

# MODÈLE DE DIMÈRES ET PAVAGES ALÉATOIRES

## INTRODUCTION

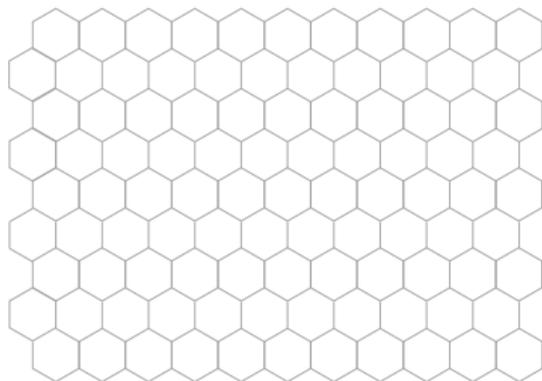
M2, Probabilités et Modèles Aléatoires, 23 Février 2015

# MÉCANIQUE STATISTIQUE

*Étude des propriétés macroscopiques d'un système physique dont les interactions sont décrites au niveau microscopique*

Étude à partir d'un **modèle**, dont le cadre général est le suivant.

- ▶ Structure du système physique est représentée par un **graphe**  $G = (V, E)$ , fini.

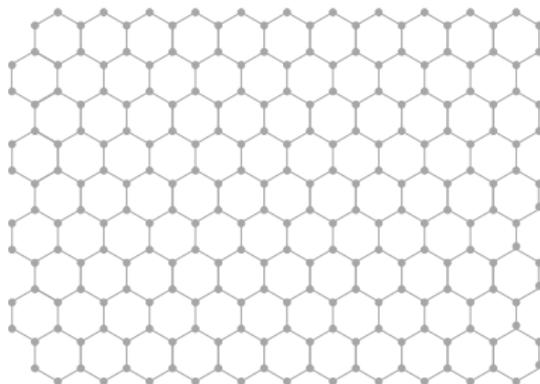


# MÉCANIQUE STATISTIQUE

*Étude des propriétés macroscopiques d'un système physique dont les interactions sont décrites au niveau microscopique*

Étude à partir d'un **modèle**, dont le cadre général est le suivant.

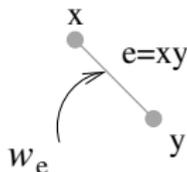
- ▶ Structure du système physique est représentée par un **graphe**  $G = (V, E)$ , fini.



# MÉCANIQUE STATISTIQUE

- ▶ **Ensemble de configurations** sur le graphe  $G$  :  $\mathcal{C}(G)$ ,
  - ▶ configurations sur les sommets
  - ▶ configurations sur les arêtes.
- ▶ **Paramètres** :
  - ▶ intensité des interactions entre les composants microscopiques
  - ▶ température extérieure au système.

⇒ Fonction de poids  $w = (w_e)_{e \in E}$  positive sur les arêtes.



# MÉCANIQUE STATISTIQUE

- ▶ À une configuration  $C$ , on associe une **énergie**  $\mathcal{E}_w(C)$ .
- ▶ **Probabilité de Boltzmann** sur les configurations :

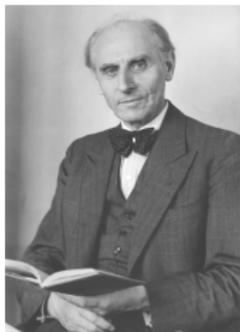
$$\forall C \in \mathcal{C}(G), \quad \mathbb{P}(C) = \frac{e^{-\mathcal{E}_w(C)}}{Z(G, w)},$$

où  $Z(G, w) = \sum_{C \in \mathcal{C}(G)} e^{-\mathcal{E}_w(C)}$  est la **fonction de partition**.

*Comprendre le comportement des configurations  
lorsque le graphe est grand (infini).*

# LE MODÈLE D'ISING

*Modèle de ferromagnétisme, d'alliages binaires*



Wilhelm Lenz (1888-1957)

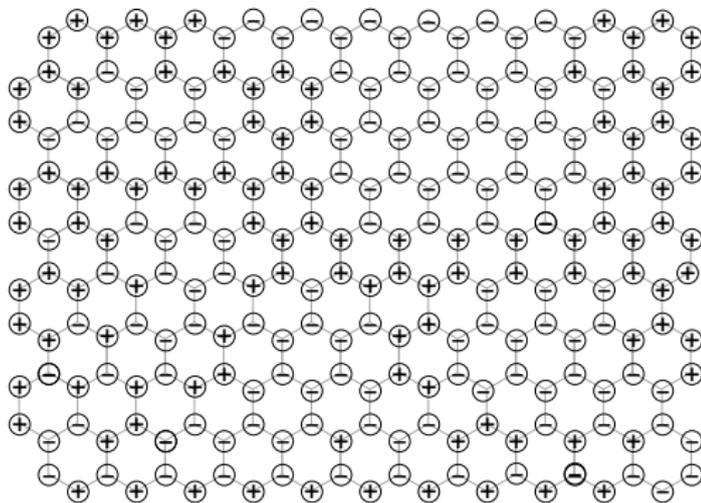


Ernst Ising (1900-1998)

- ▶ Graphe  $G = (V, E)$ .
- ▶ Une **configuration de spins**  $\sigma$  associe à chaque sommet  $x$  du graphe  $G$  un spin  $\sigma_x \in \{-1, 1\}$ .  
 $\Rightarrow \mathcal{C}(G) = \{-1, 1\}^V =$  ensemble des configurations de spins.

# LE MODÈLE D'ISING

- Une configuration de spins

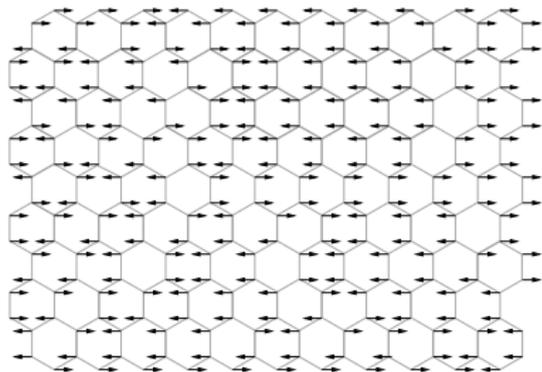


# LE MODÈLE D'ISING

- Une configuration de spins / deux interprétations.

Moments magnétiques :

$+1/\rightarrow$ ,  $-1/\leftarrow$

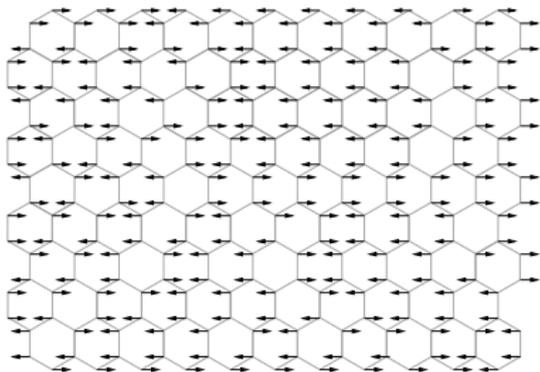


# LE MODÈLE D'ISING

- Une configuration de spins / deux interprétations.

