

# Mécanique

## Chapitre 2

### **Mécanique en référentiel non galiléen**

# Table des matières

<b>Biographies succinctes</b>	<b>6</b>
<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>I Référentiel en translation</b>	<b>8</b>
I-1 Voir dans deux référentiels différents . . . . .	8
I-1·i qu'est-ce qu'un référentiel non galiléen ? . . . . .	8
I-1·ii pourquoi étudier dans un référentiel non galiléen ? . . . . .	8
la meilleure des raisons . . . . .	8
une autre bonne (?) raison . . . . .	9
I-1·iii décrire deux référentiels en translation . . . . .	9
I-1·iv objectif . . . . .	10
I-2 Des mouvements différents dans les deux référentiels . . . . .	11
I-2·i bien poser les notations . . . . .	11
I-2·ii relier les positions . . . . .	12
I-2·iii relier les vitesses . . . . .	12
I-2·iv relier les accélérations . . . . .	13
I-2·v du mauvais vocabulaire . . . . .	14
l'entraînement . . . . .	14
le point coïncident . . . . .	15
I-2·vi observation importante . . . . .	15
I-3 Les lois de la mécanique . . . . .	15
I-3·i le principe fondamental aux forceps . . . . .	15
énoncé . . . . .	16
démonstration . . . . .	16
invariance galiléenne des forces . . . . .	16
I-3·ii une nouvelle force . . . . .	16
un nom compréhensible . . . . .	16
ce n'est pas une force physique . . . . .	17
pourquoi la ressentons-nous alors ? . . . . .	17
juste un glaçon . . . . .	19
I-3·iii vision énergétique . . . . .	19
les lois . . . . .	19
cas particulier d'une force d'inertie constante . . . . .	20
paradoxe dans un raisonnement énergétique . . . . .	20
I-4 Les référentiels galiléens . . . . .	21
I-4·i alors, finalement, c'est quoi ? . . . . .	21
quel est le premier référentiel galiléen ? . . . . .	21
I-4·ii référentiels usuels . . . . .	22
référentiel de COPERNIC . . . . .	22
référentiel héliocentrique . . . . .	22
référentiel géocentrique . . . . .	23
référentiel terrestre . . . . .	23
I-4·iii pas de non galiléennité excessive . . . . .	24
référentiel héliocentrique . . . . .	24
référentiel géocentrique . . . . .	24
référentiel terrestre . . . . .	24
I-5 Étudier une situation . . . . .	25

I-5 <i>i</i>	analyse physique . . . . .	25
I-5 <i>ii</i>	analyse technique . . . . .	25
I-5 <i>iii</i>	danger à éviter . . . . .	25
I-6	Pendule simple dans un train . . . . .	25
I-6 <i>i</i>	description – analyse . . . . .	26
I-6 <i>ii</i>	équation du mouvement dans $\mathcal{R}$ . . . . .	27
I-6 <i>iii</i>	vision dans $\tilde{\mathcal{R}}$ de l'équilibre dans $\mathcal{R}$ . . . . .	28
I-7	Sismographe . . . . .	28
I-7 <i>i</i>	description – analyse . . . . .	28
I-7 <i>ii</i>	équation du mouvement . . . . .	29
I-7 <i>iii</i>	lecture . . . . .	30
<b>II</b>	<b>Référentiel en rotation pure et uniforme</b>	<b>31</b>
II-1	Définir deux référentiels en rotation pure . . . . .	31
II-1 <i>i</i>	c'est tout simple . . . . .	31
II-1 <i>ii</i>	rotation uniforme . . . . .	32
II-2	Description du mouvement dans les deux référentiels . . . . .	32
II-2 <i>i</i>	poser les notations . . . . .	32
II-2 <i>ii</i>	vitesse . . . . .	33
II-2 <i>iii</i>	accélération . . . . .	34
II-2 <i>iv</i>	écriture intrinsèque . . . . .	34
	objectif . . . . .	34
	décrire la rotation . . . . .	35
	réécrire la loi de composition des vitesses . . . . .	36
	réécrire la loi de composition des accélérations . . . . .	36
	rappels produit vectoriel . . . . .	36
II-2 <i>v</i>	écriture traditionnelle . . . . .	37
	lois de composition . . . . .	37
	vitesse et accélération d'entraînement . . . . .	38
	accélération de CORIOLIS . . . . .	39
II-3	Les lois de la mécanique . . . . .	39
II-3 <i>i</i>	le PFD change mais ne change pas . . . . .	40
II-3 <i>ii</i>	la force d'inertie d'entraînement . . . . .	40
II-3 <i>iii</i>	la force d'inertie de CORIOLIS . . . . .	40
II-3 <i>iv</i>	aspect énergétique des forces d'inertie . . . . .	41
	la force d'inertie de CORIOLIS . . . . .	42
	la force d'inertie d'entraînement . . . . .	42
II-4	Référentiels galiléens . . . . .	43
II-4 <i>i</i>	une condition identique . . . . .	43
II-4 <i>ii</i>	le référentiel terrestre . . . . .	43
II-5	Tour de manège pour une bille . . . . .	44
II-5 <i>i</i>	description – analyse . . . . .	44
II-5 <i>ii</i>	position d'équilibre . . . . .	45
	existence . . . . .	45
	stabilité . . . . .	46
	interprétation finale . . . . .	47
II-5 <i>iii</i>	vision de l'« équilibre » par rapport au référentiel $\tilde{\mathcal{R}}$ . . . . .	47
	vision en terme de forces . . . . .	47
	vision en termes énergétiques . . . . .	48
II-6	Lanceur de ball-trap . . . . .	48

