2$ joue le rôle d'espace-pivot dans l'échelle des espaces H^s, $s \in \mathbb{R}$. Il est clair que $H^{s_2} \hookrightarrow H^{s_1}$, où la flèche $\hookrightarrow$ désigne une injection continue, dès que $s_1 \leq s_2$.

Le cas où s est un entier naturel est particulier.

Proposition 8.1.2 *Soit m est un entier positif. L'espace $H^m(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des fonctions u de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dont toutes les dérivées d'ordre inférieur ou égal à m sont des distributions appartenant à $L^2(\mathbb{R}^d)$. De plus, la norme*

$$\widetilde{\|}u\|_{H^m}^2 \stackrel{déf}{=} \sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2$$

munit l'espace H^m d'une structure d'espace de Hilbert et cette norme est équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^m}$ définie à l'aide de la transformation de Fourier.

Démonstration. Le fait que

$$\widetilde{\|}u\|_{H^m}^2 = \widetilde{(}u|u)_{H^m} \quad \text{avec} \quad \widetilde{(}u|v)_{H^m} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\mathbb{R}^d} \partial^\alpha u(x)\overline{\partial^\alpha v(x)}dx.$$

assure que la norme $\widetilde{\|}\cdot\|_{H^m}$ provient d'un produit scalaire. De plus, il existe une constante C telle que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ C^{-1}\Big(1+\sum_{0<|\alpha|\leq m}|\xi|^{2|\alpha|}\Big) \leq (1+|\xi|^2)^m \leq C\Big(1+\sum_{0<|\alpha|\leq m}|\xi|^{2|\alpha|}\Big). \tag{8.2}$$

Comme la transformation de Fourier est, à une constante près, une isométrie de L^2 sur L^2, alors on a

$$\partial^\alpha u \in L^2 \Leftrightarrow \xi^\alpha \widehat{u} \in L^2.$$

Donc, on en déduit que

$$u \in H^m \Leftrightarrow \forall\, \alpha \text{ tel que } |\alpha| \leq m,\ \partial^\alpha u \in L^2.$$

Enfin, l'inégalité (8.2) assure l'équivalence des normes grâce au fait que la transformation de Fourier est une isométrie à une constante près. □

Remarques. Cette proposition nous indique comment on peut définir des espaces de Sobolev d'indice entier positif modelés sur les espaces L^p pour $p \in [1,+\infty]$. Il suffit de définir l'espace $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ comme l'espace des fonctions u de $L^p(\mathbb{R}^d)$ dont toutes les dérivées d'ordre inférieur ou égal à m sont des distributions appartenant à $L^p(\mathbb{R}^d)$, muni de la norme idoine.

On voit aussi que l'indice s de l'espace de Sobolev s'interprète comme un ordre de dérivées appartenant à L^2 dans le cas entier, donc une mesure de régularité. Dans le cas s réel, on a aussi une interprétation en termes de dérivées d'ordre fractionnaire.

Exercice 8.1.1 *Démontrez que l'espace $\mathscr{S}$ est inclus dans l'espace H^s, et ce pour tout réel s.*

Exercice 8.1.2 *Démontrer que la masse de Dirac δ_0 appartient à l'espace $H^{-\frac{d}{2}-\varepsilon}$ pour tout réel strictement positif ε, mais que δ_0 n'appartient pas à l'espace $H^{-\frac{d}{2}}$.*

Exercice 8.1.3 *Démontrez que, pour toute distribution à support compact u, il existe un réel s telle que u appartienne à l'espace de Sobolev H^s.*

Exercice 8.1.4 *Démontrer que la constante 1 n'appartient à H^s pour aucun réel s.*

Exercice 8.1.5 *Soit s un réel de l'intervalle $]0,1[$. Démontrer que l'espace H^s est l'espace des fonctions u de L^2 telles que*

$$\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{d+2s}}\,dxdy < +\infty.$$

Démontrer de plus qu'il existe une constante C telle que, pour toute fonction u de H^s, on ait

$$C^{-1}\|u\|_{H^s}^2 \leq \|u\|_{L^2}^2 + \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{d+2s}}\,dxdy \leq C\|u\|_{H^s}^2.$$

Comment pourrait-on définir un espace $W^{s,p}$ de façon analogue ?

