Société Mathématique de France
Gazette des Mathématiciens **44**
(Avril 1990)

INTRODUCTION À LA MULTISOMMABILITÉ

Michèle LODAY-RICHAUD (Université Paris Sud – Orsay)

Ce texte est la rédaction d'un exposé présenté aux Journées Dynamiques des 24 et 25 novembre 1989 à Paris.

Il traite de l'étude locale des singularités des équations différentielles linéaires dans le champ complexe. On y analyse quelques exemples simples mais typiques pour illustrer la théorie de la resommation du point de vue de Martinet-Ramis et on y montre en particulier comment apparaissent les accélérations d'Ecalle dans ce contexte. Il ne s'agit pas ici d'exposer la théorie mais de l'introduire. Les exemples d'équations choisis sont aussi simples que possible sans être triviaux. On en connaît non seulement les solutions séries formelles, mais aussi de vraies solutions données par des formules intégrales. Les deux premiers exemples sont classiques et simples à plus d'un titre. On explique en quel sens précis les vraies solutions sont à regarder comme des sommes – on dit aussi des resommées – des solutions formelles. Dans le troisième exemple, on exprime la vraie solution sous une nouvelle forme intégrale qui, convenablement généralisée, permettra de resommer n'importe quelle solution formelle d'une équation différentielle linéaire analytique arbitraire. On donne ensuite un schéma de la théorie de la multisommabilité et on indique comment on applique cette théorie aux équations différentielles linéaires.

On a choisi de faire cette étude au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$. Dans un souci de simplicité, on n'a pas formalisé toutes les définitions préférant souvent ne retenir que l'argument essentiel. On trouvera des énoncés précis dans les articles de référence.

EXEMPLE 1. – EXEMPLE DE 1-SOMMABILITÉ : Equation d'Euler $x^2y' + y = x$

Cette équation admet une seule solution série formelle au voisinage de l'origine

$$\widehat{f}_1(x) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n n! x^{n+1}.$$

Cette série, étant divergente, n'est pas sommable au sens habituel du terme en une fonction solution de l'équation d'Euler au voisinage de 0.

Par ailleurs, nous savons intégrer cette équation différentielle par des méthodes élémentaires : restreignons-nous par exemple à l'axe réel positif ($x > 0$). Alors les solutions de l'équation homogène $x^2y' + y = 0$ sont toutes proportionnelles à la fonction $y = e^{1/x}$ et la méthode de variation de la constante appliquée à $y = \mathrm{C}^{\mathrm{te}} e^{1/x}$ fournit une solution "particulière" de la forme

$$f_1(x) = \int_0^x e^{1/x} \cdot e^{-1/t} \frac{dt}{t}.$$

Cette solution est la seule qui soit bornée quand x tend vers 0 sur $\mathbf{R}^+$. Par le changement de variable $t \mapsto \xi$ défini par $\frac{1}{t} - \frac{1}{x} = \frac{\xi}{x}$ celle-ci s'écrit

$$f_1(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\xi} e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi\,, \quad x > 0.$$

Nous nous proposons de faire le lien entre cette fonction f_1 et la série formelle $\widehat{f}_1$.

Polygone de Newton

Etant donné une équation différentielle linéaire (= homogène) on lui associe son polygone de Newton de la façon suivante : pour chaque monôme $x^j \frac{d^i y}{dx^i}$ apparaissant effectivement dans l'équation, on marque dans le "demi-plan" $\mathbf{N} \times \mathbf{Z}$ le point de coordonnées $(i, j-i)$. Le polygone de Newton est l'enveloppe convexe de la famille des deuxièmes quadrants de sommet chacun des points marqués.

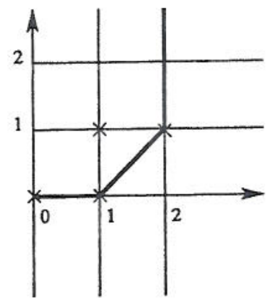
A l'équation d'Euler $x^2 y' + y = x$ associons donc l'équation homogène

$$x^3 y'' + (x^2 + x) y' - y = 0$$

obtenue en dérivant l'équation d'Euler écrite sous la forme $xy' + \frac{1}{x} y = 1$. Ses solutions sont engendrées par les solutions de l'équation d'Euler $x^2 y' + y = x$ et par celles de l'équation homogène associée $x^2 y' + y = 0$ et il revient au même d'étudier l'équation d'Euler sous sa forme initiale ou sous sa forme homogène $x^3 y'' + (x^2 + x) y' - y = 0$. Le polygone de Newton de celle-ci, dessiné ci-dessous, admet

– un côté de pente nulle et de longueur 1 : l'équation admet donc une solution série formelle; c'est la série d'Euler $\widehat{f}_1$,

– et un côté de pente 1 : on en déduit que la seule série solution est "au pire" Gevrey de niveau 1 (*cf.* définition 1 ci-dessous) car 1 est la plus petite pente non nulle du polygone de Newton. Elle est en fait ici exactement Gevrey de niveau 1 et nous allons voir qu'elle est 1-sommable (définitions 3 et 4).



Interprétation de l'écriture intégrale de f_1

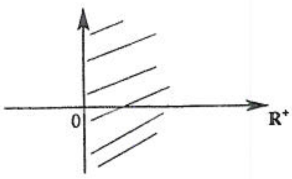
On reconnaît dans l'expression de f_1 la transformée de Laplace (en la variable $\frac{1}{x}$) de la fonction $\frac{1}{1+\xi}$.

Pour $|\xi| < 1$ on a $\frac{1}{1+\xi} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\xi^n$ et en tant que série formelle $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\xi^n$ est la transformée de Borel formelle $\widehat{\mathcal{B}}(\widehat{f}_1)$ de $\widehat{f}_1$ (de façon générale, on définit $\widehat{\mathcal{B}}$ par $\widehat{\mathcal{B}}(\sum_{n\geq 0} a_n x^{n+1}) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!}\xi^n$). Ainsi le facteur $\frac{1}{1+\xi}$ contenu dans l'expression intégrale de f_1 est reconstructible à partir de $\widehat{f}_1$ par la succession des transformations suivantes : transformation de Borel formelle de $\widehat{f}_1$, sommation de la série convergente obtenue sur le disque $|\xi| < 1$ puis prolongement analytique au demi-axe réel positif. Pour abréger, nous appellerons transformation de Borel $\mathcal{B}_{\mathbf{R}^+}$ de $\widehat{f}_1$ dans la direction $\mathbf{R}^+$ (ou simplement transformation de Borel $\mathcal{B}$ si la direction choisie ne prête pas à ambiguïté) cette succession de transformations.

En résumé, on peut écrire $f_1 = \mathcal{L}_{\mathbf{R}^+} \circ \mathcal{B}_{\mathbf{R}^+}(\widehat{f}_1)$ et schématiser

$$\widehat{f}_1 \xrightarrow{\mathcal{B}_{\mathbf{R}^+}} \mathcal{B}(\widehat{f}_1) \xrightarrow{\mathcal{L}_{\mathbf{R}^+}} f_1$$

où $\mathcal{L}_{\mathbf{R}^+}$ ou plus simplement $\mathcal{L}$ désigne la transformation de Laplace dans la direction $\mathbf{R}^+$.



plan des x

Le domaine naturel de définition et d'analyticité de la fonction f_1 ainsi construite est le demi-plan $\mathcal{R}e\, x > 0$ bissecté par la direction $\mathbf{R}^+$.

Développement asymptotique

On a

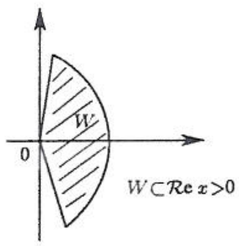
$$\frac{1}{1+\xi} = \sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n\xi^n + \frac{\xi^N}{1+\xi}$$

d'où

$$\begin{aligned} |f_1(x) - \sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n n!\, x^{n+1}| &\leq \int_0^{+\infty} \left|\frac{\xi^N e^{-\xi/x}}{1+\xi}\right| d\xi \\ &\leq \int_0^{+\infty} \xi^N e^{-\xi \mathcal{R}e(\frac{1}{x})} d\xi \\ &\leq \frac{N!}{\mathcal{R}e\,(1/x)^{N+1}}. \end{aligned}$$

On a donc sur tout sous-secteur fermé W (de sommet 0 et fermé dans $\mathbb{C}^*$) du demi-plan $\mathcal{R}\mathrm{e}\, x > 0$ de définition de f_1 :

$$\Big|f_1(x) - \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n n! x^{n+1}\Big| \leq \mathrm{C}^{\mathrm{te}}\, N! |x|^{N+1}.$$



La constante dépend du sous-secteur et le coefficient de $|x|^{N+1}$ croît avec N comme $N!$.

