Mécanique des fluides

I — Cinématique des fluides

Description d'un fluide

Un fluide est un milieu matériel continu dont les déformations peuvent prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut : il peut se mettre sous une forme quelconque lorsqu'il est soumis à un système de forces, ces forces pouvant être aussi faibles que l'on veut, à condition qu'on les fasse agir pendant un temps assez long.
On distingue trois échelles de longueur dans la description d'un fluide :
- **L'échelle microscopique** définie au niveau moléculaire ; c'est le libre parcours moyen ℓ caractérisant le mouvement des molécules du fluides, typiquement $\ell \approx 100$ nm pour un gaz, $\ell \approx 10^{-10}$ m pour un liquide.
- **L'échelle macroscopique** L, caractéristique de l'écoulement (largeur d'un canal, diamètre d'un tuyau, taille d'un obstacle).
- **L'échelle mésoscopique** a, intermédiaire entre les deux échelles précédentes : $\boxed{\ell \ll a \ll L}$. Un volume de fluide de dimension mésoscopique a^3 est suffisamment petit à l'échelle macroscopique pour être considéré comme ponctuel, et suffisamment grand à l'échelle microscopique pour contenir un grand nombre de molécules.

L'échelle mésoscopique permet de définir des grandeurs locales, définies statistiquement sur le grand nombre de molécules du volume a^3 situé au point considéré.

Une **particule de fluide** un système **fermé**, de volume mésoscopique $d\tau = a^3$. Elle permet de définir statistiquement des grandeurs locales intensives (température, pression, masse volumique, vitesse).

- ➤ Le modèle de particule de fluide n'est pas toujours utilisable : il faut que $\ell \ll L$. Dans le cas d'un gaz à très basse pression, ou d'un système d'échelle L très petite, on peut avoir $\ell \approx L$, ce qui rend impossible la description à l'échelle mésoscopique.
- ➤ L'échelle mésoscopique permet de décrire le fluide comme un **milieu continu**.
- ➤ Par définition, la masse d'une particule de fluide est constante (c'est un système fermé).

Description de Lagrange	Description d'Euler
On suit l'évolution d'*une* particule de fluide au cours de son mouvement. Sa vitesse est $\vec{V}(M,t)$ quand la particule de fluide est en M à l'instant t.	On se place en un point fixe M, et on définit le **champ des vitesses** $\vec{v}(M,t)$: il représente la vitesse de la particule de fluide qui passe en ce point M à l'instant t.
L'ensemble des positions successives de la particule de fluide étudiée définit sa **trajectoire**.	Les lignes de champ du champ des vitesses définissent les **lignes de courant**. La vitesse est tangente en chaque point d'une ligne de courant. Le fluide est décrit par des **champs eulériens** : – champ de pression $P(M,t)$; – champ de masse volumique $\mu(M,t)$; – champ de vitesse $\vec{v}(M,t)$.

- ➤ La description de Lagrange est adaptée à l'utilisation des lois de la dynamique (on décrit un système fermé), mais ne permet pas de prendre en compte les conditions aux limites imposées à un écoulement (elles s'appliquent en point point de l'espace, pas à une particule de fluide donnée).
- ➤ La description d'Euler est adaptée à la prise en compte des conditions aux limites, mais pas à l'utilisation des lois de la dynamique.
- ➤ Les trajectoires ne s'identifient *a priori* pas aux lignes de courant, sauf dans le cas de l'écoulement stationnaire.

Dérivée particulaire d'un champ

Intérêt de la dérivée particulaire

On définit, pour une grandeur décrite par le champ eulérien $G(M,t)$, le taux de variation de cette grandeur relative à une particule de fluide lorsqu'elle passe d'un point M à l'instant t à un point M' à l'instant $t+dt$:

$$\frac{DG}{Dt} = \left(\frac{dG}{dt}\right)_{\substack{\text{particule}\\\text{de fluide}}} = \lim_{dt\to 0} \frac{G(M',t+dt)-G(M,t)}{dt}$$

Cette dérivée est appelée **dérivée particulaire**.