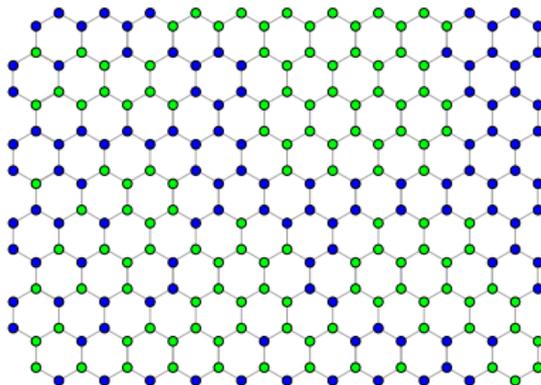
Moments magnétiques :

$+1/\rightarrow$ ,  $-1/\leftarrow$



Mélange de deux matériaux :

$+1/\bullet$ ,  $-1/\bullet$



# MODÈLE D'ISING

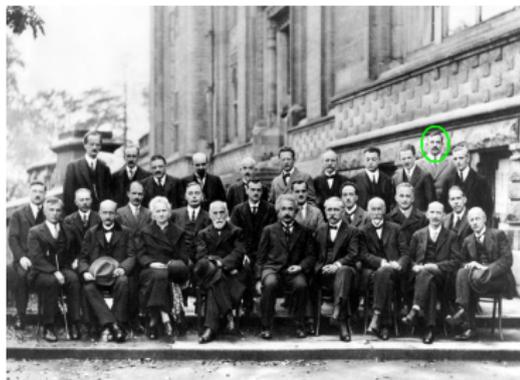
- ▶ Fonction de poids positive : **constantes de couplage**  $J = (J_e)_{e \in E}$ .
- ▶ Énergie d'une configuration de spins :  $\mathcal{E}_J(\sigma) = - \sum_{e=xy \in E} J_{xy} \sigma_x \sigma_y$ .
- ▶ **Probabilité de Boltzmann d'Ising** :

$$\forall \sigma \in \{-1, 1\}^V, \quad \mathbb{P}_{\text{Ising}}(\sigma) = \frac{e^{-\mathcal{E}_J(\sigma)}}{Z_{\text{Ising}}(\mathbf{G}, J)}.$$

- ▶ Deux spins voisins  $\sigma_x, \sigma_y$  ont tendance à s'aligner.
- ▶ Plus le couplage  $J_{xy}$  est élevé, plus cette tendance est forte.

# LE MODÈLE DE DIMÈRES

*Répartition de molécules di-atomiques sur la surface d'un cristal*



Sir Ralph H. Fowler (1889-1944)  
Congrès Solvay 1927.

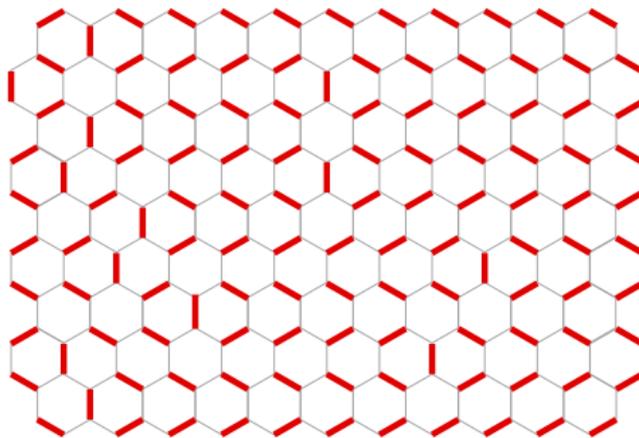


George S. Rushbrooke (1915-1995)

- ▶ Graphe  $G = (V, E)$ .
- ▶ Une **configuration de dimères** ou **couplage parfait** : sous-ensemble d'arêtes tel que chaque sommet touche exactement une arête.  
⇒  $\mathcal{C}(G) = \mathcal{M}(G)$  = ensemble des configurations de dimères.

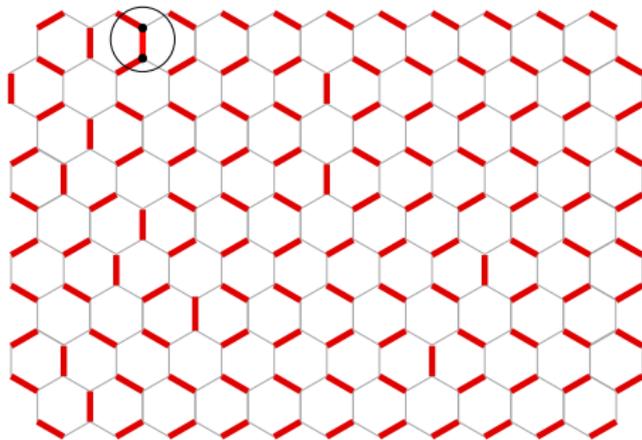
# LE MODÈLE DE DIMÈRES

- ▶ Une configuration de dimères.



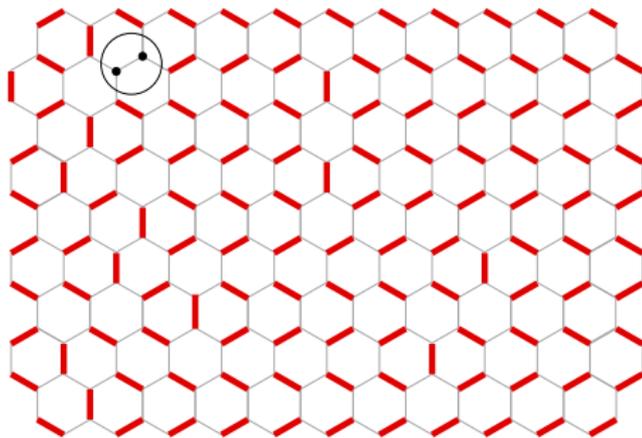
# LE MODÈLE DE DIMÈRES

- ▶ Une configuration de dimères.



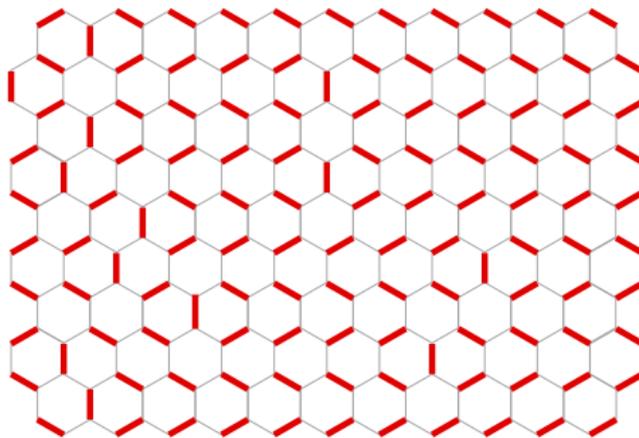
# LE MODÈLE DE DIMÈRES

- ▶ Une configuration de dimères.



# LE MODÈLE DE DIMÈRES

- ▶ Une configuration de dimères.



- ▶ Fonction de poids positive :  $\nu = (\nu_e)_{e \in E}$ .
- ▶ Énergie d'une configuration  $M$  :  $\mathcal{E}_\nu(M) = - \sum_{e \in M} \log \nu_e$ .
- ▶ **Probabilité de Boltzmann des dimères** :

$$\forall M \in \mathcal{M}(\mathbb{G}), \quad \mathbb{P}_{\text{dimère}}(M) = \frac{\prod_{e \in M} \nu_e}{Z_{\text{dimère}}(\mathbb{G}, \nu)}.$$

- ▶ Les arêtes avec un poids élevé ont plus de chance d'être présentes.

# ARBRES COUVRANTS

*Liés aux réseaux électriques*

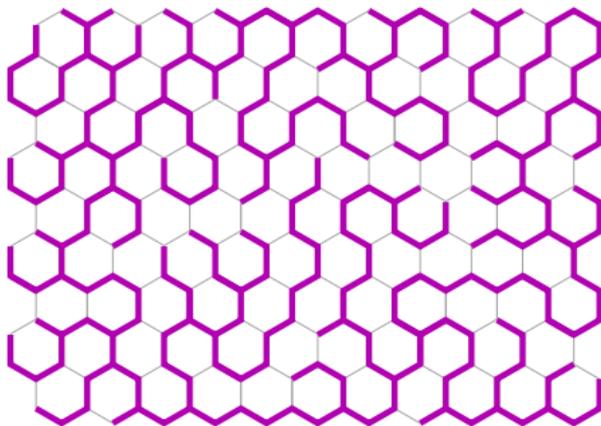


Gustav Kirchhoff (1824-1887)

- ▶ Graphe  $G = (V, E)$ .
- ▶ Un **arbre couvrant** : sous-ensemble d'arêtes touchant tous les sommets du graphe, connexe et ne contenant pas de cycle.  
⇒  $\mathcal{C}(G) = \mathcal{T}(G) =$  ensemble des arbres couvrants.