Définition 1 ([R2]). — *Une série $\sum a_n x^n$ est dite Gevrey (de niveau 1) si ses coefficients vérifient une condition de croissance du type*

$$|a_n| \leq \mathrm{C}^{\mathrm{te}}\, A^n n! \quad (A > 0).$$

Définition 2 ([R1] § II). — *Une fonction f définie sur un secteur V de sommet 0 est dite asymptotique au sens Gevrey (de niveau 1) à une série Gevrey $\widehat{f} = \sum a_n x^n$ si, sur tout sous-secteur fermé W de V, on a, pour tout N, une majoration du type*

$$|f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n x^n| \leq \mathrm{C}^{\mathrm{te}}\, A^N N! |x|^{N+1} \quad (A > 0),$$

la constante dépendant de W mais pas de N.

Ainsi, la série d'Euler $\widehat{f}_1$ est une série Gevrey et la solution f_1 est asymptotique à $\widehat{f}_1$ au sens Gevrey sur le demi-plan $\mathcal{R}\mathrm{e}\, x > 0$.

La notion de développement asymptotique au sens Gevrey est plus restrictive que la simple notion de développement asymptotique qui ignore totalement le type de la dépendance du coefficient de $|x|^{N+1}$ par rapport à N. On montre qu'une fonction analytique est plate[(1)] au sens de Gevrey de niveau 1 sur un secteur donné si elle peut être majorée (sur tout sous-secteur fermé) par

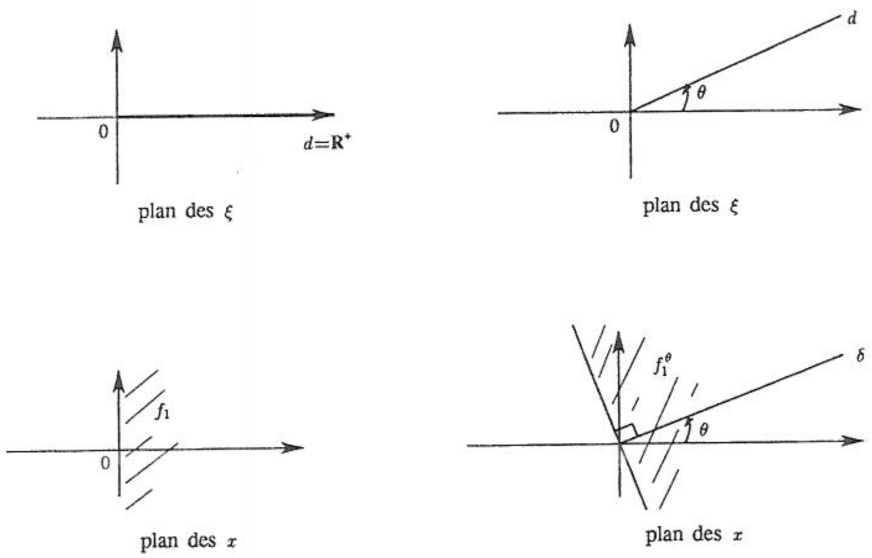
---

(1) "plate" est ici synonyme de "asymptotique à la série nulle 0" (contexte additif). "Plate au sens Gevrey" impose en outre que l'asymptoticité à 0 ait lieu avec conditions Gevrey. Ainsi, la fonction $e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}$ est plate sur le demi-plan $\mathcal{R}\mathrm{e}\, x > 0$, mais elle n'y est pas plate au sens Gevrey de niveau 1.

une exponentielle d'ordre 1 plate. (Voir par exemple Guelfand-Chilov, *Les distributions*, tome 2, chap. 4, Dunod 1964). Et *il est important de remarquer* que de ce fait, *ce secteur de platitude est* alors *au plus un demi-plan*. Ainsi, par exemple sur le demi-plan $\mathcal{R}e\, x > 0$ il existe une infinité d'exponentielles plates au sens Gevrey de niveau 1 : ce sont toutes les exponentielles $e^{-a/x}$ avec a réel positif; elles sont toutes d'ordre exactement 1 et non pas ≤ 1. Sur tout secteur ouvert strictement plus grand il n'existe qu'une seule fonction plate en ce sens : la fonction nulle.

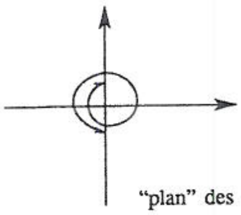
Changement de direction

Donnons-nous dans le plan des ξ une demi-droite d d'angle polaire θ et imaginons un instant que θ est petit (en fait $|\theta| < \pi$). La formule $f_1^\theta(x) = \int_d \frac{1}{1+\xi} e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi$ c'est-à-dire $f_1^\theta = \mathcal{L}_d \circ \mathcal{B}_d(\widehat{f}_1)$ définit une fonction analytique sur le demi-plan Π^θ bissecté par la demi-droite d'angle polaire θ dans le plan des x.



La fonction $\frac{1}{1+\xi} e^{-\frac{\xi}{x}}$ de la variable ξ est analytique sur un voisinage du secteur $0 \leq \arg \xi \leq \theta$ et le théorème de Cauchy montre alors que f_1 et f_1^θ coïncident sur la partie commune de leur domaine de définition. Autrement dit, f_1^θ définit un prolongement analytique de la fonction f_1. De façon évidente f_1^θ, comme f_1, est solution de l'équation d'Euler et elle est asymptotique à $\widehat{f}_1$ au sens Gevrey de niveau 1 sur son demi-plan de définition Π^θ. La fonction f_1^θ fournit donc une solution analytique prolongeant f_1 et asymptotique à $\widehat{f}_1$ au sens Gevrey de niveau 1 sur le domaine de définition prolongé $\Pi^0 \cup \Pi^\theta$.

On peut chercher à poursuivre ce prolongement le plus loin possible en faisant varier θ aussi longtemps que la formule de définition de f_1^θ garde un sens. C'est le pôle $\xi = -1$ de la fonction $\frac{1}{1+\xi}$ qui fait barrage. Ainsi, partant de la valeur 0, θ ne peut varier qu'entre $-\pi$ et $+\pi$.



"plan" des x

On obtient une solution analytique et asymptotique à $\widehat{f}_1$ au sens Gevrey de niveau 1 et que nous noterons encore f_1 sur le domaine maximal

$$-\frac{3\pi}{2} < \arg x < \frac{3\pi}{2}.$$

En particulier, sur le demi-plan $\mathcal{R}e\, x < 0$ ceci fournit a priori deux solutions asymptotiques à $\widehat{f}_1$.

Comparons les deux solutions ainsi obtenues sur $\mathcal{R}e\, x < 0$: pour $\varepsilon > 0$ petit (en fait $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$) le théorème des résidus donne

$$\begin{aligned} f_1^{+\pi-\varepsilon}(x) - f_1^{-\pi+\varepsilon}(x) &= 2i\pi \,\mathrm{Res}\left(\xi = -1, \frac{1}{1+\xi} e^{-\frac{\xi}{x}}\right) \\ &= 2i\pi\, e^{1/x}. \end{aligned}$$

Ces résultats appellent quelques commentaires :

1. — Le prolongement de f_1 apparaît naturellement comme étant non pas une fonction sur C mais sur la surface de Riemann du logarithme $\widetilde{\mathbb{C}^*}$: c'est la situation normale pour les solutions d'une équation différentielle au voisinage d'un point singulier tel ici l'origine 0 pour l'équation d'Euler.

