Électromagnétisme

III — Induction dans un circuit fixe

Nous nous plaçons dans le cadre de l'ARQS magnétique, où le courant de déplacement est négligé.

Champ électromoteur

On appelle champ électromoteur $\vec{E}_{\mathrm{m}}$ la composante du champ électrique à circulation non conservative :

$$\vec{E}(M,t) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V + \vec{E}_{\mathrm{m}}(M,t) \qquad \text{avec} \qquad \oint_{M\in\Gamma} \vec{E}_{\mathrm{m}}(M,t)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_M \neq 0$$

- Seul un champ électrique à circulation non conservative peut entretenir un courant dans un circuit fermé.

Champ électromoteur de Neumann

Le champ électromoteur dans un circuit fixe placé dans un champ magnétique dépendant du temps est

$$\vec{E}_{\mathrm{m}} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Force électromotrice

La **force électromotrice** (ou fém) existant dans un circuit filiforme Γ orienté à l'instant t est le scalaire

$$e(t) = \oint_{M\in\Gamma} \vec{E}_{\mathrm{m}}(M,t)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_M$$

- La « force électromotrice » n'est pas homogène à une force mais à une différence de potentiel, et s'exprime en volt (V).
- Une charge mobile q dans le conducteur est soumis à la force $\vec{F} = q\vec{E} = q\left(-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V + \vec{E}_{\mathrm{m}}\right)$. Le travail qu'elle reçoit de la part du champ électrique sur un tour du circuit est
$$W = q\oint_{M\in\Gamma} \vec{E}(M,t)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_M = q\oint_{M\in\Gamma} \vec{E}_{\mathrm{m}}(M,t)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_M = q e(t)$$
- C'est la fém qui fournit le travail électrique aux charges mobiles, assurant l'entretien du courant dans le circuit.
- On peut définir la fém à partir du travail W reçu par une charge q lorsqu'elle effectue un tour du circuit :
$$\boxed{e(t) = \frac{W}{q}}$$
- Dans le cas où le champ électromoteur [1] est localisée sur une portion PQ du circuit, on définit fém
$$e_{PQ}(t) = \int_P^Q \vec{E}_{\mathrm{m}}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_M$$

1. C'est-à-dire la composante de $\vec{E}$ à circulation non conservative.

Loi de Faraday

Soit Γ un circuit filiforme orienté, et Σ une surface orientée s'appuyant sur Γ.
L'action d'un champ magnétique $\vec{B}(M,t)$ variable sur le circuit se traduit par l'apparition d'une *fém induite* dans le circuit, donnée par la loi de Faraday

$$e(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \qquad \text{avec} \qquad \Phi(t) = \iint_{M\in\Sigma} \vec{B}(M,t)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_M$$

- **Dans la pratique, on calculera la fém induite par la loi de Faraday plutôt qu'à partir de la circulation du champ électromoteur de Neumann.**
- L'orientation du circuit Γ est utilisée pour orienter le courant $i(t)$ et la fém $e(t)$. Le circuit est donc orienté en convention générateur.
- L'orientation du circuit Γ impose l'orientation de la surface Σ s'appuyant sur ce contour.

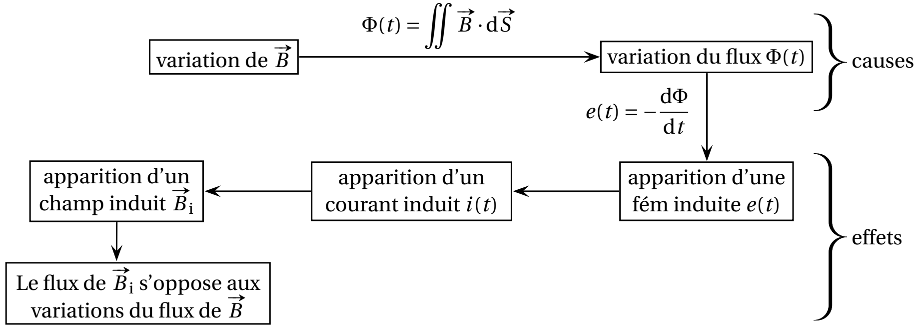
Loi de Lenz

Si le circuit considéré est fermé, la fém induite peut entraîner l'apparition de courants induits.

Quand ils existent, les courants induits tendent, par leurs conséquences, à s'opposer à leur cause.

- Le signe « − » de la loi de Faraday traduit la loi de Lenz.
- La loi de Lenz est une *loi de modération*.
- Il faut que des courants induits puissent se développer dans le circuit pour que la loi de Lenz s'applique. Si le circuit est ouvert, la fém induite ne peut s'opposer à la cause de l'induction.
- Attention : le champ magnétique induit ne s'oppose pas au champ $\vec{B}$ mais aux variations de son flux à travers le circuit.