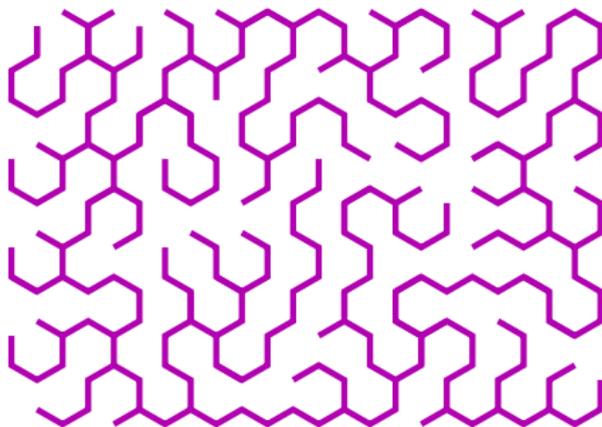
# ARBRES COUVRANTS

- ▶ Un arbre couvrant



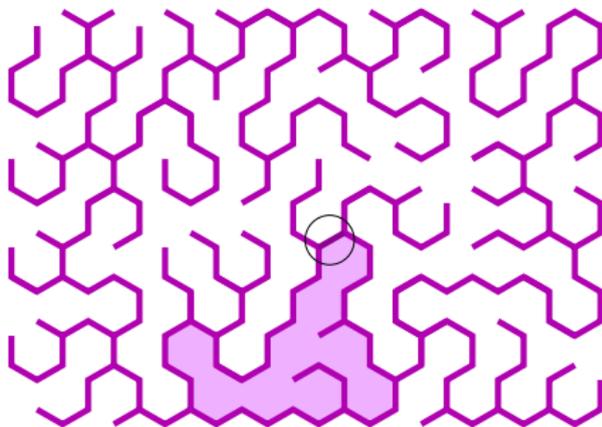
# ARBRES COUVRANTS

- ▶ Un arbre couvrant



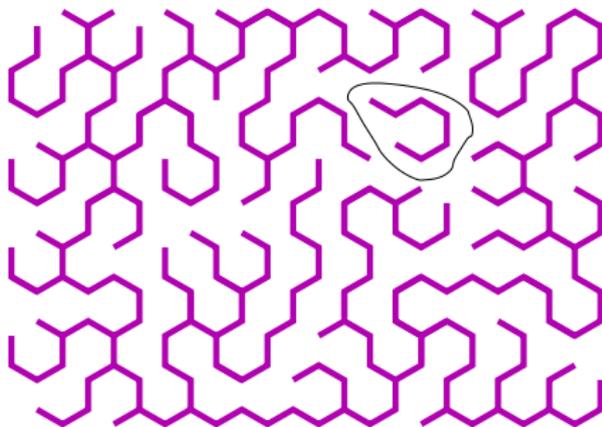
# ARBRES COUVRANTS

- ▶ Un arbre couvrant



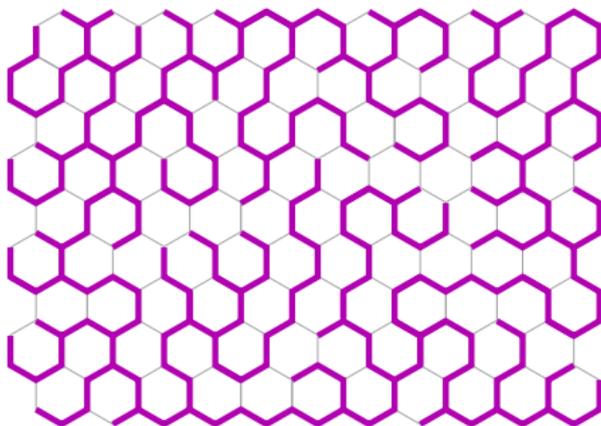
# ARBRES COUVRANTS

- ▶ Un arbre couvrant



# ARBRES COUVRANTS

- ▶ Un arbre couvrant



- ▶ Fonction de poids positive :  $\rho = (\rho_e)_{e \in E}$ .
- ▶ Energie d'un arbre  $T$  :  $\mathcal{E}_\rho(T) = -\sum_{e \in T} \log \rho_e$ .
- ▶ Probabilité de Boltzmann des arbres :

$$\forall T \in \mathcal{T}(G), \quad \mathbb{P}_{\text{arbre}}(T) = \frac{\prod_{e \in T} \rho_e}{Z_{\text{arbre}}(G, \rho)}.$$

- ▶ Les arêtes avec un poids élevé ont plus de chance d'être présentes.

# PERCOLATION

*Flux d'un liquide à travers un solide poreux*



Simon Broadbent (1928-2002)



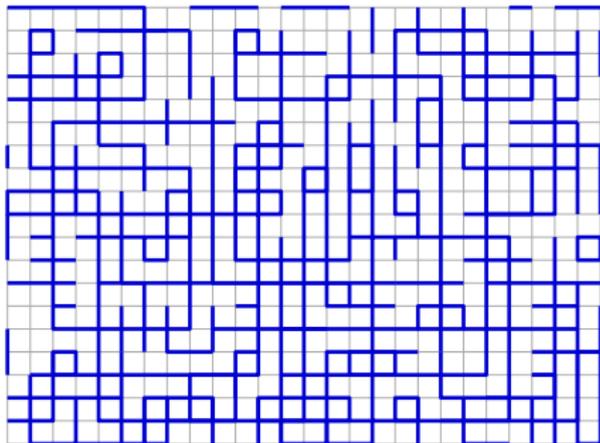
John Hammersley (1920-2004)

- ▶ Graphe  $G = (V, E)$ .
- ▶ Configurations d'arêtes **ouvertes ou fermées** :  $\forall e \in E, \omega_e \in \{0, 1\}$ .

$$\Rightarrow \mathcal{C}(G) = \{0, 1\}^E.$$

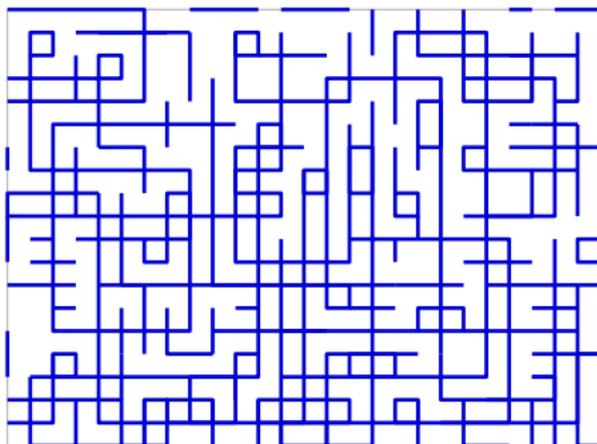
# PERCOLATION

- ▶ Une configuration de percolation



# PERCOLATION

- ▶ Une configuration de percolation



- ▶ Soit  $p \in [0, 1]$ . Chaque arête est ouverte / fermée avec probabilité  $p / 1 - p$ , indépendamment.
- ▶ Probabilité pour la percolation :

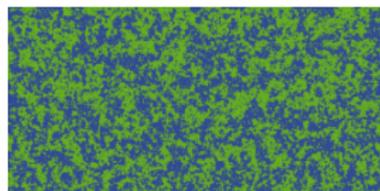
$$\forall \omega \in \{0, 1\}^E, \quad \mathbb{P}_{\text{perco}}(\omega) = p^{\sum_{e \in E} \omega_e} (1 - p)^{|E| - \sum_{e \in E} \omega_e}.$$

- ▶ Plus  $p$  est grand, plus il y a d'arêtes ouvertes.
- ▶ Pour quelles valeurs de  $p$  percole-t-on ?