Théorème 8.1.1 *Soit s un réel quelconque. L'espace $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ et la multiplication par une fonction de $\mathscr{S}$ est une application continue de H^s dans lui-même.*

Démonstration. Pour prouver le premier point de ce théorème, il suffit de démontrer que l'orthogonal de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ est réduit au vecteur nul, voir corollaire 4.2.2. Considérons une distribution u de H^s telle que, pour toute fonction-test φ, on ait $(\varphi|u)_{H^s} = 0$. Ceci signifie que, pour toute fonction-test φ, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\varphi}(\xi)(1+|\xi|^2)^s\overline{\widehat{u}(\xi)}\,d\xi = 0.$$

En utilisant que $\mathscr{S}$ est inclus dans H^s, que, d'après la proposition 7.3.3, $\mathscr{D}$ est dense dans $\mathscr{S}$, et que la transformation de Fourier est un isomorphisme de $\mathscr{S}$ dans lui-même, on a, pour toute fonction ϕ de $\mathscr{S}$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(\xi)(1+|\xi|^2)^s \overline{\widehat{u}(\xi)}\, d\xi = 0.$$

Comme $\mathscr{S}$ est dense dans L^2, ceci entraîne que l'on a $(1+|\xi|^2)^s \widehat{u}(\xi) = 0$, donc $\widehat{u} = 0$, donc $u = 0$.

Démontrons maintenant le second point du théorème. Cette démonstration est présentée ici à titre culturel. Dans les calculs qui suivent, la constante C est générique et sa valeur peut changer d'une occurrence à l'autre. Soit ϕ une fonction de $\mathscr{S}$.

D'après la proposition 7.3.4, on sait que

$$\widehat{\phi u} = (2\pi)^{-d} \widehat{\phi} \star \widehat{u}.$$

On souhaite montrer qu'il existe une constante C telle que $\|\phi u\|_{H^s} \leq C\|u\|_{H^s}$. Il s'agit donc de majorer la norme L^2 de la fonction définie par

$$U(\xi) = (1+|\xi^2|)^{\frac{s}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{\phi}(\xi-\eta)| \times |\widehat{u}(\eta)|\, d\eta$$

par une constante fois la norme H^s de u. Posons $I_1(\xi) = \{\eta \,/\, 2|\xi-\eta| \leq |\eta|\}$ et $I_2(\xi) = \{\eta \,/\, 2|\xi-\eta| \geq |\eta|\}$. Il est clair que l'on a

$$\begin{aligned} U(\xi) &= U_1(\xi) + U_2(\xi) \quad \text{avec} \\ U_j(\xi) &= (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \int_{I_j(\xi)} |\widehat{\phi}(\xi-\eta)| \times |\widehat{u}(\eta)|\, d\eta. \end{aligned}$$

Tout d'abord, observons que si $\eta \in I_1(\xi)$,alors on a

$$\frac{1}{2}|\eta| \leq |\xi| \leq \frac{3}{2}|\eta|.$$

On en déduit que, pour tout réel s, il existe une constante C telle que, pour tout couple (ξ, η) tel que η appartienne à $I_1(\xi)$,

$$(1+|\xi|^2)^s \leq C(1+|\eta|^2)^s.$$

Il vient que

$$U_1(\xi) \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{\phi}(\xi-\eta)|(1+|\eta|^2)^{\frac{s}{2}} |\widehat{u}(\eta)|\, d\eta = C\widehat{\phi} \star w(\xi),$$

où $w(\eta) = (1+|\eta|^2)^{\frac{s}{2}}|\widehat{u}(\eta)|$. Comme $\widehat{\phi}$ appartient à $\mathscr{S}$, en particulier $\widehat{\phi}$ appartient à L^1, donc

$$\|U_1\|_{L^2} \leq C\|\widehat{\phi}\|_{L^1}\|w\|_{L^2} = C\|\widehat{\phi}\|_{L^1}\|u\|_{H^s},$$

par le théorème 5.4.3.

Par ailleurs, si η appartient à $I_2(\xi)$, on a

$$\frac{1}{2}|\xi-\eta| \leq |\xi| \leq \frac{3}{2}|\xi-\eta| \quad \text{et} \quad |\eta| \leq 2|\xi-\eta|.$$

Distinguons deux cas. Si $s \geq 0$, alors $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \leq C(1+|\xi-\eta|^2)^{\frac{s}{2}}$, d'où

$$U_2(\xi) \leq C\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{\phi}(\xi-\eta)|(1+|\xi-\eta|^2)^{\frac{s}{2}}|\widehat{u}|\,d\eta = Cw\star\widehat{u}(\xi),$$

où $w(\xi) = |\widehat{\phi}(\xi)|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \in L^1$ puisque $\phi \in \mathscr{S}$. On en déduit comme précédemment que $U_2 \in L^2$ avec

$$\|U_2\|_{L^2} \leq C\|w\|_{L^1}\|\widehat{u}\|_{L^2} \leq C\|w\|_{L^1}\|u\|_{H^s},$$

d'où le résultat dans ce cas.