2. — Les théorèmes généraux de prolongement des solutions des équations différentielles en dehors des points singuliers (déduits du théorème de Cauchy) montrent que la solution f_1 peut se prolonger analytiquement en tournant indéfiniment autour de 0. Mais en franchissant les bornes du secteur $-\frac{3\pi}{2} < \arg x < \frac{3\pi}{2}$ ce prolongement cesse d'être asymptotique à $\widehat{f}_1$.

3. — Notons $f_1^{+\pi}$ et $f_1^{-\pi}$ les fonctions définies sur $\mathcal{R}e\, x < 0$ par prolongement de $f_1^{+\pi-\varepsilon}$ et de $f_1^{-\pi+\varepsilon}$ respectivement. Ce sont deux solutions de l'équation d'Euler. On sait donc a priori que leur différence est proportionnelle à la solution $e^{1/x}$ de l'équation homogène. Ce que donne en plus le calcul précédent c'est la valeur $2i\pi$ du coefficient de proportionnalité. Ce coefficient étant non nul, f_1 n'est pas analytique en 0. Il caractérise à lui seul le "défaut" d'analyticité de la solution : c'est l'unique *invariant analytique* de l'équation d'Euler ([C], pp. 56–60. La famille des invariants A_ω se réduit à $A_{-1} = 2i\pi$, [E1], [MR1] II.5).

4. — Lorsque sur un secteur d'ouverture strictement supérieure à π il existe une fonction analytique asymptotique au sens Gevrey (de niveau 1) à la série $\widehat{f}_1$ (elle-même Gevrey) une telle fonction est unique. En effet, s'il en existait deux, leur différence serait plate au sens Gevrey, donc nulle.

Ce qui précède montre que l'*unicité* des solutions asymptotiques au sens de Gevrey à une solution formelle Gevrey n'est plus assurée sur certains secteurs d'ouverture π comme ici sur le demi-plan $\mathcal{R}e\, x < 0$ parce qu'il est un demi-plan de platitude de la solution homogène $e^{1/x}$.

Dans le cas général, on remplacera les secteurs de platitude des solutions de l'équation homogène par les secteurs de platitude des "exponentielles du problème" qui sont faciles à déterminer (voir le dernier paragraphe).

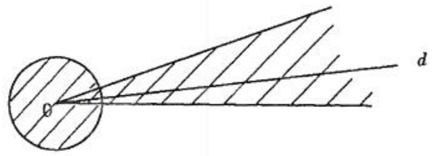
5. — Pour la série d'Euler $\widehat{f}_1$ la direction $\mathbf{R}^-$ joue un rôle particulier : c'est à la fois la direction de décroissance maximale de l'exponentielle du problème $e^{1/x}$ (*i.e.* la bissectrice du secteur de platitude de celle-ci) et la direction à travers laquelle on n'a pas pu poursuivre le prolongement analytique de f_1 par la méthode de Borel-Laplace. On dira que c'est *une direction singulière* (on dit aussi une *direction anti-Stokes*) de l'équation.

Tout ceci nous conduit à introduire les définitions suivantes : ([R1], [MR4], [MR1], [Ne]).

DÉFINITION 3. — *La série $\widehat{f}$ est dite 1-sommable dans la direction d si, de façon équivalente ([MR1], [Ne]) :*

i) on peut lui appliquer la méthode de sommation de Borel-Laplace $f(x) = \mathcal{L}(\mathcal{B}(\widehat{f}))(x)$ dans toutes les directions d'un voisinage de la direction d.

ii) $\widehat{f}$ est Gevrey de niveau 1 et
la somme de la série $\widehat{\mathcal{B}}\widehat{f}(\xi)$ se prolonge sur un petit secteur voisinage de d avec une croissance au plus exponentielle d'ordre 1 à l'infini.



/// domaine de définition de $\mathcal{B}\widehat{f}(\xi)$.

iii) $\widehat{f}$ est Gevrey de niveau 1 et
il existe une fonction analytique f asymptotique à $\widehat{f}$ au sens de Gevrey de niveau 1 sur un secteur bissecté par d et d'ouverture strictement supérieure à π.

DÉFINITION 4. — *On dira que $\widehat{f}$ est 1-sommable si elle est 1-sommable dans toutes les directions, excepté un nombre fini de directions singulières.*

Remarques sur le prolongement analytique de $\widehat{\mathcal{B}}(\widehat{f})$ et sa croissance à l'infini La possibilité de prolonger $\widehat{\mathcal{B}}(\widehat{f})$ avec une croissance au plus exponentielle d'ordre 1 dans la direction d est une condition minimale pour que sa transformée de Laplace dans cette direction existe et soit analytique, au moins lorsque x est "petit".

1. — Dans le cas de la série d'Euler on connaît la somme et le prolongement de la série $\widehat{\mathcal{B}}(\widehat{f})$. Ce prolongement et sa croissance, d'ailleurs bien moindre qu'exponentielle, sont évidents.

Qu'en est-il dans le cas général?

Supposons, pour simplifier, que l'équation différentielle linéaire étudiée soit à coefficients polynômiaux, cas auquel on peut toujours se ramener grâce au théorème d'algébrisation de Birkhoff ([B], [W]).

Alors, les transformées de Borel (formelles) $\mathbf{y}(\xi)$ des solutions (formelles) $y(x)$ vérifient elles aussi une équation différentielle linéaire obtenue en appliquant les règles suivantes :

- A la dérivation $x^2\frac{d}{dx}$, on substitue la multiplication par ξ.
- A la multiplication par $\frac{1}{x}$, on substitue la dérivation $\frac{d}{d\xi}$.

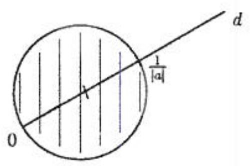
Pour l'équation d'Euler, on obtient :

$$\xi\mathbf{y} + \mathbf{y} = 1$$

qui admet pour unique solution $\mathbf{y} = \frac{1}{1+\xi}$ et pour solution formelle $\widehat{\mathcal{B}}(\widehat{f})$, le développement en série de $\frac{1}{1+\xi}$.

Ainsi, si une série $\widehat{f}$ est une solution Gevrey de niveau 1 d'une équation différentielle linéaire sa transformée de Borel formelle $\widehat{\mathcal{B}}(\widehat{f})$ est une série convergente au voisinage de l'origine et solution de l'équation différentielle linéaire transformée. La théorie générale des équations différentielles montre que la somme de $\widehat{\mathcal{B}}(\widehat{f})$ se prolonge analytiquement dans toutes les directions sauf celles, en nombre fini, qui rencontrent un point singulier de l'équation transformée. L'étude locale au voisinage de l'infini permet en outre d'affirmer (théorème fondamental des développements asymptotiques dans le cas linéaire [RS], [W]) que sa croissance à l'infini est au plus exponentielle d'un certain ordre k (c'est un $O(e^{|ax^k|})$). L'ordre k est l'une des pentes du polygone de Newton à l'infini de l'équation transformée. S'il vaut 1, c'est que $\widehat{f}$ est 1-sommable.

2. — Si $\mathcal{B}\widehat{f}$ est à croissance exponentielle d'ordre 1 et de type $|a|$ dans la direction d (*i.e.* $\mathcal{B}\widehat{f}(x) = O(e^{|ax|})$), la somme $f = \mathcal{L}\mathcal{B}(\widehat{f})$ n'est plus définie



sur le demi-plan bissecté par d, mais seulement sur un *disque de Borel*, le disque passant par 0 de diamètre $\frac{1}{|a|}$ porté par d.

Lorsqu'on fait tourner d, la longueur du diamètre peut varier, mais cela ne modifie en rien l'étude locale en 0 ([MR1]).

EXEMPLE 2. – EXEMPLE DE 2-SOMMABILITÉ : Equation d'Euler-bis $\frac{x^3}{2}y' + y = x^2$

Elle admet une solution série formelle au voisinage de l'origine

$$\widehat{f_2}(x) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n n! x^{2(n+1)}$$

déduite de la série d'Euler $\widehat{f_1}$ en changeant x en x^2.

