



laboratoire de mécanique et d'acoustique

Cinématique des milieux continus (déformations finies)

Jean Garrigues

`mailto:jean.garrigues@centrale-marseille.fr`

`http://jean.garrigues.perso.centrale-marseille.fr`

Lundi 6 juin et mercredi 8 juin 2016



Au programme...

- **Concepts fondamentaux** : milieu continu, observateur, universalité, objectivité, changement d'observateur. ▶
- **Descriptions des champs matériels** : descriptions des champs et du mouvement, versions lagrangienne et eulérienne des opérateurs différentiels. ▶
- **Objectivité des grandeurs non scalaires.** ▶
- **Déformation** : tenseurs de déformation, dilatations et distorsions, petites déformations. ▶
- **Vitesse de déformation** : tenseur des taux de déformation, taux de dilatation et de distorsion. ▶



Milieu
continu

Observateur

Universalité
et objectivité

Biparticule

Tenseur de
changement
d'observateur

En bref...

Première partie

Concepts fondamentaux



Milieu Continu

Milieu continu

En tout point M d'un domaine \mathcal{D} de \mathcal{E}_3 et à tout instant t , on peut définir des grandeurs physiques $\Psi(M, t)$.

La grandeur physique Ψ peut être :

- un champ scalaire (masse volumique, température, pression, etc.)
- un champ vectoriel (vitesse, accélération, force massique, etc.)
- un champ tensoriel (déformation, contrainte, etc.)

Contradiction avec la physique microscopique !

La MMC ne peut fournir aucun renseignement sur le mouvement individuel des corpuscules microscopiques. (atomes, électrons, etc.)

Limitations de la théorie

Les prédictions de la MMC ne seront correctes que si la vérification se fait sur de « gros » points de mesure. (heureusement, les instruments de mesure sont macroscopiques !)

Champ matériel

Point géométrique

M : élément de l'espace physique \mathcal{E}_3 .

Particule

P : élément matériel qui coïncide actuellement avec un point géométrique.

Une particule est une entité matérielle de volume nul!

Champ matériel

Application définie par : $\{P, t\} \in \mathcal{D} \times \mathbb{R} \rightarrow \Psi(P, t) \in \mathbb{V}^{\otimes p}$

À toute particule et à tout instant, on associe une grandeur physique Ψ scalaire, vectorielle ou tensorielle.



Observateur

Observateur

Trois points $\{A, B, C\}$ (non alignés) dont les distances sont constantes dans le temps, sur lesquels on construit (par un procédé quelconque) un repère tridimensionnel orthonormé direct.

Synonymes : (rencontrés dans la littérature)

Observateur = solide de référence = référentiel

Symbole : \mathcal{R} ou $\tilde{\mathcal{R}}$

Exemple de construction d'un repère orthonormé direct :

- Origine O : centre de gravité du triangle ABC ;
- OM_1 et OM_2 : deux bipoints unitaires tracés sur les directions principales d'inertie du triangle ABC ; (rappel : $OM_1 \perp OM_2$)
- OM_3 : bipoint dans la troisième direction tel que $\{O, M_1, M_2, M_3\}$ soit un repère orthonormé direct.

On peut voir un observateur comme un instrument de mesure qui fournit trois coordonnées cartésiennes pour chaque point.



Vecteur position d'une particule

Soit un observateur \mathcal{R} (défini par $\{OM_1, OM_2, OM_3\}$)

$$\{P, \mathcal{R}\} \leftrightarrow \{\alpha^{P1}, \alpha^{P2}, \alpha^{P3}\} \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{coord. de } P \text{ dans } \{OM_1, OM_2, OM_3\})$$

Notation pour un autre observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ (défini par $\{\tilde{OM}_1, \tilde{OM}_2, \tilde{OM}_3\}$)

$$\{P, \tilde{\mathcal{R}}\} \leftrightarrow \{\tilde{\alpha}^{P1}, \tilde{\alpha}^{P2}, \tilde{\alpha}^{P3}\} \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{coord. de } P \text{ dans } \{\tilde{OM}_1, \tilde{OM}_2, \tilde{OM}_3\})$$

(les deux observateurs \mathcal{R} et $\tilde{\mathcal{R}}$ associent à la même particule P un triplet de réels généralement différent.)

Représentation des triplets de \mathbb{R}^3 dans un espace vectoriel :

Soit \mathbb{V}_3 un espace vectoriel (espace mathématique), de dimension 3, muni d'une base orthonormée $\{\mathbf{e}_\bullet\}$.

À tout triplet de réels (élément de \mathbb{R}^3), on associe biunivoquement un vecteur (élément de l'espace mathématique \mathbb{V}_3) :

$$\{y^1, y^2, y^3\} \in \mathbb{R}^3 \leftrightarrow \mathbf{v} = y^1 \mathbf{e}_1 + y^2 \mathbf{e}_2 + y^3 \mathbf{e}_3 \in \mathbb{V}_3$$

Vecteur position d'une particule P pour un observateur \mathcal{R}

$$\{P, \mathcal{R}\} \leftrightarrow \mathbf{x}^P = \alpha^{Pi} \mathbf{e}_i \in \mathbb{V}_3 \quad : \text{vecteur position de } P \text{ pour } \mathcal{R}$$

Pour un autre observateur $\tilde{\mathcal{R}}$: le vecteur position de la même particule P est noté : $\tilde{\mathbf{x}}^P = \tilde{\alpha}^{Pi} \mathbf{e}_i \in \mathbb{V}_3$ (en général : $\mathbf{x}^P \neq \tilde{\mathbf{x}}^P$)

Mouvement par rapport à un observateur

Mouvement d'une particule par rapport à un observateur

La particule P est dite en mouvement par rapport à \mathcal{R} si son vecteur position \mathbf{x}^P (pour l'observateur \mathcal{R}) est fonction du temps.

Vocabulaire et notations :

- **Instant actuel** : un instant t quelconque ;
- **Instant de référence** : un instant t_0 choisi arbitrairement ;
- **Position actuelle de P pour \mathcal{R}** : $\mathbf{x}_t^P \in \mathbb{V}_3$;
- **Position de référence de P pour \mathcal{R}** : $\mathbf{x}_0^P \in \mathbb{V}_3$;
- **Position actuelle de P pour $\tilde{\mathcal{R}}$** : $\tilde{\mathbf{x}}_t^P \in \mathbb{V}_3$;
- **Position de référence de P pour $\tilde{\mathcal{R}}$** : $\tilde{\mathbf{x}}_0^P \in \mathbb{V}_3$.

Vitesse actuelle d'une particule par rapport à \mathcal{R}

$$\mathbf{v}(P, t) = \frac{d}{dt} \mathbf{x}_t^P = \dot{\mathbf{x}}_t^P \in \mathbb{V}_3$$

Pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$: $\tilde{\mathbf{v}}(P, t) = \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_t^P \in \mathbb{V}_3$ (en général : $\mathbf{v}(P, t) \neq \tilde{\mathbf{v}}(P, t)$)



Universalité d'une relation

Universalité d'une relation

Une relation est dite universelle si elle est la même pour tous les observateurs.

- Toute définition doit être une relation universelle.

Exemple : définition de la vitesse d'une particule

$$\mathbf{v}(P, t) = \dot{\mathbf{x}}_t^P \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{v}}(P, t) = \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_t^P \quad (\text{même définition pour } \mathcal{R} \text{ et } \tilde{\mathcal{R}})$$

- Une loi de comportement est une relation universelle.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}(\mathbf{X}) \quad \text{et} \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{X}}) \quad (\text{même loi } \mathbf{f} \text{ pour } \mathcal{R} \text{ et } \tilde{\mathcal{R}})$$

- La relation $\mathbf{v}(P, t) = \mathbf{v}(P', t)$ n'est pas universelle.

$$\mathbf{v}(P, t) = \mathbf{v}(P', t) \not\Rightarrow \tilde{\mathbf{v}}(P, t) = \tilde{\mathbf{v}}(P', t)$$

(si deux vitesses sont égales pour \mathcal{R} , elles ne le sont généralement pas pour $\tilde{\mathcal{R}}$)

Objectivité d'une grandeur physique

Objectivité d'une grandeur physique scalaire

Ψ est une grandeur scalaire objective si et seulement si à tout instant, la grandeur physique scalaire Ψ est la même pour tous les observateurs. $(\forall t \forall \mathcal{R} \forall \tilde{\mathcal{R}}, \quad \tilde{\Psi}(t) = \Psi(t))$

Exemples : Soit un solide \mathcal{S} ,

- sa masse est une grandeur physique scalaire objective :

$$m(\mathcal{S}, t) = \tilde{m}(\mathcal{S}, t) \quad \forall t$$

- son énergie cinétique est une grandeur physique scalaire non objective :

$$\frac{1}{2} m(\mathcal{S}, t) \mathbf{v}(G, t)^2 \neq \frac{1}{2} \tilde{m}(\mathcal{S}, t) \tilde{\mathbf{v}}(G, t)^2$$

L'objectivité des grandeurs physiques **non scalaires** sera définie plus loin.



Biparticule

Biparticule

$\{P, P'\}$: couple ordonné de deux particules.

Position actuelle d'une biparticule : $\mathbf{x}_t^{P'} - \mathbf{x}_t^P \in \mathbb{V}_3$

Pour un autre observateur $\tilde{\mathcal{R}}$: $\tilde{\mathbf{x}}_t^{P'} - \tilde{\mathbf{x}}_t^P \in \mathbb{V}_3$ (définition universelle)
(en général : $\tilde{\mathbf{x}}_t^{P'} - \tilde{\mathbf{x}}_t^P \neq \mathbf{x}_t^{P'} - \mathbf{x}_t^P$)

Position de référence d'une biparticule : $\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P \in \mathbb{V}_3$

Pour un autre observateur $\tilde{\mathcal{R}}$: $\tilde{\mathbf{x}}_0^{P'} - \tilde{\mathbf{x}}_0^P \in \mathbb{V}_3$ (définition universelle)
(en général : $\tilde{\mathbf{x}}_0^{P'} - \tilde{\mathbf{x}}_0^P \neq \mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P$)

Longueur actuelle d'une biparticule : $l_t(P, P') = \|\mathbf{x}_t^{P'} - \mathbf{x}_t^P\|$

Pour un autre observateur $\tilde{\mathcal{R}}$: $\tilde{l}_t(P, P') = \|\tilde{\mathbf{x}}_t^{P'} - \tilde{\mathbf{x}}_t^P\|$ (déf. univ.)

