

Le théorème de Poynting dans les régimes quasi-stationnaires

I. INTRODUCTION.

Le physicien étudiant des circuits électriques est souvent amené à dresser des bilans énergétiques. La description de ces circuits par les tensions, les courants et les forces électromotrices, légitime en régime quasi stationnaire, permet généralement de se tirer d'affaire, et l'emploi d'appareils courants (voltmètres, ampèremètres, wattmètres, oscilloscopes...) rend aisé le contrôle des calculs.

La localisation de l'énergie électrique (électrostatique, et magnétique, celle-ci étant souvent prépondérante), ainsi que les mouvements de cette énergie sont moins souvent étudiés. En fait, il est plus important de connaître la valeur de l'énergie mise en jeu que l'endroit où elle se trouve et la façon dont elle se meut !

De plus, comme c'est l'étude du vecteur de Poynting $\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H}$ qui renseigne sur les courants d'énergie, il faut pour mener à bien cette recherche, déterminer les composantes du champ électromagnétique ($\vec{E}$ et $\vec{H}$ par exemple), plus difficilement mesurables que les tensions et courants. Cependant, la considération du champ électromagnétique complète l'étude classique, et les résultats auxquels elle conduit, frisant parfois le paradoxe, ne manquent pas d'intérêt.

Nous proposons dans cet article, d'appliquer le théorème de Poynting à une ligne de transport de l'énergie, un condensateur, un transformateur et un moteur à courant continu.

Ces exemples sont choisis pour leur relative simplicité. Pour les deux machines considérées, en effet, un seul type de champ électromoteur est à prendre en considération (champ électro-

moteur d'induction ou de Neumann, $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, dans le cas du transformateur ; champ électromoteur de déplacement ou de Lorentz, $\vec{v} \wedge \vec{B}$ dans le cas de la machine à courant continu). Il en irait différemment dans l'étude d'une machine asynchrone, où quel que soit le repère choisi, les courants varient dans le

temps $\left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \neq \vec{0}\right)$, et les conducteurs se déplacent dans un

champ magnétique $(\vec{v} \wedge \vec{B} \neq \vec{0})$. Nous nous limitons à une étude de principe, ainsi nous ne tiendrons pas compte de la présence d'isolants sur les fils, ni des effets relativistes du second ordre

en $\frac{v}{c}$ concernant la transformation des champs dans un changement de repère. Nous utiliserons les notations habituelles, sans les redéfinir lorsque leur emploi ne présentera pas d'ambiguïté.

Rappelons tout d'abord quelques propriétés des champs électromoteurs.

II. CHAMP ELECTROMOTEUR.

Dans un repère R où règnent un champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ et un champ électrique $\vec{E}_{(M, t)}$, ceux-ci sont reliés aux potentiels par les expressions :

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \text{rot } \vec{A} \\ \vec{E} &= -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.\end{aligned}\quad (1)$$

Le potentiel vecteur $\vec{A}$ résultant de l'action conjuguée des courants et de l'aimantation des matériaux magnétiques.

L'équation (1) peut encore s'écrire : $\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_{m.i}$ en désignant par $\vec{E}_s$ le champ « électrostatique » $-\text{grad } V$ et par $\vec{E}_{mi}$ le champ électromoteur d'induction, qui satisfont à :

$$\int_A^B \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = V_A - V_B ; \quad \oint \vec{E}_{m.i} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Si une charge électrique q possède dans le repère R une vitesse $\vec{v}$, la force subie par cette charge, mesurée dans R, vaut :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}). \quad (2)$$

L'introduction d'un champ électromoteur de déplacement, habituelle lorsque la charge q appartient à un conducteur animé par rapport à R d'un mouvement de translation, permet d'écrire l'équation (2) sous la forme :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{E}_{m.d}).$$

Cependant dans ce qui suit, nous adopterons l'attitude suivante : ou bien nous nous placerons dans le repère R , et le champ électrique que nous considérerons, notamment pour déterminer le vecteur $\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H}$ sera donné par l'équation (1), ou bien, nous nous placerons dans un repère mobile R' , celui des conducteurs considérés, et dans ce repère R' , le nouveau champ électrique $\vec{E}'$ sera relié à $\vec{E}$ et $\vec{B}$ mesurés dans R par $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}$. Ainsi nous pourrons, dans chaque repère, exprimer la conservation de la composante tangentielle du champ électrique à la traversée d'une surface chargée.

Rappelons enfin l'équation de Maxwell reliant $\vec{H}$ aux courants :

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (3)$$

Nous appliquerons en fait cette relation sous sa forme intégrée : la circulation de $\vec{H}$ le long d'une courbe orientée c

$\left(\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} \right)$ est égale au flux de $\vec{J}$ augmenté du flux de $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ à travers une surface s'appuyant sur c dont la normale est reliée à l'orientation de c de manière habituelle : normale à la surface sortant par la face nord du circuit c .

III. VECTEUR DE POYNTING DANS LE CAS D'UNE LIGNE BIFILAIRE.

1° *La ligne est sans résistance, elle est alimentée en courant continu.*

Nous la supposons hors de l'influence de tout conducteur extérieur, en particulier du sol (fig. 2).

Nous choisirons, pour fixer les idées, les valeurs suivantes, pour caractériser la ligne :

- Rayon des fils : $a = 1 \text{ cm.}$
- Distance des axes des fils : $d = 1 \text{ m.}$
- Différence de potentiel : $U = V_M - V_N = 1 \text{ kV.}$

Dans ces conditions, le récepteur situé à droite de la figure, reçoit de l'énergie.

La détermination des champs électrique et magnétique en tout point d'un plan transversal Q est un problème classique d'électricité (Réf. 1).

