

COSMOLOGIE

Cours pour la troisième et quatrième année (deuxième cycle)

Ruth Durrer

Département de Physique Théorique de l'Université de Genève
Quai E. Ansermet 24, 1211 Genève 4, Suisse

d'après les notes de
Vincent Desjacques

2001

revised version 2005/07/09



Table des matières

Introduction	5
1 Aspects géométriques des modèles de Friedmann	7
1.1 Isotropie	7
1.2 Espaces riemanniens à courbure constante	8
1.3 Courbure sectionnelle	11
1.4 La métrique Friedmann-Robertson-Walker (FRW)	13
1.4.1 Coordonnées conformes pour les espaces à courbure constante	14
1.4.2 Géométrie et topologie de l'univers	17
1.4.3 Métrique FRW	17
1.5 Propriétés générales de la métrique FRW	19
1.5.1 Comobilité	19
1.5.2 Le temps cosmique	19
1.5.3 Décalage spectral cosmologique vers le rouge	19
1.5.4 La loi de Hubble	21
1.6 Mesures de distances	22
1.6.1 Distance angulaire	23
1.6.2 Distance métrique	24
1.6.3 Distance de luminosité	24
2 Principes des tests cosmologiques	25
2.1 Flux d'une source lointaine en fonction du redshift	25
2.2 Le paramètre H_0 et l'échelle de distance	28
2.2.1 Etalons primaires	29
2.2.2 Etalons secondaires	31
2.3 Le paramètre q_0 et le diagramme de Hubble-Sandage	36
2.4 Le test des diamètres apparents et les comptages	37
2.4.1 Diamètres apparents	37
2.4.2 Comptages	38
2.5 Détermination de l'âge de l'univers	40
2.5.1 Age des étoiles	41
2.5.2 Nucléocosmochronologie	42
2.6 Les quasars	44
2.6.1 Quelques généralités	44
2.6.2 Propriétés des quasars	45

3	Les équations cosmologiques	52
3.1	Dérivations des équations de Friedmann	53
3.1.1	Méthode newtonienne	55
3.1.2	Tenseur énergie-impulsion	56
3.2	Discussion des équations de Friedmann	57
3.2.1	Quelques généralités	57
3.2.2	Existence d'une singularité	59
3.2.3	"Conservation" de l'énergie	62
3.2.4	Paramètre de densité et géométrie	64
3.3	Age de l'univers	71
3.4	Quelques solutions explicites	72
3.4.1	Univers jeune	72
3.4.2	Univers dominé par la matière non-relativiste	72
3.4.3	Constante cosmologique non nulle, $\Lambda \neq 0$	74
3.4.4	Autres modèles cosmologiques	75
3.5	Densité de l'univers et masse cachée	76
3.5.1	Expression de Mattig pour la distance métrique	79
4	L'histoire thermique de l'univers	82
4.1	Entropie, expansion et adiabaticité	83
4.2	La théorie cinétique relativiste	88
4.2.1	L'équation de Liouville	88
4.2.2	Une mesure invariante sur l'espace des états	90
4.2.3	La fonction de distribution	91
4.3	Fonctions de distribution et variables thermodynamiques dans un univers Friedmann en équilibre thermique	96
4.3.1	Fonctions de distribution en équilibre thermique	97
4.3.2	Le gel d'une espèce de particules	101
4.3.3	L'anisotropie baryonique	102
4.4	La recombinaison	104
4.4.1	Physique de la recombinaison	104
4.4.2	La ionisation restante et le gel (découplage) des photons	107
4.5	Spectre et anisotropies du rayonnement de fond cosmologique (<i>CMB</i>)	109
4.5.1	Généralités	109
4.5.2	Evolution de la température du <i>CMB</i>	111
4.5.3	Thermalisation	112
4.6	Nucléosynthèse	113
4.6.1	Préambule	113
4.6.2	Le gel des neutrinos	116
4.6.3	Nucléosynthèse	118
5	Inflation	132
5.1	Motivation	132
5.2	Les problèmes du modèle cosmologique standard	133
5.2.1	Isotropie et homogénéité à grande échelle : le problème de l'horizon	133
5.2.2	Le problème de la platitude, de l'âge ou de l'entropie	136
5.2.3	Le problème (esquisse) des monopôles	138
5.3	Inflation comme dynamique d'un champ scalaire	141

5.3.1	Inflaton et un 'champs de matière'	142
5.3.2	Potentiel effectif à température finie	143
5.3.3	Inflation pour un potentiel générique	144
5.3.4	Oscillations et réchauffement	146
5.3.5	Remarques finales	151
6	Perturbations cosmologiques	153
6.1	Instabilité gravitationnelle	154
6.2	Perturbation scalaire d'un fluide parfait dans un univers à cour- bure nulle	155
6.2.1	Les variables de perturbation	155
6.2.2	Les équations de perturbation	156
6.3	Les anisotropies du CMB	159
6.3.1	Le dipôle	159
6.3.2	Anisotropies primordiales	160
6.3.3	Effet Sachs–Wolfe	162
6.4	Spectres de Puissance	162
6.4.1	Spectre Harrison Zel'dovich	163
6.4.2	Le spectre de puissance des anisotropies du <i>CMB</i>	163
6.5	Discussion qualitative	167
6.5.1	La dépendance des paramètres	167
6.5.2	Anisotropies secondaires	169
A	Unités, constantes, relations	175
B	Remarques complémentaires sur les champs de Killing	178

Introduction

La cosmologie est l'étude des propriétés globales de l'univers. Au cours du XX^e siècle, un certain nombre de faits observationnels sont venus confirmer ou infirmer les modèles existants. Les trois principaux piliers du modèle "standard" de la cosmologie sont :

- l'expansion isotrope de l'univers, satisfaisant la **loi de Hubble**

$$v = H_0 \cdot d, \quad \text{avec} \quad H_0 \equiv 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad \text{et} \quad h = 0.72 \pm 0.10. \quad (1)$$

- le fond thermique de rayonnement micro-onde isotrope (*CMB* pour **Cosmic Microwave Background**), de température $T_0 = 2.73$ K (découvert par Penzias & Wilson, 1965), confirmant l'hypothèse de l'expansion adiabatique et donc de l'existence d'un passé chaud et dense de l'univers. Après la soustraction d'une anisotropie dipolaire provoquée par le mouvement de la Terre par rapport à ce fond cosmique, il ne subsiste que des fluctuations de l'ordre de quelque 10^{-5} , i.e.

$$\frac{\Delta T}{T} \lesssim 3 \times 10^{-5}.$$

- l'abondance des éléments légers : H , ${}^3\text{He}$, D , ${}^7\text{Li}$, issus de la nucléosynthèse cosmologique (premières minutes). Très bon accord entre modèle et observations.

Quelques livres récents de cosmologie :

[39] T. Padmanabhan, *Structure formation in the universe* (1993)

Une bonne introduction. Mais des sujets comme l'inflation et l'univers très primordial ne sont pas traités en détail. Il existe aussi un deuxième tome [40] sous forme d'exercices. Déjà un peu vieux.

[41] J. Peacock, *Cosmological Physics* (1999)

Assez complet, quoique peu pédagogique. La dérivation de certains résultats cruciaux manque.

[11] S. Dodelson, *Modern Cosmology* (2003)

Un très bon livre surtout au sujet du fond cosmique micro-onde ou il va beaucoup plus loin que ce cours.

[45] P. Peter et J.P. Uzan, *Cosmologie primordiale* (2005)

Le seul texte moderne en français. Très complet (peut-être un peu trop complet). Mon cours porte sur les chapitres 3,4 et 8 de ce livre qui sont très bien fait.

[37] V.F. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology* (2005)

Un très bon livre sur pratiquement tout les aspects cosmologique. Surtout aussi en ce qui concerne la théorie de perturbations, peu traité dans mon cours. La partie sur la physique des particules n'est pas très moderne et mieux dans des livres spécialisés à ce sujet.

[15] R. Durrer, *The Cosmic Microwave Background (2008)*

Un livre surtout sur la théorie des perturbations cosmologiques linéaires et le calcul des anisotropies et de la polarisation du fond cosmique micro-onde. Le premier chapitre du livre consiste d'un résumé de ce cours.

Chapitre 1

Aspects géométriques des modèles de Friedmann

Dans ce premier chapitre, nous dérivons les propriétés géométriques des modèles de Friedmann sous une forme mathématique. Ce chapitre (contrairement aux suivants) suppose que l'étudiant connaît les bases de la géométrie différentielle.

1.1 Isotropie

Considérons notre univers et supposons que les inhomogénéités dans la distribution de la matière sont négligeables. Cet univers peut donc être décrit par un espace-temps homogène et isotrope.

Formellement, cet espace-temps (\mathcal{M}, g) est une variété différentiable de signature $(-, +, +, +)$ (variété lorentzienne), isotrope en chaque point $p \in \mathcal{M}$ par rapport à un champ vectoriel $\mathbf{v} \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$, avec $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = -1$ (champ vectoriel du genre temps, ou champ de vitesse).

Définissons tout d'abord la propriété d'isotropie locale. Soient U et $V \subset \mathcal{M}$ des voisinages du point $p \in \mathcal{M}$, $p \in U$ et V . Nous définissons $\text{Iso}_p(\mathcal{M})$, le groupe des isométries locales qui laissent p invariant,

$$\phi \in \text{Iso}_p(\mathcal{M}) \iff \phi : U \rightarrow V; \phi(p) = p, \quad \phi(U) \subset V$$

est un difféomorphisme local et l'application tangente à tout point $q \in U$,

$$T_q\phi : T_q\mathcal{M} \rightarrow T_{\phi(q)}\mathcal{M},$$

est une isométrie locale, c'est-à-dire

$$g_q(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = g_{\phi(q)}(T_q\phi\mathbf{v}, T_q\phi\mathbf{u}) \equiv (\phi^*g)_q(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \text{ pour tout } \mathbf{v}, \mathbf{u} \in T_q\mathcal{M}.$$

En d'autres termes, le produit scalaire (qui détermine distances et angles) est préservé. En choisissant une base orthonormée de l'espace tangent $T_p\mathcal{M}$ telle que $T_p\mathcal{M} \simeq R \otimes R^3 = (t, \mathbf{x})$, une isométrie au point p est représentée par une matrice dans $O(3, 1)$, où $O(3, 1)$ est le groupe des transformations qui préservent la distance $(-t^2 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{x})$.

Nous avons maintenant les outils nécessaires pour définir précisément la propriété d'isotropie.

Définition 1.1.1 (\mathcal{M}, g) est appelée isotrope au point $p \in \mathcal{M}$ par rapport au champ de vecteur \mathbf{v} si

$$SO_3(\mathbf{v}_p) \subset \{T_p\phi \mid \phi \in Iso_p(\mathcal{M}), (T_p\phi)\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_p\}.$$

Ici, $SO_3(\mathbf{v}_p)$ est le groupe des rotations dans le sous-espace de $T_p(\mathcal{M})$ à trois dimensions qui est orthogonal à \mathbf{v}_p .

Théorème 1.1.1 Soit \mathcal{M} une variété riemannienne isotrope par rapport à un champ vectoriel $\mathbf{v} \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$, i.e. isotrope autour de chaque point $p \in \mathcal{M}$. Alors

(i) $\mathbf{v}^b \wedge d\mathbf{v}^b = 0$. D'après le théorème de Frobenius, ceci implique que \mathcal{M} est localement de la forme d'une suite à un paramètre $\{\Sigma_t \mid t \in I \subset \mathbb{R}\}$, telle que \mathbf{v} est orthogonal aux Σ_t , c'est-à-dire si $u_p \in T_p\Sigma_t$, $g_p(\mathbf{u}_p, \mathbf{v}_p) = 0 \forall p$. \mathcal{M} peut être décomposée localement en un produit de deux variétés isomorphes à un intervalle et un ouvert $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$. Localement, on a (3+1 split)

$$\mathcal{M} = I \times \Sigma \tag{1.1}$$

$$g = -dt^2 + g_\Sigma(t). \tag{1.2}$$

où I est un intervalle, Σ est une variété tri-dimensionnelle isotrope et g_Σ est la métrique induite sur Σ .

(ii) $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{v} = 0$. Les courbes intégrales à \mathbf{v} sont des géodésiques. Ces courbes sont toutes orthogonales aux hypersurfaces Σ_t . Ainsi, la distance géodésique entre Σ_{t_1} et Σ_{t_2} est constante $\forall t_1, t_2 \in I$, et nous pouvons l'utiliser comme temps cosmique.

(iii) Soit $\phi_{t_1 t_2} : \Sigma_{t_1} \rightarrow \Sigma_{t_2}$ l'application engendrée par le flot $\gamma(t)$ de \mathbf{v} . C'est-à-dire :

$$\gamma(t_1) = p, \gamma(t_2) = q \Rightarrow \phi_{t_1 t_2}(q) = p.$$

Cette application satisfait

$$\phi_{t_1 t_2}^* g_\Sigma(t_2) = c(t_1, t_2) g_\Sigma(t_1).$$

Comme nous le verrons par la suite, $c(t_1, t_2)$ peut être identifié avec le carré du facteur d'échelle.

Nous ne démontrerons pas les propriétés (i) et (ii) énoncées ci-dessus. Le lecteur intéressé peut se référer au papier de Straumann [58]. Mais nous montrons par la suite que la métrique $g_\Sigma(t)$ est unique à un facteur d'échelle près ; et nous voulons obtenir une expression pour $g_\Sigma(t)$. Pour ce faire, nous allons d'abord démontrer que les hypersurfaces Σ_t sont des espaces à courbure constante.

1.2 Espaces riemanniens à courbure constante

Dans cette section nous montrons que des espace à dimension $n > 2$ qui sont isotropes autour de tout point, sont des espaces à courbure constante. Nous déterminons aussi la métrique et le tenseur de courbure de ces espaces.

Considérons un espace vectoriel V à n dimensions et une application quadrilinéaire R de l'espace V dans les nombres réels, \mathbb{R} ,

$$R : V \times V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R},$$

munie des propriétés suivantes :

- (a) $R(v_1, v_2, v_3, v_4) = -R(v_2, v_1, v_3, v_4)$
- (b) $R(v_1, v_2, v_3, v_4) = -R(v_1, v_2, v_4, v_3)$
- (c) $R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_1, v_4, v_2, v_3) + R(v_1, v_3, v_4, v_2) = 0.$

Elle est antisymétrique par rapport aux deux premiers et deux derniers arguments, et la somme cyclique effectuée sur les trois derniers arguments est nulle. Sous ces conditions, R satisfait aux deux propriétés suivantes :

Proposition 1.2.1 *R est symétrique par rapport à la permutation conjointe des deux premiers et deux derniers indices*

$$R(v_1, v_2, v_3, v_4) = R(v_3, v_4, v_1, v_2)$$

preuve. Soit S le membre de gauche de la relation (c) ci-dessus. En permutant les quatre indices de manière cyclique, nous pouvons écrire

$$0 = S(v_1, v_2, v_3, v_4) - S(v_2, v_3, v_4, v_1) - S(v_3, v_4, v_1, v_2) + S(v_4, v_1, v_2, v_3).$$

En remplaçant S par sa définition, il vient

$$\begin{aligned} 0 &= R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_1, v_4, v_2, v_3) + R(v_1, v_3, v_4, v_2) \\ &\quad - R(v_2, v_3, v_4, v_1) - R(v_2, v_1, v_3, v_4) - R(v_2, v_4, v_1, v_3) \\ &\quad - R(v_3, v_4, v_1, v_2) - R(v_3, v_2, v_4, v_1) - R(v_3, v_1, v_2, v_4) \\ &\quad + R(v_4, v_1, v_2, v_3) + R(v_4, v_3, v_1, v_2) + R(v_4, v_2, v_3, v_1) \\ &= 2R(v_1, v_2, v_3, v_4) - 2R(v_3, v_4, v_1, v_2) \end{aligned} \quad (1.3)$$

ce qui démontre la proposition.

Proposition 1.2.2 *Soient R et T , deux formes quadrilinéaires satisfaisant les propriétés (a), (b) et (c). Si $R(v_1, v_2, v_1, v_2) = T(v_1, v_2, v_1, v_2) \forall v_1, v_2 \in V$, alors R et T sont identiques, $R \equiv T$.*

preuve. Supposons que $R(v_1, v_2, v_1, v_2) = 0$ (dans le cas contraire, il suffit de considérer la combinaison $R - T$). Il s'agit de montrer que $R(v_1, v_2, v_3, v_4) = 0 \forall v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$. A cet égard, il vient d'abord

$$\begin{aligned} 0 &= R(v_1, v_2 + v_3, v_1, v_2 + v_3) \\ &= R(v_1, v_2, v_1, v_3) + R(v_1, v_3, v_1, v_2) \\ &= 2R(v_1, v_2, v_1, v_3). \end{aligned}$$

Ainsi, grâce aux propriétés (a) et (b),

$$R(v_1, v_2, v_1, v_3) = R(v_1, v_2, v_3, v_1) = R(v_2, v_1, v_1, v_3) = R(v_2, v_1, v_3, v_1) = 0.$$

Autrement dit, $R(v_1, v_2, v_3, v_4) = 0$ si deux éléments v_i sont identiques. Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} 0 &= R(v_1 + v_3, v_2, v_1 + v_3, v_4) \\ &= R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_3, v_2, v_1, v_4) \\ &= R(v_1, v_2, v_3, v_4) - R(v_1, v_4, v_2, v_3), \end{aligned}$$

soit

$$R(v_1, v_2, v_3, v_4) = R(v_1, v_4, v_2, v_3).$$

Permutons le groupe d'indices (2,3,4) en (3,4,2). L'égalité est toujours vérifiée, et nous avons

$$R(v_1, v_3, v_4, v_2) = R(v_1, v_2, v_3, v_4).$$

Ainsi, (c) conduit à

$$3R(v_1, v_2, v_3, v_4) = R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_1, v_4, v_2, v_3) + R(v_1, v_3, v_4, v_2) = 0,$$

et la proposition est démontrée.

Considérons maintenant un espace vectoriel \mathbf{V} muni d'un produit scalaire (\cdot, \cdot) et de notre application quadrilinéaire R . Soit $\mathbf{E} \subset \mathbf{V}$ un sous-espace à deux dimensions (un plan), et v_1, v_2 une base orthonormée de \mathbf{E} .

Nous définissons $K(\mathbf{E})$ par

$$K(\mathbf{E}) \equiv R(v_1, v_2, v_1, v_2).$$

Un simple calcul montre que $K(\mathbf{E})$ est indépendant du choix de la base v_1, v_2 (orthonormée). $K(\mathbf{E})$ est donc bien défini.

Proposition 1.2.3 *Soit v_1, v_2 une base arbitraire de \mathbf{E} (qui n'est pas nécessairement orthonormée). Alors*

$$K(\mathbf{E}) = \frac{R(v_1, v_2, v_1, v_2)}{v_1^2 v_2^2 - (v_1, v_2)^2}.$$

preuve. De v_1, v_2 , on construit une base orthonormée w_1, w_2 suivant la procédure d'orthonormalisation de Gram-Schmidt,

$$w_1 = \frac{v_1}{|v_1|}, \quad (1.4)$$

$$w_2 = \left(v_2^2 - \frac{(v_1, v_2)^2}{v_1^2} \right)^{-1/2} \left[v_2 - \frac{(v_1, v_2)v_1}{v_1^2} \right]. \quad (1.5)$$

En insérant w_1, w_2 dans la définition de $K(\mathbf{E})$, la proposition est démontrée.

Nous définissons maintenant une application quadrilinéaire R_1 particulière, appelée *déterminant de Gram* :

$$R_1(v_1, v_2, v_3, v_4) \equiv (v_1, v_3)(v_2, v_4) - (v_2, v_3)(v_1, v_4),$$

avec

$$K_1(\mathbf{E}) \equiv R_1(v_1, v_2, v_1, v_2).$$

On peut aisément vérifier que R_1 possède les propriétés (a), (b) et (c) du tenseur R . De plus, $K_1(\mathbf{E}) = 1$ pour tous les plans $\mathbf{E} \subset \mathbf{V}$.

Proposition 1.2.4 Soit \mathbf{R} une application quadrilinéaire avec les propriétés (a), (b) et (c). Soit $K(\mathbf{E}) = c$, constant pour tous les plans $\mathbf{E} \subset \mathbf{V}$. Alors, $\mathbf{R} = c \cdot \mathbf{R}_1$.

preuve. D'après la proposition (1.2.3), $\mathbf{R}(v_1, v_2, v_1, v_2) = c \cdot \mathbf{R}_1(v_1, v_2, v_1, v_2)$. La proposition (1.2.2) assure alors que $\mathbf{R}(v_1, v_2, v_3, v_4) = c \cdot \mathbf{R}_1(v_1, v_2, v_3, v_4)$, $\forall v_i \in \mathbf{V}$.

1.3 Courbure sectionnelle

Considérons une variété riemannienne (Σ, γ) de dimension n .

Définition 1.3.1 (rappel du cours de géométrie différentielle) Une variété riemannienne Σ de dimension n est une variété différentiable de dimension n munie d'une métrique riemannienne, un tenseur symétrique γ de rang $(0,2)$ tel que pour tout $p \in \Sigma$, $\gamma(p)$ est positif. (C'est-à-dire $\gamma(p)(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0$ pour tout $\mathbf{v} \in T_p\mathcal{M}$, $\mathbf{v} \neq 0$.)

Le tenseur de Riemann R , ou tenseur de courbure, est défini comme suit :

Définition 1.3.2 Soit ∇ une connection sur Σ . Le tenseur de courbure R est un tenseur de rang $(1,3)$ (i.e. une application $T_p\Sigma \times T_p\Sigma \times T_p\Sigma \rightarrow T_p\Sigma$ pour $p \in \Sigma$) défini par la relation

$$R(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{w} = \nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w} - \nabla_{\mathbf{v}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w} - \nabla_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]}\mathbf{w},$$

où \mathbf{u} , \mathbf{v} et \mathbf{w} sont des champs vectoriels sur Σ . $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ est le crochet de Lie, $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = L_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = -L_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = -[\mathbf{v}, \mathbf{u}]$. Avec un quatrième champ vectoriel \mathbf{z} , nous posons aussi

$$R(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}) \equiv \gamma(R(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{w}, \mathbf{z}).$$

La variété (Σ, γ) est appelée 'riemannienne' si nous choisissons la connection de Levi Civita, c'est-à-dire, la connection qui est définie uniquement par les conditions

$$\nabla\gamma = 0 \quad \text{et} \quad \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}].$$

Dans ce cas, le tenseur de courbure est appelé tenseur de Riemann.

Dans un système de coordonnées, les composantes de R s'obtiennent à partir de la relation

$$R(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}) = \gamma(R(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{w}, \mathbf{z}) = R_{\alpha\beta\mu\nu}z^\alpha w^\beta u^\mu v^\nu.$$

Proposition 1.3.1 Le tenseur de Riemann satisfait aux propriétés d'antisymétrie (a), (b) et à la propriété de somme cyclique nulle (c) (c'est la première identité de Bianchi).

preuve. Pour démontrer (a), il faut considérer la relation $\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{v}}f - \nabla_{\mathbf{v}}\nabla_{\mathbf{u}}f - \nabla_{[\mathbf{u},\mathbf{v}]}f = R(\mathbf{u}, \mathbf{v})f = 0$ pour une fonction $f : \Sigma \rightarrow R$. En posant $f = \gamma(\mathbf{w}, \mathbf{z})$, où \mathbf{w}, \mathbf{z} sont deux champs vectoriels, nous avons

$$\begin{aligned} 0 &= R(\mathbf{u}, \mathbf{v})\gamma(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \\ &= \gamma(R(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{w}, \mathbf{z}) + \gamma(R(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{z}, \mathbf{w}) \\ &= R(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}) + R(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}, \mathbf{w}). \end{aligned}$$

La propriété (b) suit de la définition de $R(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Pour démontrer la propriété (c), il faut utiliser le fait que la composition $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \equiv L_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ (dérivée de Lie) définit une algèbre de Lie qui satisfait la relation (identité de Jacobi)

$$[\mathbf{u}, [\mathbf{v}, \mathbf{w}]] + [\mathbf{v}, [\mathbf{w}, \mathbf{u}]] + [\mathbf{w}, [\mathbf{u}, \mathbf{v}]] = 0,$$

où \mathbf{u}, \mathbf{v} et \mathbf{w} sont des champs vectoriels sur Σ .

Pour chaque plan $\mathbf{E} \subset T_p\Sigma$, nous définissons la courbure sectionnelle K_p par

$$K_p(\mathbf{E}) \equiv R(e_1, e_2, e_1, e_2),$$

où e_1, e_2 est une base orthonormée de \mathbf{E} .

La proposition (1.2.2) démontre que la courbure sectionnelle de tous les plans $\mathbf{E} \subset T_p\Sigma$ détermine le tenseur de courbure R au point $p \in \Sigma$.

Proposition 1.3.2 Soit $S_{\mathbf{E}}$ la sous-variété de Σ à deux dimensions qui est engendrée localement par les géodésiques $\sigma(s)$ qui passent par $p = \sigma(0)$ avec $\dot{\sigma}(0) \in \mathbf{E}$. $S_{\mathbf{E}}$ est donc l'exponentiation de \mathbf{E} , $S_{\mathbf{E}} \equiv \exp_p(\mathbf{E})$, et \exp_p est un difféomorphisme local de $\mathbf{E} \subset T_p\Sigma$ dans $S_{\mathbf{E}}$. Alors $K_p(\mathbf{E})$ est la courbure gaussienne de $S_{\mathbf{E}}$ au point p .

preuve. Textes sur la géométrie différentielle, par exemple [33].

Définition 1.3.3 Soit K_p la courbure sectionnelle telle que $K_p(\mathbf{E}) = k = \text{const.}$ pour tous les plans $\mathbf{E} \subset T_p\Sigma$ et pour tous les points $p \in \Sigma$. Dans ce cas, (Σ, γ) est un espace à courbure constante k .

Théorème 1.3.1 (Schur) Soit (Σ, γ) une variété riemannienne connexe de dimension $n \geq 3$. Si $K_p(\mathbf{E})$ est indépendant de \mathbf{E} en tout point $p \in \Sigma$, alors Σ est un espace à courbure constante, i.e. $K_p(\mathbf{E})$ est aussi indépendant du point p . Autrement dit, l'isotropie autour de chaque point implique l'homogénéité (le contraire n'est pas vrai).

preuve. Considérons le déterminant de Gram

$$\mathbf{R}_1(p)(v_1, v_2, v_3, v_4) = \gamma_p(v_1, v_3)\gamma_p(v_2, v_4) - \gamma_p(v_1, v_4)\gamma_p(v_2, v_3),$$

défini pour $p \in \Sigma$, $v_i \in T_p\Sigma$. D'après la prop. (1.2.4), $R = k(p) \cdot R_1$ pour une fonction $k(p)$ sur Σ . Puisque $\nabla\gamma = 0$ (dans le cas des variétés riemanniennes, la connection est métrique), nous avons aussi $\nabla R_1 = 0$, ce qui implique

$$\nabla_{\mathbf{w}}R = (\nabla_{\mathbf{w}}k)R_1$$

pour un champ de vecteur $\mathbf{w} \in \mathcal{X}(\Sigma)$ quelconque. Nous avons alors

$$(\nabla_{\mathbf{w}} R)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_3 = (\mathbf{w}(k))[\gamma(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3)\mathbf{v}_2 - \gamma(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)\mathbf{v}_1].$$

La somme cyclique par rapport à $(\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ du membre de gauche de cette équation s'annule en raison de la deuxième identité de Bianchi,

$$\begin{aligned} & (\mathbf{w}(k))[\gamma(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3)\mathbf{v}_2 - \gamma(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)\mathbf{v}_1] + \\ & (\mathbf{v}_2(k))[\gamma(\mathbf{w}, \mathbf{v}_3)\mathbf{v}_1 - \gamma(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3)\mathbf{w}] + \\ & (\mathbf{v}_1(k))[\gamma(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)\mathbf{w} - \gamma(\mathbf{w}, \mathbf{v}_3)\mathbf{v}_2] = 0. \end{aligned}$$

Nous choisissons maintenant $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ orthonormés (ce qui est toujours possible puisque $n \geq 3$) et $\mathbf{w} = \mathbf{v}_3$. Il vient

$$\mathbf{v}_2(k)\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_1(k)\mathbf{v}_2 = 0.$$

Comme $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sont orthogonaux, $\mathbf{v}_1(k) = \mathbf{v}_2(k) = 0$. Puisque \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 sont arbitraires, k est nécessairement constant.

Théorème 1.3.2 *Les variétés riemanniennes de dimension $n \geq 3$, isotropes en chaque point, sont des variétés à courbure constante.*

preuve. C'est évident au vu de ce qui a été dit ci-dessus. Les rotations agissent transitivement sur l'ensemble des plans $\mathbf{E} \subset T_p\Sigma, \forall p \in \Sigma$. Alors, pour que les rotations soient des isométries, il faut que $K_p(\mathbf{E}) = k$, indépendamment de $\mathbf{E} \subset T_p\Sigma$.

Ainsi, les sections Σ_t , introduites au chapitre (1.1) dans le cadre d'un espace-temps isotrope en chaque point, sont des espaces à courbure constante.

Sur un espace riemannien (Σ, γ) à courbure constante ($\dim(\Sigma) \geq 3$), les composantes du tenseur de courbure par rapport à une base locale de 1-formes $\{\theta^i\}_{i=1}^n \in \Omega^1(\Sigma)$ et $\gamma = \gamma_{ij}\theta^i \otimes \theta^j$ sont

$$\begin{aligned} R_{ijklm} &= k(\gamma_{il}\gamma_{jm} - \gamma_{im}\gamma_{jl}) && \text{Riemann} \\ R_{ij} &= R^l{}_{ilj} = k(n-1)\gamma_{ij} && \text{Ricci} \\ R &= R^i{}_i = kn(n-1) && \text{courbure scalaire} \\ \Omega_{ij} &= \frac{1}{2}R_{ijklm}\theta^l \wedge \theta^m = k\theta_i \wedge \theta_j && \text{2-forme de courbure} \end{aligned} \tag{1.6}$$

La constante k et la signature de la métrique γ (ici $+++$) suffisent à caractériser tous les espaces à courbure constante : si deux espaces à courbure constante ont le même k et la même signature, ils sont localement isomorphe.

1.4 La métrique Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

Nous allons maintenant introduire un système de coordonnées adapté pour décrire ces espaces à courbure constante.

1.4.1 Coordonnées conformes pour les espaces à courbure constante

Théorème 1.4.1 *Les variétés riemanniennes à courbure constante, de dimensions $n \geq 3$, sont localement conformément plates. C'est-à-dire, il existent des coordonnées locales telles que*

$$\gamma = \frac{1}{\Psi^2} \sum_{i=1}^n (dx^i)^2,$$

où $\Psi(x)$ est une fonction de classe C^2 au moins.

preuve. Pour $n > 3$ nous pouvons utiliser qu'un espace à $n > 3$ dimensions est conformément plat si et seulement si le tenseur de Weyl est nul. Le tenseur de Weyl ou *tenseur de courbure conforme* est défini par

$$\begin{aligned} C_{ijklm} &= R_{ijklm} + \frac{1}{n-2} (\gamma_{il} R_{jkm} - \gamma_{im} R_{jkl} + \gamma_{jm} R_{kil} - \gamma_{jl} R_{imk}) \\ &\quad + \frac{R}{(n-1)(n-2)} (\gamma_{im} \gamma_{jl} - \gamma_{il} \gamma_{jm}). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Il possède les mêmes propriétés de symétrie que le tenseur de courbure de Riemann d'une part. Il est conformément invariant d'autre part (ce qui explique le nom donné ci-dessus) et toutes ses traces sont nulles. Rappelons qu'une *transformation conforme* est de la forme

$$\gamma_{ij} \rightarrow \exp(\phi) \gamma_{ij},$$

où ϕ est une fonction arbitraire des coordonnées de l'espace-temps. On peut montrer que $C^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$ ne change pas sous l'action d'une telle transformation (Attention, la position des indices importe!). Une métrique est *conformément plate* s'il existe un système des coordonnées telle que

$$\gamma_{ij} = \exp(\phi) \delta_{ij}.$$

Comme le tenseur de Weyl de l'espace plat est nul, les formes de Weyl

$$C_{ij} = \frac{1}{2} C_{ijkl} \theta^k \wedge \theta^l$$

sont identiquement nulles pour un espace qui est conformément plat. Ceci peut être démontré par un calcul un peu long mais sans autre difficulté à partir de la métrique conformément plate (voir [63]). Ce qui n'est pas du tout évident est que le contraire est juste aussi : Si les formes de Weyl d'un espace à dimension $n \geq 3$ sont nulles, cet espace est conformément plat (localement). Soit $\{e_i\}_{i=1}^n$ la base (éventuellement orthonormée) des champs vectoriels et $\{\theta^i\}_{i=1}^n$ la base duale des 1-formes. Avec $\Omega_j \equiv i_{e_j} \Omega^l$, et $R \equiv i_{e_l} \Omega^l$ (i_X est le produit intérieur), les formes de Weyl sont

$$C_{jm} \equiv \Omega_{jm} - \frac{1}{n-2} (\theta_j \wedge \Omega_m - \theta_m \wedge \Omega_j) + \frac{R}{(n-1)(n-2)} \theta_j \wedge \theta_m.$$

La 1-forme Ω_m peut être calculée à partir du tenseur de Riemann,

$$\Omega_m = i_{e_j} \Omega_m^j = \frac{1}{2} R^j{}_{mjl} \theta^l - \frac{1}{2} R^j{}_{mlj} \theta^l = R_{ml} \theta^l.$$

Introduisant les composantes du tenseur de Ricci défini en (1.6), il vient

$$\Omega_m = k(n-1)\gamma_{ml}\theta^l = k(n-1)\theta_m.$$

Alors

$$\begin{aligned} C_{jm} &= k\theta_j \wedge \theta_m - \frac{k(n-1)}{(n-2)}(\theta_j \wedge \theta_m - \theta_m \wedge \theta_j) + \frac{kn(n-1)}{(n-1)(n-2)}\theta_j \wedge \theta_m \\ &= k\left(1 - 2\frac{n-1}{n-2} + \frac{n}{n-2}\right)\theta_j \wedge \theta_m \\ &= 0. \end{aligned}$$

Les formes de Weyl sont bien identiquement nulles. Il existe donc une transformation $f : U \rightarrow U$, où $U \subset \mathcal{M}$, telle que

$$f_*\gamma = \lambda(x) \cdot \eta, \quad x \in U,$$

où $\lambda(x)$ est une fonction définie sur \mathcal{M} , et où η est la métrique euclidienne à n dimensions.

Cette démonstration n'est pas valable en 3 dimensions parce que pour $n = 3$ le tenseur de Weyl est nulle de toute façon. Il est facile à compter que dans ce cas le tenseur de Riemann a le même nombre de degrés de liberté que le tenseur de Ricci et le premier est alors déterminé par le dernier. Un espace de Riemann de dimension $n = 3$ est (localement) conformétement plat si

$$\nabla_i S_{jk} - \nabla_j S_{ik} = 0 \quad \text{ou} \quad S_{ij} = -R_{ij} + \frac{1}{4}R\gamma_{ij}. \quad (1.8)$$

Dans un espace de courbure constant d'après eq. (1.6) nous avons $S_{ij} = -\frac{k}{2}\gamma_{ij}$, donc eq. (1.8) est satisfaite.

Tous les espaces de Riemann à deux dimensions sont (localement) conformétement plats.

Proposition 1.4.1 *Dans le cas d'un espace à courbure constante, on peut toujours trouver des coordonnées locales (x^i) telles que*

$$\gamma = \sum_i \frac{(dx^i)^2}{\left(1 + \frac{k}{4}r^2\right)^2}, \quad r^2 = \sum_i (x^i)^2.$$

preuve. La métrique localement conformétement plate est donnée par

$$\gamma = \frac{1}{\Psi^2} \sum_{i=1}^n (dx^i)^2.$$

$\theta^i = \frac{1}{\Psi} dx^i$ est une base orthonormée de 1-formes, nous permettant de réécrire γ comme $\gamma = \sum_i \theta^i \otimes \theta^i = \sum_i (\theta^i)^2$. Alors, avec les deux équations de structures de Cartan, i.e.

$$d\theta^i + \omega^i_j \wedge \theta^j = 0 \quad (1.9)$$

$$d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j = \Omega^i_j, \quad (1.10)$$

il vient

$$d\theta^i = \frac{\Psi_{,j}}{\Psi^2} dx^i \wedge dx^j = \Psi_{,j} \theta^i \wedge \theta^j = -\omega^i_j \wedge \theta^j. \quad (1.11)$$

Comme les coefficients de la métrique exprimés dans la base θ^i sont constants, nous avons

$$dg_{ij} = \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0. \quad (1.12)$$

Les ω_{ij} sont antisymétriques, ce qui facilite les calculs. Pour satisfaire aux équations (1.11) et (1.12) simultanément, nous devons poser

$$\omega_{ij} = -\Psi_{,j}\theta_i + \Psi_{,i}\theta_j.$$

Ainsi, la 2-forme de courbure est

$$\begin{aligned} \Omega_{ij} &= d\omega_{ij} + \omega_{im} \wedge \omega^m_j \\ &= \Psi(-\Psi_{,jm}\theta^m \wedge \theta_i + \Psi_{,im}\theta^m \wedge \theta_j) - \Psi_{,j}\Psi_{,m}\theta_i \wedge \theta^m - \Psi_{,i}\Psi_{,m}\theta^m \wedge \theta_j \\ &\quad + (-\Psi_{,m}\theta_i + \Psi_{,i}\theta_m) \wedge (-\Psi_{,j}\theta^m + \Psi_{,m}\theta_j). \end{aligned}$$

En développement les différents termes, on obtient

$$\begin{aligned} \Omega_{ij} &= -\Psi\Psi_{,jm}\theta^m \wedge \theta_i + \Psi\Psi_{,im}\theta^m \wedge \theta_j - \Psi_{,m}\Psi^m\theta_i \wedge \theta_j \\ &= k\theta_i \wedge \theta_j, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la relation (1.6). Par conséquent, $\Psi_{,im} = 0$ pour $i \neq m$. Ψ est donc une combinaison linéaire de fonctions $f_i(x_i)$, $\Psi = \sum_i f_i(x_i)$. En insérant ce résultat dans l'expression de Ω_{ij} ,

$$\Omega_{ij} = \left[\Psi(f'_i{}'' + f'_j{}'') - \sum_m (f'_m{}')^2 \right] \theta_i \wedge \theta_j, \quad (1.13)$$

il apparaît clairement que le terme entre crochet doit être égal à k . Alors, pour $i \neq j$

$$f'_i{}'' + f'_j{}'' = \left[\sum_m (f'_m{}')^2 + k \right] / \Psi,$$

indépendamment de i et j , si bien que $f'_i{}'' = f'_j{}'' = \text{const.}$ Les f_i sont des fonctions quadratiques de x_i , de la forme $f_i(x_i) = ax_i^2 + b_ix_i + c_i$. Avec une simple transformation linéaire, on arrive à la forme $\Psi = \frac{\alpha}{4}r^2 + 1$. En insérant ce résultat dans l'équation ci-dessus, nous avons $\alpha = k$. Ainsi,

$$\Psi = 1 + \frac{k}{4}r^2, \quad (1.14)$$

$$\theta^i = \frac{dx^i}{1 + \frac{k}{4}r^2}, \quad (1.15)$$

$$\omega^{ij} = \frac{k}{2}(x^i\theta^j - x^j\theta^i). \quad (1.16)$$

Proposition 1.4.2 *Deux espaces à courbure constante identique sont localement isométriques.*

preuve. C'est une conséquence de ce qui a été dit précédemment.

1.4.2 Géométrie et topologie de l'univers

Les équations d'Einstein déterminent la géométrie locale de l'univers mais, en général, ne donnent aucune information sur la topologie. En fait, pour chaque solution des équations d'Einstein, plusieurs topologies différentes sont possibles.

La classification globale des variétés riemanniennes (Σ, γ) à courbure constante est un problème mathématique difficile (cf. le problème des formes spatiales, [64, 4]).

Par exemple, pour $n = 3$, $k \leq 0$, il existe une infinité de formes spatiales non isomorphes, parmi lesquelles la plupart sont compactes. A cet égard, l'opinion selon laquelle l'espace est infini si $k \leq 0$ est fautive. En fait, la correspondance

$$\begin{array}{ll} \text{ouvert} & k = 0, -1 \quad (\text{espace infini}) \\ \text{fermé} & k = +1 \quad (\text{espace fini}) \end{array}$$

n'est valable que si l'on suppose Σ simplement connexe.

A titre d'exemple, dans le cas $n = 3$, $k = 0$, $\Sigma = \mathbf{E}(3)$, espace euclidien à trois dimensions ou $\Sigma = \mathbf{E}(3)/Z^3$, tore à trois dimensions, sont des formes spatiales non isomorphes. Pour $k \geq 0$, toutes les solutions sont compactes. Pour des informations supplémentaires, cf. Lachieze-Rey & Luminet (1995) [28]. La classification des espaces à courbure négative est un sujet particulièrement difficile. Son traitement mathématique est donné dans [4].

1.4.3 Métrique FRW

Comme nous l'avons déjà remarqué, les sections à temps constant Σ_t d'un univers de Friedmann sont des espaces à courbure constante. Ils ne diffèrent entre eux que par un facteur d'échelle qui est indépendant de la position $p \in \Sigma_t$. De plus, le champ géodésique de vitesse ∂_t est orthogonal aux Σ_t .

En choisissant des coordonnées (x^1, x^2, x^3) sur Σ_{t_1} , on peut paramétriser tout événement $p \in \mathcal{M}$ par (t, x^1, x^2, x^3) . Avec un système de coordonnées adapté, nous pouvons donc écrire la métrique sous la forme

$$g = -dt^2 + a(t)^2 \gamma \quad (1.17)$$

$$\gamma = \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{4}\rho^2\right)^2} \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2 \quad (1.18)$$

$$\rho = \sum_{i=1}^3 (x^i)^2.$$

L'équation (1.17) est une expression pour la métrique de Friedmann, Robertson et Walker (FRW). Friedmann a trouvé la géométrie des univers de Friedmann en 1922, tandis que Robertson et Walker ont dérivé des expressions particulièrement pratiques pour la métrique en 1935/36. Nous allons dériver ces expressions par la suite. D'abord, nous définissons le temps conforme η par $dt \equiv a(\eta)d\eta$, ou

$$\eta(t) = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (1.19)$$

La métrique ci-dessus devient

$$g = a(\eta)^2[-d\eta^2 + \gamma_{ij}dx^i dx^j]. \quad (1.20)$$

Dans le cas $k = 0$, la métrique g est bien évidemment conformément plate. En fait, on peut montrer que la métrique FRW est conformément plate et ce, quelle que soit la valeur de k (voir exercices). En plus, remarquons qu'avec une renormalisation du facteur d'échelle si $k \neq 0$, $a \rightarrow \sqrt{|k|}a$, si bien que l'on peut toujours obtenir $k = \pm 1$.

Nous dérivons encore quelques autres expressions pour la métrique. Comme nous démontrons en bas, en effectuant un changement de coordonnées, puis en redéfinissant le rayon r et le facteur d'échelle $a(t)$, la métrique (1.17) peut aussi s'écrire

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad \text{avec } k = 0, \pm 1. \quad (1.21)$$

ou comme

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 [d\chi^2 + \sigma(\chi)^2 d\Omega^2], \quad (1.22)$$

avec

$$\sigma(\chi)^2 = \begin{cases} \chi^2 & \text{cas euclidien, courbure zero} \\ \sin(\chi)^2 & \text{cas sphérique, courbure positive} \\ \sinh(\chi)^2 & \text{cas hyperbolique, courbure négative} \end{cases} \quad (1.23)$$

Remarquons que, dans ces coordonnées, l'élément de distance est le même dans les trois cas pour des trajectoires radiales (i.e. $d\vartheta = d\varphi = 0$),

Montrons d'abord que la métrique (1.21) est bien équivalente à (1.22). En effet,

- $k = 0$: En posant $r = \chi$, $\chi \in [0, \infty]$, on retrouve la métrique (1.22) dans le cas euclidien. $k = 0$ correspond donc à la géométrie euclidienne.

- $k = 1$: Partant de 0, la variable r ne peut dépasser la valeur 1. Nous pouvons donc poser $r = \sin \chi$, $\chi \in [0, \pi]$, et l'on retombe sur l'expression (1.22) avec $\sigma(\chi) = \sin \chi$, i.e. la géométrie sphérique.

- $k = -1$: Dans ce cas, la variable r peut varier de 0 à l'infini. En posant $r = \sinh \chi$, $\chi \in [0, \infty]$, nous retrouvons le cas hyperbolique de l'équation (1.22).

Nous démontrons maintenant que la métrique (1.21) est aussi équivalente à (1.17). En faisant la substitution

$$r = \frac{\rho}{1 + \frac{k}{4}\rho^2}, \quad dr = \frac{r}{\rho} d\rho - \frac{k}{2} r^2 d\rho,$$

On peut vérifier que

$$\frac{dr^2}{1 - kr^2} = \frac{d\rho^2}{(1 + \frac{k}{4}\rho^2)^2},$$

Donc (1.21) s'exprime comme

$$ds^2 = dt^2 - \frac{a(t)^2}{(1 + \frac{k}{4}\rho^2)^2} [d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2], \quad (1.24)$$

ce qui est équivalent à la métrique (1.17). Nous avons donc démontré que les métriques (1.22, 1.21) sont équivalentes à (1.17). Comme nous connaissons explicitement les transformations de coordonnées, nous allons toujours utiliser le système de coordonnées le mieux adapté pour le problème traité.

Notez que nous n'avons transformé que la partie spatiale de la métrique et que, dans le cas $k = 0$, tous les expressions sont identiques.

1.5 Propriétés générales de la métrique FRW

1.5.1 Comobilité

Dans le cadre de la cosmologie de Friedmann-Robertson-Walker, les équations de mouvement des 'galaxies' (particules testes) correspondent aux équations des géodésiques de la métrique. Il est facile de montrer que

$$\begin{aligned}\rho &= \text{const.} \\ \vartheta &= \text{const.} \\ \varphi &= \text{const.}\end{aligned}$$

est une solution de l'équation géodésique de l'espace-temps FRW.

Certes, il existe d'autres solutions pour lesquelles les galaxies ne sont pas immobiles par rapport au système de coordonnées $(\rho, \vartheta, \varphi)$. Toutefois, nous postulons *a priori* que les galaxies constituent des référentiels comobiles. Il nous faut encore montrer que cette hypothèse est compatible avec un décalage des fréquences vers le rouge, conduisant à la *loi de Hubble*.

1.5.2 Le temps cosmique

La variable t est le temps propre d'un observateur 'comobile', c'est-à-dire un observateur à coordonnée $(r, \vartheta, \varphi) = \text{constant}$. Ce temps cosmique définit un référentiel privilégié. Dans un espace-temps FRW le groupe de Lorentz est brisé. Cette métrique n'est donc pas invariante sous 'boosts'.

1.5.3 Décalage spectral cosmologique vers le rouge

On peut montrer que les équations des géodésiques admettent aussi des solutions de la forme $\vartheta = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$, i.e., décrivant des trajectoires radiales. Nous allons appliquer ce résultat aux photons et montrer que les longueurs d'onde des photons sont décalées vers le rouge.

Considérons deux photons (ondes électromagnétiques), émis à partir d'une galaxie G aux moments t_1 et $t_1 + \delta t_1$ en direction d'un observateur O où ils arrivent aux temps t_0 et $t_0 + \delta t_0$. Comme les trajectoires des photons sont de type lumière, la norme de leur quadri-vitesse $(u^\mu) = (\dot{x}^\mu)$ est nulle, $g(u, u) = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 0$, i.e.,

$$\mathcal{L}_{\text{photon}} \equiv -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0, \quad (1.25)$$

condition équivalente à $ds^2 = 0$. En posant $\vartheta = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$, il vient

$$\mathcal{L}_{\text{photon}} = \frac{1}{2}[-a(t)^2\dot{\chi}^2 + \dot{t}^2] = 0. \quad (1.26)$$

Extrayant χ de la relation ci-dessus et intégrant par rapport à t , ceci conduit à

$$\chi = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0+\delta t_0}^{t_1+\delta t_1} \frac{dt}{a(t)}, \quad (1.27)$$

puisque la distance comobile (χ) entre les deux galaxies reste constante (comobilité).

Soustrayant les deux intégrales, nous avons

$$\int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} \frac{dt}{a(t)}.$$

Si l'on considère des intervalles de temps très petits, i.e., $\delta t \ll t$, le facteur d'échelle, à peu près constant, peut être extrait de l'intégrant, si bien que

$$\frac{\delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\delta t_1}{a(t_1)}.$$

Nous choisissons maintenant pour δt_1 une période de l'onde à la position G de l'émetteur. Alors δt_0 est la période de l'onde mesurée à la position O de l'observateur. En remarquant que les périodes de l'onde sont liées aux longueurs d'onde du photon dans les positions respectives par $\delta t_0 = \lambda_0/c$ et $\delta t_1 = \lambda_1/c$, le rapport des facteurs d'échelle donne

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{\delta t_0}{\delta t_1} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{\nu_1}{\nu_0},$$

ou encore

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{a_0}{a_1}, \quad (1.28)$$

où l'on a introduit le *décalage spectral* ou *redshift* $z \equiv a_0/a_1 - 1$ caractérisant le décalage provoqué par l'expansion de l'univers. Ainsi, c'est l'expansion (ou la contraction) de l'univers qui explique le décalage spectral cosmologique des galaxies, et non le mouvement particulier de ces dernières.

Remarques

- Si $a(t_0) \geq a(t_1)$, l'univers est en *expansion* et $\lambda_0 \geq \lambda_1$: il y a décalage spectral vers le rouge. Si $a(t_0) \leq a(t_1)$, l'univers est en *contraction* et $\lambda_0 \leq \lambda_1$: il y a décalage spectral vers le bleu. Les observations astronomiques, portant sur un grand nombre de galaxies, montrent de manière indiscutable que les longueurs d'onde des photons parvenants de galaxies lointaines sont décalées vers le rouge. L'univers actuel est bien en expansion.

- Dans cette description de l'univers, l'origine de ce décalage vers le rouge n'est pas l'effet Doppler de la relativité restreinte. C'est la dépendance de la métrique en fonction du temps (le terme $a(t)$) qui en est responsable.

Certes, dans le cas de redshifts $z \ll 1$, on peut éventuellement interpréter ce décalage en terme d'effet Doppler, avec $z = v/c \ll 1$, qui dans le cas $z \ll 1$ correspond vraiment à la vitesse de la galaxie G par rapport à nous due à l'expansion de l'univers. En revanche, cette interprétation se révèle inadéquate dès que le décalage devient important et ce, pour deux raisons principales :

admettre que la cinématique est à l'origine du décalage cosmologique d'une part, c'est admettre que notre galaxie, la Voie Lactée constitue un référentiel privilégié, hypothèse fortement teintée de géocentrisme. D'autre part, dans le cadre de la relativité générale, une densité de matière non nulle entraîne elle aussi un décalage des photons vers le rouge.

Ainsi, en dehors du cas particulier de l'univers vide ($\Omega = 0$, cf. chapitre 3), on ne peut interpréter le décalage cosmologique en terme de 'vitesse de récession', et la formule de conversion de la relativité restreinte

$$1 + z = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}},$$

est inapplicable dans le cadre de la cosmologie FRW.

- L'énergie des photons diminue lorsque $a(t)$ augmente. On peut alors se demander ce que devient cette énergie "perdue" par les photons. Mais, comme nous le savons, il n'y a pas de loi de conservation d'énergie dans la relativité générale. $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ mais $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} \neq 0$ en général. Pour des raisons de symétrie, l'impulsion et le moment cinétique sont conservés dans l'univers Friedmann. Mais comme la métrique FRW n'est pas invariante sous translations dans le temps, l'énergie n'est en générale pas conservée. Nous verrons plus loin (cf. chapitre 3) que l'expansion de l'univers est adiabatique (c'est un système isolé) et que l'entropie est conservée. Il y a aussi des interprétations (quoique pas tout-à-fait consistantes) que l'énergie perdue par les photons est, en quelque sorte, transmise au mouvement d'expansion.

1.5.4 La loi de Hubble

Considérons comme avant une galaxie G de position $(r_1, \vartheta_1, \varphi_1)$ comobile par rapport à un observateur O situé à l'origine. La distance métrique séparant O et G au temps t_0 , calculée avec la métrique (1.21), est donnée par

$$d(t_0) = a(t_0) \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}.$$

L'observateur O ne peut mesurer $d(t_0)$ tant que les photons émis par la galaxie G ne lui sont pas parvenus. Dans le cas où $d(t_0)$ est très grand (par rapport à l'échelle caractérisant la 'croissance' de l'univers), l'observateur n'aura accès à $d(t_0)$ qu'au bout d'un temps Δt relativement long : on ne peut donc guère parler de 'distance propre', l'univers ayant eu le temps de croître significativement pendant l'intervalle Δt . Dans un univers en expansion, la notion de 'distance propre' doit être utilisée avec précaution.

Nous pouvons dériver le membre de droite de la relation ci-dessus par rapport au temps pour obtenir la vitesse de récession entre G et O

$$\begin{aligned} v(t_0) &= \dot{a}(t_0) \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \\ &= \frac{\dot{a}_0}{a_0} d(t_0). \end{aligned}$$

La *constante de Hubble* H_0 est définie par $H_0 \equiv \dot{a}_0/a_0$. Alors

$$v(t_0) = H_0 d(t_0), \tag{1.29}$$

qui n'est autre que la *loi de Hubble*, énoncée pour la première fois en 1929 par l'astronome américain Edwin Hubble. La vitesse v est souvent appelée *flot de Hubble*. Notons encore que $d(t_0)$ défini ici est aussi égale à $t_0 - t_1$ pour un photon qui arrive en O à t_0 et qui a été émis en G à t_1 . En utilisant que pour $t_0 - t_1$ suffisamment petit nous pouvons approximer

$$a(t_1) \simeq a_0 + \dot{a}_0(t_1 - t_0) = a_0(1 - H_0(t_0 - t_1)) = a_0(1 - H_0d(t_0)) .$$

En premier ordre en $H_0d(t_0)$ et z ceci donne $z + 1 = a_0/a(t_1) \simeq 1 + H_0d(t_0) = 1 + v(t_0)$. Donc en premier ordre le décalage spectral du à l'expansion et la vitesse de recession coïcident. Ceci n'est plus le cas pour les ordres supérieurs.

En toute généralité,

$$v_{obs} = H_0d(t_0) + v_{pec}, \quad (1.30)$$

où v_{obs} est la vitesse observée depuis la Terre, et v_{pec} la partie de la vitesse due au champ gravitationnel local, i.e., la déviation de la loi de Hubble (dispersion ou mouvement systématique autre que l'expansion).

La relation (1.29) n'a de sens que si le redshift de l'objet concerné est faible ($z \leq 0.1$), lorsque le décalage peut encore être interprété en terme de vitesse.

Les dernières estimations conduisent à (voir chap. 2)

$$H_0 \equiv 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad \text{avec} \quad h = 0.7 \pm 0.1.$$

Actuellement, les objets observés les plus lointains sont des galaxies de $z \simeq 10$ observées dans le 'Hubble ultra-deep field', une très longue exposition du télescope spatial nommé Hubble. Leur lumière est partie quand l'univers observable était environ 30 fois plus petit.

Les équations de cosmologie, comme nous le verrons dans le chapitre 3, sont des équations du deuxième ordre pour $a(t)$. Ainsi, nous avons besoin d'une autre observable en dehors de H_0 afin de caractériser l'état de l'univers à un moment donné de son histoire. Dans cette optique, le *paramètre de décélération* est défini par

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}_0 a_0}{\dot{a}_0^2}. \quad (1.31)$$

Il caractérise la géométrie de l'univers si l'équation d'état pour la matière cosmique est connue : par exemple, si l'univers est dominé par de la matière non-relativiste, la pression est négligable devant la densité d'énergie. Alors, la géométrie hyperbolique ($k = -1$) satisfait $q_0 < 1/2$, la géométrie euclidienne ($k = 0$) $q_0 = 1/2$ et la géométrie sphérique ($k = 1$) $q_0 > 1/2$. Dans le courant du chapitre 3, nous verrons que q_0 dépend étroitement de la densité et de la pression dans l'univers.

H_0 et q_0 sont des paramètres très importants de la cosmologie observationnelle. Nous allons consacrer le prochain chapitre aux différentes méthodes aboutissant à la détermination de ces deux paramètres. Les observations modernes essaie plutôt de mesurer toute la fonction $H(t)$ dont H_0 et q_0 sont les deux premiers termes dans un développement en $\Delta t = t_0 - t$.

1.6 Mesures de distances

Pour déterminer la fonction $a(t)/a_0$ ou, ce qui est équivalent $z(t)$, nous devons lier le décalage spectral à une mesure de distance. Pour ceci nous avons à

disposition des observables telles que le flux f d'une source de rayonnement ou encore le diamètre angulaire ϑ séparant deux points sur le ciel.

Ces différentes observables conduisent à la définition de deux 'distances' particulièrement utiles : la *distance de luminosité* et la *distance angulaire*.

1.6.1 Distance angulaire

Une mesure de distance, surtout utile pour le traitement des lentilles gravitationnelles pour la position des pic dans le spectre des fluctuations dans le CMB (voir [15]) et pour les 'baryon acoustic oscillations', est la distance angulaire, d_A .

Nous considérons un objet de taille physique Δ donné à un redshift z_1 correspondant à un temps $t_1 = t(z_1)$. Cet objet est supposé d'émettre des photons de ces bouts A et B qui sont reçus sous un angle θ , voir fig. 1.1.

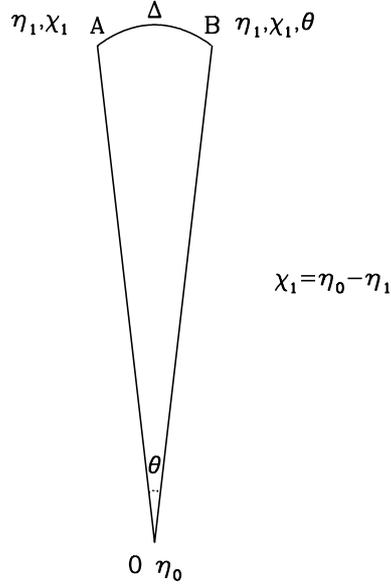


FIG. 1.1 – Un objet de taille Δ à une distance radiale χ_1 vu sous un angle θ .

Nous définissons sa distance angulaire par

$$\theta = \frac{\Delta}{d_A}, \quad d_A = \frac{\Delta}{\theta}.$$

Mais à t_1 une distance vu sous θ est

$$\Delta = a(t_1)\sigma(\chi_1)\theta \quad \text{donc} \quad d_A = a(t_1)\sigma(\chi_1).$$

Nous utilisons encore que $\chi_1 = \eta_0 - \eta_1$ si des photons émis au temps (conforme) η_1 de χ_1 nous arrive à η_0 , voir eqs. (1.19) et (1.27). Avec

$$\frac{da}{d\eta} = a\dot{a} = H(z)a^2(z)$$

nous obtenons

$$\eta_0 - \eta_1 = \int_{a_1}^{a_0} \frac{da}{H(z)a^2(z)} = \frac{1}{a_0} \int_0^{z_1} \frac{dz}{H(z)}. \quad (1.32)$$

Pour la dernière égalité nous avons utilisé $z + 1 = a_0/a$ donc $dz = -(a_0/a^2)da$. Nous obtenons donc finalement l'expression suivante pour la distance angulaire :

$$d_A(z) = a(z)\sigma \left(\frac{1}{a_0} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right). \quad (1.33)$$

1.6.2 Distance métrique

Elle est défini par la distance donné par l'expression de la métrique à t_0 donc

$$d_M \equiv a_0\sigma(\chi_1) = (1+z)d_A. \quad (1.34)$$

1.6.3 Distance de luminosité

Nous considérons une source avec luminosité intrinsèque L_1 donnée (énergie émise par unité de temps) Et le flux reçu par un observateur à t_0 soit f_0 (énergie reçu par unité de temps et unité de surface). Nous définissons la distance de luminosité, d_L par la relation

$$f_0 = \frac{L_1}{4\pi d_L^2}, \quad \text{donc} \quad d_L = \sqrt{\frac{L_1}{4\pi f_0}}.$$

La surface de la sphère sur laquelle la luminosité est répartie est $a_0 r_1 = a_0\sigma(\chi_1)$. Mais l'énergie émise dans un temps δt_1 est reçue dans un temps $\delta t_0 = (1+z)\delta t_1$. En plus, l'énergie de chaque photon est décalée vers le rouge par un facteur $(1+z)$. Donc la luminosité reçue qui est vraiment distribuée sur cette sphère, L_0 , est diminuée par un facteur $(1+z)^2$ par rapport à L_1 , telle que

$$f_0 = \frac{L_0}{4\pi(a_0\sigma(\chi_1))^2} = \frac{L_1}{(1+z)^2 4\pi(a_0\sigma(\chi_1))^2}.$$

Avec ceci nous trouvons

$$d_L(z) = (1+z)a_0\sigma(\chi_1) = (1+z)d_M(z) = (1+z)^2 d_A(z). \quad (1.35)$$

Notez que nous avons supposé que nous recevons toute l'énergie émise et il n'y ait pas des fréquences en qui soient décalées en dehors de la bande de sensibilité de notre détecteur.

Lorsque le redshift z est suffisamment faible, $z \ll 1$, les trois distances se comportent comme $d = z/H_0 + \mathcal{O}(z^2)$.

Chapitre 2

Principes des tests cosmologiques

2.1 Flux d'une source lointaine en fonction du redshift

Une fois que le flux f d'une source lointaine S est connu, on peut en déterminer la distance s'il existe une relation de la forme $f_0 = f(z)$ pour une source a luminosité connue à redshift z . Dans le cas où le redshift est petit, $z \ll 1$, on peut développer en série les variables a_0 et $r_1 = \sigma(\chi_1)$ qui apparaissent dans la relation (1.35). Comme le redshift d'une source est facile à mesurer, cette procédure permet de déterminer les paramètres cosmologiques, par exemple H_0 et q_0

Exprimons tout d'abord le facteur d'échelle en fonction de z . Développant $a(t)$ en série, nous avons

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 + \dot{a}_0(t - t_0) + \frac{\ddot{a}_0}{2}(t - t_0)^2 + \mathcal{O}(t^3) \\ &= a_0[1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0H_0^2(t - t_0)^2 + \mathcal{O}(t^3)], \end{aligned}$$

$\mathcal{O}(t^3)$ désignant les termes d'ordre supérieur ou égal à $(t - t_0)^3$. En posant $t = t_1$, $a(t_1) = a_1$ et en tenant compte de la relation $1 + z = a_0/a_1$, il vient

$$\begin{aligned} 1 + z &= [1 + H_0(t_1 - t_0) - \frac{1}{2}q_0H_0^2(t_1 - t_0)^2 + \mathcal{O}(t^3)]^{-1} \\ &= 1 + H_0(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}q_0H_0^2(t_1 - t_0)^2 + H_0^2(t_1 - t_0)^2 + \mathcal{O}(t^3). \end{aligned}$$

Regroupant les facteurs $(t - t_0)^n$ identiques, la relation ci-dessus conduit à

$$z = H_0(t_1 - t_0) + \left(1 + \frac{1}{2}q_0\right) H_0^2(t_1 - t_0)^2 + \mathcal{O}(t^3). \quad (2.1)$$

Pour un très faible redshift, $H_0(t_0 - t_1) \ll 1$ et le terme additif $\mathcal{O}(t^3)$ est négligeable. La relation (2.1) peut donc être considérée, en première approxi-

mation, comme une équation algébrique du deuxième degré en $(t_1 - t_0)$. Sélectionnant la racine appropriée (i.e. telle que $(t_0 - t_1) \geq 0$), on a

$$(t_0 - t_1) = \frac{1}{H_0} \left[z - \left(1 + \frac{1}{2}q_0 \right) z^2 + \mathcal{O}(z^3) \right]. \quad (2.2)$$

$|t_1 - t_0| = (t_0 - t_1)$ est le *temps de vol* de photons qui ont été émis par la source S à $t = t_1$, et détectés à $t = t_0$ par l'observateur O . Pour le voir, considérons la métrique (1.21). Dans notre situation, les photons se propagent le long de trajectoires radiales, $d\Omega = 0$, si bien que la condition $ds^2 = 0$ implique

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \frac{dr^2}{1 - kr^2} = 0,$$

ou

$$dt^2 = a(t)^2 \frac{dr^2}{1 - kr^2} = dl^2. \quad (2.3)$$

dl est la distance physique parcourue par les photons. En réintroduisant la constante c , $c\Delta t = \Delta l$ et Δt correspond bien au 'temps de vol' des photons. A titre d'exemple, pour un décalage cosmologique $z = 0.1$ et une constante de Hubble $H_0^{-1} = 18 \times 10^9 \text{yr}$, le temps de vol est $(t_0 - t_1) = 1.8 \times 10^9 \text{yr}$. Ces photons, émis lorsque l'univers était plus petit d'un facteur 1.1, ont mis presque deux milliards d'années pour rejoindre la Terre. Ils constituent donc un 'instantané' de la source S pris à $t_1 \leq t_0$. Pour cette raison, $(t_0 - t_1)$ est aussi appelé *lookback time*.