Long. de référence d'une biparticule : $l_0(P, P') = \|\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P\|$

Pour un autre observateur $\tilde{\mathcal{R}}$: $\tilde{l}_0(P, P') = \|\tilde{\mathbf{x}}_0^{P'} - \tilde{\mathbf{x}}_0^P\|$ (déf. univ.)

Tenseur de changement d'observateur

Principe de la physique classique

La longueur d'une biparticule est une grandeur physique scalaire objective. (sa valeur actuelle est la même pour tous les observateurs)

Conséquence :

$$\forall P \forall P' \forall t \forall \mathcal{R} \forall \tilde{\mathcal{R}}, \quad \|\mathbf{x}_t^{P'} - \mathbf{x}_t^P\| = \|\tilde{\mathbf{x}}_t^{P'} - \tilde{\mathbf{x}}_t^P\|$$

(en particulier, à l'instant de référence : $\|\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P\| = \|\tilde{\mathbf{x}}_0^{P'} - \tilde{\mathbf{x}}_0^P\|$)

Les vecteurs position actuelle d'une biparticule $(\mathbf{x}_t^{P'} - \mathbf{x}_t^P)$ (obs. \mathcal{R}) et $(\tilde{\mathbf{x}}_t^{P'} - \tilde{\mathbf{x}}_t^P)$ (obs. $\tilde{\mathcal{R}}$) sont généralement différents, mais le principe affirme qu'ils ont le même module.

Tenseur actuel de changement d'observateur

Il existe une rotation unique $\mathbf{Q}_{t\mathcal{R}\tilde{\mathcal{R}}}$ telle que :

$$\forall P \forall P' \forall t \forall \mathcal{R} \forall \tilde{\mathcal{R}}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_t^{P'} - \tilde{\mathbf{x}}_t^P = \mathbf{Q}_{t\mathcal{R}\tilde{\mathcal{R}}} \cdot (\mathbf{x}_t^{P'} - \mathbf{x}_t^P)$$

(en particulier, à l'instant de référence : $\tilde{\mathbf{x}}_0^{P'} - \tilde{\mathbf{x}}_0^P = \mathbf{Q}_{0\mathcal{R}\tilde{\mathcal{R}}} \cdot (\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P)$)

Allègement de notation : $\mathbf{Q}_{t\mathcal{R}\tilde{\mathcal{R}}} = \mathbf{Q}_t$ et $\mathbf{Q}_{0\mathcal{R}\tilde{\mathcal{R}}} = \mathbf{Q}_0$

Quelques remarques

Conséquences de l'objectivité des longueurs

Les angles, les aires et les volumes définis par les positions actuelles de biparticules sont des grandeurs objectives.

Liens avec la cinématique élémentaire :

- Le tenseur rotation $\mathbf{Q}_{\mathcal{R}\tilde{\mathcal{R}}}$ est remplacé par un vecteur rotation de $\tilde{\mathcal{R}}$ par rapport à \mathcal{R} (souvent noté $\boldsymbol{\Omega}_{\tilde{\mathcal{R}}|\mathcal{R}}$).

Rappel de l'équivalence : $\mathbf{Q}_t = \cos \theta \mathbf{G} + (1 - \cos \theta) \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} - \sin \theta \mathbf{H} \cdot \mathbf{w}$

θ : angle de la rotation $\cos \theta = \frac{1}{2} (\text{tr} \mathbf{Q}_t - 1)$

\mathbf{w} : axe de la rotation (vecteur unitaire) $\mathbf{w} = -\frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{Q}_t}{\sin \theta}$

vecteur rotation : $\boldsymbol{\Omega}_{\tilde{\mathcal{R}}|\mathcal{R}} = \theta \mathbf{w}$

Rotation d'un vecteur : $\mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\mathbf{v}) = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{v}$ ($\boldsymbol{\Omega}_{\tilde{\mathcal{R}}|\mathcal{R}}$ est peu opérationnel !)

- Le vecteur vitesse de rotation de $\tilde{\mathcal{R}}$ par rapport à \mathcal{R} (souvent noté $\boldsymbol{\omega}_{\tilde{\mathcal{R}}|\mathcal{R}}$) est :

$$\boldsymbol{\omega}_{\tilde{\mathcal{R}}|\mathcal{R}} = \frac{1}{2} \mathbf{H} : (\mathbf{Q}_t^T \cdot \dot{\mathbf{Q}}_t) = \text{adj}(\mathbf{Q}_t^T) \cdot \dot{\mathbf{Q}}_t \quad (\text{démonstration dans le pdf})$$

Petits exercices

Soit P une particule et soient \mathcal{R} et $\tilde{\mathcal{R}}$ deux observateurs.

Changement d'observateur du vecteur position de P :

On considère la biparticule $\{\tilde{O}, P\}$.

$$\tilde{\mathbf{x}}^P - \tilde{\mathbf{x}}^{\tilde{O}} = \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{x}^P - \mathbf{x}^{\tilde{O}}) \quad (\text{déf. du tenseur de changement d'observateur})$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^P = \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{x}^P - \mathbf{x}^{\tilde{O}}) \Leftrightarrow \mathbf{x}^P = \mathbf{x}^{\tilde{O}} + \mathbf{Q}_t^\top \cdot \tilde{\mathbf{x}}^P$$

$$\ll OP = O\tilde{O} + \tilde{O}P \gg$$

Changement d'observateur des vitesses :

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^P = \dot{\mathbf{Q}}_t \cdot (\mathbf{x}^P - \mathbf{x}^{\tilde{O}}) + \mathbf{Q}_t \cdot (\dot{\mathbf{x}}^P - \dot{\mathbf{x}}^{\tilde{O}})$$

$$\mathbf{Q}_t^\top \cdot \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^P = \mathbf{Q}_t^\top \cdot \dot{\mathbf{Q}}_t \cdot (\mathbf{x}^P - \mathbf{x}^{\tilde{O}}) + \dot{\mathbf{x}}^P - \dot{\mathbf{x}}^{\tilde{O}}$$

Rappel : $(\mathbf{Q}_t^\top \cdot \dot{\mathbf{Q}}_t)$ est antisymétrique $\Rightarrow (\mathbf{Q}_t^\top \cdot \dot{\mathbf{Q}}_t) \cdot \mathbf{y} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{y} \quad \forall \mathbf{y}$

$$\mathbf{Q}_t^\top \cdot \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^P = -\mathbf{w} \wedge (\mathbf{x}^P - \mathbf{x}^{\tilde{O}}) + \dot{\mathbf{x}}^P - \dot{\mathbf{x}}^{\tilde{O}}$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^P = \dot{\mathbf{x}}^{\tilde{O}} + \mathbf{w} \wedge (\mathbf{x}^P - \mathbf{x}^{\tilde{O}}) + \mathbf{Q}_t^\top \cdot \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^P$$

$\ll \mathbf{v}(P)_{\tilde{\mathcal{R}}} = \mathbf{v}(\tilde{O})_{\tilde{\mathcal{R}}} + \boldsymbol{\omega}_{\tilde{\mathcal{R}}|\mathcal{R}} \wedge \tilde{O}P + \mathbf{v}(P)_{\tilde{\mathcal{R}}} \gg$

On vient de retrouver que $\boldsymbol{\omega}_{\tilde{\mathcal{R}}|\mathcal{R}} = \mathbf{w} = \text{adj}(\mathbf{Q}_t^\top \cdot \dot{\mathbf{Q}}_t)$

En bref...

- **Milieu continu** : composé de **particules** ;
- **Champ matériel** : $\{P, t\} \rightarrow \Psi(P, t) \in \mathbb{V}^{\otimes p}$
- **Observateur** : moyen pour associer un **vecteur position** à une particule : $\{P, \mathcal{R}\} \leftrightarrow \mathbf{x}^P \in \mathbb{V}_3$;
- **Universalité** : propriété de certaines **relations** ;
- **Objectivité** : propriété de certaines **grandeurs physiques** ;
- **Biparticule** : sa longueur actuelle est la même pour tous les observateurs ;
- **Tenseur de changement d'observateur** : **rotation**
 - pour changer d'observateur les positions des biparticules,
 - pour changer d'observateur les positions des particules,
 - pour changer d'observateur les vitesses, les accélérations,
 - on verra qu'il est utilisé pour changer d'observateur toutes les grandeurs physiques.

Milieu continu

Observateur

Universalité et objectivité

Biparticule

Tenseur de changement d'observateur

En bref...



Champs
matériels

Mouvement

Équivalence

Déplacement

Opérateurs
différentiels

Dérivée
particulaire

Changements
d'observateur

En bref...

Seconde partie

Description des champs

Descriptions des champs matériels

Soit un observateur \mathcal{R} . Les vecteurs \mathbf{x}_0 et \mathbf{x}_t sont les positions de référence et actuelle d'une particule P .

Rappel : Champ matériel : $\{P, t\} \rightarrow \Psi(P, t)$

Description de Lagrange d'un champ matériel

Les particules sont identifiées par leur position de référence.

Notation : $\Psi(P, t) = \Psi_L(\mathbf{x}_0, t)$

Description d'Euler d'un champ matériel

Les particules sont identifiées par leur position actuelle.

Notation : $\Psi(P, t) = \Psi_E(\mathbf{x}_t, t)$

Notations pour un autre observateur $\tilde{\mathcal{R}}$:

(on applique la définition universelle de la grandeur physique pour l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$)

$\tilde{\Psi}(P, t) = \tilde{\Psi}_L(\tilde{\mathbf{x}}_0, t) = \tilde{\Psi}_E(\tilde{\mathbf{x}}_t, t)$ (en général : $\tilde{\Psi} \neq \Psi$, $\tilde{\Psi}_L \neq \Psi_L$ et $\tilde{\Psi}_E \neq \Psi_E$)

Descriptions du mouvement

Description de Lagrange du mouvement

C'est la description de Lagrange des **positions actuelles**.

Notation : $\mathbf{x}_t^P = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0^P, t)$ ($\mathbf{f}(\mathbf{x}_0^P, t)$ pourrait être noté : $\mathbf{x}_{tL}^P(\mathbf{x}_0^P, t)$)

L'application \mathbf{f} est souvent appelée « transformation de t_0 à t ».

Description d'Euler du mouvement

C'est la description d'Euler des **vitesse actuelles**.