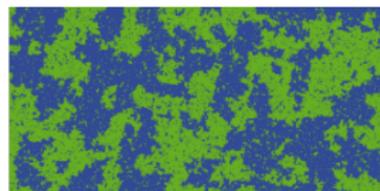
# COMPORTEMENT MACROSCOPIQUE

*Faire tendre la longueur des arêtes vers zéro  
Regarder une configuration “typique”.*

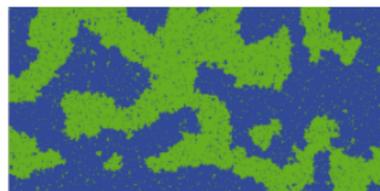
- ▶ Modèle d'Ising (Illustrations de R. Cerf)



*J petit*



*J critique*

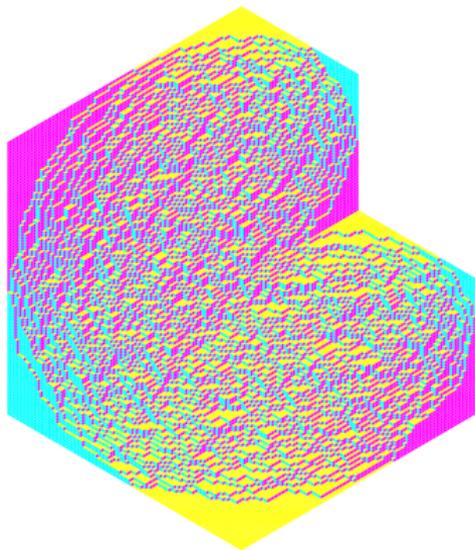


*J grand*

- ▶ Sur  $\mathbb{Z}^2$  :  $J_c \equiv \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2})$  [Kramers et Wannier]
- ▶ Transition de phase : magnétisation spontanée ou non.

# COMPORTEMENT MACROSCOPIQUE

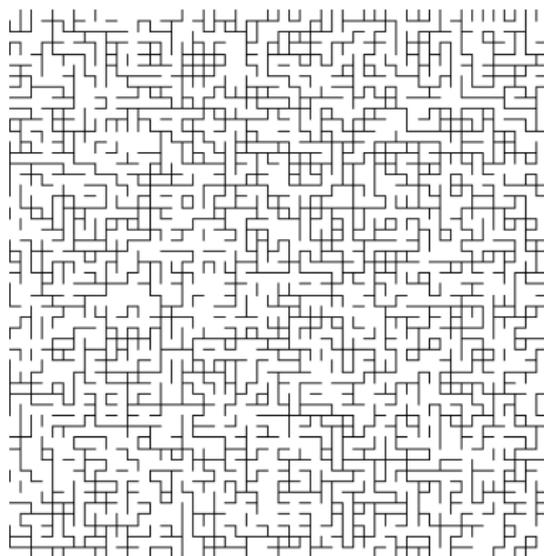
- ▶ Modèle de dimères (Illustration de R. Kenyon)



- ▶ On voit deux phases sur la même figure.
- ▶ Transition de phase : décroissance des corrélations.

# COMPORTEMENT MACROSCOPIQUE

- ▶ Percolation (Illustration de Erzbischof)



$$p = 0.51$$

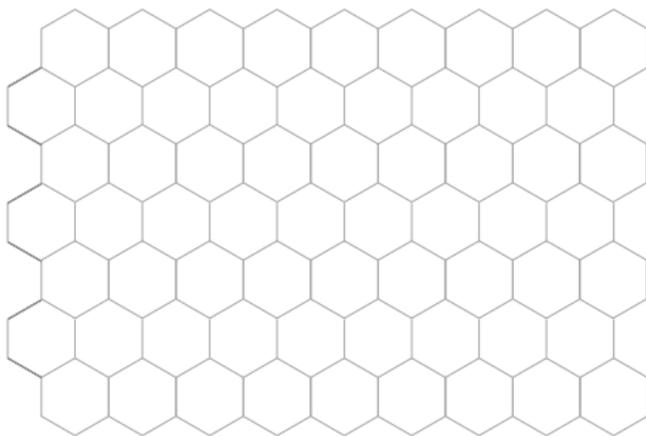
- ▶ Sur  $\mathbb{Z}^2$  :  $p_c = 0.5$  [Kesten]
- ▶ Transition de phase : (non) existence d'une comp. connexe infinie.

# COMPORTEMENT MACROSCOPIQUE

- ▶ Identification de la transition de phase.
- ▶ Compréhension du modèle sous-critique/sur-critique.
- ▶ Compréhension du modèle critique (à la transition de phase) :
  - ▶ Universalité et invariance conforme.
  - ▶ Conjectures : Nienhuis, Cardy, Duplantier ...  
Preuves : Lawler, Schramm, Werner (Fields 2006), D. Chelkak, S. Smirnov (Fields 2010) ...

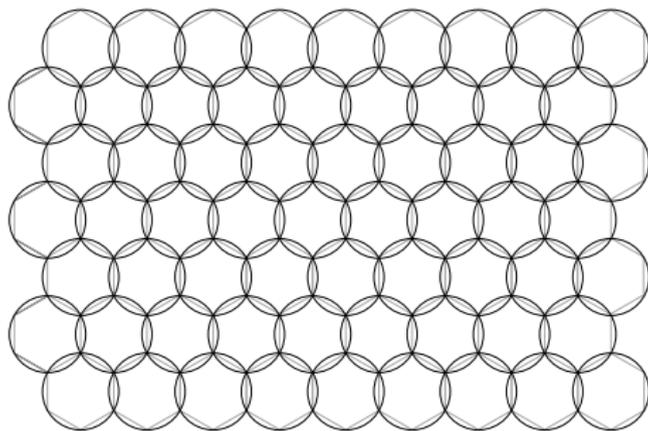
# UNE FAMILLE IMPORTANTE AU POINT CRITIQUE : LES GRAPHES ISORADIAUX

- ▶ Un graphe  $G$  est **isoradial** s'il est planaire et s'il peut être plongé dans le plan de sorte que toutes ses faces soient inscrites dans un cercle de rayon 1 et que les centres des cercles soient à l'intérieur des faces (Duffin-Mercat-Kenyon).



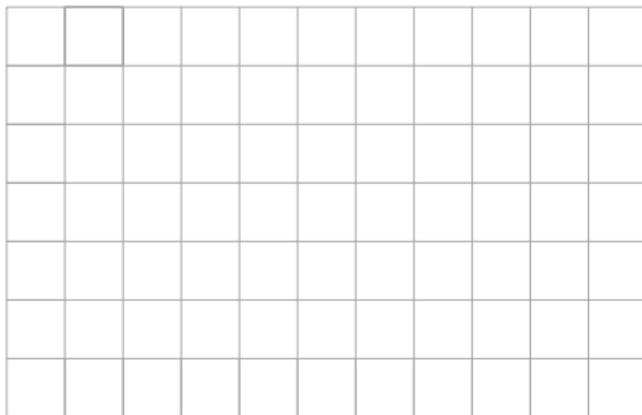
# UNE FAMILLE IMPORTANTE AU POINT CRITIQUE : LES GRAPHES ISORADIAUX

- ▶ Un graphe  $G$  est **isoradial** s'il est planaire et s'il peut être plongé dans le plan de sorte que toutes ses faces soient inscrites dans un cercle de rayon 1 et que les centres des cercles soient à l'intérieur des faces (Duffin-Mercat-Kenyon).