II.6.i	description – analyse . . . . .	48
	simplification . . . . .	49
	analyses . . . . .	49
II.6.ii	mouvement . . . . .	50
	approche en terme de force . . . . .	50
	approche énergétique . . . . .	50
	résolution . . . . .	51
	petit paradoxe . . . . .	51
II.6.iii	interprétation . . . . .	51
	dans $\mathcal{R}$ . . . . .	51
	dans $\tilde{\mathcal{R}}$ . . . . .	52
<b>III Mécanique en référentiels terrestres</b>		<b>53</b>
III-1	Interaction gravitationnelle . . . . .	53
III-1.i	lois . . . . .	53
	en terme de force . . . . .	53
	en terme de champ . . . . .	53
	vision énergétique . . . . .	54
III-1.ii	cas des astres . . . . .	54
III-2	Le poids . . . . .	54
III-2.i	définition . . . . .	55
III-2.ii	direction du fil à plomb . . . . .	55
III-2.iii	d'autres causes de variation . . . . .	56
	causes globales . . . . .	56
	causes locale . . . . .	56
III-2.iv	que faire avec le poids désormais ? . . . . .	56
III-3	Déviaton vers l'est . . . . .	57
III-3.i	situation – analyse . . . . .	57
	expérience . . . . .	57
	analyse . . . . .	57
III-3.ii	équation régissant le mouvement . . . . .	58
III-3.iii	résolution à l'ordre 0 . . . . .	58
III-3.iv	résolution à l'ordre 1 . . . . .	59
	nouvelles équations horaires . . . . .	59
	écart à l'impact . . . . .	59
	ordres supérieurs . . . . .	59
	et les frottements dans tout cela ? . . . . .	60
III-3.v	interprétation dans le référentiel géocentrique . . . . .	60
	la bonne interprétation . . . . .	60
III-4	Les marées . . . . .	61
III-4.i	le terme de marée . . . . .	61
	origine . . . . .	61
	situation – analyse . . . . .	61
III-4.ii	champ de marée . . . . .	62
	expression vectorielle . . . . .	62
	représentation graphique . . . . .	62
III-4.iii	la Lune et le Soleil . . . . .	63
	contributions . . . . .	63
	mortes eaux et vives eaux . . . . .	63
	un phénomène plus complexe . . . . .	64

**Compétences du chapitre**

**65**

## Biographies succinctes

### Nicolas COPERNIC

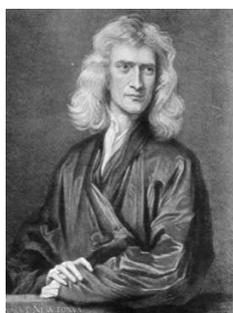
(1473 Torun, Pologne – 1543 Frauenburg, Pologne)



Fils de bourgeois aisé, Nicolas est orphelin de père à 10 ans mais peut, grâce à l'aide d'un oncle maternel, étudier à l'université de Cracovie. Nicolas étudie alors mathématiques, astronomie, droit, médecine et probablement aussi rhétorique et dialectique. Il quitte l'université 3 ou 4 ans après, non diplômé, et retourne auprès de son oncle qui le fait élire chanoine en 1497, alors qu'il est en Italie depuis 1496 pour étudier la médecine et le droit canon. En 1503, docteur en droit canon (mais pas en médecine), il rentre en Pologne. Il devient alors le médecin personnel de l'évêque, tout en poursuivant des recherches en astronomie commencée en Italie. Il publiera l'hypothèse d'un système héliocentrique de manière anonyme dans un livre intitulé *De Revolutionibus Orbium Coelestium*.