- ➤ La dérivée particulaire concilie les descriptions eulérienne et lagrangienne :
  - on suit *une* particule de fluide donnée dans son mouvement (description lagrangienne) ;
  - on décrit la variation des caractéristiques de cette particule à l'aide du champ de masse volumique (description eulérienne).
- ➤ La notation $\dfrac{DG}{Dt}$ est due à Stokes.

Dérivée particulaire du champ de masse volumique

$$\frac{D\mu}{Dt} = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\,\mu$$

Dérivée locale : $\dfrac{\partial\mu}{\partial t}$; elle rend compte des variations au cours du temps en un point fixe.

Dérivée convective : $\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\,\mu$; elle rend compte de l'influence du déplacement de la particule de fluide dans un gradient de masse volumique. Aussi appelée dérivée advective.

Dérivée particulaire du champ des vitesses

L'accélération d'une particule de fluide est donnée par la dérivée particulaire du champ des vitesses

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}$$

Le terme $\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}$ est l'**accélération locale** ; le terme $\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}$ est l'**accélération convective**.

- ➤ Le terme $\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)$ est un **opérateur**, dont l'expression en coordonnées cartésiennes est

$$\boxed{\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right) = v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}}$$

  Cet opérateur peut s'appliquer à un champ scalaire ou à un champ vectoriel.
- ➤ On peut écrire

$$\boxed{\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\right)\wedge\vec{v}}$$

Signification physique de div $\vec{v}$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}$

La divergence du champ des vitesses représente le taux de variation du volume V d'une particule de fluide :

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{1}{V}\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{D}t}$$

Le rotationnel du champ des vitesses caractérise la rotation locale d'une particule de fluide lors de son mouvement.
Le vecteur-rotation instantané d'une particule de fluide est donnée par le **vecteur tourbillon**

$$\boxed{\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}}$$

Conservation de la masse

Débit volumique

Le débit volumique à travers une surface Σ orientée est le volume de fluide qui traverse cette section par unité de temps :

$$D_{\mathrm{v}}(t) = \iint_{M\in\Sigma} \vec{v}(M,t)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_M$$

- Le débit volumique est une grandeur algébrique, dont le signe dépend du sens de l'écoulement par rapport à l'orientation de $\mathrm{d}\vec{S}$.
- Il s'exprime en $\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{s}^{-1}$.
- Dans le cas où le champ des vitesses est uniforme, il s'écrit simplement $D_{\mathrm{v}}(t) = \vec{v}(t)\cdot\vec{S}$.

Débit massique

Le débit massique à travers une surface Σ orientée est la masse de fluide qui traverse cette section par unité de temps :

$$D_{\mathrm{m}}(t) = \iint_{M\in\Sigma} \mu(M,t)\,\vec{v}(M,t)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_M$$

- Le débit massique est une grandeur algébrique, dont le signe dépend du sens de l'écoulement par rapport à l'orientation de $\mathrm{d}\vec{S}$.
- Il s'exprime en $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.
- Dans le cas où le champ des vitesses est uniforme et $\mu(M,t) = \text{cte}$, on a $\boxed{D_{\mathrm{m}}(t) = \mu D_{\mathrm{v}}(t)}$.

Équation locale de la conservation de la masse

$$\frac{\partial\mu}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\mu\vec{v}\right) = 0$$

Cette relation peut s'écrire sous la forme

$$\boxed{\frac{\mathrm{D}\mu}{\mathrm{D}t} + \mu\operatorname{div}\vec{v} = 0}$$

- L'équation locale s'obtient à partir de l'écriture intégrale de la conservation de la masse
$$\iiint_{M\in\mathcal{V}} \frac{\partial\mu(M,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau_M + \oiint_{P\in\Sigma} \mu(P,t)\,\vec{v}(P,t)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_P = 0$$
puis en utilisant le théorème d'Ostrogradski.