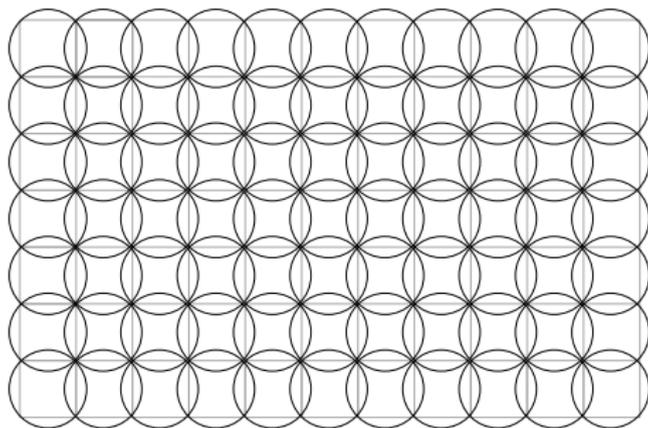
# UNE FAMILLE IMPORTANTE AU POINT CRITIQUE : LES GRAPHE ISORADIAUX

- ▶ Un graphe  $G$  est **isoradial** s'il est planaire et s'il peut être plongé dans le plan de sorte que toutes ses faces soient inscrites dans un cercle de rayon 1 et que les centres des cercles soient à l'intérieur des faces (Duffin-Mercat-Kenyon).



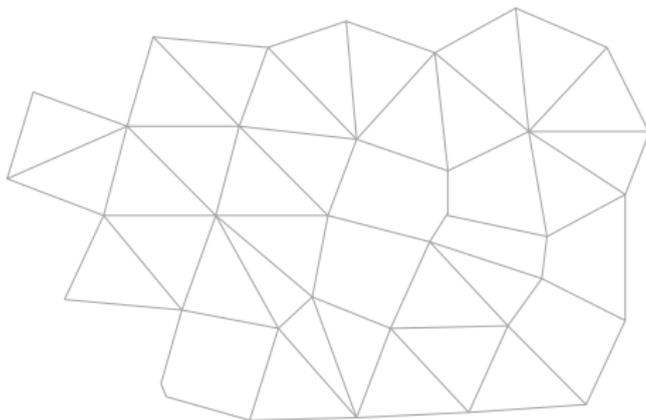
# UNE FAMILLE IMPORTANTE AU POINT CRITIQUE : LES GRAPHES ISORADIAUX

- ▶ Un graphe  $G$  est **isoradial** s'il est planaire et s'il peut être plongé dans le plan de sorte que toutes ses faces soient inscrites dans un cercle de rayon 1 et que les centres des cercles soient à l'intérieur des faces (Duffin-Mercat-Kenyon).



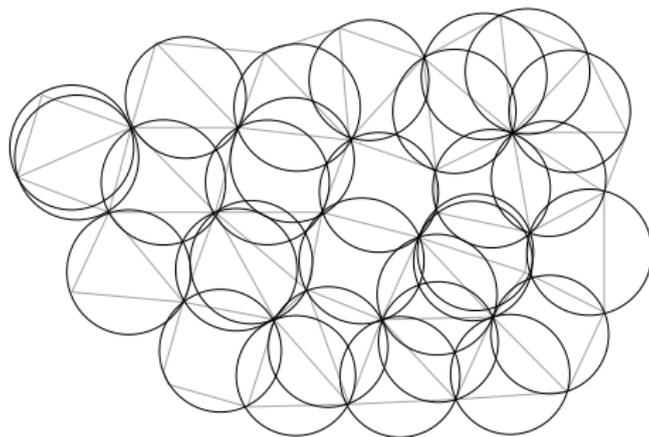
# UNE FAMILLE IMPORTANTE AU POINT CRITIQUE : LES GRAPHS ISORADIAUX

- ▶ Un graphe  $G$  est **isoradial** s'il est planaire et s'il peut être plongé dans le plan de sorte que toutes ses faces soient inscrites dans un cercle de rayon 1 et que les centres des cercles soient à l'intérieur des faces (Duffin-Mercat-Kenyon).



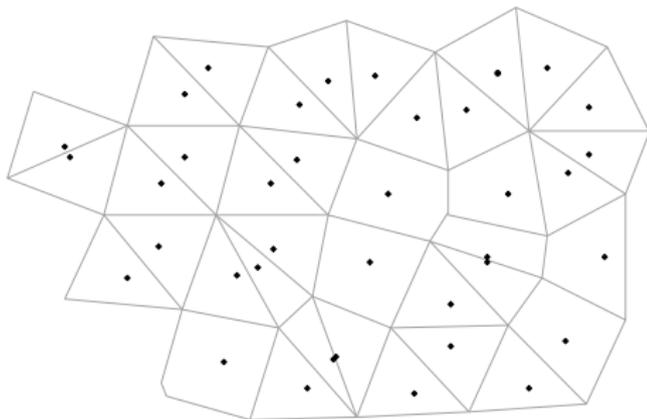
# UNE FAMILLE IMPORTANTE AU POINT CRITIQUE : LES GRAPHES ISORADIAUX

- ▶ Un graphe  $G$  est **isoradial** s'il est planaire et s'il peut être plongé dans le plan de sorte que toutes ses faces soient inscrites dans un cercle de rayon 1 et que les centres des cercles soient à l'intérieur des faces (Duffin-Mercat-Kenyon).



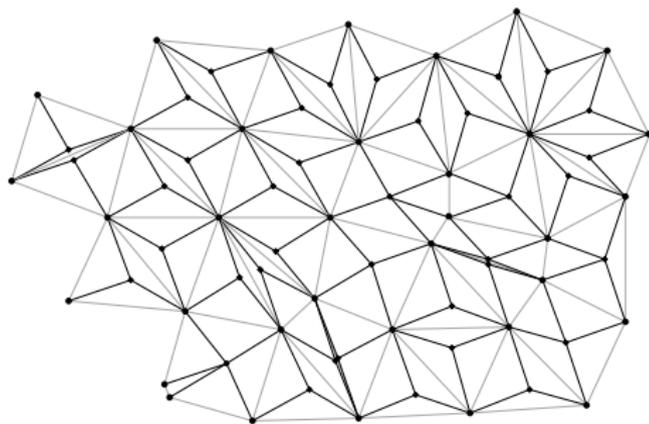
# GRAPHE DE LOSANGES ASSOCIÉ, ANGLES

- ▶ On prend les centres des cercles circonscrits.



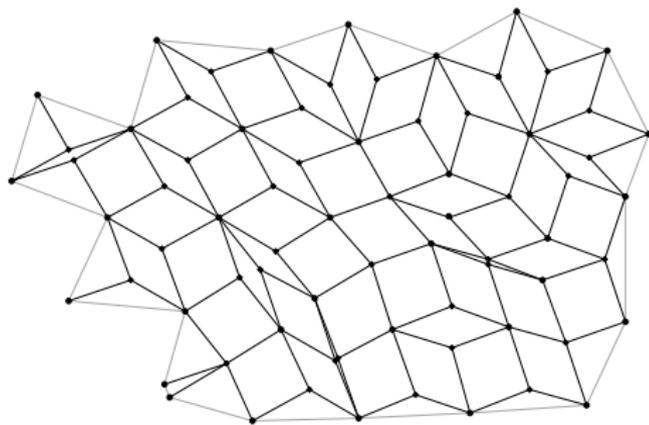
## GRAPHE DE LOSANGES ASSOCIÉ, ANGLES

- ▶ On relie les centres des cercles aux sommets du graphe  $G$ .  
⇒ Graphe de losanges associé  $G^\diamond$ .



