Chapitre 26

Étude métrique des courbes planes

Objectifs

- Calculs de longueur de courbes.
- Notion d'abscisse curviligne.
- Rayon de courbure et de centre de courbure.

Sommaire

I) Longueur d'une courbe 1
1) Définition 1
2) Calcul de la longueur d'une courbe 2
3) Abscisse curviligne 3
II) Repère de Frenet, courbure 4
1) Définitions 4
2) Calcul d'un rayon de courbure 5
3) Calcul d'un centre de courbure 5
III) Exercices 6

$\mathscr{P}$ désigne un plan affine muni d'un repère orthonormal direct $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

I) Longueur d'une courbe

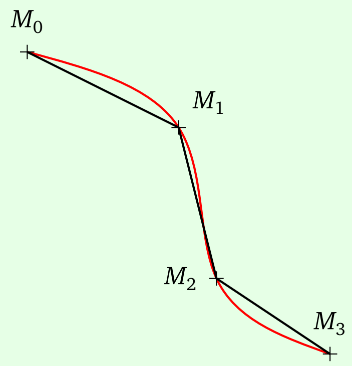
1) Définition

Soit $C = ([a;b], f, \Gamma)$ une courbe de classe $\mathscr{C}^k$ avec $k \geqslant 1$. On note S l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $[a;b]$. Soit $\sigma = (t_0, \ldots, t_n) \in S$, on pose pour $i \in [\![0..n]\!]$, $M_i = M(t_i)$.

DÉFINITION 26.1

Soit $C = ([a;b], f, \Gamma)$ une courbe de classe $\mathscr{C}^k$ avec $k \geqslant 1$. La longueur de la ligne polygonale : $M_0M_1 \ldots M_n$ est le réel :

$$L_\sigma(C) = \sum_{i=0}^{n-1} \|\overrightarrow{M_iM_{i+1}}\| = \sum_{i=0}^{n-1} \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\|.$$



Remarque: Il découle de l'inégalité triangulaire que si $\sigma' \in S$ est plus fine que $\sigma \in S$, alors $L_\sigma(C) \leqslant L_{\sigma'}(C)$.

DÉFINITION 26.2

Lorsque l'ensemble $\{L_\sigma(C) \,/\, \sigma \in S\}$ est majoré dans $\mathbb{R}$, on dit que la courbe C est ***rectifiable****, et on appelle longueur de la courbe le réel noté $L_{[a;b]}(C)$ défini par $L_{[a;b]}(C) = \sup\limits_{\sigma\in S} L_\sigma(C)$. Sinon, on dit que C est de longueur infinie.*

Exemple: Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points distincts, le segment $[A, B]$ peut être paramétré par :

$$\begin{cases} x(t) &= tx_A + 1(-t)x_B \\ y(t) &= ty_A + (1-t)y_B \end{cases}$$

avec $t \in [0;1]$, pour toute subdivision σ de $[0;1]$, il est facile de voir que $L_\sigma(C) = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$, la courbe est donc rectifiable et de longueur AB.

THÉORÈME 26.1

Si $C = ([a;b], f, \Gamma)$ est de classe $\mathscr{C}^1$, alors elle est rectifiable et on a l'encadrement :

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant L_{[a;b]}(C) \leqslant \int_a^b \|f'(t)\|\, dt.$$

Preuve: Soit $\sigma = (t_0, \ldots, t_n) \in S$, $i \in [\![0..n-1]\!]$, $\|f(t_{i+1}) - f(t_i)\| = \|\int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(u)\, du \leqslant \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(u)\|\, du$, l'inégalité de droite en découle, et celle-ci entraîne que C est rectifiable. Quant à l'inégalité de gauche, on l'obtient en considérant la subdivision $\sigma = (a, b)$. □

2) Calcul de la longueur d'une courbe

THÉORÈME 26.2

Si $C = ([a;b], f, \Gamma)$ est de classe $\mathscr{C}^1$, alors : $L_{[a,b]}(C) = \int_a^b \|f'(u)\|\, du$.