Conditions aux limites

En tout point de la surface d'un obstacle solide imperméable au fluide, la composante normale à l'obstacle du champ des vitesses en un point de contact M doit être égale à la vitesse du point correspondant lié à l'obstacle.

- Si l'obstacle est fixe [1], la condition aux limites s'écrit
$$\vec{v}(M,t)\cdot\vec{n} = 0$$
où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal au solide au point M.
- Dans le cas de deux fluides non miscibles, la surface de séparation se comporte comme un obstacle imperméable à chacun des fluides.

Écoulements particuliers

Écoulement stationnaire

Un écoulement est dit stationnaire si ses champs eulériens sont indépendants du temps :

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \vec{0}\,; \quad \frac{\partial\mu}{\partial t} = 0$$

- Le caractère stationnaire d'un écoulement dépend du référentiel d'étude.
- Les trajectoires s'identifient aux lignes de courant.

Lors d'un écoulement stationnaire, le **débit massique** a même valeur à travers toute section d'un tube de courant : $D_{\mathrm{m}} = \text{cte}$.

Écoulement incompressible

Un écoulement est dit incompressible si le volume de toute particule de fluide reste constant au cours de son mouvement :

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0$$

- Toute particule de fluide ayant une masse constante par construction, sa masse volumique est alors conservée au cours de son mouvement :
$$\boxed{\frac{\mathrm{D}\mu}{\mathrm{D}t} = 0}$$
- Si l'écoulement est de plus stationnaire, la norme du vecteur vitesse augmente lorsque les lignes de courant se resserrent.

Lors d'un écoulement incompressible, le **débit volumique** a même valeur à travers toute section d'un tube de courant : $D_{\mathrm{v}}(t) = \text{cte}(t)$.

1. Où si l'on se place dans le référentiel lié au solide.

Écoulement irrotationnel

Un écoulement est dit irrotationnel si le vecteur tourbillon est identiquement nul, soit en chacun de ses points :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{v} = \vec{0}$$

L'écoulement est alors **potentiel** : il existe un **potentiel des vitesses** φ tel que

$$\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi$$

- Si $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{v} \neq \vec{0}$, l'écoulement est dit **tourbillonnaire**.
- Le caractère tourbillonnaire ou irrotationnel d'un écoulement dépend du référentiel d'étude.
- Le caractère tourbillonnaire ou irrotationnel d'un écoulement n'a rien à voir avec la forme des lignes de courant. Les lignes de courant d'un écoulement tourbillonnaire peuvent être rectilignes, et les lignes de courant d'un écoulement irrotationnel peuvent être circulaires.
- Pour un écoulement potentiel, les surfaces équipotentielles (φ = cte) sont perpendiculaires aux lignes de courant.

Écoulement incompressible et irrotationnel

Le potentiel des vitesses vérifie l'équation de Laplace

$$\Delta\varphi = 0.$$

Annexe : analyse vectorielle

Le champ d'une grandeur physique g dans un domaine $\mathscr{D}$ de l'espace à un instant t est défini par la donnée de $g(M,t)$ en tout point M de $\mathscr{D}$.

Opérateur	Définition	Nature	Propriété
gradient	$\mathrm{d}G = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G \cdot \mathrm{d}\vec{l}$	scalaire → vecteur	
divergence	$\mathrm{d}\Phi = \mathrm{div}\,\vec{A} \cdot \mathrm{d}\tau$	vecteur → scalaire	$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}) = 0$
rotationnel	$\mathrm{d}\mathcal{C} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$	vecteur → vecteur	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G) = \vec{0}$
laplacien	$\Delta G = \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G)$	scalaire → scalaire	