Notation : $\mathbf{v}_t^P = \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t^P, t)$

Notations pour un autre observateur $\tilde{\mathcal{R}}$:

- description de Lagrange du mouvement :

$$\tilde{\mathbf{x}}_t^P = \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}_0^P, t) \quad (\text{en général : } \tilde{\mathbf{f}} \neq \mathbf{f})$$

- description d'Euler du mouvement :

$$\tilde{\mathbf{v}}_t^P = \tilde{\mathbf{v}}_E(\tilde{\mathbf{x}}_t^P, t) \quad (\text{en général : } \tilde{\mathbf{v}}_E \neq \mathbf{v}_E)$$

Équivalence des descriptions

Équivalence des descriptions du mouvement :

$$\mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t) = \mathbf{v}_t^P = \dot{\mathbf{x}}_t^P = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{f}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}_t, t), t)$$

inversement,

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t) = \mathbf{v}_E(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t), t)$$

La fonction \mathbf{f} est solution de cette équation différentielle, avec les conditions initiales $\mathbf{x}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t_0)$.

Les deux descriptions du mouvement sont donc équivalentes.

Équivalence des descriptions de champs matériels :

$$\Psi_L(\mathbf{x}_0, t) = \Psi(P, t) = \psi_E(\mathbf{x}_t, t) = \Psi_E(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t), t)$$

inversement,

$$\Psi_E(\mathbf{x}_t, t) = \Psi(P, t) = \psi_L(\mathbf{x}_0, t) = \Psi_L(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}_t, t), t)$$

Les deux descriptions d'un champ matériel sont équivalentes.

Champ des déplacements

Vecteur déplacement d'une particule

$$\mathbf{u}(P, t) = \mathbf{x}_t^P - \mathbf{x}_0^P$$

Description de Lagrange des déplacements :

$$\mathbf{u}_L(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t) - \mathbf{x}_0 \quad (\text{variante de la description de Lagrange du mouvement})$$

Description d'Euler des déplacements :

$$\mathbf{u}_E(\mathbf{x}_t, t) = \mathbf{x}_t - \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}_t, t)$$

Pour un autre observateur $\tilde{\mathcal{R}}$: (définition universelle)

$$\tilde{\mathbf{u}}_L(\tilde{\mathbf{x}}_0, t) = \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}_0, t) - \tilde{\mathbf{x}}_0 \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{u}}_E(\tilde{\mathbf{x}}_t, t) = \tilde{\mathbf{x}}_t - \tilde{\mathbf{f}}^{-1}(\tilde{\mathbf{x}}_t, t)$$

Gradients lagrangien et eulérien

Soit $\Psi(P, t)$ un champ matériel $(\Psi(P, t) = \Psi_L(x_0, t) = \Psi_E(x_t, t))$

Gradient lagrangien d'un champ matériel

$$\mathbf{grad}_L \Psi = \mathbf{grad} \Psi_L \quad (\text{gradient de la description de Lagrange de } \Psi)$$

Rappel : $d\Psi = d\Psi_L = \mathbf{grad} \Psi_L \cdot dx_0 = \mathbf{grad}_L \Psi \cdot dx_0$

Gradient eulérien d'un champ matériel

$$\mathbf{grad}_E \Psi = \mathbf{grad} \Psi_E \quad (\text{gradient de la description d'Euler de } \Psi)$$

Rappel : $d\Psi = d\Psi_E = \mathbf{grad} \Psi_E \cdot dx_t = \mathbf{grad}_E \Psi \cdot dx_t$

Notations traditionnelles pour certains champs matériels :

- Gradient lagrangien des positions actuelles : $(\Psi = x_t)$
 $\mathbf{grad}_L x_t = \mathbf{grad}_L (f(x_0, t)) = \mathbf{F}$ (« gradient de la transformation »)
- Gradient lagrangien des vitesses actuelles : $(\Psi = v_t)$
 $\mathbf{grad}_L v_t = \mathbf{grad}_L \dot{x}_t = \mathbf{grad}_L \left(\frac{\partial}{\partial t} f(x_0, t) \right) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{grad}_L (f(x_0, t)) = \dot{\mathbf{F}}$

Relation entre les gradients lagrangien et eulérien :

$$\mathbf{grad}_L \Psi = \mathbf{grad}_E \Psi \cdot \mathbf{F} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{grad}_E \Psi = \mathbf{grad}_L \Psi \cdot \mathbf{F}^{-1}$$

En particulier si $\Psi = v_t$: $\mathbf{grad}_E v = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}$



Autres opérateurs différentiels

Divergences :

$$\operatorname{div}_L \Psi = \operatorname{grad}_L \Psi : G$$

$$\operatorname{div}_E \Psi = \operatorname{grad}_E \Psi : G$$

Rotationnels :

$$\operatorname{rot}_L \Psi = -\operatorname{grad}_L \Psi : H$$

$$\operatorname{rot}_E \Psi = -\operatorname{grad}_E \Psi : H$$

Laplaciens :

$$\Delta_L \Psi = \operatorname{div}_L \operatorname{grad}_L \Psi$$

$$\Delta_E \Psi = \operatorname{div}_E \operatorname{grad}_E \Psi$$

Relations utiles :

$$\operatorname{div}_L \Psi = \operatorname{grad}_L \Psi : G = (\operatorname{grad}_E \Psi \cdot F) : G = \operatorname{grad}_E \Psi : F^\top$$

$$\operatorname{div}_E \Psi = \operatorname{grad}_E \Psi : G = (\operatorname{grad}_L \Psi \cdot F^{-1}) : G = \operatorname{grad}_L \Psi : F^{-\top}$$

Exercices : Écrire ces relations avec $\Psi = x_t$ et $\Psi = v_t$

Dérivée particulaire

Soit $\Psi(P, t)$ un champ matériel. ($\Psi(P, t) = \Psi_L(x_0, t) = \Psi_E(x_t, t)$)

Dérivée particulaire d'un champ matériel

$$\dot{\Psi}(P, t) = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\Psi(P, t') - \Psi(P, t)}{t' - t} = \frac{\partial}{\partial t} \Psi(P, t)$$

$\dot{\Psi}$ est un champ matériel tensoriel du même ordre que Ψ .

Vocabulaire : (rencontré dans la littérature)

dérivée temporelle « à particule constante » ;

dérivée temporelle « quand on suit la particule dans son mouvement ».

Description de Lagrange de la dérivée particulaire :

$$\dot{\Psi}_L(x_0, t) = \frac{\partial}{\partial t} \Psi_L(x_0, t)$$

Description d'Euler de la dérivée particulaire :

$$\dot{\Psi}_E = \mathbf{grad}_E \Psi \cdot \mathbf{v}_E + \frac{\partial}{\partial t} \Psi_E \quad (\text{démonstration dans le pdf})$$

Exemples : $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}_t$ $\boldsymbol{\gamma} = \dot{\mathbf{v}}_t = \ddot{\mathbf{x}}_t$

Quelques changements d'observateur (1/2)

Ch. obs. de la position actuelle d'une particule :

$$\tilde{\mathbf{x}}_t^P = \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{x}_t^P - \mathbf{x}_t^{\tilde{O}}) \quad (\text{rappel})$$

Ch. obs. de la position de référence d'une particule :

$$\tilde{\mathbf{x}}_0^P = \mathbf{Q}_0 \cdot (\mathbf{x}_0^P - \mathbf{x}_0^{\tilde{O}})$$

Ch. obs. de la vitesse actuelle d'une particule :

$$\tilde{\mathbf{v}}_t^P = \dot{\mathbf{Q}}_t \cdot (\mathbf{x}_t^P - \mathbf{x}_t^{\tilde{O}}) + \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{v}_t^P - \mathbf{v}_t^{\tilde{O}}) \quad (\text{rappel})$$

Ch. obs. du gradient lagrangien des positions actuelles :

(rappel : $\text{grad}_L \mathbf{x}_t$ est noté \mathbf{F} , gradient de la transformation)

$$\tilde{\mathbf{x}}_t^{P'} - \tilde{\mathbf{x}}_t^P = \tilde{\mathbf{F}} \cdot (\tilde{\mathbf{x}}_0^{P'} - \tilde{\mathbf{x}}_0^P) + \dots \quad (\text{définition pour } \tilde{\mathcal{R}})$$

$$\mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{x}_t^{P'} - \mathbf{x}_t^P) = \tilde{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{Q}_0 \cdot (\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P) + \dots \quad (\text{changements d'observateur})$$

$$\mathbf{x}_t^{P'} - \mathbf{x}_t^P = \mathbf{Q}_t^\top \cdot \tilde{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{Q}_0 \cdot (\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P) + \dots$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q}_t^\top \cdot \tilde{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{Q}_0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}_0^\top$$

Quelques changements d'observateur (2/2)

Ch. obs. de la vitesse actuelle d'une particule :

$$\tilde{\mathbf{v}}_t^P = \dot{\mathbf{Q}}_t \cdot (\mathbf{x}_t^P - \tilde{\mathbf{x}}_t^{\tilde{O}}) + \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{v}_t^P - \mathbf{v}_t^{\tilde{O}}) \quad (\text{rappel})$$

Ch. obs. du gradient eulérien des vitesses actuelles :

$$\text{Définition pour } \tilde{\mathcal{R}} : \tilde{\mathbf{v}}_t^{P'} - \tilde{\mathbf{v}}_t^P = \mathbf{grad}_E \tilde{\mathbf{v}} \cdot (\tilde{\mathbf{x}}_t^{P'} - \tilde{\mathbf{x}}_t^P) + \dots$$

$$\dot{\mathbf{Q}}_t \cdot (\mathbf{x}_t^{P'} - \mathbf{x}_t^P) + \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{v}_t^{P'} - \mathbf{v}_t^P) = \mathbf{grad}_E \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{x}_t^{P'} - \mathbf{x}_t^P) + \dots$$

$$\dot{\mathbf{Q}}_t \cdot (\mathbf{x}_t^{P'} - \mathbf{x}_t^P) + \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot (\mathbf{x}_t^{P'} - \mathbf{x}_t^P) = \mathbf{grad}_E \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{x}_t^{P'} - \mathbf{x}_t^P) + \dots$$

$$\dot{\mathbf{Q}}_t + \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_E \mathbf{v} = \mathbf{grad}_E \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{Q}_t$$

$$\mathbf{grad}_E \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}_t^\top + \dot{\mathbf{Q}}_t \cdot \mathbf{Q}_t^\top$$

Ch. obs. de la divergence eulérienne des vitesses actuelles :

$$\mathbf{grad}_E \tilde{\mathbf{v}} : \mathbf{G} = (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}_t^\top) : \mathbf{G} + (\dot{\mathbf{Q}}_t \cdot \mathbf{Q}_t^\top) : \mathbf{G}$$

$$\text{div}_E \tilde{\mathbf{v}} = \text{div}_E \mathbf{v} + 0 \quad (\text{div}_E \mathbf{v} \text{ est donc une grandeur scalaire objective})$$

Chaque grandeur a sa propre formule de changement d'observateur.