Pour exprimer la distance métrique $a_0 r_1$ en fonction du temps de vol $(t_0 - t_1)$, nous pouvons séparer les variables r et t dans la relation (2.3), et intégrer le long de la trajectoire des photons,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{a(t)} &= \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \\ &= \int_0^{r_1} \left[1 + \frac{1}{2}kr^2 + \mathcal{O}(r^3) \right] dr \\ &= r_1 [1 + \mathcal{O}(kr_1^2)]. \end{aligned}$$

Ainsi, la distance comobile séparant la source S de l'observateur Terrestre O est

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{a_0} \int_{t_1}^{t_0} (1 + z) dt \\ &= \frac{1}{a_0} \int_{t_0}^{t_1} \left[1 + H_0 \tau + \left(1 + \frac{1}{2}q_0 \right) H_0^2 \tau^2 + \mathcal{O}(\tau^3) \right] d\tau \\ &= \frac{1}{a_0} (t_0 - t_1) \left[\frac{H_0}{2} (t_0 - t_1) + \mathcal{O}([H_0(t_0 - t_1)]^2) \right]. \end{aligned}$$

Utilisant la relation (2.2), il vient

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{a_0 H_0} \left[z - \left(1 + \frac{1}{2}q_0 \right) z^2 + \frac{H_0}{2} \frac{1}{H_0} z^2 + \mathcal{O}(z^3) \right] \\ &= \frac{1}{a_0 H_0} \left[z - \frac{1}{2}(1 + q_0)z^2 + \mathcal{O}(z^3) \right], \end{aligned}$$

et la distance métrique est

$$a_0 r_1 = \frac{1}{H_0} \left[z - \frac{1}{2}(1 + q_0)z^2 + \mathcal{O}(z^3) \right]. \quad (2.4)$$

L'effet de la courbure (q_0) n'apparaît qu'à l'ordre z^2 dans la mesure où les fonctions χ , $\sin \chi$ et $\sinh \chi$ (caractérisant les géométries euclidienne, sphérique et hyperbolique respectivement) ne diffèrent qu'à l'ordre χ^3 .

Le calcul de la distance de luminosité est immédiat,

$$\begin{aligned} d_L &= a_0 r_1 (1 + z) \\ &= \frac{1}{H_0} \left[z + \frac{1}{2}(1 - q_0)z^2 + \mathcal{O}(z^3) \right]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Lorsque $z \ll 1$, elle se réduit à la distance métrique d_m . Insérant ce résultat dans l'expression (2.6) pour f , nous pouvons alors exprimer le flux bolométrique en fonction du redshift z ,

$$\begin{aligned} f &= \frac{L}{4\pi} \frac{H_0^2}{\left[z + \frac{1}{2}(1 - q_0)z^2 + \mathcal{O}(z^3) \right]^2} \\ &\simeq \frac{LH_0^2}{4\pi z^2} \frac{1}{[1 + (1 - q_0)z]} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\simeq \frac{LH_0^2}{4\pi z^2} [1 + (q_0 - 1)z], \quad (2.7)$$

pour $z \ll 1$. Pour réintroduire les unités physiques habituelles, il suffit de remplacer le facteur H_0^2 par H_0^2/c^2 .

En astrophysique observationnelle, le flux f est souvent exprimé selon une échelle logarithmique, définie de la manière suivante,

$$m_{bol} \equiv -2.5 \log_{10} f + const. \quad (2.8)$$

où la constante est choisie telle que $m = 0$ pour un objet avec flux $f = 2.52 \times 10^{-5} \text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1}$. m_{bol} est la *magnitude relative* de la source (puisque f dépend de la distance). A cet égard, on définit la *magnitude absolue* d'une source par

$$M_{bol} \equiv -2.5 \log_{10} \frac{L}{L_\odot} + 4.75. \quad (2.9)$$

où L_\odot est la luminosité solaire, $L_\odot = 3.90 \times 10^{26} \text{W}$. Le *module de distance* de la source observée est alors $m_{bol} - M_{bol} = 5 \log_{10}(d/10pc)$. Il peut être calculé à l'aide de diverses méthodes (cf. table 2.1).

En tenant compte du fait que $z \ll 1$, le logarithme de f conduit à

$$\begin{aligned} -2.5 \log_{10} [1 + (q_0 - 1)z] &= -1.086 \log [1 + (q_0 - 1)z] \\ &\simeq 1.086(1 - q_0)z. \end{aligned}$$

Introduisant ce résultat dans l'équation (2.7), puis utilisant les définitions (2.8) et (2.9), le module de distance $m_{bol} - M_{bol}$ est fonction de H_0 , q_0 et z suivant la relation

$$m_{bol} - M_{bol} = 48.65 - 5 \log_{10} H_0 + 5 \log_{10}(cz) + 1.086(1 - q_0)z. \quad (2.10)$$

Pour que cette relation puisse être utile, il faut que les objets étudiés soit très bien compris. Le facteur M_{bol} est en effet difficile à estimer. Dans la pratique, par exemple, on travaille toujours avec le même type de galaxies.

Dans le cas où les observations ne donnent que le flux d'énergie $f_\nu(\nu_0)$ dans la bande de fréquence $[\nu_0, \nu_0 + d\nu_0]$, le facteur L dans l'expression (2.6) est remplacée par $L_\nu(\nu_0(z+1))$. Le module de distance correspondant à $f_\nu(\nu_0)$ est

$$m_{bol} - M_{bol} = 48.65 - 5 \log_{10} H_0 + 5 \log_{10}(cz) + 1.086(1 - q_0)z + K(z), \quad (2.11)$$

où le dernier terme $K(z) = -2.5 \log_{10}[(1+z)L_\nu[(1+z)\nu_0]/L_\nu(\nu_0)]$ est la correction bolométrique, et prend en considération le décalage vers le rouge du spectre de la source S (Nous allons y revenir section 2.3).

Pour des valeurs de z plus élevées, les développements au deuxième ordre que nous avons utilisés ne sont plus valables. En revanche, on peut obtenir une expression exacte de la distance métrique (donc de la distance de luminosité) à partir des équations des cosmologies dans un univers dominé par de la matière non-relativiste (cf. chapitre 3),

$$a_0 r_1 = \frac{1}{H_0 q_0^2 (1+z)} \left[q_0 z + (q_0 - 1) \left(\sqrt{1 + 2q_0 z} - 1 \right) \right].$$

C'est la *relation de Mattig*. Elle est valable pour $k = 0, \pm 1$.

2.2 Le paramètre H_0 et l'échelle de distance

La constante de Hubble H_0 est l'un des paramètres les plus importants de la cosmologie moderne. La loi de Hubble $v = H_0 \cdot d$ permet de déterminer H_0 pourvu que l'on connaisse la vitesse v et la distance propre d qui nous sépare d'une source (une galaxie par exemple). Bien que cette loi est relativement simple en apparence, elle doit être appliquée avec précaution pour la raison suivante : si on l'applique aux objets proches d'une part, la distance propre peut être déterminée assez facilement alors que la mesure de v_{obs} (cf. section 1.5.4) est incertaine en raison des écarts relativement importants au flot de Hubble ($\langle v_{pec} \rangle \sim \langle v_{obs} \rangle$). Pour des objets lointains (i.e. $z \geq 0.01$), la dispersion résiduelle est faible ($\langle v_{pec} \rangle \ll \langle v_{obs} \rangle$) mais les distances propres d sont difficiles à calibrer.

Pour résoudre ce problème cornélien, les astronomes ont construit une *échelle de distance*, ensemble disparate de méthodes destinées à évaluer les distances séparant plusieurs classes d'objets. Cette échelle de distance peut être appliquée, avec plus ou moins de succès, aux étoiles du voisinage du soleil jusqu'aux galaxies les plus lointaines. A titre d'exemple, pour calculer la distance nous séparant de l'amas Coma (amas de galaxies), on procède par petits bons, i.e. Soleil-LMC (Petit Nuage de Magellan), LMC-amas Virgo et amas Virgo-amas Coma, en appliquant successivement plusieurs étalons de mesure, ou *indicateurs de distance* (cf. table 2.1 pour une comparaison entre les diverses méthodes).

Actuellement, les calibrations des objets les plus lointains atteignent environ les 100 Mpc $\ll 1/H_0 \simeq 6000$ Mpc ($z \leq 0.02$).

Pour calibrer les distances d'objets lointains, plusieurs possibilités s'offrent à nous. Si l'on connaît le diamètre réel Δ d'un certain étalon de mesure, on

TAB. 2.1 – Module de distance de l’amas Virgo

Méthode	$(m - M)_{\text{Virgo}}$	type de Hubble
Céphéides	31.52 ± 0.21	S
Tully-Fisher	31.58 ± 0.24	S
Amas globulaires	31.67 ± 0.15	E
$D_n - \sigma$	31.85 ± 0.19	S0, S
Novae	31.46 ± 0.40	E
Moyenne :	31.66 ± 0.09	($\Rightarrow 21.5 \pm 0.9$ Mpc)

Table d’après Tammann et al. (1999) [60]. La classification de Hubble (1926) partage les galaxies en trois groupes : (i) les galaxies elliptiques (E), (ii) les galaxies spirales (S) ou spirales barrées (SB) et (iii) les irrégulières (I).

peut le comparer au diamètre angulaire observé ϑ d’un objet de même type et en déduire sa distance. D’autre part, si l’on connaît sa luminosité absolue L , on peut déterminer son module de distance $(m - M)$ en mesurant sa magnitude apparente m .

Pour les objets du voisinage solaire ($d \leq 200\text{pc}$), les distances peuvent être déterminées aisément en mesurant leur parallaxe, i.e. le déplacement de leur position apparente sur le ciel sous l’effet de la révolution de la Terre autour du Soleil (cf. cours des bases de l’astrophysique, Mayor 1998 [34], voir aussi réf. [48]).

Nous n’allons pas traiter de manière exhaustive le sujet de la calibration des distances, mais insister plutôt sur quelques méthodes particulières. Une partie du contenu des sections 2.2.1 et 2.2.2 provient du cours des Grandes Structures dans l’Univers (Mayor 1998 [35]).

2.2.1 Étalons primaires

Les indicateurs de distance sont divisés en deux classes : les *indicateurs de distance primaires* et les *indicateurs de distance secondaires*. Les étalons primaires - comme les Céphéides - peuvent être calibrés à partir de considérations théoriques ou à l’aide d’objets appartenant à notre galaxie et à ses satellites, les Nuages de Magellan (LMC pour *Large Magellanic Cloud* et SMC pour *Small Magellanic Cloud*). Leur luminosité relativement faible par rapport à celle des galaxies limite, en effet, leur champ d’application aux galaxies voisines de la nôtre. Toutefois, l’arrivée du HST (*Hubble Space Telescope*) a permis d’étendre ce domaine restreint jusqu’aux galaxies situées, à l’intérieur d’une sphère de rayon $R \simeq 20\text{Mpc}$ (ce qui inclut l’amas de Virgo).

Au contraire, les étalons secondaires - comme la relation de Tully-Fisher - sont fiables sur des distances beaucoup plus importantes. Pour calibrer ces indicateurs secondaires, les étalons primaires s’avèrent tout de même nécessaires (calibration effectuée sur les galaxies proches).

δ Céphéides Les étoiles de type δ Céphéides (ou δC) sont des étoiles jeunes, très lumineuses et dont la luminosité intrinsèque varie avec une période comprise

entre 2 et 40 jours. A structure donnée, on a la relation empirique suivante entre la période de pulsation, P , la constante de pulsation, Q , et la densité moyenne, ρ , qui dépend de la luminosité M_V pour une pulsation dans le mode fondamental,

$$P\rho^{1/2} = Q,$$

Sandage a observé que les résidus autour de cette relation étaient corrélés à la couleur $B - V$. Il existe donc une relation période-luminosité-couleur (PLC) ¹ de la forme

$$M_V = n - m \log P + q(B - V), \quad (2.12)$$

où M_V et $(B - V)$ sont les moyennes effectuées dans la bande de couleur correspondante et corrigées de l'absorption interstellaire. Les coefficients m et q dépendent de la composition chimique. Pour ces coefficients, la calibration se fait à partir des δC des *Nuages de Magellan* (*LMC* et *SMC*) alors que pour le point zéro n , elle se fait à partir des Céphéides de notre galaxie ayant des distances bien déterminées. Les analyses conduisent à $n \cong -2.50$, $m \cong 3.60$ et $q \cong 2.60$.

En ce qui concerne la longueur d'onde à adopter pour les mesures, l'infrarouge offre l'avantage de diminuer à la fois l'influence de l'absorption interstellaire et de la métallicité. En outre, la dispersion de la relation PLC dans l'IR ($1.65 \mu m$) est inférieure à la dispersion obtenue dans le visible ($0.44 \mu m$).

Les Céphéides sont observables jusqu'à environ 5 Mpc depuis le sol et 20 Mpc avec le HST. A titre d'exemple, la distance nous séparant de M31 (la galaxie Andromède), obtenue à partir de l'observation de Céphéides, est de l'ordre de 0.7Mpc ($1\text{Mpc}=10^6\text{pc}$). Appliquées à la relation (2.10), elles offrent une détermination de H_0 relativement précise (cf. table 2.2 pour des valeurs numériques).

Les principales difficultés liées à cette méthode sont les suivantes :

- L'extinction (ou "rougissement") à l'intérieur de notre galaxie et à l'intérieur de la galaxie où se trouve la Céphéide est difficile à estimer. De plus, l'extinction dépendant de la longueur d'onde, les modules de distance ($m - M$) obtenus diffèrent en fonction de la bande choisie. Toutefois, une étude des variations de $(m - M)$ en fonction de la longueur d'onde permet d'estimer le vrai module de distance, pour autant que l'on ait une approximation de l'extinction à disposition (une bonne formule mathématique!).
- La relation PLC dépend de la métallicité des Céphéides (i.e. de la galaxie choisie), et du rapport $[Fe/H]$ en particulier (Par exemple, les Céphéides des nuages de Magellan sont plus bleues que celles de notre galaxie). L'effet de la métallicité sur les calibrations de distance est tout de même moins important que celui de l'extinction.
- La constante de pulsation Q peut dépendre de la période. La courbure éventuelle de la relation PLC avec les grandes périodes pourraient résulter

¹En fait, Leavitt fut la première (en 1912) à mettre en évidence l'existence d'une relation période-luminosité de la forme $M = a \log P + b$, où a et b sont des constantes. Cette relation est simplement la projection de la relation PLV de Sandage (1958) dans le plan période-luminosité.

d'une variation de Q . Ce problème affecterait directement les distances extra-galactiques puisque ce sont surtout les Céphéides brillantes qui sont utilisées dans les galaxies extérieures.

- Les tracés évolutifs des Céphéides franchissent plusieurs fois la bande d'instabilité dans le diagramme HR. La relation PLC n'est peut être pas unique.
- Le point zéro est calculé à partir des δC d'amas tels que $\overline{[Fe/H]} = -0.02 \pm 0.07$, soit une métallicité solaire moindre que celle des Hyades. Une correction de *blanketing* (blocage de l'énergie par les raies métalliques et redistribution en d'autres points du spectre) doit être appliquée.

TAB. 2.2 – Détermination de H_0

I. Céphéides		
a) dans M101	Kelson (1995) confirme Sandage & Tammann (1974), il en découle	55 ± 9
b) dans le Groupe Leo	Tanvir et al. (1995) Sakai et al. (2000)	69 ± 8 57 ± 6
c) dans l'amas Virgo		
NGC 4321	Freedman et al. (1994)	80 ± 17
NGC 4639	Sandage et al. (1996)	47 ± 10
II. distance de l'amas Virgo, obtenue avec la relation de Tull-Fischer calibrée avec 11 distances de Céphéides (dont 7 avec le HST)		
	Federspiel et al. (1996)	52 ± 6
III. SNe Ia calibrées avec les Céphéides		
SN 1937C	Saha et al. (1994)	52 ± 9
SN 1972E	Hamuy et al. (1995)	65 ± 10
SN 1972E	Riess et al. (1995)	67 ± 7
SN 1895B	Schaefer (1995)	51 ± 7
6 SNe Ia	Branch et al. (1996)	57 ± 7
7 SNe Ia	Sandage et al. (1996)	58 ± 4
IV. Amas Globulaires		
dans M87	Whitmore et al. (1995)	78 ± 11
	Sandage & Tammann (1996)	62 ± 9
dans Coma	Baum et al. (1995)	< 65

Table d'après Sakai *et al.*(2000) [52].

2.2.2 Étalons secondaires

Pour déterminer les distances d'objets situés à l'extérieur du groupe local, il faut utiliser des indicateurs de distance nettement plus brillants que les Céphéides. On fait alors appel à des types d'étoile ou de galaxie particuliers.

Bien que la calibration de ces indicateurs soit tributaire des étalons primaires, ils sont néanmoins fort utile pour estimer les distances relatives entre galaxies lointaines . On peut distinguer cinq indicateurs de distance secondaires principalement (cf. Hendry 1997 [25]) :

- les supergéantes rouges et bleues.

- les supernovae SNe Ia et SNe II.
- la relation de Tully-Fisher pour les galaxies spirales.
- la relation $D_n - \sigma$ (ou relation de Faber-Jackson) pour les galaxies elliptiques.
- l'analyse des fluctuations de luminosité de surface pour les galaxies elliptiques.

Ces étalons permettent de calibrer les distances d'objets extra-galactiques avec une précision de 15 % ou mieux. Dans la suite de cette section, nous n'allons développer que les trois premières (voir aussi réfs. [48, 42]).

Supergéantes rouges et bleues L'idée est que les étoiles les plus brillantes ont environ la même luminosité dans toutes les galaxies.

R. Humphrey et K. Davidson ont comparé les diagrammes HR construits à partir des supergéantes provenant du LMC et de la Voie Lactée. Leur analyse a montré que l'enveloppe supérieure étant à peu près la même, les supergéantes les plus brillantes pourraient être utilisées comme indicateur de distance.

Certes, la magnitude des étoiles bleues les plus brillantes dans une galaxie donnée dépend légèrement de la magnitude absolue de la galaxie. Néanmoins, ceci ne semble pas être le cas pour les supergéantes rouges.

Les populations de supergéantes brillantes les mieux étudiées sont celles des Nuages de Magellan (Dans notre galaxie, l'extinction par les poussières limite leur inventaire à une sphère de 2-3 *kpc* de rayon).

Les relations liant la magnitude moyenne des trois supergéantes bleues les plus brillantes à la magnitude de la galaxie deviennent sujettes à caution dès qu'elles sont utilisées en dehors de leur domaine de calibration.

En outre, une grande difficulté subsiste dans l'identification des étoiles les plus brillantes d'une galaxie (contamination par les étoiles faibles de notre galaxie).

Les supergéantes doivent donc être utilisées avec la plus extrême précaution dans la calibration des distances.

Supernovae L'observation d'explosions de supernovae (ou SNe) dans les galaxies voisines de la nôtre semble indiquer que la périodicité de ces événements, dans les spirales comme la Voie Lactée, est de l'ordre de 70 ± 30 ans.

Lors de leur explosion, les supernovae émettent environ 10^{51} ergs d'énergie sous forme de rayonnement électromagnétique et de neutrinos (à comparer avec l'énergie de liaison des naines blanches, $\Delta_{WD} = 10^{51}$ ergs, et des étoiles à neutrons, $\Delta_{NS} = 10^{53}$ ergs). La luminosité maximale est de l'ordre de $10^9 L_\odot$.

Les supernovae sont classifiées en deux groupes, caractérisés par la présence (Type II) ou l'absence (Type I) d'hydrogène dans le spectre. De surcroît, ces deux classes présentent des courbes de luminosité distinctes : dans le cas des SNe de type I, la courbe de lumière décroît exponentiellement vers un seuil bien défini, ce qui confirme l'existence d'une autre source d'énergie (probablement la désintégration $^{56}\text{Ni} \rightarrow ^{56}\text{Co} \rightarrow ^{56}\text{Fe}$). Dans le cas des SNe de type II, au contraire,

la courbe de luminosité présente un maximum très prononcé, suivi d'un plateau de temps caractéristique $\Delta t \simeq 10^7$ secondes.

- **Type I SNe.** Elles apparaissent dans les galaxies spirales et elliptiques, et sont associées à des étoiles de masse relativement faible. Le spectre optique des SNe I nous amène à distinguer trois sous-classes : les SNe Ia, Ib et Ic. Cependant, seules les SNe Ia présentent les caractéristiques nécessaires pour être utilisée dans la détermination des paramètres cosmologiques : elles sont excessivement lumineuses d'une part ($M_{V,max} \simeq -19.7$) ; leur luminosité et leur couleur, en première approximation, sont assez uniformes d'autre part.

La majorité des astrophysiciens s'accorde sur le fait que les SNe Ia résultent de l'explosion thermonucléaire de naines blanches à l'intérieur de système binaires. Ces naines blanches accrètent la matière provenant du compagnon. Lorsque leur masse M_{WD} dépasse la masse de Chandrasekhar, $M_{ch} \simeq 1.4M_{\odot}$, les réactions thermonucléaires s'emballent et le coeur dégénéré détone.

L'accumulation de données observationnelles a permis de construire une loi empirique reliant la luminosité intrinsèque M_B (i.e. dans la bande bleue) de la SNe Ia avec le taux de décroissance de la courbe de lumière :

$$M_B = -19.25 + 0.78 [\Delta m_{15}(B) - 1.1] + 5 \log(H_0/65), \quad (2.13)$$

où $\Delta m_{15}(B)$ est le changement de magnitude dans la bande B 15 jours après le maximum (cf. Ruiz-Lapuente 1997 [49]). Cette relation possède une dispersion assez faible, $\sigma_B \sim 0.2$ mag., mais nécessite la calibration de la magnitude absolue, calibration généralement effectuée avec les Céphéides des galaxies proches. Les SNe Ia ne sont donc pas des indicateurs de distances primaires.

La constante de Hubble H_0 peut être déterminée par l'étude de SNe Ia telles que $z \leq 0.3$ puisque, pour des redshifts plus élevés, la contribution du paramètre de décélération q_0 ne peut plus être négligée. De plus, lorsque les mouvements particuliers sont négligeables par rapport au flot de Hubble (i.e. pour $z \geq 0.05$ environ), les données simultanées du redshift z et la magnitude apparente m_B du pic de luminosité permettent d'obtenir H_0 directement de la relation (2.10).

L'estimation de q_0 est faite à partir des mesures effectuées sur les SNe Ia à $0.3 \leq z \leq 1$ (cf. section 2.3).

- **type II SNe.** Les SNe II apparaissent exclusivement dans les bras des galaxies spirales, dans les zones de formation stellaire plus précisément. Dans l'ensemble, leur propriétés (masse, température de surface, luminosité) sont beaucoup plus hétérogènes que celles des SNe Ia.

Le modèle physique actuel fait intervenir une étoile massive en fin de vie, au stade de supergéante bleue ou rouge : le coeur de Fe s'effondre et rebondit, éjectant les couches supérieures de l'enveloppe dans le milieu interstellaire avoisinant.

En supposant que l'enveloppe, de vitesse d'expansion uniforme v , provient d'une étoile dont le rayon initial est négligeable, le temps d'observation t_0 , l'époque de la détonation t_1 , le diamètre angulaire ϑ et la vitesse v de la photosphère sont reliés par

$$t_0 = D \frac{\vartheta}{v} + t_1, \quad (2.14)$$

où D est la distance métrique séparant l'observateur O de la SNe II. On peut estimer D à partir de la pente de la droite $t_0(\vartheta/v)$ par la méthode de Baade-Wesselink (cf. [35]).

Les SNe II sont plus hétérogènes que les SNe Ia² mais présentent, en contrepartie, l'avantage de ne pas nécessiter de calibration préalable. En effet, la distance séparant l'observateur O de la SNe II dépend entièrement du modèle décrivant la photosphère en expansion. Pour cette raison, les SNe II pourraient être considérées comme des étalons primaires : appliquées aux galaxies lointaines, elles offrent la possibilité de déterminer H_0 à partir de mesures de distance et de vitesse prises sur une même galaxie.

Dans les deux cas, les supernovae sont observables jusqu'à des redshifts $z \sim 0.5$, pour autant que l'on soit capable d'estimer l'absorption interstellaire (surtout pour les SNe II) et que l'on puisse convertir l'indice de couleur ($B - V$) en température effective (compréhension des atmosphères des SNe : raies fortes ...).

La relation de Tully-Fisher En 1977, Tully et Fisher ont découvert, pour les galaxies spirales, une relation empirique entre la largeur de la raie HI (21 cm) et leur magnitude absolue.

La largeur de la raie HI peut être convertie en dispersion des vitesses W_0 , ce qui conduit à une expression de la forme

$$M = -a \log \left(\frac{W_0}{\sin i} \right) - b, \quad (2.15)$$

avec $a = 6.39$, $b = 3.80$ et une erreur $\sigma = 0.44$. i est l'angle d'inclinaison de la galaxie, i.e. l'angle entre la normale au disque et la ligne de visée. Pour $i = 90$ (galaxie vue par la tranche), W_0 est une moyenne de la vitesse de rotation de la galaxie effectuée le long de la ligne de vue, en différents points du rayon. On peut montrer que

$$W_0 = 2v_{max},$$

où v_{max} est le maximum de la courbe de rotation.

Afin de s'affranchir de l'effet de l'extinction, Aaronson et al. [1] ont cherché une relation similaire dans le domaine des micro-ondes où les corrections d'absorption sont négligeables, prenant $\lambda = 1.6 \mu\text{m}$ et utilisant les galaxies de l'amas autour de M81, Ils ont trouvé

$$M_\lambda(1.6 \mu\text{m}) = -10.0 \log \left(\frac{W_0}{\sin i} \right) + 3.77 \pm 0.18.$$

Quelques arguments simples peuvent être avancés pour expliquer le coefficient $a = -10.0$.

Posons $\Delta V = W_0 / \sin i$. ΔV est une mesure de la vitesse moyenne. D'après le théorème du Viriel, la masse M d'une galaxie de rayon r est donnée par

$$M = \frac{r \Delta V^2}{G}.$$

²Par exemple, les observations de trois SNe II appartenant à la galaxie NGC6946, SN1939c, SN 1948b et SN 1980k, conduisent à une dispersion $\Delta M(t_1) = 1.6$.

TAB. 2.3 – Estimations de H_0 à partir de la relation de Tully-Fisher.

H_0	Méthode (a)	Echantillon	Source
50 ± 4	BTF	Virgo	Sandage & Tammann 1976
80 ± 8	BTF	Virgo	Tully & Fisher, 1977
76 ± 8	BTF	Virgo	Bottinelli et al. 1977
61 ± 4	IRTF	Virgo et Ursa Major	Aaronson et al. 1979
65 ± 4	IRTF	Virgo	Mould et al. 1980
95 ± 4	IRTF	4 amas <6000 km/s	Aaronson et al. 1980
63 ± 10	rel. (H-I) vs $\log W$	Virgo	Tully et al. 1982
71 ± 2	VTF,RTF,IVTF	Amas <6000 km/s	Visvanathan, 1982
82 ± 10	BTF,IRTF	Groupes <6000 km/s	Aaronson & Mould, 1983
74 ± 11	VTF,RTF,IVTF	Amas <6000 km/s	Visvanathan, 1983
55 ± 9	IRTF	Coma et Virgo	Sandage & Tammann, 1984
91 ± 3	IRTF	20 Sc I's <13,500 km/s	Bothun et al. 1984
92 ± 1	IRTF	Amas <11,000 km/s	Aaronson et al. 1986
85 ± 10	B,R,IRTF	Virgo et Ursa Major	Pierce & Tully 1988
57 ± 1	BTF, IRTF	Virgo	Kraan-Korteweg et al. 1988
68 ± 8	BTF	Virgo	Fouque et al. 1990
92^{+21}_{-17}	BTF	Coma	Fukugita et al. 1991
73 ± 4	IRTF	Amas <11,000 km/s	Mould et al. 1996
69 ± 8	IRTF	Virgo et Ursa Major	Shanks 1997
82 ± 10	BTF	Virgo	Yasuda et al. 1997
69 ± 5	ITF	Amas <~10,000 km/s	Giovanelli et al. 1997a
53 ± 5	BTF mag.	KLUN (b)	Theureau et al. 1997
57 ± 5	BTF diamètres	KLUN (b)	Theureau et al. 1997
57 ± 7	BTF	Amas <11,000 km/s	Federspeil et al. 1998
56 ± 3	BTF	KLUN (calibr. HST)	Theureau 1998
51 ± 4	BTF	KLUN (calibr. HIPPARCOS)	Theureau 1998
53 ± 3	BTF	champ de gal. <5000 km/s	Tammann 1999
56 ± 3	BTF	Amas <11,000 km/s	Tammann 1999
77 ± 4	ITF	Amas <8,000 km/s	Tully 1999
76 ± 3	ITF	Amas <8000 km/s	Madore et al. 1999
52 ± 5	BTF diam. inv.	KLUN	Ekhholm et al. 1999
53 ± 6	BTF mag. inv.	KLUN	Ekhholm et al. 1999

A cet égard, la magnitude absolue $M_\lambda(1.6 \mu\text{m})$ est bien corrélée à la masse : ce sont surtout les vieilles étoiles (émetteurs micro-onde) qui sont représentatives de la distribution de matière. Si l'on adopte un rapport masse-brillance de surface (M/L_s) universel pour les galaxies spirales, il est approximativement constant, $L_s \propto M$ et $L_s \propto r^2$ puisque la brillance de surface est la même. Ainsi,

$$L_s \propto (\Delta V)^4,$$

et la définition (2.8) implique

$$M_{bol} = -10 \log \Delta V + const.$$

La dépendance de l'extinction en fonction de l'angle d'inclinaison i peut introduire, dans le cas où une incertitude subsiste sur la valeur de ce dernier, des erreurs systématiques dans les mesures de vitesse et de magnitude apparente.

Si le calcul du point zéro b et de H_0 a fortement progressé grâce au HST, la question de la meilleure procédure à adopter pour dériver la relation de Tully-Fisher à partir des données reste ouverte. Néanmoins, cette relation reste l'un des indicateurs secondaires les plus puissants pour la calibration des distances extra-galactiques.

En résumé, les différentes méthodes de calibration conduisent à une valeur de H_0 comprise dans le domaine $50\text{-}70 \text{ km s}^{-1}$, i.e. $0.5 \leq h \leq 0.7$. Certains articles adoptent un intervalle encore plus large, $0.4 \leq h \leq 0.9$.

2.3 Le paramètre q_0 et le diagramme de Hubble-Sandage

La relation (2.10) permet de déterminer q_0 lorsque les redshifts sont suffisamment importants ($z \geq 0.1$). Dans ce cas, seules les galaxies les plus brillantes des amas, ou éventuellement les supernovae, peuvent être utilisées comme indicateur de distance.

Ayant à disposition le redshift et les magnitudes apparentes (corrigées de l'extinction . . . , voir ci-dessous), il suffit de construire un graphique magnitude apparente versus redshift, connu sous le nom de *diagramme de Hubble-Sandage*, pour déterminer H_0 et q_0 .

Dans le cas des supernovae, le paramètre de déccélération peut être calculé avec une bonne précision statistique pour des SNe dont le redshift est suffisamment élevé, $0.3 \leq z \leq 1$. Les analyses ont montré, d'une part, que le modèle d'Einstein-de Sitter d'un univers rempli de matière non-relativiste avec courbure $k = 0$ (c'est-à-dire $\Omega_{mat} = 1$) (cf. chapitre 3) est en désaccord avec les données et, d'autre part, que les SNe à haut redshift requièrent un paramètre de déccélération $q_0 < 0$, ce qui impliquerait une constante cosmologique non nulle. Il est difficile de confirmer ces résultats pour l'instant mais le foisonnement d'avancées technologiques devraient conduire, dans quelques années, à l'observation de SNe à $z \geq 1$, observations susceptibles de fournir un verdict définitif quant à l'existence de la constante cosmologique. Pour l'instant, nous pouvons adopter l'intervalle $0 \leq q_0 \leq 0.5$.

Dans la pratique, l'analyse des observations à haut redshift requiert beaucoup de précautions pour les raisons suivantes :

- **Correction d'ouverture** Comme la luminosité d'une galaxie décroît continûment lorsque l'on s'éloigne du centre, il est difficile de déterminer précisément le bord d'une galaxie. Pour palier à ce problème, le diamètre d'un certain type de télescope peut faire office de référence.

- **Terme K** En raison du décalage vers le rouge, la distribution de la luminosité apparente des galaxies lointaines en fonction de la fréquence est modifiée (cf. section 1.6.3). Par exemple, les bandes B ou V des spectres de ces objets lointains reflètent la luminosité intrinsèque L_ν à fréquence plus élevée que ce que l'on aurait obtenu pour des objets proches. Connaissant la distribution L_ν , on peut éventuellement corriger cet effet via le terme $K(z)$ (tabulé par Oke et Sandage). Dans ce cas, le module de distance apparaissant dans l'équation (2.10) doit être remplacé par l'expression $m_B - M_B - K_B(z)$ lorsque l'on travaille avec la bande bleue.

- **Absorption galactique** Le milieu interstellaire de notre galaxie contribue de manière non-négligeable au rougissement de la radiation. En modélisant la Voie Lactée par un disque d'épaisseur h infiniment plat, la distance parcourue à l'intérieur de notre galaxie par un rayon lumineux, dont la direction de propagation fait un angle b par rapport au plan du disque, est proportionnelle à $\cos b^{-1}$. Comme l'extinction dépend exponentiellement de la distance, la luminosité est réduite d'un facteur $\exp(-\lambda \cos b^{-1})$, où λ est une constante déterminée par les

mesures. Ainsi, le module de distance $(m_B - M_B)$ corrigé est

$$(m_B - M_B)_{\text{corrigé}} = m_B - M_B - K_B(z) - A_B(b) \quad (2.16)$$

Ici, nous n'avons pas tenu compte de l'extinction extra-galactique, négligeable devant celle de la Voie Lactée.

- **Effets statistiques** Il existe une limite inférieure $M_{lim}(z)$ en deçà de laquelle le signal émis par une galaxie de $M \leq M_{lim}$ est de l'ordre du bruit résiduel. Ainsi, seules les galaxies pour lesquelles $M \geq M_{lim}$ peuvent être incluses dans l'échantillonnage, et la statistique est artificiellement biaisée vers les magnitudes élevées (biais de Malmquist). En moyenne, la magnitude absolue des galaxies lointaines est plus faible (elles sont donc plus lumineuses) que celle des galaxies proches.

- **Evolution interne** Supposons que les étoiles constituant une galaxie donnée sont toutes contemporaines. En raison de leur évolution dans le diagramme HR, la population de la galaxie change avec le temps. Ainsi, plus on observe loin, plus les galaxies sont jeunes, donc brillantes et riches en étoiles O-OB.

Il faut donc corriger ces effets d'évolution. A cet égard, on remplace q_0 par un paramètre de décélération effectif $q_0^{eff} = q_0 + \alpha$ qui prend en considération l'évolution galactique. Les incertitudes relatives à la détermination du taux de formation stellaire (SFR) compliquent le travail.

Toutefois, cette correction ne s'applique pas aux SNe : les lois de l'évolution stellaire sont en effet (c'est un *a priori*) les mêmes quelque soit la distance.

- **Evolution dynamique** Les observations actuelles semblent indiquer qu'un certain nombre de galaxies très brillantes se sont formées en avalant littéralement leurs voisines (cannibalisme galactique). Comme ce phénomène s'amplifie avec le temps, les galaxies lointaines sont en moyenne moins brillantes que les galaxies à faibles redshifts (correction de Batz-Morgan).

2.4 Le test des diamètres apparents et les comptages

Dans cette section nous supposons que l'univers actuel est dominé par de la matière non-relativiste, même si ceci n'est pas en bon accord avec les nouvelles données des supernovae Ia. Ceci pour faire contact avec la littérature. Dans ce cas où $0 < q_0 = \Omega_{mat}/2$, nous pouvons utiliser la simple formule de Mattig. Si, par exemple, une constante cosmologique est importante, on ne trouve pas de formule simple et les calculs présentés ci-dessous ne sont faisables que par intégration numérique.

2.4.1 Diamètres apparents

Jusqu'à maintenant, nous n'avons fait intervenir que la luminosité des objets observés. L'observation de distances propres en fonction du redshift, comme le

diamètre d'un certain type de galaxies, est sensible à la courbure de l'espace, donc à q_0 .

Pour mettre cet effet en évidence, considérons un observateur Terrestre O et une galaxie G de diamètre (propre) Δ , dont les extrémités ont les coordonnées $(r_1, 0, 0)$ et $(r_1, \vartheta, 0)$. Lorsque les photons quittent la galaxie à $t = t_1$, pour rejoindre la Terre, le diamètre propre de cette galaxie est donné par $\Delta = a_1 r_1 \vartheta$, soit

$$\vartheta = \frac{\Delta}{a_1 r_1} = \frac{\Delta(1+z)}{a_0 r_1}. \quad (2.17)$$

C'est le diamètre apparent observé par O depuis la Terre.

Comme nous l'avons déjà signalé section 2.1, la relation de Mattig

$$a_0 r_1 = \frac{1}{H_0 q_0^2 (1+z)} \left[q_0 z + (q_0 - 1)(\sqrt{1 + 2q_0 z} - 1) \right].$$

est l'expression exacte de la distance métrique $a_0 r_1$, valable quelque soit le redshift z . Insérant cette expression dans l'équation (2.17), il vient

$$\vartheta = \frac{\Delta(1+z)^2 H_0 q_0^2}{[q_0 z + (q_0 - 1)(\sqrt{1 + 2q_0 z} - 1)]} = \vartheta(z, H_0, q_0). \quad (2.18)$$

Si l'on considère la limite $z \ll 1$, l'expression du diamètre angulaire apparent ci-dessus peut être approchée par $\vartheta \sim \Delta(2+1/z)H_0$. Dans le cas contraire, pour $z \gg 1$, ϑ dépend linéairement du redshift $\vartheta = \Delta H_0 q_0 z$: les photons émis par les galaxies à grands z sont partis lorsque l'univers était plus petit, les galaxies sous-tendant un angle plus grand. La fonction $\vartheta(z, H_0, q_0)$ présente donc un minimum $z_m(q_0)$ qui ne dépend que du paramètre de décélération q_0 , i.e. de la géométrie de l'univers. La dérivation de l'expression (2.18) est difficile et il est préférable de calculer $z_m(q_0)$ numériquement. Pour la valeur $q_0 = 0.5$ en particulier (cas de la géométrie euclidienne), le calcul de $z_m(q_0)$ peut se faire aisément et conduit à $z_m(1/2) = 1.25$.

En observant l'évolution de ϑ pour un échantillon de galaxies données, on peut estimer la position du minimum et contraindre la valeur de q_0 . Les diverses études effectuées conduisent à $-1 \leq q_0 \leq 0.5$. Pour un univers dominé par de la matière non-relativiste où, comme nous le verrons, $q_0 = \Omega/2$, la géométrie sphérique $\Omega > 1$ est exclue.

2.4.2 Comptages

L'évolution du nombre de galaxies ou de radio-sources (comme les quasars, section 2.6) en fonction du redshift z ou de la magnitude apparente m est aussi un test possible de la géométrie.

L'avantage de cette méthode sur le diagramme de Hubble-Sandage est qu'elle ne fait pas appel à la distance de luminosité, qui introduit une dispersion à cause de l'incertitude existant sur la magnitude absolue M . De plus, les observations du HST ont permis de mettre en évidence des milliers de galaxies et quasars, jusqu'à des redshifts $z \sim 6$ (HDF 4-473 avec $z = 5.60$ par exemple), constituant un échantillon suffisamment représentatif pour minimiser les erreurs statistiques.

La difficulté principale, en dehors des corrections d'évolution, réside dans le fait que la sensibilité des télescopes est limitée, introduisant un biais qui

rehausse artificiellement la magnitude apparente moyenne (biais de Malmquist, cf. section 2.3).

Dans le cas de l'espace euclidien (newtonien), pour des objets d'éclats identiques et répartis uniformément dans l'espace (densité constante), le nombre d'objets N_{cl} dont la distance est inférieure à d croît comme d^3 . Parallèlement, leur éclat apparent S décroît comme d^{-2} si bien que, si l'on trace le graphique $(-\log S, \log N_{cl})$, on obtient une droite de pente $3/2$.

En toute généralité, on suppose qu'au temps t_1 , $n(L, t_1)dL$ est la densité de sources par unité de volume dont la luminosité absolue est comprise entre L et $L + dL$. Ceci permet de définir des quantités observables telles que $\mathcal{N}(< z, > L)$, le nombre de sources dont le redshift est inférieur à z et dont la luminosité apparente est supérieure à L . En développant ces observables en série par rapport à z (comme ce que nous avons fait section 2.1), on peut en déduire la valeur de q_0

Les développements mathématiques sont un peu fastidieux (voir [42]). Nous allons simplement montrer ici que l'hypothèse d'un univers en expansion, d'âge fini, conduit à un résultat différent du cas newtonien.

Reprenons la métrique (1.21). Le volume $V(t)$, défini par l'ensemble $0 \leq r \leq r_1$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, c'est-à-dire la sphère de rayon r_1 centrée sur l'observateur Terrestre O , est simplement

$$\begin{aligned} V(t) &= a(t)^3 \int_0^{r_1} \frac{r^2 dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= 4\pi a(t)^3 \int_0^{r_1} \frac{r^2 dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \end{aligned}$$

En choisissant la géométrie euclidienne, nous pouvons poser $k = 0$.

$$\begin{aligned} V(t_0) &= \frac{4\pi}{3} a_0^3 r_1^3 \\ a_0 r_1 &= \frac{2}{H_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right). \end{aligned}$$

Appelant N le nombre de galaxies présentes jusqu'au redshift z (sans distinction de luminosité),

$$N(z) = \frac{4\pi}{3} n \left(\frac{2}{H_0} \right)^3 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right)^3. \quad (2.19)$$

Dans le cas euclidien non-relativiste, le nombre de galaxies N_{cl} présentes jusqu'au décalage spectral z est proportionnel au volume de la sphère de rayon $d = v/H_0 = cz/H_0$ (uniquement vrai pour les toutes petites vitesses). Omettant la constante c , il vient

$$N_{cl}(z) = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{z}{H_0} \right)^3. \quad (2.20)$$

Ainsi, la métrique FRW conduit à un résultat différent du cas classique dans la limite $z \rightarrow 0$, à cause de la vitesse finie de la lumière et dans la limite $z \rightarrow \infty$.

Dans le cas non-relativiste, le nombre de source N_{cl} diverge, alors que dans le cas FRW, N tend vers un nombre fini.

Le modèle euclidien non-relativiste reste donc le seul compatible avec l'hypothèse d'un nombre de sources infini, autrement dit avec un univers d'âge infini. Le ciel serait alors infiniment brillant. En effet, soit l la luminosité apparente d'une galaxie, séparée de notre observateur Terrestre O par une distance d . Le flux f reçu par O est

$$f = \frac{L}{4\pi r^2}.$$

En supposant que la densité d'étoiles est toujours constante et égale à n , le flux f_c provenant d'une coquille située à la distance r , d'épaisseur dr , s'écrit

$$f_c = \frac{L}{4\pi r^2} n 4\pi r^2 dr.$$

Ainsi, le flux total reçu par O est

$$F_{tot} = \int_0^\infty f_c(r) dr = \int_0^\infty nL dr.$$

Avec n et L constants,

$$F_{tot} = nL \int_0^\infty dr \rightarrow \infty.$$

Par conséquent, le ciel de nuit devrait être brillant comme le jour.

Le constat contraire, connu sous le nom de *paradoxe d'Olbers*, est expliqué par l'existence d'un horizon fini ou d'un âge fini de l'univers $t_0 \sim 15 \times 10^9$ yr, qui impose une limite à l'intégration ci-dessus. Dans ce cas, nous avons $F_{tot} = nL \int_{t_0}^\infty dr < \infty$ et les sources ne saturent pas.

Dans le cas où $z = 1$, et supposant que la densité n est $n = 1 \text{Mpc}^{-3}$ (estimation raisonnable), N_{cl} et N sont donnés par

$$N_{cl}(z) = 4.189 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1910^{13} \text{Mpc}}{3.26} \right)^3 = 8.29 \times 10^{11} \text{galaxies}$$

$$N(z) = 4.189 \cdot 1 \cdot \left(\frac{2 \cdot 1910^{13} \text{Mpc}}{3.26} \right)^3 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3 = 1.67 \times 10^{11} \text{galaxies}.$$

Lorsque z tend vers l'infini, $N(z)$ tend vers la limite $N_{lim} = 6.6 \times 10^{12}$ galaxies.

L'étude de la répartition des galaxies dans l'univers (sous forme d'un diagramme bi-dimensionnel déclinaison-redshift par exemple) met en évidence la répétition de grands vides sur des échelles de l'ordre de $50h^{-1} \text{Mpc}$, fortement délimités par des "murs" de galaxies (cf. *Las Campanas Redshift Survey* [53]). Cette *hiérarchisation* de l'univers est en partie reproduite par de récentes simulations numériques.

2.5 Détermination de l'âge de l'univers

Une des conséquences les plus importantes de la cosmologie FRW est que l'univers n'est pas éternel, mais qu'il existe un intervalle de temps fini entre notre

bon vieux vingtième siècle et les densités et températures les plus extrêmes de l'univers primordial.

Cette intervalle de temps est largement déterminé par la vitesse de l'expansion. A cet égard, la constante de Hubble permet de définir un temps caractéristique pour l'expansion, le *temps de Hubble*

$$H_0^{-1} = 9.78h^{-1} \text{ Gyr.} \quad (2.21)$$

Ce temps de Hubble est d'ailleurs égal à l'âge du modèle d'univers dont l'accélération est nulle, i.e. $q_0 = 0$.

Pour déterminer l'âge de l'univers t_0 , les âges d'un certain nombre d'objets astronomiques peuvent être estimés, mais les méthodes sont imprécises et conduisent à une dispersion relativement importante.

Nous allons présenter ici deux méthodes. La première repose sur la théorie de l'évolution stellaire à l'âge des étoiles, la seconde faisant appel aux horloges naturelles que sont les désintégrations radioactives.

2.5.1 Age des étoiles

Le temps de vie t d'une étoile est donné schématiquement par le rapport entre le combustible nucléaire disponible et la puissance rayonnée L (cf. cours des bases physiques de l'astrophysique [34]),

$$t \simeq q \cdot \frac{0.007Mc^2}{L},$$

où M est la masse de l'étoile et q est la fraction de masse où se produisent les réactions nucléaires.

Pour le soleil, $t \simeq 10^{10} \text{ yr}$. En toute généralité, $L \propto M^3$, et $t \propto M^{-2}$. Ainsi, les étoiles de grande masse ont des durées de vie courtes (quelques millions d'années) alors que les étoiles de faible masse vivent beaucoup plus longtemps.

Les étoiles naissent la plupart du temps en groupe. On distingue les amas stellaires, composés d'une dizaine à un millier d'étoiles, et les amas globulaires, qui peuvent atteindre parfois plus d'un million d'étoiles.

Ces derniers sont uniformément distribués dans le halo de notre galaxie. Ils font partie des objets les plus vieux que l'on connaît, puisque leur formation remonte à l'époque de la genèse des galaxies. De plus, leur population est relativement homogène chimiquement, signe que les étoiles se sont formées en même temps. Estimer leur âge permet de donner une borne inférieure à l'âge de l'univers.

Considérons le diagramme HR (diagramme de Hertsprung-Russell, cf. figure ...) d'un de ces amas globulaires. La plupart des étapes de la vie d'une étoile apparaissent sur le graphique, pour autant que l'on sache les décoder.

- La séquence principale est composée des étoiles en train de brûler leur H. Sur le diagramme HR, elle apparaît comme une longue traînée qui s'étend des étoiles de faible luminosité et petite masse (de couleur plutôt rouge) jusqu'aux

étoiles massives, très lumineuses (de couleur plutôt bleue). Lors de la formation de l'amas globulaire, ces étoiles étaient regroupées sur une diagonale, appelée *séquence d'âge zéro* (ou ZAMS pour *zero age main sequence*). Ensuite pendant la combustion de l'hydrogène, leur point représentatif dans le diagramme HR se déplace vers les températures effectives T_{eff} plus faibles et les luminosités L plus élevées. Comme le temps de vie des étoiles massives est plus court, la séquence principale se dépeuple par le haut.

- Une fois que l'hydrogène central est consommé, l'effondrement du coeur se poursuit et les couches extérieures de l'enveloppe s'étendent, abaissant considérablement la température de surface T_{eff} . L'étoile se retrouve rapidement dans la branche des géantes rouges (RGB). Ce phénomène se traduit par l'existence d'un point de bifurcation dans le diagramme, le *turnoff point*.

- Lorsque la température à l'intérieur du coeur (partiellement dégénéré) est suffisamment élevée, la combustion du He en C/O débute. C'est le flash d'hélium, qui met un terme à la branche des géantes rouges. La combustion en pelure d'oignon se poursuit et, après un court passage dans la branche asymptotique des géantes (*asymptotic giant branch* ou AGB), l'étoile termine son existence sous la forme d'une naine blanche la plupart du temps.

Le point de bifurcation permet d'estimer grossièrement l'âge de l'amas globulaire : connaissant la masse de l'étoile située à la bifurcation, on peut calculer l'âge de l'amas, sachant que $t \propto m^{-2}$.

En pratique, on préfère approximer la séquence principale par une *isochrone*, un ensemble de modèles stellaires considérés à un même temps t . Les observations montrent que l'âge des plus vieux amas globulaires est 14 ± 2 Gyr, résultat compatible avec un univers ouvert ($q_0 < 1/2$) si l'on prend $h = 0.55$.

2.5.2 Nucléocosmochronologie

Les rapports d'abondances d'isotopes radioactifs, ou nucléocosmochronologie, constituent l'une des meilleures horloges naturelles. Les temps de vie de la plupart des désintégrations sont connus avec une grande précision, et permettent d'estimer l'âge de notre système solaire. Cet âge peut ensuite être comparé avec l'âge de la galaxie (amas globulaires).

On utilise dans le cas le plus simple les éléments mère-fille des séries de désintégration α de l'Uranium et du Thorium,

$$\begin{aligned} {}^{238}\text{U} - {}^{206}\text{Pb} & \quad t_{1/2} = 6.45 \text{ Gyr} \\ {}^{235}\text{U} - {}^{207}\text{Pb} & \quad t_{1/2} = 1.015 \text{ Gyr} \\ {}^{232}\text{Th} - {}^{208}\text{Pb} & \quad t_{1/2} = 2 \text{ Gyr}, \end{aligned}$$

dont les demi-vies sont suffisamment longues pour être intéressantes.

Supposons que la Terre et toutes les météorites du système solaire se soient formées en même temps, à partir d'un gaz isolé chimiquement du reste de la galaxie, de composition uniforme (les différents rapports isotopiques ainsi que la densité du Pb ne varient pas avec la position) et dans lequel la production

d'éléments lourds ne se fait que par désintégration radioactive (modèle de Patterson, 1956).

Le fractionnement chimique modifie ensuite, de météorite en météorite, les abondances de Pb , ^{235}U , ^{238}U et ^{232}Th et les désintégrations radioactives font évoluer les différents rapports isotopiques.

Pour schématiser,

$$\begin{array}{ccc} \text{élément } k & \rightarrow & \text{élément } i \\ \text{Nb. d'atomes } N_k & & \text{Nb. d'atomes } N_i \end{array}$$

L'élément k se désintègre selon la loi

$$N_k(t) = N_k(0)e^{-\lambda t}.$$

La somme des noyaux mère-fille est conservée, i.e.

$$N_k(t) + N_i(t) = N_k(0) + N_i(0),$$

où t figure l'époque actuelle et 0 l'instant où, pour la dernière fois, les concentrations à l'intérieur de la météorite ont été modifiées par un processus autre que la désintégration nucléaire. Il ne coïncide pas forcément avec l'époque de la synthèse. Regroupant les deux relations ci-dessus, il vient

$$\begin{aligned} N_i(t) &= N_i(0) + N_k(0)(1 - e^{-\lambda t}) \\ &= N_i(0) + N_k(t)(e^{\lambda t} - 1). \end{aligned}$$

L'isotope ^{204}Pb n'a pas de parent dont le temps de vie est long. Dans ce modèle, son abondance actuelle est égale à son abondance lors de la formation du système solaire. En se rapportant à un isotope stable j comme ^{204}Pb , le rapport isotopique actuel à l'intérieur d'une météorite satisfait

$$R(\lambda) = \frac{N_i(t)}{N_j} = \left(\frac{N_i}{N_j} \right)_0 + \frac{N_k(t)}{N_j}(e^{\lambda t} - 1).$$

Dans le plan $N_i(t)/N_j$ vs. $N_k(t)/N_j$, la relation ci-dessus est une droite de pente $(e^{\lambda t} - 1)$. Connaissant λ (caractéristique du processus de désintégration), on peut déterminer t .

Pour déterminer l'âge avec la pente, il faut au moins deux couples N_i/N_j et N_k/N_j qui aient la même histoire : ils proviennent de la désintégration du même matériel mais leurs concentrations sont différentes. En général, on prélève diverses parties d'une même météorite.

À titre d'exemple, considérant les désintégrations des noyaux mère ^{235}U et ^{238}U , nous avons

$$\begin{aligned} R(235) &= \frac{^{207}Pb(t)}{^{204}Pb} = \frac{^{207}Pb(i)}{^{204}Pb} + \frac{^{235}U(t)}{^{204}Pb}(e^{\lambda(235)t} - 1) \\ R(238) &= \frac{^{206}Pb(t)}{^{204}Pb} = \frac{^{206}Pb(i)}{^{204}Pb} + \frac{^{238}U(t)}{^{204}Pb}(e^{\lambda(238)t} - 1) \end{aligned}$$

En désignant par $(R(235)_a, R(238)_a)$ et $(R(235)_b, R(238)_b)$ les deux couples de mesure, nous pouvons calculer le rapport des différences

$$\frac{R(235)_a - R(235)_b}{R(238)_a - R(238)_b} = \frac{^{235}U(t)}{^{238}U(t)} \left(\frac{e^{\lambda(235)t} - 1}{e^{\lambda(238)t} - 1} \right). \quad (2.22)$$

Le rapport d'abondance actuel est

$$\frac{{}^{235}\text{U}(t)}{{}^{238}\text{U}(t)} = 0.00725.$$

Insérant les mesures obtenues avec les couples a et b , on trouve que les météorites ont des âges aux alentours de 4.55 Gyr. C'est l'*âge de la formation du système solaire*.

La comparaison de ces rapports d'abondances avec les rapports théoriques dérivés de calculs nucléosynthétiques nous donne l'*âge de la synthèse des éléments*, contemporaine de la formation des premières étoiles dans notre galaxie. Les analyses donnent un âge compris entre 11 et 14 Gyr pour les plus vieilles étoiles de la galaxie (à comparer avec les estimations faites à partir des amas globulaires).

Notons que l'âge de la synthèse dépend des hypothèses faites sur le taux de formation stellaire (SFR) et ses variations avant la formation du système solaire.

L'âge de l'univers dépasse d'au moins un milliard d'années l'âge de la première synthèse. L'âge de l'univers obtenu par ces différentes méthodes est compris entre 10 et 20 milliards d'années d'une part. D'autre part, il semble difficile de réconcilier théorie et observation avec un âge inférieur à 12 Gyr.

2.6 Les quasars

Les quasars font partie des sources extra-galactiques les plus lointaines ($z \leq 6$) jamais observées. A cet égard, ils permettent de tester efficacement la loi de Hubble. De plus, ils constituent d'excellentes sondes pour l'étude du milieu inter-galactique. Ce chapitre ne saurait être clos sans que l'on mentionne les propriétés de ces objets fascinants.

Les observations ont confirmé que les quasars représentent des centres de galaxies lointaines. L'hypothèse (qui a la faveur de l'opinion) est que ces centres abritent des trous noirs hyper-massifs de 10^6 à $10^9 M_\odot$.

2.6.1 Quelques généralités

Les quasars furent découverts par la radio-astronomie dans le cours des années soixante. Dès 1960 en effet, plusieurs radiosources du catalogue $3C$ avaient été remarquées pour leur petite taille angulaire. En 1962, Hazard, Mackey et Shimmins purent obtenir, avec le radio-télescope de Parkes, un profil précis de la source $3C273$ grâce à une occultation lunaire (résolution inférieure à $1''$). Leurs observations mirent en évidence l'existence de deux composantes distinctes, $3C273A$ et $3C273B$, distantes de $20''$ environ. $3C273B$ est un objet de type stellaire, dont la magnitude apparente est $m_V \sim 13$, et dont le spectre présente des raies d'émission très larges.

En fait, il s'avéra que ces raies étaient les raies de l'hydrogène, et qu'elles avaient subi un décalage correspondant à un redshift $z = 0.158$. Par conséquent, $3C273B$ ne pouvait être qu'un objet très lointain et très lumineux (Certains astronomes remettent en cause cette explication, donc la nature même du décalage spectral).

La définition généralement adoptée pour les quasars, ou QSOs pour *quasi stellar objects*, est la suivante : un quasar est (i) un objet d'apparence stellaire, (ii) dont le spectre présente des raies d'émission très larges, notablement décalées vers le rouge et (iii) dont la magnitude absolue M_B satisfait $M_B < -23$.

Remarques

- La caractéristique (iii) constitue une ligne de partage approximative. En fait, elle signifie simplement que la luminosité de ces objets est de l'ordre de celle des galaxies.
- Les QSOs présentent quelques similitudes avec les galaxies de Seyfert (galaxies spirales dont le noyau est particulièrement brillant). Ces dernières peuvent être divisées en deux classes :
 - Les galaxies de Seyfert 1, pour lesquelles le noyau central, le profil des raies et la distribution spectrale sont semblables à ceux des QSOs (prototype : *NGC4151*)
 - Les galaxies de Seyfert 2. A la différence des noyaux de Seyfert 1, il n'y a pas de raie large et l'émission X est très faible (prototype : *NGC1068*)

2.6.2 Propriétés des quasars

En raison du décalage cosmologique important, ces propriétés n'ont un sens que si elles sont définies dans les référentiels propres des QSOs.

Emission continue L'énergie rayonnée est à peu près également répartie sur l'ensemble du domaine spectral accessible à l'observation ($10^{-5}\text{eV} < E_\gamma < 10^9\text{eV}$). Le flux F_ν par intervalle de fréquence peut être modélisé par une loi de puissance de la forme $F_\nu = k\nu^{-\alpha}$, où l'indice spectral α est plus ou moins constant sur l'ensemble du spectre, $\alpha \sim 1$. Par conséquent, l'énergie rayonnée est indépendante de ν en première approximation.

- émission radio : les QSOs furent découverts par leur émission radio. Toutefois, ce n'est pas une caractéristique essentielle de ces objets, certains n'émettant pas dans le domaine radio.

- émission IR : Dans le domaine allant de $\lambda \sim 100\mu\text{m}$ au visible, le flux est une loi de puissance d'indice $1 \leq \alpha \leq 2$. De plus, la plupart des spectres observés présentent un excès d'émission entre $2\mu\text{m}$ et 1 mm, excès d'origine thermique semble-t-il (probablement des poussières gravitant autour du noyau actif à des distances comprises entre 10 pc et 1 kpc).

- émission visible et UV : Dans le visible, le continu présente un spectre nettement plus plat ($\alpha \sim 0.5$ pour $100\text{ nm} < \lambda < 500\text{ nm}$) avec une petite bosse centrée autour de $\lambda \sim 250\text{ nm}$. Dans le modèle du trou noir massif, cet excès s'explique par l'émission thermique du disque d'accrétion qui alimente l'objet central.

Pour $\lambda < 912\text{\AA}$, le continu est rarement absorbé, signe que le gaz responsable des raies d'émission ne cache pas la source centrale de rayonnement continu.

Dans la mesure où l'observation des UV lointains est difficile, les informations que nous possédons sur cette partie du spectre sont minces.

- **émission X** : Les données disponibles proviennent essentiellement de la bande $0.5\text{keV} < E_\gamma < 100\text{keV}$ (données recueillies, pour la plupart, à partir des spectres de QSOs proches). Dans ce domaine, le spectre est grossièrement divisé en deux, avec (i) une bande $2\text{keV} < E_\gamma < 100\text{keV}$ d'une part, pour laquelle $\alpha \sim 0.7$ et (ii) une bande $E_\gamma < 2\text{keV}$ d'autre part, où le continu est fortement atténué en raison de l'absorption des photons par les éléments lourds. Dans la région intermédiaire, l'indice α est compris entre 1 et 2.

Bien que l'origine de l'émission X soit incertaine (probablement Compton inverse), les rayons X n'en sont pas moins précieux puisqu'il nous apportent des informations sur les régions qui bordent le noyau actif.

Raies d'émissions Le phénomène des raies d'émission est un aspect essentiel des noyaux actifs dans la mesure où le rapport entre l'énergie du continu et l'énergie émise par les raies est (à peu près) constant et ce, même si la luminosité des QSOs varie de plusieurs ordres de grandeur.

On distingue deux types de raies d'émissions :

- les raies permises, larges, comme celles de la série de Lyman ($\text{Ly}\alpha$), de la série de Balmer ($\text{H}\alpha$, $\text{H}\beta$, $\text{H}\gamma$), ainsi que les doublets CIV (1548-1550 Å) et MgII (2796-2803 Å). Ces raies sont caractéristiques d'un milieu photo-ionisé (à l'instar des régions HII), dont la température est de l'ordre de 10^4K . Les transitions étant fréquentes, ce milieu joue le rôle de thermostat avec beaucoup d'efficacité.

- les raies interdites, très étroites. Elles correspondent en fait à des transitions de faible probabilité. En laboratoire, elles ne peuvent être observées dans la mesure où les désexcitations collisionnelles sont nettement plus fréquentes que les désexcitations radiatives. En revanche, dans le milieu interstellaire, la densité de baryons n_B est négligeable et la désexcitation radiative est possible. Ceci explique le qualificatif "interdit".

Par convention, une raie interdite est notée entre crochets, $[\text{OIII}]\lambda 4959$ correspondant à la transition interdite $\lambda = 4959\text{Å}$ de l'OIII par exemple.

Les raies interdites des QSOs ne proviennent pas de recombinaison électrons-ions, mais elles sont bien excitées par des collisions (comme pour la majorité des raies permises d'ailleurs).

Par ailleurs, l'existence d'une forte évolution parmi les QSOs rend leur étude beaucoup plus difficile. A titre, d'exemple, il semble que les noyaux de Seyfert 1, présents à faibles redshifts, ne constituent pas une population distincte des QSOs. En réalité, les noyaux de Seyfert 1 pourraient être les membres les moins lumineux des QSOs.

Plusieurs hypothèses ont été avancées pour expliquer le fonctionnement du noyau. Nous n'allons en retenir que trois :

- La présence d'un amas d'étoiles très dense. Dans ce scénario, les collisions

fréquentes entre étoiles conduisent à la formation d'étoiles massives pour aboutir à des explosions de supernovae. Le principal défaut de ce modèle est qu'il ne rend compte ni de l'existence d'une direction privilégiée dans l'émission du rayonnement (possibilité de jets radios), ni de l'amplitude des variations de luminosité observée, beaucoup plus importante que celle déduite des supernovae (10^{51} erg libéré par supernovae en moyenne).

- Une étoile supermassive ($M > 10^3 M_{\odot}$), éventuellement en rotation rapide, ou soutenue par la pression d'un champ magnétique élevé. La formation de tels objets ainsi que leur stabilité constituent la principale faiblesse de ce modèle.

- Un trou noir supermassif. La présence de ces 'cannibales' du cosmos peut être confirmée indirectement par l'étude de la cinématique quasi képlérienne des objets qui l'entourent (nuages gazeux par exemple) ou par l'étude de processus d'accrétion (disques minces ou symétrie sphérique).

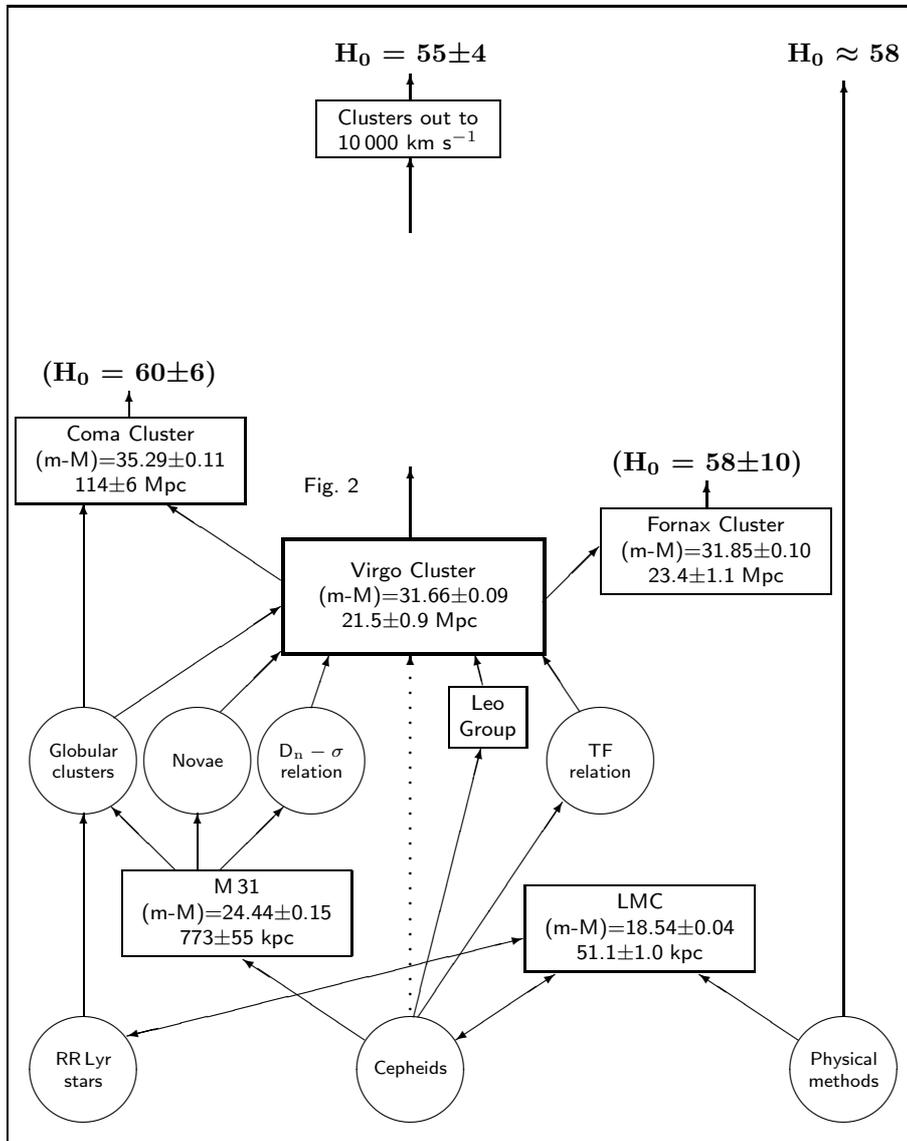


FIG. 2.1 – L'échelle de distance construite à partir d'indicateurs autres que les supernovae SNe Ia (Toutes les erreurs sont des erreurs systématiques). Figure d'après Tamman (1999) [60].