L'enchaînement des causes aux effets du phénomène d'induction peut être décomposé ainsi :

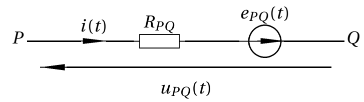


Loi d'Ohm généralisée

Dans une portion PQ d'un circuit filiforme siège d'un phénomène d'induction, la loi d'Ohm s'écrit

$$\boxed{u_{PQ}(t) = R_{PQ}\,i(t) - e_{PQ}(t)}$$

où R_{PQ} est la résistance du tronçon PQ.
Le schéma électrique équivalent, prenant en compte le phénomène d'induction, est



- Dans un circuit fermé de résistance R, on obtient $\boxed{0 = Ri(t) - e(t)}$.

Auto-induction

Inductance propre

Un circuit filiforme orienté Γ parcouru par un courant d'intensité $i(t)$ crée un champ magnétique propre $\vec{B}_\mathrm{p}(M,t)$.
Le flux de ce champ à travers le circuit Γ lui-même est le **flux propre** :

$$\Phi_\mathrm{p}(t) = \iint_{M\in\Sigma} \vec{B}_\mathrm{p}(M,t)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_M$$

où Σ est une surface orientée s'appuyant sur Γ.
On définit l'**inductance propre** L du circuit par

$$\Phi_\mathrm{p}(t) = Li(t)$$

- L'inductance propre s'exprime en henry (H). On a $\boxed{L>0}$.
- L'inductance propre ne dépend que de la géométrie du circuit et de la perméabilité du milieu (μ_0 pour le vide et les milieux non magnétiques).

Phénomène d'auto-induction

Une intensité $i(t)$ variable entraîne l'apparition d'une fém induite, appelée fém d'auto-induction, donnée par la loi de Farady $e_\mathrm{p}(t) = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t}$, soit dans un circuit fixe et rigide :

$$e_\mathrm{p}(t) = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

- Quand le phénomène d'auto-induction est localisée dans une bobine idéale, on retrouve la relation entre la tension à ses bornes et l'intensité la traversant *en convention récepteur* :

$$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

- Le phénomène d'auto-induction est important quand les fréquences sont élevées, ou quand le circuit comporte un grand nombre de spires. On le néglige dans le cas d'un simple circuit alimenté par un GBF.

Énergie magnétique

L'énergie magnétique $\mathcal{E}_\mathrm{m}$ associée au champ magnétique propre est localisée dans tout l'espace (où règne le champ) ; elle est donnée par l'identité

$$\mathcal{E}_\mathrm{m}(t) = \frac{1}{2}Li^2(t) = \iiint_{\text{espace}} \frac{\vec{B}_\mathrm{p}^2(M,t)}{2\mu_0}\,\mathrm{d}\tau_M$$

- Cette identité permet de calculer l'inductance propre L de tout circuit [2]
- On déduit de cette relation la propriété $L>0$.

2. La relation $\Phi_\mathrm{p} = Li$ n'est pas toujours utilisable : le calcul direct de Φ est impossible dans le cas d'une modélisation filiforme de courant.

Induction mutuelle entre deux circuits filiformes fermés

Coefficient d'inductance mutuelle

On considère deux circuits filiformes orientés Γ_1 et Γ_2 parcourus respectivement par les courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$.
Le circuit Γ_1 crée un champ magnétique $\vec{B}_1(M,t)$ dont le flux à travers Γ_2 est

$$\Phi_{1\to2}(t) = \iint_{M\in\Sigma_2} \vec{B}_1(M,t)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_M$$

où Σ_2 est une surface orientée s'appuyant sur Γ_2.
Le circuit Γ_2 crée un champ magnétique $\vec{B}_2(M,t)$ dont le flux à travers Γ_1 est

$$\Phi_{2\to1}(t) = \iint_{M\in\Sigma_1} \vec{B}_2(M,t)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_M$$

où Σ_1 est une surface orientée s'appuyant sur Γ_1.

Les flux étant fonctions linéaires des courants, sources des champs correspondant, on définit le coefficient d'inductance mutuelle M par

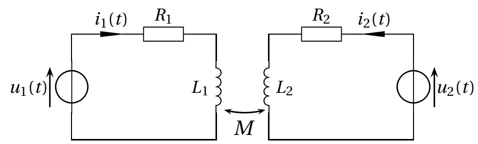
$$\Phi_{1\to2}(t) = Mi_1(t) \qquad \text{et} \qquad \Phi_{2\to1}(t) = Mi_2(t)$$

- L'inductance mutuelle s'exprime en henry (H).
- L'inductance mutuelle M caractérise le couplage magnétique entre les deux circuits. Sa valeur ne dépend que de la géométrie du système et de la perméabilité du milieu.
- L'inductance mutuelle M est algébrique ; son signe, arbitraire, dépend des orientations choisies.