Polygone de Newton

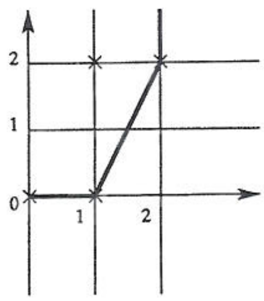
L'équation homogène obtenue en dérivant $\frac{x}{2}y' + \frac{1}{x^2}y = 1$ s'écrit

$$x^4y'' + (x^3 + 2x)y' - 4y = 0.$$

Son polygone de Newton dessiné ci-dessous admet

– un côté de pente nulle et de longueur 1 : l'équation admet donc une solution série formelle; c'est $\widehat{f_2}$,

– un côté de pente 2 : on en déduit que la solution formelle $\widehat{f_2}$ est "au pire" (en fait, ici, exactement) Gevrey de niveau 2 (voir définition 5); nous allons voir qu'elle est 2-sommable (définitions 7 et 8).



On peut traiter cet exemple de deux points de vue : soit en traduisant ce que l'on sait de $\widehat{f_1}$ via le changement de x en x^2, soit en l'étudiant directement comme l'exemple précédent. Nous allons faire successivement les deux.

Commençons par le "changement de x en x^2" : pour que l'application $x \mapsto t = x^2$, essentiellement non bijective au voisinage de $0 \in \mathbf{C}$, soit un vrai changement de variable, on la relève en une application entre les surfaces de Riemann du logarithme $\widetilde{\mathbf{C}}_x^*$ et $\widetilde{\mathbf{C}}_t^*$ en fixant une détermination des logarithmes. (On se souvient que le domaine naturel d'existence des solutions est $\widetilde{\mathbf{C}}^*$ et non pas $\mathbf{C}$). On note $t \mapsto x = t^{1/2}$ l'application réciproque.

Ces applications induisent par composition sur les fonctions ou les séries les transformations (dites de ramification)

$$\rho_2 : f(x) \mapsto \rho_2 f(t) = f(t^{1/2})$$

et

$$\rho_2^{-1} = \rho_{1/2} : f(t) \mapsto \rho_{1/2} f(x) = f(x^2).$$

On a ainsi

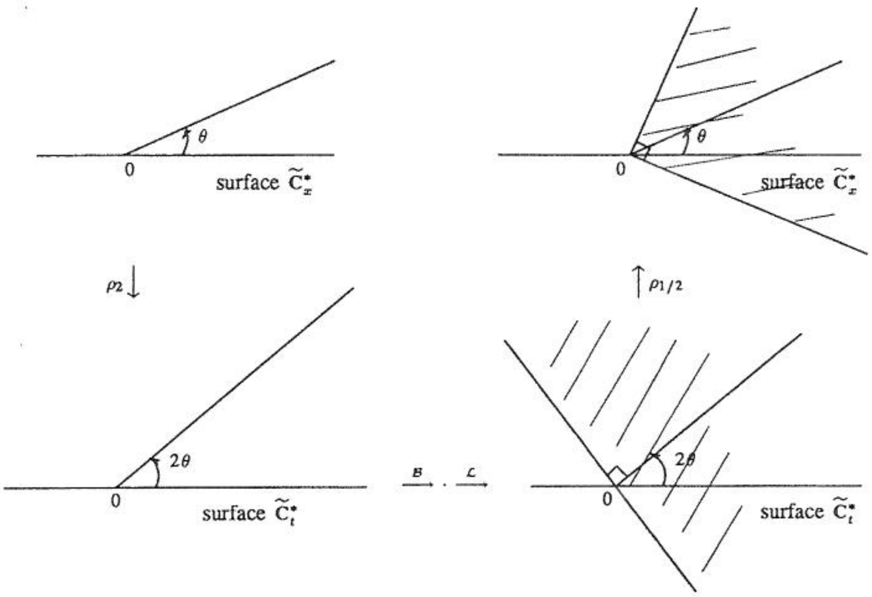
$$\begin{aligned} \rho_2 \widehat{f}_2(t) &= \sum_{n \geq 0} (-1)^n n! t^{n+1} \\ &= \widehat{f}_1(t). \end{aligned}$$

Et la méthode de sommation utilisée pour $\widehat{f}_1$ permet de sommer $\widehat{f}_2$ conformément au diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & \widetilde{\mathbf{C}}_x^* & \\ x = t^{1/2} & & x \\ \uparrow & \updownarrow & \downarrow \\ t & \widetilde{\mathbf{C}}_t^* & t = x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \widehat{f}_2(x) & & & & f_2(x) \\ {\scriptstyle \rho_2}\downarrow & & & & \uparrow{\scriptstyle \rho_{1/2}} \\ \rho_2 \widehat{f}_2(t) = \widehat{f}_1(t) & \xrightarrow{\mathcal{B}} & \cdot & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \cdot \end{array}$$

La fonction f_2 est encore solution de l'équation d'Euler-bis et elle est asymptotique à $\widehat{f}_2$. Mais où et en quel sens?

Donnons-nous une direction d'angle polaire θ dans $\widetilde{\mathbf{C}}_x^*$. Elle se "descend" par ρ_2 en une direction d'angle 2θ dans $\widetilde{\mathbf{C}}_t^*$. La sommation de Borel-Laplace fournit une somme dans la direction 2θ, définie sur le demi-plan bissecté par 2θ et elle se "remonte" par $\rho_{1/2}$ en une fonction f_2^θ définie sur le quadrant bissecté par θ.



Développement asymptotique

Sur ce quadrant f_2^θ est asymptotique à $\widehat{f}_2$ au sens suivant : si on "remonte" par $\rho_{1/2}$ la condition d'asymptoticité vérifiée par $f_1^{2\theta}$, on obtient

$$
\begin{aligned}
\Big|f_2(x) - \sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n n!\, x^{2(n+1)}\Big| &\leq \mathrm{C}^{\mathrm{te}}\, N!\, |x|^{2(N+1)} \\
&\leq \mathrm{C}^{\mathrm{te}} \sqrt{(2N+1)!}\; |x|^{(2N+1)+1}.
\end{aligned}
$$

Ici le coefficient de $|x|^{M+1}$ où $M = 2N+1$ croît non pas comme $M!$ mais beaucoup moins – comme sa racine carrée.

DÉFINITION 5 ([R2]). — *Une série $\sum a_n x^n$ est dite Gevrey de niveau k si ses coefficients vérifient une condition de croissance du type*

$$
|a_n| \leq \mathrm{C}^{\mathrm{te}} A^n\, n!^{1/k} \qquad (A > 0).
$$

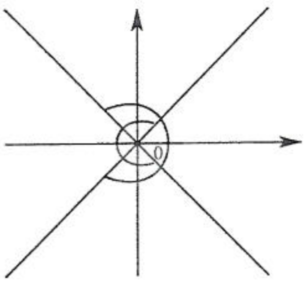
DÉFINITION 6 ([R1]). — *Une fonction f définie sur un secteur V de sommet 0 est dite asymptotique au sens Gevrey de niveau k à une série $\widehat{f} = \sum a_n x^n$ Gevrey de niveau k si, sur tout secteur fermé W de V, on a pour tout N, une majoration du type*

$$
\Big|f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n x^n\Big| \leq \mathrm{C}^{\mathrm{te}} A^N (N!)^{1/k} |x|^{N+1} \qquad (A > 0),
$$

la constante dépendant de W mais pas de N.

Ainsi, la série $\widehat{f}_2$ est une série Gevrey de niveau 2 et la solution f_2^θ est asymptotique à $\widehat{f}_2$ au sens Gevrey de niveau 2 sur le quadrant bissecté par θ.

Domaine de définition



plan des x

En faisant varier 2θ de $-\pi$ à $+\pi$, on obtient une somme définie sur $-\frac{3\pi}{4} < \arg x < \frac{3\pi}{4}$ et pour $2\theta \in]\pi, 3\pi[$ on obtient la somme symétrique de la précédente par rapport à 0.

Ces deux sommes sont asymptotiques à $\widehat{f}_2$ au sens Gevrey de niveau 2 sur leur secteur de définition. Il y a défaut d'unicité sur la partie commune, c'est-à-dire sur les deux secteurs $\frac{\pi}{4} < \arg x < \frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{3\pi}{4} < \arg < -\frac{\pi}{4}$ qui sont d'amplitude $\frac{\pi}{2}$. Ces secteurs sont exactement les secteurs de platitude de l'exponentielle e^{1/x^2}.