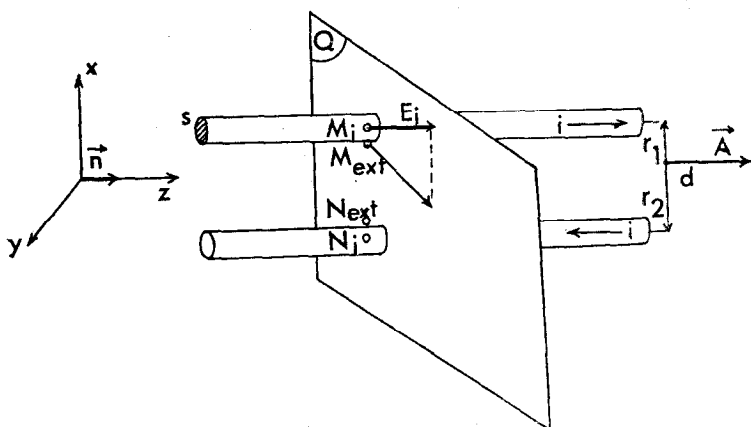


Fig. 1

Les lignes de champ électrique y forment un faisceau de cercles à points limites dont les cercles limitant la section des fils par le plan Q font partie.

Avec les données choisies, ces points limites sont pratiquement confondus avec les axes des fils.

Les lignes de champ magnétique constituent un faisceau de cercles à point de base orthogonal au précédent (fig. 2).

Si un point T a pour distances aux axes des fils M et N les longueurs r_1 et r_2 , et qu'on note $\vec{n}$ le vecteur unitaire longitudinal (dans le sens générateur → récepteur), on peut écrire :

$$V_T = \frac{U}{2} \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\ln \frac{d}{a}}$$

et :

$$\vec{A}_T = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \cdot \vec{n}$$

Cherchons le flux du vecteur de Poynting à travers le plan Q. Il est égal au flux de $\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H}$.

$\vec{P}$ est nul à l'intérieur des fils puisque ceux-ci sont supposés sans résistance ($\vec{E}_i = 0$, $\vec{J} = 0$).

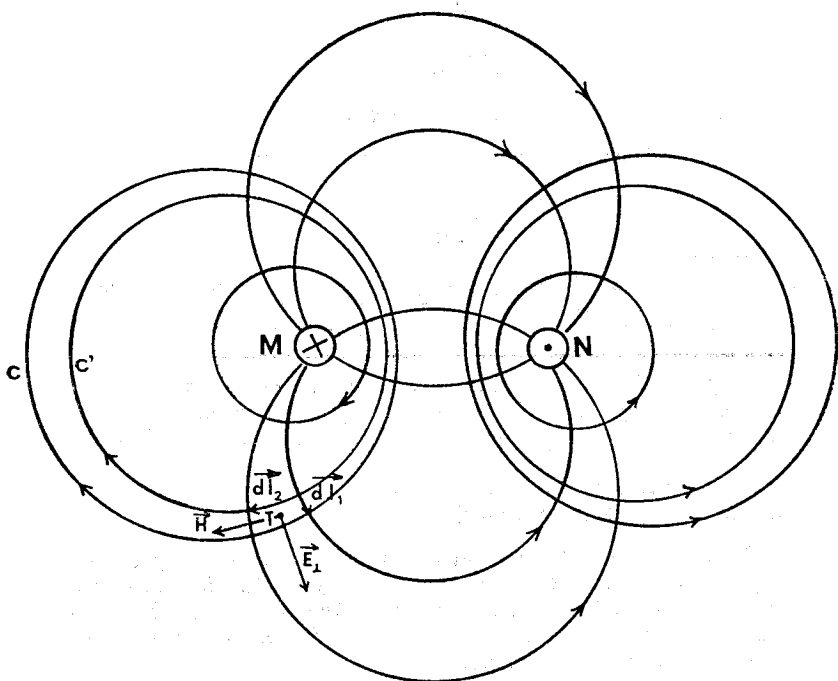


Fig. 2

Le fait qu'à l'extérieur des fils, $\vec{E}$ et $\vec{H}$ soient en tous points perpendiculaires permet une importante simplification.

Si en effet, nous choisissons comme élément de surface orientée le rectangle curviligne de côtés dl_1 et dl_2 représenté sur la fig. 2, le flux de $\vec{P}$ à travers une telle surface élémentaire qui s'exprime généralement par $d^2 \mathcal{F} = (\vec{E} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{dl}_1 \wedge \vec{dl}_2$ s'écrit ici $\vec{E} \cdot \vec{H} \cdot dl_1 \cdot dl_2$. Soit :

$$(\vec{E} \cdot \vec{dl}_1) \cdot (\vec{H} \cdot \vec{dl}_2).$$

Nous décomposerons donc le flux total :

$$\iint_0 (\vec{E} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{dl}_1 \wedge \vec{dl}_2$$

en flux élémentaires $d\mathcal{F}$ à travers des couronnes comprises entre deux lignes équipotentielles telles que c et c' , (qui sont aussi deux lignes de champ magnétique).

On peut alors écrire :

$$\vec{E} \cdot d\vec{l}_1 = -dV$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l}_2 = I.$$

Donc :
$$d\mathcal{E} = -I \cdot dV.$$

Si on intègre maintenant sur tout le plan, on trouve :

$$\mathcal{E} = I \int_M^N -dV = I U.$$

Ce résultat prouve que la puissance, couramment considérée comme transportée par la ligne, est transmise non par les fils, mais par l'espace qui les entoure.

On pourrait montrer que la région intéressée par la propagation de l'énergie, à 10^{-3} près, est un cylindre entourant la ligne et dont le rayon est une dizaine de fois la distance des deux fils.