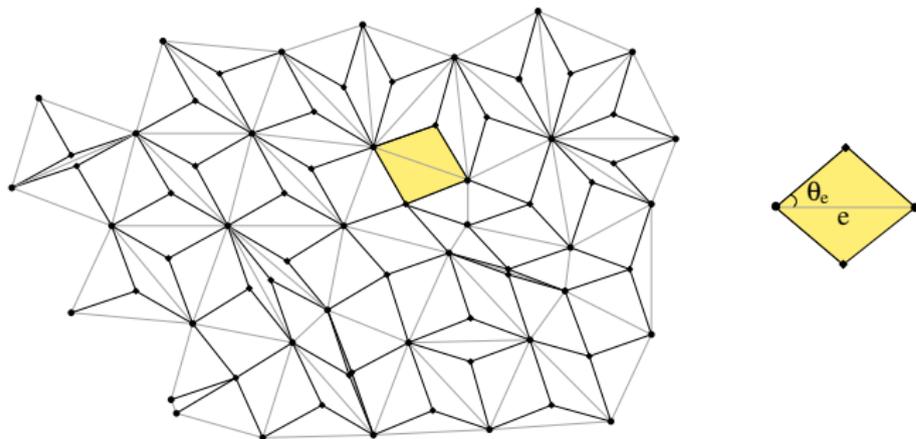
## GRAPHE DE LOSANGES ASSOCIÉ, ANGLES

- ▶ On relie les centres des cercles aux sommets du graphe  $G$ .  
⇒ Graphe de losanges associé  $G^\diamond$ .



# GRAPHE DE LOSANGES ASSOCIÉ, ANGLES

- ▶ On associe à chaque arête  $e$ , le demi-angle  $\theta_e$  du losange correspondant.



## MODÈLES $Z$ -INVARIANT CRITIQUE [BAXTER]

- ▶ Le modèle d'Ising est  $Z$ -invariant critique si :

$$\forall e \in E, \quad J_e = \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + \sin \theta_e}{\cos \theta_e} \right).$$

- ▶ Le modèle de dimères est  $Z$ -invariante critique si :

$$\forall e \in E, \quad w_e = \sin \theta_e.$$

- ▶ Les arbres couvrants sont  $Z$ -invariant critiques si :

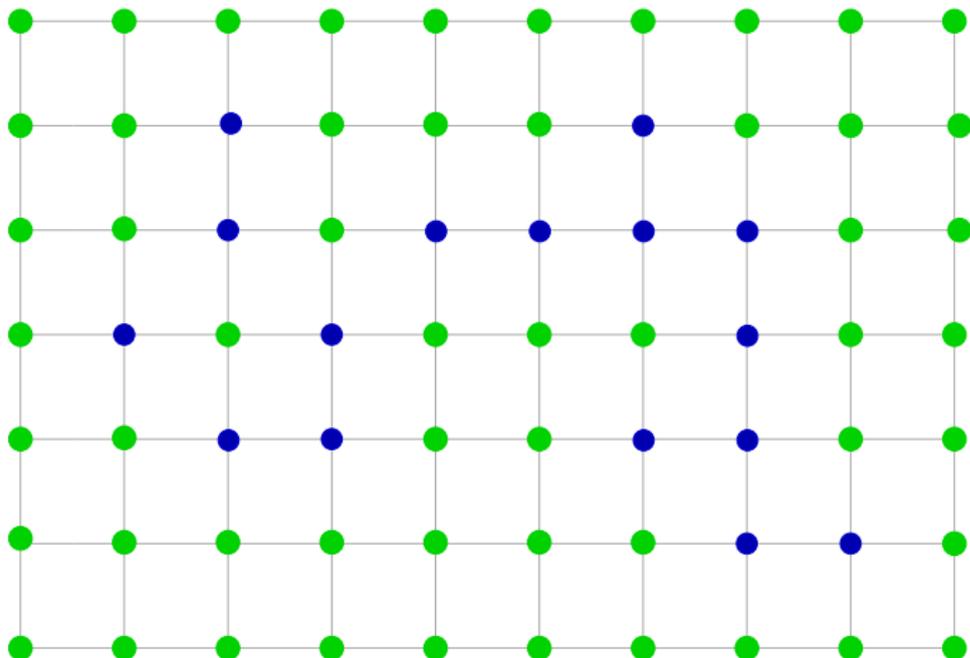
$$\forall e \in E, \quad \rho_e = \tan \theta_e.$$

- ▶ La percolation par arêtes est  $Z$ -invariante critique si :

$$\forall e \in E, \quad \frac{p_e}{1 - p_e} = \frac{\sin \left( \frac{1}{3}(\pi - \theta_e) \right)}{\sin \left( \frac{1}{3}\theta_e \right)}.$$

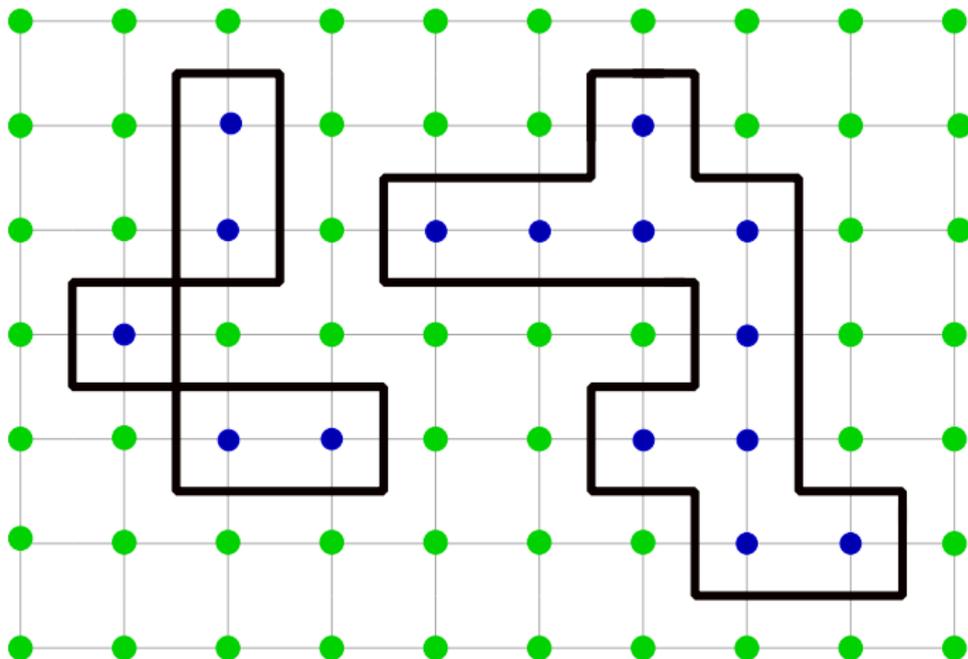
# DES LIENS ENTRE LES MODÈLES : ISING-DIMÈRES [FISHER]

- Modèle d'Ising sur graphe  $G$ .