Méthode générale : Soient deux observateurs quelconques $\tilde{\mathcal{R}}$, $\tilde{\mathcal{R}}$ et \mathcal{Q}_t .

- Écrire la définition (universelle) pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$,
- Changer d'observateur de $\tilde{\mathcal{R}}$ vers \mathcal{R} les grandeurs dont on sait la formule,
- Utiliser la définition (universelle) pour l'observateur \mathcal{R} .

En bref...

- On décrit les champs matériels ($\Psi(P, t)$) par la méthode de Lagrange ($\Psi_L(x_0, t)$) ou d'Euler ($\Psi_E(x_t, t)$).
- On décrit le mouvement (pour un observateur) par :
 - la description de Lagrange des positions actuelles des particules,
 - la description d'Euler des vitesses actuelles des particules.
- Ces méthodes de description sont équivalentes.
- On définit un gradient lagrangien et un gradient eulérien, ainsi que les versions lagrangiennes et eulériennes des opérateurs dérivés.
- Le gradient lagrangien des positions actuelles est noté \mathbf{F} .
- La dérivée particulaire ($\dot{\Psi}(P, t)$) d'un champ matériel est une dérivée temporelle à particule constante.
- Chaque grandeur a sa propre formule de changement d'observateur.

Champs
matériels

Mouvement

Équivalence

Déplacement

Opérateurs
différentielsDérivée
particulaireChangements
d'observateur

En bref...



Grandeurs
vectorielles

Grandeurs
tensorielles

Exemples

En bref...

Troisième partie

Objectivité des grandeurs non scalaires

Objectivité des grandeurs vectorielles

L'idée physique :

La valeur actuelle des grandeurs vectorielles objectives a la même orientation par rapport à la position actuelle de la matière pour tous les observateurs.

Grandeur vectorielle objective

Ψ est une grandeur vectorielle objective si et seulement si

$$\forall \mathcal{R} \forall \tilde{\mathcal{R}} \forall \{P', P''\} \forall t, \quad \tilde{\Psi}_t \cdot (\tilde{x}_t^{P''} - \tilde{x}_t^{P'}) = \Psi_t \cdot (x_t^{P''} - x_t^{P'})$$

Ch. obs. d'une grandeur vectorielle objective :

$$\begin{aligned} & \tilde{\Psi}_t \cdot (\tilde{x}_t^{P''} - \tilde{x}_t^{P'}) = \Psi_t \cdot (x_t^{P''} - x_t^{P'}) && \text{(objectivité de } \Psi) \\ \Leftrightarrow & \tilde{\Psi}_t \cdot \mathcal{Q}_t \cdot (x_t^{P''} - x_t^{P'}) = \Psi_t \cdot (x_t^{P''} - x_t^{P'}) && \forall \{P', P''\} \\ \Leftrightarrow & \tilde{\Psi}_t \cdot \mathcal{Q}_t = \Psi_t \\ \Leftrightarrow & \tilde{\Psi}_t = \Psi_t \cdot \mathcal{Q}_t^\top = \mathcal{Q}_t \cdot \Psi_t \end{aligned}$$

Caractérisation

$$\Psi \text{ vecteur objectif} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\Psi}_t = \mathcal{Q}_t \cdot \Psi_t \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\Psi}_t = \mathcal{R}_{\mathcal{Q}_t}(\Psi_t)$$

Objectivité des grandeurs tensorielles

Grandeur tensorielle d'ordre 2 objective

$$\forall \mathcal{R} \forall \tilde{\mathcal{R}} \forall \{P^{(1)}, P^{(2)}\} \forall \{P^{(3)}, P^{(4)}\} \forall t, \\ (\tilde{\mathbf{x}}_t^{(1)} - \tilde{\mathbf{x}}_t^{(2)}) \cdot \tilde{\Psi}_t \cdot (\tilde{\mathbf{x}}_t^{(3)} - \tilde{\mathbf{x}}_t^{(4)}) = (\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)}) \cdot \Psi_t \cdot (\mathbf{x}_t^{(3)} - \mathbf{x}_t^{(4)})$$

Caractérisation

$$\Psi \in \mathbb{V}_3^{\otimes 2} \text{ objectif} \Leftrightarrow \tilde{\Psi}_t = \mathbf{Q}_t \cdot \Psi_t \cdot \mathbf{Q}_t^\top \Leftrightarrow \tilde{\Psi}_t = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\Psi_t)$$

(les val. pr. actuelles sont conservées et les dir. pr. actuelles sont tournées par \mathbf{Q}_t)

Grandeur tensorielle d'ordre p objective

$$\Psi \in \mathbb{V}_3^{\otimes p} \text{ objectif} \Leftrightarrow \tilde{\Psi}_t = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\Psi_t) \quad (\text{démonstration dans le pdf})$$

Rappel d'algèbre : Rotation par \mathbf{Q}_t d'un tenseur d'ordre p :

$$\mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(T) = \underbrace{(\mathbf{Q}_t \boxtimes \mathbf{Q}_t \boxtimes \dots \boxtimes \mathbf{Q}_t)}_{p \text{ fois}} \overline{\otimes} T \quad (\text{écriture tensorielle})$$

Composantes sur une base : $\mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(T)^{i_1 \dots i_p} = \mathbf{Q}_t^{i_1 j_1} \dots \mathbf{Q}_t^{i_p j_p} T^{j_1 \dots j_p}$

Exemples de grandeurs objectives ou non

Rappel de quelques changements d'observateur :

position actuelle	$\tilde{\mathbf{x}}_t^P = \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{x}_t^P - \mathbf{x}_t^{\tilde{O}})$	non objectif
vitesse actuelle	$\tilde{\mathbf{v}}_t^P = \dot{\mathbf{Q}}_t \cdot (\mathbf{x}_t^P - \mathbf{x}_t^{\tilde{O}}) + \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{v}_t^P - \mathbf{v}_t^{\tilde{O}})$	non objectif
grad. transf. act.	$\tilde{\mathbf{F}}_t = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{F}_t \cdot \mathbf{Q}_0^\top$	non objectif

Théorème (démonstration dans le pdf)

Soit Ψ un champ matériel objectif quelconque (d'ordre 0 ou plus).
 Le gradient eulérien $\mathbf{grad}_E \Psi$ est un champ matériel objectif.
 De même, $\mathbf{div}_E \Psi$, $\mathbf{rot}_E \Psi$ et $\Delta_E \Psi$ sont objectifs.

Pour les autres cas : on ne sait pas *a priori*.

Il faut écrire la formule de changement d'observateur et vérifier si c'est celle d'une grandeur objective.

Exemples :

$\mathbf{div}_E \tilde{\mathbf{v}}_t = \mathbf{div}_E \mathbf{v}_t$ (la vitesse est non objective)	scalaire objectif
$\mathbf{div}_L \tilde{\mathbf{v}}_t = (\dot{\mathbf{Q}}_t \cdot \mathbf{Q}_0^\top) : \mathbf{F} + (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{Q}_0^\top) : \mathbf{grad}_L \mathbf{v} \neq \mathbf{div}_L \mathbf{v}_t$	scalaire non objectif

(d'autres exemples sont dans le pdf)

Objectivité ou non des dérivées particulières

Dérivée particulière d'une grandeur scalaire objective

Théorème

La dérivée particulière d'une grandeur objective scalaire est une grandeur scalaire objective.

Dérivée particulière d'une grandeur objective non scalaire

Théorème

La dérivée particulière d'une grandeur vectorielle ou tensorielle objective est une grandeur non objective.

Démonstration pour un vecteur :

Soit Ψ une grandeur vectorielle objective.

$$\tilde{\Psi} = Q_t \cdot \Psi \quad (\text{objectivité de } \Psi)$$

$$\dot{\tilde{\Psi}} = \dot{Q}_t \cdot \Psi + Q_t \cdot \dot{\Psi} \neq Q_t \cdot \dot{\Psi}$$

Dérivée particulière de grandeurs non objectives

On ne peut rien dire *a priori*. (vérifier au cas par cas)



En bref...

- Grandeur scalaire objective : $\forall t, \tilde{\Psi}_t = \Psi_t$
- Grandeur vectorielle objective : $\forall t, \tilde{\Psi}_t = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\Psi_t) (= \mathbf{Q}_t \cdot \Psi_t)$
- Grandeur tensorielle objective : $\forall t, \tilde{\Psi}_t = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\Psi_t)$
- Si $\Psi(P, t)$ est un champ matériel objectif alors :
 - $\mathbf{grad}_E \Psi$ est objectif,
 - $\mathbf{div}_E \Psi$ est objectif,
 - $\mathbf{rot}_E \Psi$ est objectif,
 - $\Delta_E \Psi$ est objectif,
 - si Ψ est scalaire objectif : $\dot{\Psi}$ est objectif,
 - si Ψ est non scalaire objectif : $\dot{\Psi}$ est non objectif.
- Si $\Psi(P, t)$ est un champ matériel non objectif :
pas de théorème : vérifier au cas par cas.



Tenseurs de déformation

Dilatations

Distorsions

Déviation

Décomposition des déformations

Petites déformations

Changements d'observateur

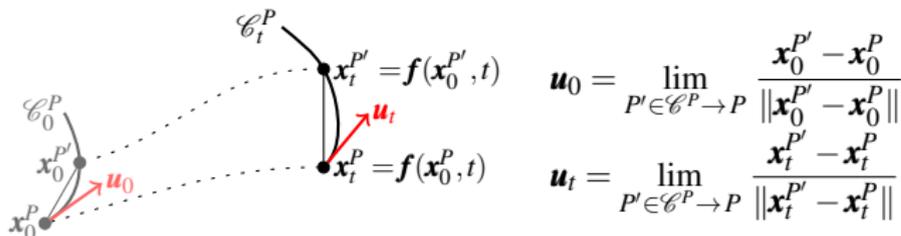
En bref...