2° *Courant alternatif de fréquence quelconque et fils sans résistance (supra-conducteurs).*

Voyons comment se trouve modifié le résultat précédent lorsque le courant $i(t)$ et la tension $u(t)$ relatifs à une section transversale Q de la ligne, varient sinusoïdalement dans le temps, et, si la ligne est assez longue, varient également avec la distance z du plan Q au générateur.

Le potentiel vecteur $\vec{A}$ relié directement au courant $i(z, t)$ dans la ligne, dirigé selon $\vec{Oz}$ est longitudinal. Par suite $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ est transversal.

Le champ électrique est donné par l'équation (1) que l'on peut séparer en deux équations, $\vec{E}_\perp$ désignant le champ électrique transversal (E_x et E_y) et $\vec{\text{grad}}_\perp V$ désignant le vecteur obtenu en gardant les deux premières composantes de $\vec{\text{grad}} V$.

$$\vec{E}_\perp = -\vec{\text{grad}}_\perp V$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}.$$

Or, dans les conditions usuelles d'excitation des lignes, cette dernière composante est nulle (Réf. 2). Cette propriété est, *a fortiori*, vérifiée aux fréquences industrielles. On peut contrôler la véracité de cette affirmation en posant :

$$V(z, t) = \frac{1}{2} \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\ln \frac{a}{d}} u(z, t)$$

et :

$$A_z(z, t) = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \cdot i(z, t)$$

avec, de plus :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -L \frac{\partial i}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial i}{\partial z} = -C \frac{\partial u}{\partial t}$$

sachant que :

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{a} \quad \text{et} \quad C = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln \frac{d}{a}}$$

Puisque $\vec{E}$ et $\vec{H}$ sont transversaux (contenus dans des plans de section droite), les mouvements de l'énergie sont donc longitudinaux.

La relation (3), étant donnée la transversalité de $\vec{D}$, s'écrit d'ailleurs pour un trajet fermé c entourant le fil M (fig. 2)

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l}_2 = i(z, t), \text{ exactement comme en courant continu.}$$

Le flux du vecteur de Poynting $\mathfrak{P}(z, t)$ à travers un plan Q, c'est-à-dire la puissance instantanée traversant Q vaut $\mathfrak{P} = u i$.

Sa valeur moyenne est la même pour tous les plans ; c'est la puissance moyenne transportée par la ligne :

$$\langle \mathfrak{P} \rangle = U I \cos \varphi.$$

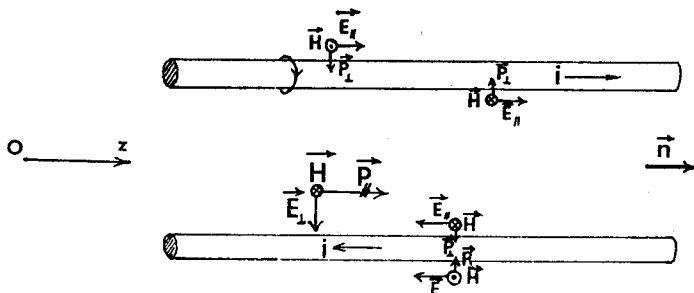


Fig. 3

Par contre, sa valeur instantanée $\mathfrak{F}_{(z, t)} = u_{(z, t)} \cdot i_{(z, t)}$ varie avec z et prend des valeurs négatives si u et i sont déphasés.

Dans ce cas, bien que le générateur se trouve à gauche et le récepteur à droite, l'énergie se déplace par moments de droite à gauche.

C'est ce phénomène que traduit, en théorie classique, l'existence d'une puissance réactive mesurée en z .

Dans le cas particulier où la ligne est fermée sur son impédance caractéristique, $R_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$, u et i sont en phase en tout point de la ligne, et l'énergie ne se déplace que dans le sens générateur $\rightarrow$ récepteur. Ceci est en accord avec l'absence, dans ce cas, d'une onde réfléchie.

Considérons la tranche d'épaisseur dz , comprise entre deux plans Q et Q' d'abscisses z et $z + dz$. Entre les dates t et $t + dt$, elle reçoit l'énergie :

$$d^2W = -\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} dz dt = -\frac{\partial}{\partial z} (u \cdot i) dz dt$$

soit :

$$d^2W = -\left(u \frac{\partial i}{\partial z} + i \frac{\partial u}{\partial z}\right) dz dt = \left(Cu \frac{\partial u}{\partial t} + Li \frac{\partial i}{\partial t}\right) dz dt$$

ou encore :

$$d^2W = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} Cu^2 + \frac{1}{2} Li^2 \right) dz dt.$$

On voit donc que l'énergie de la tranche varie dans le temps, grâce à des échanges longitudinaux avec les tranches voisines, et qu'elle revêt les deux formes électrostatique et magnétique.

Dans le cas où la ligne est fermée sur son impédance caractéristique, ces deux sortes d'énergie sont constamment égales, en

effet l'équation $u = \sqrt{\frac{L}{C}} i$ entraîne $\frac{1}{2} Cu^2 = \frac{1}{2} Li^2$.

3° Courant alternatif et fils résistants.

$\vec{H}$ est toujours transversal, puisque le courant est dirigé selon Oz. Par contre $\vec{E}$ comporte une petite composante longitudinale

E_z due au fait que le champ électromoteur d'induction $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

n'équilibre plus la composante longitudinale du champ électrostatique $-\frac{\partial V}{\partial z}$. On a en effet :

$$-\frac{\partial V}{\partial z} = + \frac{1}{2} \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\ln \frac{d}{a}} \left(L \frac{di}{dt} + Ri \right).$$

R étant la résistance linéique de la ligne $= 2q/\pi a^2$.