Si maintenant $s<0$, on note que l'on a toujours $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \leq C(1+|\xi-\eta|^2)^{\frac{s}{2}}$, mais aussi que $(1+|\eta|^2)^{-\frac{s}{2}} \leq C(1+|\xi-\eta|^2)^{-\frac{s}{2}}$. Par conséquent, on peut écrire

$$U_2(\xi) \leq C\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{\phi}(\xi-\eta)|(1+|\eta|^2)^{\frac{s}{2}}|\widehat{u}(\eta)|\,d\eta,$$

et l'on obtient une nouvelle fois

$$\|U_2\|_{L^2} \leq C\|u\|_{H^s}$$

par le même argument d'estimation de convolution que plus haut. □

Exercice 8.1.6 *Soit $\mathscr{F}L^1 = \{u \in \mathscr{S}' \,/\, \widehat{u} \in L^1\}$. Démontrez que, pour tout réel positif s, le produit est une application bilinéaire continue de $\mathscr{F}L^1 \cap H^s \times \mathscr{F}L^1 \cap H^s$. Qu'en déduire lorsque s est strictement supérieur à $d/2$?*

Exercice 8.1.7 *Soit s un réel strictement supérieur à $1/2$. Démontrez que l'application restriction γ définie par*

$$\begin{aligned} \gamma\colon \mathscr{D}(\mathbb{R}^d) &\longrightarrow \mathscr{D}(\mathbb{R}^{d-1}) \\ \varphi \quad &\longmapsto \gamma(\varphi) : (x_2,\cdots,x_d) \mapsto \varphi(0,x_2,\cdots,x_d) \end{aligned}$$

se prolonge en une application continue de $H^s(\mathbb{R}^d)$ dans $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})$.
Indication : *On écrira que*

$$\mathscr{F}_{\mathbb{R}^{d-1}}\varphi(0,\xi_2,\cdots,\xi_d) = (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_d)\,d\xi_1.$$

Nous allons maintenant démontrer un théorème qui décrit le dual de l'espace H^s.

Théorème 8.1.2 *La forme bilinéaire B définie par*

$$
\begin{aligned}
B\colon \mathscr{S} \times \mathscr{S} &\to \mathbb{K}\\
(u,\varphi) &\mapsto \int_{\mathbb{R}^d} u(x)\varphi(x)\,dx
\end{aligned}
$$

se prolonge en une forme bilinéaire continue de $H^{-s}\times H^s$ dans $\mathbb{K}$. De plus, l'application $\delta_B\colon H^{-s}\to (H^s)'$ qui lui est associée est un isomorphisme linéaire isométrique (à une constante près), c'est-à-dire que la forme bilinéaire B identifie l'espace H^{-s} au dual de H^s.

Démonstration. Le point important de la démonstration de ce théorème est lié à la formule d'inversion de Fourier. Le lemme 7.2.1 page 186 et la formule d'inversion de Fourier assure que l'on a, pour tout couple (u,φ) de fonctions de $\mathscr{S}$,

$$
\begin{aligned}
B(u,\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^d} u(x)\varphi(x)\,dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} u(x)\mathscr{F}(\mathscr{F}^{-1}\varphi)(x)\,dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{u}(\xi)(\mathscr{F}^{-1}\varphi)(\xi)\,d\xi\\
&= (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{u}(\xi)\widehat{\varphi}(-\xi)\,d\xi. \qquad (8.3)
\end{aligned}
$$

On en déduit donc immédiatement en multipliant et en divisant par $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}$ et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$|B(u,\varphi)| \leq (2\pi)^{-d}\|u\|_{H^s}\|\varphi\|_{H^{-s}},$$

d'où le premier point du théorème. Le fait que l'application δ_B soit injective résulte du fait que, si, pour toute fonction $\varphi\in\mathscr{S}$, on a $B(u,\varphi)=0$, alors u est l'élément nul de $\mathscr{S}'$. Reste à démontrer qu'elle est surjective. En fait, nous allons démontrer directement que δ_B est un isomorphisme.