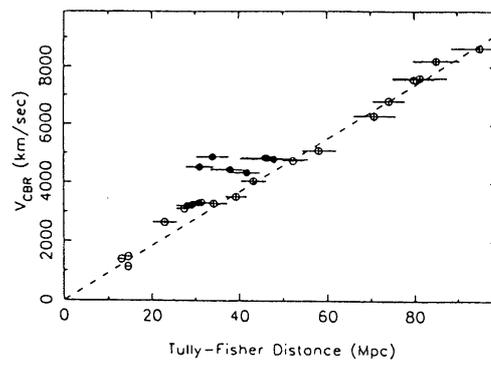


FIG. 2.2 – Vélocities observées dans le référentiel du *CMB* en fonction de la distance donnée par la relation Tully-Fisher (Mould *et al.*(1991)).

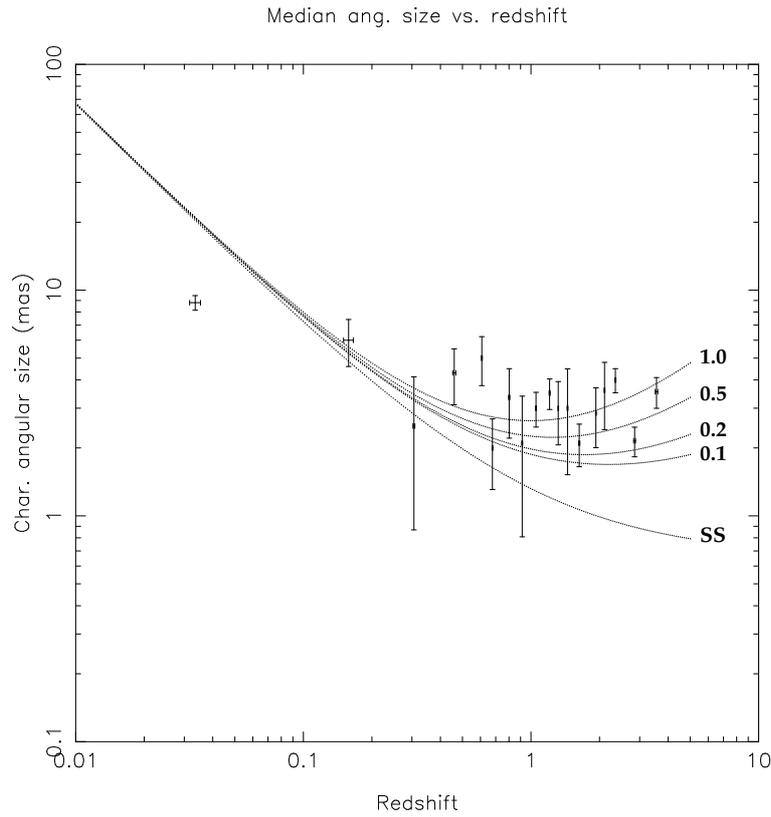


FIG. 2.3 – Taille angulaire médiane en fonction du redshift pour des structures radio compactes. Ici, la taille des barres d'erreurs correspond à 1σ . Les lignes pleines correspondent au modèle Steady-state (SS), et aux modèles d'univers homogènes et isotropes avec $\Lambda = 0$ et $q_0 = 1.0, 0.5, 0.2, 0.1$ (cf. graphique). Les données sont divisées en 18 bins de manière presque équitables, i.e., 18-19 sources par bin (Gurvits *et al.* 1999 [21]).

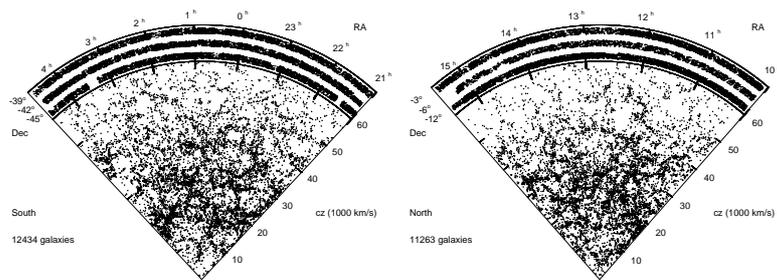


FIG. 2.4 – Le "Las Campanas Redshift Survey" (LCRS) contient 26,418 redshifts de galaxies sélectionnées d'un catalogue CCD obtenu dans la bande R. L'étude couvre 700 deg^2 en six bandes, chacune $1.5^\circ \times 80^\circ$, et trois bandes par hémisphère (nord/sud galactique (Shectman *et al.*(1996) [53]).

Chapitre 3

Les équations cosmologiques

Grâce aux équations de la relativité générale, il est possible de donner une description dynamique de l'univers. La relativité générale lie la métrique, c'est-à-dire la géométrie locale de l'univers, au tenseur énergie-impulsion, décrivant la répartition de la matière dans l'univers. La donnée de ces deux composantes constitue un *modèle d'univers*.

Le modèle d'univers de Friedmann-Lemaître est le modèle non-statique le plus simple. Il satisfait au principe cosmologique. Il est donc décrit par

- la métrique FRW, caractérisée par des sections spatiales avec géométrie sphérique ($k = 1$), euclidienne ($k = 0$) ou hyperbolique ($k = -1$).
- le temps cosmique t , qui est orthogonal aux sections spatiales et $u = \partial_t$ qui est un champ de vitesse géodésique avec $u^2 = -1$, le champ de vitesse d'un observateur 'comobile'. $(u^\mu) = (1, 0, 0, 0)$.
- le tenseur d'énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ est homogène et isotrope. Il possède alors deux degrés de liberté, la densité d'énergie ρ , donnée par $T_\nu^\mu u^\nu = -\rho u^\mu$, et la pression, $p = T_i^i/3$, qui ne dépendent que du temps. Il est de la forme

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu} .$$

Ceci n'est pas une hypothèse additionnelle, comme par exemple que la matière soit un fluide parfait, mais une *conséquence des symétries de l'espace-temps* ! Une constante cosmologique Λ peut être ajoutée à $T_{\mu\nu}$, sous la forme d'un terme additionnel $\Lambda g_{\mu\nu}$.

Les équations d'Einstein,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} ,$$

où $G_{\mu\nu}$ est le tenseur d'Einstein, relie $\rho(t)$ et $p(t)$ avec le facteur d'échelle $a(t)$. Nous dérivons ces équations cosmologiques (équations de Friedmann) à l'aide du formalisme de Cartan.

3.1 Dérivations des équations de Friedmann

Nous dérivons les équation de Friedmann en utilisant de formalism de Cartan dans une base orthonormée. Pour une base orthonormée e_μ avec base duale θ_μ , les 1-formes de la connexion sont déterminées par la première équation de structure,

$$d\theta^\mu = \omega_\nu^\mu \wedge \theta^\nu, \quad \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \quad \text{1ère éq. de structure.}$$

Les deux formes de courbure sont définies par la deuxième équation de structure de Cartan,

$$\Omega_\nu^\mu = d\omega_\nu^\mu + \omega_\alpha^\mu \wedge \omega_\nu^\alpha \quad \text{2ème éq. de structure.}$$

Le tenseur de courbure dans la base orthonormée choisie est déterminé par la deux forme de courbure via

$$\Omega_\nu^\mu = \frac{1}{2} R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} \theta^\alpha \wedge \theta^\beta.$$

Il est relié au tenseur de Ricci et au scalaire de courbure par

$$\begin{aligned} \Omega_\nu &= \mathbf{i}_{e_\mu} \Omega_\nu^\mu = R_{\nu\beta} \theta^\beta \\ R &= R^\nu{}_\nu = \mathbf{i}_{e_\nu} \Omega^\nu. \end{aligned}$$

Nous écrivons la métrique FRW sous la forme

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + \frac{a(t)^2}{(1 + \frac{k}{4}\rho^2)^2} [d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2] = -dt^2 + \frac{a(t)^2}{(1 + \frac{k}{4}\rho^2)^2} \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2 \\ &= -dt^2 + a^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j, \end{aligned}$$

avec $\rho^2 = \sum_{i=1}^3 (x^i)^2$. Nous introduisons alors la base orthonormée $e_0 = \partial_t$ et $e_i = \frac{1 + \frac{k}{4}\rho^2}{a} \partial_i$. La base duale est la tétrade orthonormée

$$\begin{aligned} \theta^0 &= dt \\ \theta^i &= \frac{a dx^i}{1 + \frac{k}{4}\rho^2}, \end{aligned}$$

pour laquelle $g = \eta_{\mu\nu} \theta^\mu \otimes \theta^\nu$ ($\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$). Le calcul des 2-formes $d\theta^\mu$ est immédiat,

$$\begin{aligned} d\theta^0 &= 0 \\ d\theta^i &= \frac{\dot{a}}{a} \theta^0 \wedge \theta^i - \frac{k}{2a} x^j \theta_j \wedge \theta^i. \end{aligned}$$

La première équation de structure donne alors

$$\begin{aligned} \omega^{i0} &= -\omega^{0i} = -\frac{\dot{a}}{a} \theta^i \\ \omega^{ij} &= -\omega^{ji} = -\frac{k}{2a} (x^i \theta^j - x^j \theta^i) \end{aligned}$$

puisque $\omega_{\mu\nu}$ est antisymétrique ($dg_{\mu\nu} = d\eta_{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} = 0$). Nous avons ainsi

$$\begin{aligned} d\omega^{i0} &= -\frac{\ddot{a}}{a}\theta^0 \wedge \theta^i + \frac{\dot{a}k}{2a^2}x^j\theta^i \wedge \theta_j \\ d\omega^{ij} &= -\frac{k}{a^2}\left(1 + \frac{k}{4}\rho^2\right)\theta^i \wedge \theta^j + \frac{k^2}{4a^2}(x^i x^l \theta^j \wedge \theta^l - x^j x^l \theta^i \wedge \theta^l). \end{aligned}$$

Les expressions de $\omega^{\mu\nu}$ et $d\omega^{\mu\nu}$, combinées avec la deuxième équation de structure de Cartan, permettent de calculer aisément les composantes des 2-forme et 1-forme de courbure,

$$\begin{aligned} \Omega^0_i &= -\frac{\ddot{a}}{a}\theta^0 \wedge \theta_i, \\ \Omega^i_j &= -\frac{k + \dot{a}^2}{a^2}\theta^i \wedge \theta_j. \end{aligned}$$

Ceci donne

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \mathbf{i}_{e_j}\Omega^j_0 = 3\frac{\ddot{a}}{a}\theta^0 \\ \Omega_j &= \mathbf{i}_{e_0}\Omega^0_j + \mathbf{i}_{e_l}\Omega^l_j = \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{k + \dot{a}^2}{a^2}\right)\theta_j. \end{aligned}$$

La dérivation de la courbure scalaire et du tenseur de Ricci est immédiate,

$$\begin{aligned} R &= \mathbf{i}_{e_\mu}\Omega^\mu = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{k + \dot{a}^2}{a^2}\right) \\ R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a} \\ R_{0i} &= 0 \\ R_{ij} &= \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{k + \dot{a}^2}{a^2}\right)a^2\gamma_{ij}. \end{aligned}$$

La dernière équation exprime R_{ij} ne pas par rapport à la tétrade θ^i mais par rapport à la base des coordonnées dx^i . Pour l'exprimer par rapport à θ^i , il faut juste remplacer $a^2\gamma_{ij}$ par δ_{ij} . Nous pouvons maintenant calculer les composantes du tenseur d'Einstein, $G_{\mu\nu}$ et les insérer dans les équations de la relativité générale, avec

$$T_{00} = \rho, \quad T_{ij} = pa^2\gamma_{ij}, \quad \text{et} \quad G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R.$$

Il vient

$$\begin{aligned} G_{00} &= 3\frac{k + \dot{a}^2}{a^2} \\ G_{0i} &= 0 \\ G_{ij} &= -\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{k + \dot{a}^2}{a^2}\right)a^2\gamma_{ij}, \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} \quad (3.1)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = -8\pi G\rho + \Lambda, \quad (3.2)$$

Ce sont les équations de Friedmann ¹. Elles expriment les effets dynamiques de la pression et de la densité d'énergie du fluide cosmique, supposé homogène, sur le facteur d'échelle $a(t)$ de l'univers. Comme nous allons le voir par la suite, toutes les solutions (sauf une) sont non-statiques et conduisent à un univers en expansion (ou contraction).

Λ est la **constante cosmologique**. Elle a été introduite par Einstein lorsqu'il cherchait une solution statique aux équations (3.1) et (3.2), voir section 3.4. De nos jours, le rôle de la constante cosmologique est encore très mal compris comme nous le verrons par la suite.

3.1.1 Méthode newtonienne

Il est très intéressant de constater que les équations de la mécanique newtonienne, appliquées à notre univers, conduisent à un résultat très proche du cas relativiste.

Soit d la distance moyenne entre les galaxies (de masse caractéristique m) dans l'univers, R le rayon d'une région sphérique S de l'univers. S est en expansion et satisfait aux conditions

$$\begin{aligned} R &\gg d \sim 1 \text{ Mpc} \\ R &\ll \frac{c}{H_0} \sim 3000h^{-1} \text{ Mpc}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Considérons une galaxie G située sur le bord de S . D'après les lois de la gravitation newtonienne, son énergie potentielle V_G n'est le résultat que de son interaction avec l'ensemble des galaxies situées à l'intérieur de S , c'est-à-dire

$$V_G = -\frac{GMm}{R} = -\frac{4\pi G\rho}{3}R^2m,$$

où M est la masse contenue dans S et ρ la densité de matière (supposée constante). La sphère S étant en expansion, l'énergie cinétique de la galaxie en considération est simplement $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{R}^2$. Ainsi,

$$E_{tot} = \frac{m}{2} \left(-\frac{8\pi G}{3}\rho R^2 + \dot{R}^2 \right),$$

soit

$$\frac{2E}{m} = \left(-\frac{8\pi G}{3}\rho R^2 + \dot{R}^2 \right).$$

L'énergie totale étant une constante du mouvement, le rapport $\frac{2E}{m}$ l'est aussi. Posant $\frac{2E}{m} \equiv -k$, il vient

$$\frac{8\pi G\rho}{3} = \frac{k}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{R^2},$$

qui n'est autre que l'équation (3.2), à condition d'identifier $R(t)$ (rayon d'un grand morceau d'univers) avec le facteur d'échelle $a(t)$. En fait, l'analyse effectuée ci-dessus est parfaitement valable si les conditions (3.3) sont satisfaites, autrement dit pour une petite région de l'univers.

¹Elles furent dérivées pour la première fois en 1922 par le mathématicien russe Alexander Friedmann.

La similitude existant avec le problème des deux corps conduit à trois types de mouvements possibles pour une galaxie $G \in S$:

- $E < 0$ (système lié) $\rightarrow k > 0$. Les galaxies ne peuvent s'évader jusqu'à l'infini (analogues aux trajectoires fermées ou *elliptiques*). S reste confiné à l'intérieur d'un volume fini.
- $E = 0 \rightarrow k = 0$. C'est la cas où l'énergie totale est juste suffisante pour que la galaxie G puisse s'éloigner à l'infini (analogue aux trajectoires *paraboliques*). Posant $k = 0$ dans l'équation ci-dessus, nous voyons que ce mouvement particulier correspond à une densité critique

$$\rho_{c0} \equiv \frac{3}{8\pi G} \frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}.$$

Cette densité critique réapparaît dans le traitement relativiste.

- $E > 0$ (système non-lié) $\rightarrow k < 0$. Les galaxies peuvent s'éloigner indéfiniment de l'observateur O centré en S . La région S n'est pas bornée et s'étend inexorablement.

Ces trois types de mouvements newtoniens correspondent en fait aux trois types de géométrie des sections spatiales dans le cas relativiste (cf. section 3.2).

3.1.2 Tenseur énergie-impulsion

Dans le cadre de la relativité restreinte, le tenseur d'énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ est symétrique, $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$, et satisfait la loi de conservation

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (3.4)$$

Cette loi de conservation signifie que le système physique décrit est invariant par rapport au sous-groupe des translations spatio-temporelles $G \subset H$, où H est le groupe de Poincaré.

A cet égard, le théorème de Noether nous dit qu'il existe un courant conservé

$$\frac{d}{dt} P^\nu = 0, \quad (3.5)$$

où P^0 n'est autre que l'énergie du système et P^i sa quantité de mouvement selon l'axe i . Intégrant l'équation (3.4) par rapport aux coordonnées spatiales et appliquant le théorème de Gauss, le courant conservé est

$$P^\nu = \int_{\{t=\text{const.}\}} d^3x T^{0\nu}(\mathbf{x}, t), \quad (3.6)$$

pour autant que $T^{0\nu}$ soit identiquement nul sur le bord du domaine d'intégration.

La composante T^{00} est la densité d'énergie, T^{0i} est le flux d'énergie à travers une surface orientée dans la direction i et T^{ij} est le flux de la composante i de la quantité de mouvement à travers une surface orientée selon j .

En relativité générale, $\partial_\mu T^{\mu\nu}$ est remplacé par $T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$, ce qui, en général, n'est pas une équation de conservation. Dans une géométrie quelconque, l'espace-temps n'obéit à aucune symétrie et il n'existe pas d'intégrale du tenseur énergie-impulsion qui est conservée. Nous ne pouvons pas appliquer le théorème de Noether. Néanmoins, dans le cas de l'univers Friedmann, les translations spatiales et les rotations restent des symétries, et l'impulsion et le moment cinétique sont

conservés. Mais l'énergie qui est liée aux translations par rapport au temps, symétrie qui est brisée dans un univers de Friedmann, n'est en général pas conservée.

Comme nous l'avons vu, la densité d'énergie ρ peut être définie comme la valeur propre de genre temps du tenseur d'énergie impulsion. Dans un système de coordonnées local, nous avons

$$T_{\nu}^{\mu} u^{\nu} = -\rho u^{\mu}, \quad (3.7)$$

où u^{μ} est le vecteur propre de genre temps associé à la valeur propre ρ , c'est-à-dire la quadri-vitesse du flot d'énergie. C'est la définition la plus générale que l'on puisse donner à la densité d'énergie (lorsque on se donne un tenseur d'énergie impulsion). L'équation (3.7) impose une condition non triviale sur la forme de $T_{\mu\nu}$: multipliant l'égalité ci-dessus par u_{ν} , il vient

$$T_{\nu}^{\mu} u_{\mu} u^{\nu} = -\rho u^{\mu} u_{\mu} = \rho \geq 0,$$

où nous avons pris en considération le fait que $u^{\mu} u_{\mu} = -1$ (vecteur de genre temps), et la dernière inégalité est satisfaite si la densité d'énergie ρ est positive ou nulle (pour autant que les particules se propagent vers les temps croissants, c'est-à-dire $u^0 \geq 0$). La condition

$$T_{\nu}^{\mu} u_{\mu} u^{\nu} = T(u, u) \geq 0 \quad (3.8)$$

pour toute quadri-vitesse u , $(u, u) = u^{\mu} u_{\mu} = -1$ et est appelée *la condition d'énergie faible*.

Par ailleurs, la trace du tenseur d'énergie-impulsion, $T = -g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$, est un invariant relativiste. Comme nous le verrons, une autre condition joue un rôle important :

$$T_{\nu}^{\mu} u_{\mu} u^{\nu} - \frac{1}{2} T = T(u, u) - \frac{1}{2} T \geq 0 \quad (3.9)$$

pour toute quadri-vitesse u , $(u, u) = u^{\mu} u_{\mu} = -1$ est appelée *la condition d'énergie forte*.

Dans le cas cosmologique, le tenseur d'énergie-impulsion est de la forme $T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_{\mu}u_{\nu} + pg_{\mu\nu}$, si bien que $T = \rho - 3p$ et

$$T(u, u) - \frac{1}{2} T = \frac{\rho + 3p}{2}.$$

Dans le contexte cosmologique, la condition d'énergie forte est donc équivalente à

$$\rho + 3p \geq 0.$$

Nous reparlerons de ces inégalités lorsque nous discuterons le problème des singularités et de la constante cosmologique.

3.2 Discussion des équations de Friedmann

3.2.1 Quelques généralités

Nous consacrons ce paragraphe à la discussion des équations de Friedmann. Afin de nous aider à comprendre la physique qui se cache derrière ce système

d'équations différentielles, nous allons réécrire le système d'équations. Dérivant la première par rapport à t et insérant la deuxième, nous avons

$$\begin{aligned} 8\pi G \frac{d}{dt}(\rho a^3) &= 3k\dot{a} + 6a\dot{a}\ddot{a} + 3\dot{a}^3 - 3\Lambda a^2\dot{a} \\ &= -3a^2\dot{a} \underbrace{\left(-2\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{k}{a^2} + \Lambda \right)}_{8\pi G p}. \end{aligned}$$

Effectuons la dérivation dans le membre de gauche. Nous pouvons écrire

$$\frac{d\rho}{dt} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p),$$

soit

$$\frac{d\rho}{da} = -3\frac{(\rho + p)}{a} \quad \text{ou} \quad d(\rho a^3) + 3pa^2 da = 0. \quad (3.10)$$

Une autre forme utile est

$$\frac{d}{dt}(\rho a^2) = -\frac{\dot{a}}{a}(\rho + 3p)a^2 \quad (3.11)$$

Ainsi, pour un fluide cosmique qui satisfait à la condition d'énergie forte, ρ décroît plus vite que $1/a^2$. Ceci implique qu'un univers à courbure positive, $k > 0$, arrivera à un instant, t_{\max} , où $8\pi G\rho/3 = k/a^2$ et donc $\dot{a} = 0$, d'après (3.1). A ce moment \ddot{a} est toujours négative (voir section suivante) et l'expansion tourne en contraction.

L'équation (3.10) exprime la "*conservation de l'énergie*" qui découle aussi de la relation $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, ce qui est une conséquence des identités de Bianchi (voir cours de relativité générale). Notez néanmoins que (3.10) n'est pas une équation de conservation si $p \neq 0$. D'après (3.10), la densité d'énergie par volume n'est pas conservée. Le système d'équations différentielles (3.1,3.2) est donc équivalent à

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} \quad (3.12)$$

$$\frac{d\rho}{da} = -3\frac{(\rho + p)}{a}. \quad (3.13)$$

A ce stade de la discussion, il est utile d'introduire le *paramètre de densité* Ω_x . Si ρ_{x0} dénote la densité d'une forme quelconque d'énergie X dans l'univers (photons, baryons, constante cosmologique ...), on définit le paramètre de densité de X comme

$$\Omega_x \equiv \rho_{x0}/\rho_{c0}, \quad (3.14)$$

où l'indice 0 désigne la valeur au temps t_0 (i.e., actuelle) d'une variable, et ρ_{c0} est la densité d'un univers tel que $k = 0$ et $\Lambda = 0$, correspondant au cas critique pour lequel la courbure des sections spatiales et la constante cosmologique sont nulles. Plus précisément, si on écrit le paramètre de Hubble comme

$$\left.\frac{\dot{a}}{a}\right|_0 = H_0 = h100 \frac{\text{km}}{\text{sMpc}}$$

on a

$$\begin{aligned}
 \rho_c &= \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \\
 \rho_{c0} \equiv \rho_c(t_0) &= 1.879h^2 \times 10^{-29} \text{ g cm}^{-3}, \\
 &= 8.099h^2 \times 10^{-47} \text{ GeV}^4, \\
 &= 1.054h^2 \times 10^4 \text{ eV cm}^{-3} = 10.54h^2 \text{ GeV m}^{-3} \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

ce qui représente quelques atomes d'hydrogène par mètre cube.

Ici $h = H_0/(100\text{km/s/Mpc}) \simeq 0.72 \pm 0.1$. La densité ρ_c est appelée *densité critique* et ρ_{c0} est la densité critique actuelle.

Ainsi, il est utile de définir

$$\begin{aligned}
 \Omega_f &= \frac{8\pi G \rho_0}{3H_0^2} \\
 \Omega_\Lambda &= \frac{\Lambda}{3H_0^2} \\
 \Omega_\kappa &= \frac{-k}{(H_0 a_0)^2}, \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

pour caractériser les contributions du fluide cosmique, de la constante cosmologique et de la courbure. Insérant ces définitions dans (3.1) à $t = t_0$, nous avons la relation

$$1 = \Omega_f + \Omega_\kappa + \Omega_\Lambda. \quad (3.17)$$

Souvent nous utilisons aussi

$$\Omega \equiv 1 - \Omega_\kappa. \quad (3.18)$$

Tel qu'il est, $\Omega > 1$, 0 et < 1 pour courbure positive, nulle et négative. Ω_f peut encore être décomposé en ses différentes contributions : photons, baryons, matière noire, neutrinos... Nous allons y revenir un peu plus loin (cf. section 3.5).

3.2.2 Existence d'une singularité

Nous redéfinissons le tenseur énergie-impulsion par

$$T_{\mu\nu} \rightarrow T_{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu},$$

soit

$$\rho \rightarrow \rho + \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad p \rightarrow p - \frac{\Lambda}{8\pi G}.$$

Ceci correspond à l'interprétation de la constante cosmologique comme énergie du vide, $\rho_V \equiv \Lambda/8\pi G$. Ceci est toujours possible comme le tenseur énergie-impulsion du vide doit être de la forme $T_V^{\mu\nu} = -\rho_V g^{\mu\nu}$. Additionnant (3.1) et (3.2), il vient alors

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (3.19)$$

Si le tenseur énergie-impulsion satisfait à la condition d'énergie forte $(\rho + 3p) > 0$, $\ddot{a}/a < 0$, soit $\ddot{a} < 0$ puisque $a > 0$ quelque soit t . L'expansion est ralentie,

l'effet intuitive qui devrait avoir la gravitation. L'attraction gravitationnelle freine l'expansion de l'univers. Dans le cas contraire, $\ddot{a} > 0$ et l'expansion est accélérée. On parle de "anti-gravité" ou "gravitation repulsive".

Si le tenseur énergie-impulsion des univers de Friedmann-Lemaître satisfait à la condition d'énergie forte, (comme, par exemple, s'il est dominé par du rayonnement ou par de la matière non-relativiste) $\ddot{a}/a < 0$ et la fonction $a(t)$ est concave. Il existe alors un temps $t_s > t_0 - H_0^{-1}$ tel que $a(t_s) = 0$. Ce moment est appelé le '**Big Bang**'. Nous choisissons la coordonnée temporelle de telle sorte que $t_s = 0$. La métrique est dégénérée en $t = 0$, le scalaire de courbure R diverge, la densité ρ diverge. Le point $t = 0$ de la variété qui décrit notre univers est une singularité de nos solutions.

Théorème 3.2.1 *Les modèles de Friedmann-Lemaître qui satisfont à la condition d'énergie forte possèdent une singularité dans le passé finit. Choissant $t = 0$ pour le moment de la singularité nous trouvons $a \rightarrow 0$, $\rho, R \rightarrow \infty$ pour $t \rightarrow 0$.*

On pourrait supposer que la symétrie de nos solutions est à l'origine de cette singularité, mais ce n'est pas le cas. Un théorème général de Hawking et Penrose [24] montre en effet que tout univers en expansion satisfaisant la condition d'énergie forte admet une singularité dans le passé fini, sans qu'une quelconque hypothèse de symétrie soit nécessaire.

Pour définir mathématiquement l'expansion dans le cadre d'un univers satisfaisant à la condition d'énergie forte mais ne possédant aucune symétrie particulière, il faut partir de l'équation d'Einstein sous la forme

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right), \quad (3.20)$$

où $T \equiv T^\nu_\nu$. En multipliant cette équation par $w^\nu w^\mu$, où w^ν , w^μ sont les composantes d'un vecteur de genre temps unitaire avec $w^0 > 0$, il vient

$$R(w, w) = 8\pi G \left(T(w, w) + \frac{1}{2} T \right).$$

La condition d'énergie forte implique

$$R_{\mu\nu} w^\mu w^\nu \geq 0.$$

Ainsi, un univers est en expansion décélérée si

$$R_{\mu\nu} w^\mu w^\nu \geq 0 \quad \forall w, \quad g(w, w) = -1.$$

Pour des explications supplémentaires, voir Hawking & Ellis [24].

En relativité générale classique, la singularité à $t = 0$ n'appartient pas à la variété (\mathcal{M}, g) caractérisant l'espace-temps, si bien que les questions du type

Qu'est ce qui se passait avant $t = 0$, avant le Big-bang ?

n'ont pas de sens dans le cadre de cette théorie. En fait, lorsque

$$t \leq t_p \equiv \left(\frac{G\hbar}{c^5} \right)^{1/2} \cong 3 \times 10^{-44} \text{ s},$$

la gravitation classique doit être remplacée par une théorie quantique de la gravitation (supergravité, supercordes). Dans le cas de la théorie des supercordes, la singularité à $t = 0$ est remplacée par un état de contraction maximal (en raison d'une propriété de la théorie appelée *T-dualité*), conduisant à des résultats finis (cf. Lidsey *et al.* [32] pour une introduction à la cosmologie des cordes).

L'échelle λ_p à partir de laquelle les effets gravitationnels sont du même ordre que les effets quantiques est appelée *échelle de Planck*. Pour un objet de masse M , nous pouvons définir

$$\begin{array}{lll} \text{Rayon de Schwarzschild} & R_s/2 = \frac{GM}{c^2} & \text{échelle gravitationnelle} \\ \text{Longueur de Compton} & \lambda_c = \frac{\hbar}{Mc} & \text{échelle quantique} \end{array}$$

L'égalité

$$\text{échelle gravitationnelle} = \text{échelle quantique}$$

se traduit par

$$\frac{GM_p}{c^2} = \frac{\hbar}{M_p c}$$

$$M_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \cong 2 \times 10^{-5} \text{g} \cong 1.2 \times 10^{19} \text{GeV}/c^2,$$

ce qui correspond à

$$\begin{array}{ll} \text{longueur de Planck} & \lambda_p \equiv \frac{\hbar}{M_p c} \cong 1.6 \times 10^{-33} \text{ cm}, \\ \text{temps de Planck} & t_p \equiv \frac{\lambda_p}{c} \cong 5.4 \times 10^{-44} \text{ s}, \\ \text{température de Planck} & T_p \equiv \frac{M_p c^2}{k_B} \cong 1.4 \times 10^{32} \text{ K}. \end{array}$$

Dans le cas où la constante cosmologique domine, le tenseur d'énergie-impulsion est de la forme $T_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu}$ et la condition d'énergie forte est violée (si $\Lambda \geq 0$). En effet, nous avons alors $\rho = \Lambda$ et $p = -\Lambda$, conduisant à

$$(\rho + 3p) = -2\Lambda \leq 0.$$

Dans ce cas, (3.19) implique $\ddot{a} \geq 0$, et l'univers est en expansion accélérée.

Toutefois, la condition d'énergie faible reste vérifiée (pourvu que $\Lambda \geq 0$). En composantes,

$$T(w, w) = T_{\mu\nu} w^\mu w^\nu = -\Lambda g_{\mu\nu} w^\mu w^\nu = -\Lambda g(w, w) \geq 0$$

puisque w est du genre temps.

En plus, l'éq. (3.19) indique que si l'univers est en contraction, $\dot{a}/a < 0$, cette contraction est accélérée. Pour un univers à courbure positive. Si $\rho + 3p > 0$, éq. (3.13) implique

$$\frac{d\rho}{da} = -3 \frac{(\rho + p)}{a} > -2 \frac{\rho}{a}.$$

Alors ρ décroît plus rapidement que $1/a^2$ et le terme $8\pi G\rho/3 - k/a^2$ s'annule à un facteur d'échelle a_{\max} donné par $8\pi G\rho(a_{\max})/3 - k/a_{\max}^2 = 0$. À $a = a_{\max}$ l'expansion tourne en contraction. Dans ce cas, $\rho + 3p > 0$ n'implique pas

seulement un 'big bang' dans le passé mais, comme l'expansion est tournée en contraction après le temps t_{\max} , cet univers a aussi une singularité dans le futur à un temps fini $t_c < \infty$. Cette singularité n'existe que pour l'univers à courbure positive, et s'appelle le '**Big Crunch**'.

Pour un univers plat, $k = 0$, le fait que ρa^2 est une fonction décroissante implique que $\dot{a} \rightarrow 0$, tandis que pour $k < 0$ on a $\dot{a} \rightarrow \sqrt{-k}$.

L'évolution du facteur d'échelle pour un univers qui satisfait à la condition d'énergie forte pour les différentes valeurs de la courbure est indiquée dans la figure 3.1.

Si cette condition n'est pas satisfaite, non seulement la singularité du big bang ne doit pas exister, mais aussi un univers à courbure positive peut rester en expansion pour toujours. Le premier fait est à la base de l'idée de l'inflation (voir chap. 5).

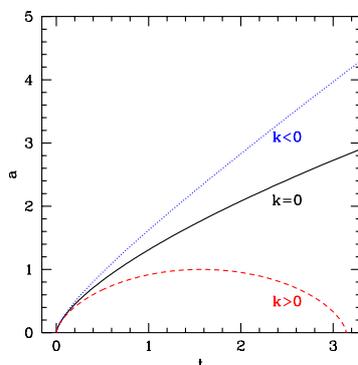


FIG. 3.1 – L'évolution du facteur d'échelle pour un univers qui satisfait à la condition d'énergie forte dans le cas plat (ligne entière), courbure négative (ligne pointillée) et courbure positive (ligne traitillée)

3.2.3 “Conservation” de l'énergie

L'équation (3.10) peut être aisément résolue si p est donné par une équation d'état $p = p(\rho)$ linéaire (de la forme $p = \omega\rho$, $\omega = \text{const.}$). Dans ce cas, la fonction $\rho(a)$ est connue. Il suffit alors de l'introduire dans l'équation (3.12) pour obtenir le comportement du facteur d'échelle $a(t)$.

Pour une équation d'état de la forme $p = \omega\rho$, l'intégration de (3.10) conduit à la relation

$$\rho \cdot a^{3(1+\omega)} = \text{const.}, \quad (3.21)$$

En particulier,

- $p_r = \frac{1}{3}\rho_r$, pour un gaz relativiste (un gaz de photons par exemple). Dans ce cas, $3(1 + \omega) = 4$ et

$$\rho_r \cdot a^4 = \text{const.} \Rightarrow \rho_r \propto a^{-4}. \quad (3.22)$$

La densité d'énergie ρ_r peut aussi être mise sous la forme $\rho_r = \text{const.} \cdot T^4$ où T est la température (dans le cas où nous avons l'équilibre thermique) et cette

relation devient

$$T \cdot a = \text{const.} \quad (3.23)$$

La température du gaz relativiste décroît comme $1/a$ avec l'expansion de l'univers.

• $p_m = 0$, $\rho_m \neq 0$, dans le cas de matière non-relativiste (poussières, galaxies ...).

$$\rho_m \cdot a^3 = \text{const.} \Rightarrow \rho_m \propto a^{-3}. \quad (3.24)$$

La température T étant bien inférieure à la masse m des particules (définition de 'matière non-relativiste'), le nombre de particules N dans un volume co-mobile est conservé. Ainsi, désignant la densité de ce gaz non-relativiste par n , nous avons $\rho_m = mn$ et équ. (3.24) est équivalente à

$$n \cdot a^3 = \text{const.}, \quad (3.25)$$

et la densité de particule est inversement proportionnelle au volume de l'univers.

• $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$: une constante cosmologique se comporte comme un fluide avec cette équation d'état ce qui implique $\rho_\Lambda = -p_\Lambda = \text{constante}$, $w_\Lambda = -1$.

Les observations actuelles sont en bon accord avec la forme suivante pour la densité de l'univers : $\rho = \rho_r + \rho_m + \rho_\Lambda$. Actuellement, la densité de radiation est sous-dominante. D'après les mesures des supernovae type IA [47, 44], $\Omega_m \simeq 0.75\Omega_\Lambda - 0.25$. Combiné avec d'autres observations, les valeurs suivantes sont raisonnables.

$$\Omega_r \simeq 2.48h^{-2} \times 10^{-5}, \quad \Omega_m h^2 \simeq 0.13 \pm 0.02, \quad \Omega_\Lambda \simeq 0.72 \pm 0.1, \quad \Omega_\kappa \simeq 0.$$

Les deux dernières valeurs ne sont de loin pas aussi bien connues que Ω_r qui est la densité d'énergie des photon du fond cosmique micro-onde. Notez aussi que d'après les mesures des supernovae type IA [47, 44], la valeur $\Omega_\Lambda = 0$ est exclu pour un univers composé de matière non-relativiste, ρ_m , et d'une constante cosmologique Λ . Ces mesures implique que l'univers est actuellement en expansion *accélérée*, c'est-à-dire $p_{\text{tot}}/\rho_{\text{tot}} < -1/3$.

Toutefois, en remontant dans le temps, la densité de matière relativiste croît plus vite que celle de la matière non-relativiste (cf. équations 3.22 et 3.24). En plus, si la température est plus élevée que la masse d'une particule, celle-ci contribue aussi à la densité de matière relativiste. En conclusion, la composante relativiste domine pour $t \rightarrow 0$, tandis que pour $t \rightarrow \infty$ la composante non-relativiste ou la constante cosmologique domine.

L'époque pour laquelle $\rho_r = \rho_m$ est appelée *équivalence* (redshift z_{eq}). En tenant compte de (3.22) et (3.24),

$$\rho_r(t) = \rho_{c0}\Omega_r(1+z)^4, \quad \rho_m(t) = \rho_{c0}\Omega_m(1+z)^3, \quad \Lambda = 8\pi G\rho_{c0}\Omega_\Lambda.$$

Ici nous avons posé $\Omega_r = 4.18h^{-2} \times 10^{-5}$ ce qui ajoute 3 sorte de neutrinos relativistes (comme nous le verrons dans le chapitre 4 ceux-ci sont à une température légèrement inférieure à celle de photons.) En égalant les contributions de la

matière relativiste et non-relativiste d'une part, et de la matière non-relativiste et de la constante cosmologique d'autre part, nous avons

$$\left(\frac{\rho_r}{\rho_m}\right)\Big|_{t_{eq}} = 1 = \frac{\Omega_r}{\Omega_m}(1 + z_{eq}), \quad \left(\frac{8\pi G\rho_m}{\Lambda}\right)\Big|_{t_\Lambda} = 1 = \frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda}(1 + z_\Lambda)^3$$

et le redshift d'équivalence où la densité de la radiation est égale à celle de la matière non-relativiste est de l'ordre de

$$z_{eq} \simeq 3.3 \times 10^3 .$$

Le redshift où Λ commence à dominer est

$$z_\Lambda \sim 0.4 .$$

L'histoire de l'univers peut donc être partagée en trois époques distinctes :

1. $z \geq z_{eq}$ ($\rho_r \geq \rho_m \geq \Lambda/(8\pi G)$). On parle d'un univers *dominé par la radiation ou le rayonnement*.
2. $z_\Lambda < z \leq z_{eq}$ ($\rho_r \leq \rho_m$, $\Lambda/(8\pi G) \leq \rho_m$). On parle d'un univers *dominé par la matière*.
3. $z \leq z_\Lambda \sim 0.4$ ($\rho_r \leq \rho_m \leq \Lambda/(8\pi G)$). L'univers est dominé par la constante cosmologique (ou une autre forme "d'énergie noire").

En fait, nous verrons qu'il est possible d'établir une relation entre l'âge de l'univers et les densités de ses différentes composantes X (photons, baryons...).

L'histoire de l'univers peut donc être découpée en plusieurs phases dont les limites, situées à des redshift bien précises, sont dictées par les lois de la physique.

Nous allons reprendre en détail ces différentes étapes dans le chapitre 4. Notez aussi que la densité de la matière non-relativiste et, surtout, la constante cosmologique sont deux valeurs absolument arbitraires pour lesquelles nous n'avons aucune compréhension physique à ce jour. Nous allons même argumenter que la valeur de Λ est plus de 60 ordres de grandeur plus petite que ce qu'on attendait de la physique des particules. Ce problème de la constante cosmologique est un des plus grands mystères de la cosmologie.

3.2.4 Paramètre de densité et géométrie

Pour faire des énoncés définitifs, nous supposons que l'univers actuel est composé de matière non-relativiste et d'une constante cosmologique. Si on introduit une composante 'd'énergie noire' avec une autre équation d'état ou un champ scalaire, les résultats changent légèrement.

La valeur prise par la constante k ($0, \pm 1$) dépend des paramètres cosmologiques (Ω_m, Ω_Λ). Pour nous en rendre compte, introduisons les paramètres (H_0, q_0, ρ_0) dans les équations (3.1) et (3.2). La constante de Hubble et le paramètre de décélération étant définis par

$$H_0 = \frac{\dot{a}_0}{a_0}, \quad q_0 = -\frac{\ddot{a}_0 a_0}{\dot{a}_0^2},$$

nous avons

$$\begin{aligned} H_0^2 + \frac{k}{a_0^2} &= \frac{8\pi G}{3}\rho_0 + \frac{\Lambda}{3} \\ -2q_0 H_0^2 + H_0^2 + \frac{k}{a_0^2} &= -8\pi G p_0 + \Lambda \end{aligned}$$

L'univers actuel est dominé par de la matière non-relativiste, $p_0 = 0$. La seule contribution à la pression provient de la constante cosmologique, $p^{(v)} = -\rho^{(v)} = -\Lambda/(8\pi G)$.

Divisant les deux équations par H_0^2 et insérant les différents paramètres de densité, nous avons

$$\begin{aligned} 1 - \Omega_\kappa &= \Omega_m + \Omega_\Lambda \\ -2q_0 + 1 - \Omega_\kappa &= 3\Omega_\Lambda. \end{aligned}$$

En soustrayant ces deux égalités, le paramètre de décélération peut être exprimé comme

$$q_0 = \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda = \frac{\Omega}{2} - \frac{3}{2}\Omega_\Lambda, \quad (3.26)$$

où nous avons posé $\Omega = \Omega_m + \Omega_\Lambda$. La présence de matière favorise la décélération alors que la 'pression négative' provenant de la constante cosmologique s'y oppose. Si $\Omega_m < 2\Omega_\Lambda$, alors $q_0 < 0$ et l'expansion est donc accélérée. La relation 3.26 est une conséquence des équations (3.1) et (3.2) pour $t = t_0$, exprimée en fonction des quantités observables (q_0, Ω_m). Elle illustre élégamment le lien existant entre la géométrie de l'univers et la densité actuelle. La détermination de q_0 donne accès à une combinaison linéaire de Ω_m et Ω_Λ . Les supernovae SNe Ia (cf. chapitre 2) constituent un excellent moyen pour contraindre ces deux paramètres de densité.

Dans le cas où Ω_Λ est négligeable, trois cas de figure sont possibles

- $q_0 > 1/2 \rightarrow \rho > \rho_{c0} \rightarrow k/a_0^2 > 0$: modèle d'univers *fermé* (géométrie sphérique).
- $q_0 = 1/2 \rightarrow \rho_0 = \rho_{c0} \rightarrow k = 0$: modèle d'univers *critique* (géométrie euclidienne).
- $q_0 < 1/2 \rightarrow \rho < \rho_{c0} \rightarrow k/a_0^2 < 0$: modèle d'univers *hyperbolique* (géométrie hyperbolique).

Cette distinction disparaît complètement si l'on admet une constante cosmologique. Aussi longtemps que $\Omega_\Lambda \geq 0$, un $q_0 > 1/2$ implique encore un univers fermé (géométrie sphérique) et $q_0 = 1/2$ implique un univers fermé ou critique. Mais $q_0 < 1/2$ ne donne aucune information sur la géométrie de l'univers sans des mesures indépendantes de Ω_m . Les supernovae Ia indiquent en effet $q_0 < 0$, c'est-à-dire un univers en expansion accélérée (voir figure 3.2).

Les différentes méthodes présentées au chapitre 2 ne permettent pas de mesurer Ω_m avec précision. Toutefois, l'étude des fluctuations du fond cosmique de rayonnement micro-onde (*CMB*, cf. section 4.5) permet en principe de contraindre beaucoup plus précisément la valeur de Ω , et les résultats les plus récents du satellite WMAP [54] sont consistants avec $\Omega \sim 1$ comme nous le verrons.

Les différents paramètres de densité jouent un rôle important puisqu'ils déterminent la géométrie de l'univers, autrement dit les mesures d'angle et de distance.

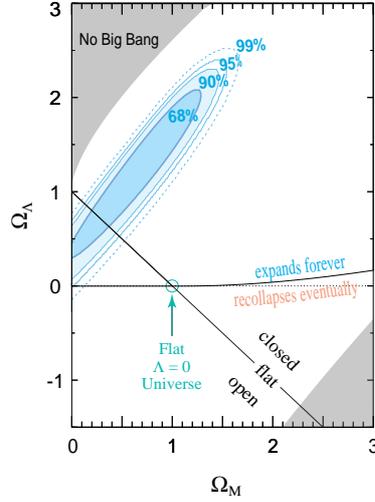


FIG. 3.2 – Le meilleur fit Ω_m et Ω_Λ d'après les mesures de supernovae Ia (Perlmutter *et al.* (1999) [44]).

Afin de mettre en évidence la relation existant entre la géométrie et la densité, calculons la distance métrique $a_0\chi$ (avec la métrique (1.22)) en partant des équations cosmologiques. Divisant (3.2) par H_0^2 , nous avons

$$\frac{H^2}{H_0^2} + \frac{k}{a^2 H_0^2} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho + \frac{\Lambda}{3H_0^2}.$$

H et ρ sont, respectivement, le paramètre de Hubble et la densité de matière dans l'univers au temps t . Cette dernière est composée de matière relativiste et non-relativiste, $\rho = \rho_r + \rho_m$, avec $\rho_r a^4 = \text{const.}$ et $\rho_m a^3 = \text{const.}$ Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{H^2}{H_0^2} &= \frac{8\pi G}{3H_0^2}(\rho_r + \rho_m) + \frac{\Lambda}{3H_0^2} - \frac{k}{a^2 H_0^2} \\ &= \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_r(t_0) \left(\frac{a_0^4}{a^4}\right) + \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_m t_0 \left(\frac{a_0^3}{a^3}\right) + \Omega_\Lambda - \frac{k}{a_0^2 H_0^2} \left(\frac{a_0^2}{a^2}\right) \\ &= \Omega_r(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_\kappa(1+z)^2. \end{aligned}$$

La constante de Hubble $H(t)$ peut donc être exprimée en fonction de H_0 et des paramètres cosmologiques,

$$H^2 = H_0^2 [\Omega_r(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_\kappa(1+z)^2] \quad (3.27)$$

Cette équation est cruciale, car elle permet d'obtenir une relation entre le redshift et la distance comobile. En effet, l'équation décrivant le mouvement radial d'un photon (cf. équation (1.26)) est $ad\chi = -dt = -da/\dot{a} = -da/(aH)$. Le signe négatif traduit simplement le fait que, lorsque la distance χ augmente, nous remontons dans le passé. Avec $a_0/a = 1+z$, ceci conduit à

$$\begin{aligned} a_0 d\chi &= \frac{1}{H} dz \\ &= \frac{1}{H_0} [\Omega_r(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_\kappa(1+z)^2]^{-1/2} dz. \end{aligned} \quad (3.28)$$

A partir de l'expression pour χ , les Ω_X étant connus, il est possible de calculer les distances, les angles, et aussi la luminosité apparente d'objets distants et le nombre d'objets observés par unité de covolume.

En pratique, la démarche est plutôt inverse : si on connaît la luminosité absolue, le nombre d'objet par volume ou la taille physique d'un objet, la relation entre χ et les Ω_X nous aide à déterminer les derniers. A titre d'exemple, pour la distance angulaire entre nous et un événement à redshift z , nous obtenons avec $d_A = a(z)\sigma(\chi(z))$ (voir chapitre 2),

$$d_A = \frac{a_0}{1+z} \sigma \left(\frac{1}{a_0 H_0} \int_0^z [\Omega_r(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_\kappa(1+z)^2]^{-1/2} dz \right), \quad (3.29)$$

où, d'après éq. (1.22), on a

$$\sigma(\chi) = \begin{cases} \chi & \text{cas euclidien, } \Omega_\kappa = 0, \\ \sin(\chi) & \text{cas sphérique, } \Omega_\kappa > 0, \\ \sinh(\chi) & \text{cas hyperbolique, } \Omega_\kappa < 0. \end{cases}$$

Avec $d_L = (1+z)^2 d_A$ (voir paragraphe 2.1), on peut utiliser cette relation pour trouver les différents paramètres de densité. Dans le programme SNIa, on mesure d_L pour beaucoup de supernovae type Ia, qui sont supposées être des chandelles standards (modifiées) avec des redshifts différents, $0 < z \lesssim 1$. Pour très petit redshift, on a $d_A \sim d_L \sim z/H_0$ au prochain ordre on trouve

$$d_L \simeq \frac{1}{H_0} \left(z + \frac{1}{2}(1-q_0)z^2 + \dots \right), \quad d_A \simeq \frac{1}{H_0} \left(z - \frac{1}{2}(3+q_0)z^2 + \dots \right), \quad z \ll 1. \quad (3.30)$$

A petit redshift, $z \lesssim 0.3$ donc, $d_{A,L}$ déterminent surtout $q_0 = \Omega_m/2 - \Omega_\Lambda$. La contrainte dérivée par les expérience supernovae dans le plan $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$ est présentée dans la figure 3.2.

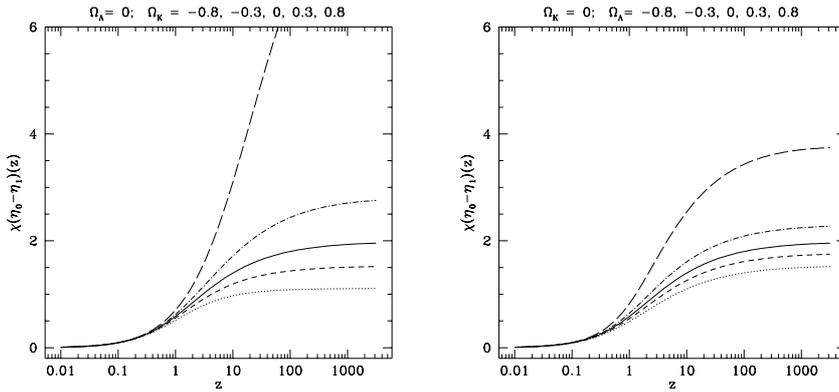


FIG. 3.3 – Nous illustrons ici la fonction $\sigma(z)$ pour différentes valeurs de Ω_κ ($\Omega_\Lambda = 0$ à gauche) et Ω_Λ ($\Omega_\kappa=0$, à droite). Les courbes correspondent à -0.8 [pointillé], -0.3 [tirets courts], 0 [trait plein], 0.3 [point-tiret], 0.8 [tirets longs].

Dans la figure 3.3 nous montrons la fonction $\sigma(z)$ donnée par (3.29) comme fonction du redshift. Il est clair que, pour un redshift $z \gg 1$, cette fonction

dépend fortement de la courbure. Alors, si on connaît la taille physique λ d'un objet placé à un redshift $z \gg 1$, qui est vu sous un angle θ dans la sphère céleste, l'expression (3.29) pour $d_A = \lambda/\theta$ nous aide à déterminer les paramètres cosmologiques Ω_Λ , Ω_m et surtout Ω_κ . Il est facile de voir que l'intégrale en (3.29) est dominée par la borne inférieure et, pour $z \gtrsim 10$, elle est pratiquement indépendante de z . Comme la distance angulaire d_A dépend surtout de la fonction σ , elle représente un excellent moyen pour déterminer la courbure de l'univers (si H_0 est connu. On peut toujours poser $a_0 = 1$, mais alors $|k| \neq 1$). C'est en effet cette méthode qui est utilisée par les expériences qui mesurent les anisotropies du fond cosmique micro-onde (*CMB*). Ces expériences trouvent $|\Omega_\kappa| = 0 \pm 0.02$.

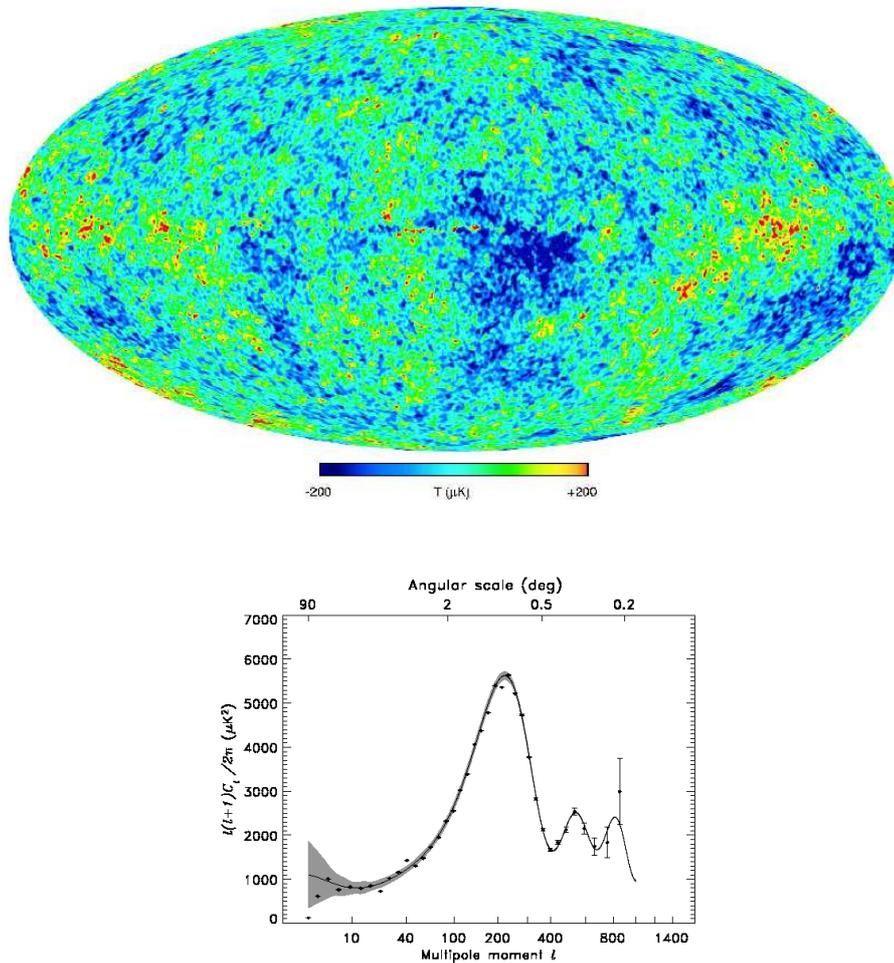


FIG. 3.4 – En haut, une carte des anisotropies du ciel micro-onde est montrée. En bas, nous présentons le spectre des fluctuations en fonction des harmoniques sphériques ℓ . Une harmonique ℓ correspond environ à un angle $\theta = \pi/\ell$.

Laissez moi entrer un peu plus en détail dans l'expérience WMAP[5, 55] qui a été commentée dans les journaux en février 2003 : le *CMB* est un rayonnement

qui a été émis quand l'univers s'est refroidi à une température $T_{\text{rec}} \simeq 3000K$ et les électrons et protons se sont (re)combinés en hydrogène neutre. A ce moment l'univers est devenu transparent pour le rayonnement avec son spectre thermique. Nous discuterons la recombinaison en détail dans le paragraphe 4.4. Ce qui est surtout important ici est que ce rayonnement très isotrope montre néanmoins de petites fluctuations d'une amplitude de l'ordre de quelque 10^{-5} . On suppose que ces fluctuations sont des reliques de fluctuations quantiques engendrées pendant une phase inflationnaire (voir chap. 5). Si un tel processus (ou quelque chose similaire) a engendré des fluctuations à des échelles beaucoup plus large que l'échelle de Hubble, H^{-1} à ce temps, ceci a conduit à des fluctuations acoustiques dans la densité du plasma photon/baryon. Les fluctuations dans la température du *CMB* représentent alors une 'photo' de ces fluctuations au moment de la recombinaison. Pour les modèles les plus simples, les fluctuations sont des simples ondes cosin,

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = A \cos(c_s k \eta) , \quad (3.31)$$

où η est le temps conforme et $c_s \sim 1/\sqrt{3}$ est la vitesse du son dans le plasma. La distance entre le premier maximum et le minimum suivant au moment de la recombinaison correspond alors à l'échelle (co-mobile) $\lambda_{\text{max}} = \pi/k_{\text{max}} = c_s \eta_{\text{rec}}$. Dans la figure 3.4 nous voyons que la distance entre le premier et le deuxième pic (comme entre le deuxième et le troisième) est environ de $\Delta\ell \simeq 300$. Ceci correspond à $\theta = c_s \eta_{\text{rec}}/d_A \simeq \pi/300$. Avec $\eta_{\text{rec}} \simeq 248\text{Mpc}$ (voir plus loin), on obtient $d_A \simeq 1.4 \times 10^4\text{Mpc}$. Un petit calcul montre que ceci est en très bon accord avec $\Omega_m = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$ et donc $\Omega_\kappa = 0$. Une analyse statistique des données de l'expérience WMAP montre que la courbure spatiale est très faible, $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1 - \Omega_\kappa \simeq 1 \pm 0.02$. Pour obtenir cette valeur il faut fixer la constante de Hubble à $h = 0.72 \pm 0.8$, la valeur obtenue dans le 'Hubble space telescope key project' par mesures directes [18].

Pour mieux représenter la forte dépendance de la distance angulaire par rapport à la courbure, nous avons encore illustré des lignes à distance angulaire constante à la surface de dernière diffusion (recombinaison) dans le plan $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$ dans la figure 3.5.

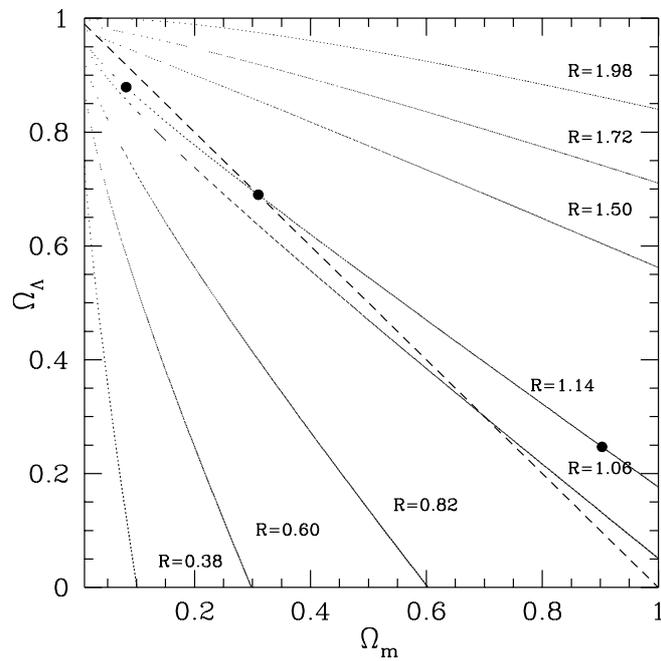


FIG. 3.5 – Les courbes de $d_{rec}(\Omega_m, \Omega_\Lambda) = \text{constant}$, où d_{rec} est la distance angulaire à la surface de dernière diffusion, $z \sim 1100$, sont indiquées dans le plan Ω_m, Ω_Λ . La valeur R est le rapport $R = d_{rec}(\Omega_m, \Omega_\Lambda)/d_{rec}(1, 0)$. Notez que $R = \text{const.}$ est assez similaire aux lignes $\Omega_m + \Omega_\Lambda = \text{const.}$ La ligne $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ est aussi indiquée (traits tillés). Figure tirée de Trota (2001) [61]

3.3 Age de l'univers

Les équations cosmologiques permettent de dériver une expression fort utile reliant l'âge de l'univers t_0 avec la constante de Hubble H_0 et le paramètre de décélération q_0 , autrement dit avec les paramètres de densité Ω_m et Ω_Λ .

Récrivons tout d'abord (3.2) comme suit,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0}\right)^2 = -\frac{k}{a_0^2} + \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_r)\frac{a^2}{a_0^2} + \frac{\Lambda}{3a_0^2} \quad (3.32)$$

avec $\rho_m = \rho_{m0}(a_0/a)^3$, $\rho_r = \rho_{r0}(a_0/a)^4$ et

$$\frac{8\pi G}{3}\rho_{m0} = H_0^2\Omega_m, \quad \frac{8\pi G}{3}\rho_{r0} = H_0^2\Omega_r, \quad \Lambda/3 = H_0^2\Omega_\Lambda, \quad -\frac{k}{a_0^2} = H_0^2\Omega_k$$

il vient

$$-\frac{dz}{dt} = (1+z)^2 H_0 [\Omega_k + (1+z)\Omega_m + (1+z)^2\Omega_r + (1+z)^{-2}\Omega_\Lambda]^{1/2}, \quad (3.33)$$

où nous avons utilisé

$$\frac{a}{a_0} = \frac{1}{z+1}, \quad \text{et donc} \quad \frac{\dot{a}}{a_0} = -\frac{\dot{z}}{(z+1)^2}.$$

Nous résolvons l'éq. (3.33) pour dt , puis intégrons. On obtient

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)[(1+z)^2\Omega_k + (1+z)^3\Omega_m + (1+z)^4\Omega_r + \Omega_\Lambda]^{1/2}} \quad (3.34)$$

Dans le cas d'un univers critique avec $\Omega_\Lambda = 0$ et $\Omega_r \ll \Omega_m = 1$, l'intégrale peut être effectuée aisément,

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)^{5/2}} = \frac{1}{H_0} \frac{2}{3} (1+z)^{-3/2} \Big|_0^\infty = \frac{2}{3H_0}. \quad (3.35)$$

Dans les autres cas, l'intégrale doit être calculée numériquement. Si le contenu de l'univers est connu, alors t_0 et H_0 sont directement reliés par l'équation (3.34). Notez que $\Omega_k + \Omega_\Lambda + \Omega_m + \Omega_r = 1$ et $\Omega_r \sim 10^{-5}$ est trop petit pour influencer le résultat. Une bonne approximation consiste alors à poser

$$H_0 t_0 = \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)[(1+z)^2(1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda) + (1+z)^3\Omega_m + \Omega_\Lambda]^{1/2}}. \quad (3.36)$$

L'âge de l'univers peut être estimé à partir de l'étude des propriétés observables des étoiles, des amas globulaires ou par la nucléocosmochronologie (cf. chapitre 2). Avec les valeurs de l'expérience WMAP pour Ω_Λ et Ω_m on trouve [54]

$$H_0 t_0 = (0.995 \pm 0.15). \quad (3.37)$$

Avec $H_0 = h/(0.97776 \times 10^{10} \text{ ans})$ ça donne un âge de l'univers de $t_0 = (1.37 \pm 0.2) \times 10^{10} \text{ ans}$. Ce résultat est en bon accord avec d'autres estimations de l'âge de l'univers.

3.4 Quelques solutions explicites

Ici nous présentons quelques solutions simples des équations de Friedmann qui ont une relevance physique. D'autres seront discutées dans les exercices.

3.4.1 Univers jeune

Etudions tout d'abord le comportement des solutions lorsque $t \rightarrow 0, a \rightarrow 0$, toujours sous l'hypothèse que le contenu matériel est composé de rayonnement, de matière non-relativiste et d'une éventuelle constante cosmologique. Si a est suffisamment petit, le terme $\rho_r \propto a^{-4}$ domine par rapport à $\rho_m \propto a^{-3}$, Λ et $k \cdot a^{-2}$ dans l'éq. (3.2). Ainsi, pour $t \rightarrow 0$, la première équation de Friedmann peut être approximée par

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_r \propto \frac{8\pi G}{3}a^{-4}.$$

En prenant la racine carrée à gauche et à droite, l'équation à résoudre est $a\dot{a} = \text{const.}$, de solution

$$a(t) \propto t^{1/2}. \quad (3.38)$$

Ainsi, pour un univers dominé par le rayonnement (univers jeune, $z > 10^4$, $t < 10^3$ yr), le facteur d'échelle croît comme $t^{1/2}$. Exprimé en temps conforme, $d\eta = a^{-1}dt$, on obtient $a \propto \eta$.

Dans un univers en décélération c'est-à-dire avec $\rho + 3p > 0$, on a toujours $tH(t) < 1$.

3.4.2 Univers dominé par la matière non-relativiste

De nos jours, la densité de matière non-relativiste ρ_m est beaucoup plus importante que la densité de matière relativiste ρ_r . On peut donc négliger ρ_r , mais la contribution de la courbure $k \cdot a^{-2}$ et la constante cosmologique doivent être prise en compte. Posons

$$\frac{8\pi G}{3}\rho_m a^3 = C = \Omega_m H_0^2 a_0^3 = \begin{cases} \frac{\Omega_m}{H_0 |\Omega_k|^{3/2}} = \frac{2q_0}{H_0 |1-2q_0|^{3/2}} & \text{si } \Omega_k \neq 0 \\ \Omega_m H_0^2 & \text{si } \Omega_k = 0 \text{ et } a_0 = 1. \end{cases} \quad (3.39)$$

Pour la troisième égalité nous avons utilisé $|\Omega_k| = 1/(H_0^2 a_0^2)$, si $\Omega_k \neq 0$ et pour la dernière égalité que $2q_0 = \Omega_m = 1 - \Omega_k$ dans le cas $\Omega_\Lambda = 0$.

Si l'on substitue cette relation dans l'équation (3.2) et que l'on multiplie par a^2 , on obtient

$$\dot{a}^2 = -k + \frac{C}{a} + \frac{1}{3}\Lambda a^2, \quad (3.40)$$

qui est l'équation à résoudre dans le cas d'un univers avec constante cosmologique et matière non-relativiste. Comme $\rho_m \geq 0$, la constante C est non-négative.

Nous allons tout d'abord chercher des solutions avec constante cosmologique nulle pour chacune des différentes valeurs spécifiées par le paramètre de courbure, $k = 0, \pm 1$.

Modèle euclidien, $k = 0$: Pour un espace dont les sections spatiales sont plates, (3.40) se réduit à

$$\dot{a}^2 = \frac{C}{a}.$$

Avec la condition $a(0) = 0$, la solution est immédiate :

$$a(t) \propto t^{2/3}. \quad (3.41)$$

Cette solution est appelé l'univers Einstein–de Sitter.

Exprimé en temps conforme, $d\eta = a^{-1}dt$, la solution est $a \propto \eta^2$. L'attraction gravitationnelle ne peut compenser l'expansion. L'univers s'étend indéfiniment en ralentissant, de telle sorte que $\dot{a} \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow \infty$.