La composante longitudinale non compensée du champ électrostatique au contact d'un fil vaut donc :

$$E_z = \frac{R}{2} i = \frac{qi}{\pi a^2} = qj.$$

Elle est bien égale au champ existant à l'intérieur du fil. Autour du fil, le vecteur de Poynting a une composante transversale, dirigée vers le fil, et de module :

$$P_{\perp} = E_z H = \frac{qI}{\pi a^2} \times \frac{I}{2\pi a} = \frac{qI^2}{2\pi^2 a^3}.$$

Son flux à travers la surface de la portion de fil de longueur dz vaut :

$$P_{\perp} \cdot 2\pi a dz = \frac{q}{\pi a^2} I^2 dz = \frac{1}{2} R I^2 dz.$$

Soit $R I^2 dz$ pour les deux fils de la ligne.

Ainsi, la seule énergie qui pénètre dans les fils de ligne, par le truchement de légers mouvements transversaux, y est consommée par effet Joule.

IV. MOUVEMENTS DE L'ÉNERGIE DANS UN CONDENSATEUR.

Nous reprenons ici un exemple cité par Feynmann (Réf. 3).

Soit un condensateur à armatures circulaires que l'on charge lentement (fig. 4).

Le champ électrique peut y être considéré comme uniforme et variable avec le temps. (Nous négligeons les effets de bord). Si les armatures ont un rayon a et sont distantes de h , l'énergie totale entre les plateaux vaut :

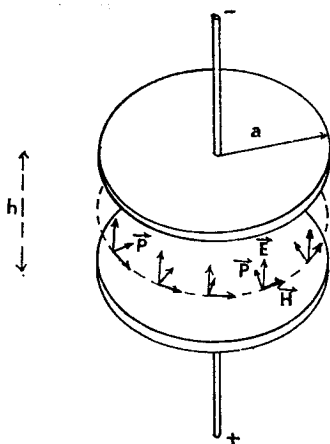


Fig. 4

$$W = \pi a^2 h \cdot \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} C V^2.$$

Cette énergie varie avec E . Quand le condensateur se charge, le taux d'accroissement de cette énergie vaut :

$$\frac{dW}{dt} = \epsilon_0 \pi a^2 h E \frac{dE}{dt}.$$

Cette expression s'écrit encore :

$$\frac{dW}{dt} = \mathcal{P} = 2 \pi a h \cdot E \cdot \frac{\epsilon_0 a}{2} \frac{dE}{dt}$$

- $2 \pi a h$ représente la surface latérale, ouverte, du condensateur.
- E : le champ électrique, vertical.

- $\frac{\epsilon_0 a}{2} \frac{dE}{dt}$: l'excitation magnétique, horizontale, tangentielle

pour des raisons évidentes de symétrie, donnée par le terme $\frac{\partial D}{\partial t}$ de l'équation 3.

On a en effet :

$$2 \pi a H = \pi a^2 \frac{dD}{dt} = \pi a^2 \epsilon_0 \frac{dE}{dt},$$

soit :

$$H = \epsilon_0 \frac{a}{2} \frac{dE}{dt}.$$

Donc $\frac{dW}{dt}$ = flux du vecteur de Poynting à travers la surface latérale du condensateur. L'énergie du condensateur y pénètre donc, non par des fils qui aboutissent aux plaques, mais par la surface ouverte.

Ceci est bien en accord avec les résultats tirés de l'étude de la ligne selon lesquels l'énergie est localisée dans l'espace.

V. MOUVEMENTS DE L'ENERGIE DANS UN TRANSFORMATEUR.

Ce qui précède nous permet de deviner que dans un transformateur, l'énergie reçue au primaire ne pénètre pas effectivement dans les fils de ce bobinage, mais qu'elle est transmise directement par le générateur et la ligne d'alimentation au secondaire. On peut cependant se demander le rôle que joue le circuit magnétique dans cet échange.

Afin d'étudier plus particulièrement ce point, nous supposons les bobinages primaire et secondaire séparés. Cette hypothèse n'est pas conforme à la réalité, car une telle solution augmenterait considérablement les fuites. Cependant, elle met mieux en lumière le rôle du circuit magnétique.

Nous utiliserons en outre les conventions suivantes :

- Au primaire, pour u_1 et i_1 : conventions d'un récepteur.
- Sens de circulation de $\vec{H}$ dans le circuit magnétique et orientation du bobinage secondaire tels que le théorème d'Ampère s'écrive pour un parcours demeurant toujours à la périphérie des tôles et donc indépendant des courants de Foucault.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = n_1 i_1 - n_2 i_2. \quad (4)$$

- Au secondaire, pour u_2 et i_2 : conventions d'un générateur.
- φ_1 et φ_2 flux entrant par la face sud d'une spire respectivement située au primaire ou au secondaire ; φ flux « commun » mesuré à travers une spire enlaçant le circuit magnétique et orientée comme les spires du primaire.

On a donc :

$$n_1 \varphi_1 = n_1 \varphi + l_1 i_1$$

$$n_2 \varphi_2 = -n_2 \varphi + l_2 i_2.$$

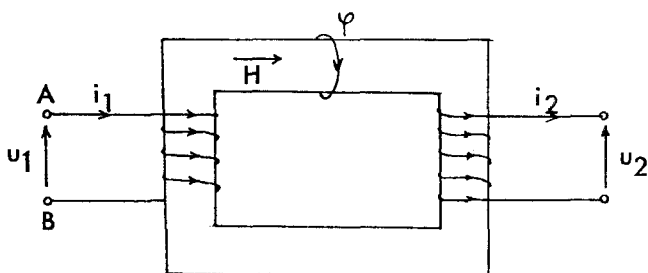


Fig. 5

1° Equations classiques du transformateur.

On les retrouve en faisant circuler le champ :

$$\vec{E} = -\text{grad } \vec{V} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

dans les bobinages primaire ou secondaire.