### Isaac NEWTON

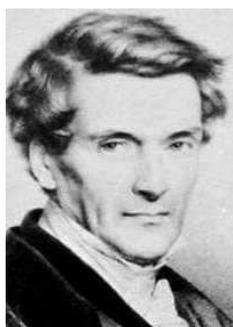
(1642 Woolsthorpe – 1727 Kensington)



Son père meurt quelque temps avant sa naissance. C'est uniquement parce qu'il a montré des aptitudes exceptionnelles que sa mère accepte qu'Isaac aille suivre des études au Trinity College de Cambridge, au lieu de reprendre la ferme familiale en 1661. Il interrompt ses études en 1665 à cause d'une épidémie de peste et revient pendant 18 mois à la ferme familiale. C'est durant cette période qu'il effectue le plus gros de ses travaux (cf. légende de la pomme). De retour à Cambridge pour finir ses études, il est nommé professeur en 1669 et ne commence à publier ses travaux qu'en 1670. Il devient aussitôt célèbre. Il publie *Opticks* en 1675 et son œuvre majeure *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* en 1687. Très religieux, mais à sa manière, il meurt en refusant les derniers sacrements.

### Gaspard Gustave DE CORIOLIS

(1792 Paris – 1843 Paris)



Fils d'industriel nancéen, Gaspard entre second à l'école Polytechnique en 1808 et sort ingénieur des Ponts et Chaussées, ce qu'il sera dans les Vosges jusqu'au décès de son père, en 1816, où il prend un poste d'enseignement à l'école Polytechnique sous la direction de CAUCHY. À partir de 1829, Gaspard devient professeur à l'école Centrale des Arts et Manufacture. En 1830, le poste de CAUCHY à Polytechnique, destitué pour raisons politiques, lui est proposé, mais il refuse. En 1838, de santé fragile, il présente sa démission mais elle est refusée. Il meurt en 1843. Gaspard est connu pour l'accélération qui porte son nom mais il a aussi écrit un célèbre ouvrage sur le billard.

# Mécanique en référentiel non galiléen

S'il est quelque chose à laquelle nous n'avons pas prêté beaucoup d'attention jusqu'à présent, c'est bien au caractère galiléen d'un référentiel. En effet, bien qu'en sachant qu'un référentiel est galiléen lorsqu'il est en translation rectiligne uniforme par rapport à un autre et que la Terre *tourne* sur elle-même, nous n'avons pas hésité (à raison) à supposer le référentiel terrestre galiléen.

Pourtant, nous sommes en droit de nous poser la question : bien que les lois de la mécanique aient été originellement écrites pour des référentiels galiléens, est-il possible de les réécrire pour travailler dans des référentiels non galiléens ? Le but n'est pas purement théorique mais bien pratique : il est parfois plus facile de repérer un mouvement par rapport à une voiture, par rapport à un bateau, que par rapport au référentiel de COPERNIC. Sauf que la voiture ou le bateau constituent, alors, des référentiels non galiléens.

Cela peut rester anodin mais il suffit de penser à des phénomènes comme la sensation de se sentir plaqué contre le dossier d'un siège dans une voiture, ou comme l'eau qui s'échappe de la salade en rotation dans l'essoreuse à cause de la « force centrifuge » pour voir que nous fréquentons ces référentiels non galiléens et leurs effets.

Comme nous aurons l'occasion de le voir, tout a été (trop ?) bien pensé car les lois de la mécanique dans un référentiel vont rester formellement identiques à celles que nous connaissons déjà. La seule différence résidera dans l'ajout d'un ou de deux termes correctifs du côté des forces. C'est tout. La vraie difficulté est ailleurs et réside dans *l'interprétation* des résultats et surtout dans la manière d'imaginer un référentiel non galiléen. Car, si tout le monde connaît l'effet centrifuge, il est regrettable de remarquer que les explications qui parlent de cette notion sont, dans l'énorme majorité des cas, fausses. C'est systématique dans les livres de vulgarisation mais c'est aussi très fréquent dans les livres de cours de physique !

Dans ce chapitre, nous commencerons par le cas où un référentiel est en translation par rapport à un référentiel galiléen, avec une translation *a priori* non rectiligne ou uniforme. Dans un deuxième temps, nous verrons le cas où un référentiel est en rotation pure par rapport à un référentiel galiléen. Ensuite, nous préciserons très rapidement ce qui se passe dans le cas général d'un référentiel en mouvement quelconque par rapport à un référentiel galiléen avant de terminer par étudier quelques situations usuelles en référentiels dits terrestres.

# I – Référentiel en translation

## I.1 – Voir dans deux référentiels différents

### I.1.i – qu'est-ce qu'un référentiel non galiléen ?

- ✧ Nous approfondirons la question plus tard car la réponse est loin d'être triviale, tant du point de vue technique que du point de vue « philosophique ».
- ✧ Pour faire court et, forcément, non parfaitement exact, nous dirons qu'un référentiel est non galiléen lorsqu'il bouge par rapport à un autre référentiel galiléen.
- ✧ Par exemple, une voiture bouge par rapport à la route. Si le sol, définissant le référentiel terrestre est considéré comme galiléen, alors un référentiel lié à la voiture sera en général non galiléen.
- ✧ Autre grand exemple classique : le manège. Ce dernier tourne par rapport au sol donc tout référentiel lié à lui est non galiléen.