Preuve: Soit $S : [a;b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $S(t) = L_{[a;t]}(C)$, il est facile de vérifier que S est une fonction croissante, que si $h > 0$, alors $S(t+h) = S(t) + L_{[t,t+h]}(C)$, et que si $h < 0$, alors $S(t+h) = S(t) - L_{[t+h;t]}(C)$.

Supposons $h > 0$, alors $\|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\| \leqslant \frac{S(t+h)-S(t)}{h} \leqslant \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|f'(u)\|\, du$. En faisant tendre h vers 0^+, le théorème des gendarmes s'applique et donne $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{S(t+h)-S(t)}{h} = \|f'(t)\|$, donc la fonction S est dérivable à droite en t et $S'_d(t) = \|f'(t)\|$.

Supposons $h < 0$, alors $\|\frac{f(t)-f(t+h)}{-h}\| \leqslant \frac{S(t)-S(t+h)}{-h} \leqslant \frac{1}{-h}\int_{t+h}^t \|f'(u)\|\, du = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|f'(u)\|\, du$. En faisant tendre h vers 0^-, le théorème des gendarmes s'applique et donne $\lim\limits_{h\to 0^-} \frac{S(t+h)-S(t)}{h} = \|f'(t)\|$, donc la fonction S est dérivable à gauche en t et $S'_g(t) = \|f'(t)\|$.

Par conséquent la fonction S est dérivable sur $[a;b]$ et $S'(t) = \|f'(t)\|$, or $L_{[a;b]}(C) = S(b) = S(b) - S(a) = \int_a^b \|f'(t)\|\, dt$. □

Applications:

– Pour une courbe paramétrée par $x(t)$ et $y(t)$ sur $[a;b]$: $L_{[a;b]}(C) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$.

– Pour une courbe polaire paramétrée par $\rho(t)$ sur $[a;b]$, le vecteur vitesse étant $\rho'(t)\overrightarrow{u}(t) + \rho(t)\overrightarrow{v}(t)$, on a : $L_{[a;b]}(C) = \int_a^b \sqrt{\rho(t)^2 + \rho'(t)^2}\, dt$.

– Pour une courbe cartésienne d'équation $y = f(x)$ sur l'intervalle $[a;b]$, on peut prendre le paramétrage : $x(t) = t$ et $y(t) = f(t)$, ce qui donne : $L_{[a;b]}(C) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt$.

Exemples:

– Le périmètre du cercle de centre O et de rayon $R>0$: on peut prendre le paramétrage polaire $\rho(t)=R$ avec $t\in[0;2\pi]$, ce qui donne : $\int_0^{2\pi}\sqrt{R^2}\,dt=2\pi R$.
– Longueur d'une arche de cycloïde : on a le paramétrage $x(t)=R(t-\sin(t))$ et $y(t)=R(1-\cos(t))$ avec $t\in[0;2\pi]$, ce qui donne : $\int_0^{2\pi}R\sqrt{2-2\cos(t)}\,dt=2R\int_0^{2\pi}\sin(\frac{t}{2})\,dt=8R$.

DÉFINITION 26.3

*Soit $C=(I,f,\Gamma)$ une courbe de classe $\mathscr{C}^k$ ($k\geqslant1$), soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $\theta:J\to I$ une **bijection de classe $\mathscr{C}^k$ telle que θ' ne s'annule pas**, alors on a $C=(J,f\circ\theta,\Gamma)$, donc $(J,f\circ\theta)$ est un autre paramétrage de C, on dit que ce paramétrage est **admissible**.*

THÉORÈME 26.3

La notion de longueur de courbe est une notion géométrique, c'est à dire indépendante du paramétrage admissible choisi.