Quatrième partie

Déformation

Direction matérielle

Direction matérielle



$$\mathbf{u}_0 = \lim_{P' \in \mathcal{C}^P \rightarrow P} \frac{\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P}{\|\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P\|}$$

$$\mathbf{u}_t = \lim_{P' \in \mathcal{C}^P \rightarrow P} \frac{\mathbf{x}_t^{P'} - \mathbf{x}_t^P}{\|\mathbf{x}_t^{P'} - \mathbf{x}_t^P\|}$$

Définitions :

\mathcal{C}_0^P : position de référence du chemin matériel \mathcal{C}^P issu de P ;

\mathcal{C}_t^P : position actuelle du même chemin matériel \mathcal{C}^P issu de P ;

\mathbf{u}_0 : direction de référence de la direction matérielle issue de P ;

\mathbf{u}_t : direction actuelle de la même direction matérielle issue de P .

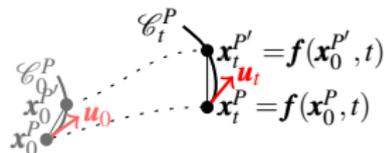
Relation entre \mathbf{u}_0 et \mathbf{u}_t : (rappel : $\mathbf{x}_t^{P'} - \mathbf{x}_t^P = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P) + \dots$)

$$\mathbf{u}_t = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u}_0 = \frac{\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{u}_t}{\|\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{u}_t\|} \quad (\text{détail du calcul dans le pdf})$$

Dilatation linéique

Soit P une particule et soit $P' \in \mathcal{C}^P$.

1.– On identifie les particules par leur position de réf. ($\mathbf{x}_0^{P'} \in \mathcal{C}_0^P$)



$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t^{P'} - \mathbf{x}_t^P &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_0^{P'}, t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0^P, t) \\ &= \mathbf{F} \cdot (\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P) + \dots \\ \|\mathbf{x}_t^{P'} - \mathbf{x}_t^P\|^2 &= (\mathbf{F} \cdot (\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P)) \cdot (\mathbf{F} \cdot (\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P)) + \dots \\ &= (\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P) \cdot \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} \cdot (\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P) + \dots \\ \frac{\|\mathbf{x}_t^{P'} - \mathbf{x}_t^P\|^2}{\|\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P\|^2} &= \frac{\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P}{\|\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P\|} \cdot \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P}{\|\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P\|} + \dots \\ \left(\frac{\ell_t}{\ell_0}\right)^2 &= \bar{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{u}}_0 + \dots \end{aligned}$$

Dilatation linéique d'une direction matérielle issue de P

$$K_\ell(\mathbf{u}) = \lim_{P' \in \mathcal{C}^P \rightarrow P} \frac{\ell_t}{\ell_0}$$

Quand $P' \in \mathcal{C}^P \rightarrow P$, $\bar{\mathbf{u}}_0 \rightarrow \mathbf{u}_0$, $\Rightarrow K_\ell(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0)^{\frac{1}{2}}$

2.– On identifie les particules par leur position actuelle ($\mathbf{x}_t^{P'} \in \mathcal{C}_t^P$)

$$\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}_t^{P'}, t) - \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}_t^P, t) \quad \dots \quad \left(\frac{\ell_0}{\ell_t}\right)^2 = \bar{\mathbf{u}}_t \cdot \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{u}}_t + \dots$$

Quand $P' \in \mathcal{C}^P \rightarrow P$, $\bar{\mathbf{u}}_t \rightarrow \mathbf{u}_t$, $\Rightarrow K_\ell(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}_t \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top)^{-1} \cdot \mathbf{u}_t)^{-\frac{1}{2}}$

Tenseurs de déformation (entre t_0 et t)

Rappel : $K_\ell(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0)^{\frac{1}{2}} = (\mathbf{u}_t \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top)^{-1} \cdot \mathbf{u}_t)^{-\frac{1}{2}}$

Tenseurs basés sur $\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F}$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} \quad (\text{Cauchy-Green droit})$$

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}} \quad (\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U})$$

$$\mathbf{L} = \ln \mathbf{U}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{G}) \quad (\text{Green-Lagrange droit})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^U = \mathbf{U} - \mathbf{G}$$

$$\vdots$$
Tenseurs basés sur $\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top$

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top \quad (\text{Cauchy-Green gauche})$$

$$\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{B}} \quad (\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R})$$

$$\mathbf{M} = \ln \mathbf{V}$$

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{G}) \quad (\text{Green-Lagrange gauche})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^V = \mathbf{V} - \mathbf{G}$$

$$\vdots$$

(On trouve aussi des tenseurs de déformation de Hill, de Finger, d'Euler-Almansi, de Hencky, ...)

Changements d'observateur : (rappel : $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}_t^\top$, non objectif)

Tenseurs basés sur $\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F}$: $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{Q}_0^\top$ (non objectifs)

Tenseurs basés sur $\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top$: $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{Q}_t^\top$ (objectifs)

Tous ces tenseurs de déformation sont des champs matériels ($\mathbf{X}(P, t)$).
Ils peuvent donc être décrits par la méthode de Lagrange ($\mathbf{X}_L(\mathbf{x}_0, t)$)
ou par la méthode d'Euler ($\mathbf{X}_E(\mathbf{x}_t, t)$) : $\mathbf{X}(P, t) = \mathbf{X}_L(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{X}_E(\mathbf{x}_t, t)$

Tenseurs de déformation

Dilatations

Distorsions

Déviation

Décomposition des déformations

Petites déformations

Changements d'observateur

En bref...

Propriétés des tenseurs de déformation

Relations entre tenseurs objectifs et non objectifs :

(rappel : \mathbf{R} est la rotation des décompositions polaires $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$)

$$\mathbf{V} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T = \mathcal{R}_{\mathbf{R}}(\mathbf{U}) \quad \mathbf{B} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^T = \mathcal{R}_{\mathbf{R}}(\mathbf{C}) \quad \text{etc.}$$

Directions propres :

- Les tenseurs non objectifs ont les mêmes directions propres : $\{\mathbf{e}_i^U\}$.
- Les tenseurs objectifs ont les mêmes directions propres : $\{\mathbf{e}_i^V\}$.
- La relation entre les directions propres est : $\mathbf{e}_i^V = \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_i^U = \mathcal{R}_{\mathbf{R}}(\mathbf{e}_i^U)$.

Valeurs propres :

- Les valeurs propres (communes) de \mathbf{U} et \mathbf{V} sont appelées dilatations linéiques principales : $\{\lambda_\bullet\} \quad (\lim \frac{\ell_t}{\ell_0})$.
- Les valeurs propres de $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2$ et $\mathbf{B} = \mathbf{V}^2$ sont $\{\lambda_\bullet^2\}$.
- Les valeurs propres de $\mathbf{L} = \ln \mathbf{U}$ et $\mathbf{M} = \ln \mathbf{V}$ sont $\{\ln \lambda_\bullet\}$.
- Les valeurs propres de \mathbf{E} et \mathbf{J} sont $\{\frac{1}{2}(\lambda_\bullet^2 - 1)\}$.
- Les valeurs propres de $\boldsymbol{\varepsilon}^U$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^V$ sont $\{\lambda_\bullet - 1\}$ (allongement relatif).

En cas de non déformation :

$$\mathbf{C} = \mathbf{B} = \mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{G} \quad \mathbf{L} = \mathbf{M} = \mathbf{E} = \mathbf{J} = \boldsymbol{\varepsilon}^U = \boldsymbol{\varepsilon}^V = \mathbf{0}$$

Dilatation volumique

Soient une particule P et 3 particules voisines P' , P'' et P''' .

On pose :

$$v_0 = [(\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P), (\mathbf{x}_0^{P''} - \mathbf{x}_0^P), (\mathbf{x}_0^{P'''} - \mathbf{x}_0^P)] \quad (\text{produit mixte, volume})$$

$$v_t = [(\mathbf{x}_t^{P'} - \mathbf{x}_t^P), (\mathbf{x}_t^{P''} - \mathbf{x}_t^P), (\mathbf{x}_t^{P'''} - \mathbf{x}_t^P)]$$

(gradient de la transformation : $\mathbf{x}_t^{P'} - \mathbf{x}_t^P = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P) + \dots$, etc.)

$$\frac{v_t}{v_0} = \det \mathbf{F} + \dots \quad (\det \mathbf{F} \text{ indépendant des positions de référence de } P', P'' \text{ et } P''')$$

Dilatation volumique en une particule P

$$K_v = \lim_{\substack{P' \in \mathcal{C}^{1P} \rightarrow P \\ P'' \in \mathcal{C}^{2P} \rightarrow P \\ P''' \in \mathcal{C}^{3P} \rightarrow P}} \frac{v_t}{v_0}$$

$$K_v = \det \mathbf{F} = \det \mathbf{U} = \det \mathbf{V} = (\det \mathbf{C})^{\frac{1}{2}} = (\det \mathbf{B})^{\frac{1}{2}} = \dots > 0$$

Si $0 < K_v < 1$: contraction volumique en P .

Si $K_v > 1$: expansion volumique en P .

Dilatation surfacique

Facette matérielle

Plan engendré par deux directions matérielles distinctes issues de P .

Normales unitaires de référence et actuelle :

$$\mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{u}_0 \wedge \mathbf{u}'_0}{\|\mathbf{u}_0 \wedge \mathbf{u}'_0\|} \quad \mathbf{n}_t = \frac{\mathbf{u}_t \wedge \mathbf{u}'_t}{\|\mathbf{u}_t \wedge \mathbf{u}'_t\|} ; \quad \mathbf{n}_t = \frac{\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0}{\|\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0\|} \Leftrightarrow \mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{n}_t}{\|\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{n}_t\|} \quad (\text{pdf})$$

Soient une particule P et 2 particules voisines P' et P'' .

$$\bar{\mathbf{n}}_0 s_0 = (\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P) \wedge (\mathbf{x}_0^{P''} - \mathbf{x}_0^P) \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{n}}_t s_t = (\mathbf{x}_t^{P'} - \mathbf{x}_t^P) \wedge (\mathbf{x}_t^{P''} - \mathbf{x}_t^P)$$

($\mathbf{x}_t^{P'} - \mathbf{x}_t^P = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P) + \dots$, etc.)

$$\frac{s_t}{s_0} = (\det \mathbf{F}) \|\mathbf{F}^{-\top} \cdot \bar{\mathbf{n}}_0\| + \dots \quad (\mathbf{F}^{-\top} \cdot \bar{\mathbf{n}}_0 \text{ ne dépend que de la normale unitaire})$$

Dilatation surfacique d'une facette matérielle

$$K_s(\mathbf{n}) = \lim_{\substack{P' \in \mathcal{C}^{1P} \rightarrow P \\ P'' \in \mathcal{C}^{2P} \rightarrow P}} \frac{s_t}{s_0}$$

$$K_s(\mathbf{n}) = (\det \mathbf{F}) \|\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0\| = K_v \|\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{n}_0\| = K_v \|\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_t\|^{-1} = \dots > 0$$

Si $0 < K_s(\mathbf{n}) < 1$: contraction surfacique de la facette matérielle.