Par parité, les différences des deux déterminations sur chacun de ces deux secteurs sont les mêmes et elles valent

$$f_2^{\frac{\pi}{2}-\epsilon}(x) - f_2^{\frac{\pi}{2}+\epsilon}(x) = 2i\pi e^{1/x^2}.$$

On trouve un seul invariant analytique, le même que pour l'équation d'Euler (mais ce n'est pas la même exponentielle).

Ce point de vue nous conduit à transposer la notion de 1-sommabilité en la notion de 2-sommabilité suivante : ([R1] § III, [MR4], [MR3], [MR1]).

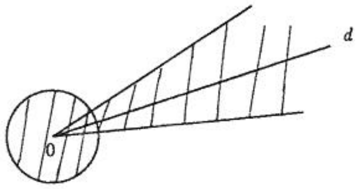
DÉFINITION 7. — *Une série $\widehat{f}$ est dite 2-sommable dans la direction d si, de façon équivalente :*

i) on peut lui appliquer la méthode de sommation de Borel-Laplace de niveau 2

$$f(x) = \rho_{1/2}\,\mathcal{L}\,\mathcal{B}\,\rho_2(\widehat{f})(x)$$

dans toutes les directions d'un voisinage de la direction d.

ii) $\widehat{f}$ est une série Gevrey de niveau 2 et
la somme de la série $\rho_{1/2}\widehat{\mathcal{B}}\rho_2(\widehat{f})(\xi)$ se prolonge sur un petit voisinage sectoriel de d avec une croissance au plus exponentielle d'ordre 2 (elle est un $O(e^{|a\xi^2|})$ et pas un $O(e^{|a\xi|})$)



iii) $\widehat{f}$ *est une série Gevrey de niveau 2 et*
il existe une fonction analytique f *asymptotique à* $\widehat{f}$ *au sens Gevrey de niveau 2 sur un secteur bissecté par* d *et d'ouverture strictement supérieure à* $\frac{\pi}{2}$.

DÉFINITION 8. — *On dira que* $\widehat{f}$ *est 2-sommable si elle est 2-sommable dans toutes les directions, excepté un nombre fini de directions singulières.*

La série $\widehat{f}_2$ est 2-sommable, ses directions singulières étant les deux demi-axes imaginaires c'est-à-dire les lignes de décroissance maximale de l'exponentielle e^{1/x^2}.

Comparaison entre 1-sommabilité et 2-sommabilité

Pour une direction d fixée, il faut penser la 1-sommabilité comme une condition faible imposée sur un grand secteur et la 2-sommabilité comme une condition strictement plus forte, mais imposée sur un secteur plus petit. Ces deux notions sont donc essentiellement non comparables.

Si on regarde les notions globales (dans presque toutes les directions) on a le résultat d'incompatibilité suivant : si $\widehat{f}$ est 1-sommable et Gevrey de niveau 2, alors $\widehat{f}$ est une série convergente. Ainsi, sauf dans le cas trivial d'une série convergente, une série ne peut être à la fois 1 et 2-sommable.

La série $\widehat{f}_2$ est 2-sommable. Nous allons voir qu'elle n'est pas 1-sommable (et d'ailleurs elle n'est pas convergente).

Remarque. — En fait, on voit aisément que $\widehat{f}_2$ est 1-sommable dans toutes les directions $-\frac{\pi}{4} < \arg x < \frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4} < \arg x < \frac{5\pi}{4}$. Mais notre objectif étant de dégager une argumentation générale, au lieu d'exploiter cette propriété exceptionnelle liée au trop petit nombre de directions singulières, nous la négligerons.

Essayons maintenant d'appliquer directement à $\widehat{f}_2$ la méthode de sommation de Borel-Laplace.

La série $\widehat{f}_2$ est Gevrey de niveau 2, donc a fortiori Gevrey de niveau 1 : sa transformée de Borel formelle $\widehat{\mathcal{B}}\widehat{f}_2(\xi) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{n!}{(2n+1)!}\xi^{2n+1}$ est non seulement une série convergente, mais elle définit une fonction $\mathcal{B}\widehat{f}_2(\xi)$ entière sur C. Point n'est besoin ici de la prolonger, mais c'est là son plus grand défaut (voir le commentaire heuristique ci-dessous).

L'inégalité

$$|\mathcal{B}\widehat{f}_2(\xi)| \leq \sum_{n\geq 0} \frac{|\xi|}{n!}|\xi^2|^n = |\xi|e^{|\xi|^2}$$

montre que $\mathcal{B}\widehat{f}_2(\xi)$ est à croissance (au plus) exponentielle d'ordre 2 dans toutes les directions. Mais elle n'est pas à croissance exponentielle d'ordre 1 dans presque toutes les directions.

En effet, conformément aux règles énoncées en fin du paragraphe "Exemple 1", $\mathcal{B}\widehat{f}_2$ est solution de l'équation $\frac{1}{2}\xi \mathrm{y}+\frac{d}{d\xi}\mathrm{y}=1$ transformée de $\frac{1}{2}x^2\frac{d}{dx}y+\frac{1}{x}y=x$. On peut résoudre cette équation et on obtient $\mathcal{B}\widehat{f}_2(\xi) = \exp\frac{-\xi^2}{4}\cdot\int_0^\xi e^{\frac{t^2}{4}}\,dt$. Dans toute direction appartenant aux quadrants ouverts bissectés par les demi-axes imaginaires, l'intégrale $\int_0^\infty e^{\frac{t^2}{4}}\,dt$ est convergente et on a donc

$$|\mathcal{B}\widehat{f}_2(\xi)| = \exp \mathcal{R}e\,\frac{-\xi^2}{4}\cdot(\mathrm{C}^{\mathrm{te}} + o(1)).$$

Ainsi, sur ces deux quadrants $\mathcal{B}\widehat{f}_2(\xi)$ est à croissance exponentielle d'ordre 2 et non pas 1. Cette écriture de $\mathcal{B}\widehat{f}_2$ montre aussi qu'elle est à croissance exponentielle d'ordre 1 sur les deux autres quadrants, mais cette particularité liée à la simplicité de l'exemple étudié n'a généralement pas lieu. En général, lorsque la série $\widehat{f}_2$ est Gevrey de niveau 2, on ne peut appliquer un opérateur de Laplace à $\mathcal{B}\widehat{f}_2$ dans aucune direction, ici dans aucune des directions appartenant aux quadrants bissectés par l'axe imaginaire. La méthode de Borel-Laplace (de niveau 1) ne permet pas de sommer $\widehat{f}_2$ dans ces directions.

Commentaire heuristique

La transformation de Borel avant ou après ramification a eu pour effet de remplacer la série $\widehat{f}_1$ ou $\widehat{f}_2$ par une fonction $\mathcal{B}\widehat{f}_1$ ou $\mathcal{B}\widehat{f}_2$ régulière à la fois à l'origine et à l'infini : celle-ci est analytique au voisinage de 0, pas trop croissante à l'infini; ses singularités indiquent les directions singulières pour la sommation et un calcul de résidu en ces points a donné toutes les relations entre les déterminations des différentes sommes (en particulier, les invariants analytiques). En termes géométriques, ([MR2]) les directions singulières repèrent des singularités infiniment proches en 0 et par une transformation de Borel convenable, on a fait apparaître ces singularités infiniment proches à distance finie.

Dans le cas de la série $\widehat{f}_2$ la transformation de Borel appliquée sans avoir ramifié régularise si bien que $\mathcal{B}\widehat{f}_2$ n'a plus de singularité à distance finie : elle est analytique sur un très grand voisinage de 0 (C tout entier) mais en contre-partie elle est devenue très croissante, très singulière à l'infini. En régularisant trop bien en 0, on a caché à l'infini toutes les informations précédemment cachées à l'origine.

Pour pouvoir décoder les singularités, il faut régulariser mais ni trop ni trop peu.

EXEMPLE 3. – MÉLANGE DES NIVEAUX 1 ET 2.

