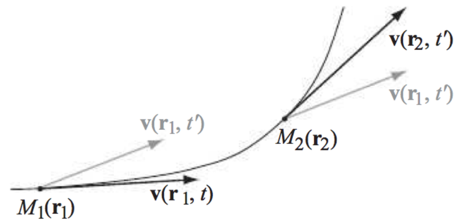
3.1.3 Accélération d'une particule de fluide

Considérons une particule de fluide située au point $M_1(\mathbf{r}_1)$ à l'instant t (Fig. 3.1) ; sa vitesse à cet instant est $\mathbf{v}(\mathbf{r}_1, t)$. À un instant ultérieur $t' = t + \delta t$, cette particule de fluide parvient au point $M_2(\mathbf{r}_2)$ tel que $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}(\mathbf{r}_1, t)\delta t + O(\delta t^2)$ et sa vitesse est devenue $\mathbf{v}(\mathbf{r}_2, t')$. La variation de vitesse $\delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}_2, t') - \mathbf{v}(\mathbf{r}_1, t)$ de cette particule de fluide, dans l'intervalle de temps δt, est associée :

– d'une part, à la variation explicite du champ de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ avec le temps, si l'écoulement n'est pas stationnaire (contribution égale à $[\mathbf{v}(\mathbf{r}_1, t') - \mathbf{v}(\mathbf{r}_1, t)]$) ;

– d'autre part, à l'exploration du champ de vitesse par la particule ; cet effet ne donne une contribution à l'accélération que si ce champ n'est pas uniforme (contribution égale à $[\mathbf{v}(\mathbf{r}_2, t') - \mathbf{v}(\mathbf{r}_1, t')]$).



La variation résultante de vitesse $\delta\mathbf{v}$ s'écrit donc à l'aide d'un développement au premier ordre de chacun des deux termes :

$$\delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}_2, t') - \mathbf{v}(\mathbf{r}_1, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\delta t + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\delta z$$

où δx, δy et δz sont les composantes du vecteur $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. L'accélération de la particule de fluide vaut donc :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} &= \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t} = \lim_{\delta t \to 0} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\frac{\delta z}{\delta t} \right) \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\end{aligned}$$

ou, sous une forme plus compacte :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}. \tag{3.1}$$

La forme symbolique du deuxième terme au second membre fait intervenir un produit scalaire entre le vecteur $\mathbf{v}$ et l'opérateur **grad** de composantes $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ et $\partial/\partial z$. Les figures 3.2a et 3.2b illustrent les deux types de contributions de ce produit scalaire à l'accélération totale dans un écoulement stationnaire (tel que $\partial\mathbf{v}/\partial t = \mathbf{0}$).

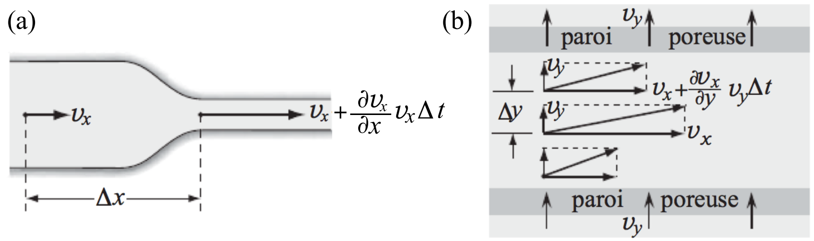


FIG. 3.2 – Deux contributions à l'effet d'accélération convective en écoulement stationnaire ; (a) accélération des particules de fluide dans un écoulement où des gradients de vitesse longitudinaux sont présents ; (b) accélération des particules de fluide en présence d'une composante de vitesse transverse à l'écoulement moyen produite, par exemple, par un écoulement à travers des parois poreuses.

Dans le premier cas (a), il existe une composante non nulle du gradient de vitesse $\partial v_x/\partial x$ selon la direction de l'écoulement. Par conséquent, une particule entraînée par ce dernier subit une accélération égale à $v_x\,(\partial v_x/\partial x)$. Dans le deuxième cas (b), il existe un gradient transverse $\partial v_x/\partial y$ non nul de la composante de la vitesse de l'écoulement selon Ox. Supposons qu'il existe, de plus, une composante non nulle v_y de la vitesse dans la direction Oy. Il en résulte une variation de la vitesse v_x *le long de la trajectoire d'une particule* dont la dérivée temporelle est égale à $v_y\,(\partial v_x/\partial y)$. Ces deux termes sont inclus dans l'expression $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})v_x$ qui est la composante suivant x du vecteur $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$.

On peut écrire l'équivalent de l'équation (3.1) pour exprimer la variation d'autres grandeurs que la vitesse le long de la trajectoire d'une particule de fluide : on peut, par exemple, exprimer ainsi la variation de la température $T(\mathbf{r}, t)$ de la particule ou de la concentration $C(\mathbf{r}, t)$ d'une espèce chimique. Ainsi, la variation de température d'une particule *le long de sa trajectoire* vérifie :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})T \tag{3.2}$$

où $\partial T/\partial t$ est la dérivée temporelle de la température du fluide en un point fixe donné. Le second terme traduit la variation de T due à l'écoulement du fluide dans la direction du gradient de température (cette équation se démontre comme la relation (3.1)).