Champ vectoriel à circulation conservative

$$\oint_{M\in\Gamma} \vec{A}(M,t)\cdot\mathrm{d}\vec{l}_M = 0 \quad \forall\Gamma \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists G,\ \vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G$$

Champ vectoriel à flux conservatif

$$\oiint_{M\in\Sigma} \vec{A}(M,t)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_M = 0 \quad \forall\Sigma \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{div}\,\vec{A} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\vec{R},\ \vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{R}$$

Théorème d'Ostrogradski

Soit un champ vectoriel $\vec{A}(M,t)$ défini en tout point d'un volume $\mathcal{V}$ délimité par une surface Σ :

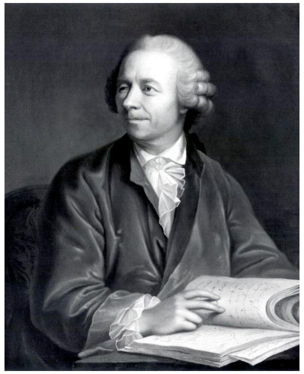
$$\oiint_{P\in\Sigma} \vec{A}(P,t)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_P = \iiint_{M\in\mathcal{V}} \mathrm{div}\,\vec{A}(M,t)\,\mathrm{d}\tau_M.$$

Théorème de Stokes

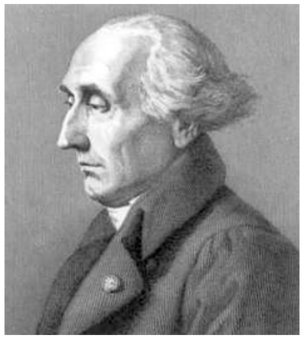
Soit un champ vectoriel $\vec{A}(M,t)$ défini en tout point d'une surface Σ s'appuyant sur un contour orienté Γ :

$$\oint_{P\in\Gamma} \vec{A}(P,t)\cdot\mathrm{d}\vec{l}_P = \iint_{M\in\Sigma} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}(M,t)\,\mathrm{d}\vec{S}_M.$$

Mais qui étaient-ils ?



Leonhard Paul Euler (1707-1783).
Mathématicien et physicien suisse. Avec Lagrange, il est l'un des deux géants mathématiques qui ont dominé la science du XVIII^{e} siècle. Ses travaux couvrent tout le champ des mathématiques et de la physique de son époque.
Il fût l'élève de Jean Bernoulli, qui le convainquit d'étudier les mathématiques. Il fut nommé aux académies de Saint Petersbourg, puis de Berlin. Il est l'auteur de trois grands traités sur l'analyse infinitésimale. Ses travaux mathématiques sont fondamentaux : il a introduit la notion de fonction, la notation des fonctions trigonométriques, les symboles e (base du logarithme), Σ pour les sommes, i pour l'unité imaginaire, il a étudié les séries numériques et les séries entières, a défini la fonction exponentielle pour les nombres complexes ($e^{j\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ et $e^{i\pi} = -1$), a établi de nombreux résultats en théorie des nombres.
Il a imposé l'usage de la notation π pour le rapport entre la circonférence et le diamètre d'un cercle.
Dans sont traité de mécanique, il définit le centre d'inertie, les moments d'inertie et le axes principaux d'inertie, et intègre les équations du mouvement d'un solide de révolution autour d'un point fixe de son axe.
En 1775, il établit les équations générales de l'hydrodynamique.



Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).
Mathématicien, mécanicien et astronome italien (*Giuseppe Lodovico Lagrangia*!). Il échangea une longue correspondance avec Euler, Langrange posant les bases du calcul variationnel. Il succéda à Euler à l'académie de Berlin. Son ouvrage fondamental porte sur la mécanique analytique (mécanique lagrangienne). Il élabora le système métrique avec Lavoisier. Il établit des résultats capitaux en théorie des nombres.
En mécanique des fluides, il introduisit le potentiel des vitesses en 1781, le concept de fonction de courant, et étudia les ondes dans un canal peu profond.