Si $K_s(\mathbf{n}) > 1$: expansion surfacique de la facette matérielle.

Distorsion stérique

Soient 3 directions matérielles issues de P initialement orthogonales.

$$[\mathbf{u}_0, \mathbf{u}'_0, \mathbf{u}''_0] = \pm 1 \quad (\text{orthonormés})$$

$$\frac{[\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t]}{[\mathbf{u}_0, \mathbf{u}'_0, \mathbf{u}''_0]} = \frac{1}{[\mathbf{u}_0, \mathbf{u}'_0, \mathbf{u}''_0]} \left[\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|}, \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}'_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}'_0\|}, \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}''_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}''_0\|} \right] = \dots = \frac{K_v}{K_\ell K'_\ell K''_\ell} > 0$$

(les produits mixtes $[\mathbf{u}_0, \mathbf{u}'_0, \mathbf{u}''_0]$ et $[\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t]$ ont donc le même signe)

Distorsion stérique de 3 directions matérielles initialement orthogonales

$$\delta^s(\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{u}'') = \frac{[\mathbf{u}_0, \mathbf{u}'_0, \mathbf{u}''_0]}{[\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t]} = \frac{K_\ell K'_\ell K''_\ell}{K_v} \in [1; +\infty[$$

La distorsion stérique dépend des 3 directions matérielles issues de P .

Propriétés : (démonstrations en annexe A2 du pdf)

- La distorsion stérique maximale autour d'une particule P est :

$$\delta_{max}^s = \frac{\sqrt{3}}{9} \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{\frac{3}{2}}}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} = \frac{\sqrt{3}}{9} \frac{B_I^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{B_{III}}} = \dots$$

- En P , il existe une infinité de triplets de directions matérielles initialement orthogonales qui ont cette distorsion maximale.

Distorsion angulaire

Soient 2 directions matérielles issues de P initialement orthogonales.

$$\sin \alpha_0 = 1 \quad (u_0 \perp u'_0; \alpha_0 = \pi/2)$$

$$\sin \alpha_t \mathbf{n}_t = \mathbf{u}_t \wedge \mathbf{u}'_t = \dots = \frac{K_s}{K_\ell K'_\ell} \mathbf{n}_t \quad (\text{angle entre les directions actuelles})$$

Distorsion angulaire de 2 directions matérielles initialement orthogonales

$$\delta^a(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = \frac{K_\ell K'_\ell}{K_s} = \frac{1}{\sin \alpha_t} \in [1; +\infty[$$

La distorsion angulaire dépend des 2 directions matérielles issues de P .

Propriétés : (démonstrations en annexe A2 du pdf)

- La distorsion angulaire maximale autour d'une particule est :

$$\delta_{max}^a = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \right)$$

- Il existe un couple unique de directions matérielles initialement orthogonales qui atteint cette distorsion maximale.

Déviations d'une direction matérielle

Soit une direction matérielle \mathbf{u} :

direction de référence : \mathbf{u}_0 (unitaire)

direction actuelle : \mathbf{u}_t (unitaire)

Déviations d'une direction matérielle (entre t_0 et t)

Angle β défini par : $\cos \beta = \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_t$ $\beta \in [0; \pi]$ ($\cos \beta \in [-1; 1]$)

Chaque direction matérielle issue de P a sa propre déviation β .

Expression en fonction des directions de référence et actuelle :

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \mathbf{u}_0 \cdot \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|} = \frac{\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{u}_0}{K_\ell} \\ &= \mathbf{u}_t \cdot \frac{\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{u}_t}{\|\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{u}_t\|} = \frac{\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{R}^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{u}_t}{K_\ell} \end{aligned}$$

Le calcul de la déviation d'une direction matérielle nécessite la connaissance de la déformation mais aussi de la rotation \mathbf{R} .

Déformation sphérique en une particule

Déformation sphérique en une particule P

Les dilatations linéiques de toutes les directions matérielles issues de P sont égales.

Caractérisations : (exercices)

- dilatations linéiques principales :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$$

- tenseurs de déformation :

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} = \lambda \mathbf{G} \quad \mathbf{C} = \mathbf{B} = \lambda^2 \mathbf{G} \quad \mathbf{L} = \mathbf{M} = \ln \lambda \mathbf{G}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{J} = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1) \mathbf{G} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^U = \boldsymbol{\varepsilon}^V = (\lambda - 1) \mathbf{G}$$

(déformation sphérique \Leftrightarrow tenseur de déformation sphérique)

- dilatations (toute direction matérielle ou facette autour de P) :

$$K_\ell(\mathbf{u}) = \lambda \quad K_s(\mathbf{n}) = \lambda^2 \quad K_v = \lambda^3$$

- distorsions (tout triplet ou couple de directions mat. init. ortho.) :

$$\delta^s(\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{u}'') = 1 \quad \delta^a(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = 1$$

Remarque : déviation d'une direction matérielle

$$\cos \beta = \frac{\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}_0}{\lambda} = \frac{\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{u}_t}{\lambda} \quad (\mathbf{R} \text{ rotation quelconque})$$

Déformation isovolume en une particule

Déformation isovolume en une particule P

La dilatation volumique est $K_V = 1$.

Caractérisations : (exercices)

- dilatations linéiques principales :

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$$

- tenseurs de déformation :

$$\det \mathbf{U} = \det \mathbf{V} = \det \mathbf{C} = \det \mathbf{B} = e^{\text{tr} \mathbf{L}} = e^{\text{tr} \mathbf{M}} = 1$$

$$\mathbf{E}_I + 2\mathbf{E}_{II} + 4\mathbf{E}_{III} = 0 \quad \mathbf{J}_I + 2\mathbf{J}_{II} + 4\mathbf{J}_{III} = 0$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_I^U + \boldsymbol{\varepsilon}_{II}^U + \boldsymbol{\varepsilon}_{III}^U = 0 \quad \boldsymbol{\varepsilon}_I^V + \boldsymbol{\varepsilon}_{II}^V + \boldsymbol{\varepsilon}_{III}^V = 0$$

Remarques :

- dilatations linéiques et surfaciques *a priori* quelconques,
- distorsions stériques et angulaires *a priori* quelconques,
- déviations *a priori* quelconques.

Décomposition d'une déformation

Théorème (démonstrations dans le pdf)

Toute déformation peut être décomposée de manière **unique** et **commutative** en une déformation sphérique et une déformation isovolume.

- tenseurs **C** et **B** :

$$\mathbf{C} = (K_V^{\frac{2}{3}} \mathbf{G}) \cdot (K_V^{-\frac{2}{3}} \mathbf{C}) \quad \mathbf{B} = (K_V^{\frac{2}{3}} \mathbf{G}) \cdot (K_V^{-\frac{2}{3}} \mathbf{B})$$

- tenseurs **U** et **V** :

$$\mathbf{U} = (K_V^{\frac{1}{3}} \mathbf{G}) \cdot (K_V^{-\frac{1}{3}} \mathbf{U}) \quad \mathbf{V} = (K_V^{\frac{1}{3}} \mathbf{G}) \cdot (K_V^{-\frac{1}{3}} \mathbf{V})$$

- tenseurs **L** et **M** :

$$\mathbf{L} = \left(\frac{\ln K_V}{3} \mathbf{G}\right) + \left(\mathbf{L} - \frac{\ln K_V}{3} \mathbf{G}\right) \quad \mathbf{M} = \left(\frac{\ln K_V}{3} \mathbf{G}\right) + \left(\mathbf{M} - \frac{\ln K_V}{3} \mathbf{G}\right)$$

- tenseurs **E** (et **J**) :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{sph} + \mathbf{E}^{isov} + \mathbf{E}^{sph} \cdot \mathbf{E}^{isov} \quad (\text{composition commutative car } \mathbf{E}^{sph} \text{ est sphérique})$$

$$\text{où } \mathbf{E}^{sph} = \frac{1}{2} (K_V^{\frac{2}{3}} - 1) \mathbf{G} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}^{isov} = K_V^{-\frac{2}{3}} \mathbf{E} + \frac{1}{2} (K_V^{-\frac{2}{3}} - 1) \mathbf{G}$$

- tenseurs $\boldsymbol{\varepsilon}^U$ (et $\boldsymbol{\varepsilon}^V$) :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^U = \boldsymbol{\varepsilon}^{Usph} + \boldsymbol{\varepsilon}^{Uisov} + \boldsymbol{\varepsilon}^{Usph} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{Uisov} \quad (\text{composition commutative})$$

$$\text{où } \boldsymbol{\varepsilon}^{Usph} = (K_V^{\frac{1}{3}} - 1) \mathbf{G} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{Uisov} = K_V^{-\frac{1}{3}} \boldsymbol{\varepsilon}^U + (K_V^{-\frac{1}{3}} - 1) \mathbf{G}$$

Petites déformations

Tous les tenseurs de déformation définis précédemment sont évidemment utilisables quand les déformations sont petites.

Théorème

Les dilatations linéiques principales λ_\bullet en P sont des extrémums des dilatations linéiques de toutes les directions matérielles issues de P . (démonstration en annexe A2 du pdf)

Définition : petite déformation

Les dilatations linéiques de toutes les directions matérielles issues de P sont proches de 1.

Petite déformation \Leftrightarrow les extrémums λ_\bullet sont proches de 1.

On pose : $\lambda_1 = 1 + \eta_1$ $\lambda_2 = 1 + \eta_2$ $\lambda_3 = 1 + \eta_3$

avec $|\eta_1| \ll 1$ et $|\eta_2| \ll 1$ et $|\eta_3| \ll 1$ (infiniments petits du premier ordre)

Formules simplifiées en petites déformations

Rappel : les $\lambda_{\bullet} = 1 + \eta_{\bullet}$ sont les valeurs propres de \mathbf{U} et \mathbf{V}

Calcul de $\boldsymbol{\varepsilon}^U$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^V$: (dans leur base propre)

$$\boldsymbol{\varepsilon}^U = \mathbf{U} - \mathbf{G} = \sum_{i=1}^3 \eta_i \mathbf{e}_i^U \otimes \mathbf{e}_i^U \quad \boldsymbol{\varepsilon}^V = \mathbf{V} - \mathbf{G} = \sum_{i=1}^3 \eta_i \mathbf{e}_i^V \otimes \mathbf{e}_i^V$$

Les valeurs propres de ces tenseurs sont $\ll 1$, $\|\boldsymbol{\varepsilon}^U\| = \|\boldsymbol{\varepsilon}^V\| \ll 1$.