Pour tout réel σ, la transformation de Fourier est par construction un isomorphisme isométrique de H^σ sur $L^2_\sigma = L^2(\mathbb{R}^d,(1+|\xi|^2)^\sigma d\xi)$. Considérons maintenant la forme bilinéaire $\check{B}$ définie par

$$
\begin{aligned}
\check{B}\colon L^2_{-s}\times L^2_s &\to \mathbb{K}\\
(\varphi,u) &\mapsto (2\pi)^{-d}\textstyle\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{u}(\xi)\widehat{\varphi}(-\xi)\,d\xi.
\end{aligned}
$$

Si nous démontrons que

$$\delta_B = {}^t\mathscr{F}\,\delta_{\check{B}}\mathscr{F}, \qquad (8.4)$$

alors le théorème 8.1.2 est démontré. En effet, comme on sait que $\mathscr{F}$ est un isomorphisme de H^s sur L^2_s, d'après la proposition 3.4.2 page 92, l'application linéaire ${}^t\mathscr{F}$ est un isomorphisme de $(L^2_s)'$ sur $(H^s)'$. D'après le corollaire 4.3.3 page 104, on sait déjà que $\delta_{\check{B}}$ est un isomorphisme de $(L^2_s)'$ sur L^2_{-s}.

Pour démontrer la formule (8.4), écrivons que

$$\begin{aligned}\langle {}^t\mathscr{F}\delta_{\check{B}}\mathscr{F}u,\varphi\rangle &= \langle \mathscr{F}\delta_{\check{B}}\mathscr{F}u,\mathscr{F}\varphi\rangle\\ &= \delta_{\check{B}}(\mathscr{F}u,\mathscr{F}\varphi)\end{aligned}$$

D'après la formule (8.3), on a

$$\langle {}^t\mathscr{F}\delta_{\check{B}}\mathscr{F}u,\varphi\rangle = \langle \delta_B(u),\varphi\rangle,$$

d'où le théorème. □

8.2 Injections de Sobolev

Le but de cette section est d'étudier les propriétés d'inclusion des espaces $H^s(\mathbb{R}^d)$ dans les espaces $L^p(\mathbb{R}^d)$. Nous allons démontrer le théorème suivant.

Théorème 8.2.1 *Si $s > d/2$, alors l'espace H^s est s'injecte continûment dans l'espace des fonctions continues nulles à l'infini. Si $0 \leq s < d/2$, alors l'espace H^s s'injecte continûment dans L^{s^*} où $s^* = \frac{2d}{d-2s}$.*

Démonstration. Rappelons que l'on dit qu'un espace E s'injecte continûment dans un espace F si $E \subset F$ (algébriquement, ou parfois à un isomorphisme près) et que l'injection de E dans F est continue, c'est-à-dire qu'il existe une constante C telle que pour tout $u \in E$, $\|u\|_F \leq C\|u\|_E$.

Le premier point du théorème est très facile à démontrer. Écrivons pour tout u dans H^s,

$$|\widehat{u}(\xi)| = (1+|\xi|^2)^{-s/2}(1+|\xi|^2)^{s/2}|\widehat{u}(\xi)|. \tag{8.5}$$

Le fait que $s > d/2$ implique que la fonction

$$\xi \mapsto (1+|\xi|^2)^{-s/2}$$

appartient à L^2. Donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit que

$$\|\widehat{u}\|_{L^1} \leq \Big(\int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi|^2)^{-s}d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}\|u\|_{H^s}.$$

Or on sait que si $\widehat{u}$ est dans L^1, alors u est une fonction continue qui tend vers zéro à l'infini avec

$$\|u\|_{L^\infty} \leq (2\pi)^{-d}\|\widehat{u}\|_{L^1}, \tag{8.6}$$

d'où le premier point.

La démonstration du second point est plus délicate et est présentée ici à titre culturel. Les constantes C qui apparaissent sont génériques, et peuvent varier d'une ligne à l'autre.

On utilise alors le résultat de l'exercice 5.1.1 page 133 que nous rappelons. Pour tout p dans l'intervalle $]1,+\infty[$, on a, pour toute fonction mesurable f,

$$\|f\|_{L^p}^p = p\int_0^\infty \lambda^{p-1} m(|f| > \lambda)d\lambda,$$

égalité valable que les deux membres soient finis ou infinis.