#### Bon à retenir

*Ce ne sont pas les choses ou les objets qui sont non galiléens, ce sont les éventuels référentiels qui leur sont liés.*

- ✧ Nous pouvons constater aisément qu'il n'est pas toujours facile de boire dans une voiture, de marcher dans un train, de rester debout dans le bus, de marcher droit sur un manège...
- ✧ Nous pouvons aussi remarquer qu'il est bien plus difficile de marcher dans un wagon d'un train qui freine à faible vitesse que dans un wagon de train Corail lancé à pleine allure, en ligne droite, en campagne.



#### Bon à retenir

*Tout mouvement dans un référentiel non galiléen peut sembler bizarre et les référentiels non galiléens peuvent être plus ou moins non galiléens.*

- ✧ Évitions d'interpréter trop vite ce qui se passe, car les glissements de sens sont légion en référentiels non galiléens.



#### Bon à retenir

*Rien n'appartient à un référentiel, personne (ni rien) n'est dans un référentiel, seuls les mouvements se décrivent **par rapport** à tel ou tel référentiel.*

- ✧ En fait, c'est là l'aspect « difficile » des référentiels non galiléens : l'interprétation. Comme nous le verrons, étudier le mouvement dans un référentiel galiléen est très facile. Interpréter, dans la plupart des cas, c'est aussi très facile.
- ✧ En revanche, si l'interprétation se fait trop tôt, elle est la plupart du temps fautive, car basée sur des lois « intuitives » et l'analyse physique s'en trouve perturbée. Il va donc falloir, là plus qu'ailleurs, faire preuve d'une extrême humilité, poser les questions usuelles et y répondre de manière rigoureuse avant d'écrire la moindre loi, le tout **sans essayer d'y inclure déjà la réponse finale**.
- ☞ *Remarque.* Par abus de langage, nous dirons fréquemment que « nous nous placerons dans » tel référentiel au lieu de dire « étudier par rapport à » tel référentiel. C'est mal, car cela peut laisser sous-entendre une notion (fautive) d'appartenance à un référentiel, mais c'est plus léger.

### I.1.ii – pourquoi étudier dans un référentiel non galiléen ?

#### ★ la meilleure des raisons

- ✧ C'est une raison physique !

- ✧ Il est utile d'étudier quelque chose par rapport un référentiel non galiléen lorsqu'il s'agit d'un référentiel naturel.
- ✧ Comme nous l'avons dit, lors d'un transport, il est plus utile de connaître le mouvement des objets transporté par rapport au camion, au wagon, que de connaître leur mouvement par rapport au sol.
- ✧ Comme nous le verrons, le référentiel terrestre n'est pas parfaitement galiléen, mais c'est un référentiel naturel : tout le monde se repère par rapport au sol, c'est une évidence même ! Il va donc falloir tenir compte de son côté non galiléen.
- ✧ Toutefois le caractère non galiléen du référentiel terrestre est, comme nous le verrons dans la dernière partie de ce chapitre, humainement insensible. Pour que le caractère non galiléen se fasse sentir, il faut soit des mouvements à l'échelle terrestre (masses d'air), soit des expériences délicates spécialement prévues pour (pendule de FOUCAULT).

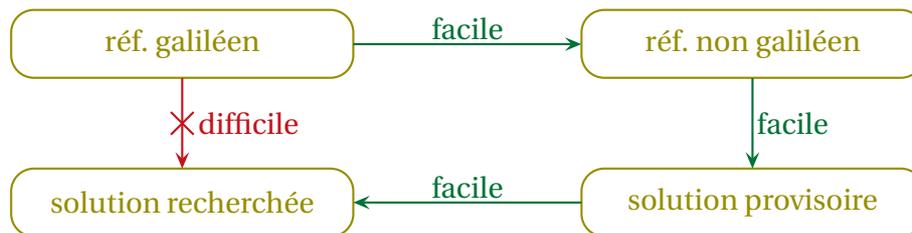


### Bon à retenir

Sauf indication contraire et bien que non galiléen, le référentiel terrestre sera considéré comme suffisamment galiléen.

### ★ une autre bonne (?) raison

- ✧ C'est une raison plus technique.
- ✧ Il peut s'avérer que, parfois, les lois soient plus faciles à écrire dans un référentiel non galiléen que dans un référentiel galiléen.
- ✧ La plupart du temps, il s'agira d'écrire des vitesses (comme en SI).