# DES LIENS ENTRE LES MODÈLES : ISING-DIMÈRES [FISHER]

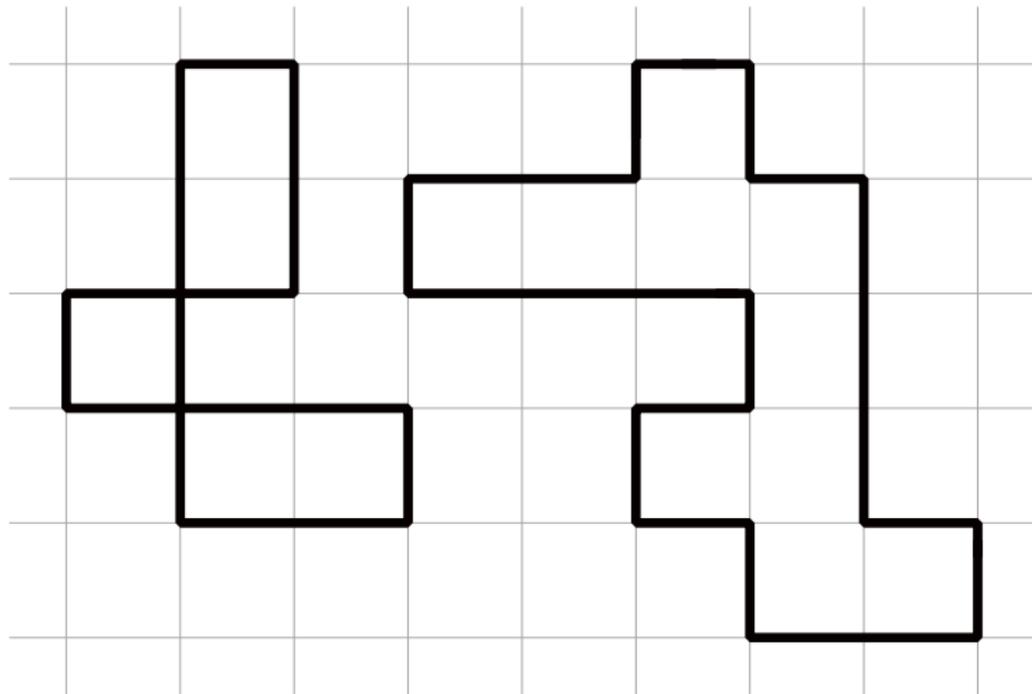
- Représentation en contours : développement basse température (Kramers-Wannier).





# DES LIENS ENTRE LES MODÈLES : ISING-DIMÈRES [FISHER]

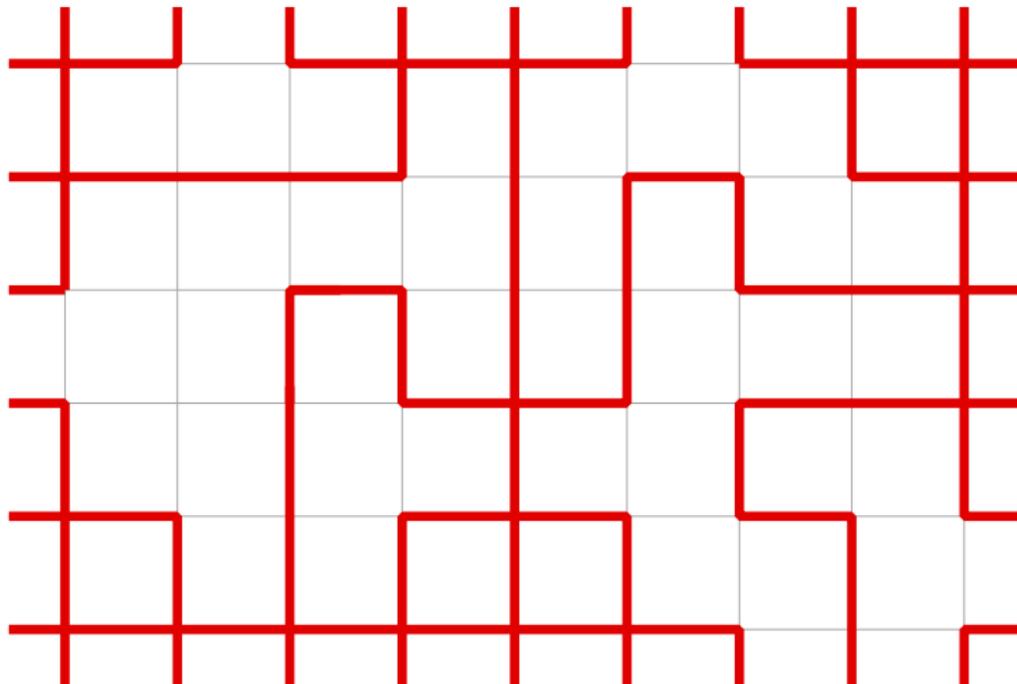
- ▶ Modèle de contours polygonaux sur le graphe dual  $G^*$ .





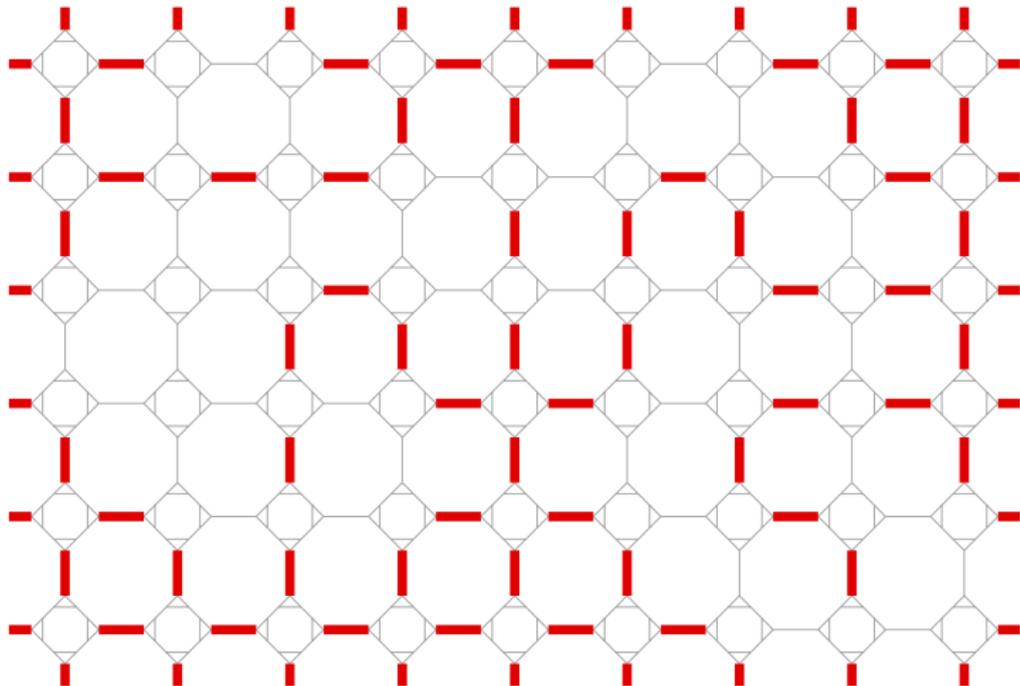
## DES LIENS ENTRE LES MODÈLES : ISING-DIMÈRES [FISHER]

- ▶ Des contours aux configurations de dimères : prendre le complémentaire.



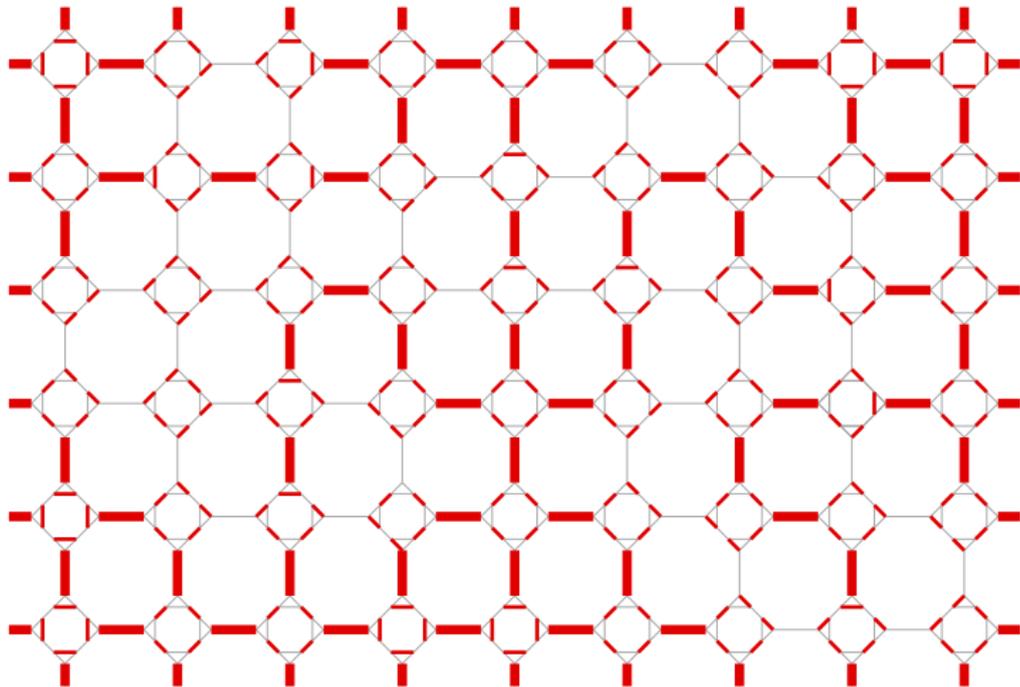
## DES LIENS ENTRE LES MODÈLES : ISING-DIMÈRES [FISHER]

- Décorer le graphe  $\rightarrow$  graphe de Fisher  $G^F$ . Garder le négatif.