Nous allons décomposer u de manière à faire apparaître des normes de type L^2. Pour ce faire, découpons u en « basses » et « hautes » fréquences en posant

$$u = u_{1,A} + u_{2,A} \quad \text{avec} \quad u_{1,A} = \mathscr{F}^{-1}(\mathbf{1}_{B(0,A)}\widehat{u}) \quad \text{et} \quad u_{2,A} = \mathscr{F}^{-1}(\mathbf{1}_{B^c(0,A)}\widehat{u}). \tag{8.7}$$

Comme la fonction $\mathbf{1}_{B(0,A)}\widehat{u}$ est L^2 et à support compact, elle est dans L^1, donc $u_{1,A}$ est bornée par transformation de Fourier inverse. Plus précisément,

$$\begin{aligned}
\|u_{1,A}\|_{L^\infty} &\leq (2\pi)^{-d}\|\widehat{u_{1,A}}\|_{L^1} \\
&= (2\pi)^{-d}\int_{B(0,A)} |\xi|^{-s}|\xi|^s|\widehat{u}(\xi)|\,d\xi \\
&\leq (2\pi)^{-d}\Big(\int_{B(0,A)} |\xi|^{-2s}d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}\|u\|_{H^s} \\
&= CA^{\frac{d}{2}-s}\|u\|_{H^s}.
\end{aligned} \tag{8.8}$$

Or, d'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\{|u| > \lambda\} \subset \{2|u_{1,A}| > \lambda\} \cup \{2|u_{2,A}| > \lambda\},$$

donc $m(|u| > \lambda) \leq m(2|u_{1,A}| > \lambda) + m(2|u_{2,A}| > \lambda)$. D'après l'inégalité (8.8) ci-dessus, si l'on pose

$$A_\lambda = \Big(\frac{\lambda}{2C\|u\|_{H^s}}\Big)^{\frac{2}{d-2s}} = \Big(\frac{\lambda}{2C\|u\|_{H^s}}\Big)^{\frac{s^*}{d}}$$

alors

$$m\Big(|u_{1,A_\lambda}| > \frac{\lambda}{2}\Big) = 0.$$

On en déduit donc que

$$\|u\|_{L^{s^*}}^{s^*} \leq s^* \int_0^\infty \lambda^{s^*-1} m(2|u_{2,A_\lambda}| > \lambda)\, d\lambda.$$

Il est bien connu (c'est l'inégalité de Bienaimé-Tchebychev) que

$$\begin{aligned} m\big(2|u_{2,A_\lambda}| > \lambda\big) &= \int_{\{2|u_{2,A_\lambda}|>\lambda\}} dx \\ &\leq \int_{\{2|u_{2,A_\lambda}|>\lambda\}} \frac{4|u_{2,A_\lambda}(x)|^2}{\lambda^2}\, dx \\ &= 4\frac{\|u_{2,A_\lambda}\|_{L^2}^2}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Il en résulte donc que l'on a

$$\|u\|_{L^{s^*}}^{s^*} \leq C \int_0^\infty \lambda^{s^*-3} \|u_{2,A_\lambda}\|_{L^2}^2\, d\lambda. \tag{8.9}$$

La transformation de Fourier est (à une constante près) une isométrie de L^2. On a donc

$$\|u_{2,A_\lambda}\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-d} \int_{\{|\xi| \geq A_\lambda\}} |\widehat{u}(\xi)|^2\, d\xi.$$

D'après l'inégalité (8.9), il vient

$$\|u\|_{L^{s^*}}^{s^*} \leq C \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} \lambda^{s^*-3} \mathbf{1}_{\{(\lambda,\xi)/\ |\xi| \geq A_\lambda\}}(\lambda,\xi) |\widehat{u}(\xi)|^2\, d\xi d\lambda.$$

Or, par définition de A_λ, on a

$$|\xi| \geq A_\lambda \Leftrightarrow \lambda \leq C(\xi) \stackrel{\text{déf}}{=} 2C\|u\|_{H^s} |\xi|^{\frac{d}{s^*}}.$$