Preuve: Soit $C=([a;b],f,\Gamma)$ une courbe $\mathscr{C}^1$, soit $\theta:J\to I=[a;b]$ un changement admissible de paramétrage (*i.e.* θ est une bijection de même classe que f et θ' ne s'annule pas), en considérant les cas $\theta'>0$ et $\theta'<0$, il est facile de voir que $\int_J\|\theta'(u)f'\circ\theta(u)\|\,du=\int_I\|f'(t)\|\,dt$, en effectuant le changement de variable $t=\theta(u)$. □

3) Abscisse curviligne

Soit $C=(I,f,\Gamma)$ une courbe de classe $\mathscr{C}^1$, soit $t_0\in I$, l'application $S:I\to\mathbb{R}$ définie par $S(t)=\int_{t_0}^t\|f'(u)\|\,du$ est appelée **abscisse curviligne d'origine t_0 sur la courbe C orientée dans le sens des t croissants**, lorsque $t>t_0$, $S(t)$ représente la longueur de la courbe de $M(t_0)$ à $M(t)$, lorsque $t<t_0$, $S(t)$ est l'opposé de la longueur de la courbe de $M(t)$ à $M(t_0)$, on remarquera qu'il n'y a pas qu'une abscisse curviligne (choix de l'origine).

Exemple: Sur un cercle de centre O et de rayon $R>0$, paramétré par $\rho(t)=R$, l'abscisse curviligne d'origine 0 est la fonction $S:t\mapsto\int_0^t R\,du=Rt$.

Si la courbe $C=(I,f,\Gamma)$ est **régulière** (*i.e.* $\forall\ t\in I, f'(t)\neq0$), soit S l'abscisse curviligne d'origine $t_0\in I$, alors $\forall\ t\in I, S'(t)=\|f'(t)\|>0$, donc la fonction S induit une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de I sur $J=S<I>$, par conséquent $(J,\varphi=f\circ S^{-1})$ est un paramétrage admissible de C.

DÉFINITION 26.4

*Le paramétrage admissible $(J,\varphi=f\circ S^{-1})$ est appelé **paramétrage normal de C**.*

Soit $s\in J$, on pose $t=S^{-1}(s)$, pour le paramétrage normal, le vecteur vitesse est :

$$\frac{d\varphi}{ds}(s)=[S^{-1}]'(s)\times f'(S^{-1}(s))=\frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}.$$

On voit donc que le vecteur vitesse est **unitaire**, on pose par définition :

$$\frac{d\varphi}{ds}(s)=\frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}=\overrightarrow{T}(s)\ \text{ c'est le vecteur unitaire tangent, avec } t=S^{-1}(s).$$

Exemple: En reprenant l'exemple ci-dessus du cercle, on a $S:[0;2\pi]\to[0;2\pi R]$ définie par $S(t)=Rt$, d'où $S^{-1}:[0;2\pi R]\to[0;2\pi]$ est définie par $S^{-1}(s)=\frac{s}{R}$, donc $\varphi(s)=R\cos(\frac{s}{R})\overrightarrow{\imath}+R\sin(\frac{s}{R})\overrightarrow{\jmath}$ d'affixe $Re^{i\frac{s}{R}}$, et $\overrightarrow{T}(s)=\frac{d\varphi}{ds}(s)=-\sin(\frac{s}{R})\overrightarrow{\imath}+\cos(\frac{s}{R})\overrightarrow{\jmath}$ d'affixe $ie^{i\frac{s}{R}}$.

II) Repère de Frenet, courbure

1) Définitions

Soit $C=(I,f,\Gamma)$ une courbe régulière de classe $\mathscr{C}^k$ avec $k\geqslant 2$.

