Lentille et confinement magnétiques

1 Mouvement d'un électron dans un champ magnétique convergent

Le champ magnétique considéré est de symétrie cylindrique autour de l'axe (Oz). On note $B_\perp(z) \equiv B_\rho(z)$ sa composante radiale (en coordonnées cylindriques) et $B_\parallel(z) \equiv B_z(z)$ sa composante selon l'axe de symétrie.

1. Écrire sur les trois composantes z, ρ et θ (coordonnées cylindriques) l'équation du mouvement d'un électron *relativiste* dans le champ $\mathbf{B}$. On notera $q_e = -|q_e|$, m, et $\mathbf{V}$ la charge, la masse et la vitesse de l'électron. Rappel : en coordonnées cylindriques : $\mathbf{V} = \dot{z}\mathbf{u}_z + \dot{\rho}\mathbf{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$, $\dot{\mathbf{u}}_\rho = \dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$ et $\dot{\mathbf{u}}_\theta = -\dot{\theta}\mathbf{u}_\rho$
2. Pour résoudre le système précédent, il nous faut tenir compte du fait que $\mathbf{B}$ est à flux conservatif. Montrer que cela implique que $B_\perp = -\dfrac{\rho}{2}\dfrac{dB_\parallel}{dz} \equiv -\dfrac{\rho}{2}B'_\parallel$.
3. On considère la dérivée dans le temps du champ $B_\parallel$ le long du mouvement de l'électron, notée $\dot{B}_\parallel$. On peut écrire $\dot{B}_\parallel = B'_\parallel \dot{z}$. Déduire de l'intégration dans le temps de l'équation du mouvement projetée sur $\mathbf{u}_\theta$ que :
$$\dot{\theta} = \frac{|q_e|B_\parallel}{2m\gamma}. \tag{1}$$
L'électron effectue donc un mouvement de vrille azimutal.
4. En considérant la relation (1), et la projection de l'équation du mouvement sur $\mathbf{u}_\rho$, montrer que :
$$\ddot{\rho} = -\frac{\rho q_e^2 B_\parallel^2}{4m^2\gamma^2}. \tag{2}$$
Commenter le signe de $\ddot{\rho}$.
5. Nous traiterons dans la section suivante l'équation du mouvement projetée sur $\mathbf{u}_z$ décrivant la convergence du faisceau, qui est un effet secondaire par rapport au mouvement azimutal de vrille. Si on a affaire à une lentille mince, pendant la durée de la traversée ρ peut alors être considéré comme constant. Montrer en intégrant l'équation (2) que l'inclinaison de la trajectoire en sortie de la lentille magnétique est donnée par :
$$\frac{d\rho_\mathrm{S}}{dz} = -\frac{\rho_\mathrm{E} q_e^2}{4m^2\gamma^2 V}\int B_\parallel^2 dz, \tag{3}$$

où $\rho_{\mathrm{E,S}}$ sont les positions radiales de l'électron à l'entrée et à la sortie de la lentille, et $V \equiv dz/dt$ sa vitesse selon z.

6. Trouver un moyen d'annuler l'effet de vrille et ne conserver que l'effet de convergence, en utilisant deux lentilles consécutives.

2 Confinement magnétique

Pour réaliser la fusion thermonucléaire, mettant en jeu un plasma à une température de l'ordre de 10^6 K il est nécessaire d'empêcher le contact du gaz avec les paroi de l'enceinte de confinement qui ne pourra pas supporter une température aussi élevée. Pour cela le plasma est confiné à l'aide d'un champ magnétique, dans un volume qu'on appelle une "bouteille magnétique", dont nous allons voir le principe.