D'après le théorème de Fubini, on a donc

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{s^*}}^{s^*} &\leq C \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^{C(\xi)} \lambda^{s^*-3}\, d\lambda \right) |\widehat{u}(\xi)|^2\, d\xi \\ &\leq C\|u\|_{H^s}^{s^*-2} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{\frac{d(s^*-2)}{s^*}} |\widehat{u}(\xi)|^2\, d\xi \leq C\|u\|_{H^s}^{s^*}, \end{aligned}$$

car $\frac{d(s^*-2)}{s^*} = 2s$. □

Remarques. Une façon de deviner (ou de se rappeler) l'exposant de Sobolev

$$s^* = \frac{2d}{d-2s}$$

est l'utilisation d'un argument d'homogénéité. En effet, soit v une fonction sur $\mathbb{R}^d$, désignons par v_λ la fonction $v_\lambda(x) = v(\lambda x)$. On a

$$\|v_\lambda\|_{L^{s^*}} = \lambda^{-\frac{d}{s^*}} \|v\|_{L^{s^*}}.$$

De plus, d'après la proposition 7.1.2, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} |\widehat{v_\lambda}(\xi)|^2 d\xi &= \lambda^{-2d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} |\widehat{v}(\lambda^{-1}\xi)|^2 d\xi \\ &= \lambda^{-d+2s} \|v\|^2_{\dot{H}^s}, \end{aligned}$$

en posant

$$\|v\|^2_{\dot{H}^s} \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} |\widehat{v}(\xi)|^2 d\xi.$$

Si l'on a une inégalité d'injection continue, les deux quantités $\|\cdot\|^2_{L^p}$ et $\|\cdot\|^2_{\dot{H}^s}$ doivent être comparables pour tout λ. On en déduit que l'on doit avoir $-\frac{2d}{s^*} = -d+2s$. L'exposant s^* est donc le seul pour lequel une telle injection peut avoir lieu. Ceci ne montre évidemment pas qu'elle a bien lieu.

Notons que l'on a $2 \leq \frac{2d}{d-2s} \leq +\infty$, la borne inférieure étant atteinte pour $s = 0$. L'injection de Sobolev permet donc de gagner de l'intégrabilité dès que l'indice de dérivation s est strictement positif.

8.3 Les espaces $H^m(\Omega)$, $H^m_0(\Omega)$ et $H^{-m}(\Omega)$

Dans cette section, on étudie quelques espaces de Sobolev sur des ouverts quelconques de $\mathbb{R}^d$. Dans ce contexte, la transformation de Fourier est moins opérante. On se restreint aux espaces de Sobolev d'indice entier, étant entendu qu'il est possible de définir aussi dans ce cas des espaces de Sobolev d'indice réel quelconque.

Définition 8.3.1 *Soient m un entier naturel et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. L'espace $H^m(\Omega)$ est l'espace des fonctions de $L^2(\Omega)$ dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre m sont dans $L^2(\Omega)$, muni de la norme*

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \Big)^{1/2}.$$

L'espace $H_0^m(\Omega)$ est l'adhérence au sens de la norme $H^m(\Omega)$ de $\mathscr{D}(\Omega)$, muni de cette norme. L'espace $H^{-m}(\Omega)$ est l'ensemble des distributions u sur Ω telles que

$$\|u\|_{H^{-m}(\Omega)} \stackrel{déf}{=} \sup_{\substack{\|\varphi\|_{H^m(\Omega)}\leq 1\\ \varphi\in\mathscr{D}(\Omega)}} |\langle u,\varphi\rangle| < \infty.$$

Proposition 8.3.1 *L'espace $H^m(\Omega)$ muni de sa norme est un espace de Hilbert.*

La démonstration est un exercice facile laissé au lecteur. L'espace $H^{-m}(\Omega)$ s'identifie naturellement au dual de $H_0^m(\Omega)$ grâce au théorème suivant.

Théorème 8.3.1 *L'application bilinéaire définie par*

$$\begin{aligned} B\colon H^{-m}(\Omega)\times\mathscr{D}(\Omega) &\to \mathbb{K}\\ (u,\varphi) &\mapsto \langle u,\varphi\rangle \end{aligned}$$

se prolonge en une application bilinéaire continue de $H^{-m}(\Omega)\times H_0^m(\Omega)$ dans $\mathbb{K}$, toujours notée B. De plus, l'application $\delta_B\colon H^{-m}(\Omega)\to(H_0^m(\Omega))'$ qui lui est associée est un isomorphisme linéaire isométrique, c'est-à-dire que la forme bilinéaire B identifie l'espace $H^{-m}(\Omega)$ au dual de $H_0^m(\Omega)$.