Le champ magnétique total en tout point de l'espace est $\vec{B}(M,t) = \vec{B}_1(M,t) + \vec{B}_2(M,t)$.
Son flux à travers le circuit Γ_1 est $\Phi_1(t) = \Phi_{\mathrm{p},1}(t) + \Phi_{2\to1}(t)$, où $\Phi_{\mathrm{p},1}(t)$ est le flux de $\vec{B}_1$ (flux propre).
Son flux à travers le circuit Γ_2 est $\Phi_2(t) = \Phi_{\mathrm{p},2}(t) + \Phi_{1\to2}(t)$, où $\Phi_{\mathrm{p},2}(t)$ est le flux de $\vec{B}_2$ (flux propre).
On en déduit l'expression du flux magnétique total à travers chaque circuit :

$$\boxed{\Phi_1(t) = L_1i_1(t) + Mi_2(t)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\Phi_2(t) = L_2i_2(t) + Mi_1(t)}$$

On considère deux circuits électriques couplés, d'inductances propres L_1 et L_2, de résistances R_1 et R_2, alimentés sous les tensions $u_1(t)$ et $u_2(t)$.



Les grandeurs électriques des circuits vérifient le système différentiel :

$$\boxed{\begin{cases} u_1(t) = R_1i_1(t) + L_1\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u_2(t) = R_2i_2(t) + M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{cases}}$$

- Il n'y a pas de couplage en régime stationnaire.

Énergie magnétique

Le bilan de puissance s'écrit

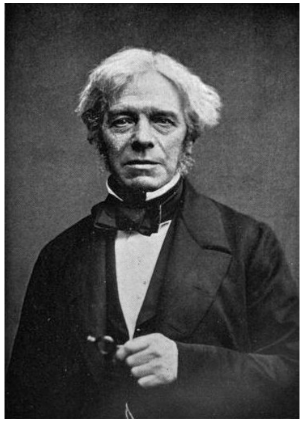
$$\underbrace{u_1 i_1(t) + u_2 i_2(t)}_{\substack{\text{puissance fournie}\\ \text{par les générateurs}}} = \underbrace{R_1 i_1^2(t) + R_2 i_2^2(t)}_{\substack{\text{puissance dissipée}\\ \text{par effet Joule}}} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2}L_2 i_2^2(t) + M i_1(t) i_2(t)\right)}_{\text{puissance magnétique}}$$

L'énergie magnétique emmagasinée dans le système s'écrit

$$\mathcal{E}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

- L'énergie magnétique est constituée des énergies emmagasinées dans chaque bobine, $\frac{1}{2}L_1 i_1^2$ et $\frac{1}{2}L_2 i_2^2$, et d'une énergie mutuelle $M i_1 i_2$.
- L'énergie magnétique étant positive, on a $\boxed{M^2 \leqslant L_1 L_2}$.
- La cas limite $|M| = \sqrt{L_1 L_2}$ correspond au couplage total : toutes les lignes de champ du champ magnétique créé par un circuit traversent l'autre circuit.

Mais qui étaient-ils ?



Michael Faraday (1791-1867).
Chimiste et physicien anglais, réputé pour ses travaux sur l'électricité et le magnétisme. Autodidacte et sans formation mathématique, il fût l'auteur de travaux expérimentaux d'une importance fondamentale. Il découvrit l'induction électromagnétique. Il a montré que la charge d'un conducteur en régime continu ne se situait qu'à son extérieur, et n'influait pas sur l'intérieur du conducteur (cage de Faraday). Il a découvert les lois quantitatives de l'électrolyse, le diamagnétisme, la rotation du plan de polarisation de la lumière sous l'effet d'un champ magnétique (effet Faraday). Il a émis le premier la notion de champ, qui a été développée par Maxwell.
En chimie, il découvrit le benzène, invente le système du nombre d'oxydation, met au point le bec bunsen.

Heinrich Lenz (1804-1865).
Physicien allemand, né à Dorpat, dans l'empire Russe. Il étudia la physique et la chimie à l'université de Dorpat. Au cours d'un voyage autour du monde, il étudia les propriétés physique de l'eau de mer. Il passa le reste de sa carrière à l'université de Saint Petersbourg. Ses études portèrent sur le magnétisme ; il refit les expériences de Faraday et établit la loi qui porte son nom (courant induit). Il travailla, avec Hermann Jacobi, sur la galvanoplastie (procédé permettant d'appliquer un dépôt métallique par électrolyse), et étudia l'effet Peltier