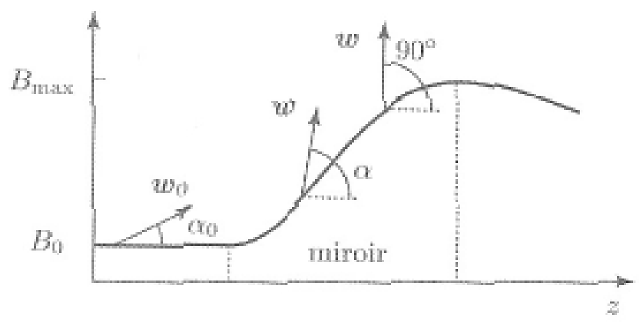

FIGURE 1 – Mouvement d'une charge dans un champ magnétique convergent, à symétrie cylindrique ©EDP Sciences 2014

1. A partir de la projection sur $\mathbf{u}_z$ de l'équation du mouvement, montrer que :

$$\ddot{z} = -\frac{q_e^2 \rho^2 B_\parallel B_\parallel'}{4m^2\gamma^2}. \tag{4}$$

2. Quels signes doivent avoir $B_\parallel$ et $B_\parallel'$ pour permettre le confinement longitudinal (selon z) ?
3. Représenter la trajectoire d'un électron s'approchant de la bobine dans le cas où le confinement est réalisé et où $B_\parallel'$ est de "grande" amplitude.
4. *Cône de perte du miroir magnétique (voir Figure 1).* Le moment magnétique μ de la particule peut être écrit $\mu \equiv \pi r_{\mathrm{B}}^2 \dfrac{q\omega_{\mathrm{c}}}{2\pi} = \pi \left(\dfrac{v_\perp}{\omega_{\mathrm{c}}}\right)^2 \dfrac{q\omega_{\mathrm{c}}}{2\pi} = \dfrac{E_{\mathrm{c}\perp}}{B}$, où ω_{c} est la pulsation cyclotron, r_B le rayon de LARMOR, et $E_{\mathrm{c}\perp}$ l'énergie cinétique dans le plan perpendiculaire au champ magnétique. En admettant que μ ne varie pas au premier ordre pendant le déplacement de la charge, montrer que $\sin\alpha = \sin\alpha_0 \sqrt{\dfrac{B}{B_0}}$. Déterminer en fonction du rapport du miroir $\mathcal{R} \equiv B_{\max}/B_0$ l'angle $\alpha_{0\mathrm{m}}$ minimal définissant un cône à l'intérieur duquel les particules quitteront le plasma en bout de machine.

3 Mouvement d'une particule entre deux "miroirs magnétiques mobiles"

On considère une machine de confinement magnétique limitée en ces deux extrémités par des miroirs magnétiques qui se déplacent l'un vers l'autre à la vitesse v_{M} (Figure 2). Considérons une

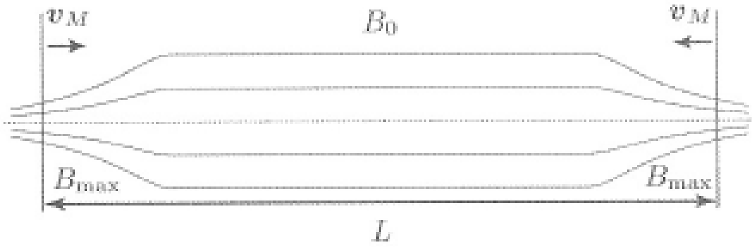

FIGURE 2 – Bouteille magnétique fermée par deux miroirs mobiles symétriques ©EDP Sciences 2014

particules chargée (charge q) de masse m, qui dans la partie de champ magnétique homogène de la machine, est caractérisée initialement par une vitesse $\mathbf{v}_0$ telle que $v_{0\perp} = v_{0\|}$, et par E_c^i son énergie cinétique initiale.

1. Montrer qu'à chaque réflexion sur l'un des miroirs la composante $v_\|$ augmente de $2v_\mathrm{M}$, et expliquer pourquoi le particule finira par quitter le miroir.
2. Déterminer l'énergie cinétique E_c^f de la particule lorsqu'elle quitte le miroir, en fonction de E_c^i et $\mathcal{R}$.
3. Déterminer, en fonction de v_M, E_c^i, $\mathcal{R}$ et m l'expression du nombre de réflexions n que la particule effectuent avant de quitter la machine. Quel est l'intérêt d'une telle machine, et comment réaliser en pratique le déplacement des zones de champ maximal ?

⋆ ⋆ ⋆