Equation(1) $Dy = 4x + 2x^2 + 10x^3 - 3x^4$

où $D = x^5(2-x)\frac{d^2}{dx^2} + x^2(4+5x^2-2x^3)\frac{d}{dx} + 2(2-x+x^2)$

Cette équation admet une seule solution série formelle au voisinage de l'origine

$$\widehat{f}(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^{n+1} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_{2p} = (2p)! \\ a_{2p+1} = -(2p+1)! + (-1)^p p! \end{cases}$$

Polygone de Newton

L'équation homogène obtenue en dérivant $\frac{1}{4x+2x^2+10x^3-3x^4}Dy = 1$ s'écrit $D_0 y = 0$ avec

$$\begin{aligned} D_0 =&(8x^6 + 18x^8 - 16x^9 + 3x^{10})\frac{d^3}{dx^3} \\ &+ (-16x^3 - 8x^4 + 20x^5 + 6x^6 + 78x^7 - 71x^8 + 12x^9)\frac{d^2}{dx^2} \\ &+ (16x - 16x^2 + 44x^3 + 64x^4 - 10x^5 + 32x^6 - 40x^7 + 6x^8)\frac{d}{dx} \\ &+ (-16 - 16x - 108x^2 + 88x^3 - 38x^4 + 12x^5). \end{aligned}$$

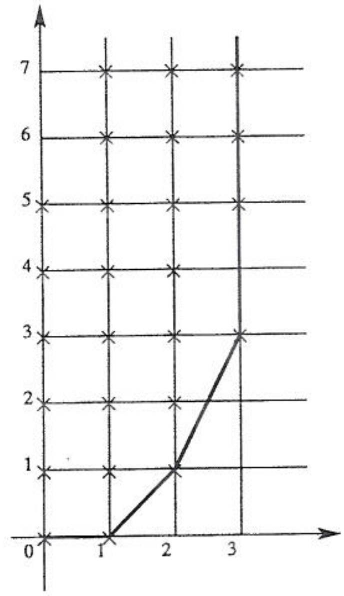
Son polygone de Newton dessiné ci-dessous admet

– un côté de pente 0 et de longueur 1 : l'équation admet donc une solution série formelle; c'est $\widehat{f}$,

– un côté de pente 1 et un côté de pente 2 : on en déduit que la solution formelle $\widehat{f}$ est "au pire" (en fait exactement) Gevrey de niveau 1. Nous allons voir qu'elle n'est pas 1-sommable, ni k-sommable pour une autre valeur de k mais qu'elle est multisommable de niveaux 1 et 2; les niveaux à considérer sont faciles à déterminer à partir du polygone de Newton de l'équation (voir dernier paragraphe).

---

(1) On peut trouver une construction de cet exemple dans [RS], chap. 3, 3–7 mais l'énoncé contient une erreur de signe.



On peut sommer $\widehat{f}$ dans toutes les directions excepté un nombre fini en remarquant qu'on a $\widehat{f} = \widehat{f}_1 + \widehat{f}_2$ et en sommant *séparément* $\widehat{f}_1$ par l'opérateur de Borel-Laplace S_1 de niveau 1 et $\widehat{f}_2$ par S_2 de niveau 2. Il se pose alors la question suivante : Peut-on trouver un opérateur qui somme *simultanément* $\widehat{f}_1$ et $\widehat{f}_2$ et donc $\widehat{f} = \widehat{f}_1 + \widehat{f}_2$?

Cette question est essentielle, non pour traiter cet exemple dans lequel la décomposition de $\widehat{f}$ en $\widehat{f}_1 + \widehat{f}_2$ est évidente, mais pour étudier le cas général. La situation générale se présente ainsi : on détermine facilement $\widehat{f}$ et souvent $\widehat{f}$ n'est k-sommable à aucun niveau k. Cependant on montre (voir le dernier paragraphe) que $\widehat{f}$ appartient à l'algèbre engendrée par un nombre fini de séries qui sont k_i-sommables pour un nombre fini de niveaux k_i. Les seuls niveaux possibles sont faciles à déterminer : ce sont les pentes d'un polygone de Newton, mais on ne dispose d'aucun algorithme explicite pour décomposer $\widehat{f}$ suivant les niveaux sauf cas d'évidence comme dans l'exemple traité.

Dans cet exemple, la série $\widehat{f}$ appartient à l'algèbre engendrée par la série 1-sommable $\widehat{f}_1$ et la série 2-sommable $\widehat{f}_2$. La série $\widehat{f}$, quant à elle, n'est ni 1 ni 2-sommable. En effet, nous avons vu qu'on ne peut pas appliquer S_1 à $\widehat{f}_2$ et on ne peut évidemment pas appliquer S_2 à $\widehat{f}_1$ puisque la série $\widehat{\mathcal{B}}\rho_2(\widehat{f}_1)$ n'est pas même convergente. De plus, on peut voir que $\widehat{f}$ n'est k-sommable pour aucun autre k.

Ouvrons une parenthèse pour indiquer que cet exemple simple fournit une réponse au problème de Turrittin ([W] p. 326) qu'on peut énoncer ainsi : "*Une série formelle solution d'une équation différentielle linéaire, est-elle k-sommable et pour quelle(s) valeur(s) de k?*".

Cette question, en suspens depuis Euler qui a donné le premier exemple de resommation, et surtout depuis E. Borel qui a posé le problème de la resommation est maintenant résolue dans le cas linéaire et même dans un cadre plus large que le cadre linéaire grâce en particulier à la théorie de l'accélération d'Ecalle. Des réponses partielles au problème ont été données par divers auteurs – citons Nörlund, Horn, Turrittin, Trjitzinsky, Kohno-Ohtomo, Lutz, – qui établissent des conditions génériques sous lesquelles il y a k-sommabilité. Dans [R1], en 1980, Ramis affirme la nécessité (et la suffisance) pour le cas linéaire général de "mélanger" plusieurs processus de k-sommation, avec différentes valeurs de k. L'exemple ci-dessus construit par Ramis et Sibuya peu après (Preprint of the University of Minnesota – Minneapolis (1984)) n'a été publié dans [RS] qu'en 1989.

Sommation de $\widehat{f}$

Choisissons une direction d d'angle polaire θ et autorisons-nous provisoirement des écritures abusives pour voir ce que donnerait l'application successive (à défaut de pouvoir être simultanée) de S_1 et de S_2. On commence par le niveau le plus bas ($k = 1$). On aurait le diagramme suivant :

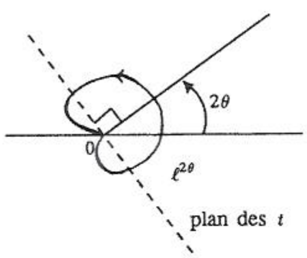
$$\begin{array}{ccc} x = t^{1/2} & \widetilde{\mathbf{C}}^*_x & x \\ \uparrow & \updownarrow & \updownarrow \\ t & \widetilde{\mathbf{C}}^*_t & t = x^2 \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} \widehat{f}(x) \arrow[r, "\mathcal{B}"] & \cdot \arrow[r, "\mathcal{L}"] & \cdot \arrow[d, "\rho_2"'] & & f(x)\,? \\ & & \cdot \arrow[r, "\mathcal{B}"] & \cdot \arrow[r, "\mathcal{L}"] & \cdot \arrow[u, "\rho_{1/2}"'] \end{tikzcd}$$

On cherche à déterminer f à partir de $\widehat{f}$ mais seule la première flèche agit effectivement là où on veut la faire agir : sur $\widehat{f}$. L'opérateur $\mathcal{B}$ utilisé jusqu'à présent s'applique à des séries. Nous devrions ici pour la deuxième flèche $\mathcal{B}$, celle du bas, en utiliser une version fonctionnelle. Il convient de choisir

$$\mathcal{B}(F)(\tau) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\ell^{2\theta}} F(t) e^{\frac{\tau}{t}} \frac{dt}{t^2}$$

où $\ell^{2\theta}$ est un contour dans $\mathbf{C}_t$ de la forme suivante



On a $\mathcal{B}(t^{n+1})(\tau) = \frac{\tau^n}{n!}$ ce qui garantit la cohérence avec l'opérateur formel $\widehat{\mathcal{B}}$.