L'expression pour le facteur d'échelle ci-dessus nous permet d'estimer l'âge de l'univers (en supposant que notre univers est proche du cas euclidien). En effet,

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3} \frac{1}{a}.$$

Avec $H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, nous avons $H_0^{-1} = 9.8 \times 10^9 h^{-1} \text{ yr}$ et

$$t_0 = \frac{2}{3} \frac{1}{H_0} = 6.5 \times 10^9 h^{-1} \text{ yr}. \quad (3.42)$$

C'est l'équation (3.35) comme il se doit.

Modèle sphérique, $k = 1$: Pour un espace dont la courbure des sections spatiales est positive, (3.40) devient

$$\dot{a}^2 = \frac{C}{a} - 1.$$

Lorsque $t \rightarrow 0$, $a \ll C$ et le membre de droite est positif. Pour un univers en expansion, $\text{sgn}(\dot{a}) \geq 0$ et a est une fonction croissante. Lorsque $a \geq C$, le membre de droite est négatif et il n'y a pas de solution. Ainsi, le facteur d'échelle, après avoir atteint le point $a = C$, décroît à nouveau et atteint le point $a = 0$ ("Big-Crunch") en un temps fini. $\text{sgn}(\dot{a}) \leq 0$ pendant la période de contraction.

Cette équation peut être intégrée en effectuant la substitution $a = C \sin^2 \theta$. Elle se transforme alors en

$$2C = \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{dt}{d\theta},$$

dont la solution (sous forme paramétrique) est

$$\begin{cases} t = C(\theta - \cos \theta \sin \theta) \\ a = C \sin^2 \theta. \end{cases} \quad (3.43)$$

C'est l'équation paramétrique d'une cycloïde. Le "big-crunch" est atteint après un temps $t = \pi C$. Les sections spatiales sont fermées, finies, mais sans bord. Lorsque $\theta \ll 1$, le développement au premier ordre de (3.43) conduit à (3.41) : pour $t \ll t_0$, les solutions convergent vers le cas $k = 0$ ².

² $\Omega = 1$ est un attracteur si l'on inverse la flèche du temps.

Modèle hyperbolique, $k=-1$: Pour une géométrie hyperbolique, (3.40) se réduit à

$$\dot{a}^2 = \frac{C}{a} + 1.$$

Contrairement au cas elliptique, le membre de droite ne peut être négatif et $\text{sgn}(\dot{a}) \geq 0$ quelque soit a . Pour $a \rightarrow \infty$, \dot{a} tend vers 1.

Cette équation peut être résolue en substituant la variable ψ définie par $a = C \sinh^2 \psi$. La solution paramétrique est alors

$$\begin{cases} t &= C (\cosh \psi \sinh \psi - \psi) \\ a &= C \sinh^2 \psi. \end{cases} \quad (3.44)$$

Pour de petites valeurs de ψ , on retrouve la solution $a \propto t^{2/3}$.

3.4.3 Constante cosmologique non nulle, $\Lambda \neq 0$.

Dans le cas où $C = k = 0$ et $\Lambda > 0$, l'équation (3.40) se transforme en

$$\dot{a}^2 = \frac{1}{3} \Lambda a^2,$$

de solution

$$a(t) = \exp(Ht), \quad H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \quad (3.45)$$

C'est le modèle de Sitter de l'univers. Un univers vide dominé par une constante cosmologique telle que $p = -\Lambda$, $\rho = \Lambda$. La croissance du facteur d'échelle est exponentielle.

Ce modèle peut être utilisé pour décrire une phase primordiale de l'univers, appelée **inflation**, pendant laquelle le volume de l'univers augmente considérablement. Le scénario inflationnaire a été introduit pour résoudre certains problèmes inhérents aux cosmologies construites à partir des modèles de Friedmann-Lemaître et de la physique des particules (cf. chapitre 5, entièrement consacré à l'inflation).

Lorsque C et k sont non nuls, il faut considérer (3.40) dans sa globalité,

$$\dot{a}^2 = -k + \frac{C}{a} + \frac{1}{3} \Lambda a^2 = G(a). \quad (3.46)$$

Comme il n'existe pas de solution analytique, nous allons traiter le problème de manière qualitative et esquisser le comportement des solutions pour les trois types de géométrie.

1. $k = -1$.

- $\Lambda > 0$: la fonction $G(a)$ est toujours positive (pour $a > 0$) et possède un minimum en $a_{min} = (3C/2\Lambda)^{1/3}$. Pour de petites valeurs de a (donc de t), (3.46) se réduit au cas hyperbolique avec constante cosmologique nulle. La solution (3.44) convergeant asymptotiquement vers la solution euclidienne, nous avons $a \propto t^{2/3}$ pour $a \ll C/k$. Lorsque $a \gg a_{min}$, la constante cosmologique domine et $a \propto \exp(\sqrt{\Lambda/3}t)$.

- $\Lambda < 0$: $G(a)$ est une fonction décroissante, positive dans le domaine $0 \leq a \leq a_c$ et négative pour $a \geq a_c$, où a_c est la racine réelle de l'équation $G(a) = 0$. Le comportement de a est analogue au cas elliptique, avec un maximum en $a = a_c$.

2. $k = 0$.
 - $\Lambda > 0$: de manière analogue au cas $k = -1$, $G(a)$ est toujours positive et présente un minimum en $a_{min} = (3C/2\Lambda)^{1/3}$. Une solution est alors $a^3 = (3C/2\Lambda)(\cosh(\sqrt{3\Lambda}t) - 1)$.
 - $\Lambda < 0$: nous sommes également confronté à la même situation que dans le cas $k = -1$. Une solution explicite est $a^3 = (-3C/2\Lambda)(1 - \cos(\sqrt{-3\Lambda}t))$.
3. $k = +1$: la fonction $G(a)$ peut se factoriser en $G(a) = P(a)/a$, où $P(a)$ est un polynôme du troisième degré, qui possède une ou trois solutions réelles (voir figure 3.6) : Dans le domaine hachuré du plan $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$, $P(a)$ a une racine réelle mais pour une valeur négative du facteur d'échelle. Un univers dans ce domaine est alors en expansion éternelle. Dans le domaine blanc à haute constante cosmologique, le facteur d'échelle a un minimum dans le passé. Un tel univers n'émerge donc pas d'un 'big bang'. Par contre, il se trouve en expansion suite à une phase de contraction éternelle. Ceci est appelé un "univers à rebond(s)". Pour des valeurs réalistes de Ω_m (≥ 0.01), on trouve que le décalage maximal d'un tel univers est de $z_{max} \lesssim 4$, ce qui n'est pas en accord avec l'existence de galaxies avec $z \sim 10$ ou même du *CMB* (voir chapitre suivant). De plus amples détails seront donnés dans les exercices.

3.4.4 Autres modèles cosmologiques

Modèle d'Einstein : il satisfait au principe cosmologique, avec $k = 1$ (elliptique). Il a la particularité d'être **statique**, c'est-à-dire $a(t) = const.$

Basé sur l'idée que l'univers devrait être immuable, Einstein a modifié ses équations en introduisant un terme proportionnel à $g_{\mu\nu}$ tel que ses équations acceptent une solution statique. (Au début du XX siècle, aucune observation n'indiquait un univers en expansion!)

Suivant Einstein, nous posons $\dot{a} = \ddot{a} = 0$, $k = 1$ et $p = 0$ dans (3.2) et (3.1),

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{a^2} - \Lambda \\ \frac{8\pi\rho}{3} &= \frac{1}{a^2} - \frac{\Lambda}{3}. \end{aligned}$$

Pour compenser l'effondrement de la matière ($\rho \neq 0$) sous l'effet de l'attraction gravitationnelle, il est bien clair que Λ doit être non nul. Sous cette condition, le facteur d'échelle peut être maintenu constant, conduisant à un univers statique avec

$$\Lambda = 4\pi\rho = \frac{1}{a^2}.$$

Le modèle d'Einstein a été abandonné suite à la découverte de Hubble. D'autre part, c'est un modèle instable : une petite diminution de ρ entraîne une augmentation de a qui amplifie encore la décroissance de ρ .

Modèle stationnaire de Hoyle (1960) : il satisfait au **principe cosmologique parfait** (isotropie, homogénéité et $H \equiv \dot{a}/a = const.$), conduisant à une croissance exponentielle,

$$a(t) \propto \exp(Ht).$$

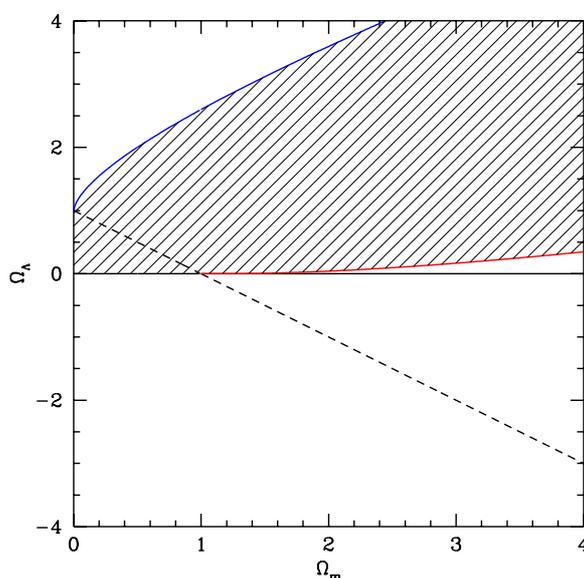


FIG. 3.6 – Nous illustrons ici les différents comportements des univers matière/constant cosmologique : pour des paramètres dans la région ombragée, l'univers est en expansion perpétuelle. Dans la région supérieure gauche, les solutions correspondent à des univers en rebond, tandis que pour des paramètres dans la région inférieure, les univers re-collapsent. Notez que, pour une courbure positive (en dessus de la courbe en traits tillés), les trois comportements sont possibles suivant les valeurs de $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$. Les courbes séparatrices (pour $k > 0$) distinguent uniquement les régions des trois zéros réels de P (dans les régions rebond et re-collapsent pour $\Lambda > 0$) et un zéro réel négatif (dans la région ombragée).

L'univers est homogène et isotrope non seulement dans sa partie spatiale, mais aussi dans sa partie temporelle : en dehors des fluctuations locales, cet univers est identique pour tous les observateurs, et ce quelque soit l'époque choisie.

De plus, comme le rayon caractérisant la courbure est proportionnel à a^2 , il faut que $k = 0$. Introduisant ce résultat dans (3.2), la densité d'un tel univers est constante avec le temps ce qui, à cause de l'expansion, requiert une **création continue de matière**, difficile à justifier physiquement.

Les observations des galaxies lointaines montrent qu'elles sont plus bleues, et que la constante de Hubble dépend du temps, en totale contradiction avec l'hypothèse à la base de ce modèle.

3.5 Densité de l'univers et masse cachée

Comme nous l'avons vu dans les sections précédentes, l'accès aux différents observables qui caractérisent l'univers dans lequel nous vivons (comme son âge, sa géométrie, ...) est conditionné par la détermination des différents paramètres cosmologiques (H_0, Ω_X) . Ici, X caractérise les composantes de notre univers :

le fluide cosmique Ω_f (lui-même subdivisé en baryons, photons, neutrinos, ...) et le "vide", Ω_Λ . Rappelons que ces paramètres de densités sont rapportés à la densité critique,

$$\begin{aligned}\Omega &\equiv \rho/\rho_{c0} \\ \rho_{c0} &\equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.879h^2 \times 10^{-29} \text{ gcm}^{-3}.\end{aligned}$$

A la surprise générale, les observations actuelles montrent que l'énergie du vide occupe une place prépondérante par rapport à celle de la matière. Une grande partie de la matière est d'ailleurs invisible à nos yeux (appelée matière noire ou *Dark Matter*).

$$\begin{array}{ll} \text{matière visible} & \Omega_{vis} \cong 0.01, \\ \text{baryons (déduite de la nucléosynthèse)} & \Omega_b h^2 = 0.022 \pm 0.002, \quad \Omega_b \cong 0.05, \\ \text{matière noire non-baryonique} & \Omega_{DM} h^2 = 0.11 \pm 0.01 \end{array}$$

Les proportions préférées par les observations actuelles sont les suivantes (d'après l'article de l'expérience WMAP [54, 55]) :

(1) 75% de constante cosmologique ou d'énergie du vide, Ω_Λ : L'état fondamental (ou *vacuum*) que prédisent les différentes théories des champs est saturé de particules virtuelles qui produisent une énergie du vide non nulle et une pression négative.

(2) 20% de matière noire non-baryonique Ω_{DM} : Lorsque l'on parle de matière noire, on fait la distinction entre

matière noire non-baryonique relativiste (hot dark matter HDM)

- Le rayonnement $3K$. La densité d'énergie ρ_γ mesurée est cependant beaucoup trop faible,

$$\rho_\gamma \sim \frac{\sigma T^4}{c^2} \sim 4.8 \times 10^{-34} \text{ gcm}^{-3} \ll \rho_{c0}.$$

- Les neutrinos cosmologiques. Comme nous le verrons dans le chapitre 4, il subsiste actuellement un fond de neutrinos analogue au rayonnement $3K$,

$$\begin{array}{ll} \text{masse nulle} & \rho_\nu = N_\nu \times 10^{-34} \text{ cm}^{-3}, \\ \text{masse non-nulle} & \rho_\nu = \frac{N_\nu m_\nu}{100 \text{ eV}} \cdot \rho_{c0} \end{array}$$

Pour expliquer le déficit, il faut des masses de plusieurs eV. Les neutrinos légers ont l'avantage de ne pas introduire de nouvelles particules. Mais ils ne semblent pas en accord avec les modèles de la formation des structures dans l'univers. Dans l'expérience Super-Kamiokande et autres, des oscillations des neutrinos ont été détectées. Ils impliquent une différence de masse de l'ordre $\Delta m_{13}^2 \simeq 2.4 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$ (et une deuxième de $\Delta m_{13}^2 \simeq 8 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$), mais il n'est pas clair comment Δm^2 est lié à la masse du neutrino le plus lourd. Il est par contre certain que $m_1 > 5 \times 10^{-2} \text{ eV}$, la plus grande des différences de masse, et $m_2 > 0.9 \times 10^{-3} \text{ eV}$. Donc actuellement, à $T_0 \simeq 2.7 \text{ K} \simeq 2.4 \times 10^{-4} \text{ eV}$ ces neutrinos sont non-relativistes et contribuent environ $\Omega_{\nu 0} \gtrsim 10^{-4}$.

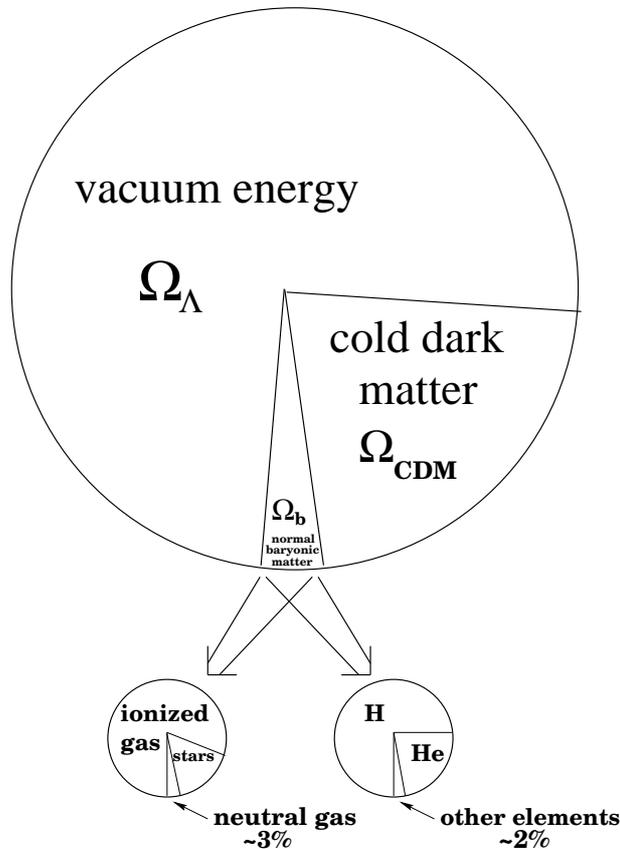


FIG. 3.7 – De nos jours, Ω_Λ (75%) contrôle la dynamique de l’univers, causant son accélération. Ω_{DM} (20%) agit dans le sens opposé, freinant l’évolution de l’univers (i.e., diminuant le taux d’expansion), mais Ω_{DM} ne peut pas contre-carrer Ω_Λ . Ω_b (5%) n’a qu’une influence négligeable, poussé et tirillé par les potentiels gravitationnels dûs aux variations spatiales dans la densité de CDM. La plupart des physiciens étudient en particulier les 5% du contenu de l’univers composé de matière baryonique. 98% de cette matière baryonique est constituée d’hydrogène ou d’hélium, dont 80% est difficile à détecter car sous forme de gaz ionisé.

matière noire non-baryonique non-relativiste (cold dark matter CDM)

- Les axions, qui ont été introduits pour résoudre le problème de la violation de symétrie CP . Aucune expérience n’a encore confirmé l’existence de telles particules.
- Les théories super-symétriques ($SUSY$) prédisent l’existence de particules massives inter-agissant très faiblement avec leur environnement ($WIMP$ pour *Weakly interacting massive particle*).

Les dernières observations donnent $\Omega_{DM}h^2 = 0.11 \pm 0.01$, correspondant à $22 \pm 7\%$ de l’univers.

(3) 5% de matière baryonique Les simulations du processus de la nucléosynthèse confrontées aux mesures de la densité de deutérium (à partir des spectres des quasars) impliquent $\Omega_b h^2 = 0.02 \pm 0.002$, soit $5 \pm 2\%$ de l'univers. Cette valeur est aussi trouvée avec l'expérience WMAP [54, 55], de façon complètement indépendante. En terme de composition chimique, cette matière baryonique est constituée de 75% d'hydrogène, 23% d'hélium et 2% d'autres éléments (*C, N, O, Si, Fe*...). En terme de phase, 80% est sous forme de gaz chaud ionisé, 17% sous forme d'étoile et 3% sous forme de gaz neutre et de poussières. Une grande partie aussi de la matière baryonique est noire,

matière noire baryonique

- Les étoiles sombres, comme les planètes massives de type "Jupiter" avec une masse dans l'intervalle $0.001M_\odot \leq M \leq 0.01M_\odot$, les naines brunes ($0.01M_\odot \leq M \leq 0.08M_\odot$), les naines rouges ($0.08M_\odot$ et plus) et les naines blanches (WD). Ces étoiles émettent peu de lumière, ce qui rend leur détection difficile. Malheureusement, leurs fréquences sont encore trop peu connues pour que l'on puisse déterminer précisément leur contribution à la densité de l'univers par observation directe. La matière noire baryonique fut aussi cherchée par ces effets de type micro-lentille (programmes *MACHO* et *EROS*). Ces observations ont apportées des limites sérieuses pour des 'massive dark halo objects'. Elles sont compatibles avec des purs effets 'background'.
- L'*H* ionisé.
- L'*H* froid sous forme de H_2 . (Son existence est une hypothèse.)

3.5.1 Expression de Mattig pour la distance métrique

Avec les équations cosmologiques, il est possible de dériver une relation exacte pour la distance métrique $a_0 r$, expression qui se révèle fort utile dans le cas des tests cosmologiques (cf. chapitre 2). Malheureusement, elle n'est valable que dans le cas $\Lambda = 0$ qui ne semble pas réalisé dans l'univers actuel, mais nous la présentons quand même. Dans un univers avec constante cosmologique, la formule de Mattig est simplement remplacée par l'intégrale numérique donné dans l'éq. (3.29).

Considérons le mouvement de photons le long de trajectoires radiales, dont les coordonnées sont $(t(s), r(s), 0, 0)$ (s paramétrisant la ligne d'univers). En posant $ds^2 = 0$, la métrique (1.22) conduit à

$$\frac{dt^2}{ds^2} - a(t)^2 \frac{dr^2}{ds^2} \frac{1}{1 - kr^2} = 0,$$

soit

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \chi = \begin{cases} \arcsin r & k = +1 \\ r & k = 0 \\ \arg \sinh r & k = -1 \end{cases}, \quad (3.47)$$

où t_1 est le temps de l'émission (source S) et t_0 le temps de la réception (observateur O). Dans la limite des faibles redshifts, $\chi(r) \rightarrow r$ quelque soit k . En

posant $\vartheta = 2\theta$, pour le cas elliptique $k = 1$, l'équation (3.43) peut être écrite sous la forme

$$a(t) = \frac{C}{2}(1 - \cos \vartheta) \quad (3.48)$$

$$t = \frac{C}{2}(\vartheta - \sin \vartheta), \quad (3.49)$$

Prenant la différentielle de la coordonnée t , il vient

$$dt = \frac{C}{2}(1 - \cos \vartheta)d\vartheta.$$

Nous pouvons maintenant intégrer l'expression

$$\begin{aligned} \arcsin r &= \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \\ &= \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_0} \frac{(1 - \cos \vartheta)}{(1 - \cos \vartheta)} d\vartheta \\ &= \vartheta_0 - \vartheta_1, \end{aligned}$$

Isolant le terme $\cos \theta$ dans la paramétrisation du facteur d'échelle (3.48), avec C de l'éq. (3.39) avec la relation $1/a_0^2 = H_0^2(2q_0 - 1)$ pour $k = 1$ on a

$$\cos \vartheta = 1 - \frac{a(t)}{a_0} \frac{2q_0 - 1}{q_0}$$

ce qui nous permet d'exprimer les limites d'intégration ϑ_0 et ϑ_1 comme

$$\vartheta_0 = \arccos \left(1 - \frac{2q_0 - 1}{q_0} \right) \quad (3.50)$$

$$\vartheta_1 = \arccos \left(1 - \frac{2q_0 - 1}{(1+z)q_0} \right), \quad (3.51)$$

où nous avons pris en considération le fait que $a(t)/a_0 = (1+z)^{-1}$. Pour calculer le comportement de la variable r en fonction de la paramétrisation ϑ , il suffit d'inverser la relation $\arcsin r = \vartheta_0 - \vartheta_1$, soit

$$r = \sin(\vartheta_0 - \vartheta_1) = \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_1 - \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_0.$$

Les expressions de $\sin \vartheta_0$ et $\sin \vartheta_1$ peuvent être dérivées à partir de (3.51) et (3.51). Nous avons ainsi

$$\begin{aligned} \sin \vartheta_0 &= (1 - \cos^2 \vartheta_0)^{1/2} \\ &= \left[1 - \left(1 - \frac{2q_0 - 1}{q_0} \right)^2 \right]^{1/2} \\ &= \left(1 - 1 - \frac{(2q_0 - 1)^2}{q_0^2} + \frac{2(2q_0 - 1)}{q_0} \right)^{1/2} \\ &= \frac{(2q_0 - 1)^{1/2}}{q_0} (-(2q_0 - 1) + 2q_0) \\ &= \frac{(2q_0 - 1)^{1/2}}{q_0}. \end{aligned}$$

Le produit $\sin \vartheta_0 \cos \vartheta_1$ est donc égal à

$$\sin \vartheta_0 \cos \vartheta_1 = \frac{(2q_0 - 1)^{1/2}}{q_0} \left(1 - \frac{(2q_0 - 1)}{(1+z)q_0} \right) = \frac{(2q_0 - 1)^{1/2}}{q_0} \frac{1 + q_0 z}{(1+z)q_0} \quad (3.52)$$

On dérive $\sin \vartheta_1$ de la même manière,

$$\sin \vartheta_1 = \frac{(2q_0 - 1)^{1/2}}{(1+z)q_0} (2q_0 z + 1)^{1/2}$$

ce qui nous donne

$$\sin \vartheta_1 \cos \vartheta_0 = \frac{(2q_0 - 1)^{1/2}}{(1+z)q_0} (2q_0 z + 1)^{1/2} \frac{1 - q_0}{q_0}. \quad (3.53)$$

L'expression de la distance physique r devient ainsi

$$\begin{aligned} r &= \frac{(2q_0 - 1)^{1/2}}{q_0} \frac{q_0 z - q_0 + 1}{(1+z)q_0} - \frac{(1 - q_0)}{q_0} \frac{(2q_0 - 1)^{1/2}}{(1+z)q_0} (2q_0 z + 1)^{1/2} \\ &= \frac{(2q_0 - 1)^{1/2}}{(1+z)q_0^2} \left[q_0 z + (q_0 - 1) \left(-1 + (2q_0 z + 1)^{1/2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Utilisant à nouveau $2q_0 - 1 = 1/a_0^2 H_0^2$, la distance métrique au temps t_0 est donnée par

$$a_0 r = \frac{1}{H_0 q_0^2 (1+z)} \left[q_0 z + (q_0 - 1) \left((2q_0 z + 1)^{1/2} - 1 \right) \right], \quad \Lambda = 0. \quad (3.54)$$

C'est l'expression de Mattig. Les calculs pour $k = 0$ et $k = -1$ conduisent au même résultat. C'est une relation importante de la cosmologie observationnelle. De (3.54) on obtient les expressions pour la distance angulaire, $d_A = a_0 r / (1+z)$ et pour la distance de luminosité, $d_L = a_0 r (1+z)$ dans le cas $\Lambda = 0$:

$$d_A = \frac{1}{H_0 q_0^2 (1+z)^2} \left[q_0 z + (q_0 - 1) \left((2q_0 z + 1)^{1/2} - 1 \right) \right], \quad (3.55)$$

$$d_L = \frac{1}{H_0 q_0^2} \left[q_0 z + (q_0 - 1) \left((2q_0 z + 1)^{1/2} - 1 \right) \right], \quad \Lambda = 0. \quad (3.56)$$

Chapitre 4

L'histoire thermique de l'univers

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux interactions entre les différentes composantes de la matière (baryons, photons, ...). Nous allons supposer que matière et rayonnement sont en équilibre thermique. Cette hypothèse, qui est à la base de la cosmologie physique, a été introduite par Lemaître. Elle est tellement fructueuse que Lemaître est souvent appelé le fondateur de la cosmologie physique. L'équilibre thermique est certainement justifié tant que les réactions microscopiques sont beaucoup plus rapides que l'expansion. Nous verrons que ceci est vérifié dans le cas d'un fluide de baryons, d'électrons et de photons tant que la matière est ionisée, autrement dit avant la recombinaison.

Après l'introduction de quelques concepts généraux, nous effectuons un voyage de retour vers le passé ($t \searrow$, $T \nearrow$). L'histoire de l'univers primordial pouvant être caractérisée par les événements suivants (voir tableau) : la **recombinaison** ($t \sim 10^5$ années, $T \sim 3000\text{K}$), la **nucléosynthèse** ($t \sim 3\text{min}$, $T \sim 0.1\text{MeV}$) et le **gel des neutrinos** ($t \sim 1\text{sec}$, $T \sim 1\text{MeV}$), la transition électrofaible qui est peut-être liée au problème de l'asymétrie baryonique ($t \sim 10^{-11}\text{sec}$, $T \sim 200\text{GeV}$), et la transition à une unification de toutes les interactions non-gravitationnelles, GUT à une température de l'ordre de $T \sim 10^{16}\text{GeV}$ ¹ (voir tableau).

Nous montrerons pour finir que (a) l'hypothèse de l'adiabaticité de l'expansion et (b) l'hypothèse selon laquelle les théories GUT (*Grand Unified Theory*) décrivent correctement les interactions non-gravitationnelles conduisent à des contradictions (problème des monopoles).

Les premières phases de l'univers constituent un excellent laboratoire pour la physique des particules à haute énergie (énergie beaucoup plus élevée que celle des plus puissants accélérateurs). Cette liaison entre la physique des hautes énergies et la cosmologie a engendré toute une nouvelle direction de recherche, l'étude de "l'univers primordial" (*astro-particle physics, particle-cosmology* ...)

¹Cette dernière température doit être comparée avec l'énergie atteinte dans l'accélérateur le plus puissant en construction actuellement, le 'Large Hadron Collider' (LHC) du CERN, qui sera de $E_{LHC} \sim 10^4\text{GeV}$.

phase, transition	T [K]	E [GeV]	t [s]
échelle de Planck ¹	10^{32}	10^{19}	10^{-43}
brisure de la symétrie 'GUT' ² ?	10^{28}	$10^{15} - 10^{16}$	10^{-35}
brisure de la super-symétrie ?	10^{16}	10^3	10^{-12}
brisure de la symétrie électrofaible ³	10^{15}	200	2×10^{-10}
quark \rightarrow nucléons ⁴	10^{12}	0.2	2×10^{-4}
découplage des neutrinos ⁵	10^{10}	10^{-3}	1
annihilation électron-positron ⁶	5×10^9	0.5×10^{-3}	5
nucléosynthèse ⁷	10^8	10^{-4}	~ 100
recombinaison ⁸	3100	2.6×10^{-10}	10^{13}
formation des grandes structures			$\sim 10^{16} - 10^{17}$
aujourd'hui		2.3×10^{-13}	4×10^{17}

(1) C'est l'échelle à laquelle les effets quantiques de la gravitation ne peuvent plus être négligés (non confirmé expérimentalement).

(2) Unification de la force forte (entre les quarks, $SU(3)$) et de l'interaction électrofaible, $SU(2) \times U(1)$ (cette unification n'est pas confirmée expérimentalement).

(3) A cette échelle, les bosons W^\pm et Z obtiennent leur masse et la symétrie électrofaible $SU(2) \times U(1)$ est brisée en $U(1)$ électromagnétique.

(4) Les quark désormais libres se lient en nucléons, brisure de la symétrie chirale, transition de phase du confinement.

(5) Le libre parcours moyen de l'interaction faible devient plus grand que la longueur de Hubble et les neutrinos cessent d'interagir avec le reste de la matière.

(6) Désintégration des électrons et des positrons : $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$.

(7) Le deutérium devient stable et pratiquement tous les neutrons présents sont 'brûlés' en ${}^4\text{He}$.

(8) La température de l'univers a suffisamment diminué pour que protons et électrons puissent former des atomes d'hydrogène stables selon la réaction $H^+ + e^- \Rightarrow H + \gamma$. Les photons peuvent se propager librement (c'est le fond de rayonnement cosmique).

4.1 Entropie, expansion et adiabaticité

Nous allons supposer que l'univers est en équilibre thermique. C'est une bonne hypothèse aussi longtemps que les processus de collision sont plus rapides que l'expansion de l'univers (Cette condition est satisfaite dans l'univers primordial, mais pas dans l'univers actuel.). Nous allons voir que dans ce cas, l'expansion de l'univers est adiabatique :

Rappelons tout d'abord que

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T}(dE + pdV),$$

où dS est la différentielle exacte de l'entropie.

Supposons que le fluide cosmologique est composé de diverses particules en équilibre thermique. La densité d'énergie ρ est une fonction de la température T . Avec $dE = d(\rho V)$,

$$dS = \frac{(\rho + p)}{T}dV + \frac{V}{T} \frac{d\rho}{dT}dT,$$

il vient

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T &= \frac{(\rho + p)}{T} \\ \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V &= \frac{V}{T} \frac{d\rho}{dT}. \end{aligned}$$

La condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T}$$

conduit à

$$\frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{1}{T}(\rho + p) \right] = \frac{\partial}{\partial V} \left[\frac{V}{T} \frac{d\rho}{dT} \right],$$

ou encore

$$\frac{dp}{dT} = \frac{1}{T}(\rho + p). \quad (4.1)$$

L'entropie devient

$$\begin{aligned} dS &= \frac{1}{T} d[(\rho + p)V] - \frac{V}{T} \frac{dp}{dT} dT \\ &= \frac{1}{T} d[(\rho + p)V] - \frac{V}{T^2} (\rho + p) dT \\ &= d \left[\frac{V}{T} (\rho + p) \right]. \end{aligned}$$

Ainsi, $S = \frac{V}{T}(\rho + p)$, à une constante additive près. Puisque $V \propto a(t)^3$, l'entropie dans un volume a^3 est

$$S = \frac{a(t)^3}{T} (\rho + p). \quad (4.2)$$

L'équation de conservation (3.10) peut s'écrire

$$a^3 \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} [a^3 (\rho + p)].$$

Utilisant la relation (4.1), il vient

$$a^3 \frac{dT}{dt} \left[\frac{1}{T} (\rho + p) \right] = \frac{d}{dt} [a^3 (\rho + p)].$$

Dérivant S par rapport au temps,

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{1}{T} \frac{d}{dt} [a^3 (\rho + p)] - \frac{a^3 (\rho + p)}{T^2} \frac{dT}{dt} \\ &= \frac{a^3}{T} \frac{dT}{dt} \left[\frac{1}{T} (\rho + p) \right] - \frac{a^3 (\rho + p)}{T^2} \frac{dT}{dt} \\ &= 0. \end{aligned}$$

L'entropie par unité de co-volume est conservée, c'est-à-dire

$$\frac{a^3}{T} (\rho + p) = \text{const.} \Rightarrow dS = 0. \quad (4.3)$$

A présent, la principale contribution à l'entropie S de l'univers provient des photons du fond de rayonnement cosmique (CMB , chapitre 4.5), S_{3K} . Le reste est apporté par la matière non-relativiste, S_* . (Ici nous négligeons les neutrinos qui apportent une contribution importante à l'entropie mais qui ne sont plus en équilibre thermique avec la matière depuis longtemps.)

Dans le cas où l'univers peut être décrit par un mélange de gaz parfait et de rayonnement en équilibre thermodynamique, la pression p et la densité ρ de ce mélange sont

$$\begin{aligned}\rho &= nm + \frac{nk_B T}{\gamma - 1} + a_{SB} T^4 \\ p &= nk_B T + \frac{1}{3} a_{SB} T^4,\end{aligned}$$

où a_{SB} est la constante de Stefan-Boltzmann. Nous allons toujours utiliser la notation a_{SB} afin de ne pas confondre cette constante avec le facteur d'échelle. Dans nos unités usuelles, $k_B = \hbar = c = 1$ que nous adopterons par la suite, on a $a_{SB} = \pi^2/15$. En réintroduisant les constantes k_B , \hbar et c , on trouve

$$a_{SB} = \frac{\pi^2 k_B^4}{15(\hbar c)^3} = 0.76 \times 10^{-14} \text{ erg cm}^{-3} \text{K}^{-4} \quad (4.4)$$

Nous supposons que $T \ll m$ si bien que le nombre total de particules N est conservé, c'est-à-dire $na^3 = \text{const.}$ Insérant les expressions ci-dessus dans l'équation de conservation (3.10) dans la forme $\frac{d}{da}(a^3 \rho) = -3a^2 p$, il vient

$$\frac{d}{da} \left(nma^3 + \frac{na^3}{\gamma - 1} T + a_{SB} a^3 T^4 \right) = -3na^2 T - a_{SB} a^2 T^4.$$

Tenant compte de la conservation des particules, $na^3 = \text{const.}$, le calcul de la dérivée du membre de gauche est immédiat,

$$\frac{na^3}{\gamma - 1} \frac{dT}{da} + 3a_{SB} a^2 T^4 + 4a_{SB} a^3 T^3 \frac{dT}{da} = -3na^2 T - a_{SB} a^2 T^4.$$

Posant

$$\sigma = \frac{4a_{SB} T^3}{3n} \quad (4.5)$$

et divisant l'égalité par $3na^2$, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{1}{3(\gamma - 1)} a \frac{dT}{da} + \sigma a \frac{dT}{da} &= -T - \sigma T \\ \frac{a}{T} \frac{dT}{da} \left(\sigma + \frac{1}{3(\gamma - 1)} \right) &= -(1 + \sigma),\end{aligned}$$

ou

$$\frac{a}{T} \frac{dT}{da} = -\frac{1 + \sigma}{\sigma + \frac{1}{3(\gamma - 1)}}, \quad (4.6)$$

loi de conservation reliant la température T avec le facteur d'échelle a dans le cas d'un mélange de matière et de rayonnement.

Numériquement, on considère $T \simeq 3\text{K}$ (température actuelle du fond de rayonnement cosmique, cf. section 4.5) et $n \simeq 1$ atome d'hydrogène par mètre cube, on obtient $\sigma \sim 10^{10}$. C'est-à-dire que l'éq. (4.6) devient

$$\frac{a}{T} \frac{dT}{da} = -1$$

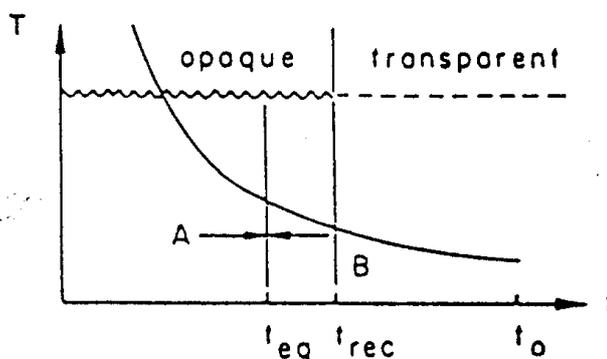


FIG. 4.1 – Diagramme température versus temps de la cosmologie standard. Sont indiqués le présent, t_0 , le temps de dernière diffusion, t_{rec} , et le temps d'égalité de la densité d'énergie de la matière et de la radiation, t_{eq} . L'univers est dominé par la radiation pour $t \leq t_{eq}$ (région A) et par la matière dans la région B. L'univers était opaque pour $t \leq t_{rec}$, puis il est devenu transparent pour les photons du fonds cosmique.

et $T \propto 1/a$, comme dans un univers sans matière non-relativiste. L'entropie de la matière non-relativiste est trop faible pour influencer cette loi. Avec $n \propto 1/a^3$ il suit que $\sigma = \text{const.}$, indépendant du temps.

Nous voulons encore lier σ à l'entropie par particule non-relativiste. Calculons l'entropie du gaz de photons. Nous avons

$$TdS = d(\rho V) + pdV,$$

avec $\rho = a_{SB}T^4$ et $p = \frac{1}{3}a_{SB}T^4$. Alors

$$\begin{aligned} dS &= 4a_{SB}T^2VdT + \frac{4}{3}a_{SB}T^3dV \\ &= d\left(\frac{4}{3}a_{SB}T^3V\right). \end{aligned}$$

L'entropie par unité de volume s est donc $s = \frac{4}{3}a_{SB}T^3$. Ainsi, σ est le rapport entre l'entropie du rayonnement et la densité de matière, autrement dit l'entropie des photons par particule de matière,

$$\sigma = \frac{s_\gamma}{n}. \quad (4.7)$$

Dans le cas d'un univers en expansion adiabatique, cette entropie par particule est conservée si la densité de particules de matière n l'est aussi : $d\sigma = 0$. Nous verrons un peu plus loin que $\sigma \simeq 3.6 \frac{n_\gamma}{n}$ (éq. 4.63), où n_γ est la densité de photons.

Remarques

• σ étant très élevé, le membre de droite de (4.6) est à peu près égal à -1 , et nous retrouvons la loi $T \cdot a = \text{const.}$

• Supposons que $\sigma \gg 1$ à un instant donné (pour $t = t_0$ par exemple) et que la densité de particules soit constante, $na^3 = \text{const.}$ Alors $T \cdot a = \text{const.}$ et $\sigma \sim \frac{T^3}{n} \sim \frac{a^3}{a^3} \sim \text{const.}$ σ étant constant à travers les âges, nous pouvons conclure qu'il était aussi très élevé pendant les premières phases de l'univers (tout au moins à partir de l'annihilation $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$).

• La température T dans l'expression (4.6) est une température thermodynamique.

– Pour un univers opaque, le libre parcours moyen des photons l_γ est beaucoup plus petit que la taille de l'univers, c'est-à-dire

$$l_\gamma \ll H^{-1},$$

matière et rayonnement interagissent fortement et sont en équilibre thermodynamique. Il existe donc une unique température T décrivant à la fois la distribution des photons et celle de la matière. Ceci était certainement le cas pour $t \leq 3 \times 10^5 \text{yr}$ où l'univers était ionisé et la diffusion par électron libre était très importante.

– Dans un univers transparent,

$$l_\gamma \gg H^{-1},$$

matière et rayonnement sont découplés et ne sont plus en équilibre thermodynamique. Il faut donc distinguer la température du rayonnement T_γ de celle de la matière, T_m .

– Pour déterminer le comportement de la température de matière sans rayonnement, T_m , il suffit de faire tendre $\sigma \rightarrow 0$ dans (4.6), ce qui conduit à

$$\frac{a}{T_m} \frac{dT_m}{da} = -3(\gamma - 1).$$

Les particules de matière étant en bonne approximation mono-atomique², $\gamma = \frac{5}{3}$ et $\frac{a}{T_m} \frac{dT_m}{da} = -2$. T_m se comporte comme

$$T_m \cdot a^2 = \text{const.} \Rightarrow T_m \propto a^{-2}. \quad (4.8)$$

Le nombre de particules étant conservé, $n \propto a^{-3}$, et la densité se comporte comme

$$n \propto T_m^{3/2}. \quad (4.9)$$

En effet dans notre univers même après le découplage il reste une fraction de l'ordre de 10^{-5} d'électrons libres. A cause du nombre énorme de photons, ceci suffit pour garder la matière en équilibre thermique avec les photons et on a $T_m = T_\gamma$. Comme nous le verrons, le libre parcours moyen des photons est beaucoup plus élevé que celui des électrons et les

²L'hydrogène atomique est de loin l'élément le plus représenté.

photons sont quasiment libres après le découplage, ce qui n'est pas le cas pour les électrons et donc pour la matière baryonique. Néanmoins, comme la distribution thermique des photons est une fonction de p/T , le décalage de l'impulsion, qui est le seul changement de la fonction de distribution des photons libres, agit comme un 'refroidissement', $T \propto 1/a$, est la distribution thermique reste inchangée avec une température effective $T = T_{\text{dec}} a_{\text{dec}}/a$.

4.2 La théorie cinétique relativiste

4.2.1 L'équation de Liouville

Il y a deux descriptions complémentaires de la matière classique :

- La description de la matière comme un "fluide". Pour un univers homogène et isotrope, ceci implique que la matière peut être décrite par les deux variables ρ , p et une équation d'état de la forme $p = p(\rho)$ (par exemple, $p = 0$ ou $p = \frac{1}{3}\rho$ dans les cas de matière non-relativiste et relativiste respectivement).

- La description comme une collection de "particules libres" qui n'interagissent pas entre elles. Dans ce cas, les états sont décrits par la fonction de distribution f définie sur l'espace des états (ou espace des phases). En physique non-relativiste, l'espace des états Γ est une variété à 7 dimensions $\Gamma \approx \mathbf{R}^7 = \{(t, \mathbf{x}, p)\}$. La fonction de distribution est une mesure pour la densité des particules dans un élément de volume de l'espace des positions et des impulsions, $\mathbf{R}^6 = \{(\mathbf{x}, \mathbf{p})\}$, correspondant à une section de l'espace des états à temps fixe. Ainsi,

$$dN = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) d^3x d^3p.$$

Si nous supposons que les particules se meuvent dans un champ de force \mathbf{F} , l'évolution de la fonction de distribution f est décrite par l'équation de Liouville non-relativiste

$$m\partial_t f + p^i \partial_{x^i} f + mF^i \partial_{p^i} f \equiv L_X f = 0 \quad , \quad (4.10)$$

où $X = m\partial_t + p^i \partial_{x^i} + mF^i \partial_{p^i}$ est un champ vectoriel sur l'espace des états et L_X est la dérivée de Lie par rapport à X .

Si les particules interagissent, le côté droit de l'équation de Liouville ne disparaît plus mais est donné par un 'intégral des collisions', $C[f]$, qui décrit comment les particules sont diffusées dans l'élément de volume $d^3x d^3p$. En général, les particules peuvent interagir de façon compliquée mais, si le gaz est suffisamment dilué, l'interaction se fait exclusivement par collisions à deux corps et en plus la fonction de distribution des paires de particules, f_2 est le produit des fonctions de distribution à une particule,

$$f_2(t, \mathbf{x}_1, p_1, x_2, \mathbf{p}_2) \simeq f(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1) \cdot f(t, \mathbf{x}_2, \mathbf{p}_2) \quad . \quad (4.11)$$

Dans ce cas, l'équation d'évolution pour la fonction de distribution prend la forme suivante, appelée équation de Boltzmann,

$$L_X f = C[f]. \quad (4.12)$$

Ceci est la description ‘‘cinétique’’ du système. la description ‘‘particule libre’’ est la limite $C[f] \rightarrow 0$. L’intégrale des collisions est caractérisée par un temps t_{col} , intervalle de temps moyen entre deux collisions pour une particule donnée. Si les collisions sont fréquentes, la forme de $C[f]$ est telle que l’on peut dériver, au premier ordre ($\frac{t_{col}}{t}$), une équation de la forme $p = p(\rho)$, conduisant à la description ‘‘fluide’’. La description ‘‘fluide’’ est donc une approximation de la description ‘‘cinétique’’ dans la limite de forte interaction.

Dans l’univers primordial la densité et la température étaient très élevées et la courbure $R \propto (\dot{a}/a)^2$ n’était pas négligeable. Pour décrire ce système, il faut généraliser l’équation Boltzmann au cas relativiste.

Soit (\mathcal{M}, g) une variété lorentzienne à 3 + 1 dimensions (i.e. pseudo-riemannienne avec signature $(+, -, -, -)$).

Une particule libre relativiste se propage le long d’une géodésique de la m etriche g . Elle satisfait donc l’équation du mouvement

$$\dot{p}^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu p^\alpha p^\beta = 0, \quad (4.13)$$

où $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ sont les symboles de Christoffel de la m etriche g . Puisque $-\Gamma_{\alpha\beta}^\mu p^\alpha p^\beta$ exprime la variation de p^μ avec le temps, l’équation de Liouville pour une particule libre relativiste s’écrit

$$p^\mu \partial_{x^\mu} f - \Gamma_{\alpha\beta}^i p^\alpha p^\beta \partial_{p^i} f \equiv L_{X_g} f = 0, \quad (4.14)$$

avec $X_g = p^\mu \partial_{x^\mu} - \Gamma_{\alpha\beta}^i p^\alpha p^\beta \partial_{p^i}$.

Si l’on considère la limite non-relativiste de cette expression, on retrouve l’équation (4.10) avec $\mathbf{F} = m \nabla \phi$, où ϕ est le potentiel gravitationnel newtonien adimensionnel.

En effet, la limite newtonienne, dans le cas où l’on néglige l’expansion de l’univers, consiste à poser (voir mon cours de relativité)

$$\begin{aligned} g_{00} &= -(1 + 2\phi) \\ g_{ij} &= (1 - 2\phi)\delta_{ij} \\ g_{0i} &= 0, \end{aligned}$$

où $\phi = \phi(\mathbf{x})$ est le potentiel du champ gravitationnel dans la limite newtonienne $\phi \ll 1$. Le calcul des symboles de Christoffel nous donne

$$\Gamma_{00}^i \approx \partial^i \phi = -F^i/m.$$

Les Γ_{jm}^i contribuent beaucoup moins car $p^j p^m \ll (p^0)^2$ dans la limite non-relativiste. La quadri-vitesse des particules peut ˆetre approximée par $u \approx (1, \mathbf{v})$, $\mathbf{v} \ll 1$ et $p = mu$. Avec ces résultats, l’équation de Liouville non-relativiste devient

$$p^0 \partial_t f + p^i \partial_i f + \frac{F^i}{m} (p^0)^2 \partial_{p^i} f = 0,$$

Avec $p^0 \simeq m$, ceci n’est rien d’autre que l’équation non-relativiste (4.10).

Certes, X_g n’est pas un champ vectoriel sur $T\mathcal{M}$, l’espace tangent de \mathcal{M} , qui est l’espace des positions et des impulsions. Sur $T\mathcal{M}$, l’expression (4.14) dépend en effet du système de coordonnées choisi. Néanmoins, nous allons montrer que X_g est défini indépendamment du système de coordonnées sur l’espace des états.

4.2.2 Une mesure invariante sur l'espace des états

Que signifient espace des états Γ et fonction de distribution f dans le cas relativiste? La réponse à la première question est simple. L'espace des états pour une espèce de particules de masse m est le fibré de masse P_m défini par

$$P_m = \{(x, p) \in T\mathcal{M} | g(x)(p, p) = m^2\}, \quad (4.15)$$

où $T\mathcal{M}$ est le fibré tangent de \mathcal{M} (collection des espaces tangents). P_m est invariant par rapport au flot de X_g : c'est l'hyper-surface de $T\mathcal{M}$ à masse $m = \sqrt{-g_{\mu\nu}(x)p^\mu p^\nu}$ constante.

X_g n'est rien d'autre que la restriction de $X = p^\mu \partial_{x^\mu} - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu p^\alpha p^\beta \partial_{p^\mu}$ à P_m , ce qui est bien défini, c'est-à-dire indépendant du système de coordonnées locales. On appelle cette restriction le champ vectoriel de Liouville. En langage géométrique, elle se définit en introduisant l'inclusion $i : P_m \rightarrow T\mathcal{M}$.

$$(x^\mu, \mu = 0, \dots, 3; p^i, i = 1, \dots, 3) \quad (4.16)$$

$$i^* X = p^\mu \partial_\mu - \Gamma_{\alpha\beta}^i p^\alpha p^\beta \frac{\partial}{\partial p^i} = X_g, \quad (4.17)$$

où $p^0(x^\mu, p^i)$ est déterminé par la condition

$$-g_{\mu\nu}(x)p^\mu p^\nu = m^2. \quad (4.18)$$

Pour définir la fonction de distribution, nous avons besoin d'un volume sur l'espace des états, P_m . Dans ce but, nous définissons d'abord la deux-forme

$$\omega_g = dx_\nu \wedge dp^\nu, \quad (4.19)$$

et la forme de volume sur $T\mathcal{M}$

$$\Omega_g = \frac{1}{4!} \omega_g^4 = |g| dx^0 \wedge \dots \wedge dx^3 \wedge dp^0 \wedge \dots \wedge dp^3, \quad (4.20)$$

où $|g|$ est la valeur absolue du déterminant de $g_{\mu\nu}$, $|g| = |\det g_{\mu\nu}|$. La 2-forme ω_g est la forme de Lagrange du flot géodésique X_g (voir [2], chapitre 3). C'est une forme exacte, $\omega_g = dx_\mu \wedge dp^\mu = -d\theta_g$, avec $\theta_g = p^\mu dx_\mu$. Ω_g est la mesure symplectique sur $T\mathcal{M}$ attachée à la forme ω_g . Pour définir la fonction de distribution f et calculer des quantités physiques telles que la densité de particules, il faut introduire une mesure μ_m sur l'espace des états P_m . A cet égard, nous posons

$$dH = d\left(\frac{1}{2}g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu\right) = \frac{1}{2}g_{\mu\nu,\lambda}p^\mu p^\nu dx^\lambda + p_0 dp^0 + \dots + p_3 dp^3, \quad (4.21)$$

avec $p_\mu = g_{\mu\nu}p^\nu$. En tenant compte de la définition ci-dessus, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \Omega_g &= |g| dx^0 \wedge \dots \wedge dx^3 \wedge dp^0 \wedge \dots \wedge dp^3 \\ &= -dH \wedge \frac{|g|}{|p_0|} dx^0 \wedge \dots \wedge dx^3 \wedge dp^1 \wedge \dots \wedge dp^3 \\ &= -dH \wedge \sigma, \end{aligned} \quad (4.22)$$

où

$$\sigma = \frac{|g|}{|p_0|} d^4x \wedge d^3p. \quad (4.23)$$

Pour établir ce résultat, nous avons tenu compte du fait que le produit extérieur est antisymétrique, i.e., $\alpha \wedge \alpha = 0$.

Par construction, ω_g est invariant par rapport au flot géodésique X_g . En effet,

$$L_{X_g} \omega_g = (d \circ i_{X_g} + i_{X_g} \circ d) \omega_g \quad (4.24)$$

$$= d(\omega_g(X_g, \cdot)) + i_{X_g}(d\omega_g) \quad (4.25)$$

$$= -d(d\theta_g(X_g, \cdot)) - i_{X_g}(d(d\theta_g)) \quad (4.26)$$

$$= 0, \quad (4.27)$$

parce que $d \circ d = 0$. De même, $L_{X_g} \Omega_g = 0$. Enfin, comme la 1-forme dH est normale à P_m et X_g y est tangent, nous avons $L_{X_g} dH = 0$ et σ est également invariant, $L_{X_g} \sigma = 0$. Nous pouvons alors poser

$$\mu_m \equiv i^* \sigma = \frac{|g|}{|p_0|} d^4x \wedge d^3p, \quad (4.28)$$

où p_0 est à nouveau déterminé par l'équation (4.18). Cette mesure μ_m , définie sur P_m (à la différence de σ qui est définie sur $T\mathcal{M}$), est aussi invariante sous le flot géodésique : ($L_{X_g} \mu_m = 0$). Nous pouvons ainsi décomposer μ_m en $\mu_m = \eta \wedge \pi_m$, avec

$$\eta = \sqrt{|g|} d^4x \quad \text{et} \quad \pi_m = \frac{\sqrt{|g|}}{|p_0|} d^3p. \quad (4.29)$$

4.2.3 La fonction de distribution

Pour compter les particules, remarquons que chacune d'entre elles (appartenant à une espèce de masse m donnée) peut être représentée par une courbe intégrale de X_g , sa "ligne d'univers" dans P_m .

Nous aimerions compter les particules (courbes intégrales à X_g) qui intersectent une hyper-surface $\Sigma \subset P_m$ (une hyper-surface à temps constant plus précisément).

Pour faire ceci, nous avons besoin d'une mesure qui soit définie sur les hyper-surfaces Σ de dimension 6. Pour éviter de compter une particule plusieurs fois, nous aimerions que cette mesure soit nulle si Σ est parallèle à une courbe intégrale de X_g . La définition suivante

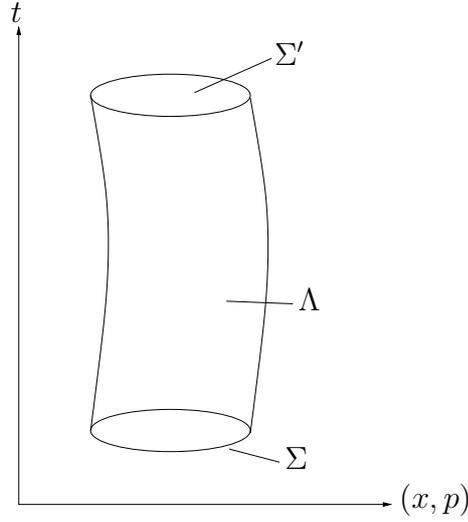
$$\omega_m \equiv i_{X_g} \mu_m \quad (4.30)$$

satisfait à la condition énoncée ci-dessus : $\omega_m(X_g, \dots) = \mu_m(X_g, X_g, \dots) = 0$. ω_m est donc déterminé uniquement à une constante près. En coordonnées locales, ω_m se réduit à

$$\omega_m = \frac{1}{3!} p^\mu \eta_{\mu\alpha\beta\lambda} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma \wedge \pi_m - \frac{1}{2|p_0|} \eta_{0jkl} \Gamma_{\alpha\beta}^j p^\alpha p^\beta dp^k \wedge dp^l \wedge \eta. \quad (4.31)$$

Ici

$$\eta_{\mu\alpha\beta\lambda} = \begin{cases} \sqrt{|g|} \text{sign}(0, 1, 2, 3 \rightarrow \mu, \alpha, \beta, \lambda) & \text{si les indices sont tous différents} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

FIG. 4.2 – Evolution d'une hyper-surface Σ en fonction du temps.

Considérons tout d'abord un 'tube' T généré à partir de courbes intégrales de X_g . Soit $\phi_s^{(g)}$ le flot du champ vectoriel X_g et $\Sigma \subset P_m$ une hyper-surface à temps constant. Nous définissons

$$T = \{\phi_s^{(g)}(x, p) | (x, p) \in \Sigma, \quad 0 \leq s \leq s_0\} \quad (4.32)$$

$$\Sigma' = \{\phi_{s_0}^{(g)}(x, p) | (x, p) \in \Sigma\} \quad (4.33)$$

$$(\Sigma \equiv \{\phi_0^{(g)}(x, p) | (x, p) \in \Sigma\}). \quad (4.34)$$

De l'invariance de μ_m , nous concluons que

$$0 = L_{X_g} \mu_m = d \circ i_{X_g} \mu_m = d\omega_m, \quad (4.35)$$

(justifier $i_{X_g} \circ d\mu_m = 0$). Ainsi,

$$0 = \int_T d\omega_m \stackrel{\text{(Stokes)}}{=} \int_{\partial T} \omega_m = \int_{\Sigma} \omega_m + \int_{\Lambda} \omega_m - \int_{\Sigma'} \omega_m. \quad (4.36)$$

Comme Λ est parallèle à X_g , le deuxième terme du membre de droite de cette équation est nul, et nous avons le résultat

$$\int_{\Sigma} \omega_m = \int_{\Sigma'} \omega_m. \quad (4.37)$$

L'équation (4.37) est une version intégrale du théorème de Liouville (conservation du nombre de particule dans l'espace des phases).

Considérons ensuite une hyper-surface $\Sigma \subset P_m$ telle que, si l'on se donne la projection $\pi : P_m \rightarrow \mathcal{M}$, $\pi(\Sigma)$ appartient à la sous-variété spatiale, c'est-à-dire, $g(V_{\pi(q)}, V_{\pi(q)}) < 0$ quelque soit le point $q \in \Sigma$ choisi. Ici $V_{\pi(q)}$ est un vecteur de l'espace tangent $T\pi(\Sigma)_{\pi(q)}$. Sous cette condition, Σ est analogue à l'espace des états à six dimensions du cas newtonien, défini pour un observateur dont la

ligne d'univers est normale à $\pi(\Sigma)$. De plus, sur une telle hyper-surface, ω_m se réduit à la première composante de (4.31), c'est-à-dire,

$$\omega_m|_{\Sigma} = p^{\mu} \sigma_{\mu} \wedge \pi_m \quad \text{avec} \quad \sigma_{\mu} \equiv \frac{1}{3!} \eta_{\mu\alpha\beta\gamma} dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta} \wedge dx^{\gamma} .$$

Dans le cas où Σ est transvers à la coordonnée x^0 , $g_{0i} = 0$ et normalisé tel que $g_{00} = 1$ sur Σ , $\omega_m|_{\Sigma}$ devient

$$\omega_m|_{\Sigma} = p^0 \sigma_0 \wedge \pi_m = p^0 dx^3 \wedge \frac{d^3 p}{p_0} = d^3 x d^3 p .$$

Dans cette situation, le nombre de particules présentes dans l'élément de volume $d^3 x d^3 p$ est, en moyenne, donné par

$$dN(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) d^3 x d^3 p ,$$

comme dans le cas newtonien. Ainsi, pour une hyper-surface 'spatiale' quelconque $\Sigma \subset P_m$, nous pouvons définir une fonction de distribution f_{Σ} satisfaisant aux mêmes conditions que celles imposées par la théorie cinétique non-relativiste, et telle que, pour tout ouvert $\Sigma_1 \subset \Sigma$,

$$N(\Sigma_1) = \int_{\Sigma_1} f_{\Sigma} \omega_m \quad (4.38)$$

est le nombre moyen de particules dans Σ_1 .

Une telle fonction f_{Σ} est parfaitement définie pour chaque hyper-surface $\Sigma \subset P_m$ qui est nulle part tangente à X_g . Sous quelles conditions est-il possible de définir f_{Σ} indépendamment de l'observateur ?

Pour répondre à cette question, Ehlers a démontré le théorème suivant [17] :

Théorème 4.2.1 *Soit $N(\Sigma) = \int_{\Sigma} f_{\Sigma} \omega_m$ le nombre moyen de particules dans une hyper-surface $\Sigma \subset P_m$. Si les conditions suivantes (i) et (ii) sont satisfaites, il existe une fonction de distribution à une particule f sur P_m telle que*

$$N(\Sigma) = \int_{\Sigma} f \omega_m \quad (4.39)$$

pour chaque hyper-surface $\Sigma \subset P_m$.

• **condition (i)** *Pour chaque hypersurface $\Sigma \subset P_M$ il existe f_{Σ} telle que*

$$N(\Sigma_1) = \int_{\Sigma_1} f_{\Sigma_1} \omega_m, \quad (4.40)$$

et $f_{\Sigma_1} \equiv f_{\Sigma}|_{\Sigma_1}$ pour $\Sigma_1 \subset \Sigma$.

• **condition (ii)** *Pour une suite $\{D_i\}_i$, $D_i \subset P_m$ ouverts de P_m , dont l'intersection $\bigcap_i D_i$ est un point, il existe un nombre réel $C \geq 0$ tel que*

$$|N[\partial D_i]| \leq C \int_{D_i} \mu_m. \quad (4.41)$$

$|N[\partial D_i]|$ compte le nombre des particules créées et détruites à l'intérieur de D . Nous ne présentons pas la démonstration (un peu technique) de ce théorème.

Retenons seulement que, pour des particules sans collisions, $N(\partial D_i) = 0$ et la condition (ii) est trivialement satisfaite.

En toute généralité, le nombre de collisions (créations moins annihilations) dans un domaine $D \subset P_m$ est l'intégrale du produit $f\omega_m$ sur le bord de D , i.e.,

$$N[\partial D] = \int_{\partial D} f\omega_m \stackrel{\text{(Stokes)}}{=} \int_D d(f\omega_m) = \int_D df \wedge \omega_m. \quad (4.42)$$

Pour une fonction lisse h définie sur P_m , nous avons, en tenant compte de $L_{X_g}\mu_m = 0$,

$$L_{X_g}(h)\mu_m = L_{X_g}(h\mu_m) = d \circ i_{X_g}(h\mu_m) \quad (4.43)$$

$$= dh \wedge i_{X_g}\mu_m. \quad (4.44)$$

Avec $d\omega_m = 0$, ceci conduit à

$$\int_{\partial D} h\omega_m = \int_D dh \wedge \omega_m = \int_D dh \wedge i_{X_g}\mu_m = \int_D (L_{X_g}h)\mu_m. \quad (4.45)$$

Le nombre de collisions à l'intérieur de D est donc donné par

$$N[\partial D] = \int_D L_{X_g}(f)\mu_m. \quad (4.46)$$

Sous certaines conditions analogues au cas non-relativiste (gaz suffisamment dilué etc.), $N[\partial D]$ peut être représenté par une intégrale des collisions

$$N[\partial D] = \int_D C[f]\mu_m.$$

On peut ainsi dériver l'équation de Boltzmann relativiste

$$L_{X_g}(f) = C[f]. \quad (4.47)$$

$L_{X_g}(f)$ est la densité des collisions par rapport à la mesure μ_m . Pour des particules sans collisions, en particulier, nous obtenons l'équation de Liouville

$$L_{X_g}f = (p^\mu \partial_\mu - \Gamma_{\alpha\beta}^i p^\alpha p^\beta \frac{\partial}{\partial p^i})f = 0. \quad (4.48)$$

Les variables hydrodynamiques définies habituellement sur \mathcal{M} (comme la densité, la pression ou le champ de vitesse) peuvent être dérivées à partir des intégrales des moments de la fonction de distribution f le long d'une fibre $P_m(x) = \{p|(x, p) \in P_m\}$ du fibré de masse P_m . A titre d'exemple, le flot de particules $n^\mu(x)$ au point $x \in \mathcal{M}$ est

$$n^\mu(x) = \int_{P_m(x)} p^\mu f(x, p) \pi_m. \quad (4.49)$$

Ici, n^0 est la densité de particules au point $x \in \mathcal{M}$. Elle dépend du système de coordonnées choisi. La densité de particules mesurée par un observateur de quadri-vitesse u est donnée par $n = g_{\mu\nu} n^\mu u^\nu$.

Le tenseur d'énergie-impulsion est l'intégrale du deuxième moment de la distribution,

$$T^{\mu\nu} = \int_{P_m(x)} p^\mu p^\nu f \pi_m. \quad (4.50)$$

La conservation du flot de particules ($n^\mu{}_{;\mu} = 0$) et du tenseur d'énergie-impulsion ($T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$) sont, dans ce formalisme, une conséquence de l'équation de Liouville (4.48). Lorsque l'équation de Liouville n'est pas satisfaite, les différentes espèces de particules interagissent entre elles, si bien que n^μ et $T^{\mu\nu}$ ne sont, en général, pas conservés.

Pour nous familiariser un peu avec les concepts introduits dans ce chapitre, voici la dérivation de la conservation de l'énergie à partir de l'équation de Liouville :

Soit $V \subset \mathcal{M}$ un ouvert et $D \subset P_m$ le domaine correspondant dans l'espace des états, c'est-à-dire,

$$D = \{(x, p) | x \in V, g(x)(p, p) = m^2\}.$$

Soit v un champ vectoriel sur V satisfaisant $v_{\mu;\nu}(x_0) = 0$ pour tout $\mu, \nu = 0 \cdots 3$ et $v_\mu(x_0) \neq 0$ pour un point fixé, $x_0 \in V$. Posons

$$\eta = \sqrt{|g|} d^4x = dx^\mu \wedge \sigma_\mu.$$

σ_μ est l'élément de surface de ∂V normal à dx^μ . En combinant le théorème de Stokes avec la définition $p^\mu \sigma_\mu \wedge \pi_m|_{\partial D} = \omega_m|_{\partial D}$, nous avons³

$$\int_V (v_\nu T^{\nu\mu})_{;\mu} \eta = \int_{\partial V} v_\nu T^{\nu\mu} \sigma_\mu = \int_{\partial D} f v_\nu p^\nu \omega_m = \int_D L_{X_g}(f v_\nu p^\nu) \mu_m .$$

Il vient alors, au point $x_0 \in V$ donné,

$$(v_\nu T^{\nu\mu})_{;\mu}(x_0) = \int_{P_m(x_0)} L_{X_g}(f v_\nu p^\nu) \pi_m .$$

Un petit calcul montre que $L_X(v_\nu p^\nu) = p^\mu p^\nu v_{\mu;\nu}$. Ceci mène à $L_{X_g}(v_\nu p^\nu)(x_0) = 0$, soit

$$(v_\nu T^{\nu\mu})_{;\mu}(x_0) = \int_{P_m(x_0)} L_{X_g}(f) v_\nu p^\nu \pi_m .$$

Les composantes $v_\mu(x_0)$ étant arbitraires,

$$T^{\nu\mu}{}_{;\mu}(x_0) = \int_{P_m(x_0)} L_{X_g}(f) p^\nu \pi_m \quad (4.51)$$

pour tout point $x_0 \in \mathcal{M}$. De la même manière, on obtient l'expression

$$n^\mu{}_{;\mu}(x_0) = \int_{P_m(x_0)} L_{X_g}(f) \pi_m \quad (4.52)$$

pour la conservation du flot de particules. Ceci peut être généralisé sur les tenseur (totalement symétrique) de rang arbitraire : Soit

$$T^{\mu_1 \cdots \mu_n} = \int_{P_m(x_0)} p^{\mu_1} p^{\mu_2} \cdots p^{\mu_n} f \pi_m .$$

³Ici nous utilisons le résultat suivant de la relativité générale : Pour un champ vectoriel X quelconque et un ouvert $V \subset \mathcal{M}$, on a $\int_V X^\mu{}_{;\mu} \eta = \int_{\partial V} X^\mu \sigma_\mu$.