### I.1.iii – décrire deux référentiels en translation

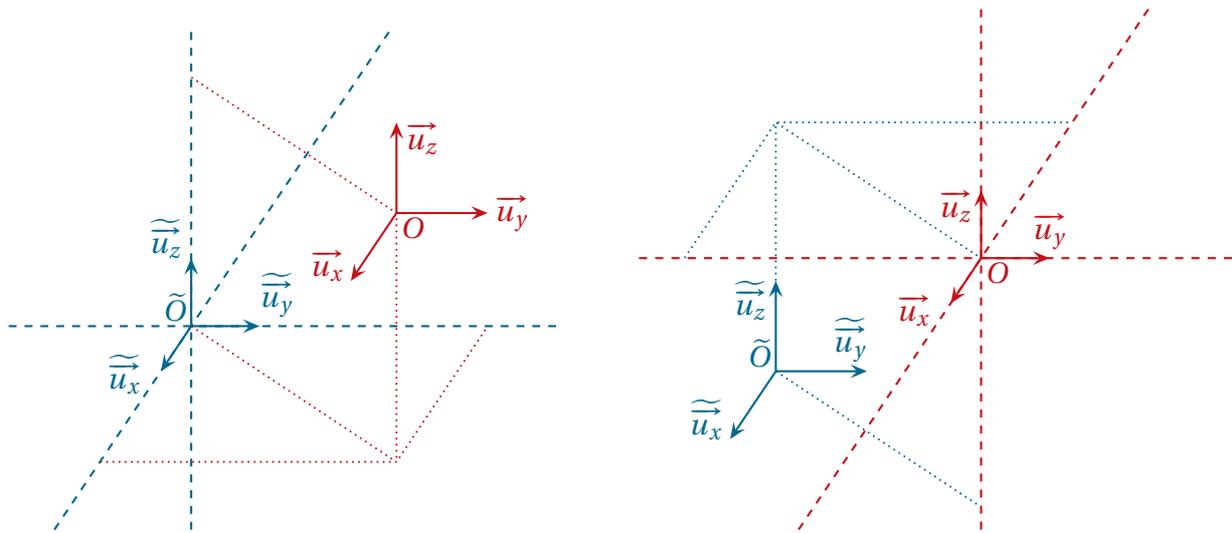
- ✧ Il faut tout d'abord deux référentiels. Notons-les  $\tilde{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{R}$ .



### Définition

Deux référentiels sont dits *en translation*, lorsque leurs axes ont les mêmes directions, mais que leurs centres sont en mouvement l'un par rapport à l'autre.

- ✧ Représentons-les.



- ✧ Dans les représentations précédentes, nous avons l'impression que :
  - le référentiel bleu ( $\tilde{\mathcal{R}}$ ) est fixe avec le dessin de gauche ;
  - le référentiel rouge ( $\mathcal{R}$ ) est fixe avec le dessin de droite.
- ✧ Autrement dit : la manière de *représenter* les choses, la manière de les dessiner, a une grande influence sur la vision intuitive qu'il est possible d'en avoir.
- ✧ Et, étant donné qu'avec les référentiels non galiléen, le plus difficile reste de « voir » les choses, nous ne pouvons pas nous passer du « conseil » suivant.



### Bon à retenir

~ Pour mieux visualiser le mouvement par rapport à un certain référentiel, mieux vaut dessiner ce référentiel au centre du schéma, les axes non inclinés par rapport à la feuille.



### Bon à retenir

~ Deux référentiels en translation sont parfaitement décrits par le mouvement du centre de l'un par rapport au centre de l'autre.

- ✧ Rappelons que par « mouvement », nous entendons position, vitesse et accélération.

## I.1.iv – objectif

- ✧ Grâce aux lois de NEWTON, nous savons déjà faire de la mécanique en référentiel galiléen et nous cherchons à faire de la mécanique directement en référentiel non galiléen, c'est plus pratique.
- ✧ Fixons donc les idées de manière arbitraire :
  - $\tilde{\mathcal{R}}$  sera le référentiel supposé galiléen ;
  - $\mathcal{R}$  sera le référentiel *a priori* non galiléen.
- ✧ Nous pouvons donc facilement écrire les lois de la mécanique par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ . En considérant un point matériel soumis à  $\sum \vec{f}$ , nous pouvons écrire :

$$m \vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M) = \sum \vec{f} \quad (\text{I.1})$$

- ✧ Il faut donc maintenant faire en sorte de transformer cette grandeur de mouvement  $\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M, t)$  de  $M$  par rapport au référentiel  $\tilde{\mathcal{R}}$  en grandeur de mouvement par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ .



### Bon à retenir

Pour décrire le mouvement d'un point par rapport à un référentiel non galiléen, il est nécessaire de connaître le mouvement de ce référentiel non galiléen par rapport à un référentiel galiléen.