DÉFINITION 26.5

Soit M le point de paramètre $t\in I$, on appelle ***repère de Frenet***[1] ***au point*** *M, le repère $(M,\overrightarrow{T},\overrightarrow{N})$ où $\overrightarrow{T}$ est le vecteur unitaire tangent au point M, et $\overrightarrow{N}$ le vecteur normal au point M, celui-ci se déduit de $\overrightarrow{T}$ par la rotation vectorielle d'angle $\pi/2$.*

Soit $S:I\to J$ une abscisse curviligne sur C, et $(J,\varphi=f\circ S^{-1})$ le paramétrage normal, on a pour $s\in J, (\overrightarrow{T}(s)|\overrightarrow{T}(s))=1$, d'où en dérivant, $(\overrightarrow{T}(s)|\frac{d\overrightarrow{T}}{ds}(s))=0$, ce qui prouve que $\frac{d\overrightarrow{T}}{ds}(s)$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{N}(s)$, il existe donc un scalaire $c(s)$ tel que $\frac{d\overrightarrow{T}}{ds}(s)=c(s)\overrightarrow{N}(s)$.

DÉFINITION 26.6

Le scalaire $c(s)$ est appelé ***courbure algébrique au point*** *$M(t)$ (avec $t=S^{-1}(s)$). On a alors la relation $\frac{d\overrightarrow{T}}{ds}(s)=c(s)\overrightarrow{N}(s)$, c'est la* ***première formule de Frenet****.*

Puisque $\overrightarrow{T}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ de J vers $\mathbb{U}$, d'après le théorème de relèvement, il existe une fonction $\theta:J\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ telle que $\forall\ s\in J, \overrightarrow{T}(s)=\cos(\theta(s))\overrightarrow{\imath}+\sin(\theta(s))\overrightarrow{\jmath}$, on a alors $\theta(s)=(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{T}(s))$, c'est le **paramètre angulaire**. Si on dérive par rapport à s, on obtient alors : $\frac{d\overrightarrow{T}}{ds}(s)=\frac{d\theta}{ds}[-\sin(\theta)\overrightarrow{\imath}+\cos(\theta)\overrightarrow{\jmath}]=\frac{d\theta}{ds}\overrightarrow{N}(s)$. Par conséquent, on a la relation : $\boxed{c(s)=\dfrac{d\theta}{ds}}$.

De même, $\frac{d\overrightarrow{N}}{ds}(s)=-\frac{d\theta}{ds}\overrightarrow{T}(s)$, c'est à dire : $\boxed{\dfrac{d\overrightarrow{N}}{ds}(s)=-c(s)\overrightarrow{T}(s)}$ c'est la deuxième formule de *Frenet*.

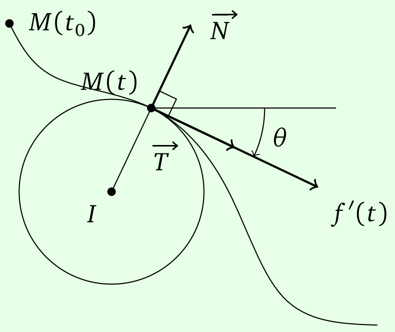
THÉORÈME 26.4

En un point birégulier, la courbure algébrique est non nulle.

Preuve: Avec le paramétrage normal, dire que $M(t)$ est birégulier revient à dire que $(\overrightarrow{T}(s),c(s)\overrightarrow{N}(s))$ est une famille libre. Le déterminant de cette famille dans la base de *Frenet* vaut : $c(s)$, donc $c(s)\neq 0$. □

DÉFINITION 26.7

En un point birégulier $M(t)$, on appelle :
- *rayon de courbure algébrique : le réel $R(s)=\frac{1}{c(s)}$, où $t=S^{-1}(s)$.*
- *centre de courbure : le point $I(s)$ défini par la relation $\overrightarrow{M(t)I(s)}=R(s)\overrightarrow{N}(s)$.*
- *le cercle de courbure : le cercle de centre $I(s)$ et de rayon $|R(s)|$.*



1. *FRENET Frédéric Jean* (1816 – 1900) : mathématicien français spécialisé en géométrie différentielle.