Comme pour le tenseur énergie-impulsion on montre que

$$T_{;\mu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n} = \int_{P_m(x_0)} p^{\mu_1} p^{\mu_2} \dots p^{\mu_{n-1}} L_{X_g}(f) \pi_m .$$

Alors si les particules propagent librement, $C[f] = 0$, tous ces tenseurs sont conservés, $T_{;\mu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n} = 0$.

Dans les sections suivantes de ce chapitre, nous appliquerons quelques résultats de cette brève introduction à la théorie cinétique relativiste dans le cas d'un univers en expansion. Un traitement plus détaillé de la théorie cinétique relativiste est donné dans [57].

4.3 Fonctions de distribution et variables thermodynamiques dans un univers Friedmann en équilibre thermique

Soit un univers de Friedmann–Lemaître de courbure K et de métrique

$$g = a^2(\eta)(-d\eta^2 + \gamma_{ij}(x)dx^i dx^j) . \quad (4.53)$$

A cause de l'homogénéité et de l'isotropie de notre univers, la fonction de distribution f_X d'un type de particule X (neutrinos, photons ...), ne dépend que de η et de $p \equiv \sqrt{g_{ij}p^i p^j}$, c.à.d., $f_X(\eta, x^i, p^i) = f(\eta, p)$. Toutefois, f dépend des coordonnées spatiales, parce que p est un produit scalaire. Rappelons d'abord l'équation de Liouville pour $f_X(\eta, x^i, p^i)$:

$$p^0 \partial_\eta f_X + p^k \partial_k f_X - \Gamma_{\alpha\beta}^i p^\alpha p^\beta \frac{\partial f_X}{\partial p^i} = C[f].$$

En tenant compte que $f_X(\eta, x^i, p^i) = f(\eta, p)$, nous avons

$$\begin{aligned} \partial_\eta f_X &= \partial_\eta f + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \eta} \\ &= \partial_\eta f + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial}{\partial \eta} \sqrt{g_{ij} p^i p^j} \\ &= \partial_\eta f + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial}{\partial \eta} \sqrt{a^2(\eta) \gamma_{ij} p^i p^j} \\ &= \partial_\eta f + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\dot{a}}{a} p. \end{aligned}$$

Pour le second terme on obtient

$$\begin{aligned} \partial_k f_X &= \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x^k} \\ &= \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial}{\partial x^k} \sqrt{g_{ij} p^i p^j} \\ &= \frac{\partial f}{\partial p} \frac{1}{2p} g_{ij,k} p^i p^j, \end{aligned}$$

et, de même,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_X}{\partial p^i} &= \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial p^i} \\ &= \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial}{\partial p^i} \sqrt{g_{ij} p^i p^j} \\ &= \frac{\partial f}{\partial p} \frac{p_i}{p}.\end{aligned}$$

Calculons maintenant les symboles de Christoffel à partir de la métrique (4.53). Dans le cas où l'un des deux indices α, β au moins porte sur la coordonnée temporelle, le calcul est simple,

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^i &= \frac{1}{2} g^{0i} g_{00,0} = 0 \\ \Gamma_{0j}^i &= \frac{1}{2} g^{mi} g_{mj,0} = -\dot{a} a g^{mi} \gamma_{mj} = \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i.\end{aligned}$$

Dans le cas où α et β portent sur les indices spatiaux, il est judicieux de considérer $\Gamma_{jk}^i p^j p^k p_i$ dans son ensemble. A cet égard, les symboles de Christoffel conduisent à

$$\begin{aligned}\Gamma_{jk}^i p^j p^k p_i &= \frac{1}{2} g^{mi} (g_{mj,k} + g_{mk,j} - g_{kj,m}) p^j p^k p_i \\ &= \frac{1}{2} g_{ij,k} p^j p^k p^i.\end{aligned}$$

Insérons ces résultats dans l'équation de Liouville

$$\begin{aligned}p^0 \partial_\eta f_X + p^k \partial_k f_X - \Gamma_{00}^i p^0 p^0 \frac{\partial f_X}{\partial p^i} \\ - 2\Gamma_{j0}^i p^j p^0 \frac{\partial f_X}{\partial p^i} - \Gamma_{kj}^i p^k p^j \frac{\partial f_X}{\partial p^i} = C[f].\end{aligned}$$

D'après ce qu'on vient de trouver, le second terme est compensé par le cinquième, le troisième terme est nul, et il reste

$$\begin{aligned}p^0 \left(\partial_\eta f + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\dot{a}}{a} p \right) - 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i \right) p^j p^0 \left(\frac{\partial f}{\partial p} \frac{p_i}{p} \right) \\ = p^0 \left(\partial_\eta f - \frac{\dot{a}}{a} p \frac{\partial f}{\partial p} \right) = C[f], \quad p = \sqrt{g_{ij} p^i p^j}.\end{aligned}$$

Pour $C[f] = 0$ cette équation est satisfaite par une fonction $f = \bar{f}(ap)$. Ainsi, dans un univers de Friedmann, la fonction de distribution de particules sans collision ne dépend de η et p qu'à travers le produit ap . Autrement dit, la fonction de distribution des particules libres dans un univers en expansion n'est modifiée que par le décalage des impulsions, $p(t_2) = (a_1/a_2)p(t_1)$. Corrigée de ce décalage (où réexprimée avec la variable ap), elle ne dépend pas du temps.

4.3.1 Fonctions de distribution en équilibre thermique

En équilibre thermique, f_X est donnée par la distribution de Fermi-Dirac (si la particule X est un fermion) ou de Bose-Einstein (s'il s'agit d'un boson). Avec

$\hbar = k_B = c = 1$ et donc $h = 2\pi$, nous avons

$$f_X = \frac{N_X}{(2\pi)^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{E(p) - \mu_X}{T}\right) \pm 1}, \quad E(p) = p^0 = \sqrt{p^2 + m^2}, \quad (4.54)$$

et N_X est le nombre de degrés de liberté associés à la particule X ($N_X = 2$ dans le cas des photons et des électrons par exemple, correspondant respectivement aux deux états de polarisation ou de spin). Le signe $+$ dans le dénominateur est pour des fermions tandis que le $-$ est pour des bosons. Notez que pour des bosons il faut que $\mu_X \leq 0$ sinon la densité d'états a basse énergie diverge. Le potentiel chimique des fermions peut être positive ou négative.

L'expansion de l'univers pourrait en principe affecter cet équilibre thermique. Toutefois, si les interactions ont lieu suffisamment rapidement, l'expansion de l'univers peut être approximée par une suite de transformation quasi-statique ($\delta Q = 0 \iff$ réversibles) telle que le gaz de particules considéré est en équilibre thermique $\forall t$.

Il est intéressant de constater que dans le cas $m = \mu_X = 0$, et donc $E = p$, la distribution garde sa forme de Bose-Einstein ou Fermi-Dirac même en absence de collisions si on définit une 'température effective' $T = T_{\text{dec}} a_{\text{dec}}/a$ après le découplage des particules.

La limite relativiste ($T_X \gg m_X$)

Dans le cas ultra-relativiste, $T \gg m$ et $E(p) = p = \sqrt{g_{ij}p^i p^j}$. Pour un système en équilibre thermique, l'énergie libre $F = E - TS$ doit être minimale,

$$dF = -S_X dT - p_X dV + \mu_X dN = 0.$$

Particules et anti-particules pouvant être créées et annihilées en grand nombre, le potentiel chimique doit être nul, i.e. $\mu_X \sim 0$, afin que le système soit stationnaire par rapport à de petits changements de N .

Le calcul des quantités thermodynamiques, dans le cas où $\mu = 0$, fait apparaître des intégrales de la forme

$$I_B(\alpha) = \int_0^\infty \frac{v^\alpha}{e^v - 1} dv = \zeta(\alpha + 1) \Gamma(\alpha + 1), \quad \alpha > 0 \quad (4.55)$$

et

$$I_F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{v^\alpha}{e^v + 1} dv = \zeta(\alpha + 1) \Gamma(\alpha + 1) [1 - (1/2)^\alpha], \quad \alpha > -1 \quad (4.56)$$

où ζ est la fonction zeta de Riemann ($\zeta(z) = \sum_n 1/n^z$ pour $z > 1$) et Γ est la fonction Gamma. Nous aurons souvent à faire appel à

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(3) \simeq 1.202057, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}.$$

Pour des particules relativistes, $T \propto 1/a$. La densité des particules est $n_X = n_X^0 = \int(p^0) f_X \pi_m$, par rapport au temps physique. Avec $p^0 = -p_0 = p$ et donc $\pi_m = a^3 dp^1 dp^2 dp^3 / |p_0| = p dp d\Omega$ ceci se réduit à

$$\begin{aligned} n_X &= \frac{N_X}{(2\pi)^3} \int \frac{p^2}{\exp(p/T) \pm 1} dp d\Omega = \frac{N_X T^3}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{v^2 dv}{\exp(v) \pm 1} \\ &= T^3 \frac{N_X}{\pi^2} \zeta(3) \cdot \begin{cases} \frac{3}{4} & \text{fermions} \\ 1 & \text{bosons.} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.57)$$

Pour la densité d'énergie, on trouve $\rho_X = -T_X 0^0 = -\int p_0 p^0 f_X \pi_m$

$$\begin{aligned}\rho_X &= \frac{N_X}{(2\pi)^3} \int \frac{p^3}{\exp(p/T) \pm 1} dp d\Omega = \frac{N_X T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{v^3 dv}{\exp(v) \pm 1} \\ &= T^4 \frac{N_X}{2\pi^2} 6\zeta(4) \cdot \begin{cases} \frac{7}{8} & \text{fermions} \\ 1 & \text{bosons.} \end{cases}\end{aligned}\quad (4.58)$$

Nous retrouvons la *loi de Stefan-Boltzmann*,

$$\rho_X = \begin{cases} \frac{7\pi^2}{8 \cdot 15} \frac{N_X}{2} T^4 & \text{fermions} \\ \frac{\pi^2}{15} \frac{N_X}{2} T^4 & \text{bosons.} \end{cases}\quad (4.59)$$

Pour la pression nous obtenons

$$p_X = \frac{1}{3} T_X i^i = \frac{1}{3} \int p^i p_i f_X \pi_m = -\frac{1}{3} \int p^0 p_0 f_X \pi_m = \frac{1}{3} \rho_X .$$

Dans nos unités, la constante de radiation est alors $a_{SB} = \pi^2/15$. Comme nous l'avons vu, les relations thermodynamiques

$$dE = d(\rho V) = T dS - p dV \quad (4.60)$$

et

$$dS = \frac{1}{T} [V d\rho + \rho dV + p dV], \quad (4.61)$$

nous permettent de calculer l'entropie par unité de volume (physique!) $s \equiv dS/dV = (\rho + p)/T = (4/3)\rho/T$ (particules relativistes). Connaissant ρ_X , le calcul de s_X est aisé,

$$s_X = \begin{cases} \frac{7\pi^2}{6 \cdot 15} \frac{N_X}{2} T^3 & \text{fermions} \\ \frac{4\pi^2}{45} \frac{N_X}{2} T^3 & \text{bosons.} \end{cases}\quad (4.62)$$

Comme $s_X \propto T^3$ et $n_X \propto T^3$, l'entropie par unité de volume est proportionnelle à la densité de particules,

$$s_X \simeq \begin{cases} 4.2 \cdot n_X & \text{fermions} \\ 3.6 \cdot n_X & \text{bosons.} \end{cases}\quad (4.63)$$

Soient $N_B(T)$ et $N_F(T)$ le nombre de degrés de liberté bosoniques et fermioniques relativistes (nombre des états d'hélicité, de spin ...) respectivement. Si toutes ces particules se trouvent en équilibre thermique à une température T donnée, leur contribution à la densité d'énergie peut être caractérisée par un facteur g_{eff} tel que

$$\rho^{(\text{rel})}(T) = \frac{g_{\text{eff}}(T)}{2} a_{SB} T^4 \quad \text{avec} \quad g_{\text{eff}}(T) = N_B(T) + \frac{7}{8} N_F(T), \quad (4.64)$$

où T est la température du milieu.

La limite non-relativiste, $T_X \ll m_X$

Si la température baisse en dessous de la masse m_X , les particules X et \bar{X} peuvent s'annihiler, mais ne sont plus produites. Dans le cas où l'univers n'est pas parfaitement symétrique par rapport à la conjugaison de charge (la symétrie C)⁴, $\mu_X \neq -\mu_{\bar{X}}$ et quelques particules X (ou \bar{X}) subsistent à la fin.

En outre, il est aussi possible que le taux d'interaction, au-dessous d'une certaine température, soit trop faible pour maintenir l'équilibre thermique. Dans ce cas, le nombre de particules reste conservé. Ce 'gel' d'une espèce de particules est discuté un peu plus loin.

En équilibre thermique, la fonction de distribution est toujours celle de Fermi-Dirac dans le cas de fermions et celle de Bose-Einstein dans le cas de bosons. De plus, le potentiel chimique μ_X est différent de zéro. Ainsi,

$$f_X = \frac{N_X}{(2\pi)^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{E(p)-\mu_X}{T}\right) \pm 1}. \quad (4.65)$$

Pour de faibles températures, nous pouvons développer cette expression au premier ordre,

$$\frac{E}{T} = \left(\frac{p^2}{T^2} + \frac{m_X^2}{T^2} \right)^{1/2} \simeq \frac{m_X}{T} \left(1 + \frac{p^2}{2m_X^2} \right) = \frac{m_X}{T} + \frac{p^2}{2m_X T}. \quad (4.66)$$

La température T étant beaucoup plus faible que la masse au repos m_X , l'exponentielle domine largement le facteur ± 1 . Ainsi,

$$f_X \simeq \frac{N_X}{(2\pi)^3} \exp\left(-\frac{m_X}{T} + \frac{\mu_X}{T}\right) \exp\left(-\frac{p^2}{2m_X T}\right).$$

En intégrant sur les impulsions, on trouve

$$n_X = \frac{N_X}{(2\pi)^3} \exp\left(-\frac{m_X}{T} + \frac{\mu_X}{T}\right) (2\pi m_X T)^{3/2} \quad (4.67)$$

$$\rho_X = m_X n_X + \frac{3}{2} T n_X \simeq m_X n_X \quad (4.68)$$

$$p_X = T n_X \ll \rho_X. \quad (4.69)$$

Dès que le nombre de particules X est constant (lorsque tous les \bar{X} ont été annihilés, par exemple), la densité n_X se comporte comme $n_X \propto T^{3/2}$ (cf. éq. (4.9)). Par conséquent, le coefficient de l'exponentielle doit être constant, $-\mu_0 = (m_X - \mu_X)/T$, ce qui permet de déterminer la densité de particule.

Avec $n \propto a^{-3}$, nous avons aussi $T \propto 1/a^2$.

Pour déterminer l'entropie, il suffit de partir de la seconde loi de la thermodynamique

$$dE = TdS - pdV + \mu dN.$$

L'entropie par unité de volume est alors donnée par

$$s_X = \frac{dS_X}{dV} = \frac{1}{T} \left[\frac{dE}{dV} + p_X - \mu_X \frac{dN}{dV} \right]$$

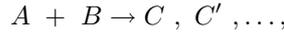
⁴C'est le cas de notre univers : la densité actuelle des protons, électrons et neutrons est non-nulle, tandis que la densité des anti-protons, positrons et anti-neutrons semble être négligeable.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T}(\rho_X + p_X - \mu_X n_X) = \frac{1}{T}(m_X - \mu_X)n_X + \frac{5}{2}n_X \\
&= \left(\frac{5}{2} - \mu_0\right)n_X.
\end{aligned} \tag{4.70}$$

Lorsque $T \ll m_X$, autant que $\mu_X < m_X$, la densité de particule n_X diminue exponentiellement par rapport à sa valeur dans la limite relativiste, $T \gg m_X$. Ainsi, avec n_X , l'entropie s_X est, en général, beaucoup plus petite que l'entropie des particules relativistes.

4.3.2 Le gel d'une espèce de particules

Si une espèce de particules fait 'beaucoup' d'interactions, collisions, elle est normalement dans un équilibre thermique. Si des particules peuvent être créées et absorbées lors des interactions 'rapides' ceci est une distribution Bose-Einstein ou Fermi-Dirac avec potentiel chimique nul, si le nombre des particules est conservé, le potentiel chimique est en général non-nul. Afin de quantifier ce que veut dire 'interaction rapide', nous introduisons le taux de réaction, Γ . Pour ceci nous considérons une réaction du type suivant,



A, B, \dots désignant des particules élémentaires. Soit σ la section efficace de cette réaction, qui dépend en général de la vitesse relative $v = v_A - v_B$ des particules A et B . Pour un observateur au repos par rapport à A , le 'volume réactif' \dot{V} par unité de temps est défini par $\dot{V} = \langle \sigma v \rangle$, où la moyenne $\langle \dots \rangle$ est effectuée sur les vitesses. Le taux de réactions (nombre des réactions d'une particule A par unité de temps) est alors donné par

$$\Gamma = n_B \langle \sigma v \rangle, \tag{4.71}$$

où n_B est la densité de particules B . Notez que l'éq. (4.71) n'est pas symétrique en A et B . Si $n_B \gg n_A$, il peut alors arriver que les particules B découplent mais les particules A sont encore en équilibre avec les B . Ceci est précisément ce qui arrive avec les baryons/électrons (A) et les photons (B) après la recombinaison.

En général, Γ est une fonction décroissante du temps. Si Γ diminue plus rapidement que le rayon de Hubble $H \propto 1/t$, il existe un temps t_d tel que $\Gamma(t) < H(t)$ pour $t \geq t_d$. Le changement de la densité de particules provoqué par la réaction ci-dessus est plus lent que le changement dû à l'expansion de l'univers. Dans ce cas, cette réaction peut être négligée : on dit qu'elle est *gelée*. Si toute les interaction dans lesquelles une espèce de particules est impliquée sont gelées, on parle d'une espèce gelée'.

Considérons la fonction de distribution f d'une espèce de particules qui a *gelé*, c'est-à-dire qui a cessé d'interagir à une époque correspondant à $t = t_g$, $T = T_g$. Pour $t \geq t_g$, la fonction de distribution f obéit à l'équation de Liouville sans collision

$$\partial_\eta f - p \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \partial_p f = 0.$$

Elle ne dépend que du produit pa , qui n'est autre que l'expression du décalage des impulsions. Après le gel (ou *découplage*), nous pouvons écrire f comme

$$f(p, t) = f_{eq} \left(p \frac{a(t)}{a(t_g)}, T_g \right), \tag{4.72}$$

où f_{eq} est la fonction de distribution décrivant l'équilibre thermique lors du découplage. Lorsque les particules sont relativistes au moment du gel ($T_g \gg m$),

$$f(p, t) = \frac{N}{(2\pi)^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{pa(t)}{T_g a(t_g)}\right) \pm 1} = \frac{N}{(2\pi)^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{p}{T_{\text{eff}}}\right) \pm 1}. \quad (4.73)$$

Si les particules sont non-relativistes au moment du découplage ($T_g \ll m$),

$$\begin{aligned} f(p, t) &= \frac{N}{(2\pi)^3} \exp\left(-\frac{m - \mu}{T_g}\right) \exp\left(\frac{-p^2 a(t)^2}{2m T_g a(t_g)^2}\right) \\ &= A \exp\left(\frac{-p^2 a(t)^2}{2m T_g a(t_g)^2}\right) = A \exp\left(\frac{-p^2}{2m T_{\text{eff}}}\right). \end{aligned} \quad (4.74)$$

Ainsi, dans le cas d'un découplage de particules relativistes (par exemple, cas des neutrinos massifs : $T_g \sim 1\text{MeV}$, $m_\nu \ll 1\text{MeV}$), la distribution conserve sa forme relativiste, ainsi la 'température' évolue avec le temps : $T_{\text{eff}} = T_g(a_g/a)$. Cette température est plus un paramètre de la fonction de distribution qu'une véritable température thermodynamique. En effet, l'absence d'interaction ne permet pas de parler d'équilibre thermique et donc de température au sens strict du terme.

Dans le cas d'un découplage non-relativistes, $T_g \ll m$, la distribution est maxwellienne et la 'température' décroît comme le carré du facteur d'échelle, $T_{\text{eff}} = T_g(a_d/a)^2$.

4.3.3 L'anisotropie baryonique

Nous avons vu que l'entropie des photons est donnée par

$$s_\gamma = \frac{4\pi^2}{45} T^3 \simeq 3.6 n_\gamma$$

dans le cas où l'on a l'équilibre thermique.

Soit $T \ll m_p, m_e$ la température de l'univers. Comme le nombre baryonique est conservé, nous avons $a^3 n_B = \text{constant}$. Ainsi, l'entropie par particule (cf. section 4.1)

$$\sigma = s_\gamma / n_B,$$

est constante au cours du temps. Pour une densité baryonique $n_B = \Omega_B \rho_c / m_B$ (où l'on a posé $m_B = (m_n + m_p)/2$), nous avons

$$\sigma = (s_\gamma / n_B) = \frac{\frac{4\pi^2}{45} T_0^3}{\Omega_B \rho_{c0} / m_B} = 0.64 \times 10^{10} \left(\frac{T_{2.7}^3 2.2 \times 10^{-2}}{\Omega_B h^2} \right). \quad (4.75)$$

Pour établir ce résultat, nous avons utilisé

$$\begin{aligned} \rho_c(t_0) &= 1.88 h^2 \times 10^{-29} \text{g/cm}^3 = 8.1 h^2 \times 10^{-11} (\text{eV})^4 \\ m_p &= 9.38 \times 10^8 \text{eV} \\ T(t_0) &= 2.3 T_{2.7} \times 10^{-4} \text{eV}, \quad T_{2.7} = T(t_0) / 2.7 \text{K}. \end{aligned}$$

Nous verrons, en discutant la nucléosynthèse, que $\Omega_B h^2 \sim 2 \times 10^{-2}$ si bien que $\sigma \sim 10^{10}$. Ainsi, le rapport entre les densités baryoniques et photoniques actuelles est

$$\eta = n_B/n_\gamma = 5.9 \times 10^{-10} \left(\frac{\Omega_B h^2}{2.2 \times 10^{-2} T_{2.7}^3} \right).$$

Pendant leur phase relativiste, $m_B \ll T$, la densité des baryons est donnée par (4.57) qui est, à un facteur $4 \times 7/8$ près, celle des photons relativistes

$$T_{\text{rel}} \gg m_B \quad \Rightarrow \quad n_B = \frac{7}{2} n_\gamma.$$

Comme nous l'avons déjà remarqué, une petite fraction de matière a survécu à l'annihilation baryons-antibaryons ($T \sim 1\text{GeV}$). En désignant par z_{rel} un redshift de l'époque précédant cette annihilation, la densité baryonique actuelle est donnée par

$$n_B(t_0) \simeq \frac{n_B(T_{\text{rel}}) - n_{\bar{B}}(T_{\text{rel}})}{z_{\text{rel}}^3} \ll n_B(T_{\text{rel}})/z_{\text{rel}}^3 \sim n_\gamma(t_0).$$

L'asymétrie baryonique δ est de l'ordre de

$$\delta = \frac{n_B(T_{\text{rel}}) - n_{\bar{B}}(T_{\text{rel}})}{n_B(T_{\text{rel}}) + n_{\bar{B}}(T_{\text{rel}})} = \frac{n_B(t_0) z_{\text{rel}}^3}{2n_B(T_{\text{rel}})} = \frac{n_B(t_0)}{7n_\gamma(t_0)} = \eta/7 \sim 10^{-10}. \quad (4.76)$$

Cette valeur, même si petite, est beaucoup plus importante que les estimations obtenues à partir d'arguments purement statistiques. Donc soit on l'accepte comme 'condition initiale' soit on développe un mécanisme pour la générer. Un tel mécanisme doit satisfaire les trois "conditions de Sakharov", 1) violation de la conservation du nombre baryonique, 2) violation de la symétrie CP (conjugaison de charge et parité), 3) le système doit quitter l'équilibre thermique. La transition de phase électro-faible, qui peut satisfaire tous ces critères, est, dans le cadre du modèle standard, trop faible pour générer les baryons. Mais des modifications relativement modestes y arrivent.

À titre de résumé, retenons les résultats suivants :

- Toute interaction peut être caractérisée par un taux de réaction $\Gamma(t)$. Lorsque $\Gamma(t) < H(t)$, l'expansion de l'univers l'emporte et la réaction est *gelée* : elle peut être négligée.

- Les particules (relativistes) non-gelées ont une distribution de Fermi-Dirac ou de Bose-Einstein.

- Dans le cas non-relativiste, s'il n'y a pas de loi de conservation qui s'oppose à la désintégration des particules, la densité décroît de manière exponentielle,

$$n \propto \exp(-m/T).$$

- Dans le cas de particules non-relativistes en équilibre thermique satisfaisant $dN = 0$ (conservation du nombre de particules), $(\mu - m)/T = \mu_0$ est une constante qui détermine leur densité.

- Les particules non-relativistes qui n'interagissent plus (gelées) ont une distribution :

- de Fermi-Dirac ou de Bose-Einstein extrêmement relativiste si elles ont gelé pendant leur époque relativiste, $T_g \gg m$, avec une 'température' effective $T_{\text{eff}} = T_g(a_g/a)$.
- de Maxwell-Boltzmann avec la 'température' effective $T_{\text{eff}} = T_g(a_g/a)^2$ si elles ont gelé pendant leur époque non-relativiste, $T_g \ll m$.

Ayant à disposition les éléments nécessaires à la reconstitution de l'histoire thermique des premières phases de l'univers, nous allons successivement discuter la *recombinaison*, la *nucléosynthèse* et le *gel des neutrinos*, en supposant que l'univers primordial est constitué de photons, de neutrinos sans masse, d'électrons, de baryons (protons et neutrons), caractérisés par les paramètres de densité Ω_γ (photons), Ω_ν (neutrinos) et Ω_b (électrons+baryons).

4.4 La recombinaison

La première transition importante rencontrée sur les traces du passé est la *recombinaison* : lorsque la température avoisine les $T \sim 4000^\circ\text{K}$, les électrons et les protons du plasma peuvent se combiner pour former des atomes d'hydrogène.

4.4.1 Physique de la recombinaison

Dans le cadre de notre approximation, l'échelle caractérisant les interactions dans le plasma électrons+baryons est beaucoup plus courte que le temps de Hubble H^{-1} et l'expansion peut être regardée comme un processus quasi-statique : à chaque instant, les différentes composantes constituant la matière et la radiation sont en équilibre thermique.

Tant que la température T de l'univers est supérieure à $\Delta = \alpha^2 m_e/2 = 1\text{Ry} = 13.6\text{eV}$ (potentiel de ionisation de l'hydrogène neutre), le nombre de photons ionisants est largement suffisant pour dissocier rapidement les atomes de H. La majorité des protons et des électrons sont libres et la densité de H est extrêmement faible. Pour déterminer la température à laquelle cette situation change, la température de la 'recombinaison' ⁵ nous appliquons les règles standards de la mécanique statistique en équilibre à la réaction



En supposant que la pression et la température sont fixées et que seuls N_e , N_p , N_γ et N_H peuvent changer, la seconde loi de la thermodynamique conduit à

$$dG = \mu_p dN_p + \mu_e dN_e + \mu_H dN_H + \mu_\gamma dN_\gamma = 0,$$

où G est le potentiel de Gibbs. Les différents dN_X ne sont pas indépendants. La conservation du nombre de particules pour chacune des espèces implique

$$dN_H = -dN_e = -dN_p. \quad (4.77)$$

Il n'existe pas de relation similaire faisant apparaître dN_γ puisque N_γ n'est pas conservé. Le potentiel chimique des photons satisfait donc $\mu_\gamma = 0$. En tenant

⁵Le terme 'combinaison' semblerait plus adéquat, mais il est difficile de changer des conventions historiques ...

compte de ceci et de la relation (4.77), $dG = 0$ conduit à

$$\mu_e + \mu_p - \mu_H = 0. \quad (4.78)$$

Reprenant l'équation (4.67), nous avons

$$n_e = \frac{2}{(2\pi)^3} \exp(-(m_e - \mu_e)/T) (2\pi m_e T)^{3/2} \quad (4.79)$$

$$n_p = \frac{2}{(2\pi)^3} \exp(-(m_p - \mu_p)/T) (2\pi m_p T)^{3/2} \quad (4.80)$$

$$n_H = \frac{4}{(2\pi)^3} \exp(-(m_H - \mu_H)/T) (2\pi m_H T)^{3/2}. \quad (4.81)$$

En utilisant le fait que l'univers est globalement neutre ($n_e = n_p$) et que l'énergie de liaison $\Delta = \alpha^2 m_e / 2$ est donnée par $\Delta = m_e + m_p - m_H$, il vient

$$\frac{n_e^2}{n_H} = \frac{n_e n_p}{n_H} = e^{-\Delta/T} \left(\frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2}. \quad (4.82)$$

Ce résultat n'est évidemment valable que dans la mesure où les états excités de l'hydrogène peuvent être négligés.

Nous avons négligé la petite différence entre la masse de l'hydrogène et celle du proton dans le facteur entre parenthèse, simplification compréhensible dans la mesure où la dépendance en température intervient principalement par l'intermédiaire de l'exponentielle.

Définissons la fraction de ionisation x_e par $x_e \equiv \frac{n_e}{n_e + n_H}$. Nous trouvons alors

$$\frac{x_e^2}{1 - x_e} = \frac{n_e^2}{n_H(n_p + n_H)} = \frac{1}{n_B} \left(\frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp(-\alpha^2 m_e / 2T). \quad (4.83)$$

Introduisant l'entropie par baryon $\sigma = \frac{4\pi^2}{45} T^3 / n_B$ dans le résultat ci-dessus,

$$\frac{x_e^2}{1 - x_e} = \frac{45\sigma}{4\pi^2} \left(\frac{m_e}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp(-\Delta/T). \quad (4.84)$$

Ceci est l'équation de Saha. La température de recombinaison T_{rec} peut être définie comme la température pour laquelle $x_e = 0.5$ (définition la plus immédiate). Avec $\sigma = 1.4 \times 10^8 (\Omega_B h^2)^{-1}$, on a

$$\left(\frac{T_{rec}}{1eV} \right)^{-3/2} e^{-\Delta/T_{rec}} = 1.3 \times 10^{-16} \Omega_B h^2, \quad (4.85)$$

équation que l'on peut résoudre numériquement. Précisons encore que le calcul que nous avons effectué pré-suppose que matière et radiation sont uniformément distribuées.

En considérant les valeurs $\Omega_B h^2 \simeq 0.02$, on a

$$T_{rec} = 3757K = 0.32eV, \quad z_{rec} = 1376 \quad \text{pour } \Omega_B h^2 = 0.02,$$

où nous avons utilisé la relation $1 + z_{rec} = T_{rec}/T_0$ pour calculer z_{rec} . Cette température est de l'ordre de la température pour laquelle $\rho_\gamma(T) = \rho_B(T)$. A

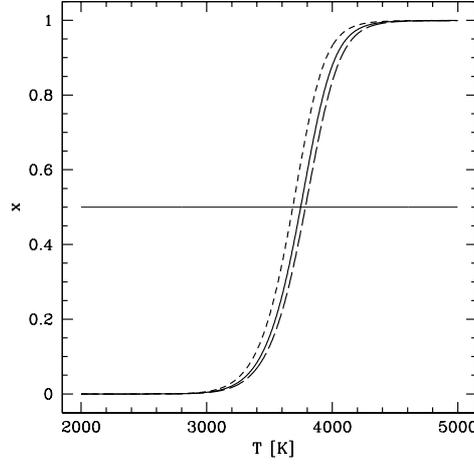


FIG. 4.3 – La fraction de ionisation comme fonction de la température calculée à l'aide de l'équation de Saha pour $\Omega_B h^2 = 0.02$ (trait plein), pour $\Omega_B h^2 = 0.03$ (tirets longs) et pour $\Omega_B h^2 = 0.01$ (tirets courts). Notre définition de la recombinaison, $x_{rec} = 0.5$, est indiquée. Notez comme x transite de 1 à 0 entre $T = 4000\text{K}$ et $T = 3000\text{K}$ et que la température T_{rec} dépend très faiblement de la valeur précise choisie pour x_{rec} .

cet égard, rappelons que le rapport entre les densités d'énergie baryonique et photonique est

$$\begin{aligned} \frac{\rho_\gamma}{\rho_B} &= \frac{(\pi^2/15)T^4}{n_B m_p} = \frac{\pi^2 T_0^4}{15 n_B(t_0) m_p} (z+1) \\ &\simeq 2 \times 10^{-5} \left(\frac{T_{2.7}^4}{\Omega_B h^2} \right) (z+1). \end{aligned} \quad (4.86)$$

Ce rapport est égal à 1 au décalage $z_{\gamma B}$ donné par

$$(1 + z_{\gamma B}) = 10^3 \left(\frac{\Omega_B h^2}{2 \times 10^{-2} T_{2.7}^4} \right) \quad (4.87)$$

ce qui est bien du même ordre que z_{rec} (c'est un pur hasard d'ailleurs). A priori, on aurait pu s'attendre à ce que $T_{rec} \cong 13.6\text{eV}$. Le fait que la recombinaison se passe considérablement plus tard s'explique par le rapport des densités baryoniques et photoniques η qui est extrêmement faible. Les photons d'énergie $E > \Delta$ sont présents en nombre suffisant pour maintenir l'hydrogène ionisé à des températures nettement inférieures au seuil de ionisation Δ ⁶

Après le découplage des photons et des baryons, lorsque la densité d'énergie baryonique devient plus grande que celle des photons, la température de l'univers pourrait, en principe, se comporter différemment de la température d'un

⁶En effet, la recombinaison dans l'état fondamental n'est pas du tout efficace parce que les photons résonants émis sont tout de suite re-absorbés en re-ionisant un autre atome d'hydrogène. La recombinaison en 'cascade', où l'électron est d'abord lié dans un état excité et puis cascade dans l'état fondamental, est beaucoup plus efficace, parce que la transition de liaison dans un état excité peu se faire par émission de deux photons. Mais les résultats importants comme le redshift de recombinaison etc. ne change pas qualitativement.

gaz de photons en équilibre thermique. Comme nous le verrons, après la recombinaison, le libre parcours moyen des photons devient plus important que le rayon de Hubble, $l_\gamma \gg H^{-1}$, et ces derniers se propagent librement. Ils conservent alors leur distribution de Bose-Einstein relativiste avec une 'température' $T = T_D a_D / a$, où l'index D désigne la valeur au moment du découplage. Pour le gaz d'hydrogène, on pourrait attendre un comportement non-relativiste de la forme $T_H \propto 1/a^2$. Néanmoins, les électrons libres restants sont suffisamment nombreux pour maintenir la température de l'hydrogène proche de celle des photons. Ceci provient du fait que le nombre de photons est si important que, même après le découplage des photons, l'hydrogène n'est pas découplé.

Comme nous l'avons vu, partant de la pression et de la densité d'énergie du système baryons + photons, avec

$$\rho = n_B m_B + (3/2)n_B T + \frac{\pi^2}{15} T^4 \quad (4.88)$$

$$p = n_B T + \frac{\pi^2}{45} T^4. \quad (4.89)$$

nous arrivons à la relation

$$\frac{a}{T} \frac{dT}{da} = -\frac{3n + \frac{4\pi^2}{15} T^3}{(3/2)n + \frac{4\pi^2}{15} T^3} = -\frac{\sigma + 1}{\sigma + 1/2} \quad (4.90)$$

pour un gaz mono-atomique. Comme $\sigma \gg 1$, ceci implique $T \propto 1/a$. Le comportement de la température n'est donc presque pas influencé par la recombinaison.

4.4.2 La ionisation restante et le gel (découplage) des photons

Nous avons calculé la température à laquelle les électrons et les protons se recombinent en hydrogène neutre. A un moment donné, le nombre d'électrons et de protons libres devient si faible que le taux de recombinaison devient négligeable. La recombinaison s'arrête alors, laissant la place à un faible taux x_R d'électrons et de protons libres.

Afin de calculer le degré de ionisation x_R restant ainsi que le redshift du découplage des photons, nous allons tout d'abord estimer la température T_g du gel de la recombinaison. La section efficace de la réaction $p^+ + e^- \rightarrow H + \gamma$, est donnée par (voir réf. [50])

$$\langle \sigma_R v \rangle \simeq 4.7 \times 10^{-24} \left(\frac{T}{1 \text{ eV}} \right)^{-1/2} \text{ cm}^2. \quad (4.91)$$

Pour le taux de réaction on obtient alors

$$\begin{aligned} \Gamma_R &= n_p \langle \sigma_R v \rangle = x_e \left(\frac{n_B}{n_\gamma} \right) n_\gamma \langle \sigma_R v \rangle \\ &\simeq 2.4 \times 10^{-10} \text{ cm}^{-1} \left(\frac{T}{1 \text{ eV}} \right)^{7/4} \exp(-\Delta/2T) (\Omega_B h^2)^{1/2} \end{aligned}$$

où nous avons supposé que la fraction de ionisation est nettement inférieure à 1, i.e., $x_e \simeq (\sqrt{45}\sigma/2\pi)(m_e/2\pi T)^{3/4} \exp(-\Delta/2T) \ll 1$. Nous avons également pris $\sigma = 1.3 \times 10^8 / (\Omega_B h^2)$.

Pour calculer T_g , nous avons encore besoin de $H(T)$. Comme nous l'avons déjà souligné, la densité de l'univers, après la recombinaison, est dominée par la matière dont la pression $p \ll \rho$ est négligeable. De plus, comme $\Omega_m(t_0) \equiv \Omega_m \simeq 0.3$, les effets d'une éventuelle courbure ou constante cosmologique sont négligeables pour tout $z \gtrsim 5$. On a alors

$$\begin{aligned} H^2 &\simeq \frac{8\pi G}{3}\rho \simeq \frac{8\pi G}{3}\rho_0(a_0/a)^3 \\ &= \frac{8\pi G}{3}\Omega_m\rho_c(t_0)(T/T_0)^3 \end{aligned}$$

soit

$$H \simeq 3 \times 10^{-23} \text{cm}^{-1} (\Omega_m h^2)^{1/2} \left(\frac{T}{1\text{eV}} \right)^{3/2}. \quad (4.92)$$

L'équation (4.92) est une formule très utile. Elle est valable si $p \ll \rho$ et si la courbure (ou constante cosmologique) est négligeable.

La température de gel T_g est définie par $\Gamma_R(T_g) = H(T_g)$, ce qui conduit à

$$\left(\frac{T_g}{1\text{eV}} \right)^{1/4} \exp(-\Delta/2T_g) = 1.2 \times 10^{-13} \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_B} \right)^{1/2}, \quad (4.93)$$

le résultat est indépendant de h . Pour $\Omega_m \simeq 7\Omega_B$, $T_g \simeq 0.24\text{eV}$ et $z_g \simeq 1060$ (voir fig. 4.4). T_g ne dépend pas fortement du rapport Ω_m/Ω_B .

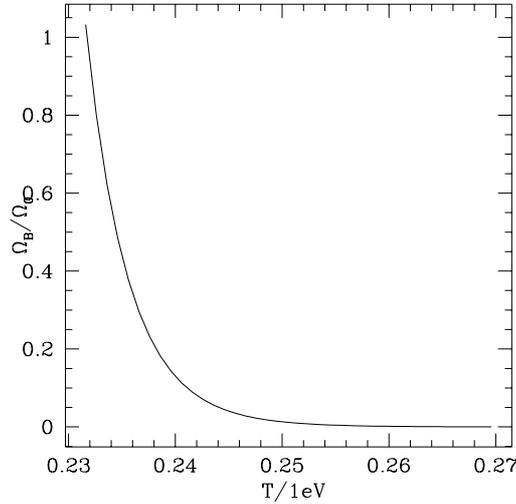


FIG. 4.4 – La température de gel du processus de recombinaison en fonction du rapport $\Omega_B/\Omega_m \leq 1$.

La fraction de ionisation restante est donnée par

$$x_R \simeq x(T_g) \simeq 7.3 \times 10^{-6} \left(\frac{T_g}{1\text{eV}} \right)^{-1} \Omega_m^{1/2}/(\Omega_B h) \simeq 3 \times 10^{-5} \Omega_m^{1/2}/(\Omega_B h) \quad (4.94)$$

Une analyse numérique plus soignée donne [42] $x_R \sim 1.3 \times 10^{-5} \Omega_m^{1/2}/(\Omega_B h)$.

En résumé, tant que $T > T_g$, la réaction $p + e \rightleftharpoons H + \gamma$ est en équilibre thermique. Lorsque $T < T_g$, le degré d'ionisation ne change presque plus. Soulignons encore le fait que l'hypothèse de l'équilibre thermique pour la dérivation de l'équation de Saha (4.84) est justifiée puisque $T_g < T_{rec}$.

Comme la densité d'électrons libres baisse, le taux d'interaction des photons qui y est proportionnel diminue aussi. Calculons la température à laquelle les photons du fond cosmique cessent d'interagir avec les électrons. La section efficace de la diffusion Rayleigh avec des atomes neutres ($\propto \omega^3$, exercice!) est beaucoup plus faible que la diffusion électron-photon et peut être négligée.

Le processus de diffusion qui reste effectif le plus longtemps est la diffusion Thomson élastique, qui ne change plus l'énergie des photons mais seulement leur direction,

$$\begin{aligned} \Gamma_c(T) &= \sigma_T n_e = \sigma_T x_e \left(\frac{n_B}{n_\gamma} \right) n_\gamma \\ &\simeq 3.4 \times 10^{-11} \text{cm}^{-1} (\Omega_B h^2)^{1/2} \left(\frac{T}{1 \text{eV}} \right)^{9/4} \exp(-\Delta/2T). \end{aligned}$$

En comparant ce taux de réaction avec le taux d'expansion, nous obtenons, avec T_{dec} défini par $H(T_{dec}) = \Gamma_c(T_{dec})$, la valeur $T_{dec} \sim 0.26 \text{eV}$, c'est-à-dire $z_{dec} \sim 1100$ pour $\Omega_B/\Omega_m \sim 0.1$. Après z_{dec} , les photons du fond cosmique se propagent sans collisions et seule l'expansion de l'univers influence leur distribution. Comme nous l'avons vu, ils conservent alors leur distribution de Bose-Einstein relativiste avec une température $T \propto 1/a$. C'est le fond de rayonnement cosmique (*CMB*) qui a été découvert par Penzias & Wilson en 1964 [43]. Ces deux radio-astronomes américains ont obtenu le prix Nobel 1978 pour leur découverte. Dès lors, le spectre de ce rayonnement très isotrope a été mesuré sur plus de trois ordres de grandeur en fréquence et aucune déviation du spectre Planck n'a été trouvée! La température actuelle du *CMB* est

$$T_0 = (2.725 \pm 0.001) \text{K}. \quad (4.95)$$

Dans cette approche relativement simple, nous avons négligé les réactions de recombinaison dans les états excités de l'hydrogène ainsi que la présence de l'hélium (voir section suivante). Un calcul numérique précis donne une recombinaison qui est un peu plus lente. Pour en savoir plus, consulter [42] et [39].

4.5 Spectre et anisotropies du rayonnement de fond cosmologique (*CMB*)

4.5.1 Généralités

Pendant toute la période dominée par le rayonnement, matière et radiation coexistent sous la forme d'un plasma, et ce jusqu'à ce que le taux de réaction par diffusion Thomson ait suffisamment baissé pour que ces deux composantes découpent. Lors de la recombinaison ($z_{rec} \sim 1000 \sim z_{dec}$), la densité d'électrons libres diminue énormément, parce que ces derniers se recombinent avec les protons libres pour former des atomes d'hydrogène neutre comme nous venons de discuter.

Le rayonnement émis lors de ce découplage, appelé *rayonnement de fond cosmologique* (CMB)⁷, est caractérisé par un libre parcours moyen l_γ extrêmement grand, c'est-à-dire

$$l_\gamma \gg H^{-1}.$$

Ces photons ont donc voyagé jusqu'à nos jours sans subir d'interactions significatives, si ce n'est le décalage en fréquence dû à l'expansion de l'univers.

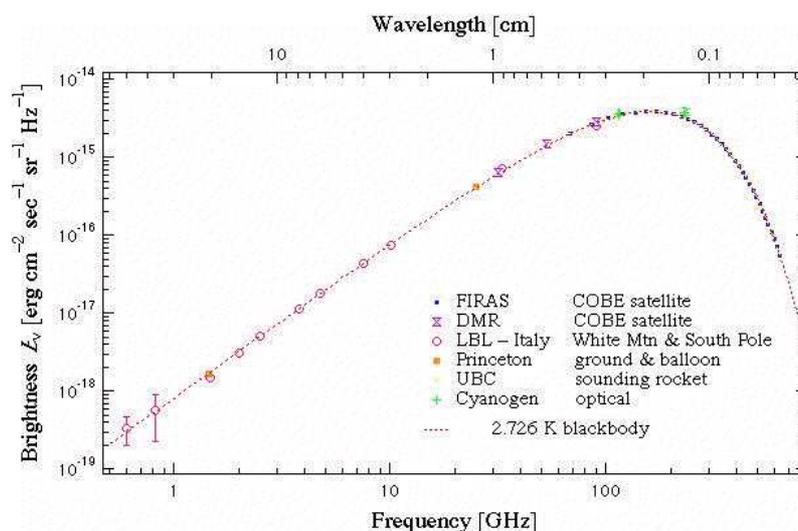


FIG. 4.5 – Mesures du spectre du *CMB* (d'après [20]).

L'existence du *CMB* fut prédite par plusieurs cosmologistes dans la première moitié du vingtième siècle. Gamow, Alpher et Bethe en particulier étudièrent les réactions chimiques susceptibles de se dérouler dans les conditions extrêmes de l'univers primordial. Ils arrivèrent à la conclusion que l'univers actuel est rempli d'un gaz de photons, témoin de la chaleur des premières phases de l'univers, et dont la distribution est celle d'un corps noir. En tenant compte de l'expansion de l'univers, ils estimèrent sa température à $T_0 \sim 5\text{K}$, ce qui correspond à une énergie moyenne des photons E_m de quelques 10^{-4} eV.

Le rayonnement 3K possède les propriétés suivantes :

1. Il suit le spectre théorique d'un corps noir (loi de Planck) de température $T_0 = 2.725 \pm 0.001$ K avec une extraordinaire exactitude comme le montrent les mesures de FIRAS (Far Infrared Absolute Spectrometer) et autres, cf. figure 4.5.
2. Il est presque parfaitement isotrope, une fois soustrait le dipôle dû au mouvement de la Terre par rapport au référentiel dans lequel la distribution du *CMB* apparaît isotrope (voir chapitre 6),

$$\left(\frac{\Delta T}{T} \right)_{\text{dipôle}} \cong 10^{-3},$$

⁷pour *Cosmic Microwave Background*.

le centre de gravité du système solaire se déplaçant à la vitesse de l'ordre de 300 km s^{-1} . Une fois la soustraction effectuée, ne subsistent que de petites fluctuations de l'ordre de (voir chapitre 6)

$$\sqrt{\left\langle \left(\frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right\rangle} \sim \text{quelque } 10^{-5}$$

sur toutes les échelles angulaires.

3. C'est la principale source de rayonnement de l'univers. En effet, dans un centimètre cube de l'univers, on trouve en moyenne 420 photons provenant du *CMB* et seul 1 photon provenant des étoiles et galaxies.

4.5.2 Evolution de la température du *CMB*

Les trois propriétés énoncées ci-dessus accréditent l'origine cosmologique du *CMB*. Comme nous l'avons déjà dit, l'univers était opaque au rayonnement jusqu'à la recombinaison. Ensuite, l'univers devint transparent et les photons purent se propager de la *surface de dernière diffusion* (surface à $z = z_{dec}$) à nos détecteurs. Lors de leur émission, leur température était de l'ordre de $3000K$. L'expansion les a ensuite refroidis jusqu'à $T_\gamma(t = t_0) \equiv T_0 \sim 3K$.

En 2000 Srianand *et al.* ont observé un nuage de gas à $z_1 = 2.34$, dans lequel ils ont mesuré la populations des niveaux de structure fine atomiques qui sont excités par le rayonnement *CMB* et qui produisant des raies d'absorptions dans le spectre de lumière émis par un quasar plus lointain. Ces raies ont permis d'étudier la populations des niveaux de structure fine de certains atomes ce qui détermine la température ambiante à $6.0K < T(z_1) < 14.0K$. Une observation similaire pour un nuage à $z_1 = 1.776$ a donné $T_1 = 7.4 \pm 0.8K$.

Partant de l'éq. (3.23), il vient

$$\frac{T_0}{T_1} \frac{a_0}{a_1} = 1.$$

Avec $a_0/a_1 = (1 + z)$, nous avons

$$T_1 = T_0(1 + z_1) \begin{cases} 7.6K & \text{pour } z_1 = 1.776 \\ 9.1K & \text{pour } z_1 = 2.34 \end{cases}$$

des valeurs en parfait accord avec les observations. Pour une revue de la situation actuelle voir [56]. Ceci confirme le modèle théorique : plus l'on remonte dans le temps, plus l'univers est chaud, en accord avec l'équation (3.23). Entre temps des mesures de ce type ont été répétées plusieurs fois, et on toujours confirmées la relation $T(z) = T_0(1 + z)$.

Le *CMB* est un arbre de transmission entre l'univers primordial, très dense et très chaud, et l'univers actuel. Les théories décrivant la formation des grandes structures prédisent en effet l'existence de petites inhomogénéités dans la distribution de la matière. Ces inhomogénéités induisent des anisotropies dans le *CMB*, dont la distribution dépend des différents paramètres cosmologiques. L'observation détaillée de ces fluctuations en température est l'un des plus grands enjeux de la cosmologie.

4.5.3 Thermalisation

Pourquoi est-ce que le spectre du *CMB* est celui d'un corps noir ?

Pendant la période précédant la recombinaison, mais pendant laquelle les électrons sont déjà non-relativistes, $T < m_e$, le rayonnement inter-agissait avec la matière par l'entremise de trois processus essentiellement (cf. [15] chapitre 8) :

- **La diffusion Compton,**

$$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-.$$

Dans le référentiel du centre de masse du système, i.e. dans le réf. où l'impulsion totale est nulle, la conservation d'impulsion requiert que les énergies des particules restent inchangé par la collision,

$$m_e \gamma + E = m_e \gamma' + E' \text{ et } m_e \gamma \mathbf{v} + E \mathbf{n} = m_e \gamma' \mathbf{v}' + E' \mathbf{n}' = \mathbf{0}$$

impliquent que $E = E'$. Mais dans toute autre référentiel, le photon transfère une partie de son énergie et de son impulsion à l'électron si son impulsion est suffisamment importante ou vice versa. Comme ce transfert est proportionnel à $E v$, il devient de moins en moins important à basse température et pour $z \lesssim 10^4$, cette diffusion est bien approximée par la diffusion Thomson, qui ne modifie que la direction de l'impulsion mais ne transfère pas d'énergie. Si c'est le photon qui gagne de l'énergie on parle aussi de 'diffusion Compton inverse'.

- **La diffusion Coulombienne (Bremsstrahlung)** entre noyaux atomiques et électrons. Quand un électron passe un noyau atomique, une charge positive quasiment immobile, l'électron subit une accélération et par conséquent émet une onde électromagnétique,

$$X + e^- \rightarrow X + e^- + \gamma.$$

Cette émission porte le nom de Bremsstrahlung ou 'free-free emission'. Le processus inverse, appelé absorption free-free, existe aussi (detailed balance). A un redshift $z < 10^7$ ce processus est plus lente que l'expansion pour des énergies $E \sim T$ et il est donc gelé (même s'il reste rapide pour des petites impulsions, $E \ll T$). Ce processus ne conserve pas le nombre de photons.

- **La double diffusion Compton,**

$$e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma + \gamma,$$

qui ne conserve non plus le nombre de photons.

Cette interaction gèle aussi à $z \simeq 10^7$. Avant ce moment, elle est plus rapide que Bremsstrahlung. Donc Bremsstrahlung est moins importante dans cette discussion. La combinaison de ces trois interactions garde le fond cosmique en équilibre thermique avant $z \simeq 10^7$ ce qui correspond à $T \simeq 1\text{keV}$. Après ce moment, les processus qui changent le nombre des photons sont gelés. La distribution d'équilibre pour un nombre photonique fixé est celle de Bose-Einstein avec potentiel chimique,

$$f = \frac{1}{e^{(\omega+\mu)/T} - 1},$$

Le potentiel chimique est nul pour $T > 1\text{keV}$, et il ne change que si des photons sont injectés dans le CMB. Si ceci serait le cas après $z \simeq 10^7$ mais avant la recombinaison, le spectre du CMB aurait un potentiel chimique non-nulle.

Les observations de COBE FIRAS donnent

$$\begin{aligned} |\mu| &\leq 9 \times 10^{-5} \\ |y| &\leq 1.2 \times 10^{-5} \\ |Y_{ff}| &\leq 1.9 \times 10^{-5}, \end{aligned} \quad (4.96)$$

où μ , y et Y_{ff} sont respectivement le potentiel chimique, le paramètre de Compton et la contamination par absorption free-free caractérisant le CMB actuellement. Les limites sur ces paramètres impliquent des limites intéressantes pour des processus 'non-standard' après $z \sim 10^7$. La grandeur y est le 'Compton- y paramètre' qui est créé si les photons du CMB traversent un milieu d'électrons chauds (p. ex. un amas galactique). Ceci est l'effet Sunyaev-Zel'dovich (voir paragraphe 6.5.2).

4.6 Nucléosynthèse

4.6.1 Préambule

Continuons notre voyage dans le passé pour atteindre des températures comprises dans l'intervalle $0.01\text{MeV} \lesssim T \lesssim 100\text{MeV}$. Nous allons tout d'abord rappeler quelques concepts qui seront utiles pour la suite de cette discussion.

Pour $m_\nu < T < m_e$, la densité d'énergie de la matière relativiste est donnée par les photons et trois sortes de neutrinos. Comme nous le verrons par la suite, la température des neutrinos est plus basse d'un facteur $(4/11)^{1/3}$ que celle des photons. Ceci donne

$$\begin{aligned} \rho_{\text{rel}}(z) &= [\rho_\gamma(z) + \rho_\nu(z)] = [1 + 3(7/8)(4/11)^{4/3}] \frac{\pi^2}{15} T_0^4 (1+z)^4 \\ &\simeq 10^{-33} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} (1+z)^4 \end{aligned} \quad (4.97)$$

$$= [1 + 3(7/8)(4/11)^{4/3}] \Omega_{\text{rel}}(t_0) \rho_c(t_0) (1+z)^4 \quad \text{avec} \quad (4.98)$$

$$\Omega_{\text{rel}}(t_0) h^2 \simeq 2.48 \times 10^{-5}. \quad (4.99)$$

Ici, $\Omega_{\text{rel}}(t_0)$ est le paramètre de densité des photons, seules particules relativistes à $T_0 \simeq 2.35 \times 10^{-4}\text{eV}$. Au-dessous du seuil de masse des neutrino, $m_\nu < T$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Omega_{\text{rel}}(t)}{\Omega_m(t)} \right) &= \left(\frac{\Omega_{\text{rel}}(t_0) [1 + 3(7/8)(4/11)^{4/3}]}{\Omega_m(t_0)} \right) (1+z) \\ &= 4.2 \times 10^{-5} \left(\frac{1}{\Omega_m h^2} \right) (1+z). \end{aligned} \quad (4.100)$$

Comme $\Omega_m h^2 = 0.13 \pm 0.02$, le décalage z_{eq} au dessus duquel la densité d'énergie de l'univers est dominée par la contribution relativiste, donné par

$$z_{eq} \simeq 2.4 \times 10^4 \Omega_m h^2 \simeq 3100; \quad T_{eq} \simeq 0.73\text{eV}. \quad (4.101)$$

Par conséquent, pour $T > T_{eq}$, la densité de l'univers est dominé par la contribution relativiste, soit

$$\rho = 3p \quad , \quad a \propto t^{1/2}. \quad (4.102)$$

Aux températures supérieures à quelques eV, la contribution de la matière non-relativiste à l'expansion de l'univers est négligable. Nous pouvons aussi négliger la courbure et la constante cosmologique. La densité d'énergie est alors donnée par

$$\rho = g_{\text{eff}}(T) \frac{\pi^2}{30} T^4 \quad \text{où} \quad g_{\text{eff}}(T) = N_B(T) + \frac{7}{8} N_F(T), \quad (4.103)$$

N_B (N_F) étant le nombre de degrés de liberté bosoniques (fermioniques) relativistes à la température T .

Pour discuter les processus physiques qui se passent à une température donnée de l'univers, il faut que nous connaissions les interactions physiques et le spectre des particules relativistes à cette température. Dans cette section nous allons discuter ce qui se passe entre $10\text{keV} < T < 100\text{MeV}$. Les seules particules relativistes présentes à cette époque sont les électrons, les positrons, les neutrinos et les photons. Les limites provenant des expériences directes la physique des particules pour les différents types de neutrinos sont

$$m_{\nu_e} \lesssim 2\text{eV} \quad , \quad m_{\nu_\mu} \lesssim 0.2\text{MeV} \quad , \quad m_{\nu_\tau} \lesssim 18\text{MeV} . \quad (4.104)$$

Correctement, les états propres du 'flavor' (e , μ , τ) ne sont pas identiques aux états propres de masse. On a

$$|\nu_f\rangle = \sum_i U_{fi} |\nu_i\rangle$$

où $|\nu_f\rangle$ et $|\nu_i\rangle$ signifient les états propres de 'flavor' et de masse, et U_{fi} est une matrice unitaire. On définit alors la masse moyenne d'un 'flavor' par

$$m_f^2 = \sum_i |U_{fi}|^2 m_i^2 .$$

Les limites dans (4.104) sont à comprendre dans ce sens. D'autre part, les résultats de l'expérience Super-Kamiokande et d'autres expériences d'oscillations des neutrinos, ne montrent pas seulement que les neutrinos oscillent mais aussi que les différences des masses sont $\Delta m_{21}^2 = 0.000079\text{eV}^2$ et $\Delta m_{32}^2 = 0.0027\text{eV}^2$. Donc il existe au moins un neutrino avec une masse $m_\nu \geq |\Delta m_{32}| \simeq 0.05\text{eV}$. En plus, si les seules neutrinos qui existent sont les trois neutrinos connues, leurs différences de masse ne sont pas plus grande que cette valeur et donc toute masse des neutrinos est inférieure à environ 2eV.

Pour la suite, nous supposons alors que $m_{\nu_i} \ll 1\text{MeV}$. Comme $m_p, m_n \sim m_B \sim 1\text{GeV} > 100\text{MeV}$, les neutrons et les protons présents à la température T_0 (dans l'univers actuel) l'étaient aussi dans l'intervalle de températures considéré ci-dessus et leur nombre est conservé. Le rapport entre la densité de photons et de baryons $\eta = n_\gamma/n_B$ n'a pas changé de manière significative, et nous pouvons le prendre égal à $\eta \simeq 2.7 \times 10^{-8} \Omega_B h^2$. Nous négligeons la petite contribution de paires de muons dont la densité décroît comme $\exp(-m_\mu/T)$ avec $m_\mu \simeq 106\text{MeV}$.

La réaction $e^- + e^+ \rightleftharpoons \gamma + \gamma$ (ou $3\gamma \dots$) maintient l'équilibre thermique entre les e^\pm et les photons. La conservation du potentiel chimique implique

$$\mu_e + \bar{\mu}_e = 2\mu_\gamma = 0, \quad \mu_e = -\bar{\mu}_e, \quad (4.105)$$

où l'on a noté $e^+ \equiv \bar{e}$ et $\mu_{\bar{e}} \equiv \bar{\mu}_e$. La différence de densité entre les positrons et les électrons est alors

$$n_e - \bar{n}_e = \frac{1}{\pi^2} \int p^2 dp \left[\frac{1}{\exp(\frac{E-\mu_e}{T}) + 1} - \frac{1}{\exp(\frac{E+\mu_e}{T}) + 1} \right]. \quad (4.106)$$

Dans le régime relativiste, nous avons $m \ll T$ et $E \cong p$. Nous supposons en plus que les potentiels chimiques soient petits, c'est-à-dire, $\mu \ll T$ tel que $\exp(\mu_e/T) \cong 1$ (nous allons voir que le résultat confirme cette hypothèse). En tenant compte de ces hypothèses, nous pouvons développer l'expression ci-dessus en premier ordre en μ_e/T ce qui donne

$$\begin{aligned} n_e - \bar{n}_e &= \frac{2\mu_e}{\pi^2 T} \int \frac{p^2 dp e^{p/T}}{(\exp(p/T) + 1)^2} \\ &= \frac{-2\mu_e}{\pi^2} \int p^2 dp \frac{d}{dp} \left[\frac{1}{\exp(p/T) + 1} \right] \\ &= \frac{4\mu_e}{\pi^2} \int \frac{p dp}{\exp(p/T) + 1} = \frac{\mu_e T^2}{3} \quad \text{si } m_e \ll T, \mu_e \ll T. \end{aligned}$$

L'intégral fermionique a été évalué à l'aide de la relation (4.56). Dès que l'univers a refroidi en dessous de la température $T \sim m_e$, toutes les paires e^\pm s'annihilent et seul le petit excès $n_e - \bar{n}_e$ subsiste en faveur des électrons.

À cette époque, la seule autre particule chargée dans l'univers est le proton. Comme l'univers semble être globalement neutre, cet excès détermine la densité baryonique de l'univers. Avec $n_\gamma = 2T^3 \zeta(3)/\pi^2$, nous avons

$$\frac{n_e - \bar{n}_e}{n_\gamma} \sim \frac{\mu_e}{T} \sim \frac{n_B}{n_\gamma} \sim 2.7 \times 10^{-8} \Omega_B h^2. \quad (4.107)$$

Nous pouvons alors négliger les petits potentiels chimiques $\mu_e \sim 10^{-10} T$ pour la suite des calculs. Considérant maintenant la réaction $\nu + \bar{\nu} \rightleftharpoons e + \bar{e}$, on a

$$\mu_\nu + \bar{\mu}_\nu = \mu_e + \bar{\mu}_e = 0. \quad (4.108)$$

Malheureusement, le rapport $(n_\nu - \bar{n}_\nu)/n_\gamma$, qui détermine avec $n_e - \bar{n}_e$ le nombre leptonique de l'univers, n'est pas connu des observations. Nous supposons que L (comme B) est petit et négligeons dans la suite un potentiel chimique possible pour les neutrinos. (La comparaison de nos résultats avec les observations peut être utilisée pour limiter la valeur du potentiel chimique des ν .)

À $T \sim 100 \text{ MeV}$, γ , e^\pm , ν et $\bar{\nu}$ sont les particules relativistes en équilibre thermique. Par conséquent, le nombre de degrés de liberté bosonique est $N_B = 2$ et le nombre de degrés de liberté fermionique est $N_F = 4 + 6$, ce qui conduit à

$$g_{\text{eff}}(T \sim 100 \text{ MeV}) = \frac{43}{4} = 10.75.$$

Comme la densité d'énergie de l'univers est dominée par ces particules, le paramètre de Hubble peut être exprimée comme

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{1}{4t^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho = \frac{8\pi^3 G}{90}g_{\text{eff}}T^4.$$

Avec la masse de Planck m_P définie par $G = 1/m_P^2 = 1/(1.22 \times 10^{19} \text{GeV})^2$, ceci donne

$$H^2(T) \simeq 2.76g_{\text{eff}}(T) \left(\frac{T^2}{m_{Pl}}\right)^2 \quad (4.109)$$

$$H \simeq 0.21\sqrt{g_{\text{eff}}}\left(\frac{T}{1\text{MeV}}\right)^2 \text{sec}^{-1} \quad (4.110)$$

$$\begin{aligned} t = 1/(2H) &\simeq 0.83g_{\text{eff}}(T)^{-1/2} \left(\frac{m_{Pl}}{T^2}\right) \\ &\simeq 2.5\text{sec} \left(\frac{1\text{MeV}}{T}\right)^2 g_{\text{eff}}(T)^{-1/2} \end{aligned} \quad (4.111)$$

Autrement dit, la température de $T \sim 100\text{MeV}$ correspond à un âge de l'univers de $t \sim 10^{-4}\text{sec}$, et la température de 1MeV correspond à $t \sim 1\text{sec}$. La relation (4.111) peut être appliquée pour toute la phase dominée par la matière relativiste, pourvu que le nombre de degrés de liberté effectif soit connu.