Ainsi, au primaire :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = R_1 i_1$$

$$\int_A^B \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = V_A - V_B = u$$

$$\int_A^B \vec{E}_{m.i} = -n_1 \frac{d\varphi_1}{dt}.$$

Soit :

$$u_1 = n_1 \frac{d\varphi_1}{dt} + R_1 i_1 = n_1 \frac{d\varphi}{dt} + R_1 i_1 + l_1 \frac{di_1}{dt}. \quad (5)$$

Au secondaire, la même opération donne :

$$R_2 i_2 = -u_2 - n_2 \frac{d\varphi_2}{dt}$$

ou encore :

$$u_2 = -n_2 \frac{d\varphi_2}{dt} - R_2 i_2 = n_2 \frac{d\varphi}{dt} - R_2 i_2 - l_2 \frac{di_2}{dt}. \quad (6)$$

En outre, la circulation de H le long du circuit magnétique est traduite par (4).

2° Bilan des puissances.

Il se fait en multipliant les équations (5) par i_1 , (6) par i_2 et (4) par $\frac{d\varphi}{dt}$.

En effet, si le transformateur est alimenté sous tension primaire de valeur efficace U_1 constante, on a $u_1 \simeq n_1 \frac{d\varphi}{dt}$, on en déduit que la somme $n_1 i_1 - n_2 i_2$ ne dépend pas du régime de fonctionnement du secondaire et qu'on a :

$$n_1 i_1 - n_2 i_2 = n_1 i_{10}$$

i_{10} étant le courant primaire du transformateur à vide.

$$u_1 i_1 = n_1 i_1 \frac{d\varphi}{dt} + l_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1^2 \quad (7)$$

$$n_1 i_1 \frac{d\varphi}{dt} - n_2 i_2 \frac{d\varphi}{dt} = n_1 \frac{d\varphi}{dt} i_{10} = u_1 i_{10} \quad (8)$$

$$n_2 i_2 \frac{d\varphi}{dt} = u_2 i_2 + l_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2^2. \quad (9)$$

La signification physique de chacune de ces expressions est assez claire pour qu'on ne s'y attarde pas. Le passage aux valeurs moyennes montre que la puissance acheminée par la ligne est égale (en éliminant des équations (6), (7) et (8), termes en $\frac{d\varphi}{dt}$)

à :

$$U_1 I_1 \cos \varphi_1 = R_1 I_1^2 + U_1 I_{10} \cos \varphi_0 + R_2 I_2^2 + U_2 I_2 \cos \varphi_2.$$

Le terme $U_1 I_{10} \cos \varphi_0$ représente les pertes dans le fer.

Une telle étude rend bien compte de la conservation de la puissance mais ne renseigne pas sur les mécanismes de son transfert du primaire au secondaire.

Nous allons démontrer que chaque terme des équations (7), (8) et (9) peut être considéré comme le flux d'un vecteur radiant à travers une surface délimitée.

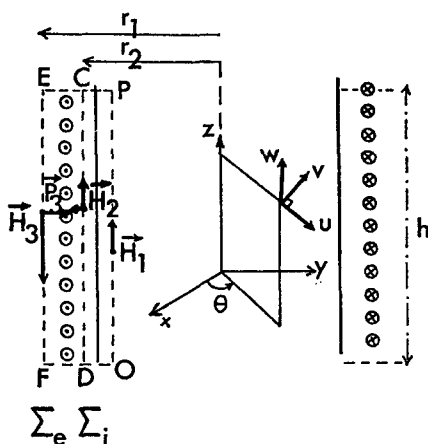


Fig. 6

3° Flux de $\vec{P}$ à travers l'enroulement primaire.

Dans tout ce qui suit, les vecteurs unitaires $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, schématisés sur la fig. 6 forment un trièdre local. Il convient de rapporter ce trièdre au point où l'on calcule les champs.

Soit $\vec{H}_1$ l'excitation magnétique dans le fer. L'aimantation est supposée uniforme.

$$\oint_{O, P, C, D, O} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{d'où :} \quad \vec{H}_2 = + \vec{H}_1, \quad |\vec{H}_2| = H_2 = H_1$$

$$\oint_{O, P, E, F, O} \vec{H} \cdot d\vec{l} = n_1 i_1 \quad \text{d'où :} \quad \vec{H}_3 = \vec{H}_1 - \frac{n_1 i_1}{h} \vec{w}; \dots$$

$$\dots \vec{H}_3 = - \vec{H}_3 \vec{w}; \quad H_3 = \frac{n_1 i_1}{h} - H_1$$

$$(\vec{E}_\delta)_{\text{ext}} = (\vec{E})_{\text{int}} \quad \text{donc :} \quad \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = R_1 i_1.$$

$$\text{En confondant les rayons } r_1 \text{ et } r_2, \quad E_\delta = \frac{R_1 i_1}{2 n_1 \pi r}.$$

De plus, $\vec{v} \wedge (-\vec{w}) = -\vec{u}$, les vecteurs $\vec{P}$ de Poynting sont dirigés vers la bobine.

$$\iint_{\Sigma_e} E_{\delta} H ds + \iint_{\Sigma_i} E_{\delta} H ds = E_{\delta} \times (H_3 + H_1) \times 2\pi rh = R_1 i_1^2.$$

Le bobinage primaire ne reçoit donc pas d'autre puissance que celle qu'il consomme par effet Joule.

On montrerait de la même manière que le flux de $\vec{P}$ à travers l'enroulement secondaire est égal à $R_2 i_2^2$.

4° Flux de $\vec{P}$ à travers le circuit magnétique.

C'est la puissance instantanée servant à magnétiser le fer.