Exemple: En reprenant l'exemple du cercle de centre O et de rayon $R > 0$, un paramétrage normal est $\varphi(s)$ d'affixe $Re^{i\frac{s}{R}}$, donc $\overrightarrow{T}(s)$ a pour affixe $ie^{i\frac{s}{R}} = e^{i(\frac{s}{R}+\pi/2)}$, on en déduit que $\theta(s) = \frac{s}{R} + \pi/2 \pmod{2\pi}$, et donc la courbure algébrique est $c(s) = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R}$, par conséquent le rayon de courbure est $R(s) = R$, le rayon du cercle. Le centre de courbure est défini par la relation $\overrightarrow{M(t)I(s)} = R\overrightarrow{N}(s)$ d'affixe $-Re^{i\frac{s}{R}}$ et donc $\overrightarrow{M(t)I(s)} = -\overrightarrow{OM(t)}$, d'où $I(s) = O$, le centre du cercle. On voit donc sur cet exemple que les définitions sont cohérentes.

Lien avec la cinématique : On pose $v = S'(t) = \|f'(t)\|$: c'est la vitesse algébrique. Le vecteur vitesse s'écrit alors : $f'(t) = v\overrightarrow{T}(s)$ $(s = S(t))$, en dérivant par rapport à t, on obtient le vecteur accélération : $f''(t) = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{T} + vS'(t)c(s)\overrightarrow{N}(s)$, c'est à dire : $f''(t) = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{T} + \frac{v^2}{R}\overrightarrow{N}$. La composante sur $\overrightarrow{N}$ est appelée **accélération normale**, et la composante sur $\overrightarrow{T}$ est appelée **accélération tangentielle**.

2) Calcul d'un rayon de courbure

- Méthode 1 : les bases $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ et la base de *Frenet* en un point de la courbe sont deux b.o.n.d, donc $\det_{(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})} = \det_{(\overrightarrow{T},\overrightarrow{N})}$, par conséquent le produit mixte entre le vecteur vitesse, $f'(t)$, et le vecteur accélération, $f''(t)$, est égal à : $x'y'' - x''y' = \frac{v^3}{R}$, on en déduit que :

$$\boxed{R = \frac{\|f'(t)\|^3}{[f'(t), f''(t)]} = \frac{\|f'(t)\|^3}{x'y'' - x''y'}.}$$

- Méthode 2 : On a $\overrightarrow{T} = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|} = \frac{dx}{ds}\overrightarrow{\imath} + \frac{dy}{ds}\overrightarrow{\jmath}$, on en déduit que $\cos(\theta) = \frac{dx}{ds} = \frac{x'(t)}{\|f'(t)\|}$, et $\sin(\theta) = \frac{dy}{ds} = \frac{y'(t)}{\|f'(t)\|}$. Lorsque $x'(t) \neq 0$, on a $\tan(\theta) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$, en dérivant par rapport à t, on obtient (en écrivant que $\theta(s) = \theta(S(t))$) : $v\frac{d\theta}{ds}[1 + \tan(\theta)^2] = \frac{x'y''-x''y'}{x'^2}$, d'où $c(s) = \frac{d\theta}{ds} = \frac{x'y''-x''y'}{\|f'(t)\|^3}$, en prenant l'inverse, on retrouve R. Lorsque $x'(t)$ est nul, on part de $\text{cotan}(\theta)$.

  Remarque: si les expressions de $\cos(\theta)$ ou $\sin(\theta)$ sont simples, on peut dans le meilleur des cas en déduire directement θ, sinon, on peut aussi calculer $\frac{d\theta}{ds}$ en dérivant l'une ou l'autre de ces expressions.