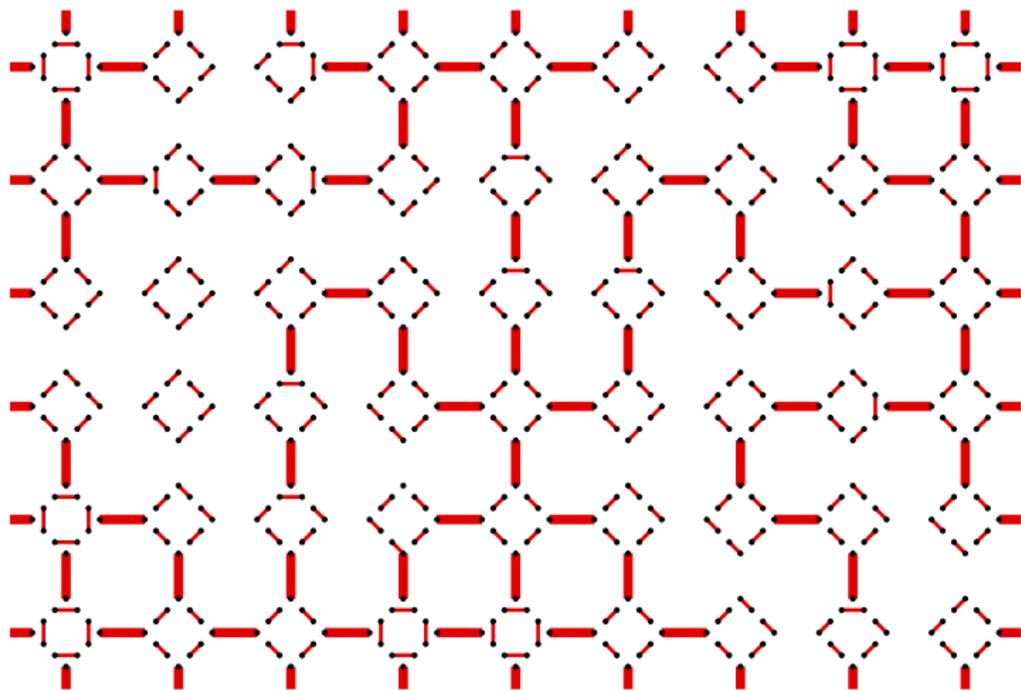
# DES LIENS ENTRE LES MODÈLES : ISING-DIMÈRES [FISHER]

- Compléter en une configuration de dimères :  $2^{|V^*|}$  manières.



## DES LIENS ENTRE LES MODÈLES : ISING-DIMÈRES [FISHER]

- Compléter en une configuration de dimères :  $2^{|V^*|}$  manières.



# MODÈLES EXACTEMENT SOLUBLES

- ▶ Un des outils pour étudier le comportement macroscopique est la **fonction de partition** :

$$Z(\mathbf{G}, w) = \sum_{\mathbf{C} \in \mathcal{C}(\mathbf{G})} e^{-\mathcal{E}_w(\mathbf{C})},$$

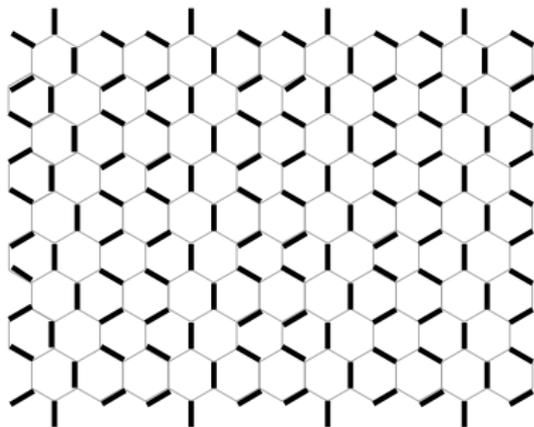
la constante normalisatrice dans la mesure de Boltzmann

$$\forall \mathbf{C} \in \mathcal{C}(\mathbf{G}), \quad \mathbb{P}(\mathbf{C}) = \frac{e^{-\mathcal{E}_w(\mathbf{C})}}{Z(\mathbf{G}, w)}.$$

- ▶ Le modèle est **exactement soluble** s'il existe une formule exacte, explicite pour la fonction de partition.
- ▶ Trois modèles exactement solubles :
  - ▶ Ising-2d : Onsager (1944) - Fisher (1966).
  - ▶ Dimères-2d : Kasteleyn, Temperley-Fisher (1961).
  - ▶ Arbres couvrants : Kirchhoff (1848).

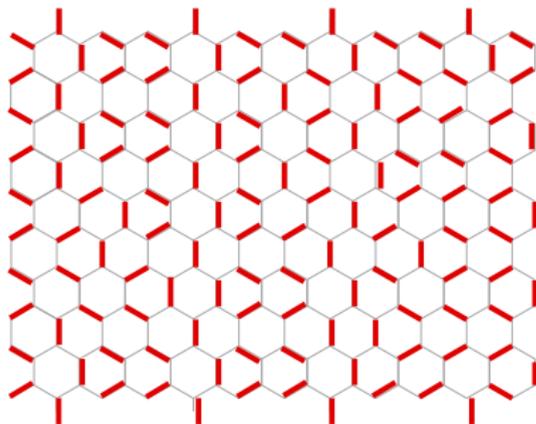
## PRÉLIMINAIRES

- ▶ Soient  $M_1, M_2$  deux configurations de dimères de  $G$  et  $M_1 \cup M_2$  leur superposition.



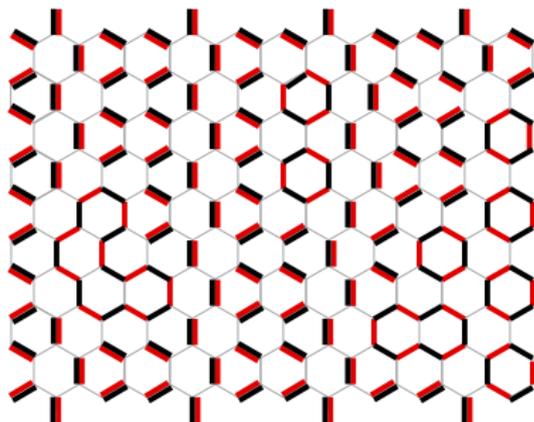
# PRÉLIMINAIRES

- ▶ Soient  $M_1, M_2$  deux configurations de dimères de  $G$  et  $M_1 \cup M_2$  leur superposition.



# PRÉLIMINAIRES

- ▶ Soient  $M_1, M_2$  deux configurations de dimères de  $G$  et  $M_1 \cup M_2$  leur superposition.



## PRÉLIMINAIRES

- ▶ Soient  $M_1, M_2$  deux configurations de dimères de  $G$  et  $M_1 \cup M_2$  leur superposition.



- ▶  $M_1 \cup M_2$  est réunion disjointe de cycles alternants, où un cycle alternant a les arêtes qui alternent entre  $M_1$  et  $M_2$ . Un cycle alternant de longueur 2 est une arête double.