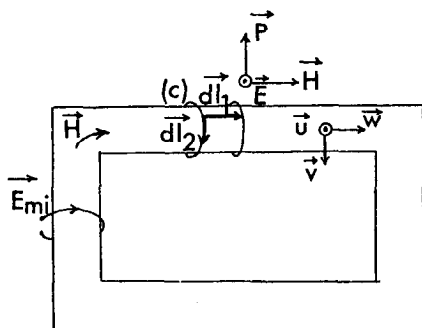


Fig. 7

Sur la surface du circuit magnétique, le champ électrique est la somme de $\vec{E}_s$, perpendiculaire au fer du circuit magnétique, équipotentiel, et de $\vec{E}_{mi} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ qui est tangentiel.

En effet :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int i \frac{d\vec{l}}{r} + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{\vec{j} \wedge \vec{n}}{r} \cdot d\vec{S}.$$

Seul, donc, $\vec{E}_{mi}$ nous intéresse pour calculer le flux de $\vec{P}$ à travers le fer.

Posons

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{H} = H \cdot \vec{w} \\ \vec{E}_{mi} = E_{mi} \vec{v} \\ \vec{E}_{mi} \wedge \vec{H} = E_{mi} \cdot H \vec{u}. \end{array} \right.$$

Les conventions adoptées sont telles que, pour des intensités positives, le vecteur $\vec{P} = \vec{E}_{mi} \wedge \vec{H}$ est dirigé vers l'extérieur du noyau $\vec{dl}_1$ et $\vec{dl}_2$ étant respectivement parallèles à $\vec{H}$ et $\vec{E}_{mi}$, et ayant même sens positif, on a encore :

$$(\vec{E}_{mi} \wedge \vec{H}) \cdot (\vec{dl}_1 \wedge \vec{dl}_2) = -E_{mi} \cdot H \cdot dl_1 \cdot dl_2 = -(\vec{E}_{mi} \cdot \vec{dl}_2) \times (\vec{H} \cdot \vec{dl}_1);$$

or :

$$\oint_C \vec{E}_{mi} \cdot \vec{dl}_2 = -\frac{d\varphi}{dt} = 2\pi r E_{mi}.$$

De même, la circulation de H le long du circuit magnétique vaut :

$$\int H \cdot \vec{dl}_1 = n_1 i_1 - n_2 i_2 = H \cdot \oint dl_1$$

En intégrant, on déduit de ces relations, le résultat suivant :

LE FLUX DE $\vec{P}$ A TRAVERS LE CIRCUIT MAGNETIQUE EST EGAL A : $(n_1 i_1 - n_2 i_2) \frac{d\varphi}{dt}$.

Ce flux est bien entendu tantôt positif et tantôt négatif, puisque nous avons vu que cette expression est sensiblement égale à $u_1 i_{10}$, c'est-à-dire à la puissance magnétisante, dont la valeur moyenne est égale aux pertes fer, et dont la plus grande partie s'échange avec le générateur par l'intermédiaire de la ligne d'alimentation (fig. 8).

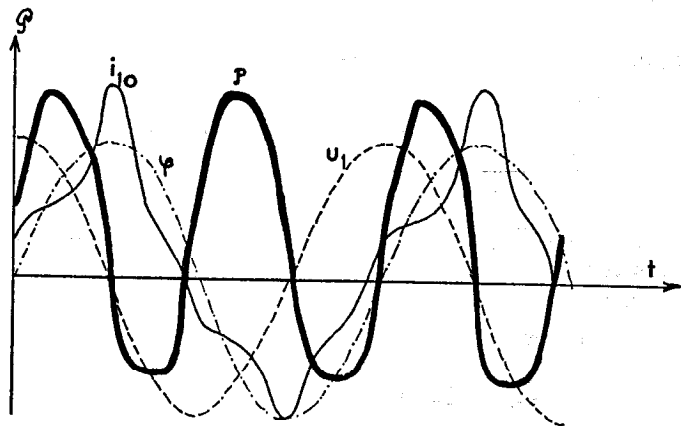


Fig. 8

5° Mouvements de l'énergie dans le transformateur et autour de lui.

Dans le circuit magnétique, $\vec{H}$ est longitudinal. Il ne peut donc y avoir de mouvements d'énergie du primaire vers le secondaire.

On est donc conduit à admettre que la puissance utile au secondaire, soit $u_2 i_2$ est directement transmise par la ligne d'alimentation du primaire à la ligne d'utilisation par le jeu des ondes électromagnétiques (fig. 9).

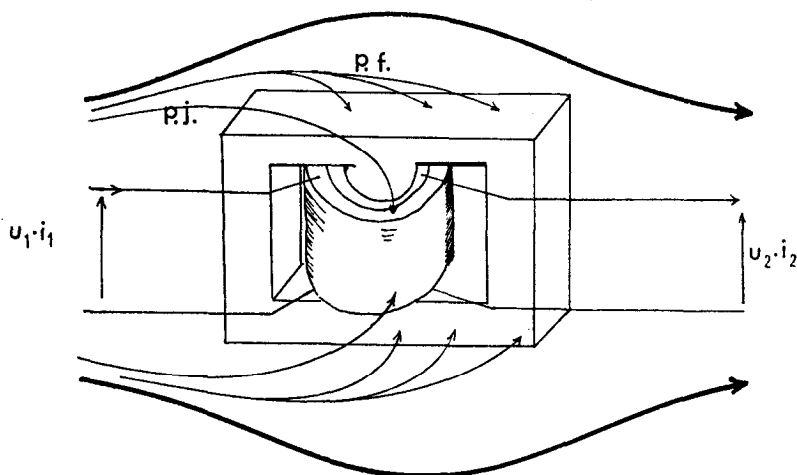


Fig. 9

Le circuit magnétique qui échange lui aussi à travers l'espace, sa puissance magnétisante $u_1 i_{10}$, bien plus faible que les puissances mises en jeu dans les lignes, sert à créer à l'extérieur du transformateur le champ électromoteur d'induction $\vec{E}_{mi}$ dont la circulation le long d'un contour enserrant le circuit magnétique vaut : $-\frac{\partial \varphi}{\partial t}$.