4.6.2 Le gel des neutrinos

Les neutrinos sont maintenus en équilibre thermique par les interactions faibles neutres (échange d'un boson Z) $e + \bar{e} \rightleftharpoons \nu + \bar{\nu}$, et par les interactions faibles chargées (échange de bosons W^\pm) $e + \bar{\nu} \rightleftharpoons e + \bar{\nu}$ et $\bar{e} + \nu \rightleftharpoons \bar{e} + \nu$. Les sections efficaces de ces processus sont calculées en détail dans le cours d'interactions faibles. Nous n'allons donc pas y revenir. Rappelons simplement que, pour des énergies beaucoup plus faibles que les masses des bosons $m_Z, m_{W^\pm} \sim 100\text{GeV}$, l'interaction faible se réduit à une interaction ponctuelle connectant quatre courants fermioniques (théorie universelle 4-fermion $V - A$). Dans le cadre de cette théorie, les interactions ci-dessus sont décrites par un lagrangien effectif

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\mu^\dagger J^\mu + \text{conjugué hermitique} \\ &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left(\bar{u}_e \gamma_\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) u_\nu \right) \left(\bar{u}_\nu \gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) u_e \right) + \text{c.h.}, \end{aligned} \quad (4.112)$$

où le paramètre de couplage G_F est la constante de Fermi

$$G_F = 1.166 \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2} = (293\text{GeV})^{-2}. \quad (4.113)$$

Les différentes sections efficaces des processus ci-dessus, calculées à partir du lagrangien (4.112), sont alors identiques. Le résultat obtenu est

$$\sigma_F \simeq G_F^2 E^2 \sim G_F^2 T^2,$$

La densité de particules en interaction est $n(T) = g_{\text{eff}}(T)\zeta(3)T^3/\pi^2 \sim 1.3T^3$ en prenant $g_{\text{eff}}(T) = (4 + 6)7/8 = 70/8$. De plus, nous pouvons prendre $v \sim 1$ puisque nous sommes en régime relativiste. Ainsi,

$$\Gamma_F = \sigma_F(T)n(T) \simeq 1.3G_F^2 T^5.$$

En divisant Γ_F par l'expression de H obtenue en (4.109), nous avons

$$\frac{\Gamma_F}{H} \simeq 0.24 T^3 m_{Pl} G_F^2 \simeq \left(\frac{T}{1.4 \text{MeV}} \right)^3. \quad (4.114)$$

Pour des températures inférieures à $T_F \sim 1.4 \text{MeV}$, la probabilité pour qu'un neutrino interagisse avec une autre particule en un temps de Hubble H^{-1} est plus faible que l'unité. Le plasma est alors transparent aux neutrinos, qui ne sont plus en équilibre thermique avec les électrons et les positrons. Ils se découplent du reste de la matière et gardent leur distribution de Fermi-Dirac relativiste avec une 'température'

$$T_\nu = T_F a_F / a. \quad (4.115)$$

Tant que la température des photons, électrons et baryons décroît comme $1/a$, les neutrinos conservent la même température que les électrons, les baryons et le gaz de photons, même s'ils ne sont plus en équilibre thermique avec ces particules. En revanche, dès que le facteur $g_{\text{eff}}(T)$ change, la température des particules en équilibre décroît moins rapidement que $1/a$, pendant un court intervalle de temps, si bien que, par la suite, la température thermodynamique du gaz de photons est plus élevée que celle des neutrinos.

Un tel changement se produit lorsque la température de l'univers baisse au dessous du seuil de la formation des paires électron-positron, $T = m_e \sim 0.5 \text{MeV}$. Au dessous de cette température, le taux de réaction du processus $e + \bar{e} \rightarrow \gamma + \gamma$ reste appréciable, tandis que celui du processus inverse $\gamma + \gamma \rightarrow e + \bar{e}$, diminue exponentiellement. Ainsi, à $T \sim 0.5 \text{MeV}$, les électrons et les positrons s'annihilent pour donner des photons. A l'issue de cette réaction, une grande quantité de chaleur est produite sous forme de photons. Toutefois, comme les neutrinos n'interagissent pas avec le reste des particules, ils ne bénéficient pas de cette production d'énergie.

Pour calculer le réchauffement du bain de photons dû à l'annihilation des e^\pm , nous pouvons tenir compte du fait que ce processus est adiabatique, c'est-à-dire que l'entropie des électrons et des photons est conservée (l'entropie des baryons, $s_B \simeq s_\gamma / \sigma$, est négligeable devant celle des photons). Nous avons donc

$$S_i = S_f \quad (4.116)$$

avec

$$S_i = \frac{4}{6} a_{SB} g_{\text{eff},i} (Ta)_i^3, \quad S_f = \frac{4}{6} a_{SB} g_{\text{eff},f} (Ta)_f^3,$$

Les degrés de liberté des électrons et des positrons disparaissent du facteur $g_{\text{eff},f}$ suite à l'annihilation. Ainsi, $g_{\text{eff},i} = 2 + 4(\frac{7}{8}) = 11/2$ et $g_{\text{eff},f} = 2$. En égalant S_i et S_f , on a

$$(Ta)_f = (Ta)_i \left(\frac{11}{4} \right)^{1/3},$$

alors que pour les neutrinos, leur température se comporte toujours comme $1/a$, $(T_\nu a)_f = (T_\nu a)_i$, puisqu'ils ne participent pas au réchauffement. Ainsi, aux températures $T \ll m_e$,

$$T = \left(\frac{11}{4} \right)^{1/3} T_\nu. \quad (4.117)$$

Dans un calcul précis, on pourrait tenir compte de la thermalisation de l'énergie acquise par les photons à l'ensemble des baryons. Toutefois, comme le rapport des densités baryoniques et photoniques, η , est extrêmement faible, la correction est négligeable.

Après l'annihilation des e^\pm , aucun autre processus d'annihilation ne survient. Nous en concluons qu'à présent l'univers baigne non seulement dans le fond de rayonnement cosmique des photons, mais aussi dans un fond de neutrinos, dont la 'température' est

$$T_\nu(t_0) = (4/11)^{1/3} T_0 = 1.95K. \quad (4.118)$$

Posons

$$g_0 = 2 + 6 \frac{7}{8} \left(\frac{4}{11} \right)^{4/3} \simeq 3.36 \quad (4.119)$$

$$g_{0S} = 2 + 6 \frac{7}{8} \left(\frac{4}{11} \right) \simeq 3.91. \quad (4.120)$$

Ce sont respectivement les degrés de liberté effectifs de la densité d'énergie et de l'entropie. Ainsi, la densité d'énergie relativiste et l'entropie après l'annihilation des électron/positron paires sont

$$\rho_{\text{rel}}(z) = \frac{\pi^2}{30} g_{\text{eff}} T^4 \simeq 8.1 \times 10^{-34} g/cm^3 (1+z)^4 \quad (4.121)$$

$$= \left[1 + 3 \frac{7}{8} \left(\frac{4}{11} \right)^{4/3} \right] \Omega_{\text{rel}}(t_0) \rho_{c0} (1+z)^4 \quad (4.122)$$

avec

$$\Omega_{\text{rel}}(t_0) = 2.5 \times 10^{-5} h^{-2} \quad (4.123)$$

$$s(z) = \frac{2\pi^2}{45} g_{0S} T^3 \simeq 3 \times 10^3 cm^{-3} (1+z)^3. \quad (4.124)$$

La section efficace des neutrinos étant extrêmement petite à basse énergie, la détection de ce fond de neutrinos n'est pas encore intervenue à l'heure où nous écrivons ces lignes.

(Exercice : calculer la section efficace pour la réaction $e^-, \nu \rightarrow e^-, \nu$ à l'énergie $E_\nu = T_\nu$. Comparer avec celle des neutrinos détectés dans Super-Kamiokande.)

4.6.3 Nucléosynthèse

D'après les dernières observations, l'abondance en masse de l'hélium est universellement (dans tout l'univers) environ

$$\frac{n_{He} m_{He}}{n_H m_H} \equiv Y \simeq 0.24. \quad (4.125)$$

Un petit calcul relativement simple montre que ce rapport, assez conséquent il est vrai, ne peut pas être expliqué par la fusion de l'hélium dans les étoiles. A cet égard, considérons le rapport masse-luminosité de la Voie Lactée,

$$(L/M)_{vl} \simeq 0.1 (L_\odot / M_\odot) \simeq 10^5 \frac{\text{MeV}}{\text{sec g}},$$

où l'index \odot désigne les quantités physiques liées au soleil. Si ce rapport masse-luminosité est resté constant au cours des derniers 10 milliards d'années (c'est le temps de vie d'une étoile comme le soleil), l'énergie libérée par baryon est de l'ordre de

$$10^5 \frac{\text{MeV}}{\text{sec g}} \cdot 1.67 \times 10^{-24} \frac{\text{g}}{\text{baryon}} \cdot 3 \times 10^{17} \text{s} \sim 0.06 \frac{\text{MeV}}{\text{baryon}}.$$

De plus, l'énergie libérée par la formation d'un noyau d'hélium est de l'ordre de 28 MeV, c'est-à-dire 7MeV par nucléon. La Voie Lactée, qui a produit environ 0.06MeV par baryon depuis la formation des premières étoiles, n'a donc pas pu synthétiser plus qu'un pourcent d'hélium.

En réalité, l'essentiel de l'hélium s'est formé pendant les premières minutes de l'univers, lorsque la température était comparable à celle du soleil.

Avant d'étudier l'évolution de l'abondance des noyaux légers formés lors de la nucléosynthèse, voici quelques énergies de liaison qui nous seront utiles :

$$\begin{aligned} 2.22 \text{ MeV} & \text{ pour } {}^2\text{H} \text{ (Deutérium) ,} \\ 6.92 \text{ MeV} & \text{ pour } {}^3\text{H} \text{ (Tritium) ,} \\ 7.72 \text{ MeV} & \text{ pour } {}^3\text{He} \text{ (Hélium-3) ,} \\ 28.3 \text{ MeV} & \text{ pour } {}^4\text{He} \text{ (Hélium-4) .} \end{aligned}$$

A priori, on pourrait s'attendre à ce que ces différents noyaux se forment aux températures de l'ordre de leur énergie de liaison, mais ce n'est pas le cas. En fait, la nucléosynthèse se déroule à la température $T_N \sim 0.1\text{MeV}$ comme nous allons le voir. Il y a principalement deux raisons à cela :

- La densité baryonique de l'univers n'est pas suffisante pour permettre des collisions à plus de deux corps. Les noyaux dont le nombre de masse A est supérieur ou égal à 3 ne peuvent se former que par l'intermédiaire de collisions deutérium-hydrogène ou deutérium-deutérium. Par conséquent, la température de leur synthèse est nécessairement inférieure à $T_{2H} = 2.22\text{MeV}$, si bien que $T_N \leq 2.22\text{MeV}$.
- La densité des photons est de loin plus importante que la densité baryonique ($\sigma \sim 10^{10}$). Lorsque l'univers atteint la température de 2.22MeV, le nombre de photons dont l'énergie est supérieure ou égale à $T = 2.22\text{MeV}$ est relativement important. Les atomes de deutérium sont rapidement détruits par ces photons très énergétiques, d'après la réaction



Cette gigantesque entropie photonique retarde la nucléosynthèse du même facteur ~ 30 qu'elle retarde la recombinaison.

Afin de justifier quantitativement l'estimation $T_N \sim 0.1\text{MeV}$ donnée plus haut, nous allons supposer que les interactions nucléaires sont en équilibre thermique. Dans ce cas, la densité d'un noyau X de nombre de masse A et de numéro atomique Z , noyau que l'on note ${}^A X_Z$, satisfait

$$n_A = N_A \left(\frac{m_A T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{m_A - \mu_A}{T} \right). \quad (4.127)$$

Pour les densités des protons et des neutrons, nous avons

$$n_p = 2 \left(\frac{m_B T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{m_p - \mu_p}{T} \right) \quad (4.128)$$

$$n_n = 2 \left(\frac{m_B T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_n - \mu_n}{T} \right). \quad (4.129)$$

Nous avons négligé la petite différence entre $Q = m_n - m_p = 1.293\text{MeV}$ dans le premier facteur entre parenthèse, posant $m_n \sim m_p \sim m_B$. La conservation des potentiels chimiques donne

$$\mu_A = Z\mu_p + (A - Z)\mu_n,$$

soit

$$\begin{aligned} \exp \left(-\frac{m_A - \mu_A}{T} \right) &= \left(e^{\mu_p/T} \right)^Z \left(e^{\mu_n/T} \right)^{(A-Z)} e^{-m_A/T} \\ &= \frac{1}{2^A} \left(\frac{2\pi}{m_B T} \right)^{3A/2} \exp(B_A/T) n_p^Z n_n^{A-Z}, \end{aligned}$$

où $B_A = Zm_p + (A - Z)m_n - m_A$ est l'énergie de liaison du noyau ${}^A X_Z$. La densité de ce noyau se comporte alors comme

$$n_A = \frac{N_A}{2^A} A^{3/2} \left(\frac{2\pi}{m_B T} \right)^{3(A-1)/2} n_p^Z n_n^{A-Z} \exp(B_A/T). \quad (4.130)$$

Nous avons négligé la différence de masse Q et l'énergie de liaison B_A dans le facteur $(2\pi/m_B T)$ et ce, en posant $m_A \sim Am_B$. En revanche, l'énergie de liaison B_A , présente dans l'exponentielle, tient compte de l'influence du petit écart $m_A - Zm_p - (A - Z)m_n$.

Les différents rapports de masse sont définis par

$$\begin{aligned} Y_A &\equiv An_A/n_B = An_A/(\eta n_\gamma) \\ Y_p &\equiv n_p/n_B = n_p/(\eta n_\gamma) \\ Y_n &\equiv n_n/n_B = n_n/(\eta n_\gamma). \end{aligned}$$

Ainsi, avec $m_\gamma = (2/\pi^2)\zeta(3)T^3$, l'abondance du noyau ${}^A X_Z$ est donnée par

$$Y_A = F(A) \left(\frac{T}{m_B} \right)^{3(A-1)/2} \eta^{A-1} Y_p^Z Y_n^{A-Z} e^{B_A/T} \quad (4.131)$$

$$\text{avec } F(A) = N_A A^{5/2} \zeta(3)^{A-1} \pi^{-(A-1)/2} 2^{(3A-5)/2}. \quad (4.132)$$

Cette équation illustre bien l'influence de l'entropie sur la synthèse des noyaux. Lorsque $\eta \sim 1$, les noyaux ${}^A X_Z$ sont stables vis à vis de la désintégration en radiation dès que $T \sim B_A$. A cette température en effet, la formation de noyaux ${}^A X_Z$ (contrôlée par le facteur $\exp(B_A/T)$) est suffisamment importante pour contrebalancer les photo-dissociations (contrôlées par le facteur η^{A-1}). En équilibre, l'exponentielle $\exp(B_A/T)$ est de l'ordre de $\eta^{1-A} \sim 1$ et le rapport Y_A approche la valeur $Y_A \sim Y_p^Z Y_n^{A-Z}$.

En revanche, lorsque η est très petit, l'équilibre entre production de ${}^A X_Z$ et photo-dissociations n'intervient qu'à partir du moment où $\exp(-B_A/T) \sim \eta^{A-1} \ll 1$, i.e. pour des températures beaucoup plus faibles. En négligeant le facteur numérique $F(A)$, la température T_A , définie par

$$Y_A(T_A) \sim Y_p(T_A)^Z Y_n(T_A)^{A-Z},$$

est donnée par

$$T_A \sim \frac{B_A}{(A-1) [\ln(\eta^{-1}) + 3/2 \ln(m_B/T_A)]}.$$

Si l'on introduit les différentes énergies de liaison données ci-dessus ainsi que les nombres de masse respectifs, cette équation admet les solutions

$$\begin{aligned} T_{2H} &\sim 0.085 \text{ MeV} \\ T_{3H} &\sim 0.14 \text{ MeV} \\ T_{3He} &\sim 0.14 \text{ MeV} \\ T_{4He} &\sim 0.28 \text{ MeV} \end{aligned}$$

pour la synthèse du 2H , 3H , 3He et 4He respectivement. Ainsi, dans le cas du deutérium, la température T_{2H} à laquelle débute la formation du 2H est plus faible d'un facteur 30 environ que l'énergie de liaison Δ_{2H} .

Le taux de réaction Γ_{np} du processus $n + p \rightleftharpoons {}^2H + \gamma$ est donné par

$$\Gamma_{np} = \langle \sigma_{np} v \rangle n_p \simeq 1.8 \times 10^{-17} (T/T_0)^3 \eta \text{ sec}^{-1} \simeq 10^{12} \eta \left(\frac{T}{\text{MeV}} \right)^3 \text{ sec}^{-1},$$

où nous avons utilisé $\langle \sigma_{np} v \rangle = \text{constant} = 4.55 \times 10^{-20} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ aux températures $1 \text{ keV} \leq T \leq 10 \text{ MeV}$, et $n_p = \eta n_\gamma \simeq 420 \eta (T/T_0)^3 \text{ cm}^{-3}$.

Avec $H \simeq 0.4 (T/\text{MeV})^2 \text{ s}^{-1}$, cette interaction reste en équilibre thermique jusqu'à des températures de l'ordre de $T \sim 0.004 \text{ MeV}$.

Dans le cas des interactions à trois corps, le taux de réaction Γ_3 contient un facteur $n_B/n_\gamma \propto \eta \ll 1$ supplémentaire. Γ_3 peut donc être négligé vis-à-vis de Γ_{np} . Par conséquent, aux températures $T \lesssim 1 \text{ MeV}$, seule la réaction conduisant à la formation de deutérium est en équilibre thermique. Les autres éléments, principalement 4He , sont synthétisés par des processus secondaires. Pour estimer l'abondance d'hélium-4, il faut tout d'abord calculer la densité de neutrons à la température de découplage T_D des interactions faibles $p \leftrightarrow n$.

En équilibre thermique, les processus suivants (interaction faible) sont actifs :

$$\nu + n \rightleftharpoons p + e, \quad \bar{e} + n \rightleftharpoons p + \bar{\nu}, \quad n \rightarrow p + e + \bar{\nu}.$$

La conservation du nombre de particule implique d'une part

$$\mu_n - \mu_p = \mu_e - \mu_\nu.$$

D'autre part, la neutralité de l'univers impose $n_p = n_e$. Comme $m_e \ll m_p$, l'éq. (4.67) conduit à $\mu_e \ll \mu_p$. Enfin, en supposant que $\mu_\nu \sim 0$, les potentiels chimiques du neutron et du proton sont à peu près équivalents, i.e. $\mu_n \simeq \mu_p$. Le rapport entre les densités des neutrons et protons en équilibre thermique est alors simplement gouverné par la différence de masse $Q = m_n - m_p$ suivant la relation

$$r(T) \equiv \frac{n_n}{n_p} = \frac{Y_n}{Y_p} = \exp(-Q/T).$$

Ceci est le rapport des densités de neutrons et de protons aussi longtemps que les réactions d'échange $n \rightleftharpoons p$ sont suffisamment rapides. A la température du découplage de ces réactions,

$$\Gamma(T_D) = H(T_D) \simeq 3 \frac{T_D^2}{m_{Pl}},$$

et le rapport (n_n/n_p) gèle à la valeur

$$\left(\frac{n_n}{n_p}\right)(T_D) = \exp(-Q/T_D).$$

Ensuite, la densité des neutrons n'évolue que par l'intermédiaire de la désintégration β des neutrons, $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}$, et la densité de neutrons décroît de manière exponentielle.

$$r(t) = r(T_D) \exp\left(-\frac{t-t_D}{\tau_n}\right) \quad \text{pour } t > t_D, \quad (4.133)$$

où $\tau_n = 885.7 \pm 0.8\text{s}$ est le temps de vie du neutron [Particle Data Group's Review of Particle Physics 2006].

Il ne nous reste plus qu'à déterminer la température T_D . A cet égard, les différentes sections efficaces peuvent être calculées aisément avec la théorie de Fermi. Dans le cas des nucléons, le courant 'pur $V-A$ ' $\bar{\psi}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi$ est remplacé par un courant $\bar{\psi}\gamma_\mu(g_V + g_A\gamma_5)\psi$ qui tient compte de la structure interne du neutron et du proton. En approximation de Born, la section efficace est

$$\sigma(\nu + n \rightarrow p + e) = \frac{G_F^2}{\pi}(g_V^2 + 3g_A^2)v_e E_e^2.$$

Les constantes g_V et g_A peuvent être déterminées expérimentalement (en mesurant le temps de vie du neutron par exemple). Nous avons $g_V \simeq 1.00$ et $g_A \simeq 1.25$. En multipliant le résultat ci-dessus par $v_\nu n_\nu$, le taux d'interaction par neutron est donné par

$$\Gamma(\nu+n \rightarrow p+e) = \langle \sigma v_\nu \rangle n_\nu = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{p_\nu^2 dp_\nu}{\exp(p_\nu/T_\nu) + 1} v_\nu \sigma \left(1 - \frac{1}{\exp(E_e/T) + 1}\right).$$

Le facteur $\left(1 - \frac{1}{\exp(E_e/T)+1}\right)$ est la probabilité que l'état électronique d'énergie E_e soit libre (contrainte liée au principe de Pauli). Pour simplifier quelque peu cette intégrale, remarquons tout d'abord que la conservation de l'énergie implique $E_\nu + E_n = E_p + E_e$. Comme les énergies mises en jeu sont de l'ordre du MeV, nous pouvons poser $E_n - E_p \sim m_n - m_p = Q = 1.293\text{MeV}$ (limite non-relativiste pour le neutron et le proton), si bien que $E_e = p_\nu + Q$. De même, $E_e = m_e\gamma = m_e/\sqrt{1-v_e^2}$ ce qui conduit à $v_e = \sqrt{(p_\nu + Q)^2 - m_e^2}/E_e$. En tenant compte de ces simplifications, nous avons

$$\Gamma(\nu + n \rightarrow p + e) = \quad (4.134)$$

$$\frac{G_F^2(g_V^2 + 3g_A^2)m_e^5}{2\pi^3} \int_0^\infty \frac{\exp[\alpha(x+q)]x^2(x+q)\sqrt{(x+q)^2 - 1}dx}{(1 + \exp[\alpha(x+q)])(1 + \exp(\beta x))},$$

où nous avons posé $x = p_\nu/m_e$, $\alpha = m_e/T_\nu$, $\beta = m_e/T_e$ et $q = Q/m_e \simeq 2.5$. L'élément de matrice $\mathcal{M}(p_\nu, p_n, p_p, p_e)$ qui apparaît dans le calcul de l'amplitude pour la réaction $\nu + n \rightarrow p + e$ est invariant par rapport aux transformations $(p_\nu, p_n, p_p, p_e) \rightarrow (-p_\nu, p_n, p_p, -p_e)$ et $(p_\nu, p_n, p_p, p_e) \rightarrow (-p_\nu, p_n, p_p, p_e)$, où p_ν , p_n , p_p et p_e sont les quantités de mouvement du neutrino, du neutron, du proton et de l'électron respectivement. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(p_\nu, p_n, p_p, p_e) &= \mathcal{M}(-p_\nu, p_n, p_p, -p_e) \\ \mathcal{M}(p_\nu, p_n, p_p, p_e) &= \mathcal{M}(-p_\nu, p_n, p_p, p_e). \end{aligned}$$

Prenant en considération l'existence de ces symétries, le calcul des autres sections efficaces est immédiat et l'on trouve (avec $x = E_e/m_e$, les autres paramètres comme avant)

$$\Gamma(e + p \rightarrow n + \nu) = \frac{G_F^2 (g_V^2 + 3g_A^2) m_e^5}{2\pi^3} \int_q^\infty \frac{\exp[\beta(x-q)] x(x-q)^2 \sqrt{x^2-1} dx}{(1 + \exp[\beta(x-q)])(1 + \exp(\alpha x))}, \quad (4.135)$$

ainsi que

$$\Gamma(n \rightarrow p + e + \bar{\nu}) \simeq \frac{G_F^2 (g_V^2 + 3g_A^2) m_e^5}{2\pi^3} \int_1^q \frac{\exp[\alpha x] \exp[\beta(q-x)] (x-q)^2 x \sqrt{x^2-1} dx}{(1 + \exp[\beta(q-x)])(1 + \exp(\alpha x))} \quad (4.136)$$

$$\Gamma(n \rightarrow p + e + \bar{\nu})|_{T \ll m_e} \simeq 1.7 \frac{G_F^2}{2\pi^3} (g_V^2 + 3g_A^2) m_e^5 = \tau_n^{-1} = \frac{1}{886 \text{ sec}} \quad (4.137)$$

pour la désintégration β du neutron à basse température. En équilibre thermique, les produits $\tau_n \Gamma$ sont des fonctions de la température T . Lorsque $T \gg Q$, l'énergie cinétique disponible pour le système $e + \bar{\nu}$ est beaucoup plus élevée que la masse de l'électron. On peut alors poser $x \pm q \simeq x$ dans les intégrales ci-dessus, et les différents taux de réaction se comportent comme

$$\left. \begin{array}{l} \tau_n \Gamma(n \rightarrow p) \\ \tau_n \Gamma(p \rightarrow n) \end{array} \right\} \propto T^5.$$

Dans le domaine $0.1 \text{ MeV} \leq T \leq 1 \text{ MeV}$, le produit $\tau_n \Gamma(n \rightarrow p)$ est proportionnel à $T^{4.4}$ et se comporte sensiblement comme $\tau_n \Gamma(p \rightarrow n)$. L'espace des états disponible pour la désintégration β étant supérieur à celui de la réaction $p \rightarrow n$, $\tau_n \Gamma(n \rightarrow p) > \tau_n \Gamma(p \rightarrow n)$. En revanche, dès que la température franchit le seuil des 0.1 MeV , $\tau_n \Gamma(p \rightarrow n)$ décroît exponentiellement, tandis que $\tau_n \Gamma(n \rightarrow p)$ converge vers 1 (cf. figure 4.6, où l'on a représenté $\tau_n \Gamma(n \rightarrow p)$, $\tau_n \Gamma(p \rightarrow n)$ et le taux d'expansion $2\tau_n H$ en fonction de la température).

D'après la figure 4.6, la courbe $2\tau_n H$ intersecte les courbes $\tau_n \Gamma(n \rightarrow p)$ et $\tau_n \Gamma(p \rightarrow n)$ aux alentours de $T = 0.8 \text{ MeV}$. Une analyse détaillée du comportement de ces trois fonctions conduit à une température de découplage $T_D \simeq 0.7 \text{ MeV}$, en dessous de laquelle ces trois réactions ne sont plus en équilibre thermique. Lors du découplage, le rapport des densités de neutron et de proton est

$$\left(\frac{n_n}{n_p} \right) (T_D) = \exp(-Q/T_D) \simeq 1/6. \quad (4.138)$$

soit

$$Y_n = 1/7 \quad \text{et} \quad Y_p = 6/7. \quad (4.139)$$

Comme la température T_A est inférieure à T_D et ce, quels que soient les noyaux ${}^Z X_A$, il ne subsiste, dans le domaine $T_D > T > T_{2H}$, que des neutrons libres dont la densité décroît exponentiellement par désintégration β . A $T = T_{2H}$, l'abondance relative des neutrons est donnée par

$$\left(\frac{n_n}{n_p} \right) (T_{2H}) = e^{-Q/T_D} \exp(-t_{2H}/\tau_n) \simeq 0.8/6 \simeq 1/7, \quad (4.140)$$

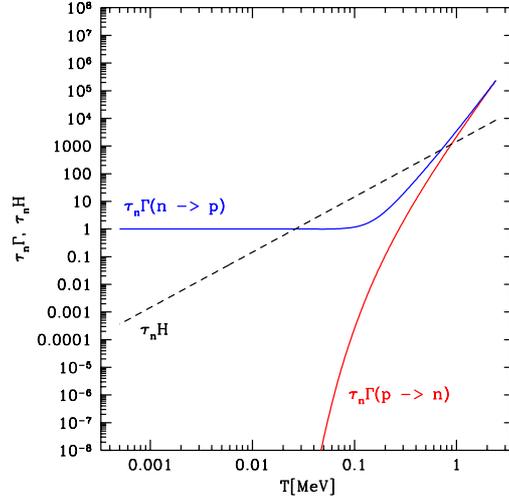
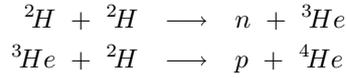


FIG. 4.6 – Les taux des interactions faibles, $\tau_n \Gamma(p \rightarrow n)$ et $\tau_n \Gamma(n \rightarrow p)$, sont montrés comme fonctions de la température. Le taux d'expansion, $2\tau_n H$, est aussi indiqué.

soit

$$Y_n = 1/8 \quad \text{et} \quad Y_p = 7/8. \quad (4.141)$$

Pour établir ce résultat, nous avons pris $t(T_{2H}) \simeq 1.3 \text{sec} (1/0.085)^2 \simeq 180 \text{s}$. Dès que les premiers noyaux de deutérium sont formés, l'hélium-4 est synthétisé via le réseau de réactions



et l'essentiel du deutérium est transformé en ${}^4\text{He}$. L'abondance de l'hélium est donc, en bonne approximation, égale à la moitié de l'abondance des neutrons à la température $T_{2H} \simeq 0.08 \text{MeV}$. En faisant l'hypothèse que la formation d'hélium-4 a épuisé tous les neutrons présents à T_{2H} , l'abondance du ${}^4\text{He}$ est alors

$$Y_{{}^4\text{He}} = \frac{4(n_n/2)}{n_n + n_p} = \frac{2(n_n/n_p)}{n_n/n_p + 1} \simeq \frac{1}{4}. \quad (4.142)$$

Dans l'expression de l'abondance relative des neutrons à la température T_{2H} , l'éq. (4.140), t_{2H} est proportionnel à $(\log \eta)^2$ et T_D dépend du taux d'expansion H , proportionnel à la racine de $g_{\text{eff}}(T_D)$. T_D étant de l'ordre du MeV, les seules particules relativistes présentes, en dehors des photons, sont les neutrinos. Ainsi, $T_D \propto \sqrt{N_\nu + 1}$, où N_ν est le nombre de familles de neutrinos. Par conséquent,

Y_{4He} est beaucoup plus sensible à N_ν qu'à la densité baryonique $\rho_b \propto \eta$. En comparant la valeur théorique Y_{4He}^{th} et la valeur expérimentale Y_{4He}^{exp} , on peut déterminer le nombre de familles de neutrinos et la comparer avec les valeurs fournies par la physique des particules. La valeur cosmologique, $N_\nu = 3 \pm 0.5$ est en bon accord avec la mesure de la largeur de raie du boson Z_0 qui conduit à $N_\nu = 3.07 \pm 0.12$.

D'après ce que nous avons dit, la nucléosynthèse débute à la température $T \simeq 0.1\text{MeV}$ (ce qui correspond à $t \simeq 130\text{s}$) pour se terminer après quelques minutes (cf. figure 4.7).

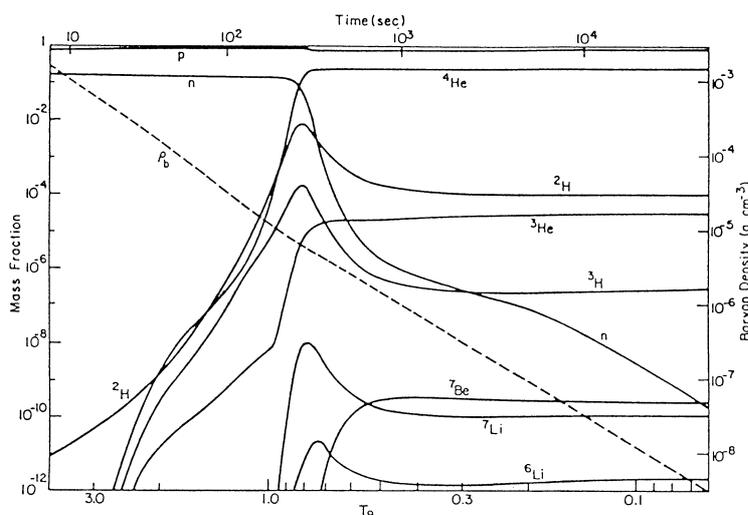


FIG. 4.7 – L'abondance des éléments primordiaux comme fonction de la température, $T_9 \equiv T/10^9\text{K}$. Pour ce calcul la valeur $\eta = 10^{-10}$ est supposée. La densité baryonique est aussi indiquée (tirets).

Au cours de ces quelques minutes, un certain nombre d'éléments légers, comme le ^2H , le ^3He ou le ^7Li , sont synthétisés avec le ^4He .

Deutérium et hélium-3 Ces éléments sont presque entièrement consommés pour former du ^4He . Leurs abondances au terme de la nucléosynthèse dépend très fortement de la valeur de $\eta = n_B/n_\gamma$. Plus η est élevé, plus la réaction $^2\text{H} \rightarrow ^3\text{He} \rightarrow ^4\text{He}$ est efficace et plus les abondances Y_{2H} et Y_{3He} sont faibles. Comme le deutérium est moins lié que l'hélium-3 ($\Delta_{2H} = 2.22\text{MeV}$, $\Delta_{3He} = 7.92\text{MeV}$), sa barrière coulombienne, principal obstacle à la synthèse de ^4He , est relativement ténue et son abondance diminue plus rapidement que celle du ^3He (cf. figure 4.8).

Dans la mesure où nous avons, dans le cas du deutérium et de l'hélium-3, une compétition entre des réactions à deux corps ($\Gamma \propto \eta$) et l'expansion de l'univers ($\Gamma = H$), une augmentation du taux d'expansion, autrement dit une augmentation de N_ν , est plus ou moins équivalente à une diminution de η . La corrélation importante existant entre l'abondance de ces deux éléments et la densité baryonique $\rho_B \propto \eta$ permet de contraindre relativement bien η .

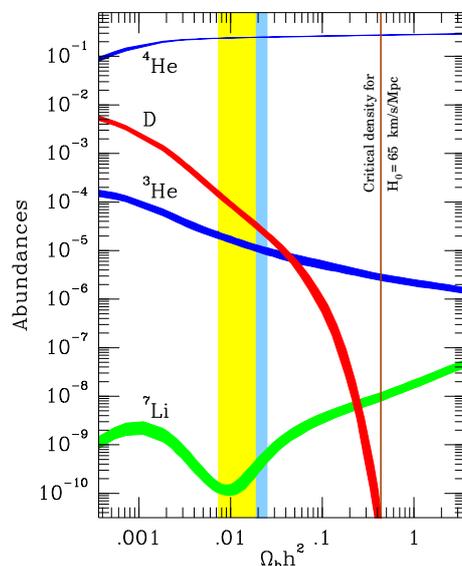


FIG. 4.8 – L'abondance des éléments primordiaux comme fonction du paramètre $\eta = n_b/n_\gamma$. Les bandes compatibles avec les observations sont aussi indiquées.

La détermination observationnelle de l'abondance du deutérium est un sujet très actuel de recherche. Elle peut se faire principalement (i) par l'étude de spectres d'absorption de nuages HI ou (ii) par l'étude de la forêt Ly α de système situés le long de la ligne de vue de quasars lointains. Plusieurs groupes sont en concurrence et les valeurs obtenues sont quelque peu différentes. Toutefois, même si l'on admet la marge maximale de $10^{-5} < Y_{2H}/Y_p < 2 \times 10^{-4}$, la valeur de η obtenue est assez précise. En regroupant toutes les observations effectuées, la valeur de $3 \times 10^{-10} < \eta < 8 \times 10^{-10}$ peut être adoptée (pour en savoir plus, lire [10, 38, 9]).

Lithium-7 L'abondance du ${}^7\text{Li}$ n'est pas une fonction monotone du paramètre η . En fait, deux processus différents conduisent à la production de ${}^7\text{Li}$ et, suivant la valeur de η , l'une ou l'autre de ces réactions domine.

- Lorsque la densité baryonique est faible, i.e. $\eta \lesssim 3 \times 10^{-10}$, l'abondance du lithium-7 résulte de la compétition entre la réaction de production ${}^4\text{He} + {}^3\text{H} \rightarrow {}^7\text{Li} + \gamma$ et la réaction de destruction ${}^7\text{Li} + p \rightarrow {}^4\text{He} + {}^4\text{He}$. Dans ce régime, l'abondance du ${}^7\text{Li}$ diminue avec l'augmentation de η .
- Au contraire, pour $\eta \gtrsim 3 \times 10^{-10}$, l'abondance du lithium-7 croît avec η . Dans ce cas, le mécanisme de production dominant passe par la synthèse du béryllium-7 ${}^4\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^7\text{Be} + \gamma$ suivi par sa désintégration en lithium-7 via la réaction ${}^7\text{Be} + e \rightarrow {}^7\text{Li} + \gamma$. Le mécanisme de destruction est le même dans les deux cas.

L'abondance du ${}^7\text{Li}$ présente donc un minimum en $\eta \simeq 3 \times 10^{-10}$. L'étude de l'abondance de lithium-7 dans les étoiles de population I et II permet de

contraindre la valeur de η . On obtient aussi $10^{-10} < \eta < 10^{-9}$.

Pour l'hélium-4 la formule suivante est une assez bonne approximation dans l'intervalle $10^{-10} \leq \eta \leq 10^{-9}$:

$$Y_{4He} = 0.23 + 0.011 \ln(\eta_{10}) + 0.013(N_\nu - 3), \quad (4.143)$$

où l'on a posé $\eta_{10} = \eta/10^{-10}$. La croissance de Y_{4He} avec N_ν provient du fait que la croissance du taux d'expansion $H \propto \sqrt{g_{\text{eff}}}$ augmente la température du gel des réactions faibles, T_D .

Le calcul des abondances de 2H , 3H , 3He , 7Be et 7Li est gouverné par un ensemble d'équations différentielles couplées qui modélisent un réseau nucléaire d'une centaine de réactions. Le résultat de ce calcul numérique dépend beaucoup du temps de vie du neutron, qui a longtemps été une source d'erreur importante. La valeur $Y_{4He} \simeq 0.25$ a été obtenue, pour la première fois, par George Gamow. Une détermination analytique des autres abondances est présentée dans la référence [7].

Comparaison avec les observations Lorsque les abondances sont très faibles (ce n'est pas le cas du 4He), leur détermination observationnelle est entachée d'une grande incertitude. De plus, en dehors de la nucléosynthèse primordiale, les processus de production et de destruction sont nombreux : la question de la relation entre la valeur mesurée et la valeur primordiale se pose. A titre d'exemple, nous allons décrire rapidement la méthode qui permet de déterminer l'abondance du deutérium (pour en savoir plus, consulter [10, 38]).

Le deutérium est exclusivement détruit par la formation stellaire. Son abondance mesurée $Y_{2H}^{(0)}$ est donc inférieure à l'abondance primordiale $Y_{2H}^{(i)}$. Pour obtenir $Y_{2H}^{(i)}$, il faut tout d'abord mesurer le taux de deutérium dans des systèmes dont la métallicité⁸ est de plus en plus faible, puis extrapoler à métallicité nulle. Pour ce faire, il est utile de déterminer l'abondance du deutérium de nuages d'hydrogène dont le redshift est compris entre 1 et 2. Ces nuages n'émettent pas de la lumière eux-mêmes mais, lorsqu'ils se trouvent sur la ligne de vue de quasars lointains, ils apparaissent en absorption dans les spectres de ces quasars (c'est ce que l'on appelle la forêt Ly α). Quelques structures d'absorption Ly- α sont montrées dans la figure 4.9.

A cause de la différence de masse réduite μ entre l'hydrogène et le deutérium, les lignes spectrales de ce dernier sont décalées vers le bleu dans la proportion

$$\frac{E_{2H}}{E_H} \simeq 1 + \frac{m_e}{2m_B} \simeq 1.00027. \quad (4.144)$$

La connaissance de ce décalage isotopique permet de déterminer l'abondance du deutérium dans le système solaire, le milieu interstellaire et dans les nuages d'hydrogène. Si un tel nuage intercepte la ligne de vue entre un quasar et nous, les photons d'énergies Ly β , Ly γ , Ly δ et Ly ϵ sont absorbés. Si le décalage du nuage est tel que la raie Ly α tombe dans la bande optique, l'absorption de la raie Lyman α peut alors être observée. Pour le milieu interstellaire, la combinaison

⁸En astrophysique, la métallicité est l'abondance des éléments dont le numéro atomique Z est supérieur ou égal à 3. Ces éléments ne se forment pratiquement que dans les étoiles.

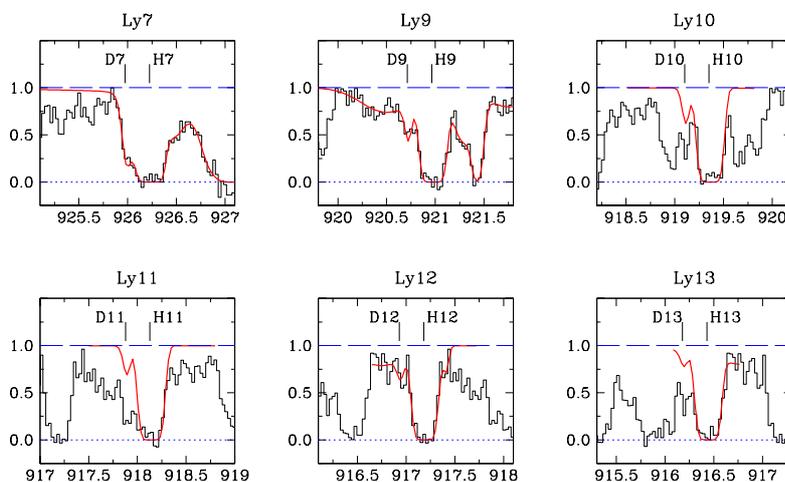


FIG. 4.9 – Les différentes lignes d’absorption Ly- α dans un système de nuages d’hydrogène à $z_{abs} = 2.0762$ vers le quasar QSO 2206-199 à un redshift de $z_{em} = 2.559$, tiré de [46]. Les longueurs d’onde, corrigées pour le redshift de l’émission sont indiquées en Ångstrom ($1\text{Å} = 10^{-10}\text{m}$).

des différentes mesures conduit à $n_{2H}/n_H \simeq (1 \text{ à } 5) \times 10^{-5}$. En ce qui concerne les nuages d’hydrogène, les résultats varient de $n_{2H}/n_H \simeq (3 \text{ à } 20) \times 10^{-5}$. Lorsque la distinction entre deutérium et hydrogène est difficile, dans le cas où l’hydrogène subit un petit effet Doppler provoqué par une vitesse relative à l’intérieur du nuage par exemple, les résultats obtenus sont sujet à caution. Seul une analyse statistique reposant sur un nombre suffisant de systèmes peut affiner le résultat (L’abondance du deutérium a pour l’instant été mesurée dans une dizaine de nuages d’hydrogène.).

La majorité des chercheurs a adopté les intervalles suivants pour les abondances primordiales :

$$\begin{aligned}
 10^{-5} &\leq Y_{2H} &&\leq 10^{-4} \\
 &Y_{3He} &&\simeq 8 \times 10^{-5} \\
 8 \times 10^{-5} &\leq Y_{2H} + Y_{3He} &&\leq 1.5 \times 10^{-4} \\
 0.236 &\leq Y_{4He} &&\leq 0.254 \\
 &Y_{Li} &&\simeq 8 \times 10^{-10} .
 \end{aligned}$$

Ceci implique $3 < \eta_{10} < 7$ et

$$0.01 \leq \Omega_B h^2 \leq 0.022. \quad (4.145)$$

En comparant ce résultat avec la valeur publiée par le WMAP team [54] : $\Omega_B h^2 = 0.024 \pm 0.001$, on constate d’abord une légère tension entre les deux

valeurs. D'autre part, c'est pour la première fois en cosmologie qu'une valeur expérimentale est déterminée avec une précision supérieure que 10% par deux méthodes entièrement différentes et les résultats sont en relativement bon accord l'un avec l'autre. C'est pourquoi je crois que cet accord est à interpréter comme succès important du modèle standard de la cosmologie.

La densité baryonique obtenue à partir des étoile et du gaz constituant les galaxies (notée Ω_L) est $\Omega_L h^2 \simeq 0.003$. La plupart des baryons forment en effet le gaz chaud dans les amas de galaxies qui émettent en rayons X.

Les mesures de WMAP [54] de la densité de l'univers donnent $\Omega_m h^2 = 0.14 \pm 0.02$. Cette densité est supérieure à la densité baryonique déduite de la nucléosynthèse, (4.145). Ce décalage est une indication tangible de l'existence de matière noire non-baryonique (autre motivation : la formation des structures cosmologiques semble inconsistante en absence de la matière noire non-baryonique).

De quoi la matière noire non-baryonique est-elle constituée ? Les neutrinos massifs pourraient être la réponse à cette énigme qui a été évoquée pour la première fois par l'astronome suisse Fritz Zwicky dans les années 30 [66] et qui passionne les physiciens depuis plus de 20 ans maintenant. Dans le cas où $m_\nu \gtrsim 10^{-3} \text{eV}$, nous avons

$$\Omega_\nu(t_0) = \rho_\nu(t_0)/\rho_{c0} = \frac{8\pi G}{3H^2} m_\nu N_\nu \frac{3\xi(3)}{2\pi^2} T_0^3 \frac{4}{11} \simeq \left(\frac{m_\nu N_\nu}{92 \text{eV}} \right) h^{-2}. \quad (4.146)$$

Ainsi, avec une famille de neutrinos massifs ($N_\nu = 1$) dont la masse est $m_\nu \sim 100 \text{eV}$, la densité critique est atteinte.

Toutefois, un problème subsiste : en raison de leur faible masse, les neutrinos ne peuvent pas constituer la masse cachée qui a été observée dans les galaxies naines (étude des courbes de rotation). Leur vitesse élevée ne leur permet pas, sous l'effet de la gravitation, de se condenser suffisamment rapidement pour expliquer les inhomogénéités observées (*neutrino free-streaming*). Pour cette raison, l'introduction de matière noire non-relativiste est préférable du point de vue de la formation des structures (cf. [39] pour une discussion détaillée).

La figure 4.10 récapitule l'histoire thermique de l'univers. La plupart des événements représentés ont été discutés dans ce chapitre. De plus, nous avons aussi indiqué le temps t_{con} du confinement des quarks en baryons ($T_{con} \simeq 200 \text{MeV}$, $t_{con} \simeq \frac{1}{3} \times 10^{-4} \text{sec}$), le temps t_{ew} de la brisure de la symétrie électrofaible ($T_{ew} \simeq 200 \text{GeV}$, $t_{ew} \simeq \frac{1}{3} \times 10^{-10} \text{sec}$), le temps t_{inf} d'une éventuelle phase inflationnaire ($T_{inf} \sim 10^{15} \text{GeV}$, cf. chapitre 5) et le temps de Planck t_P , avec $T_P \simeq 10^{19} \text{GeV}$.

Il n'existe pour l'instant pas d'observation bien établie pour des températures supérieures à 1 MeV. Dans le domaine $T \lesssim 100 \text{GeV}$, nous connaissons encore les interactions entre particules élémentaires. En revanche, pour des températures plus élevées, la cosmologie est ouverte à toutes les spéculations. Néanmoins, comme nous le verrons dans le chapitre suivant, les hypothèses les plus simples, que l'on peut énoncer à partir de la physique à haute énergie et la cosmologie, conduisent à des contradictions (le problème des monopôles).

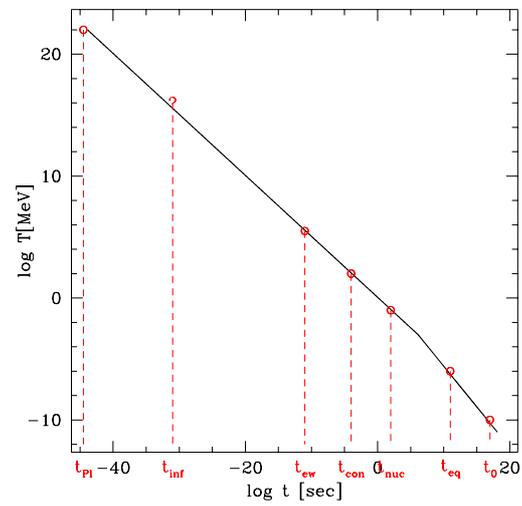


FIG. 4.10 – Sur ce graphique (température de l'univers versus temps) sont indiqués notre époque actuelle t_0 , l'égalité de la densité d'énergie en matière et rayonnement t_{eq} , la nucléosynthèse t_{nuc} , le confinement t_{con} , la brisure de la symétrie électrofaible t_{ew} ($T_{ew} \sim 200\text{GeV}$), une éventuelle phase inflationnaire t_{inf} et le temps de Planck t_P .

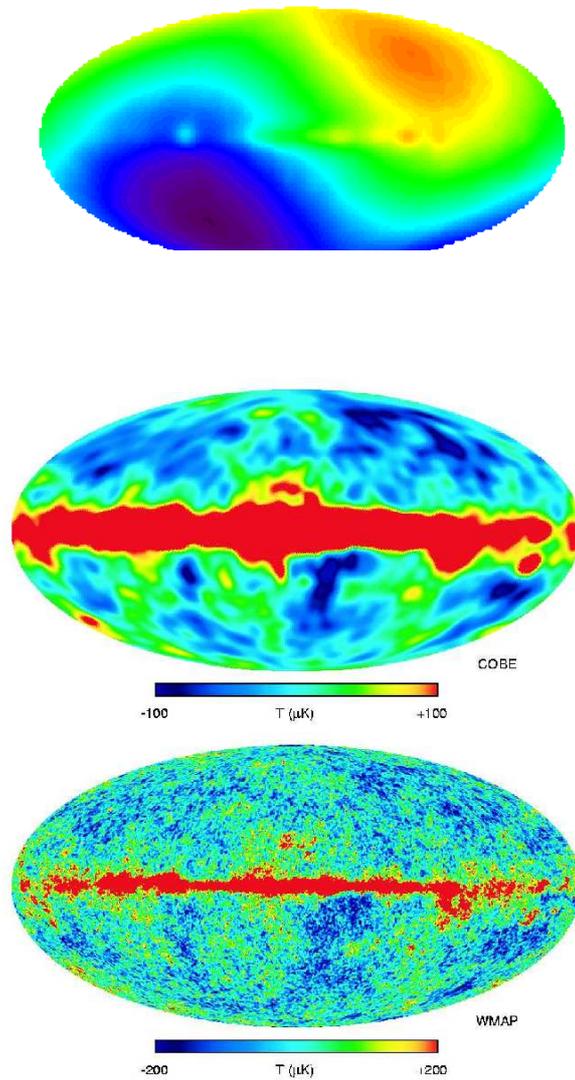


FIG. 4.11 – Carte du ciel obtenue par les satellites COBE (en haut et au milieu) et WMAP (en bas). En haut : le dipôle dû à notre mouvement domine. Au milieu et en bas : le dipôle a été soustrait. Les fluctuations autour de la valeur $T = 2.725^{\circ}\text{K}$ sont extrêmement faibles, de l'ordre de $\delta T/T \sim 10^{-5}$. Ces fluctuations représentent les inhomogénéités de l'univers au moment t_{dec} de dernière diffusion. La résolution du satellite COBE (lancé en 1990) est de quelques degrés tandis que celle du satellite WMAP (lancé en 2001) est de quelques minutes d'arc.

Chapitre 5

Inflation

5.1 Motivation

Le modèle que nous avons présenté dans les chapitres précédents permet d'expliquer un grand nombre de faits (l'expansion et l'âge de l'univers, le rayonnement cosmologique de fond micro-onde, la nucléosynthèse...) à partir de la simple hypothèse d'un univers homogène et isotrope en expansion adiabatique, et ce pour des $t \geq 1\text{sec}$, $T \leq 1\text{MeV}$.

Pour cette raison, ce modèle est appelé *modèle standard de la cosmologie*, par analogie au modèle standard $SU(3) \otimes SU(2)_L \otimes U(1)$ de la physique des particules.

Mais le modèle standard de la cosmologie conduit à des conditions initiales très improbables, inexplicables par les hypothèses formulées jusqu'alors. Ce ne sont pas des contradictions, mais ces conditions apparaissent tellement improbables que l'on demande une explication.

Plusieurs attitudes peuvent être envisagées vis-à-vis de ce problème. On peut par exemple admettre que ces conditions initiales très spéciales sont déterminées par une théorie quantique de la gravitation, que nous ne connaissons pas encore, et dont les effets se font sentir à partir de l'énergie de Planck. La question des conditions initiales perdrait ainsi toute signification en gravitation classique.

Dans le cadre de l'inflation, le point de vue est différent. On essaie en effet de trouver des modèles décrits par la gravitation classique tels que la cosmologie de Friedmann-Lemaître soit en quelque sorte un attracteur, c'est-à-dire pour un voisinage des conditions initiales, on aboutit toujours, au bout d'un certain temps, à un modèle FL. Cette hypothèse est appelée parfois le *théorème "no-hair" cosmologique* (cf. le *no-hair theorem* de la physique des trous noirs).

Ainsi, le modèle cosmologique à basse température ($T \leq 1\text{MeV}$) est, indépendamment des conditions initiales, l'univers que nous observons : un univers FL avec de petites fluctuations $\delta g_{\mu\nu} \sim 10^{-5}$.

Toutefois, cette convergence vers un univers FL semble difficile à réaliser puisque l'attraction gravitationnelle amplifie les moindres écarts à l'isotropie (production d'entropie gravitationnelle).

Pour que l'univers FL devienne un attracteur, le seul remède est la violation de la condition d'énergie forte. Avec $\rho + 3p \leq 0$, la source newtonienne à l'origine de la gravitation devient "négative" et la gravitation est répulsive, jouant le rôle

d'agent uniformisant.

Illustrons cette idée avec l'exemple de l'énergie du vide d'un champ scalaire. Pour des raisons de covariance, le tenseur énergie-impulsion du vide a nécessairement la forme

$$T_{\mu\nu}^{(v)} = \lambda g_{\mu\nu}$$

dans les référentiels comobiles définis par notre métrique FRW. Ainsi,

$$\begin{aligned}\rho_v &= \lambda \\ p_v &= -\lambda,\end{aligned}$$

et

$$\rho_v + 3p_v = -2\lambda < 0 \quad \text{si} \quad \lambda > 0.$$

Une énergie du vide viole donc la condition d'énergie forte. Elle a le même effet qu'une constante cosmologique

$$\Lambda = 8\pi G\rho_v = 8\pi G\lambda.$$

A cet égard, *constante cosmologique* et *énergie du vide* sont utilisées comme synonymes, ce qui est parfaitement justifié puisque l'on ne peut pas les distinguer par les observations.

Ceci est, très schématiquement, l'idée à la base du scénario inflationnaire. Afin de clarifier le problème, nous allons tout d'abord passer en revue les difficultés rencontrées par le modèle standard cosmologique.

5.2 Les problèmes du modèle cosmologique standard

5.2.1 Isotropie et homogénéité à grande échelle : le problème de l'horizon

Pourquoi l'univers est-il aussi homogène et isotrope à grande échelle ? Une telle condition initiale est **instable** sous l'effet de l'attraction gravitationnelle d'une part, difficile à réaliser en raison de la vitesse finie à laquelle voyage l'information d'autre part.

Définition 5.2.1 *L'horizon particule $\ell_p(t)$ est la distance parcourue par un photon depuis le big bang.*

Soit $\gamma^\mu(s)$ la trajectoire d'un photon et $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma^\mu}{ds}\partial_\mu$ sa vitesse. Soit

$$g = a(\eta)^2[d\eta^2 - d\xi^2 - \sigma(\xi)^2 d\Omega^2]$$

la métrique décrivant notre espace-temps. Si nous choisissons les angles tels que la trajectoire du photon est radiale, nous pouvons poser $\gamma(s) = (\eta(s), \xi(s), 0, 0)$.

Avec $\dot{\gamma}^2 = 0$, on a

$$\frac{d\eta}{ds} = \frac{d\xi}{ds} \Rightarrow \frac{d\xi}{d\eta} = 1$$

et $\Delta\xi = \Delta\eta$. Ainsi, la distance parcourue par un photon depuis le big bang est

$$\ell_p(\eta) = a(\eta)\xi(\eta) = a(\eta)\eta.$$

Utilisant

$$\eta = \int d\eta = \int \frac{dt}{a(t)},$$

l'horizon particule est

$$\ell_p(t) = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (5.1)$$

L'horizon événement joue aussi un rôle important dans l'étude de la transmission de l'information.

Définition 5.2.2 *L'horizon événement est la distance maximale qui sépare l'observateur au temps t des événements connectés causalement avec lui dans le futur, c'est-à-dire.*

$$\ell_e(t) = a(t) \left[\lim_{s \rightarrow t_{max}} \int_t^s \frac{dt'}{a(t')} \right], \quad t < t_{max} \leq \infty.$$

Lorsque nous parlerons d'horizon par la suite, nous ferons toujours référence à l'horizon particule.

Etudions quelque peu le comportement de $\ell_p(t)$ et $\ell_e(t)$ en fonction du facteur d'échelle $a(t)$. Pour une loi de puissance de la forme $a(t) \propto t^n$, on obtient (exercice)

$$\ell_p(t) = \begin{cases} \frac{t}{1-n} & n < 1 \\ \infty & n \geq 1 \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\ell_e(t) = \begin{cases} < \infty & \forall n \quad \text{et} \quad 0 < t_{max} < \infty \\ \frac{t}{n-1} & n > 1 \quad \text{et} \quad t_{max} = \infty \\ \infty & n < 1 \quad \text{et} \quad t_{max} = \infty \end{cases} \quad (5.3)$$

Ainsi, pour un univers avec un facteur d'échelle en loi de puissance, l'un des deux horizons converge, l'autre diverge.

Sous quel angle observe-t-on aujourd'hui ($\eta = \eta_0$) l'horizon $\ell_p(\eta_1)$ ($\eta_1 \leq \eta_0$) ? Considérons le système de coordonnées précédent, et supposons que deux photons sont émis au temps conforme η_1 dans notre direction (cf. fig. 5.1). Les coordonnées caractérisant ces deux événements (A et B) sont

$$(\eta_1, \Delta\xi, 0, 0) \quad \text{et} \quad (\eta_1, \Delta\xi, \vartheta, 0),$$

où $\Delta\xi$ est la distance comobile nous séparant de A (et de B).

Or, la distance propre entre A et B doit être égale à l'horizon au temps conforme η_1 . Ainsi

$$\ell_p(\eta_1) = a(\eta_1)\eta_1 = a(\eta_1)\sigma(\Delta\xi)\vartheta,$$

et

$$\vartheta = \frac{\eta_1}{\sigma(\Delta\xi)} = \frac{\eta_1}{\sigma(\eta_0 - \eta_1)}$$

puisque la trajectoire des photons est radiale.

Dans un univers plat

$$\vartheta_h(\eta_1) = \frac{\eta_1}{\eta_0 - \eta_1}.$$

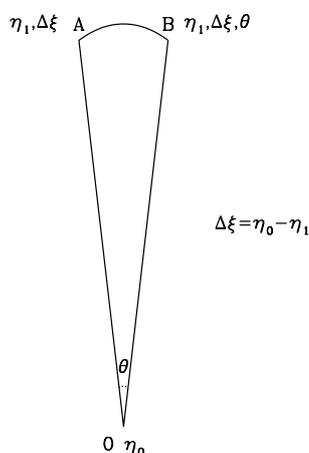


FIG. 5.1 – Une esquisse du triangle comobile OAB, avec les angles et les coordonnées indiqués.

Pour $\eta_1 \ll \eta_0$, il est alors $\vartheta_h(\eta_1) \approx \frac{\eta_1}{\eta_0}$. Dans un univers dominé par de la matière non-relativiste, $a(\eta) \propto \eta^2$, ceci donne

$$\vartheta_h(z) \approx \frac{1}{\sqrt{1+z}}. \quad (5.4)$$

Par exemple, avec $z = 1100$ (surface de dernière diffusion pour les photons du *CMB*),

$$\vartheta_h(\text{CMB}) = \frac{1}{\sqrt{1100}} \sim 1.7^\circ.$$

Si l'on ne néglige pas la courbure, la dérivation est beaucoup plus longue (joli problème géométrique!). On trouve, toujours pour de la matière non-relativiste et sans constante cosmologique,

$$\sin \vartheta_h(z) = \frac{q_0 \sqrt{2q_0 z + 1}}{q_0 z + (q_0 - 1) \sqrt{2q_0 z + 1} - 1} \approx \left(\frac{\Omega_0}{z} \right)^{1/2} \quad \text{si } z \gg 1, \text{ et } \Omega_0 \sim 1$$

où l'on a utilisé la relation $2q_0 = \Omega_0$.

Les observations de COBE montrent que les anisotropies du *CMB*, une fois le terme dipolaire soustrait, sont extrêmement faibles, c'est-à-dire.

$$\frac{|T(\mathbf{n}') - T(\mathbf{n})|}{\langle T \rangle} \sim 10^{-5}.$$

Comment se fait-il que deux points à $z \sim 1100$ aient la même température alors qu'ils n'ont jamais été en contact causal ?

Résolution du paradoxe – A la lumière de ce qui a été dit précédemment, on peut poser $\rho + 3p < 0$. Alors $\ddot{a} > 0$ et la courbe $a(t)$ est convexe, autrement dit $a(t) = t^\alpha$ avec $\alpha > 1$: l'horizon particule diverge ! (figure 5.2)

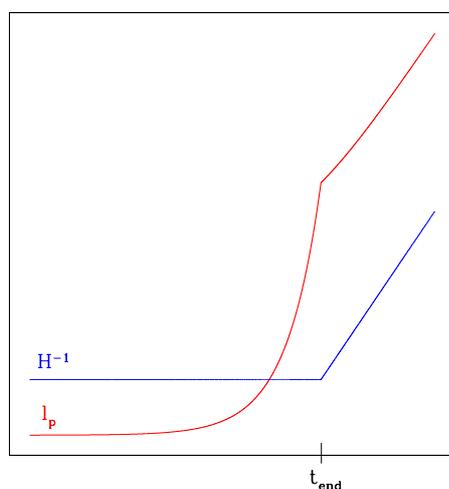


FIG. 5.2 – Solution au problème de l’horizon (coordonnées physiques vs. temps) : durant l’inflation, l’horizon de particule, l_p croît exponentiellement, tandis que le paramètre de Hubble est constant. Alors après une phase inflationnaire suffisamment longue, l’horizon de particule est beaucoup plus grand que sa valeur sans inflation que serait $l_p \sim H^{-1} \sim t$.

5.2.2 Le problème de la platitude, de l’âge ou de l’entropie

Le rayon de courbure d’un univers de Friedmann est donné par

$$R_k^2 = \left(\frac{|k|}{a^2} \right)^{-1} = \left| \frac{8\pi G\rho}{3} - H^2 \right|^{-1} = \frac{1}{H^2|\Omega - 1|}.$$

La densité ρ_0 de l’univers actuel est proche de la densité critique ρ_{c0} , et $\Omega_0 \sim 1$. Ainsi,

$$R_k^2(t_0) \gtrsim \frac{1}{H_0^2}.$$

Au premier abord, ceci ne semble pas extraordinaire. Exprimons $\Omega(t)$ à l’aide du rayon de courbure. Nous avons

$$\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)} = \frac{8\pi G\rho}{3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2} = \frac{\rho}{\rho - \frac{3k}{8\pi G a^2}} = \frac{1}{1 - x(t)}$$

avec

$$|x(t)| = \frac{3|k|/a^2}{8\pi G\rho} = \Omega(t)^{-1}|\Omega(t) - 1| \propto \begin{cases} a^2 & \text{univers dominé par la radiation} \\ & w = 1/3, \quad \rho \propto a^{-4} \\ a & \text{univers dominé par la matière} \\ & w = 0, \quad \rho \propto a^{-3} \end{cases}$$

$\sqrt{x(t)}$ n’est rien d’autre que le rapport entre le rayon de courbure et le taux d’expansion. Choisisant $t = 1\text{sec}$, on a

$$|\Omega(t = 1\text{sec}) - 1| = \frac{x(t)}{|1 - x(t)|}.$$

Considérant que $x(t_0) = x_0 \leq 1$ et $|x(t)| \ll 1$ pour $t \ll t_0$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} |\Omega(1\text{sec}) - 1| &\simeq x(1\text{sec}) \\ &= x_0 \left(\frac{a_{eq}}{a_0} \right) \left(\frac{a(1\text{sec})}{a_{eq}} \right)^2 \\ &\simeq 10^{-4} \left(\frac{1\text{eV}}{1\text{MeV}} \right)^2 \\ &= 10^{-16}. \end{aligned}$$

De même,

$$|\Omega(t_P = 10^{-43}\text{s}) - 1| \leq 10^{-60}.$$

Autrement dit, en exprimant ces résultats avec le rayon de courbure R_k et le taux d'expansion H^{-1} , nous avons

$$\begin{aligned} R_k(t = 1\text{sec}) &\geq 10^8 H^{-1}(t = 1\text{sec}) \quad \text{et} \\ R_k(t = t_P) &\geq 10^{30} H^{-1}(t = t_P). \end{aligned}$$

Cela signifie que, à $t = t_P$, le terme $\frac{8\pi\rho}{3}$ doit être au minimum 60 ordres de grandeur plus important que le terme $\frac{k}{a^2} = R_k^2$ pour expliquer la valeur actuelle de Ω , $\Omega_0 \sim 1$.

Cette condition initiale déroutante provient du fait que $\Omega = 1$ est un point fixe instable. Pour le voir, reprenons l'équation de conservation (3.10),

$$\frac{d\rho}{da} = -3 \frac{(\rho + p)}{a}.$$

En toute généralité, une équation d'état de la forme $p = \omega\rho$ conduit à la solution

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)}.$$

Insérant cette relation dans la définition de $x(t)$, nous avons

$$x(t) = |\Omega(t) - 1| = \frac{3k/a^2}{8\pi G\rho} \propto a^{1+3\omega}.$$

Pour un univers dominé par la matière ou par le rayonnement, plus généralement pour un univers dominé par une composante de matière satisfaisant à $\rho + 3p >$, c'est-à-dire $1 + 3\omega > 0$, $|\Omega(t) - 1|$ croît avec le temps : le moindre écart à $\Omega = 1$ est considérablement amplifié, signe que $\Omega = 1$ est bien un point fixe instable. Par conséquent, pour assurer $\Omega_0 \sim 1$, il faut exiger $\Omega(t_P) = 1$ avec une précision de soixante décimales (*fine tuning*)!

Cette condition initiale peut être reformulée à partir de l'entropie. L'entropie $S(t = t_P)$ à l'intérieur d'un volume de la taille du rayon de courbure $R_k(t_P)$ est environ

$$S(t_P) = s \cdot V = s \cdot R_k^3 = s_0 R_k^3(t_0) \approx s_0 \cdot H_0^{-3} \approx 10^{88}.$$

On s'attendrait plutôt à ce que $S(t_P) \sim 1$. Un nombre aussi important demande une explication.

Une autre formulation du même problème est la suivante : comme (pour $1 + 3\omega > 0$) la densité d'énergie décroît plus vite que le terme de courbure, très tôt dans l'histoire de l'univers, pour un univers 'jeune' ce dernier est toujours

négligeable et on a $\Omega(t) \sim 1$ pour t suffisamment petit. La question est alors pourquoi notre univers avec $t_0 \sim 10^{10}$ ans paraît-il si jeune ? Le seul temps caractéristique du problème est le temps de Planck $t_{Pl} \simeq 5.4 \times 10^{-44} \text{sec} \sim 10^{-61} t_0$. Pourquoi n'a-t-il ni re-collapsé depuis longtemps, ni s'est-il vidé de matière entièrement, tel que $\Omega \sim 0$.