L'idée due à J. Ecalle est la suivante : regroupons les trois opérateurs médians en un opérateur $\boldsymbol{\rho}_2 = \mathcal{B}\rho_2\mathcal{L}$ suivant le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\widehat{f}(x) \arrow[r, "\mathcal{B}"] & \cdot \arrow[r, dashed] \arrow[drr, "\boldsymbol{\rho}_2"] & {} \arrow[d, dashed] & & \cdot \\
& & {} \arrow[r, dashed] & \cdot \arrow[r, "\mathcal{L}"] & \cdot \arrow[u, "\rho_{1/2}"']
\end{tikzcd}$$

et étudions $\boldsymbol{\rho}_2$.

Sous réserve d'existence, c'est-à-dire pour de bonnes fonctions $\mathbf{f}$ on a

$$\boldsymbol{\rho}_2(\mathbf{f})(\tau) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\ell^{2\theta}}\left(e^{\frac{\tau}{t}}\int_{d^\theta}\mathbf{f}(\xi)e^{-\frac{\xi}{t^{1/2}}}\right)\frac{dt}{t^2}$$

et par le théorème de Fubini

$$\boldsymbol{\rho}_2(\mathbf{f})(\tau) = \frac{1}{2i\pi}\int_{d^\theta}\left(\mathbf{f}(\xi)\int_{\ell^{2\theta}}e^{\frac{\tau}{t}-\frac{\xi}{t^{1/2}}}\frac{dt}{t^2}\right)d\xi.$$

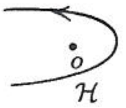
Par le changement de variable $t \mapsto u = \frac{\tau}{t}$ on obtient

$$\boldsymbol{\rho}_2(\mathbf{f})(\tau) = \frac{1}{2i\pi}\int_{d^\theta}\frac{1}{\tau}C_2\left(\frac{\xi}{\tau^{1/2}}\right)\mathbf{f}(\xi)d\xi$$

où

$$C_2(\zeta) = \int_{\mathcal{H}} e^{u-\zeta u^{1/2}}du\ ,$$

$\mathcal{H}$ désignant un contour de Hankel



Ce noyau C_2 est une *accélératrice d'Ecalle* ([E2], [MR3]). C'est lui qui réalise le miracle espéré car sa croissance à l'infini est exactement celle qu'il faut pour qu'on puisse appliquer $\boldsymbol{\rho}_2$ à $\mathcal{B}(\widehat{f})$. On le vérifie facilement ici (au niveau 2) car le noyau C_2 n'est autre qu'une transformée de Fourier de e^{-v^2} (poser $u^{1/2} = iv$) et on en connaît la valeur exacte

$$C_2(\zeta) = i\sqrt{\pi}\,\zeta e^{-\frac{\zeta^2}{4}}.$$

Or, nous avons précisément vu que $\mathcal{B}(\widehat{f}_2)$ et donc $\mathcal{B}(\widehat{f})$ sont à croissance exponentielle d'ordre 2, donc intégrables "contre" C_2.

On termine la construction de f sans problème puisque, formellement, on a fait exactement ce qu'il fallait pour obtenir une fonction f ayant les propriétés désirées.

Ainsi, l'opérateur $S_{2,1} = \rho_{1/2} \circ \mathcal{L} \circ \rho_2 \circ \mathcal{B}$ est un opérateur de sommation pour $\widehat{f}$. On vérifie que

$$S_{2,1}(\widehat{f_1}) = S_1(\widehat{f_1})$$

et

$$S_{2,1}(\widehat{f_2}) = S_2(\widehat{f_2})$$

et on déduit aisément que $S_{2,1}$ permet de sommer toutes les séries de l'algèbre engendrée par les séries 1-sommables et les séries 2-sommables. De plus, il commute à la dérivation $\frac{d}{dx}$.

MULTISOMMABILITÉ

Cette étude nous suggère les étapes d'une théorie de la multisommabilité pour les solutions des équations différentielles analytiques linéaires.

- Définir la notion de k-sommabilité pour k quelconque et les opérateurs de k-sommation $S_k = \rho_{1/k} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{B} \circ \rho_k$ correspondants.
- Définir les accélératrices $\boldsymbol{\rho}_{k,k'}$ noyaux centraux de sommation pour un mélange de séries respectivement k et k'-sommables et les opérateurs de sommation $S_{k,k'}$ correspondants $k > k'$.
- Généraliser par composition en des accélératrices $\boldsymbol{\rho}_{k_1,k_2,\ldots,k_r}$ puis en des opérateurs de sommation $S_{k_1,k_2,\ldots,k_r}$ pour un nombre fini de niveaux $k_1 > k_2 > \cdots > k_r$.
- Préciser les espaces fonctionnels sur lesquels ces opérateurs opèrent : ce sont des espaces de séries ou de fonctions avec des conditions de croissance très précises. On ne passe qu'en évaluant ces conditions au plus juste et les accélératrices permettent ces passages.
- Enrichir tous ces espaces de structures d'algèbres différentielles faisant de tous ces opérateurs des morphismes d'algèbres différentielles : la somme d'une série formelle solution d'une équation différentielle devient alors automatiquement solution de la même équation.
- S'assurer enfin qu'on a évité les confusions en vérifiant l'injectivité de tous ces opérateurs. Pour les accélératrices construire des "inverses" : les décélératrices.

Cette théorie est un cas particulier de la théorie de *l'accéléro-sommabilité* d'Ecalle ([E2], [E3], [E4], [E5]) de portée beaucoup plus générale. Celle-ci s'applique à presque toutes les séries divergentes d'origine naturelle : solutions d'équations différentielles analytiques, d'équations fonctionnelles, conjugaisons des champs de vecteurs, développements en paramètres de perturbations singulières, etc...

APPLICATION AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

Toute équation différentielle linéaire d'ordre n est équivalente à un système linéaire d'ordre 1 de dimension n. On passe très simplement de l'équation au système en prenant pour fonction inconnue le vecteur $Y = (y, y', \ldots, y^{(n-1)})$. On peut passer du système à l'équation, mais beaucoup moins simplement (on trouvera par exemple dans [R2] les détails d'un algorithme relativement simple inspiré des travaux de F. Cope).

Ainsi, on peut toujours remplacer l'étude des équations par celle des systèmes. C'est ce que nous ferons car les résultats sont plus faciles à énoncer sous forme matricielle, c'est-à-dire pour les systèmes.

Considérons un système différentiel linéaire

$$\frac{dY}{dx} = AY$$

où A est une matrice carrée de dimension n à coefficients méromorphes au voisinage de 0.

On sait que ce système admet une solution formelle fondamentale[(1)] de la forme

$$\widehat{Y}(t) = \widehat{H}(t)t^L e^{Q(\frac{1}{t})}$$

où t est une ramification convenable de x ($t = x^{1/p}$), $\widehat{H}(t)$ est une matrice à coefficients séries méromorphes formelles de t, L est une matrice constante (exposants de monodromie formelle) et $Q(\frac{1}{t}) = \operatorname{diag}\left(q_1(\frac{1}{t}), \ldots, q_n(\frac{1}{t})\right)$ est une matrice diagonale dont les coefficients sont des polynômes en $\frac{1}{t}$ sans terme constant (partie irrégulière).

On dispose en outre, pour déterminer une telle solution d'algorithmes explicites et d'un logiciel de calcul sur ordinateur (Code DESIR – Equipe de Calcul Formel, Labo TIM3 Grenoble). Pour en déduire une base de vraies solutions, il suffit de sommer la matrice formelle $\widehat{H}$.

Les exponentielles du problème sont les exponentielles $e^{(q_i - q_j)(1/t)}$ pour tous les couples (q_i, q_j), $q_i \neq q_j$ extraits de la partie irrégulière Q.

Les niveaux $k_1 > k_2 > \cdots > k_r$ du problème sont les différents degrés des polynômes $q_i - q_j$.

Les directions singulières sont a priori toutes les directions de décroissance maximale de ces exponentielles $e^{q_i - q_j}$, $q_i \neq q_j$.