C'est ce champ électromoteur dans lequel baigne le transformateur, qui permet de dévier le flux d'énergie apportée par la ligne d'alimentation vers le circuit d'utilisation.

6° **Interprétation des autres termes : $u_1 i_1$, $e_1 i_1$, et $u_2 i_2$ en termes de flux de $\vec{P}$.**

La relation (1) permet d'écrire :

$$\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$$

$$\vec{P}_1 = -\overrightarrow{\text{grad } V} \wedge \vec{H}$$

$$\vec{P}_2 = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \wedge \vec{H}$$

$\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$ n'ont, bien entendu, pas d'existence physique propre, et seule, leur somme correspond à un courant d'énergie.

Rien n'empêche cependant de calculer séparément leur flux par exemple à travers les enroulements primaire et secondaire (fig. 10).

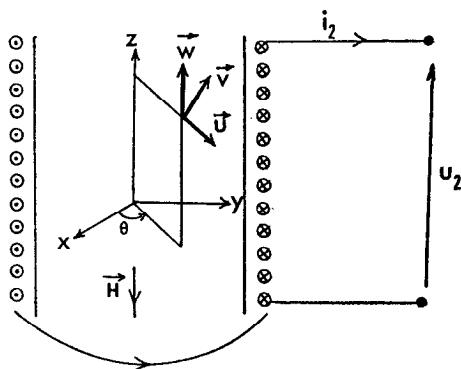


Fig. 10

Pour le primaire, on trouve :

$$\text{Flux de } \vec{P}_1 = u_1 i_1$$

$$\text{Flux de } \vec{P}_2 = -n_1 i_1 \frac{d\varphi_1}{dt}.$$

De la même manière, au secondaire :

$$\text{Flux de } \vec{P}_1 = -u_2 i_2$$

$$\text{Flux de } \vec{P}_2 = n_2 i_2 \frac{d\varphi}{dt} - l_2 i_2 \frac{di_2}{dt}.$$

Il n'y a plus qu'à écrire dans chaque cas :

$$\text{Flux de } \vec{P} = \text{Flux de } \vec{P}_1 + \text{Flux de } \vec{P}_2$$

pour retrouver les expressions 7 et 9.

VI. MOTEUR A COURANT CONTINU : LES POINTS DE VUE COMPARES DE DEUX OBSERVATEURS.

Nous nous contenterons de raisonner sur une machine bipolaire schématique (Machine Gramme). Le fait de considérer un induit en tambour, et de disposer les conducteurs dans des encoches ne modifierait rien aux résultats que nous allons établir. Nous supposons la perméabilité du fer infinie. (Cela nous permettra de négliger la circulation de $\vec{H}$ dans le fer).

Considérons donc le moteur représenté sur la fig. 11.

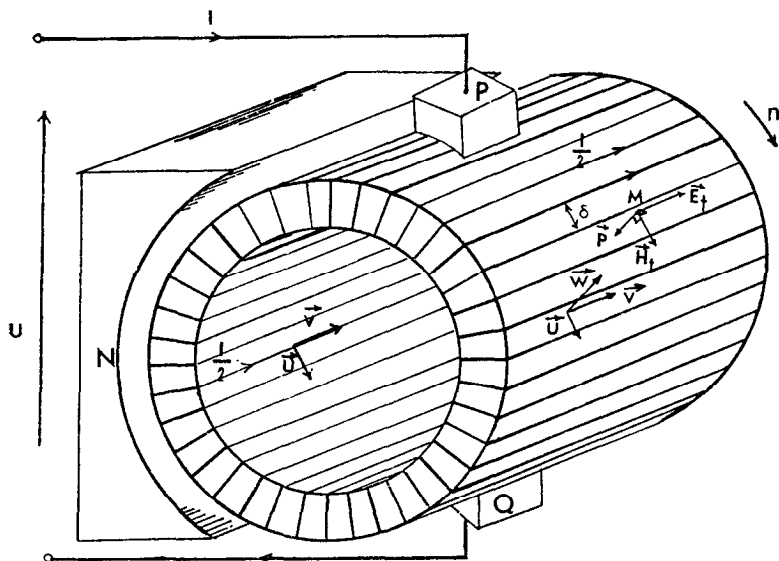


Fig. 11

Pour un observateur lié au stator, les sources de magnétisme (courants de l'inducteur et de l'induit, matière aimantée) sont fixes dans le temps et l'espace.

En effet, par le jeu du collecteur qui substitue continuellement des conducteurs à d'autres, tout se passe comme si les courants dans l'induit étaient fixes.

Le champ électrique se limite donc au champ électrostatique $\vec{E}_s$, tandis que les électrons de conduction sont soumis à $\vec{F} = q(\vec{E}_s + \vec{v} \wedge \vec{B})$.

Si L est la longueur totale d'une voie d'enroulement (longueur de conducteur nécessaire pour passer d'un balai à l'autre), on obtient successivement :

$$\int_P^Q (\vec{E}_s)_{\text{int}} \cdot d\vec{l} = V_P - V_Q = U$$

$$(\vec{E}_s)_{\text{int}} = \frac{U}{L} \vec{v}$$

($\vec{v}$, vecteur unitaire parallèle et de même sens que le courant $\frac{I}{2}$ circulant dans un conducteur)

$$(\vec{E}_s)_{\text{ext}} = \frac{U}{L} \vec{v}$$

Soit δ la distance séparant deux conducteurs. Le théorème d'Ampère, appliqué à un contour du type RSTZ (fig. 12), montre que :

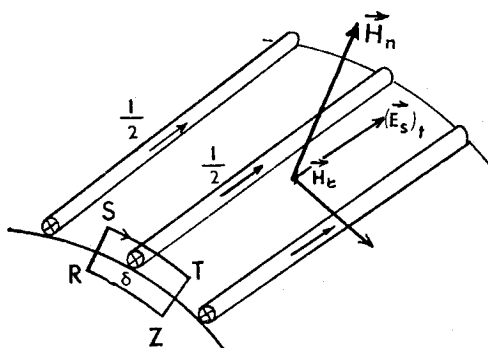


Fig. 12

$$\vec{H}_t = \frac{I}{2\delta} \vec{u}$$

$\vec{H}_t$ désigne la composante tangentielle de $\vec{H}$ dans l'entrefer, au voisinage immédiat des conducteurs.