Résolution du problème Pour résoudre ce problème, remarquons qu'une équation d'état vérifiant $1 + 3\omega \leq 0$, soit $\omega \leq -1/3$ (cas de la phase inflationnaire, $p \simeq -\rho$), implique la décroissance de $x(t)$ avec le temps. Dans ce cas, $\Omega = 1$ est un attracteur : l'univers évolue vers un univers plat et ce, quelle que soit la condition initiale $\Omega(t_P)$.

Après une phase d'inflation suffisamment longue, le terme de courbure est négligeable et $\Omega \sim 1$, quelles que soient les conditions initiales.

5.2.3 Le problème (esquisse) des monopôles

En physique, beaucoup de transitions de phase sont accompagnées d'une brisure de symétrie. Considérons une théorie (Yang-Mills-Higgs) dont le groupe de symétrie du lagrangien est G . Si une solution d'énergie minimale (un 'vide' de la théorie) est invariante seulement sous un sous-groupe $H \subset G$, $H \neq G$, on dit que la symétrie G est brisée spontanément.

Les brisures de symétrie sont souvent décrites par un champ scalaire placé dans un potentiel effectif qui dépend de la température (paramètre d'ordre en physique du solide, champ de Higgs en physique des particules).

A température finie $T > 0$, la densité lagrangienne associée à ce champ (qui peut avoir plusieurs composantes supposées réelles par la suite) peut être approximée par

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} D_\mu \phi \cdot D^\mu \phi - V_T(\phi) + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} \cdot F^{\mu\nu}, \quad \text{avec } D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu,$$

A_μ est le champ de jauge et $F^{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} - \frac{1}{2}[A_\mu, A_\nu]$ et le champ de Yang-Mills. Une transition de phase (du deuxième ordre) a lieu si la dépendance en température de V_T est environ la suivante (cf. fig 5.3)

Pour $T > T_c$, V_T présente un minimum en $\phi = 0$ alors que pour $T < T_c$, le minimum est la sous-variété $|\phi| = \sigma \neq 0$. Si ϕ est un champ scalaire à trois composantes, $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, et $V_T = V_T(|\phi|)$, le groupe de symétrie de \mathcal{L} est $G = O(3)$ et la variété du vide \mathcal{N} (lieu des minima de V_T) est $\{0\}$ pour $T > T_c$ et S^2 pour $T < T_c$.

Pour $T < T_c$, après un choix d'un état du vide $\phi_v = \sigma \cdot \mathbf{e} \in \mathcal{N}$, le groupe de symétrie restant est $H = O(2)$, composé des rotations autour de \mathbf{e} et des réflexions dans le plan $\perp \mathbf{e}$. En remarquant que $O(3)/O(2) = S^2$, la variété du vide est

$$\mathcal{N} = G/H, \tag{5.5}$$

relation très générale reliant le groupe de symétrie du lagrangien G et celui de la solution H .

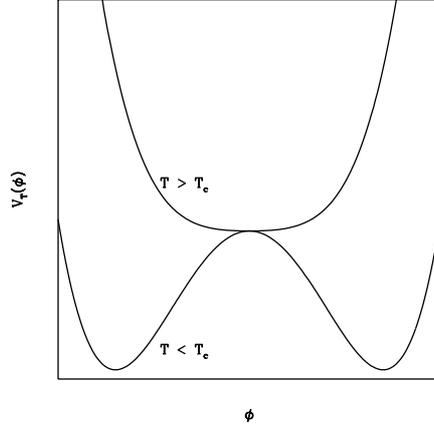


FIG. 5.3 – Le potentiel effectif pour un champ scalaire réel : Pour $T < T_c$ le potentiel respecte toujours la symétrie $\phi \rightarrow -\phi$ mais une solution d'énergie minimale $\phi = \sigma$ (ou $\phi = -\sigma$) la brise.

Après une transition de phase, $\phi(\mathbf{x}) = \sigma \cdot \mathbf{e}(\mathbf{x})$ n'est souvent pas constant dans l'espace. En effet, la longueur de corrélation λ est finie et en deux points \mathbf{x} et \mathbf{y} à une distance $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \lambda$, ϕ peut avoir des orientations différentes.

Ainsi, si l'on choisit une surface fermée \mathcal{A} dans l'espace physique, il peut arriver que son image sous

$$\phi/\sigma \equiv \mathbf{e} : \mathcal{A} \rightarrow S^2 : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{e}(\mathbf{x}) \quad (5.6)$$

recouvre toute la surface S^2 , par exemple $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ fois. Contractons maintenant la surface \mathcal{A} . Par continuité, l'image $\mathbf{e}(\mathcal{A})$ doit couvrir S^2 n fois.

Formellement, soit $\mathbf{0}$ à l'intérieur de \mathcal{A} (choix du système de coordonnées) et $\{f_\epsilon\}_{\epsilon \in [0,1]}$ des homéomorphismes de contraction tels que

$$\begin{aligned} f_\epsilon & : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_\epsilon \\ \mathbf{x} & \rightarrow (1 - \epsilon)\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Si \mathcal{A} recouvre S^2 n fois, alors \mathcal{A}_ϵ recouvre S^2 aussi n fois. n est donc préservé par ces transformations continues.

En contractant \mathcal{A} suffisamment, le terme cinétique dans le lagrangien \mathcal{L} devient de plus en plus important si bien que, pour minimiser l'énergie de la configuration (principe de moindre action), il est préférable de quitter la variété du vide, dans notre cas S^2 . Il existe donc un point $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ tel que $\phi(\mathbf{x}) = 0$, point où l'énergie potentielle est très élevée. C'est ce que l'on appelle un *monopôle*.

On peut démontrer que l'énergie m_M d'une telle configuration (monopôle de t'Hooft-Polyakov) est environ (Kolb & Turner) [30]

$$m_M \simeq 4\pi\sigma \quad (5.7)$$

La formation de ces monopôles est générique si la variété du vide, \mathcal{N} , contient des surfaces non contractibles.

En topologie algébrique, ceci est exprimé comme

$$\pi_2(\mathcal{N}) \neq 0,$$

où $\pi_2(\mathcal{N})$ est le groupe homéotopique d'ordre 2 de la variété \mathcal{N} .

Soit \mathcal{M} une variété quelconque. $\pi_n(\mathcal{M})$ contient les classes d'équivalence topologique des applications continues $\Psi : S^n \rightarrow \mathcal{M}$. Deux applications Ψ_0, Ψ_1 sont équivalentes s'il existe une déformation continue passant de l'une à l'autre.

Plus précisément, $\Psi_0 : S^n \rightarrow \mathcal{M}$ et $\Psi_1 : S^n \rightarrow \mathcal{M}$ sont équivalents s'il existe une application continue $\bar{\Psi} : S^n \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$ telle que $\bar{\Psi}(\mathbf{x}, 0) = \Psi_0(\mathbf{x})$ et $\bar{\Psi}(\mathbf{x}, 1) = \Psi_1(\mathbf{x})$. On peut facilement démontrer que l'ensemble des classes d'équivalence $[\Psi]$ forme un groupe, noté $\pi_n(\mathcal{M})$. Pour $n > 1$, ce groupe est abélien.

Dans notre cas, $\mathcal{M} = \mathcal{N} = S^2$ et

$$\begin{aligned}\pi_1(S^2) &= 0 \\ \pi_2(S^2) &= Z \\ \pi_3(S^2) &= Z.\end{aligned}$$

Calculer les différents π_n est en général difficile (mis à part π_1 pour lequel on dispose d'un algorithme assez simple).

Un théorème vient heureusement à notre secours.

Théorème 5.2.1 *Si G est un groupe simple et $H \subset G$ un sous-groupe, alors*

$$\pi_2(G/H) = \pi_1(H).$$

Appliquons ce résultat au groupe de symétrie observé en physique des particules aujourd'hui, $H = SU(3) \otimes U(1)$ (après la brisure de symétrie électrofaible), avec

$$\begin{array}{ll} SU(3) & \text{groupe de symétrie des interactions fortes} \\ U(1) & \text{groupe de symétrie des interactions électromagnétiques} \end{array}$$

Souhaitant unifier les différentes symétries du modèle standard à une énergie élevée ($T_c \sim 10^{15} \text{ GeV} \sim \sigma$) en un groupe simple G (c'est la théorie *GUT* pour *Grand Unified Theory*), nous avons

$$\mathcal{N} = G/H \quad \text{et}$$

$$\pi_2(\mathcal{N}) = \pi_1(H) = \pi_1(SU(3) \otimes U(1)) = \pi_1(U(1)) = Z.$$

Il y a donc formation de monopôles, dont la masse caractéristique est $m_M \sim T_c \sim \sigma$. Leur densité n_M est

$$n_M(t_c) \sim \frac{1}{t_c^3} \cong H(t_c)^3 \sim \frac{T_c^6 g_{\text{eff}}^{3/2}}{m_P^3}$$

soit, avec $s \sim g_{\text{eff}} T_c^3$ (entropie par unité de volume),

$$\frac{n_M}{s} \sim \left(\frac{T_c}{m_P} \right)^3.$$

On peut montrer que, très vite après leur formation, les monopôles cessent d'interagir et l'annihilation entre monopôle et anti-monopôle devient très improbable.

Pour des échelles GUT typiques, $T_c \sim 10^{15}\text{GeV}$, $m_M \sim 10^{16}\text{GeV}$ et alors $\frac{n_M}{s} \sim 10^{-12}$. Pour la densité d'énergie de ces monopôles, nous obtenons alors

$$\begin{aligned}\rho_M(t_0) &= \frac{m_M}{m_B} \cdot \frac{n_M}{s} \cdot \frac{s}{n_B} \cdot \underbrace{m_B n_B}_{\rho_b} \\ &\cong 10^{16} \cdot 10^{-12} \cdot 10^{10} \cdot 0.01 \rho_c \\ &\cong 10^{12} \rho_c(t_0),\end{aligned}$$

soit

$$\Omega_M(t_0) \sim 10^{12} !$$

Où sont ces monopôles ? Malgré de recherches intensives, seules des limites supérieures ont été obtenues. Les versions GUT les plus simples sont alors en désaccord avec les observations cosmologiques. Cette absence des monopôles est une constatation expérimentale non triviale, concernant à la fois la physique à haute énergie, $E_{GUT} \sim 10^{15}\text{GeV}$ et l'univers primordial, $t_{GUT} \sim t_P \left(\frac{m_P}{E_{GUT}}\right)^2 \sim 10^{-36}\text{sec}$.

Résolution du paradoxe La phase d'inflation est suivie d'un réchauffement : toute l'énergie qui était dans l'inflaton (le champ scalaire responsable de l'inflation) avec $\rho + 3p < 0$, est thermalisée, transformée en rayonnement. La température croît énormément, donc l'entropie $s \sim T^3$ aussi. Par conséquent, le quotient n_M/s et alors $\Omega_M(t_0)$ diminuent considérablement.

L'inflation dilue ainsi les monopôles, mais la thermalisation de l'énergie de l'inflaton ne fait guère évoluer la densité de rayonnement ρ_γ . On peut donc expliquer l'absence de monopôles dans l'univers actuel.

5.3 Inflation comme dynamique d'un champ scalaire

Ici nous étudions plus en détail les conditions sous lesquelles un champ scalaire ϕ résout les problèmes de l'horizon, de l'entropie et des monopôles (cf. section 5.2).

Il y a beaucoup de revues sur le sujet de l'inflation. Par exemple les traitements dans [37] et [31] constituent des bons compléments à ce qui va suivre.

En physique des particules, les champs scalaires sont un ingrédient essentiel pour les brisures spontanées d'une symétrie. L'exemple le plus célèbre est le champ de Higgs du modèle standard qui brise la symétrie électrofaible. D'autres champs scalaires sont prédit par les théories pour expliquer les autres brisures de symétrie, c'est-à-dire, GUT, supersymétrie, ...

- Toute théorie des particules (GUTS, supercordes) contient des champs scalaires.
- Aucun champ scalaire fondamental (Higgs, axion, dilaton ...) n'a encore été observé.

- En physique de la matière condensée, des champs scalaires associés avec des transitions de phase et connus sous le nom de *paramètre d'ordre* sont des degrés de liberté effectifs (paires de Cooper, etc.).

Pour obtenir l'inflation, il faut, comme nous l'avons vu, faire en sorte que l'équation d'état de la matière soit

$$\rho + 3p < 0. \quad (5.8)$$

Comment la physique des particules peut-elle nous aider à réaliser cette condition ?

5.3.1 Inflaton et un 'champs de matière'

Considérons un univers de Friedmann-Lemaître dont la densité est dominée par un champ scalaire ϕ (appelé *inflaton*), de lagrangien

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi). \quad (5.9)$$

Ce champ peut interagir avec d'autres champs de matière (ψ^μ, A_μ, χ) (correspondant aux degrés de liberté fermioniques et bosoniques). Pendant l'inflation, nous supposons que la densité d'énergie est dominée par l'inflaton. Le tenseur d'énergie-impulsion, du champ ϕ est donné par

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}}(\sqrt{g}\mathcal{L}_\phi),$$

soit

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\mathcal{L}_\phi \\ &= \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi - g_{\mu\nu}V(\phi). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\rho_\phi = -T_0^0 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi) \quad (5.10)$$

et

$$p_\phi = -\frac{1}{3}T_i^i = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{6}(\nabla\phi)^2 - V(\phi). \quad (5.11)$$

Si, pour un temps t_i donné

$$(\dot{\phi}(\mathbf{x}, t_i))^2, \quad (\nabla\phi(\mathbf{x}, t_i))^2 \ll V(\phi) \quad (5.12)$$

et

$$V(\phi(\mathbf{x}, t_i)) > 0, \quad (5.13)$$

ρ_ϕ et p_ϕ satisfont à l'inégalité (5.8).

Pour que l'on ait une période d'inflation, les contraintes

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi) \quad (5.14)$$

$$(\nabla\phi)^2 \ll V(\phi) \quad (5.15)$$

doivent être réalisées suffisamment longtemps. Dans le cas de champs scalaires, plusieurs possibilités s'offrent à nous, conduisant à des modèles d'inflation

différents (“old inflation”, “new inflation”, “chaotic inflation”). Dans le scénario “old inflation”, l’inflation est générée par une transition de phase du premier ordre alors que, dans le cas du scénario “new inflation”, la transition est du deuxième ordre. Dans “chaotic inflation”, aucune transition de phase n’a lieu et le potentiel peut être une simple loi de puissance.

Dans le cas d’une transition du deuxième ordre, la dynamique est parfaitement déterminée par la limite classique : la transition se déroule de manière homogène dans l’espace (si l’on ne tient pas compte d’éventuels défauts topologiques), $\langle \phi(t) \rangle$ évoluant de manière continue. Dans le cas d’une transition du premier ordre, la mécanique quantique est essentielle (“tunnelling”) : le processus est extrêmement inhomogène et $\langle \phi(t) \rangle$ est une fonction discontinue du temps. En plus, si un tel univers est dans une phase inflationnaire les domaines où la transition a déjà eu lieu s’éloignent de ceux qui sont encore dans l’ancienne phase si rapidement que la transition ne peut jamais terminer et l’univers ne peut donc pas quitter la phase inflationnaire. Ceci est l’échec de l’idée de “old inflation”.

Dans la suite de ce chapitre nous allons principalement considérer le cas des transitions du deuxième ordre (new inflation) ou d’un potentiel générique sans transition de phase (par exemple chaotic inflation).

5.3.2 Potentiel effectif à température finie

Dans le cas où l’inflaton est en équilibre avec un bain thermique, il est possible de modéliser la transition par un potentiel effectif $V(\phi, T)$ dépendant du temps et tenant compte des corrections à température finie,

$$V(\phi, T) = V_T(\phi) = V_0(\phi) + V_{int}(\phi, T),$$

tel que

$$\begin{aligned} T \geq T_c & \quad \text{minimum en } |\phi| = 0 \\ T \leq T_c & \quad \text{minimum en } |\phi| = \sigma, \end{aligned}$$

où T_c est le paramètre d’ordre ou température critique, définie comme la température pour laquelle les minima de $V(\phi, T)$ deviennent dégénérés. $V_0(\phi)$ est le potentiel de l’inflaton en l’absence d’interaction (potentiel du lagrangien 5.9). Nous allons le prendre égal à

$$V_0(\phi) = \frac{1}{4}\lambda(\phi^2 - \sigma^2)^2.$$

$V_{int}(\phi, T)$ est la contribution provenant des interactions avec le bain thermique. A l’ordre le plus bas, nous avons

$$V_{int}(\phi, T) = \frac{1}{2}g^2\phi^2T^2.$$

Le potentiel effectif est donc

$$\begin{aligned} V_T(\phi) &= \frac{1}{4}\lambda(\phi^2 - \sigma^2)^2 + \frac{1}{2}g^2\phi^2T^2 \\ &= \frac{1}{4}\lambda\phi^4 - \frac{1}{2}(\lambda\sigma^2 - g^2T^2)\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\sigma^4. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Tant que $T \gg T_c = \sqrt{\lambda\sigma}/g$, ϕ reste confiné autour de $|\phi| = 0$ (cf. figure 5.3) et $V(\phi = 0)$ domine la contribution du tenseur d'énergie-impulsion,

$$T_{\mu\nu} \approx V(\phi)g_{\mu\nu}.$$

L'équation d'état est bien de la forme $p \simeq -\rho$ et l'inflation se déclenche.

Dès que $T < T_c$, les fluctuations thermiques conduisent irrémédiablement ϕ de la position d'équilibre instable $\phi = 0$ vers l'un des minima globaux $\phi = \pm\sigma$ (voir figure 5.3). La transition procède par *décomposition spinodale* et $\phi(t, \mathbf{x})$ est homogène à l'intérieure d'un volume de la taille de la longueur de corrélation :

$$(\nabla\phi)^2 \ll V(\phi) \quad \text{homogénéité}$$

(c'est la condition 5.15). De plus, pour que la condition (5.14) soit satisfaite, il faut que la transition soit lente,

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi) \quad \text{slow rolling.}$$

La valeur extrêmement faible de la constante cosmologique impose $V(|\sigma|) = 0$, condition plutôt inhabituelle en physique des particules (cf. fin de ce chapitre).

En toute généralité, un grand nombre de potentiels conduisent à une transition du deuxième ordre. Toutefois, les contraintes imposées par l'inflation sont toujours les mêmes et ce, indépendamment du potentiel choisi.

Les résultats que nous allons dériver dans la suite de ce chapitre sont valables pour des potentiels pas nécessairement du type 'sombbrero mexicain' comme "old inflation" (transition premier ordre) ou "new inflation" (transition du deuxième ordre très lente), mais aussi du type générique $V = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ ou $V = \lambda\phi^4$ etc. comme ils sont utilisé pour "chaotic inflation" (voir Sec. 5.3.5).

5.3.3 Inflation pour un potentiel générique

L'équation de mouvement pour ϕ est

$$\square\phi + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0,$$

où V est un potentiel quelconque; soit le potentiel effectif décrit plus haut (nous avons laissé tomber la notation V_T) si ϕ est dans un bain thermique de température T . Dans un univers en expansion, ceci donne

$$\ddot{\phi} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\dot{\phi} - a^{-2}\nabla^2\phi + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (5.17)$$

ou

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - a^{-2}\nabla^2\phi = -V'(\phi). \quad (5.18)$$

Pour qu'on soit dans une période inflationnaire, les conditions (5.14) et (5.15) doivent être satisfaites. La contribution du potentiel domine dans l'expression de $T_{\mu\nu}$ et la constante de Hubble est, en bonne approximation, proportionnelle à l'énergie du vide

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V \right] \simeq \frac{8\pi G}{3} V(\phi) \quad (5.19)$$

et elle varie très lentement pendant toute l'inflation. Nous demandons que aussi la dérivée de H soit dominée par le terme qui provient du potentiel,

$$\dot{H}H = \frac{4\pi G}{3} [\ddot{\phi}\dot{\phi} + V'(\phi)\dot{\phi}] \simeq \frac{4\pi G}{3} V'(\phi)\dot{\phi}. \quad (5.20)$$

Alors $(\dot{\phi})^2 \ll 2V$ et $|\ddot{\phi}| \ll |V'|$. Le gradient $a^{-1}\nabla\phi$ a été négligé dans cette équation. Comme l'expansion est très rapide ($a(t)$ croît exponentiellement), les fluctuations spatiales sont rapidement diluées. Ainsi, l'équation (5.18) devient

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V'(\phi). \quad (5.21)$$

Comme $\ddot{\phi}$ est négligeable par rapport à V' , nous trouvons

$$3H\dot{\phi} \simeq -V'(\phi). \quad (5.22)$$

En divisant (5.22) par $3H$ et en élevant au carré, l'énergie cinétique apparaît,

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{V'}{3H} \right)^2 \simeq \frac{|V'|^2}{48\pi V/m_P^2} \ll V.$$

La condition (5.14) *slow rolling* implique alors

$$\left| \frac{V'm_P}{V} \right| \ll \sqrt{48\pi}.$$

On définit

$$\epsilon_1 \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} \simeq -\frac{4\pi G V' \dot{\phi}}{3H^3}. \quad (5.23)$$

Avec (5.22) et (5.19) la condition de "slow roll" mène à

$$\epsilon_1 \simeq \frac{4\pi G \dot{\phi}^2}{H^2} \simeq \frac{3\dot{\phi}^2}{2V} \ll 1. \quad (5.24)$$

L'équation (5.22) requiert que aussi

$$1 \gg \left| \frac{\ddot{\phi}}{3H\dot{\phi}} \right| = \left| \frac{-V''}{9H^2} + \frac{V'\dot{H}}{9H^3\dot{\phi}} \right| \simeq \left| \frac{-V''}{9H^2} + \epsilon_1/3 \right|.$$

Avec la définition

$$\epsilon_2 \equiv -\frac{V''}{9H^2} \simeq -\frac{m_P^2 V''}{24\pi V}, \quad (5.25)$$

nous avons donc aussi

$$|\epsilon_2| \ll 1. \quad (5.26)$$

Dans le cas d'une simple loi de puissance $V(\phi) \propto \phi^\alpha$ ('large field inflation'), les éqs. (5.24) et (5.26) impliquent

$$\phi \gg m_P,$$

qui ne peut être vérifié que si

$$\phi(\mathbf{x}, t_i) \gg m_P. \quad (5.27)$$

Dans le cas de “small field inflation”, lorsque l’inflation commence, ϕ est localisé autour de son état fondamental $\phi = 0$, mais $\tilde{\phi}(t_i \mathbf{x}) = \sigma - \phi(t_i \mathbf{x}) = \sigma$ (équation 5.12). Ainsi, la condition (5.26) est équivalent à

$$\sigma \gg m_P \quad \text{ou} \quad |\tilde{\phi}(\mathbf{x}, t_i)| \gg m_P. \quad (5.28)$$

Les équations (5.26) et (5.24) doivent être impérativement satisfaites pour que l’inflation soit suffisamment longue. On les appelle les conditions de ‘slow roll’. Quand ces conditions ne sont plus réalisées, l’inflation s’arrête.

Croissance du facteur d’échelle Nous pouvons maintenant estimer aisément la croissance du facteur d’échelle pendant l’inflation.

Soit $\phi_i = \phi(\mathbf{x}, t_i)$ et $\phi_f = \phi(\mathbf{x}, t_f)$ les valeurs initiales et finales et

$$N(\phi_f, \phi_i) = \log \left(\frac{a(t_f)}{a(t_i)} \right)$$

(le nombre de “e-folds”). Utilisant la relation $\log a = \int da/a$, il vient

$$N(\phi_f, \phi_i) = \int_{a_i}^{a_f} \frac{1}{a} da = \int_{t_i}^{t_f} \frac{\dot{a}}{a} dt = \int_{t_i}^{t_f} H dt. \quad (5.29)$$

A l’aide de l’équation (5.22), il vient

$$H dt = H \frac{dt}{d\phi} d\phi = H \frac{d\phi}{\dot{\phi}} = -\frac{3H^2 d\phi}{V'}.$$

Le facteur de croissance est donc donné par

$$N(\phi_f, \phi_i) = -3 \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{H^2}{V'} d\phi = -\frac{8\pi}{m_P^2} \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{V}{V'} d\phi \sim \frac{8\pi}{m_P^2} \phi_i^2. \quad (5.30)$$

Dans le dernier résultat nous avons supposé le cas de large field inflation et donc $V/V' \simeq \phi$. En plus nous avons utilisé que

$$\phi_f \sim m_P \ll \phi_i.$$

Dans le cadre de la “small field inflation”, il faut juste remplacer ϕ par $\tilde{\phi} = \phi - \sigma$ et on obtient le résultat (5.30) pour $\tilde{\phi}$. Les conditions de consistance (5.27,5.28) mènent à

$$N_{tot} = N(\phi_f, \phi_i) \gg 1. \quad (5.31)$$

La valeur de ϕ_i doit être choisie de telle sorte que l’expansion soit suffisante pour résoudre les problèmes de l’horizon, de l’entropie et des monopôles (cf. section 5.2). Nous verrons dans le prochain paragraphe que ceci implique $N_{tot} \gtrsim 70$.

5.3.4 Oscillations et réchauffement

Dès que $\tilde{\phi}$, $\phi = \phi_f \sim m_P$, l’inflaton cesse le ‘slow roll’ et oscille rapidement autour du minimum (ou un des minima $|\phi| = \sigma$ dans le cadre de la “small field inflation”). Le couplage \mathcal{L}_{int} avec les autres champs de matière permet de *thermaliser* l’énergie cinétique acquise pendant la période inflationnaire dans

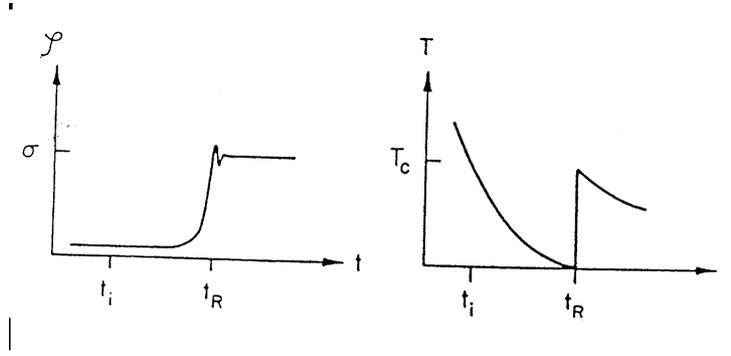


FIG. 5.4 – Evolution de T et de $\langle\phi\rangle$ dans le cadre d’une transition du deuxième ordre. La température de l’univers décroît fortement pendant l’inflation, puis augmente brutalement pendant le *reheating*.

tous les degrés de liberté. Cette phase, qui s’étend de $t = t_f$ à $t = t_{rh}$ est appelée *reheating* et suit immédiatement la période d’inflation (cf. figure 5.4).

Pour décrire ces oscillations nous considérons un champ scalaire proche du minimum de son potentiel. Nous choisissons la position du minimum à $\phi = \sigma$. Alors dans un voisinage de $\phi = 0$ le potentiel est génériquement de la forme

$$V = \frac{1}{2}m_\phi^2(\phi - \sigma)^2 + \dots$$

où les \dots sont des puissances supérieures. Pour des petites oscillations, nous pouvons les négliger. Alors, $\phi - \sigma$ obéit l’équation d’un oscillateur harmonique et oscille avec fréquence

$$\omega = m_\phi . \quad (5.32)$$

Moyennée sur une période, l’énergie cinétique de ϕ est égale à son énergie potentielle,

$$\langle V \rangle = \frac{1}{2} \langle \dot{\phi}^2 \rangle .$$

Par conséquent

$$\langle p_\phi \rangle = \langle \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V \rangle = 0 ,$$

si bien que

$$\rho_\phi \propto a^{-3}$$

après l’inflation.

Dans une approximation très grossière, on pourrait décrire le couplage avec les autres degrés de liberté par un terme dissipatif de la forme $\Gamma \dot{\phi}$ dans l’équation de mouvement de ϕ ,

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \Gamma\dot{\phi} - a^{-2}\nabla^2\phi = -V'(\phi).$$

Tant que $H > \Gamma$ (pendant l’inflation), la production de particules est négligeable. Lorsque $H \simeq \Gamma$, le réchauffement se produit, et l’énergie de l’inflaton est rapidement transmise aux particules qui sont couplées avec ϕ .

Pour discuter cette transmission plus en détail, nous considérons le couplage de ϕ avec un simple champ scalaire χ . Dans ce cas (comme probablement

dans tous les autres) la répartition de l'énergie de l'inflaton ne se fait pas uniformément : les oscillations du champ ϕ engendrent une *résonance paramétrique* qui favorise le transfert d'énergie de ϕ vers χ pour des fréquences bien définies.

Afin de mettre ce phénomène en évidence, étudions le problème à partir de l'équation régissant le champ χ .

Le lagrangien pour χ est donné par

$$\mathcal{L}_\chi = \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - \frac{1}{2}m_\chi^2\chi^2. \quad (5.33)$$

L'interaction entre l'inflaton ϕ et le champ de matière χ est supposée être de la forme

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{1}{2}g^2\phi^2\chi^2, \quad (5.34)$$

où g est une constante de couplage sans dimension (et on néglige l'interaction de χ avec lui-même). Ainsi,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_\chi \quad (5.35)$$

est le lagrangien décrivant la dynamique des champs après l'inflation. La dépendance temporelle de l'inflaton ϕ agit comme une masse effective de χ qui dépend du temps, $m_{\text{eff}}^2(t) = m_\chi^2 + g\langle\phi^2\rangle$, entraînant la production de particules χ .

L'équation de mouvement pour χ dérivée à partir du lagrangien (5.35) est

$$\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} - a^{-2}\nabla^2\chi + (m_\chi^2 + g^2\phi^2)\chi = 0.$$

Comme le champ ϕ effectue des oscillations harmoniques autour d'une valeur $\phi = \sigma$ nous avons

$$\phi = \sigma + \phi_0 \cos(\omega t), \quad \text{avec } \phi_0 \ll \sigma, \quad \omega = \sqrt{\lambda}\sigma$$

Après une redéfinition de la masse de χ , $m_\chi^2 \rightarrow m_\chi^2 + \sigma^2$ nous obtenons l'équation suivante ¹ en premier ordre en ϕ_0/m_χ pour χ

$$\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} - a^{-2}\nabla^2\chi + [m_\chi^2 + 2g^2\sigma\phi_0 \cos(\omega t)]\chi = 0.$$

En supposant que l'univers est à peu près homogène et isotrope au sortir de l'inflation, nous pouvons décomposer χ en Fourier

$$\chi(\mathbf{x}, t) = \int d^3k \chi_k(t) \exp[ia\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{x}],$$

$\mathbf{k}_p\mathbf{k}/a$ étant le vecteur d'onde physique. Substituant cette somme dans l'équation ci-dessus, nous obtenons

$$\ddot{\chi}_k + 3H\dot{\chi}_k + (k_p^2 + m_\chi^2 + 2g^2\sigma\phi_0 \cos(\omega t))\chi_k = 0. \quad (5.36)$$

Négligeant l'expansion de l'univers et posant $\omega_k^2 = k_p^2 + m_\chi^2$, (5.36) devient

$$\ddot{\chi}_k + [\omega_k^2 + 2\mu \cos(\omega t)]\chi_k = 0, \quad \mu = g^2\sigma\phi_0.$$

¹Nous ne traitons que le cas $\phi_0 \ll \sigma$, mais le cas $\phi_0 \gtrsim \sigma$ ou même $\sigma = 0$ est complètement équivalent aussi long que le terme de couplage, $\propto g^2$ est plus petit que le terme de masse, m_χ^2 .

TAB. 5.1 – comportement général de la densité.

époque	densité
$t_i < t < t_f$	$\rho \sim -p \sim V(\phi)$
$t_f < t < t_{rh}$	$\rho \propto a^{-3}$
$t > t_{rh}$	$\rho \propto a^{-4}$

Cette équation est connue sous le nom d'*équation de Mathieu*, et présente des bandes de résonance centrées aux fréquences

$$\omega_k^{(n)} = \frac{n}{2}\omega,$$

de largeur

$$\Delta\omega_k^{(n)} \simeq \frac{2\mu^n}{\omega_k^{(n)}} \propto g^{2n}.$$

A l'intérieur de ces bandes, les instabilités sont amplifiées exponentiellement : la distance initiale entre deux points quelconques de l'espace des phases peut être augmentée indéfiniment (cf. Arnold 1978 [3], §25 pour le détail).

Comme la largeur de la bande n est proportionnel à g^{2n} (l'instabilité autour de la fréquence $\omega_k^{(n)}$ n'apparaît qu'à partir du n -ième ordre perturbatif), seule la bande d'instabilité de fréquence $\frac{\omega}{2}$ est importante pour petit g .

Si l'on inclut les effets de l'expansion, ω_k dépend du temps : les modes rentrent puis quittent la bande de résonance. Par conséquent, chaque mode n'entre en résonance que pendant un intervalle de temps fini, et le transfert d'énergie est parfaitement fini : aucune divergence n'apparaît.

Remarquons toutefois que l'état dans lequel se trouve le champ χ après la résonance paramétrique n'est pas un état d'équilibre thermique. Le spectre est constitué de pics à des longueurs d'ondes bien précises. On appelle alors cette phase *preheating* plutôt que *reheating*. Le preheating est important parce que c'est un processus très rapide. Même si le couplage g entre ϕ et χ est relativement faible, ϕ transmet son énergie très rapidement à χ qui peut être couplé plus fortement avec les autres degrés de liberté. La découverte de l'effet du preheating dans les années 90, nous a fait comprendre que la fin de l'inflation est un processus beaucoup plus rapide que l'on a pensé auparavant. Le mécanisme de thermalisation, le *reheating* se produit après. Les détails des deux, preheating et reheating, tout comme la température du plasma relativiste à la fin du reheating, *température de reheating* T_{rh} , dépendent du modèle en considération. Des modèles existent avec $1\text{TeV} < T_{rh} < 10^{13}\text{GeV}$.

A la fin de ce processus ($t = t_{th}$), toute l'énergie de l'inflaton est thermalisée, et l'univers est dominé par de la matière relativiste satisfaisant

$$\rho_r \propto a^{-4}.$$

L'entropie S_H contenue dans un volume de Hubble à $t = t_{rh}$ vaut

$$S_H \approx (H^{(i)})^{-3} \left(\frac{a_{rh}}{a_i} \right)^3 T_{rh}^3,$$

où T_{rh} est la température de la matière et $H^{(i)}$ le paramètre de Hubble à $t = t_i$. Pour fixer la situation, nous considérons un potentiel $V = \frac{1}{2}m^2\phi^2$. Soit

$$\left(H^{(i)}\right)^2 = \frac{8\pi}{3m_P^2}V(\phi_i) = \frac{4\pi}{3m_P^2}m^2\phi_i^2.$$

Alors

$$(H^{(i)})^{-1} \sim \frac{m_P}{m\phi_i} \ll \frac{1}{m}$$

et

$$\begin{aligned} S_H &= (H^{(i)})^{-3} \left(\frac{a_{rh}}{a_f}\right)^3 \left(\frac{a_f}{a_i}\right)^3 T_{rh}^3 = \left(\frac{m_P}{m\phi_i}\right)^3 e^{3N_{tot}} \left(\frac{\rho_f}{\rho_{rh}}\right) T_{rh}^3 \\ &\approx \left(\frac{m_P}{m\phi_i}\right)^3 e^{3N_{tot}} \frac{m^2\phi_f^2}{T_{rh}^4} T_{rh}^3 \approx \left(\frac{m_P}{m\phi_i}\right)^3 e^{3N_{tot}} \frac{m^2 m_P^2}{T_{rh}} \\ &= e^{3N_{tot}} \left(\frac{m_P^5}{m\phi_i^3 T_{rh}}\right). \end{aligned}$$

L'entropie de l'univers actuel dans l'intérieur d'un volume H_0^3 et de l'ordre de $S_H \sim H_0^{-3} T_0^3 \sim 10^{88}$. Pour que $S_H \geq 10^{88}$, il faut que

$$N_{tot} \geq N_{min} \approx \underbrace{\frac{88}{3} \log 10}_{\sim 68} + \frac{1}{3} \log \left(\frac{m}{m_P}\right) + \log \left(\frac{\phi_i}{m_P}\right) + \frac{1}{3} \log \left(\frac{T_{rh}}{m_P}\right). \quad (5.37)$$

Si $N_{tot} \geq N_{min}$, autrement dit si la phase d'inflation est suffisamment longue, le problème de l'entropie **et** le problème de l'horizon sont résolus. En effet, tout l'univers observable aujourd'hui $\sim H_0^{-3}$ provient d'un volume de dimension $< (H^{(i)})^{-3}$ qui était causalement connecté avant l'inflation. Remarquons cependant que le potentiel

$$V_0(\phi) = \frac{1}{4}\lambda(\phi^2 - \sigma^2)^2$$

ne conduit à une inflation significative que pour $\lambda \ll 1$ ou $\sigma < m_P$. Pour que l'inflation soit plus longue pour $\sigma < m_P$, $V_0(\phi)$ doit être très plat aux alentours du minimum $\phi = 0$. Ceci peut être obtenu par un potentiel du type Coleman-Weinberg [30].

Pour résoudre le problème de la platitude, il faut exiger

$$R_k(t_0) \geq H_0^{-1},$$

ce qui est équivalent à

$$S_k(t_0) \geq S_H(t_0).$$

En effet, l'entropie après l'inflation reste à peu près constante ($T \propto a^{-1}$). Cette condition est donc équivalente à

$$S_k(t_0) \geq 10^{88}.$$

Avec

$$\begin{aligned} R_k^3(t_{rh}) &= R_k^3(t_i) \left(\frac{a_{rh}}{a_i} \right)^3 \\ &= \frac{H_i^3}{|\Omega_i - 1|^{3/2}} \left(\frac{a_{rh}}{a_i} \right)^3 \\ S_k &= T_{rh}^3 R_k^3(t_{rh}) = \frac{e^{3N_{tot}}}{|\Omega_i - 1|^{3/2}} \left(\frac{m_P^5}{m\phi_i^3 T_{rh}} \right), \end{aligned}$$

il vient

$$N_{tot} \geq N_{min,k} \approx 68 + \log \left(\frac{\phi_i}{m_P} \right) + \frac{1}{3} \log \left(\frac{m}{m_P} \right) + \frac{1}{3} \log \left(\frac{T_{rh}}{m_P} \right) + \frac{1}{2} \log |\Omega_i - 1| \quad (5.38)$$

Si $N \geq \max(N_{min}, N_{min,k})$, nous résolvons à la fois les problèmes de l'horizon et de la platitude.

En plus, cette expansion rapide dilue considérablement les particules présentes dans l'univers avant l'inflation. Soit X une telle particule. Sa densité est réduite d'un facteur $\geq 10^{88}$,

$$n_X \lesssim n_{X,i} 10^{-88}.$$

La genèse des baryons ne peut se produire qu'après l'inflation.

5.3.5 Remarques finales

Le problème principal résultant des scénarios inflationnaires que nous venons de décrire est la condition $\sigma \gg m_P$ ("small field inflation"), ou encore $\phi_i \gg m_P$ (large field inflation). Même si ceci n'implique aucune densité d'énergie ou courbure supérieur à la valeur de Planck, il n'est pas évident que notre traitement purement classique soit sensible.

Un argument pour résoudre le problème d'obtenir cette valeur élevée est de supposer que seule une petite région de l'univers satisfait $\phi_i \gg m_P$. $T_{\mu\nu}$ étant dominé par la contribution du potentiel, l'équation d'état induite est de la forme $p = -\rho$ si bien que le volume de cette région croît exponentiellement et conduit à un univers homogène et isotrope, identique à celui que nous observons. Ce scénario est celui de l'inflation chaotique ("chaotic inflation"). La philosophie de l'inflation chaotique est radicalement différente des modèles *old inflation* et *new inflation*.

Contrairement aux deux autres modèles mentionnés précédemment, aucun bain thermique initial n'est requis. D'autre part, la forme précise de $V_0(\phi)$ n'influence pas le mécanisme.

De plus, la phase inflationnaire $t \in [t_i, t_f]$, dans le cadre des modèles *old inflation* et *new inflation*, est un "îlot" de croissance exponentielle dans un univers dominé par la radiation. Dans le cadre de l'inflation chaotique, au contraire, une partie de l'univers émerge avec une équation d'état de la forme (5.8) immédiatement après la phase où prédomine la gravité quantique (ou les cordes). Afin de tenir compte de ces fluctuations quantiques, un bruit stochastique peut être inclus dans les équations de mouvement de ϕ . Ce scénario semble beaucoup plus naturel.

Les modèles inflationnaires quels qu'ils soient soulèvent d'ailleurs un problème très important : pendant une transition de phase, l'énergie du vide varie typiquement d'un montant de l'ordre de

$$\Delta\rho_v \sim T_c^4,$$

soit pour la transition électro-faible $\Delta\rho_{ew} \sim 10^9 \text{ GeV}^4$, et pour la transition GUT $\Delta\rho_{GUT} \sim 10^{60} \text{ GeV}^4$. Les observations montrent que

$$\rho_v(t_0) \leq 10^{-46} \text{ GeV}^4.$$

Comment se fait-il que les $\Delta\rho_v \gg \rho_v(t_0)$ conduisent à une valeur $\rho_v(t_0)$ si petite ? Pourquoi y a-t-il un si grand désaccord entre les observations cosmologiques et les prédictions du modèle standard de la physique des particules pour l'énergie du vide ? La solution de ce problème s'est encore aggravée avec l'observation que $\rho_v(t_0) \neq 0$. Ceci est actuellement un des (peut être même le) problèmes les plus importants de la physique théorique.

Chapitre 6

Perturbations cosmologiques

Toutes les grandes structures (inhomogénéités) observables actuellement dans notre univers sont supposées avoir évolué à partir de petites fluctuations, lorsque l'univers était encore très dense et très chaud. L'étude de la naissance même de ces fluctuations relève fort probablement à la phase inflationnaire, et n'est pas étudiée ici. Nous considérons l'évolution des perturbations après la période d'inflation.

L'inflation joue le rôle d'agent uniformisant. L'idée est que deux univers aux conditions initiales¹ différentes présenteront, après une phase inflationnaire, plus ou moins les mêmes caractéristiques, à savoir le même degré d'isotropie et d'homogénéité. Nous pouvons donc raisonnablement supposer que l'univers post-inflationnaire satisfait au principe cosmologique. Dans cette optique, l'évolution de notre univers est décrite par les deux équations de cosmologie (3.1) et (3.2).

Les fluctuations primordiales sont des petites perturbations de l'état homogène et isotrope. Nous pouvons donc écrire

$$\rho(t, \mathbf{x}) = \bar{\rho}(t) + \delta\rho(t, \mathbf{x}), \quad (6.1)$$

avec

$$\delta\rho(t, \mathbf{x}) \ll \bar{\rho}(t).$$

Il faut évidemment prendre en compte que $\delta\rho$ peut croître au cours du temps, puisque les perturbations sont instables sous l'effet de l'attraction gravitationnelle. Nous devons donc distinguer deux régimes :

- une première période, la phase linéaire, correspondant à

$$\delta\rho(t, \mathbf{x}) \ll \bar{\rho}(t),$$

pendant laquelle l'évolution des fluctuations s'obtient simplement en linéarisant les équations. Quelques solutions analytiques existent.

¹i.e. conditions initiales au temps de Planck, $t_P = 10^{-43}$ s, lorsque les effets quantiques sont importants.

- une seconde période (phase non-linéaire, PNL) pour laquelle

$$\delta\rho(t, \mathbf{x}) \geq \bar{\rho}(t),$$

c'est-à-dire l'évolution des fluctuations est non-linéaire. Dans ce cas, seules des hypothèses simplificatrices (comme le modèle du effondrement sphérique de Peebles) ou le recours aux simulations numériques offrent une solution aux équations.

L'évolution des instabilités gravitationnelles est la clé de voûte de la formation des premières structures. Un rappel est donc nécessaire, et ce d'autant plus qu'il nous permettra de nous familiariser avec quelques concepts importants.

La littérature concernant ce sujet abonde, mais les ouvrages sont assez inégaux, les exposés manquant parfois de clarté.

A titre de référence, citons Padmanabhan (1993) [39] Durrer (1994) [12], Hu (1995) [27], Durrer (2002) [14], Mukhanov (2005) [37], Durrer (2008) [15].

6.1 Instabilité gravitationnelle

L'astrophysicien anglais Jeans montra au début du siècle (1902) qu'un nuage de gaz de dimension λ , soumis à sa propre gravitation, ne s'effondre que s'il parvient à surmonter la pression interne. Il existe donc une dimension minimale, appelée longueur de Jeans λ_J , associée à une masse minimale, la masse de Jeans M_J , en dessus de laquelle le nuage auto-gravitant s'effondre sur lui-même. On peut facilement montrer que

$$\lambda_J = c_s \left(\frac{\pi}{G\rho} \right)^{1/2} \quad (6.2)$$

$$M_J \simeq \rho \lambda_J^3 \propto T^{3/2} \rho^{-1/2}, \quad (6.3)$$

où c_s est la vitesse du son dans le fluide.

Lorsque $\lambda \leq \lambda_J$, la pression est trop forte et le nuage est soumis à des oscillations acoustiques. Dès que $\lambda \geq \lambda_J$, l'attraction gravitationnelle prend le dessus, conduisant irrémédiablement le nuage à l'effondrement.

Dans le cas d'un univers statique, la densité d'un tel nuage de gaz évolue de manière exponentielle, faisant rapidement passer la fluctuation d'un régime linéaire à un régime non-linéaire.

Que devient ce résultat pour un univers en expansion ?

Pour répondre à cette question, il faut tout d'abord partir d'une description parfaitement homogène et isotrope, à laquelle est associée une solution d'ordre zéro, puis introduire des perturbations (de la pression, de la densité, etc.) et chercher une équation décrivant leur évolution.

Un traitement complet du problème nécessite une approche au niveau des équations d'Einstein et de l'équation de conservation du tenseur énergie-impulsion (cf. Durrer 1994 [12], Durrer 2008 [15]).

6.2 Perturbation scalaire d'un fluide parfait dans un univers à courbure nulle

6.2.1 Les variables de perturbation

Pour éviter des long calcul nous nous concentrons ici sur des perturbation scalaires et adiabatiques d'un fluide parfait. Aussi nous négligeons la courbure spatiale. On peut choisir le système des coordonnées tel que la métrique perturbée prend la forme (jauge longitudinal ou newtonienne)

$$ds^2 = a^2 [-(1 + 2\Psi)d\eta^2 + \delta_{ij}(1 - 2\Phi)dx^i dx^j] . \quad (6.4)$$

Ici nous demandons que $|\Psi| \ll 1$ et $|\Phi| \ll 1$ pour que les perturbations soient petites et une linéarisation soit admise. Ψ et Φ sont les potentiels de Bardeen. Comme nous le verrons, pour un fluide parfait ils sont égaux et ils représentent l'analogie relativiste du potentiel newtonien.

En plus nous définissons la densité d'énergie et le flux d'énergie comme la valeur propre et le vecteur propre de genre temps du tenseur énergie-impulsion,

$$T^\mu{}_\nu u^\nu = -\rho u^\mu, \quad \rho = \bar{\rho}(1 + \delta) . \quad (6.5)$$

La densité $\bar{\rho}$ est la densité non-perturbée de l'univers Friedmann. La quadri-velocité u est normalisée, $u^2 = -1$. Ceci implique

$$u^0 = \bar{u}^0 + \delta u^0 = \frac{1}{a}(1 - \Psi) \quad (6.6)$$

$$u^j = \delta u^j = \frac{1}{a}v^j, \quad v^j = -i\frac{k^j}{k}V . \quad (6.7)$$

Le dernier signe d'égalité est vérifié pour un mode Fourier. Ici nous utilisons le fait que les quantités non-perturbées sont indépendantes de la position. Ceci implique que les différents modes Fourier sont découplés en théorie des perturbations linéaires. Les équations d'Einstein linéarisées qui sont des équations différentielles partielles mènent à des équations différentielles ordinaires pour tout mode \mathbf{k} . Ce découplage des modes est aussi vérifié dans le cas de courbure non-nulle, seul dans ce cas il s'agit des modes propres du laplacien sur l'espace courbe (décomposition harmonique), qui ne sont plus les modes de Fourier ordinaires.

Le tenseur des tensions est défini comme la projection du tenseur énergie-impulsion dans les directions normales à u ,

$$\tau^{\mu\nu} = h^\mu{}_\alpha h^\nu{}_\beta T^{\alpha\beta}, \quad h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu . \quad (6.8)$$

Pour un fluide parfait, ce tenseur est fixé par la pression

$$\tau_j^i = p\delta_j^i, \quad p = \bar{p} + \delta p . \quad (6.9)$$

Dans le cas d'un fluide non-parfait, τ_j^i contient aussi des composantes non-diagonales, ce sont les 'tensions anisotropes' que nous négligeons ici. Si les perturbations sont adiabatiques, on a encore

$$\frac{\delta p}{\delta \rho} = c_s^2, \quad \text{donc} \quad \delta p = c_s^2 \bar{\rho} \delta . \quad (6.10)$$

Dans le cas non-adiabatique la variable $\Gamma \equiv \delta p/\bar{p} - \frac{c_s^2}{w}\delta$, avec $w = \bar{p}/\bar{\rho}$, peut être liée à la perturbation de l'entropie [15]. Dans le cas des perturbations adiabatiques d'un fluide parfait nous avons quatre variables de perturbations scalaires, $\Psi(\mathbf{k}, \eta)$, $\Phi(\mathbf{k}, \eta)$, $\delta(\mathbf{k}, \eta)$ et $V(\mathbf{k}, \eta)$.

6.2.2 Les équations de perturbation

A partir de la métrique perturbée on peut calculer la tenseur d'Einstein perturbé en premier ordre. Les équation d'Einstein le lient avec les perturbations du tenseur énergie-impulsion. Ce calcul peut être fait avec un programme algébrique (Maple ou Mathematica) ou encore en utilisant le formalisme de Cartan (voir Durrer, 1994 [12]). Ici nous présentons juste les équations :

$$-k^2\Phi = 4\pi G a^2 \bar{\rho} (\delta + 3(1+w)\frac{a'}{a}k^{-1}V) \quad (00) \quad (6.11)$$

$$\frac{a'}{a}\Psi + \Phi' = 4\pi G a^2 \bar{\rho} (1+w)k^{-1}V \quad (0i) \quad (6.12)$$

$$\Psi - \Phi = 0 \quad (i \neq j) \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} \Phi'' + 2\frac{a'}{a}\Phi' + \frac{a'}{a}\Psi' + \left[\left(\frac{a'}{a}\right)' + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 - \frac{k^2}{3} \right] \Psi = \\ 4\pi G a^2 \bar{\rho} \left((c_s^2 + 1/3)\delta + (1+w)\frac{a'}{a}k^{-1}V \right) \quad (ii). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Ceci sont les quatre équations d'Einstein en premier ordre pour un mode Fourier k des perturbations scalaires adiabatiques dans un univers à courbure spatiale nulle. Comme nous avons quatre variables de perturbation ces équations suffisent pour résoudre le système.

Comme $\tau_j^i = 0$ pour $j \neq i$, les deux potentiels de Bardeen sont égaux. La premier équation est l'analogie relativiste à l'équation de Poisson de la gravité newtonien. Le deuxième terme représente l'énergie cinétique qui contribue aussi au potentiel Φ . En utilisant $\Phi = \Psi$ et remplaçant δ à l'aide de l'équation (00) et puis V à l'aide de (0i) on trouve une équation pour le potentiel de Bardeen, Ψ

$$\Psi'' + 3\frac{a'}{a}(1+c_s^2)\Psi' + \left[3(c_s^2 - w)\left(\frac{a'}{a}\right)^2 + c_s^2 k^2 \right] \Psi = 0. \quad (6.15)$$

Ceci est l'équation de Bardeen pour des perturbations adiabatiques d'un fluide parfait. Elle est une équation d'onde amortie avec un terme de 'masse' qui dépend du temps, $m^2(t) = 3(c_s^2 - w)\left(\frac{a'}{a}\right)^2$. Si $w = \text{constant}$, alors $c_s^2 = w$ la masse disparaît et $a \propto \eta^{2/(1+3w)} = \eta^q$. Donc $\frac{a'}{a} = \frac{2}{1+3w}\eta^{-1}$. Dans ce cas l'équation de Bardeen devient

$$\Psi'' + \frac{6(1+w)}{(1+3w)\eta}\Psi' + c_s^2 k^2 \Psi = 0. \quad (6.16)$$

Ceci est une équation différentiel de Bessel avec comme solutions générale de fonctions Bessel sphériques,

$$\Psi = \frac{1}{a} [A j_q(c_s k \eta) + B y_q(c_s k \eta)], \quad q = \frac{2}{1+3w} \text{ et } c_s = \sqrt{w}, \quad (6.17)$$

où j_q et y_q sont les fonction Bessel sphérique d'ordre q . Elles sont données par [29]

$$j_q(x) = (-x)^q \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^q \left(\frac{\sin x}{x} \right), \quad y_q(x) = -(-x)^q \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^q \left(\frac{\cos x}{x} \right).$$

Pour petit x on trouve [29]

$$j_q(x) \propto x^q \quad y_q(x) \propto x^{-(q+1)} \quad x \ll 1,$$

tandis que pour grand x les fonctions Bessel sphériques oscillent avec une période d'environ 2π et elles décroissent comme [29]

$$|j_q(x)| \propto |y_q(x)| \propto x^{-1} \quad x \gg 1.$$

Si on demande des perturbations régulières pour $\eta \rightarrow 0$, il faut donc poser $B = 0$. En utilisant que $a \propto \eta^q$ nous trouvons donc que

$$\Psi = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}\eta^q}{2^q a} A (c_s k)^q & \text{pour } c_s k \eta \ll 1, \\ \frac{1}{a\eta} A \sin(c_s k \eta - q\pi/2) & \text{pour } c_s k \eta \gg 1. \end{cases} \quad (6.18)$$

Donc sur des échelles (longueurs d'ondes) $\lambda = 2\pi/k$ qui sont plus grand que l'horizon du son, $k_s^{-1} \equiv c_s \eta$, le potentiel de Bardeen reste constant et à l'intérieur de l'horizon du son il oscille. L'horizon du son joue le rôle de la longueur de Jeans dans le traitement relativiste. Cette longueur co-mobile correspond à la longueur physique $a\lambda_s = a2\pi/k_s$ et

$$a\lambda_s = 2\pi c_s a \eta \simeq 2\pi c_s t \simeq 2\pi c_s / H = c_s \left(\frac{3\pi}{2G\rho} \right)^{1/2}.$$

Notez la ressemblance de cette équation avec (6.2). La différence importante par rapport au cas newtonien est que dans l'univers en expansion le potentiel de Bardeen n'est pas exponentiellement croissante à grande échelles mais constante. Ceci a mené Lifshitz (1946) à conclure que des grandes structures observées dans l'univers ne se soient pas formé par l'instabilité gravitationnelle à partir de petites fluctuations initiales. Comme nous le verrons, cette conclusion n'est pas correcte.

A partir de Ψ il est facile de calculer les autres variables des perturbations d'un fluide parfait. Un bref calcul, utilisant la relation

$$f'_q = f_{q-1} - \frac{q+1}{x} f_q, \quad \text{où } f_q = j_q \text{ ou } y_q,$$

pour la dérivée des fonctions Bessel sphériques (voir e.g. Jackson [29]), donne

$$V(k, \eta) = \frac{(1+3w)^2 c_s (k\eta)^2}{6(1+w)a} A \left[j_{q-1}(x) - \frac{q+1}{x} j_q(x) \right], \quad (6.19)$$

$$x \equiv c_s k \eta \quad q = \frac{2}{1+3w},$$

$$\delta(k, \eta) = \frac{2A}{q a} \left[\left(q+1 - \frac{1}{3q} (k\eta)^2 \right) j_q(x) - x j_{q-1}(x) \right]. \quad (6.20)$$

A grande échelle, $x \ll 1$, δ reste constant et $V \propto x$ est croissante, mais $|V/\delta| \sim |V/\Psi| \sim x \ll 1$. A l'intérieur de l'horizon de son, $x \gg 1$ l'amplitude des perturbations se comporte comme $|\delta| \propto |V| \propto \eta/a$. Donc pour $w \leq 1/3$ tel que $q \geq 1$, les perturbations ne sont pas croissantes. Heureusement (pour la formation des structure) il existe une exception à cette règle. Celle de la poussière, $w = c_s = 0$. Dans ce cas, $x \equiv 0$ et les solutions (6.17), (6.19) et (6.20) ne s'appliquent pas. Nous traitons ce cas et le cas importante de la radiation plus en détail.

Univers dominé par la radiation, $\Omega_{\text{rad}} = 1$

La radiation correspond aux solutions susmentionnées avec $w = 1/3$ donc $q = 1$ et $c_s = 1/\sqrt{3}$. Avec (voir [29])

$$j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} \quad \text{et} \quad j_0(x) = \frac{\sin x}{x},$$

les équations (6.17), (6.19) et (6.20) donnent

$$\Psi(k, \eta) = \frac{A}{a} \left[\frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} \right], \quad x = k\eta/\sqrt{3} \quad (6.21)$$

$$V(k, \eta) = \frac{\sqrt{3}A}{a} \left[\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{x} \right) \sin x + \cos x \right] \quad (6.22)$$

$$\delta(k, \eta) = \frac{2A}{a} \left[\left(x - \frac{2}{x} \right) \cos x + 2 \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) \sin x \right]. \quad (6.23)$$

A grande échelle, $x \ll 1$, Ψ et δ restent constantes et $V \propto x$. A l'intérieur de l'horizon de son, $x \gg 1$, Ψ décroît comme $1/x^2$ et les perturbations de densité de la radiation oscillent comme $\delta \propto \cos(k\eta/\sqrt{3})$ à amplitude constante, comme déjà mentionné au chapitre 3, éq. (3.31). Ce qui est important est que toutes les fluctuations d'une longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ donnée, passent un maximum, un zéro ou un minimum au même temps η . Si nous faisons une 'photo' d'un moment dans l'expansion (le CMB représente une 'photo' de l'univers au moment η_{dec}), les fluctuations de taille (co-mobile) $\lambda_n = (n\sqrt{3}/2)\eta_{\text{dec}}$ sont au maximum si n est paire et au minimum si n est impaire. Ces maxima et minima correspondent aux pics acoustiques des fluctuations du fond cosmique micro-onde comme nous le verrons plus en détail par la suite.

Univers dominé par la matière, $\Omega_m = 1$

Nous supposons un univers rempli de particules non-relativistes, constituant un gaz de pression négligeable, i.e. $w = 0$. Dans ce cas, l'équation de Bardeen (6.16) se réduit à

$$\Psi'' + \frac{6}{\eta} \Psi' = 0 \quad (6.24)$$

avec solution générale

$$\Psi = A + \frac{B}{\eta^5}. \quad (6.25)$$

De nouveau nous demandons que la solution reste régulier pour $\eta \rightarrow 0$, et nous posons $B = 0$. Nous trouvons aussi aisément les solutions pour V et δ ,

$$V = \frac{A}{3}(k\eta), \quad (6.26)$$

$$\delta = -A \left(2 + \frac{(k\eta)^2}{6} \right). \quad (6.27)$$

A grande échelles, $k\eta \ll 1$, Ψ et δ sont constant et $V \propto k\eta$, comme pour $w \neq 0$. Ceci n'est pas très surprenant parce que sur ces échelles la répulsion de la pression ne peut pas agir et donc les solutions sont indépendantes de la valeur de w . Mais à l'intérieur de l'horizon, $k\eta \gg 1$, les fluctuations de densité de la poussière sont croissant comme le facteur d'échelle, $\delta \propto \eta^2 \propto a$.

Ceci suffit pour la formation des structures qui se fait donc comme suit : Aussi longtemps que l'univers est dominé par la radiation, les fluctuations de densité sont constantes à grande échelle et oscillent à amplitude constante à petite échelle. Dès que l'univers est dominé par la matière non-relativiste, à l'intérieur de l'horizon les fluctuations commencent à croître comme le facteur d'échelle. Si l'amplitude primordiale d'une fluctuations de densité avec longueur d'onde telle que $k\eta_{eq} \gg 1$ est $\delta_i(k)$, dans l'ère de la matière, $\eta > \eta_{eq}$, l'amplitude de cette fluctuation est alors $\delta(k, \eta) \simeq \delta_i(k)a(\eta)/a_{eq} \simeq \delta_i(k)(\eta/\eta_{eq})^2$. Si par contre, $k\eta_{eq} < 1$, la croissance est retardée et elle commence seulement au moment $\eta_k \simeq 1/k$. Une fois à l'intérieur de l'horizon, l'amplitude peut être approximée dans ce cas par $\delta(k, \eta) \sim \delta_i(k)(k\eta)^2$. Nous discuterons le spectre des fluctuations i.e. leur dépendance en k plus en détail dans la section 6.4.

Ici nous mentionnons encore l'importance de la matière noire. Comme $\Omega_m \simeq 8\Omega_b$, l'univers entre l'ère de la matière avec un z_{eq} environ huit fois plus élevé que dans le cas où il ne contient pas de matière noire. Les fluctuations grandissent alors par un facteur environ 8 de plus que dans un univers sans matière noire. Ce facteur est décisif pour que la formation des structures observées soient en accord avec l'amplitude des perturbations initiales comme nous la dérivons de l'amplitude des fluctuations dans le CMB dans les paragraphes suivants.

6.3 Les anisotropies du CMB

Avant de dériver les fluctuations dans le CMB, nous discutons une anisotropie toute particulière qui est due à notre mouvement par rapport à ce rayonnement de fond.

6.3.1 Le dipôle

Même si le rayonnement cosmologique de fond était parfaitement isotrope, un observateur qui bouge avec une vitesse \mathbf{v} par rapport au référentiel cosmologique, observe une anisotropie. Des photons qui proviennent de la direction \mathbf{n} avec énergie E ont l'énergie $E'(\mathbf{n}) = \gamma E(1 + \mathbf{n} \cdot \mathbf{v})$ avec $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ dans le référentiel de cet observateur. Si l'observateur suppose que la distribution des photons est planckienne avec énergie E' , il trouve

$$f(E') = \frac{1}{e^{E'/T'} + 1} = \frac{1}{e^{E/T_0} + 1}.$$

Donc $E'/T' = E/T_0$. Ceci implique qu'il voit une température qui dépend de la direction,

$$T'(\mathbf{n}) = T_0\gamma(1 + \mathbf{n} \cdot \mathbf{v})$$

Au plus bas ordre en \mathbf{v} , $T'(\mathbf{n}) = T_0(1 + \mathbf{n} \cdot \mathbf{v})$ ce qui correspond à un dipôle.

Cette anisotropie dipolaire est due au mouvement terrestre par rapport au référentiel du *CMB*. Les observations donnent pour l'amplitude du dipôle

$$\frac{\delta T}{T} = |\mathbf{v}| = 1.23 \times 10^{-3},$$

correspondant à une vitesse de $368 \pm 2 \text{ km s}^{-1}$ mesurée sur Terre. Ce dipôle est mesuré avec une telle précision qu'on peut même distinguer les variations annuelles dues au mouvement de la terre autour du soleil. Il est environ 100 fois plus grand que les multipôles supérieures et fût découvert déjà dans les années 70.

6.3.2 Anisotropies primordiales

Une fois les contributions du dipôle terrestre et des avant-plans soustraites (anisotropies secondaires), il ne subsiste plus que des fluctuations de l'ordre de quelques 10^{-5} K (cf. figures 6.2 et 4.11). Elles représentent principalement les fluctuations de la radiation sur la surface de dernière diffusion ($z = z_{\text{dec}}$), qui ont été modifiées légèrement sur le trajet des photons de la surface de dernière diffusion dans nos antennes le long des géodésiques de la géométrie perturbée.

Ici nous les calculons en premier ordre dans les perturbations pour un univers à coupure nulle, $K = 0$. La trajectoire non-perturbée d'un photon qui nous parvient d'une direction \mathbf{n} et qui arrive à la position \mathbf{x}_0 au moment η_0 est simplement $(x^\mu(\eta)) = (\eta, \mathbf{n}(\eta - \eta_0) + \mathbf{x}_0)$, parce que les trajectoires des photons sont conformément invariantes.

La métrique perturbée est de la forme

$$d\tilde{s}^2 = a^2 ds^2 \quad \text{avec} \quad ds^2 = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu. \quad (6.28)$$

La perturbation $h_{\mu\nu}$ est donnée par les potentiels de Bardeen Φ et Ψ définis dans (6.4). Les métriques $d\tilde{s}^2$ et ds^2 ont les mêmes géodésiques genre lumière, seul les paramètres affines que nous dénommons par $\tilde{\lambda}$ et λ sont différents. Nous avons vu que dans un univers en expansion les impulsions des photons sont décalées vers le rouge. Comme $\tilde{p}^i \propto \tilde{n}^i$, et $\tilde{p} = \sqrt{\tilde{g}_{ij} \tilde{p}^i \tilde{p}^j} \propto a \tilde{n} \propto 1/a$. Il faut alors que $\tilde{n}^i \propto 1/a^2$ et alors (comme n^i est constant) $\tilde{\lambda} = a^2 \lambda$. Nous pouvons fixer λ en posant $\mathbf{n}^2 = 1$.