Approximation de la dilatation linéique :

$$\begin{aligned} K_{\ell}(\mathbf{u}) &= (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{U}^2 \cdot \mathbf{u}_0)^{\frac{1}{2}} = (\mathbf{u}_0 \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}^U + \mathbf{G})^2 \cdot \mathbf{u}_0)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\mathbf{u}_0 \cdot ((\boldsymbol{\varepsilon}^U)^2 + 2\boldsymbol{\varepsilon}^U + \mathbf{G}) \cdot \mathbf{u}_0)^{\frac{1}{2}} \simeq (\mathbf{u}_0 \cdot (2\boldsymbol{\varepsilon}^U + \mathbf{G}) \cdot \mathbf{u}_0)^{\frac{1}{2}} \\ &\simeq (2\mathbf{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^U \cdot \mathbf{u}_0 + 1)^{\frac{1}{2}} \simeq \mathbf{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^U \cdot \mathbf{u}_0 + 1 \quad (\text{si } \varepsilon \ll 1 \text{ alors } \sqrt{1+2\varepsilon} \simeq 1+\varepsilon) \end{aligned}$$

Formules simplifiées : (approximations similaires, voir le pdf)

$$\begin{aligned} K_{\ell}(\mathbf{u}) &\simeq 1 + \mathbf{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^U \cdot \mathbf{u}_0 && \simeq 1 + \mathbf{u}_t \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^V \cdot \mathbf{u}_t \\ K_s(\mathbf{n}) &\simeq 1 + \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^U - \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^U \cdot \mathbf{n}_0 && \simeq 1 + \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^V - \mathbf{n}_t \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^V \cdot \mathbf{n}_t \\ K_v &\simeq 1 + \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^U && \simeq 1 + \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^V \\ \delta^s(\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{u}'') &\simeq 1 + \mathcal{O}(\eta_{\bullet})^2 && (\text{rappel : } \delta^s = \frac{K_{\ell}(\mathbf{u})K_{\ell}(\mathbf{u}')K_{\ell}(\mathbf{u}'')}{K_v}) \\ \delta^a(\mathbf{u}, \mathbf{u}') &\simeq 1 + \mathcal{O}(\eta_{\bullet})^2 && (\text{rappel : } \delta^a = \frac{K_{\ell}(\mathbf{u})K_{\ell}(\mathbf{u}')}{K_s}) \end{aligned}$$

Le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}$ (petites « perturbations »)

Expression de \boldsymbol{E} en fonction du déplacement \boldsymbol{u} :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{G}) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{F}^\top \cdot \boldsymbol{F} - \boldsymbol{G}) = \frac{1}{2} ((\boldsymbol{G} + \text{grad}_L \boldsymbol{u})^\top \cdot (\boldsymbol{G} + \text{grad}_L \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{G}) \\ &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{G} + \text{grad}_L \boldsymbol{u} + \text{grad}_L^\top \boldsymbol{u} + \text{grad}_L^\top \boldsymbol{u} \cdot \text{grad}_L \boldsymbol{u} - \boldsymbol{G}) \quad (\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{G} = \boldsymbol{T}) \\ &= \frac{1}{2} (\text{grad}_L \boldsymbol{u} + \text{grad}_L^\top \boldsymbol{u} + \text{grad}_L^\top \boldsymbol{u} \cdot \text{grad}_L \boldsymbol{u})\end{aligned}$$

Petite « perturbation »

On suppose que $\|\text{grad}_L \boldsymbol{u}\| \ll 1$.

On fait une « pseudo-linéarisation » en $\text{grad}_L \boldsymbol{u}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\text{grad}_L \boldsymbol{u} + \text{grad}_L^\top \boldsymbol{u}) = \text{sym grad}_L \boldsymbol{u}$$

(on a négligé $\|\text{grad}_L \boldsymbol{u}\|^2$ devant $\|\text{grad}_L \boldsymbol{u}\|$!)

1.- Confusion courante

$\|\text{grad}_L \boldsymbol{u}\| \ll 1$ (petite « perturbation ») $\Rightarrow \|\boldsymbol{E}\| \ll 1$ (petite déformation)
 mais la réciproque est fautive : $\|\boldsymbol{E}\| \ll 1 \not\Rightarrow \|\text{grad}_L \boldsymbol{u}\| \ll 1$

► Exemple

2.- Restriction sévère sur les mouvements envisageables :

$\|\text{grad}_L \boldsymbol{u}\| \ll 1 \Leftrightarrow$ le champ de déplacements \boldsymbol{u} est quasi-uniforme.
 Pour l'observateur, le mouvement doit être une quasi-translation.

Formules simplifiées avec $\boldsymbol{\varepsilon}$

Si on admet les restrictions introduites pour utiliser $\boldsymbol{\varepsilon}$:

- 1 $\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\|^2$ négligé devant $\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\|$,
 - 2 mouvement de quasi-translation pour l'observateur choisi,
- alors on a les résultats suivants :

$$K_\ell(\mathbf{u}) \simeq 1 + \mathbf{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}_0 \quad (K_\ell - 1 : \text{dilatation linéique relative})$$

$$K_s(\mathbf{n}) \simeq 1 + \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_0 \quad (K_s - 1 : \text{dilatation surfacique relative})$$

$$K_v \simeq 1 + \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (K_v - 1 : \text{dilatation volumique relative})$$

$$\delta^s(\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{u}'') \simeq 1 + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|)^2$$

$$\delta^a(\mathbf{u}, \mathbf{u}') \simeq 1 + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|)^2$$

Les formules sont semblables à celles avec $\boldsymbol{\varepsilon}^U$ en petites déformations, mais $\boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym}(\mathbf{F} - \mathbf{G}) = \text{sym}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}) - \mathbf{G} \neq \boldsymbol{\varepsilon}^U$ (sauf si $\mathbf{R} = \mathbf{G}$)

Changements d'observateur

Grandeurs bien définies : (leur définition est universelle)

Tenseurs basés sur $\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$	$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{Q}_0^T$	non objectifs	(rappel)
Tenseurs basés sur $\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$	$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{Q}_t^T$	objectifs	(rappel)
Dilatation linéique	$\tilde{K}_\ell = K_\ell$	objective	(pdf)
Dilatation surfacique	$\tilde{K}_s = K_s$	objective	(pdf)
Dilatation volumique	$\tilde{K}_v = K_v$	objective	(pdf)
Distorsion angulaire	$\tilde{\delta}^a = \delta^a$	objective	(pdf)
Distorsion stérique	$\tilde{\delta}^s = \delta^s$	objective	(pdf)
Déviation	$\tilde{\beta} \neq \beta$	non objective	(pdf)

Grandeur mal définie : $\boldsymbol{\varepsilon}$

- L'hypothèse de petite « perturbation » n'est pas universelle :

$$\forall \mathcal{R} \forall \tilde{\mathcal{R}}, \quad \|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\| \ll 1 \not\Rightarrow \|\mathbf{grad}_L \tilde{\mathbf{u}}\| \ll 1$$

- Changement d'observateur :

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{sym}(\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_L \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}_0^T) + \mathbf{sym}(\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{Q}_0^T) - \mathbf{G} \neq \mathbf{Q}_t \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{Q}_t^T \quad (\text{pdf})$$

En bref...

- La déformation entre un instant de référence et un instant actuel est décrite par un champ de tenseurs de déformation $\mathbf{X}(P, t)$.
- Tous les tenseurs de déformation permettent de calculer la dilatation linéique de toute direction matérielle issue de P :
 - Les tenseurs non objectifs identifient la direction matérielle par sa direction de référence ;
 - Les tenseurs objectifs identifient la direction matérielle par sa direction actuelle ;
- Tous les tenseurs de déformation (éventuellement petite) permettent d'évaluer les grandeurs scalaires objectives suivantes :
 - les dilatations linéiques, surfaciques et volumiques,
 - les distorsions angulaires et stériques.
- Cas des « petites perturbations » :
 - L'hypothèse $\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\| \ll 1$ n'est pas universelle car la quasi-translation n'est pas vraie pour tous les observateurs,
 - $\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\|^2$ est négligé devant $\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\|$ (pseudo-linéarisation).

Tenseurs de déformation

Dilatations

Distorsions

Déviation

Décomposition des déformations

Petites déformations

Changements d'observateur

En bref...



Introduction

Taux de
dilatation
linéique

Autres taux

Mvt. des
directions
matérielles

En bref...

Cinquième partie

Vitesse de déformation

Introduction

On s'intéresse à la dérivée temporelle (actuelle) de la longueur des biparticules, ainsi qu'à la dérivée temporelle de toutes les grandeurs cinématiques locales qui en découlent.

Deux points de vue équivalents :

- **Point de vue eulérien** : on définit les concepts en analysant le champ des vitesses actuelles.
- **Point de vue lagrangien** : on définit les mêmes concepts en dérivant temporellement les concepts introduits en analyse de la déformation.