Démonstration. Le fait que l'application bilinéaire B se prolonge n'est rien d'autre que la traduction dans la présente situation du théorème de prolongement 2.2.2. Soit ℓ une forme linéaire continue sur $H_0^m(\Omega)$. Sa restriction à $\mathscr{D}(\Omega)$ est une distribution u sur Ω telle que

$$\forall\,\varphi\in\mathscr{D}(\Omega),\ \langle u,\varphi\rangle = \langle \ell,\varphi\rangle$$

d'où le théorème par définition de la norme sur $(H_0^m(\Omega))'$. □

Donnons quelques propriétés des espaces d'indice négatif. On introduit d'abord trois applications :

– Le prolongement par 0 en dehors de Ω, qui réalise une injection isométrique de $H_0^m(\Omega)$ dans $H^m(\mathbb{R}^d)$. En effet, cette propriété est trivialement vraie sur $\mathscr{D}(\Omega)$, donc elle le reste par densité. L'espace $H_0^m(\Omega)$ peut donc être considéré comme un sous-espace vectoriel fermé de $H^m(\mathbb{R}^d)$. Notons $H_0^m(\Omega)^\perp$ son orthogonal.

– L'application linéaire pr de $H^{-m}(\Omega)$ dans $H^{-m}(\mathbb{R}^d) = H^m(\mathbb{R}^d)'$ par

$$\langle pr(u), f\rangle = \langle u, f_0\rangle, \tag{8.10}$$

où l'on a décomposé $H^m(\mathbb{R}^d)$ en somme orthogonale : $f = f_0 + f_\perp$ avec $f\in H_0^m(\Omega)$ et $f_\perp\in H_0^m(\Omega)^\perp$

– Enfin, on note r est la restriction des distributions de $\mathbb{R}^d$ sur Ω.

Nous allons démontrer le petit lemme suivant.

Lemme 8.3.1 *L'application pr est une application linéaire isométrique de $H^{-m}(\Omega)$ dans $H^{-m}(\mathbb{R}^d)$ et l'application r est une application linéaire continue de $H^{-m}(\mathbb{R}^d)$ dans $H^{-m}(\Omega)$. De plus, on a*

$$r \circ pr = \mathrm{Id}_{H^{-m}(\Omega)}\,.$$

Démonstration. D'après le théorème 8.1.2, on sait que

$$\|pr(u)\|_{H^{-m}(\mathbb{R}^d)} = \sup_{\|\varphi\|_{H^m(\mathbb{R}^d)}\leq 1} |\langle pr(u), \varphi\rangle|.$$

La projection orthogonale sur un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert étant une application linéaire de norme 1, on peut écrire, vu la définition de pr,

$$\begin{aligned}
\|pr(u)\|_{H^{-m}(\mathbb{R}^d)} &= \sup_{\|\varphi\|_{H^m(\mathbb{R}^d)}\leq 1} |\langle pr(u), \varphi\rangle| \\
&= \sup_{\|\varphi\|_{H^m(\Omega)}\leq 1} |\langle u, \varphi\rangle| \\
&= \|u\|_{H^{-m}(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{8.11}$$

Par ailleurs, on a, pour toute distribution v de $H^{-m}(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{\|\varphi\|_{H^m(\Omega)}\leq 1\\ \varphi\in\mathscr{D}(\Omega)}} |\langle r(v), \varphi\rangle| &= \sup_{\substack{\|\varphi\|_{H^m(\Omega)}\leq 1\\ \varphi\in\mathscr{D}(\Omega)}} |\langle v, \varphi\rangle| \\
&\leq \sup_{\substack{\|\varphi\|_{H^m(\mathbb{R}^d)}\leq 1\\ \varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)}} |\langle v, \varphi\rangle| \\
&= \|v\|_{H^{-m}(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

On voit donc que $r(v) \in H^{-m}(\Omega)$ et que l'application r est continue de $H^{-m}(\mathbb{R}^d)$ dans $H^{-m}(\Omega)$.

Enfin, il est clair que l'on a, pour toute fonction $f \in H_0^m(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\langle r \circ pr(u), f\rangle &= \langle pr(u), f\rangle \\
&= \langle u, f\rangle,
\end{aligned}$$

d'où le lemme. □

Théorème 8.3.2 i) *L'espace $H^{-m}(\Omega)$ est l'ensemble des restrictions à Ω des éléments de $H^{-m}(\mathbb{R}^d)$,*

ii) *La norme $\|\cdot\|_{H^{-m}(\Omega)}$ définie ci-dessus est une norme hilbertienne.*

iii) *L'espace $\mathscr{D}(\Omega)$ est dense dans l'espace $H^{-m}(\Omega)$.*

Démonstration. Le premier point est clairement assuré par le lemme. Quant au deuxième point, il suffit de remarquer que $H^{-m}(\Omega)$ est isométrique au dual de l'espace de Hilbert $H_0^m(\Omega)$.