✧ Ici, cela signifie que nous connaissons parfaitement :

$$\vec{OO}(t); \quad \vec{v}_{|\mathcal{R}}(O,t) \quad \text{et} \quad \vec{a}_{|\mathcal{R}}(O,t) \quad (\text{I.2})$$

## I.2 – Des mouvements différents dans les deux référentiels

### I.2.i – bien poser les notations

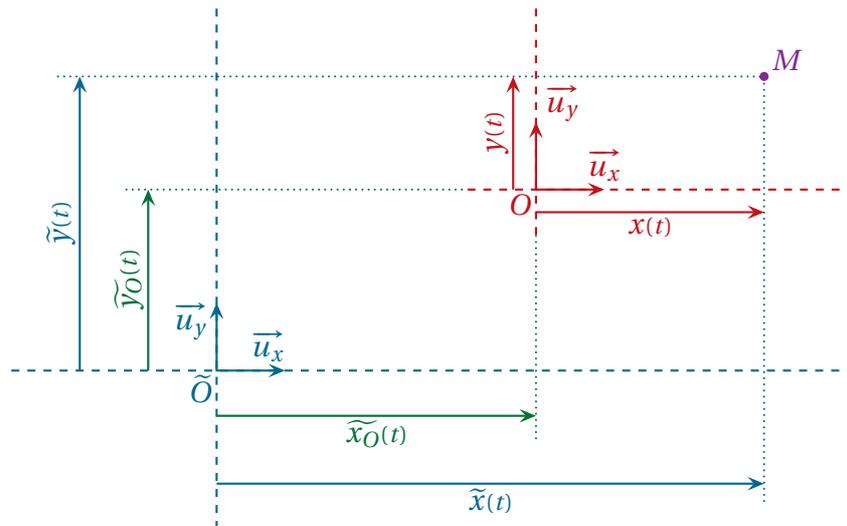
✧ Pour mieux visualiser la situation, nous allons représenter une situation en deux dimensions et généraliser à la 3<sup>e</sup> dimension.

✧ Remarquons aussi que, puisque les deux référentiels sont en translation, les vecteurs  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_x$  sont identiques.

✧ Nous avons de même

$$\vec{u}_y = \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{u}_z = \vec{u}_z \quad (\text{I.3})$$

✧ Dans la suite, nous ne ferons plus la différence entre les deux.



✧ Les grandeurs concernant  $O$  par rapport à  $\mathcal{R}$  sont :

→ la position :

$$\vec{OO} = \tilde{x}_O(t) \vec{u}_x + \tilde{y}_O(t) \vec{u}_y \quad (\text{I.4})$$

→ la vitesse :

$$\vec{v}_{|\mathcal{R}}(O,t) = \frac{d\vec{OO}(t)}{dt} = \frac{d\tilde{x}_O(t)}{dt} \vec{u}_x + \frac{d\tilde{y}_O(t)}{dt} \vec{u}_y \quad (\text{I.5})$$

→ l'accélération :

$$\vec{a}_{|\mathcal{R}}(O,t) = \frac{d\vec{v}_{|\mathcal{R}}(O,t)}{dt} = \frac{d^2\tilde{x}_O(t)}{dt^2} \vec{u}_x + \frac{d^2\tilde{y}_O(t)}{dt^2} \vec{u}_y \quad (\text{I.6})$$

✧ Les grandeurs concernant  $M$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  sont :

→ la position :

$$\vec{OM} = \tilde{x}(t) \vec{u}_x + \tilde{y}(t) \vec{u}_y \quad (\text{I.7})$$

→ la vitesse :

$$\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}(M,t)} = \frac{d\vec{OM}(t)}{dt} = \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} \vec{u}_x + \frac{d\tilde{y}(t)}{dt} \vec{u}_y \quad (\text{I.8})$$

→ l'accélération :

$$\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}(M,t)} = \frac{d\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}(M,t)}}{dt} = \frac{d^2\tilde{x}(t)}{dt^2} \vec{u}_x + \frac{d^2\tilde{y}(t)}{dt^2} \vec{u}_y \quad (\text{I.9})$$

✧ Les grandeurs concernant  $M$  par rapport à  $\mathcal{R}$  sont :

→ la position :

$$\vec{OM} = x(t) \vec{u}_x + y(t) \vec{u}_y \quad (\text{I.10})$$

→ la vitesse :

$$\vec{v}_{|\mathcal{R}(M,t)} = \frac{d\vec{OM}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \vec{u}_x + \frac{dy(t)}{dt} \vec{u}_y \quad (\text{I.11})$$

→ l'accélération :

$$\vec{a}_{|\mathcal{R}(M,t)} = \frac{d\vec{v}_{|\mathcal{R}(M,t)}}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \vec{u}_x + \frac{d^2y(t)}{dt^2} \vec{u}_y \quad (\text{I.12})$$

### I.2.ii – relier les positions

✧ Nous cherchons le lien entre le vecteur position dans  $\tilde{\mathcal{R}}$  et celui dans  $\mathcal{R}$ , i.e. entre  $\vec{OM}$  et  $\vec{OM}$ .