Nous calculons maintenant la perturbation de l'énergie d'un photon qui bouge dans la métrique perturbée $d\tilde{s}^2$. Pour ceci nous introduisons les perturbations de la géodésique, $n^0 = 1 + \delta n^0$ etc. Au premier ordre l'équation géodésique donne

$$\frac{d}{d\lambda} \delta n^\mu = -\delta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu n^\alpha n^\beta. \quad (6.29)$$

Pour le changement de l'énergie nous ne nous intéressons qu'à δn^0 . Les symboles de Christoffel relevants sont en premier ordre

$$\delta \Gamma_{\alpha\beta}^0 = -\frac{1}{2} (h_{\alpha 0, \beta} + h_{\beta 0, \alpha} - h'_{\alpha\beta})$$

ce qui donne

$$\frac{d}{d\lambda}\delta n^\mu = h_{\alpha 0, \beta} n^\alpha n^\beta - \frac{1}{2} h'_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta. \quad (6.30)$$

La prime indique la dérivée par rapport au temps η . Pour intégrer cette équation le long de la géodésique (non-perturbée), nous utilisons que

$$h_{\alpha 0, \beta} n^\alpha n^\beta = \frac{d}{d\lambda}(h_{\alpha 0} n^\alpha) = \frac{d}{d\lambda}h_{00}.$$

Pour le deuxième signe d'égalité nous avons fait appel à (6.4), i.e. $h_{0i} = 0$. Nous posons encore $h_{00} = -2\Psi$ et $h_{ij} = -2\Phi\delta_{ij}$. Avec ceci l'intégration de (6.30) donne

$$\delta n^0 = -2\Psi + \int_i^f (\Psi' + \Phi') d\lambda. \quad (6.31)$$

L'énergie d'un photon avec quadri-impulsion p^μ vue par une observatrice avec quadri-vitesse u^μ est $E = -(\tilde{u}, \tilde{p})$. Donc le rapport entre l'énergie mesurée à η_f et celle émise à η_i est

$$\frac{E_f}{E_i} = \frac{(\tilde{n}\tilde{u})_f}{(\tilde{n}\tilde{u})_i} = \frac{a_i}{a_f} \frac{(n \cdot u)_f}{(n \cdot u)_i}, \quad (6.32)$$

Ici le $\tilde{\cdot}$ est le produit scalaire dans l'univers en expansion et \tilde{u} est la quadri-vitesse dans l'univers en expansion, $\tilde{u} = a^{-1}u$ avec

$$u = (1 - \Psi)\partial_\eta + v^i\partial_i.$$

Avec $\tilde{n}^\mu = a^{-2}n^\mu$ ceci implique (6.32). Le rapport $a_i/a_f = T_f/T_i$ correspond aux températures non-perturbées. L'observatrice mesure la température $T_0 = T_f + \delta T_f$. La température d'émission est $T_{\text{dec}} = T_i + \delta T_i$. Faisant appel à $\delta T = \frac{1}{4}\delta\rho_\gamma$ nous obtenons

$$\frac{a_i}{a_f} = \frac{T_f}{T_i} = \frac{T_0}{T_{\text{dec}}} \left(1 - \frac{\delta T_f}{T_f} + \frac{\delta T_i}{T_i}\right) = \frac{T_0}{T_{\text{dec}}} \left(1 - \frac{1}{4}\delta_\gamma|_i^f\right), \quad (6.33)$$

Avec ceci (6.32) mène à

$$\frac{E_f}{E_i} = \frac{T_0}{T_{\text{dec}}} \left\{1 - \left[\frac{1}{4}\delta_\gamma + v_j^{(b)} n^j + \Psi\right]_i^f + \int_i^f (\Psi' + \Phi') d\lambda\right\}. \quad (6.34)$$

Pour des photons qui nous arrivent des directions $\mathbf{n}_1 \neq \mathbf{n}_2$ nous trouvons alors une différence de température

$$\frac{\Delta T}{T} \equiv \frac{\Delta T(\mathbf{n}_1)}{T} - \frac{\Delta T(\mathbf{n}_2)}{T} \equiv \frac{E_f}{E_i}(\mathbf{n}_1) - \frac{E_f}{E_i}(\mathbf{n}_2). \quad (6.35)$$

La contribution la plus importante à $\frac{\Delta T}{T}(\mathbf{n})$ est le dipôle, $\mathbf{v}(\eta_0) \cdot \mathbf{n}$, qui est dû à notre mouvement par rapport à la surface d'émission comme discuté au paragraphe précédent.

Pour les multipôles supérieurs (polynômes d'ordre 2 et plus dans les composantes n^i), nous avons

$$\frac{\Delta T(\mathbf{n})}{T} = \left[\frac{1}{4}\delta_\gamma + v_j^{(b)} n^j + \Psi\right](\eta_{\text{dec}}, \mathbf{x}_{\text{dec}}) + \int_{\eta_{\text{dec}}}^{\eta_0} (\Psi' + \Phi')(\eta, \mathbf{x}(\eta)) d\eta. \quad (6.36)$$

Ici $\mathbf{x}(\eta)$ est la position non-perturbée du photon à temps η qui parvient à une observatrice à \mathbf{x}_0 au temps η_0 , et $\mathbf{x}_{\text{dec}} = \mathbf{x}(\eta_{\text{dec}})$.

Le terme $\frac{1}{4}\delta_\gamma(\eta_{\text{dec}}, \mathbf{x}_{\text{dec}})$ décrit les fluctuations de la température à la surface de dernière diffusion. Il oscille avec une fréquence bien connue et, comme nous le verrons c'est ce terme qui donne lieu aux pics acoustiques dans le spectre des anisotropies du CMB. Le terme $v_j^{(b)} n^j$ est simplement la contribution Doppler de l'émetteur. L'intégral est appelé le terme 'Sachs-Wolfe intégré' et le terme Sachs-Wolfe ordinaire est la somme $\frac{1}{4}\delta_\gamma + \Psi$ à grande échelle.

6.3.3 Effet Sachs–Wolfe

Il domine à grande échelle angulaire, et apparaît suite aux perturbations gravitationnelles sur la surface de dernière diffusion. Pour des fluctuations d'un fluide parfait, les équations d'Einstein donnent $\Psi = \Phi$. Pour discuter le terme Sachs–Wolfe ordinaire un peu plus en détail, rappelons que nous voulons considérer des perturbations adiabatiques. Nous considérons des perturbations de la densité de radiation et de la matière,

$$\rho_\gamma(\mathbf{x}, t) = \bar{\rho}_\gamma(1 + \delta_\gamma(\mathbf{x}, t)) \quad (6.37)$$

$$\rho_m(\mathbf{x}, t) = \bar{\rho}_m(1 + \delta_m(\mathbf{x}, t)), \quad (6.38)$$

où $\bar{\rho}_\gamma$ et $\bar{\rho}_m$ sont la densité d'énergie moyenne de la radiation et de la matière, respectivement. Nous avons vu que l'entropie de la radiation est proportionnelle à $s_\gamma \propto T^3 \propto \rho_\gamma^{3/4}$ tandis que l'entropie de la matière est simplement proportionnelle à la densité des particules et donc $s_m \propto \rho_m$. Pour que les perturbations soient adiabatiques il faut alors que

$$\delta_m = \frac{3}{4}\delta_\gamma.$$

Comme nous avons vu que dans un univers dominé par la matière, à grandes échelles $k\eta \ll 1$ il est $\delta_m = -2\Psi$, voir éq. (6.27), donc

$$\frac{1}{4}\delta_\gamma = \frac{1}{3}\delta_m = -\frac{2}{3}\Psi, \quad k\eta \ll 1.$$

Si nous négligeons l'intégral, à grande échelle les fluctuations sont alors donné par

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{3}\Psi. \quad (6.39)$$

Ce résultat important a été dérivé par Sachs et Wolfe en 1967 [51]. Les zones de température inférieure (resp. supérieure) à la moyenne $T = 2.725$ K tracent les sur-densités (resp. les sous-densités). Si le spectre du potentiel gravifique est invariant d'échelle, $\langle |\Psi|^2 \rangle k^3 = \text{constant}$, cet effet apparaît sous la forme d'un plateau dans le spectre des anisotropies du CMB (cf. section 6.4.2).

6.4 Spectres de Puissance

Les variables des perturbations en cosmologie sont en effet des variables aléatoires. Les quantités que nous pouvons comparer avec des résultats expérimentaux

ne sont alors pas $X(t, \mathbf{x})$ pour une variable X données mais des espérances ; soit des fonctions de corrélation,

$$\langle X(t, \mathbf{x})X(t, \mathbf{y}) \rangle = C_X(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

soit le spectre de puissance, $P_X(k, t)$ qui est défini par

$$\langle \hat{X}(t, \mathbf{k})\hat{X}^*(t, \mathbf{q}) \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q})P_X(t, k). \quad (6.40)$$

Ici nous supposons que le processus stochastique qui a généré les fluctuations initiales est statistiquement homogène et isotrope. Pour une variable scalaire X il suit alors que C_X n'est une fonction que de $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ et que P_X est sa transformée de Fourier. Aussi le facteur $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{q})$ est une conséquence de l'homogénéité statistique. \hat{X} est la transformée Fourier de X ,

$$\hat{X}(t, \mathbf{k}) = \int d^3x e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}} X(t, \mathbf{x}).$$

6.4.1 Spectre Harrison Zel'dovich

Les modèles d'inflation les plus simples prédisent que le spectre du potentiel de Bardeen après l'inflation est invariant d'échelles,

$$k^3 P_\Psi(k, \eta) \propto k^{n_s - 1} \quad \text{avec} \quad n_s \simeq 1 \quad \text{pour} \quad k\eta \ll 1.$$

Pour la solution (6.21) la variable aléatoire est $A(\mathbf{k})$. La dépendance du temps de Ψ est déterministe. Comme $\Psi \propto A$ à grande échelle, ceci implique

$$\langle A(\mathbf{k})A^*(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')P_A(k), \quad \text{avec} \quad k^3 P_A(k) = \mathcal{A}^2 \left(\frac{k}{k_c} \right)^{n_s - 1}. \quad (6.41)$$

Ici k_c est une échelle dit 'pivot' et \mathcal{A} est l'amplitude des perturbations à cette échelle. A partir du spectre de A et les solutions (6.22) et (6.23) nous pouvons déterminer aussi le spectre de δ et V . Les spectres dans l'ère dominée par la matière est alors obtenu avec la solution dans l'ère de la matière à partir des conditions initiales qui sont les solutions à la fin de l'ère de radiation. Un résultat plus précis est obtenu par un calcul numérique. Dans la figure 6.1 nous montrons le spectre de Bardeen à présent, $t = t_0$. A grande échelle, l'amplitude de $k^3 |\Psi|^2$ est constante. A des échelles $k > k_{\text{eq}}$ avec $k_{\text{eq}} \equiv \sqrt{3}/\eta_{\text{eq}}$, c'est-à-dire des échelles qui ont passé l'horizon encore dans l'ère dominée par la radiation, on voit des oscillation et une décroissance. Ceci vient du fait que dans la radiation à l'intérieur de l'horizon Ψ oscille et décroît comme $1/(a\eta) \propto 1/\eta^2$, voir éq. (6.21) jusqu'au temps η_{eq} ou le potentiel redevient constant, éq (6.25). Pour ces échelles ceci résulte dans une net décroissance d'un facteur de l'ordre de $(\eta_k/\eta_{\text{eq}})^4 = (k/k_{\text{eq}})^{-4}$ pour $k^3 |\Psi|^2$.

6.4.2 Le spectre de puissance des anisotropies du CMB

Les anisotropies du CMB en un point \mathbf{x}_0 fixé représentent une fonction sur la sphère des direction \mathbf{n} d'observation. Ils peuvent alors être développées en harmoniques sphériques comme

$$\frac{\Delta T}{T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}) = \sum_{\ell m} a_{\ell m}(\mathbf{x}_0) Y_{\ell m}(\mathbf{n}). \quad (6.42)$$

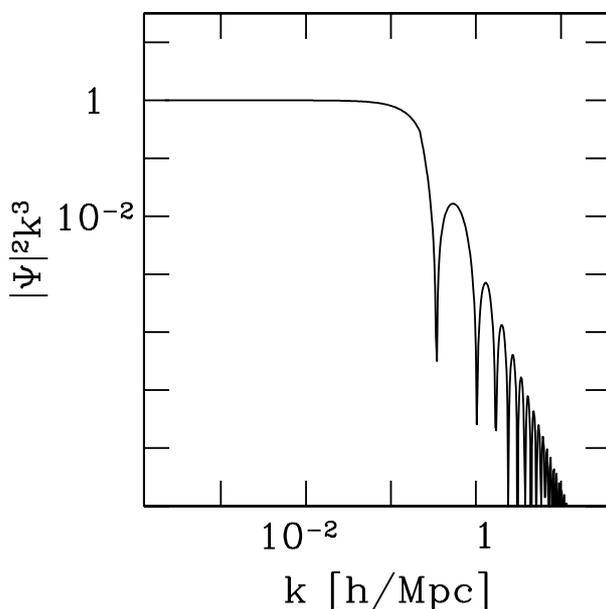


FIG. 6.1 – Un spectre invariant d'échelle pour le potentiel de Bardeen. Ici $k_{\text{eq}} \simeq 0.1h/\text{Mpc}$. Les échelles $k > 0.1h/\text{Mpc}$ entrent l'horizon dans la phase de la radiation. A ces échelles le spectre oscille et il est amorti comme $(k/k_{\text{eq}})^{-4}$.

Les fluctuations étant générées par un processus aléatoire, seules des valeurs moyennes peuvent être calculées; moyenné sur l'ensemble de différents réalisations du processus aléatoire. Nous n'avons cependant qu'un seul univers, une réalisation à disposition (*variance cosmique*). Pour sortir de cette impasse, nous pouvons supposer, pour des fluctuations à petite échelle, que la valeur moyenne statistique est identique à la moyenne spatiale obtenue sur un ensemble d'univers, une sorte d'érgodicité. Les processus à l'origine des anisotropies étant homogènes et isotropes, les coefficients $a_{\ell m}$ ne dépendent pas de \mathbf{x}_0 et comme nous le démontrons ici, ils sont de la forme

$$\langle a_{\ell m} \cdot a_{\ell' m'}^* \rangle = \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} C_\ell \quad (6.43)$$

C_ℓ est le moment multi-polaire d'ordre ℓ . L'ensemble des C_ℓ constitue le spectre de puissance du *CMB*. Dans le cas d'un processus gaussien, ils caractérisent complètement la distribution de fluctuations du *CMB*. Le produit $\ell(\ell + 1)C_\ell$ est une mesure pour la fluctuation moyenne $\Delta T/T$ à l'échelle angulaire $\theta \sim \pi/\ell$. Toutefois, la procédure utilisée pour extraire les moyennes n'est valable qu'à petite échelle. Il faut donc s'attendre à des erreurs statistiques importantes à grande échelle (*variance cosmique*).

Pour démontrer que l'isotropie stochastique implique la forme (6.43) pour les corrélateurs des $a_{\ell m}$, nous considérons la fonction de corrélation des anisotropies,

$$C(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = \left\langle \frac{\Delta T}{T}(\mathbf{n}) \frac{\Delta T}{T}(\mathbf{n}') \right\rangle. \quad (6.44)$$

Due à l'isotropie stochastique, $C(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$ est une fonction seulement de l'angle

entre \mathbf{n} et \mathbf{n}' ou de son cosinus, $\mu = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'$. Nous pouvons alors la développer en polynômes de Legendre,

$$C(\mu) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell} (2\ell + 1) C_{\ell} P_{\ell}(\mu). \quad (6.45)$$

Mais la définition (6.44) implique

$$\begin{aligned} C(\mu) &= \sum_{\ell, \ell', m, m'} \langle a_{\ell m} \cdot a_{\ell' m'}^* \rangle Y_{\ell m}(\mathbf{n}) Y_{\ell' m'}^*(\mathbf{n}') \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell} (2\ell + 1) C_{\ell} P_{\ell}(\mu) \\ &= \sum_{\ell} C_{\ell} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(\mathbf{n}) Y_{\ell m}^*(\mathbf{n}') \end{aligned} \quad (6.46)$$

Pour la dernière ligne nous avons utilisé le théorème d'addition pour les harmoniques sphériques (voir [29]),

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(\mathbf{n}) Y_{\ell m}^*(\mathbf{n}') = \frac{2\ell + 1}{4\pi} P_{\ell}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}').$$

La comparaison de la première et la dernière ligne de (6.46) implique (6.43).

Nous voulons encore montrer comment les anisotropies du CMB peuvent être employées pour déterminer l'amplitude \mathcal{A} du potentiel de Bardeen. Pour ceci nous utilisons l'éq. (6.39) valable à grande échelle. Donc

$$\frac{\Delta T}{T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}, \eta_0) \simeq \frac{1}{3} \Psi(\mathbf{x}_{\text{dec}}, \eta_{\text{dec}}). \quad (6.47)$$

Avec $\mathbf{x}_{\text{dec}} = \mathbf{x}_0 - \mathbf{n}(\eta_0 - \eta_{\text{dec}})$, la transformée Fourier de (6.47) est donnée par

$$\frac{\Delta T}{T}(\mathbf{k}, \mathbf{n}, \eta_0) = \frac{1}{3} \Psi(\mathbf{k}, \eta_{\text{dec}}) \cdot e^{i\mathbf{k}\mathbf{n}(\eta_0 - \eta_{\text{dec}})}. \quad (6.48)$$

Nous utilisons la décomposition (voir, par exemple [29])

$$e^{-i\mathbf{k}\mathbf{n}(\eta_0 - \eta_{\text{dec}})} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) i^{\ell} j_{\ell}(k(\eta_0 - \eta_{\text{dec}})) P_{\ell}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n}),$$

où j_{ℓ} sont les fonctions Bessel sphériques et $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$. Ceci donne

$$\begin{aligned} &\left\langle \frac{\Delta T}{T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}, \eta_0) \frac{\Delta T}{T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}', \eta_0) \right\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3k d^3k' e^{i\mathbf{x}_0 \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')} \left\langle \frac{\Delta T}{T}(\mathbf{k}, \mathbf{n}, \eta_0) \left(\frac{\Delta T}{T} \right)^*(\mathbf{k}', \mathbf{n}', \eta_0) \right\rangle \\ &\simeq \frac{1}{9(2\pi)^6} \int d^3k d^3k' e^{i\mathbf{x}_0 \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')} \langle \Psi(\mathbf{k}) \Psi^*(\mathbf{k}') \rangle \sum_{\ell, \ell'=0}^{\infty} (2\ell + 1)(2\ell' + 1) i^{\ell - \ell'} \\ &\quad \cdot j_{\ell}(k(\eta_0 - \eta_{\text{dec}})) j_{\ell'}(k'(\eta_0 - \eta_{\text{dec}})) P_{\ell}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n}) \cdot P_{\ell'}(\hat{\mathbf{k}}' \cdot \mathbf{n}') \\ &= \frac{1}{9(2\pi)^3} \int d^3k P_{\Psi}(k) \sum_{\ell, \ell'=0}^{\infty} (2\ell + 1)(2\ell' + 1) i^{\ell - \ell'} \\ &\quad \cdot j_{\ell}(k(\eta_0 - \eta_{\text{dec}})) j_{\ell'}(k'(\eta_0 - \eta_{\text{dec}})) P_{\ell}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n}) \cdot P_{\ell'}(\hat{\mathbf{k}}' \cdot \mathbf{n}') \end{aligned} \quad (6.50)$$

Dans le premier signe d'égalité nous avons utilisé la définition de la transformation de Fourier. Nous insérons encore $P_\ell(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n}) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_m Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell m}(\mathbf{n})$ et $P_{\ell'}(\hat{\mathbf{k}}\mathbf{n}') = \frac{4\pi}{2\ell'+1} \sum_{m'} Y_{\ell' m'}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell' m'}(\mathbf{n}')$, l'intégration sur les directions $d\Omega_{\hat{\mathbf{k}}}$ donne $\delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \sum_m Y_{\ell m}^*(\mathbf{n}) Y_{\ell m}(\mathbf{n}')$. Avec $\sum_m Y_{\ell m}^*(\mathbf{n}) Y_{\ell m}(\mathbf{n}') = \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell(\mu)$, où $\mu = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'$, nous obtenons

$$\left\langle \frac{\Delta T}{T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}, \eta_0) \frac{\Delta T}{T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}', \eta_0) \right\rangle_{\mathbf{nn}'=\mu} \simeq \sum_\ell \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell(\mu) \frac{2}{\pi} \int \frac{dk}{k} \frac{1}{9} P_\Psi(k, \eta_{\text{dec}}) k^3 j_\ell^2(k(\eta_0 - \eta_{\text{dec}})). \quad (6.51)$$

En comparant cette équation avec (6.46) nous trouvons

$$C_\ell^{(SW)} \simeq \frac{2}{9\pi} \int_0^\infty \frac{dk}{k} P_\Psi(k, \eta_{\text{dec}}) k^3 j_\ell^2(k(\eta_0 - \eta_{\text{dec}})). \quad (6.52)$$

Ceci est valable sur des échelles qui sont encore à l'extérieur de l'horizon au moment de découplage, η_{dec} , ce qui correspond à des harmoniques $2 \leq \ell \ll (\eta_0 - \eta_{\text{dec}})/\eta_{\text{dec}} \sim 100$.

La fonction $j_\ell^2(k(\eta_0 - \eta_{\text{dec}}))$ a un maximum à environ $k(\eta_0 - \eta_{\text{dec}}) \simeq k\eta_0 \simeq \ell$. Si Ψ est une pure puissance à grande échelle, $k\eta_{\text{dec}} \lesssim 1$, comme dans éq. (6.41) et nous posons $k(\eta_0 - \eta_{\text{dec}}) \sim k\eta_0$, l'intégral (6.52) peut être évalué analytiquement. Pour l'ansatz (6.41) on trouve

$$C_\ell^{(SW)} = \frac{\mathcal{A}^2}{9} (k_c \eta_0)^{1-n_s} \frac{\Gamma(3-n_s) \Gamma(\ell - \frac{1}{2} + \frac{n_s}{2})}{2^{3-n_s} \Gamma^2(2 - \frac{n_s}{2}) \Gamma(\ell + \frac{5}{2} - \frac{n_s}{2})} \quad \text{for } -3 < n_s < 3. \quad (6.53)$$

Nous sommes particulièrement intéressés au spectre Harrison-Zel'dovich, $n_s = 1$. Ceci donne

$$\ell(\ell+1) C_\ell^{(SW)} = \frac{\mathcal{A}^2}{9\pi} \simeq \left\langle \left(\frac{\Delta T}{T}(\vartheta_\ell) \right)^2 \right\rangle, \quad \vartheta_\ell \equiv \pi/\ell \quad \text{pour } \ell \lesssim \eta_0/\eta_{\text{dec}}. \quad (6.54)$$

Ceci correspond environ au comportement observé dans les expériences, surtout dans COBE DMR et WMAP qui ont publié le résultat [55]

$$n_s = 0.96 \pm 0.02. \quad (6.55)$$

À très grande échelle, le fait que depuis récemment l'univers est dominé par l'énergie noire et le potentiel de Bardeen n'est plus constant mais décroissant donne une contribution à l'intégral qu'on appelle le terme de 'Sachs-Wolfe intégré',

$$C_\ell^{(ISW)} \simeq \frac{8}{\pi} \int \frac{dk}{k} k^3 \left\langle \left| \int_{\eta_{\text{dec}}}^{\eta_0} \dot{\Psi}(k, \eta) j_\ell(k(\eta_0 - \eta)) d\eta \right|^2 \right\rangle. \quad (6.56)$$

Ce terme est relevant à très grande échelle ou encore à des échelles qui entrent l'horizon proche au découplage où l'univers contient encore suffisamment de radiation pour que l'approximation de l'ère de matière n'est pas très bonne, $60 < \ell < 200$.

Sur des échelles qui sont déjà à l'intérieur de l'horizon au moment de découplage on observe les oscillations du fluide de radiation dans les anisotropies de la température. Plus précisément à ces échelles le spectre est dominé par le terme acoustique,

$$C_\ell^{(AC)} \simeq \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dk}{k} k^3 \left\langle \left| \frac{1}{4} \delta_r(k, \eta_{\text{dec}}) j_\ell(k\eta_0) + V^{(r)}(k, \eta_{\text{dec}}) j'_\ell(k\eta_0) \right|^2 \right\rangle. \quad (6.57)$$

Pour discuter l'amortissement de Silk dans le spectre il faut analyser l'équation de Boltzmann que ne prend en compte pas seulement la propagation libre des photons après le découplage mais aussi les collisions avant la surface de dernière diffusion et l'épaisseur finie de cette dernière.

Les différentes caractéristiques du spectre de puissance C_ℓ (comme la position du premier pic acoustique,) dépendent étroitement des différents paramètres cosmologiques. Par exemple, si le paramètre de Hubble est connu, l'étude du fond de rayonnement cosmique offre la possibilité de déterminer la géométrie (paramètre Ω_κ), la constante cosmologique Ω_Λ , la densité de baryons $\rho_B = \Omega_b \rho_{c0}$ et la densité de matière non-relativiste, $\rho_m = \Omega_m \rho_{c0}$ avec une précision de l'ordre de 1% !

Comme exemple, la position du premier pic dans le cas de courbure nulle est à

$$\ell_1 \simeq k_1 \eta_0 \simeq \eta_0 / (c_s \eta_{\text{dec}}) \simeq \sqrt{3} \eta_0 / \eta_{\text{dec}}.$$

Si la courbure est non-nulle le dénominateur η_0 est à remplacer par la distance angulaire co-mobile à la surface de dernière diffusion, $\eta_0 \rightarrow d_A(\eta_{\text{dec}})/a(\eta_{\text{dec}}) = \sigma(\eta_{\text{dec}})$, voir éqs. (1.32) et (1.33).

6.5 Discussion qualitative

6.5.1 La dépendance des paramètres

Effet Sachs Wolfe

Comme nous avons vu, à grande échelle, des échelles supérieures à celle de l'horizon $d_H(t_{\text{dec}})$ lors de la recombinaison (cf. chapitre 5), autrement dit, pour $\ell \leq \ell_H$, les perturbations sont dominées par l'effet Sachs-Wolfe, ce qui correspond environ à des angles $\theta \geq 1^\circ$. À ces échelles, les anisotropies de la température sont données par

$$\frac{\Delta T(\mathbf{n})}{T} \simeq \frac{1}{3} \Psi(\eta_{\text{dec}}, \mathbf{x}_{\text{dec}}) + \int_{\eta_{\text{dec}}}^{\eta_0} (\Psi' + \Phi')(\eta, \mathbf{x}(\eta)) d\eta.$$

Dans un univers dominé par de la matière non-relativiste, les pressions anisotropes sont négligeables et $\Psi = \Phi = \text{constant}$, i.e. indépendant du temps, et donc l'intégral ne contribue pas. On a alors juste le premier terme qui est appelé 'l'effet Sachs-Wolfe ordinaire'. Mais toute suite après la recombinaison, où la contribution de la radiation n'est pas complètement négligeable et à bas redshift, $z \lesssim 2$ où la contribution de l'énergie sombre (constante cosmologique) devient importante, $\Psi' \neq 0$ et l'intégral contribue. Ceci est l'**effet Sachs Wolfe intégré**.

L'amplitude et la pente du 'plateau Schs–Wolfe' à $\ell \lesssim 60$ sont déterminées principalement par l'amplitude \mathcal{A} et l'index spectral n_s (en absence d'ondes gravitationnelles).

Pics acoustiques

Avant la recombinaison, la diffusion Compton couplent fortement matière baryonique et radiation qui peuvent alors être décrits comme un seul fluide parfait.

La gravité attire et comprime ce fluide dans les puits de potentiel. La pression des photons résiste à cette compression et génère des oscillations acoustiques dans le fluide. Ces ondes acoustiques, les solutions oscillatoires données en éqs. (6.22) et (6.23), gèlent dans le *CMB* lors de la recombinaison.

Les zones qui ont atteint leur maximum de compression ou de raréfaction lors de la recombinaison, apparaissent respectivement sous la forme de 'tâches chaudes' ou de 'tâches froides', qui donnent lieu à une série de 'pics' acoustiques dans le spectre. De plus, les pics de compression sont plus marqués que les pics de raréfaction dans la mesure où l'attraction gravitationnelle des baryons favorise la formation de sur-densités.

Etant donné que ces oscillations de plasma se déplacent à la vitesse du son c_s (qui est de l'ordre de $\simeq 1/\sqrt{3}$), ces perturbations acoustiques ne sont pas présentes pour des longueurs d'onde (co-mobiles) plus grande que $d_s = \int_0^{t_{\text{dec}}} c_s dt/a(t) \simeq \eta_{\text{dec}}/\sqrt{3}$, distance maximale parcourue par une onde sonore depuis le 'big-bang' (*sound horizon*). Le premier pic acoustique est alors (pour des conditions initiales adiabatiques) placé à l'échelle angulaire $\theta = d_s/d_A$ où d_A est la distance angulaire (co-mobile) de nous à la surface de dernière diffusion, $d_A = \sigma(\eta_0 - \eta_{\text{dec}}) \simeq \sigma(\eta_0)$. Comme cette distance dépend fortement de la courbure (voir éq. (1.23)), la position du premier pic acoustique et surtout la distance entre les pics dans le spectre d'anisotropies du *CMB* est un excellent moyen pour déterminer la géométrie de l'univers.

Sur les échelles intermédiaires, $\ell_H < \ell < \ell_{\text{damp}}$, ces oscillations acoustiques sont la principale source de perturbation. La distance $\Delta\ell$ séparant chacun de ces pics est principalement fonction de la géométrie et donc de Ω_κ , si H_0 est connu. Une densité baryonique $h^2\Omega_b$ élevée favorise les pics de compression (pics impaires) au détriment des pics de raréfaction (pics paires) ceci est dû à l'auto-gravité des baryons.

La position du premier pic dépend étroitement des conditions initiales choisies (perturbations adiabatiques ou isocourbures) et de la géométrie. Pour des perturbations adiabatiques et une géométrie euclidienne, c'est-à-dire $\kappa = 0$, la position du premier pic de compression est à $\ell_1 \sim 220$.

L'amplitude du premier pic dépend aussi fortement de la densité de matière, $h^2\Omega_m$. Le plus faible $h^2\Omega_m$, le plus important est la contribution de l'effet Sachs Wolfe intégré au premier pic. En plus, le plus faible $h^2\Omega_m \propto \rho_m$, le plus grand est δ_m pour un potentiel de Bardeen $\Psi \propto \rho_m \delta_m$ qui est fixé par l'amplitude des fluctuations à grande échelle (effet Sachs–Wolfe), et donc le plus élevés sont les pics acoustiques $\propto \delta_\gamma/4 \simeq \delta_m/3$.

Silk damping

Le couplage entre la matière et la radiation pendant le processus de la recombinaison devient de plus en plus faible et le libre parcours moyen des photons, $l_\gamma = (n_e \sigma_T)^{-1}$, grandit. Les photons d'une sur-densité peuvent s'échapper vers l'extérieur en diffusant à travers la perturbation ce qui amortit les perturbations.

Ce phénomène est connu sous le nom de *Silk Damping* (Silk 1968) et fait intervenir une échelle caractéristique d_{damp} qui est proportionnelle au libre parcours moyen l_γ des photons à mi-recombinaison. L'amortissement de Silk est important pour des échelles angulaires d'environ $\theta \lesssim d_{damp}/d_A \simeq 10'$. Pour calculer cet amortissement de façon quantitative, il faut résoudre l'équation de Boltzmann pour les photons. Plus de détails sur le calcul de ces effets se trouvent dans mon livre [15].

L'augmentation de $h^2 \Omega_b \propto n_e$ réduit $l_\gamma \sim 1/(n_e \sigma_T)$ et donc θ_{damp} , ce qui a pour effet d'augmenter $\ell_{damp} \simeq \pi/\theta_{damp}$. Dans le cas d'un univers plat ($\kappa = 0$) et $h^2 \Omega_b \simeq 0.02$, on a $\ell_{damp} \sim 600$.

Résumé

Effet	mécanisme physique	échelle angulaire θ
Sachs-Wolfe	redshift gravitationnel	$1^\circ < \theta < 90^\circ$
Pics acoustiques (Doppler)	oscillations acoustiques	$0.1^\circ < \theta < 1^\circ$
Silk damping	dissipation par diffusion	$\theta \lesssim 0.1^\circ$

6.5.2 Anisotropies secondaires

Les anisotropies secondaires sont des anisotropies qui sont générées par des effets non-linéaires et qui ne sont alors pas inclus dans un traitement perturbative de premier ordre. Nous savons que la distribution de la matière à 'petite' échelle fluctue fortement, non-linéairement. Ceci affecte les fluctuations du CMB surtout à petites échelles.

Effet Sunyaev-Zel'dovich (SZ)

C'est un cas particulier de la diffusion Compton, l'effet Compton inverse. Les photons du *CMB* gagnent de l'énergie par leur interaction avec les électrons chauds dans un amas de galaxies, dont la température est typiquement de quelques keV. Une partie de l'énergie du plasma est ainsi transférée au *CMB*.

L'effet Compton inverse préservant le nombre de photons, l'ensemble du spectre du *CMB* est décalé vers les fréquences plus élevées, les photons peu énergétiques étant propulsés vers la zone des hautes fréquences. Ceci se traduit par une légère diminution de la température dans le domaine de Rayleigh-Jeans $E \ll T$ (tout en l'augmentant dans la région de Wien, $E \gg T$).

On peut caractériser le changement du spectre produit par l'effet Sunyaev-Zel'dovich par le paramètre

$$y = \frac{k_B \sigma_T}{m_e c^2} \int n_e(t) T_e(t) dt.$$

Ici, l'intégral est à travers l'amas des galaxies. La quantité y , appelée le paramètre de Compton, est proportionnel à la fluctuation produite ; y est de l'ordre 10^{-5} à 10^{-4} pour un amas typique. La dimension angulaire de ces fluctuations est la taille typique d'un amas galactique qui est de quelques minutes d'arc. On peut distinguer les fluctuations provenant de l'effet SZ des fluctuations primordiales par leur signature spectrale : Une fluctuation primordiales provoque un simple 'shift' de la température pour les photons de toute énergie tandis que l'effet SZ 'baisse' la température dans le région Rayleigh-Jeans et l'augmente dans la région de Wien. (Pour en savoir plus, voir [15].)

Autres sources d'anisotropies secondaires

Voici une brève liste de mécanismes susceptibles de produire des anisotropies secondaires.

- Effet lentille : Le fait que les fluctuations traverse un milieu avec un métrique perturbée change leur taille et leur intensité. Cet effet de 2ème ordre est important pour des échelles angulaires $\theta \lesssim \pi/2000$ ce qui correspond à quelques minutes d'arc.

- La re-ionisation : A présent, le milieu inter-galactique est re-ionisé. Ceci est fort probablement dû au rayonnement ultraviolet des premières étoiles. Le principal effet de la re-ionisation est d'atténuer les anisotropies primaires en recouplant la matière avec la radiation. Cet effet dépend fortement du moment de la re-ionisation. Les observations des anisotropies dans le CMB supposent $z_{re} \simeq 10$. A ce redshift les électrons sont déjà si dilués que le recouplage n'est que très partiel. Cet effet est importante à toute échelle qui est à l'intérieur de l'horizon au moment de la re-ionisation ou il réduit les fluctuations de quelque pourcents. La re-ionisation génère aussi de la polarisation à grande échelle.

- L'effet Rees-Sciama : Le passage des photons à travers des champs gravitationnels non statiques produits par l'effondrement de structures non-linéaires modifie la température locale du CMB . Cet effet peut être important seulement à très petite échelle où il est dominé par l'effet lentille.

- Sources d'arrière plan : La distribution du CMB est contaminée par endroit par différentes sources de rayonnement : émission galactique radio (synchrotron et free-free), émission galactique infrarouge (poussières), sources radio extra-galactiques (la plupart du temps des spirales et des starbursts à haut redshift), nuages Ly α (bremsstrahlung) et l'effet SZ (détaillée ci-dessus). Ces sources sont distinguée des anisotropies primordiales par leur signature spectrale.

Un traitement complet des anisotropies du CMB est en dehors du programme de ce cours d'introduction à la cosmologie. Nous espérons néanmoins que les résultats présentés ici motivent l'étude de textes plus détaillés comme [15].

FIN

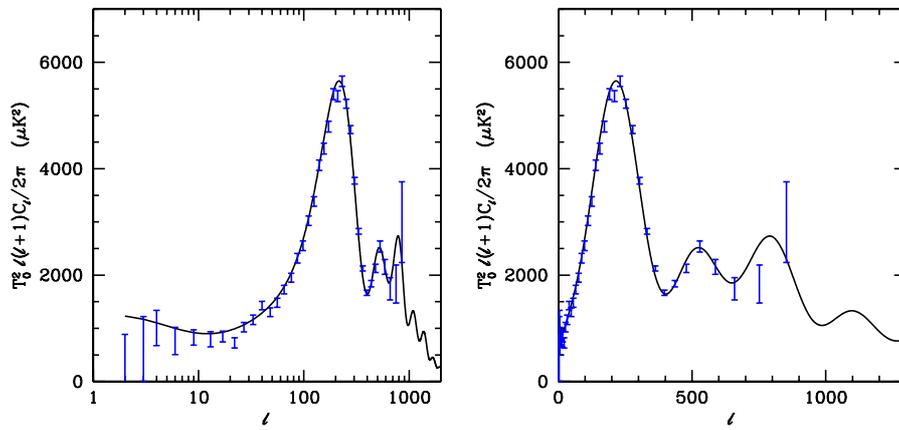


FIG. 6.2 – Les mesures de la première année du satellite WMAP. Un modèle adiabatique avec les paramètres cosmologiques $\Omega_m h^2 = 0.14$, $\Omega_\Lambda = 0.7$, $\Omega_b h^2 = 0.024$ et $h = 0.71$ (index spectral $n = 1$) est superposé aux données expérimentales. A gauche en axes logarithmiques, à droite en axes linéaires.

Bibliographie

- [1] M. Aaronson, J. Huchra, J. Mould, *Astrophys. J.* **237**, 655 (1980).
- [2] R. Abraham & J. Marsden , *Foundations of Mechanics* , Addison & Wesley New York (1982) , Chap. 3.
- [3] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer Verlag, Berlin (1978).
- [4] Benedetti & Petronio, *Lectures on Hyperbolic Geometry*, Springer Verlag, Berlin (1991).
- [5] Bennett, C.L. *et al.* , *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 1 (2003).
- [6] P. de Bernardis *et al.* , *Nature* **404**, 955 (2000).
- [7] J. Bernstein, L.S. Brown & G. Feinberg, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 25 (1989).
- [8] R. Brandenberger, *Inflation and the Theory of Cosmological Perturbations*, astro-ph/9711106 (1997).
- [9] S. Burles, K. M. Nollet, M. S. Turner, preprint, astro-ph/0010171 (2000).
- [10] C.J. Copi, D.N. Schramm & M.S. Turner, *Science* **267**, 192 (1995).
- [11] S. Dodelson, *Modern Cosmology*, (Academic Press, 2003).
- [12] R. Durrer, *Fund. in Cosmic Physics* **15**, 209 (1994).
- [13] R. Durrer and N. Straumann, *Nouvelles méthodes de détermination des paramètres cosmologiques*, Cours du Troisième Cycle de la Suisse Romande (1999).
- [14] R. Durrer, *Lectures on CMB anisotropies*, Cours given at the Mitteldeutsche Physik-Combo (2002/03), see <http://theory.physics.unige.ch/~durrer/>
- [15] R. Durrer, *The Cosmic Microwave Background*, Cambridge University Press (2008).
- [16] G. Efstathiou, in : *Physics of the Early Universe*, edt J. Peacock, A. Heavens and A. Davies, Edinburgh, USSP Publishers (1990).
- [17] J. Ehlers , in : *Proceedings of the Varenna School 1969* , Academic Press (1971).
- [18] W.L. Freedman et al. *Astrophys. J.* **553**, 47 (2001).
- [19] Y. Fukuda et al. , *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1562 (1998) ;
The Super Kamiokande Collaboration, T. Futagami et al., *Phys. Rev. Lett.* **82**, 5194 (1999).
- [20] E. Gawiser and J. Silk, *Phys. Rep.* **333**, 245 (2000).

- [21] L. Gurvits, K. Kellermann and S. Frey, *Astron. & Astrophys.* **342**, 378 (1999).
- [22] S. Hanany *et al.*, *Astrophys. J. Lett.* **545**, 5 (2000).
- [23] E. Harrison, *Phys. Rev.* **D1**, 2726 (1970).
- [24] S. Hawking and G. Ellis, *The large scale structure of space-time* (Cambridge University Press, 1973).
- [25] M. Hendry, S. Rauzy, P. Salucci, M. Persic, *Astrophys. Lett. Comm.* **36**, 323 (1997).
- [26] W. Hu, in : “Birth and Evolution of the Universe”, edt. ... preprint astro-ph/002520 (2000).
- [27] W. Hu, “Wandering in the Background : A CMB Explorer”, PhD Thesis, UC Berkeley, preprint astro-ph/9508126 (1995).
- [28] M. Lachièze-Rey and J.-P. Luminet, *Phys. Rep.* **254**, 135 (1995).
- [29] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley and Sons (New York, 1975).
- [30] E. Kolb and M. Turner, *The Early Universe*, Addison–Wesley (Redwood City, 1990).
- [31] A. Liddle and D. Lyth, *Cosmological inflation and large scale structure*, Cambridge University Press (Cambridge, 2000).
- [32] J. Lidsey, D. Wands and E. Copeland, *Phys. Rep.* **337**, 343 (2000).
- [33] Y. Matsushima, *Differentiable Manifolds*, Marcel Dekker Inc. (New York, 1972).
- [34] M. Mayor, *Bases de l’Astrophysique*, Cours donné à l’Université de Genève (1998).
- [35] M. Mayor, *Les Grandes Structures dans l’Univers*, Cours donné à l’Université de Genève (1998).
- [36] P. Mézáros, *Astron. Astrophys.* **38**, 225 (1974).
- [37] V.F. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press (2005).
- [38] K.A. Olive, G. Steigman & T.P. Walker, *Phys. Rep.* **333**, 389 (2000), preprint astro-ph/9905320.
- [39] T. Padmanabhan, *Structure formation in the universe*, Cambridge University Press (Cambridge, 1993).
- [40] T. Padmanabhan, *Cosmology and astrophysics through problems*, Cambridge University Press (Cambridge, 1996).
- [41] J. Peacock, *Modern Cosmology*, Cambridge University Press (1999).
- [42] P.J.E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press (1993).
- [43] A. Penzias & R. Wilson , *Astrophys. J.* **142** , 419 (1965).
- [44] S. Perlmutter *et al.* *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999).
- [45] P. Peter et J.P Uzan *Cosmologie primordiale*, Belin Collection échelles (Paris, 2005).
- [46] M. Pettini and D. Bowen, *Astrophys.J.* **560**, 41 (2001).
- [47] A. Riess *et al.* *Astron. J.* **116**, 1009 (1998).

- [48] M. Rowan–Robinson *The Cosmological Distance Ladder*, Freeman, San Francisco (1986).
- [49] P. Ruiz-Lapuente, in : *NATO Advanced Science Institutes (ASI) Series C* **486**, 681 (1997).
- [50] Rybicki & Lightman, *Radiative Processes in Astrophysics* , John Wiley and Sons (NY 1979).
- [51] R.K. Sachs et A.M. Wolfe, *Astrophys. J.***147**, 73 (1967).
- [52] S. Sakai *et al.*, preprint [astro-ph/9909269](#) .
- [53] S. Sheckman et al., *Astrophys. J.* **470**, 172 (1996).
- [54] D. Spergel et al., *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 175 (2003).
- [55] Spergel, D.N. et al. [astro-ph/0603449](#) (2006).
- [56] R. Srianand, P. Petitjean at C. Ledoux, *Nature* **408**, 931 (2000).
- [57] J. Stewart, *Non Equilibrium Relativistic Kinetic Theory*, Springer Lecture Notes (Berlin, 1971).
- [58] N. Straumann, *Helv. Phys. Acta* **47**, 379 (1974).
- [59] R. Sunyaev and Y. Zel'dovich, *Ast. Space Sci.* **7**, 3 (1970).
- [60] G. A. Tammann, B. R. Parodi, B. Reindl, in : *Proceedings of the IAU Coll. 176 "The Impact of Large-Scale Surveys on Pulsating Star Research"*, Budapest, Aug. 1999, eds. L. Szabados & D. Kurtz (ASP Conf. Ser.)
- [61] R. Trotta, *Cosmic microwave background anisotropies : Dependence on initial conditions*, travail de diplôme ETHZ (2001).
- [62] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons (1972).
- [63] R.M. Wald, *General Relativity* University of Chicago Press (1984).
- [64] J.A. Wolf, *Spaces of Constant Curvature*, Publish or Perish (1984).
- [65] Ya.B. Zel'dovich *Mont. Not. R. Ast. Soc.* **160**, P1 (1972).
- [66] F. Zwicky, *Helv. Phys. Acta* **6**, 110 (1933).

Annexe A

Unités, constantes, relations

La majeure partie de cette appendice est reprise de l'appendice -A- de Kolb & Turner [30], la meilleure partie de ce livre.

Facteurs de conversion

Dans un système d'unités avec $\hbar = c = k_{Boltzmann} = 1$ comme nous l'utilisons dans ce cours, toutes les unités peuvent être exprimées en fonction d'une unité d'énergie, par exemple le GeV. Nous avons alors

$$\begin{aligned} 1\text{GeV} &= 1.6022 \times 10^{-3}\text{erg} \\ &= 1.1605 \times 10^{13}\text{Kelvin} \\ &= 1.7827 \times 10^{-24}\text{g} \\ &= 5.0684 \times 10^{13}\text{cm}^{-1} \\ &= 1.5192 \times 10^{24}\text{sec}^{-1} \end{aligned}$$

D'autres relations utiles sont, par exemple,

$$\begin{aligned} 1\text{parsec (pc)} &= 3.2612 \text{ années lumières} = 3.0856 \times 10^{18}\text{cm} \\ 1\text{Mpc} &= 10^6\text{pc} \simeq 3 \times 10^{24}\text{cm} \simeq 10^{14}\text{sec} \\ 1\text{g/cm}^3 &= 4.3102 \times 10^{-18}\text{GeV}^4 \\ (\text{unité astronomique}) 1\text{AU} &= 1.4960 \times 10^{13}\text{cm} \\ 1(\text{Gauss})^2/8\pi &= 1.9084 \times 10^{-40}\text{GeV}^4 \\ 1\text{an} &\simeq \pi \times 10^7\text{sec} \end{aligned}$$

Constantes fondamentales :

$$\begin{aligned} \text{constante de Planck } \hbar = 1 &= h/(2\pi) \\ &= 1.0546 \times 10^{-27}\text{cm}^2\text{g sec}^{-1} \\ \text{vitesse de la lumière } c = 1 &= 2.9979\text{cm sec}^{-1} \\ \text{constante de structure fine } \alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi} &= 1/137.036 \\ \text{masse de Planck } m_P = &1.2211 \times 10^{19}\text{GeV} \end{aligned}$$

		=	$2.1768 \times 10^{-5}g$
longueur de Planck	ℓ_P	=	$8.189 \times 10^{-20}\text{GeV}^{-1}$
		=	$1.616 \times 10^{-33}\text{cm}$
		=	$5.3904 \times 10^{-44}\text{sec}$
masse de l'électron	m_e	=	0.5110MeV
masse du proton	m_p	=	938.27MeV
masse du neutron	m_n	=	939.57MeV
Rydberg	$1Ry$	=	$\alpha^2 m_e/2 = 13.606\text{eV}$
section efficace de Thomson	σ_T	\equiv	$8\pi\alpha^2/3m_e^2 = 6.6524 \times 10^{-25}\text{cm}^2$
rayon de Bohr	a_0	\equiv	$\frac{1}{\alpha m_e} = 5.2918 \times 10^{-9}\text{cm}$
magnéton de Bohr	μ_0	\equiv	$\frac{e}{2m_e} = 5.7884 \times 10^{-10} \frac{\text{GeV}}{\text{Gauss}}$
nombre d'Avogadro	N_A	=	6.0220×10^{23}
constante de Stefan-Boltzmann	a_{SB}	\equiv	$\pi^2/15 = 0.658$
	radian	1rad	= $180/\pi$ degrés = 57.266 degrés
	stéradian	1sr	= $1\text{rad}^2 = 3.283 \times 10^3$ degrés ²

Constantes importantes

masse du soleil	M_\odot	=	$1.989 \times 10^{33}g = 1.166 \times 10^{57}\text{GeV}$
rayon du soleil	R_\odot	=	$6.9598\text{cm} = 3.527 \times 10^{24}\text{GeV}^{-1}$
luminosité du soleil	L_\odot	=	$3.90 \times 10^{33}\text{erg sec}^{-1} = 1.6 \times 10^{12}\text{GeV}^{-2}$
masse de la Terre	M_\oplus	=	$5.977 \times 10^{27}g = 3.357 \times 10^{51}\text{GeV}$
magnitude du soleil	m_\odot	=	-26.85 , apparente
	\mathcal{M}_\odot	=	4.72 , absolue
module de distance	$m - \mathcal{M}$	=	$5 \log(D/10\text{pc})$
Jansky	$1Jy$	=	$10^{-23}\text{erg cm}^{-2}\text{sec}^{-1}\text{Hz}^{-1}$
		=	$2.4730 \times 10^{-48}\text{GeV}^3$
constante de Hubble	H_0	=	$100h \text{ km sec}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$
		=	$2.1332h \times 10^{-42}\text{GeV}$
	où		$0.5 < h < 0.8$
temps, distance de Hubble	H_0^{-1}	=	$3.0856 \times 10^{17}h^{-1}\text{sec}$
		=	$9.7776 \times 10^9 h^{-1}$ années
		=	$2997.9h^{-1}\text{Mpc}$
		=	$9.2503 \times 10^{27}h^{-1}\text{cm}$
densité critique	ρ_c	=	$\frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.8791h^2 \times 10^{-29}g \text{ cm}^{-3}$
		=	$8.0992h^2 \times 10^{-47}\text{GeV}^4$
		=	$1.0540h^2 \times 10^4\text{eV cm}^{-3}$

$$\begin{aligned}
&= 11.23 \text{protons/m}^3 \\
\text{température } T_0 &= 2.728\text{K} = 2.350 \times 10^{-13} \text{GeV} \\
\text{température des neutrinos } T_\nu &= 1.947\text{K} = (4/11)^{1/3} T_0
\end{aligned}$$

Formules utiles

photon

$$\begin{aligned}
\text{densité } n_\gamma &= 412 \text{cm}^{-3} \\
\text{entropie } s_\gamma &= 2900 \text{cm}^{-3} = 3.602 n_\gamma \\
\text{énergie } \rho_\gamma &= 2.012 \times 10^{-51} \text{GeV}^4 \\
\text{paramètre de densité } \Omega_\gamma h^2 &= 2.49 \times 10^{-5}
\end{aligned}$$

neutrino (par sorte)

$$\begin{aligned}
\text{densité } n_\nu &= 112 \text{cm}^{-3} \\
\text{entropie } s_\nu &= 472 \text{cm}^{-3} = 4.202 n_\nu \\
\text{énergie } \rho_\nu &= 3.08 \times 10^{-53} \text{GeV}^4 \\
\text{paramètre de densité } \Omega_\nu h^2 &= 5.65 \times 10^{-6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{entropie relativiste } s_0 &= 4316 \text{cm}^{-3} = s_\gamma + 3s_\nu \\
\text{param. de densité relativiste } \Omega_{\gamma 3\nu} h^2 &= 4.19 \times 10^{-5} \\
\text{densité baryonique } \Omega_b h^2 &= 3.639 \times 10^7 \eta = 0.019 \pm 0.002 \\
\text{baryons par photon } n_b/n_\gamma &= \eta = (5.2 \pm 0.5) \times 10^{-10} \\
\text{âge de l'univers} \\
\text{pour } T > T_{eq} : & t = 2.42 \text{sec} \times (1 \text{MeV}/T)^2 / \sqrt{g_*} \\
&= 0.30118 (m_P/T^2) / \sqrt{g_*} \\
\text{pour } T < T_{eq}, \Lambda = 0 : & t = \frac{2.057 \times 10^{17}}{\sqrt{\Omega_0 h^2}} (1+z)^{-3/2} \text{sec} \\
&= \frac{7.504 \times 10^{11}}{\sqrt{\Omega_m h^2}} (T/1 \text{eV})^{-3/2} \text{sec} \\
\text{densité de matière } \Omega_m h^2 &= 0.14 \pm 0.02 \\
\text{redshift d'équivalence } z_{eq} &= 2.46 \times 10^4 (\Omega_m h^2) \\
\text{température d'équivalence } T_{eq} &= 5.8 \text{eV} (\Omega_m h^2) \\
\text{redshift du découplage } z_{dec} &\simeq 1088 \pm 2 \\
\text{température du découplage } T_{dec} &\simeq 2970 \pm 10 \text{K} = 0.26 \text{eV} \\
\text{temps du découplage } t_{dec} &\simeq 6.6 \times 10^{12} (0.14/\Omega_m h^2)^{1/2} \text{sec} \\
\text{redshift de la recombinaison } z_{rec} &\simeq 1360 \\
\text{tempér. de la nucléosynthèse } T_{nuc} &\simeq 0.08 \text{MeV} = 9 \times 10^8 \text{K} \\
\text{temps de la nucléosynthèse } t_{nuc} &\simeq 206 \text{sec} \\
\text{âge de l'univers } t_0 &= (1.34 \pm 0.03) \times 10^{10} \text{ans}
\end{aligned}$$

Annexe B

Remarques complémentaires sur les champs de Killing

Les sections spatiales des univers décrits par la métrique FRW sont homogènes et isotropes. Il existe donc des transformations qui préservent la géométrie de ces sections (produits scalaires, angles, distances ...).

Un difféomorphisme infinitésimal ou une transformation de coordonnées infinitésimale est donné par le flot ϕ infinitésimal (ou linéarisé) d'un champ de vecteur $X = \xi^\mu \partial_\mu$ via

$$x^\mu \rightarrow \gamma_x(\epsilon)^\mu = x^\mu + \epsilon \xi^\mu(x), \quad \epsilon \ll 1. \quad (\text{B.1})$$

Sous l'action de cette transformation, tout tenseur change par la dérivée de Lie, facteur

$$T \rightarrow T + \epsilon L_X T .$$

Pour la métrique, ceci conduit à

$$L_X g = (g_{\mu\nu,\lambda} \xi^\lambda + \xi_{\nu,\mu} + \xi_{\mu,\nu}) dx^\mu dx^\nu .$$

Si cette transformation préserve la métrique, i.e., si elle est une *isométrie* de l'espace-temps, $L_X g$ doit être nul. Nous avons donc la condition suivante :

$$\text{isométrie} \iff g_{\mu\nu,\lambda} \xi^\lambda + \xi_{\nu,\mu} + \xi_{\mu,\nu} = 0. \quad (\text{B.2})$$

Cette relation est connue sous le nom d'*équation de Killing* et ξ^μ est un *champ vectoriel de Killing* (ou KVF pour *Killing Vector Field*). C'est une condition nécessaire et suffisante pour que le flot de X soit une famille d'isométries (locales).

En utilisant la définition de la dérivée covariante, l'éq. (B.2) est équivalente à

$$(L_X g)_{\mu\nu} = \xi_{\nu;\mu} + \xi_{\mu;\nu} = 0. \quad (\text{B.3})$$

Ainsi, à toute famille d'isométries continues est associée un champ de Killing X tel que $L_X g = 0$. Dans le cas des espace-temps FL, les sections spatiales sont

invariantes sous (i) le groupe des translations $E(3)$ (ii) le groupe des rotations (propres) $SO(3)$, ce qui nous donne un total de six KVF indépendants.

Intuitivement, il est évident que le nombre de KVF linéairement indépendants est limité par la dimension du groupe de symétries de l'espace-temps. Pour calculer le nombre de KVF indépendants, considérons la relation

$$\xi_{\mu;\rho;\sigma} - \xi_{\mu;\sigma;\rho} = -R_{\mu\rho\sigma}^{\lambda} \xi_{\lambda}, \quad (\text{B.4})$$

où ξ est un champ vectoriel arbitraire. Le tenseur de courbure satisfait la deuxième identité de Bianchi

$$R_{\sigma\rho\mu}^{\lambda} + R_{\mu\sigma\rho}^{\lambda} + R_{\rho\mu\sigma}^{\lambda} = 0. \quad (\text{B.5})$$

Additionnant (B.4) et ses deux permutations cycliques, et tenant compte de (B.5), l'égalité

$$\xi_{\mu;\rho\sigma} - \xi_{\mu;\sigma;\rho} + \xi_{\rho;\sigma;\mu} - \xi_{\rho;\mu;\sigma} + \xi_{\sigma;\mu;\rho} - \xi_{\sigma;\rho;\mu} = 0 \quad (\text{B.6})$$

est vérifiée pour tout champ vectoriel $X = \xi^{\mu} \partial_{\mu}$. Dans le cas d'un champ de Killing, $\xi_{\mu;\nu} = -\xi_{\nu;\mu}$. Introduisant ce résultat dans (B.6), nous avons

$$\xi_{\mu;\rho;\sigma} - \xi_{\mu;\sigma;\rho} - \xi_{\sigma;\rho;\mu} = 0, \quad (\text{B.7})$$

et l'équation (B.4) devient

$$\xi_{\sigma;\rho;\mu} = -R_{\mu\rho\sigma}^{\lambda} \xi_{\lambda}. \quad (\text{B.8})$$

C'est une équation différentielle du deuxième ordre. Ainsi, si ξ_{λ} et $\xi_{\lambda;\nu}$ sont connus au point $p \in \mathcal{M}$ (p est arbitraire), ξ_{λ} peut être construit comme solution de (B.8) dans un voisinage V du point p . Par conséquent, chaque KVF est univoquement déterminé par les valeurs $\xi_{\lambda}(p)$ et $\xi_{\lambda;\nu}(p)$. Dans le cas d'un espace à n dimensions, nous avons n constantes $\xi_{\lambda}(p)$ et $n(n-1)/2$ constantes $\xi_{\lambda;\nu}(p)$ (puisque $\xi_{\lambda;\nu}(p)$ est une matrice antisymétrique). Au total, $n(n+1)/2$ constantes suffisent à caractériser complètement un KVF dans un certain voisinage $V \subset \mathcal{M}$ de p .

Il peut donc y avoir au plus $N_{max} = n(n+1)/2$ KVF indépendants. Un espace de dimension n dont le nombre de KVF est égal à N_{max} est un *espace à symétrie maximale* ou *maximalement symétrique*. Dans le cas à trois dimensions, $N_{max} = 6$. Les sections spatiales des univers de Friedmann-Lemaître sont des espaces à symétrie maximale. Pour $n = 4$, $N_{max} = 10$. L'espace-temps de Minkowski et l'espace-temps (anti-) de Sitter, dont la métrique est invariante sous l'action du groupe de Poincaré à quatre dimensions (10 générateurs), sont les espaces quadri-dimensionnels à symétrie maximale.

On peut montrer que tout espace homogène et isotrope est maximalement symétrique. La réciproque est aussi vraie.

Il est bien évident que toutes les métriques n'admettent pas le nombre maximal de KVF. En fait, l'intégrabilité de l'équation (B.8), pour un ensemble de

conditions initiales $\xi_\lambda(p)$ et $\xi_{\lambda;\nu}(p)$, dépend de la métrique. Pour dériver une condition d'intégrabilité, considérons la relation générale

$$\xi_{\rho;\mu;\sigma;\nu} - \xi_{\rho;\mu;\nu;\sigma} = -R_{\rho\sigma\nu}^\lambda \xi_{\lambda;\mu} - R_{\mu\sigma\nu}^\lambda \xi_{\rho;\lambda}. \quad (\text{B.9})$$

L'équation (B.8) satisfait cette condition si et seulement si

$$R_{\sigma\rho\mu}^\lambda \xi_{\lambda;\nu} - R_{\nu\rho\sigma}^\lambda \xi_{\lambda;\sigma} + (R_{\sigma\rho\mu}^\lambda - R_{\nu\rho\mu;\sigma}^\lambda) \xi_\lambda = -R_{\rho\sigma\nu}^\lambda \xi_{\lambda;\mu} - R_{\mu\sigma\nu}^\lambda \xi_{\rho;\lambda},$$

soit, en utilisant la relation $\xi_{\mu;\nu} = -\xi_{\nu;\mu}$,

$$(-R_{\rho\sigma\nu}^\lambda \delta_\mu^\kappa + R_{\nu\sigma\nu}^\lambda \delta_\rho^\kappa - R_{\sigma\rho\mu}^\lambda \delta_\nu^\kappa + R_{\nu\rho\mu}^\lambda \delta_\sigma^\kappa) \xi_{\lambda;\kappa} = (R_{\sigma\rho\mu;\nu}^\lambda - R_{\nu\rho\mu;\sigma}^\lambda) \xi_\lambda. \quad (\text{B.10})$$

Dans le cas d'un espace à symétrie maximale, on peut toujours trouver des KVF tels que $\forall p \in \mathcal{M}$, $\xi_\lambda(p) = 0$ et $\xi_{\lambda;\kappa}(p) = -\xi_{\kappa;\lambda}(p)$. Ainsi, l'équation (B.10) devient

$$A_{\rho\sigma\nu\mu}^{\lambda\kappa}(p) \xi_{\lambda;\kappa}(p) = 0,$$

où $A_{\rho\sigma\nu\mu}^{\lambda\kappa}$ est la notation choisie pour le facteur entre parenthèse du membre de gauche de l'équation (B.10). Inter-changeant les indices λ et κ , cette condition devient

$$-A_{\rho\sigma\nu\mu}^{\kappa\lambda}(p) \xi_{\lambda;\kappa}(p) = 0.$$

Les composantes $\xi_{\lambda;\kappa}(p)$ étant arbitraires, l'addition des deux égalités ci-dessus conduit à $A_{\rho\sigma\nu\mu}^{\lambda\kappa}(p) = A_{\rho\sigma\nu\mu}^{\kappa\lambda}(p)$, soit

$$\begin{aligned} &(-R_{\rho\sigma\nu}^\lambda \delta_\mu^\kappa + R_{\nu\sigma\nu}^\lambda \delta_\rho^\kappa - R_{\sigma\rho\mu}^\lambda \delta_\nu^\kappa + R_{\nu\rho\mu}^\lambda \delta_\sigma^\kappa) = \\ &(-R_{\rho\sigma\nu}^\kappa \delta_\mu^\lambda + R_{\nu\sigma\nu}^\kappa \delta_\rho^\lambda - R_{\sigma\rho\mu}^\kappa \delta_\nu^\lambda + R_{\nu\rho\mu}^\kappa \delta_\sigma^\lambda) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Cette relation suffit à caractériser le tenseur de courbure de notre espace à symétrie maximale. Pour le voir, contractons κ avec μ dans (B.11). Nous avons alors

$$-nR_{\rho\sigma\mu}^\lambda + R_{\rho\sigma\mu}^\lambda - R_{\sigma\rho\nu}^\lambda + R_{\nu\rho\sigma}^\lambda = -R_{\rho\sigma\nu}^\lambda + R_{\kappa\sigma\nu}^\lambda \delta_\rho^\lambda - R_{\sigma\rho} \delta_\nu^\lambda + R_{\nu\rho} \delta_\sigma^\lambda.$$

Tout d'abord, le second terme du membre de droite est nul, i.e., $R_{\kappa\sigma\nu}^\lambda = 0$. Ensuite, utilisant l'identité de Bianchi (B.5) et la propriété $R_{\rho\sigma\nu}^\lambda = -R_{\rho\nu\sigma}^\lambda$, cette égalité se réduit à

$$(n-1)R_{\rho\sigma\nu}^\lambda = R_{\sigma\rho} \delta_\nu^\lambda - R_{\nu\rho} \delta_\sigma^\lambda,$$

soit

$$(n-1)R_{\lambda\rho\sigma\nu} = R_{\sigma\rho} g_{\lambda\nu} - R_{\nu\rho} g_{\lambda\sigma}. \quad (\text{B.12})$$

$R_{\lambda\rho\sigma\nu}$ est antisymétrique par rapport à l'échange des indices λ et ρ . Ainsi,

$$R_{\sigma\rho} g_{\lambda\nu} - R_{\nu\rho} g_{\lambda\sigma} = R_{\nu\lambda} g_{\rho\sigma} - R_{\sigma\lambda} g_{\rho\nu}.$$

En multipliant ce résultat par $g^{\sigma\nu}$, nous arrivons à

$$nR_{\sigma\rho} - R_{\sigma\rho} = Rg_{\rho\sigma} - R_{\sigma\rho},$$

soit

$$R_{\sigma\rho} = \frac{1}{n} Rg_{\sigma\rho}, \quad (\text{B.13})$$

où R est le scalaire de courbure. En tenant compte du fait que la dérivée covariante du tenseur d'Einstein $G_{\sigma\rho} = R_{\sigma\rho} - \frac{1}{2}g_{\sigma\rho}R$ est nulle, l'expression du tenseur de Ricci ci-dessus conduit à

$$G_{\sigma\rho}{}^{;\rho} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right) (Rg_{\sigma\rho})^{;\rho} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right) R_{;\sigma} = 0.$$

En conclusion, dans le cas d'espaces dont la dimension n est supérieure ou égale à 3, la courbure scalaire R est constante : les espaces maximallement symétriques sont des espaces à courbure constante (cf. section 1.2). Introduisant (B.13) dans l'équation (B.12), il vient

$$R_{\lambda\rho\sigma\nu} = \frac{R}{n(n-1)}(g_{\sigma\rho}g_{\lambda\nu} - g_{\nu\rho}g_{\lambda\sigma}). \quad (\text{B.14})$$

Posant $R = kn(n-1)$, nous retrouvons les formules (1.6) comme il se doit.

Pour conclure, rappelons brièvement les théorèmes et le raisonnement qui conduisent à la dérivation de la métrique FRW :

- Si un espace de dimension n admet un groupe de symétrie de r paramètres tel que $r \geq (n-1)$, d'une part les orbites du groupe sont des hypersurfaces à $n-1$ dimensions et, d'autre part, il existe un système de coordonnées tel que la métrique est de la forme

$$ds^2 = \pm(dx^1)^2 + g_{ik}dx^i dx^k,$$

où i et k prennent les valeurs $2, 3, \dots, n$. Les coordonnées (x^2, \dots, x^n) paramétrisent les hypersurfaces invariantes. Les champs de Killing sont tous tangents à ces hypersurfaces. Le signe \pm indique que la coordonnée x^1 peut être de genre temps ou de genre espace.

- Un espace de dimension n admet au plus $n(n+1)/2$ champs de Killing. Lorsque il possède le nombre maximal de KVF, sa métrique peut se mettre sous la forme

$$\frac{\pm(dx^1)^2 \pm (dx^2)^2 \pm (dx^3)^2 \pm \dots \pm (dx^n)^2}{\left[1 + \frac{k}{4}(\pm(x^1)^2 \pm (x^2)^2 \pm (x^3)^2 \pm \dots \pm (x^n)^2)\right]},$$

avec $k = 0, \pm 1$. Un tel espace est un espace à courbure constante.

- Comme l'espace temps décrivant l'univers possède une métrique de signature $(+, -, -, -)$, et que les sections spatiales admettent le nombre maximal de champ de Killing, la métrique FRW doit prendre la forme standard (1.21).