Démontrons maintenant que $\mathscr{D}(\Omega)$ est dense dans $H^{-m}(\Omega)$. Pour ce faire, considérons une distribution u dans $H^{-m}(\Omega)$. Le théorème 8.1.1 dit en particulier que $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^{-m}(\mathbb{R}^d)$. Il existe donc une suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n = pr(u) \quad \text{dans} \quad H^{-m}(\mathbb{R}^d).$$

D'après le lemme précédent, ceci implique que

$$\lim_{n\to\infty} r(\psi_n) = u \quad \text{dans} \quad H^{-m}(\Omega).$$

Mais, la restriction à Ω d'une fonction de $L^2(\mathbb{R}^d)$ étant une fonction de $L^2(\Omega)$, et $\mathscr{D}(\Omega)$ étant dense dans $L^2(\Omega)$, il existe une suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{D}(\Omega)$ telle que, pour tout entier n, on ait

$$\|r(\psi_n) - \varphi_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Comme la norme $L^2(\Omega)$ est plus grande que la norme $H^{-m}(\Omega)$, il est clair que $\varphi_n \to u$ au sens de la norme de $H^{-m}(\Omega)$. □

Montrons maintenant l'inégalité de Poincaré, qui est un résultat très important.

Théorème 8.3.3 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ borné dans une direction. Il existe une constante C telle que*

$$\forall u \in H_0^1(\Omega),\ \|u\|_{L^2} \leq C\Big(\sum_{j=1}^{d} \|\partial_j u\|_{L^2}^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. Supposons d'abord que Ω soit borné dans la direction x_1. Soit R un réel strictement positif tel que Ω soit inclus dans $]-R,R[\times\mathbb{R}^{d-1}$. On a alors, pour toute fonction-test φ,

$$\varphi(x_1,\cdots,x_d) = \int_{-R}^{x_1} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(s,x_2,\cdots,x_d)\,ds.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que pour tout $x\in\Omega$,

$$|\varphi(x_1,\cdots,x_d)|^2 \leq 2R\int_{-R}^{R}\Big|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(s,x_2,\cdots,x_d)\Big|^2 ds.$$

En intégrant cette inégalité sur Ω, il vient

$$\int_\Omega |\varphi(x_1,\cdots,x_d)|^2\,dx \leq 2R\int_\Omega\int_{-R}^{R}\Big|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(s,x_2,\cdots,x_d)\Big|^2\,dsdx = 4R^2\Big\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\Big\|^2_{L^2(\Omega)},$$

par Fubini. Comme $\mathscr{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, le théorème est démontré dans le cas où l'ouvert est borné dans la direction x_1. Le cas général s'en déduit par rotation. □

L'inégalité de Poincaré implique de manière évidente le corollaire suivant.

Corollaire 8.3.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ borné dans une direction. L'application*

$$u \mapsto \Big(\sum_{|\alpha|=m}\|\partial^\alpha u\|^2_{L^2}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme hilbertienne sur $H_0^m(\Omega)$ équivalente à la norme de $H^m(\Omega)$.

Dans le cas d'un ouvert borné dans une direction, on a donc le choix d'utiliser la norme H^m entière ou bien la semi-norme ci-dessus, et il en va de même pour calculer les normes duales sur H^{-m}.

Pour conclure ce chapitre sur les espaces de Sobolev, nous allons énoncer et admettre le théorème de Rellich, un résultat de compacité très important.

Théorème 8.3.4 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ avec $d \geq 2$. Si p est un réel strictement inférieur à*

$$2^* = \frac{2d}{d-2},$$

alors l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ est compacte.

Dans la pratique, on utilise souvent le corollaire suivant.

Corollaire 8.3.2 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de fonctions de $H_0^1(\Omega)$, il existe une sous-suite n_l et une fonction u de $H_0^1(\Omega)$ telles que*

$$\forall\, 1 \leq p < 2^*,\ \lim_{l\to\infty}\|u_{n_l} - u\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$