Ainsi, dans l'exemple 3, on déduit des équations caractéristiques associées à chaque pente du polygone de Newton que

$$t = x, \quad q_1(\frac{1}{x}) = 0, \quad q_2(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x}, \quad q_3(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2}.$$

---

(1) On appelle ainsi une matrice dont les colonnes forment un système fondamental de solutions formelles du système.

(q_1 de degré 0 est associé à la pente 0, q_2 de degré 1 à la pente 1 et q_3 de degré 2 à la pente 2). Les exponentielles du problème sont $e^{\pm\frac{1}{x}}$, $e^{\pm\frac{1}{x^2}}$ et $e^{\pm(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x})}$. Les niveaux ont pour valeur $k_1 = 2$ et $k_2 = 1$. Les directions singulières sont a priori $\mathbf{R}^+$, $\mathbf{R}^-$, $i\mathbf{R}^+$ et $i\mathbf{R}^-$. Et nous savons, par l'étude précédente, que $\mathbf{R}^+$ n'est en fait pas une direction singulière : les sommes au voisinage de cette direction se "recollent" analytiquement; le "défaut" de recollement, c'est-à-dire l'invariant analytique dans cette direction est nul.

Multisommabilité des solutions formelles

On montre par des arguments théoriques (par exemple cohomologiques Gevrey [R3]) qu'il existe une factorisation de la matrice $\widehat{H}$ suivant les niveaux :

$$\widehat{H} = \widehat{H}_1\widehat{H}_2\ldots\widehat{H}_r$$

où pour tout i, $\widehat{H}_i$ est k_i-sommable.

On peut donc sommer $\widehat{H}$ à l'aide de l'opérateur $S_{k_1,k_2,\ldots,k_r}$. Puisque celui-ci est un morphisme d'algèbres différentielles on a

$$\begin{aligned} S_{k_1,k_2,\ldots,k_r}(\widehat{H}) &= S_{k_1,\ldots,k_r}(\widehat{H}_1)\ldots S_{k_1,\ldots,k_r}(\widehat{H}_r) \\ &= S_{k_1}(\widehat{H}_1)S_{k_2}(\widehat{H}_2)\ldots S_{k_r}(\widehat{H}_r) \end{aligned}$$

et $H = S_{k_1,\ldots,k_r}(\widehat{H})$ fournit une vraie solution fondamentale du système différentiel sur les secteurs évidents.

Matrices de Stokes

On appelle ainsi usuellement toute matrice de passage entre deux solutions fondamentales asymptotiques à une même solution fondamentale formelle $\widehat{Y}$ sur un secteur. Les matrices de Stokes sont unipotentes. Ce sont elles qui évaluent les "défauts" de recollement des solutions. Elles fournissent ainsi des invariants analytiques (*i.e.* des invariants par changement analytique sur les inconnues $Y = PZ$ avec $P \in GL(n, \mathbf{C}\{x\})$), mais, définies en toute généralité comme précédemment, elles sont trop nombreuses pour caractériser chaque classe analytique et la question se pose d'en extraire des familles caractérisant le plus naturellement possible les classes analytiques.

Les opérateurs de sommation $S_{k_1,\ldots,k_r}$ apportent une solution satisfaisante à ce problème dans l'esprit de l'article initial de Stokes ([Sto]) : choisissons $\widehat{Y} = \widehat{H}(t)t^L e^{Q(\frac{1}{t})}$. Dans chaque direction singulière d^θ notons $Y_{d^{\theta+}}$ et $Y_{d^{\theta-}}$ les sommes de $\widehat{Y}$ dans les directions $d^{\theta+\varepsilon}$ et $d^{\theta-\varepsilon}$ voisines de d^θ (on a choisi un argument $\theta \in \mathbf{R}$ et donc aussi une détermination du logarithme). La collection des matrices de Stokes $C_\theta = Y_{d^{\theta-}}^{-1}Y_{d^{\theta+}}$ pour toutes les directions singulières (θ variant dans un intervalle fixé de longueur 2π) fournit un *classifiant naturel* du système. En outre, ces matrices de Stokes "sont" dans le groupe de Galois différentiel du système ([Ka]) ce qui n'est en général pas le cas pour une matrice de Stokes usuelle quelconque.

La théorie de la multisommabilité telle qu'évoquée ici et son application aux systèmes différentiels linéaires est en partie rédigée dans les actes du Colloque C.A.D.E. tenu à Saint-Hugues en mai 88 ([MR1]). Elle est esquissée dans ([MR3]). Un exposé complet se trouvera dans un livre de Martinet-Ramis actuellement en préparation ([MR2]).

Bibliographie

Sur la multisommabilité :

[MR1] J. MARTINET et J.-P. RAMIS. — *Théorie de Galois différentielle et resommation*, Computer Algebra and Differential Equations, E. Tournier Ed., Academic Press, 1989.

[MR2] J. MARTINET et J.-P. RAMIS. — *Théorie de Cauchy sauvage*, Livre en préparation.

[MR3] J. MARTINET et J.-P. RAMIS. — *Elementary Acceleration and Multisummability*, Preprint IRMA, Strasbourg, Vol. 41 de la RCP25 en l'honneur de R. Thom, 420/COL-20, 1990.

et pour un point de vue non restreint au cas linéaire :

[E1] J. ECALLE. — *Les fonctions résurgentes (tome 3)*, Publication d'Orsay, n° 85–05, 1985.

[E2] J. ECALLE. — *Résurgence et accélération*, Cours de 3e cycle 87–88, Orsay.

[E3] J. ECALLE. — *L'accélération et ses applications*, Livre soumis pour publication à "Travaux en cours", Hermann.

[E4] J. ECALLE. — *Finitude des cycles limites et accéléro-sommation de l'application de retour*, Actes du Congrès, "Bifurcations et Orbites périodiques des champs de vecteurs du plan". Luminy, sept. 89.

[E5] J. ECALLE. — *Solution constructive du problème de Dulac et accéléro-sommation de l'application de retour*, Livre soumis pour publication à "Travaux en cours", Hermann.

Sur la k-sommabilité :

[R1] J.-P. RAMIS. — *Les séries k-sommables et leurs applications*, Springer Lecture Notes in Physics n° 126, Berlin, 1980.

[MR4] J. MARTINET et J.-P. RAMIS. — *Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre*, Publications Mathématiques de l'IHES n° 55 (1982), 63–164.

Sur quelques questions évoquées :

[B] G.D. BIRKHOFF. — *Equivalent Singular Points of Ordinary Linear Differential Equations*, Math. Ann., Vol. 74 n° 1 (1913), 134–139.

[C] B. CANDELPERGHER. — *Une introduction à la résurgence*, Gazette SMF, **42** (1989), 36–64.

[Ka] I. KAPLANSKY. — *An Introduction to Differential Algebra*, Hermann, 1957 et 1976.

[M] B. MALGRANGE. — *Sur les points singuliers des équations différentielles*, L'enseignement mathématique, t. XX, 1–2 (1974), 147–176.

[N] F. NEVANLINNA. — *Zur Theorie der Asymptotischen Potenzreihen*, Ann. Acad. Scient. Fennicae, ser. A, Fom XII (1919), 1–81.

[R2] J.-P. RAMIS. — *Théorèmes d'indices Gevrey pour les équations différentielles ordinaires*, Memoirs of the Amer. Math. Soc., **48** (n° 296), 1984.

[R3] J.-P. RAMIS. — *Filtration Gevrey sur le groupe de Picard-Vessiot d'une équation différentielle irrégulière*, IMPA, Informes de Matemática, serie A–045/85, Rio de Janeiro, 1985.

[RS] J.-P. RAMIS et Y. SIBUYA. — *Hukuhara Domains and Fundamental Existence and Uniqueness Theorems for Asymptotic Solutions of Gevrey Type*, Asymptotic Analysis, **2** (1989), 39–94.

[Sto] G.G. STOKES. — *On the discontinuity of arbitrary constants which appear in divergent developments*, Trans. of the Cambridge Phil. Soc., vol. X (1857), 106–128.

[W] W. WASOW. — *Asymptotic Expansions of Ordinary Differential Equations*, Interscience, New-York, 1965. Wiley, New-York, 1976.

■