#### Loi

La loi de composition des vecteurs positions s'écrit :

$$\vec{OM} = \vec{OO} + \vec{OM}$$

✧ C'est une simple relation de CHASLES.

✧ Cela se voit directement sur le schéma

1

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_O(t) + x(t) \quad \text{et} \quad \tilde{y}(t) = \tilde{y}_O(t) + y(t) \quad (\text{I.13})$$

### I.2.iii – relier les vitesses



#### Définition

La loi qui permet de relier les vitesses (resp. les accélérations) d'un point par rapport à deux référentiels différents est appelée *loi de composition des vitesses* (resp. *loi de composition des accélérations*.)

✧ Nous cherchons le lien entre vecteur vitesse dans  $\mathcal{R}$  et celui dans  $\tilde{\mathcal{R}}$ , i.e. entre  $\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}(M,t)}$  et  $\vec{v}_{|\mathcal{R}(M,t)}$ .

**Loi**

La loi de composition des vecteurs vitesses s'écrit :

$$\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M, t) = \vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O, t) + \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M, t)$$

✧ La démonstration ne pose pas de difficulté :

$$\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(t) = \frac{d\vec{\tilde{O}M}(t)}{dt} \quad (\text{I.14})$$

$$= \frac{d(\tilde{x}(t)\vec{u}_x)}{dt} + \frac{d(\tilde{y}(t)\vec{u}_y)}{dt} \quad (\text{I.15})$$

$$= \frac{d(\tilde{x}_O(t) + x(t))}{dt}\vec{u}_x + \frac{d(\tilde{y}_O(t) + y(t))}{dt}\vec{u}_y \quad (\text{I.16})$$

$$= \frac{d\tilde{x}_O(t)}{dt}\vec{u}_x + \frac{dx(t)}{dt}\vec{u}_x + \frac{d\tilde{y}_O(t)}{dt}\vec{u}_y + \frac{dy(t)}{dt}\vec{u}_y \quad (\text{I.17})$$

$$= \left( \frac{d\tilde{x}_O(t)}{dt}\vec{u}_x + \frac{d\tilde{y}_O(t)}{dt}\vec{u}_y \right) + \left( \frac{dx(t)}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy(t)}{dt}\vec{u}_y \right) \quad (\text{I.18})$$

$$= \vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O, t) + \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M, t) \quad (\text{I.19})$$

✧ Insistons ! Tout vient d'une simple relation de CHASLES **et** du fait que la variable « temps » soit la même dans les deux référentiels. Non, cela n'a rien de si évident car, en relativité restreinte, le temps ne s'écoule pas de la même manière<sup>1</sup>, ce qui implique

$$t_{|\tilde{\mathcal{R}}} \neq t_{|\mathcal{R}} \quad (\text{I.20})$$

🔥 *Remarque.* Il a été fondamental de supposer ici que  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  ne dépendaient pas du temps, *i.e.* que les référentiels étaient en translation l'un par rapport à l'autre, pour passer de la relation I.15 à la relation I.16.

**I.2·iv – relier les accélérations**

✧ C'est le même principe : nous cherchons le lien entre vecteur accélération dans  $\mathcal{R}$  et celui dans  $\tilde{\mathcal{R}}$ , *i.e.* entre  $\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M, t)$  et  $\vec{a}_{|\mathcal{R}}(M, t)$ .

**Loi**

La loi de composition des vecteurs accélération s'écrit :

$$\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M, t) = \vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O, t) + \vec{a}_{|\mathcal{R}}(M, t)$$

✧ La démonstration ne pose pas de difficulté :

$$\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M, t) = \frac{d}{dt} \left( \vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O, t) + \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M, t) \right) \quad (\text{I.21})$$

$$= \frac{d}{dt} \left( \frac{d\tilde{x}_O(t)}{dt}\vec{u}_x + \frac{d\tilde{y}_O(t)}{dt}\vec{u}_y \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{dx(t)}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy(t)}{dt}\vec{u}_y \right) \quad (\text{I.22})$$

$$= \left( \frac{d^2\tilde{x}_O(t)}{dt^2}\vec{u}_x + \frac{d^2\tilde{y}_O(t)}{dt^2}\vec{u}_y \right) + \left( \frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{u}_x + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\vec{u}_y \right) \quad (\text{I.23})$$

$$= \vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O, t) + \vec{a}_{|\mathcal{R}}(M, t) \quad (\text{I.24})$$

1. Plus la vitesse est grande, plus le temps s'écoule lentement, c'est le phénomène de « dilatation des temps ».

## I.2.v – du mauvais vocabulaire

### ★ l'entraînement

✧ Traditionnellement, les lois de compositions s'écrivent de la manière suivante.