(On suppose, de plus, que les conducteurs sont assez rapprochés pour que $\vec{H}_t$ soit le même en S et en T).

$$\text{Donc } \vec{E} \wedge \vec{H} = \frac{U \cdot I}{2L\delta} \vec{w} + \vec{P}_t (\vec{w} \text{ normale unitaire à la sur-}$$

face externe de l'induit, $\vec{P}_t$ composante tangentielle du vecteur de Poynting).

En remarquant que $2L\delta = S$, surface totale de l'induit, on en déduit :

*LE FLUX DE $\vec{P}$, A TRAVERS UNE SURFACE FIXE
ENTOURANT L'INDUIT VAUT UI .*

De plus, de l'énergie s'écoule dans l'entrefer, dans le sens de rotation du moteur, comme le montre l'existence de $\vec{P}_t$.

Reprenons le calcul dans un repère lié au rotor.

Dans un tel repère, les conducteurs placés sur la partie externe du rotor, sont le siège d'un champ électrique :

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}$$

tandis que $\vec{H}' = \vec{H}$.

Dans ce repère, $\vec{E}' = \rho \vec{j}$ dans les conducteurs. Soit :

$$E' = \rho \frac{I}{2s}.$$

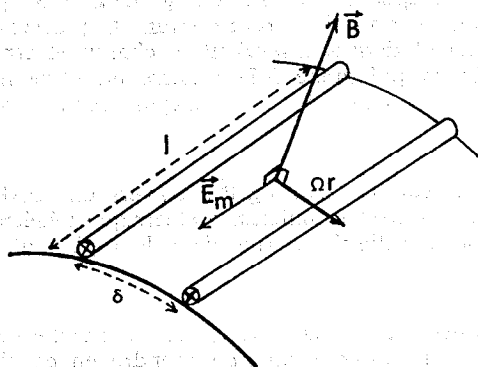


Fig. 13

Le flux de $\vec{P}' = \vec{E}' \wedge \vec{H}'$ à travers la surface du rotor vaut :

$$q \frac{I}{2s} \cdot \frac{I}{2\delta} \cdot 2L\delta = \frac{qL}{2s} I^2 = RI^2.$$

En effet, la résistance de l'induit, formé de deux conducteurs de longueur L en parallèle vaut $R = \frac{qL}{2s}$.

$$\text{Flux de } \vec{P}' = RI^2$$

$$\vec{P}' = \vec{E} \wedge \vec{H} + (\vec{v} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{H} = \vec{P}'_1 + \vec{P}'_2.$$

$$\text{Flux de } \vec{P}'_1 = UI$$

On montrerait sans difficulté que :

$$\text{le flux de } P'_2 \text{ est égal à } -EI.$$

La puissance électrique pénétrant dans le rotor est donc égale à RI^2 .

On peut l'interpréter comme résultat de la différence entre le flux d'énergie UI apportée par la ligne grâce au champ électrostatique et du flux sortant $E.I.$ représentant la puissance mécanique, dans le calcul duquel intervient le champ électromoteur. En réalité, seule, la puissance RI^2 pénètre effectivement dans le bobinage, comme on le voit en se plaçant dans le repère lié au rotor.

Le flux du vecteur de Poynting $\vec{P}$ à travers une surface donnée ne représente en effet la puissance électrique pénétrant dans cette surface que si celle-ci est fixe dans le repère où est évalué $\vec{P}$.

Ainsi, un observateur lié au stator, qui ne cherche pas à analyser, et qui, en particulier, refuse de prendre en considération la rotation de l'induit constate que la puissance pénétrant dans le volume de l'induit vaut UI . Au contraire, un observateur lié au rotor n'y voit pénétrer que la puissance RI^2 . Mais les deux observateurs voient circuler dans l'entrefer, dans le sens de rota-

tion de l'induit, une densité d'énergie, liée à un champ électromagnétique tournant. (Celle que voit l'observateur lié au stator est d'ailleurs beaucoup plus grande que celle qui est vue au rotor).

VII. CONCLUSION.

Nous venons de voir que l'étude électromagnétique de systèmes en régime quasi stationnaire conduit parfois à des résultats étonnants qui ne sont pas en accord avec les descriptions habituelles traduites par les expressions telles que : « Le courant apporte l'énergie... ». « Dans un transformateur, la puissance reçue par le primaire est transmise, aux pertes près, au secondaire ». Cela ne condamne pas ce langage commode, mais montre que les mécanismes réels en sont parfois fort éloignés.

Je remercie M. Georges GUINIER qui a bien voulu relire le manuscrit original de cet article, et me faire part de ses critiques dont j'ai tenu le plus grand compte dans la rédaction définitive.

R. MOREAU (*Bordeaux*).

Réf. 1. — FRUHLING : *Cours d'électricité*, T. 1. Dunod 1966, p. 41.

Réf. 2. — LÉFEUVRE : *Hyperfréquence*. Dunod 1969, p. 21.

Réf. 3. — FEYNMAN : *Lectures on Physics*, T. 2. Addison wesley, chap. 27-5.