Les développements qui suivent montrent que la dérivée pertinente est la dérivée temporelle logarithmique :

Taux (en cinématique)

On appelle taux d'une grandeur cinématique réelle, sa dérivée temporelle logarithmique. Taux de x : $\tau_x = \frac{\dot{x}}{x}$

Taux de dilatation linéique (point de vue eulérien)

Soit une particule P et un chemin matériel \mathcal{C}^P issu de P , de particule générique $P' \in \mathcal{C}^P$.

$$\begin{aligned} \dot{\ell}_t &= \|\dot{\mathbf{x}}'_t - \dot{\mathbf{x}}_t\| = \frac{\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t}{\|\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t\|} \cdot (\dot{\mathbf{x}}'_t - \dot{\mathbf{x}}_t) \quad (\text{car } \|\mathbf{v}\| = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \cdot \dot{\mathbf{v}}) \\ &= \bar{\mathbf{u}}_t \cdot (\mathbf{v}'_t - \mathbf{v}_t) = \bar{\mathbf{u}}_t \cdot (\mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot (\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t) + \dots) \\ \frac{\dot{\ell}_t}{\ell_t} &= \bar{\mathbf{u}}_t \cdot \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{u}}_t + \dots \\ &= \bar{\mathbf{u}}_t \cdot \mathbf{sym grad}_E \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{u}}_t + \dots \quad (\text{car } \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = 0, \forall \mathbf{A} \text{ antisymétrique}) \end{aligned}$$

Taux de dilatation linéique dans une direction matérielle

$$\tau_\ell(\mathbf{u}) = \lim_{P' \in \mathcal{C}^P \rightarrow P} \frac{\dot{\ell}_t}{\ell_t} = \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{sym grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t$$

Tenseur des taux de déformation en une particule

$$\mathbf{D} = \mathbf{sym grad}_E \mathbf{v}$$

$$\tau_\ell(\mathbf{u}) = \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_t \quad (\text{unité : s}^{-1})$$

Taux de dilatation linéique (point de vue lagrangien)

Rappels : $K_\ell(\mathbf{u}) = \|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|$ $\mathbf{u}_t = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|}$ $\text{grad}_E \mathbf{v} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}$

Dérivée temporelle de K_ℓ : $(= \lim_{P' \rightarrow P} \frac{\ell_t}{\ell_0})$.

$$\dot{K}_\ell(\mathbf{u}) = \|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\| \cdot \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|} \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0) \cdot \quad (\text{car } \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\| \cdot \dot{\mathbf{v}})$$

$$= \mathbf{u}_t \cdot \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_t \cdot \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0$$

$$\frac{\dot{K}_\ell(\mathbf{u})}{K_\ell(\mathbf{u})} = \mathbf{u}_t \cdot \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|} = \mathbf{u}_t \cdot \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{u}_t$$

$$= \mathbf{u}_t \cdot \text{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t = \mathbf{u}_t \cdot \text{sym grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t$$

$$\frac{\dot{K}_\ell(\mathbf{u})}{K_\ell(\mathbf{u})} = \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_t = \tau_\ell(\mathbf{u})$$

Autre démonstration :

$$\tau_\ell(\mathbf{u}) = \lim_{\ell_t} \frac{\dot{\ell}_t}{\ell_t} = \lim_{\ell_0} \frac{\dot{\ell}_t}{\ell_0} = \frac{\lim_{\ell_t} \frac{\dot{\ell}_t}{\ell_t}}{\lim_{\ell_0} \frac{\ell_t}{\ell_0}} = \frac{(\lim_{\ell_0} \frac{\dot{\ell}_t}{\ell_0})}{\lim_{\ell_0} \frac{\ell_t}{\ell_0}} = \frac{\dot{K}_\ell(\mathbf{u})}{K_\ell(\mathbf{u})}$$

$\tau_\ell(\mathbf{u})$ est un scalaire objectif. (démonstration dans le pdf)

Le tenseur des taux de déformation \mathbf{D} n'est pas la dérivée particulière d'un tenseur de déformation.

(les dérivées particulières des tenseurs de déformation et de leurs invariants sont en annexe B du pdf)

Taux de dilatation volumique et surfacique

Le tenseur des taux de déformation \mathbf{D} permet aussi d'évaluer :
(démonstrations similaires au taux de dilatation linéique, point de vue eulérien ou lagrangien)

Taux de dilatation volumique en une particule

$$\tau_v = \lim \frac{\dot{v}_t}{v_t} = \text{tr} \mathbf{D} = \text{div}_E \mathbf{v} = \frac{\dot{K}_v}{K_v}$$

τ_v est un scalaire objectif.

Taux de dilatation surfacique dans une facette matérielle

$$\tau_s(\mathbf{n}) = \lim \frac{\dot{s}_t}{s_t} = \text{tr} \mathbf{D} - \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_t = \frac{\dot{K}_s}{K_s}$$

$\tau_s(\mathbf{n})$ est un scalaire objectif.

Taux de distorsion stérique et angulaire

Soient $(\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{u}'')$ trois directions matérielles initialement orthogonales.

Taux de distorsion stérique

$$\tau_{\delta^s}(\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{u}'') = \frac{\dot{\delta}^s}{\delta^s} = \tau_\ell(\mathbf{u}) + \tau_\ell(\mathbf{u}') + \tau_\ell(\mathbf{u}'') - \tau_v = - \frac{[\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t]}{[\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t]}$$

$\tau_{\delta^s}(\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{u}'')$ est un scalaire objectif.

Soient $(\mathbf{u}, \mathbf{u}')$ deux directions matérielles initialement orthogonales, \mathbf{n} est la normale à la facette matérielle $(\mathbf{u}, \mathbf{u}')$.

Taux de distorsion angulaire

$$\tau_{\delta^a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = \frac{\dot{\delta}^a}{\delta^a} = \tau_\ell(\mathbf{u}) + \tau_\ell(\mathbf{u}') - \tau_s(\mathbf{n}) = - \frac{(\sin \alpha_t)'}{\sin \alpha_t}$$

$\tau_{\delta^a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}')$ est un scalaire objectif.

Si α_t est l'angle actuel $(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t)$: $\dot{\alpha}_t = - \frac{2\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}'_t}{\sin \alpha_t} + \frac{\tau_\ell(\mathbf{u}) + \tau_\ell(\mathbf{u}')}{\tan \alpha_t}$

Mouvement des directions matérielles

Vitesse de rotation d'une direction matérielle : $\boldsymbol{\omega}_t(\mathbf{u})$

$$\boldsymbol{\omega}_t(\mathbf{u}) = \mathbf{u}_t \wedge \dot{\mathbf{u}}_t = \mathbf{u}_t \cdot \text{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}_t \quad (\text{démonstration dans le pdf})$$

Chaque direction matérielle issue d'une particule P a sa propre vitesse de rotation.

(en chaque particule, il en existe au moins une telle que $\boldsymbol{\omega}_t(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$)

$\boldsymbol{\omega}_t(\mathbf{u})$ est un vecteur non objectif :

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_t(\mathbf{u}) &= \mathbf{Q}_t \cdot \boldsymbol{\omega}_t + \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{u}_t \wedge (\mathbf{Q}_t^\top \cdot \dot{\mathbf{Q}}_t \cdot \mathbf{u}_t)) \\ &= \mathbf{Q}_t \cdot \boldsymbol{\omega}_t - \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{u}_t \wedge (\boldsymbol{\omega}_{\tilde{\mathcal{R}}|\mathcal{R}} \wedge \mathbf{u}_t)) \end{aligned}$$

En bref...

Le tenseur taux de déformation $\mathbf{D} = \text{sym grad}_E \mathbf{v}$ permet d'évaluer :

- le taux de dilatation linéique τ_ℓ d'une direction matérielle,
- le taux de dilatation surfacique τ_s d'une facette matérielle,
- le taux de dilatation volumique τ_v en une particule,
- le taux de distorsion stérique τ_{δ^s} ,
- le taux de distorsion angulaire τ_{δ^a} .

Ces scalaires sont objectifs.

La vitesse de rotation d'une direction matérielle n'est pas objective.



Synthèse de la cinématique

Concepts fondamentaux :

- milieu continu
- universalité de relations (définitions, lois, etc.)
- objectivité de grandeurs physiques (scalaires ou non)

Déformation actuelle : (par rapport à une forme de référence choisie)

- Différents tenseurs de déformation :
 - tenseurs non objectifs (construits sur $\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$)
 - tenseurs objectifs (construits sur $\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$)
- dilatations linéique, surfacique et volumique (objectives)
- distorsions angulaire et stérique (objectives)

Taux actuel de déformation : (dérivée temporelle logarithmique)

- Tenseur des taux de déformation : $\mathbf{D} = \text{symgrad}_E \mathbf{v}$ (objectif)
- taux de dilatation linéique, surfacique et volumique (objectifs)
- taux de distorsion angulaire et stérique (objectifs)



Et maintenant une annonce...

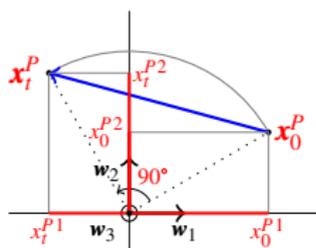
Le prochain épisode s'intitule :

Équations générales de la MMC

Au programme :

- Concepts fondamentaux ;
- Principe de la conservation de la masse ;
- Principe fondamental de la mécanique ;
- Premier principe de la thermodynamique ;
- Second principe de la thermodynamique.

Merci de votre attention.

Exemple d'invalidité de ε 

Soit un observateur et une particule P de position de référence x_0^P .

Le mouvement de toutes les particules est une rotation de 90° autour de w_3 (mouvement de solide).

Vecteur déplacement : $u(P, t) = x_t^P - x_0^P$

$$\begin{aligned} u(P, t) &= (x_t^{P1} - x_0^{P1})w_1 + (x_t^{P2} - x_0^{P2})w_2 + 0w_3 \\ &= (-x_0^{P2} - x_0^{P1})w_1 + (x_0^{P1} - x_0^{P2})w_2 = u_L(x_0, t) \end{aligned}$$

Calcul de ε : (composantes dans $\{w_\bullet\}$)

$$[(\text{grad}_L u)^\bullet] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [\varepsilon^\bullet] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dans ce mouvement de solide, $\|\text{grad}_L u\| = 2 \ll 1$ et $\varepsilon \neq 0$.

Calcul de E : (composantes dans $\{w_\bullet\}$)

$$[(\text{grad}_L^\top u \cdot \text{grad}_L u)^\bullet] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \frac{1}{2} (\text{grad}_L^\top u \cdot \text{grad}_L u + 2\varepsilon) = 0 \quad (\text{dans un solide : pas de déformation})$$

ε est une mauvaise mesure des petites déformations.

À propos de $\mathbf{W} = \text{asym grad}_E \mathbf{v}$

- Le tenseur \mathbf{W} ne permet pas de déterminer la vitesse de rotation des directions matérielles :

$$\boldsymbol{\omega}_t(\mathbf{u}) = \mathbf{u}_t \cdot \text{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}_t = \mathbf{u}_t \cdot (\mathbf{D} + \mathbf{W}) \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}_t$$

- Le tenseur \mathbf{W} est non objectif.
- Son vecteur adjoint $\frac{1}{2} \text{rot}_E \mathbf{v}$ est non objectif.
- Un écoulement « irrotationnel » pour un observateur ne l'est pas pour un autre.
- les noms « tenseur des taux de rotations », « tenseur des vitesses de rotations » ou « tenseur tourbillon » sont donc trompeurs.

On peut se passer de cette « définition » cinématiquement non motivée.