3) Calcul d'un centre de courbure

Le centre de courbure $I(s)$, est défini par la relation $\overrightarrow{M(t)I(s)} = R\overrightarrow{N}(s)$, d'où $x_I = x - R\sin(\theta) = x - R\frac{y'}{\|f'(t)\|}$, et $y_I = y + R\cos(\theta) = y + R\frac{x'}{\|f'(t)\|}$, ce qui donne :

$$\boxed{x_I = x(t) - \frac{y'(t)\|f'(t)\|^2}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)} \text{ et } y_I = y(t) + \frac{x'(t)\|f'(t)\|^2}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}.}$$

Remarque: En un point $M(t)$ birégulier le centre de courbure I est déterminé par le système d'équations :

$$\begin{cases} (\overrightarrow{MI} \mid \overrightarrow{v}) & = 0 \\ (\overrightarrow{MI} \mid \overrightarrow{a}) & = v^2 \end{cases}$$

Exercice: Déterminer le lieu des centres de courbure de la courbe paramétrée par :

$$\begin{cases} x(t) & = t + \sin(t) - 4\sin(t/2) \\ y(t) & = 3 + \cos(t) - 4\cos(t/2) \end{cases}.$$

Réponse: On a $x' = 2\cos(t/2)[\cos(t/2) - 1]$, $y' = 2\sin(t/2)[1 - \cos(t/2)]$, et $v = \|f'(t)\| = 2[1 - \cos(t/2)]$. On en déduit que $\cos(\theta) = -\cos(t/2)$, et $\sin(\theta) = \sin(t/2)$, par conséquent, on peut prendre $\theta = \pi - \frac{t}{2}$. D'où $\theta' = -1/2$ et donc $\frac{d\theta}{ds} = \frac{-1}{2v} = \frac{-1}{4[1-\cos(t/2)]}$, donc le rayon de courbure vaut $R = 4[\cos(t/2) - 1]$. Les coordonnées du centre de courbure sont donc :

$$\begin{cases} x_I & = x - R\frac{y'}{v} = t - \sin(t) \\ y_I & = y + R\frac{x'}{v} = 1 - \cos(t) \end{cases}$$

Le lieu recherché est donc une cycloïde.

III) Exercices

★Exercice 26.1

Soit C une courbe birégulière, on suppose que le rayon de courbure est constant. Montrer que C est un arc de cercle.

★Exercice 26.2

a) Étudier la courbe paramétrée par : $x(t) = \cos(t)^3$ et $y(t) = \sin(t)^3$ (astroïde). Calculer la longueur. Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par cette courbe.

b) Même question avec la courbe polaire $\rho(\theta) = 1 + \cos(\theta)$ (cardioïde).

★Exercice 26.3

Un cercle roule sans glisser sur l'axe Ox, on fixe un point M sur ce cercle. Étudier la trajectoire du point M. Calculer la longueur et l'aire d'une arche.

★Exercice 26.4

Pour les courbes suivantes, calculer la longueur de la courbe, déterminer le repère de Frenet au point $M(t)$, et déterminer le centre de courbure :

a) $x(t) = a[2\cos(t) - \cos(2t)]$ et $y(t) = a[2\sin(t) - \sin(2t)]$ avec $a > 0$.

b) $x(t) = 3\cos(t) + 3\cos(2t) + \cos(3t)$ et $y(t) = 3\sin(t) + 3\sin(2t) + \sin(3t)$.

c) $x(t) = 2a\dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$ et $y(t) = 2a\dfrac{2t}{(1+t^2)^2}$.

★Exercice 26.5

Étudier le lieu des centres de courbure de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec $b < a$.

★Exercice 26.6

Soit $f : I \to \mathbb{C}^*$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur l'intervalle I, avec $n \geqslant 1$.

a) On suppose que pour tout t dans l'intervalle I, $|f(t)| = 1$. Soit $t_0 \in I$ et $\theta_0 = \operatorname{Arg}(f(t_0))$. On pose :

$$\theta(t) = \theta_0 - i\int_{t_0}^{t} \frac{f'u)}{f(u)}\,du$$

i) Quelle est la classe de la fonction θ ? Soit $g = e^{i\theta}$, montrer que $fg' = f'g$.

ii) En déduire que $\forall t \in I$, $f(t) = e^{i\theta(t)}$.

b) On ne suppose plus que $|f(t)| = 1$. Montrer qu'il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$ telle que :

$$\forall t \in I,\ f(t) = |f(t)|e^{i\varphi(t)}$$