### Loi

LOIS DE COMPOSITION

Lorsque  $\tilde{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{R}$  sont en translation l'un par rapport à l'autre, la loi de composition des vitesses s'écrit

$$\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M, t) = \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M) + \vec{v}_e(M, t) \text{ où}$$

$$\vec{v}_e(M) = \vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O, t) \text{ est appelée la } \textit{vitesse d'entraînement}.$$

Lorsque  $\tilde{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{R}$  sont en translation l'un par rapport à l'autre, la loi de composition des accélérations s'écrit

$$\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M, t) = \vec{a}_{|\mathcal{R}}(M, t) + \vec{a}_e(t) \text{ où}$$

$$\vec{a}_e(t) = \vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O, t) \text{ est appelée l' } \textit{accélération d'entraînement}.$$

- ✧ Il faut bien comprendre que le vocable « entraînement » est intrinsèquement mauvais car il ne reflète en rien l'entraînement de quelque chose. En effet le référentiel  $\mathcal{R}$  n'entraîne **pas** le point  $M$ .
- ✧ Imaginons un point  $M$  fixe par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ , par exemple un élève assis, immobile par rapport au référentiel terrestre.
- ✧ Imaginons un autre référentiel  $\mathcal{R}$  en mouvement par rapport au référentiel  $\tilde{\mathcal{R}}$ . Par exemple celui lié au professeur.
- ✧ Alors, lorsque le professeur marche dans la salle, l'élève bouge dans le référentiel  $\mathcal{R}$  (*i.e.* par rapport au professeur) et, pourtant, il est difficile de voir en quoi l'élève est *entraîné* par le référentiel professeur !
- ✧ Ce vocabulaire se comprend lorsque nous l'analysons de la manière suivante.
- ✧ Supposons un point  $M$  **réellement fixé** par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ , *i.e.* qui se déplace avec  $\mathcal{R}$ . C'est souvent le cas lorsque le référentiel est naturel, *i.e.* correspond à quelque chose de concret : une voiture, un train, la Terre...
- ✧ Alors, lorsque  $M$  est immobile **par rapport à  $\mathcal{R}$** , sa vitesse par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  se réduit à la vitesse *d'entraînement*.



#### Bon à retenir

*La vitesse d'entraînement d'un point  $M$  de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  correspond à la vitesse qu'aurait le point  $M$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  si  $M$  était réellement fixé au référentiel  $\mathcal{R}$ , *i.e.* s'il était immobile par rapport à  $\mathcal{R}$ .*



#### Bon à retenir

*L'accélération d'entraînement d'un point  $M$  de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  correspond à l'accélération qu'aurait le point  $M$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  si  $M$  était réellement fixé au référentiel  $\mathcal{R}$ , *i.e.* s'il était immobile par rapport à  $\mathcal{R}$ .*

✧ Le vocabulaire est là, il faut s'y adapter, mais il faut y faire attention. Il a été choisi de sorte que, **dans certains cas**, il porte bien son nom.

☞ *Remarque.* Les problèmes de vocabulaires où la signification « profane » ne coïncide pas avec la signification scientifique n'est pas rare. Voir, par exemple, en optique avec objet / image, réel / virtuel ou, en thermodynamique, avec le mot « chauffer ».

### ★ le point coïncident

2

✧ Pour trouver la vitesse d'entraînement, nous pouvons aussi introduire un nouveau point.



#### Définition

Le *point coïncident* est le point qui coïncide avec le point  $M$  à l'instant  $t$  et qui est fixe dans le référentiel d'étude.



#### Loi

La vitesse d'entraînement est la vitesse du point coïncident avec  $M$  à l'instant  $t$ .

✧ La méthode « du » point coïncident fonctionne excellentement bien, à condition d'arriver à « voir » et à imaginer la mécanique en référentiel non galiléen.

✧ En particulier, il faut bien comprendre qu'il n'existe pas *un* point coïncident mais une **infinité** de points coïncident car...



#### Bon à retenir

⚡ *Le point coïncident est un point immobile qui change tout le temps de place.*

✧ Reprenons l'image du professeur qui marche dans la classe. On pourrait appeler « l'élève coïncident », l'élève qui, à chaque instant, se situe juste à côté du professeur.

✧ Ainsi, lorsque le professeur marche, l'élève coïncident change, ce n'est pas toujours le même et, pourtant, c'est toujours un élève *immobile*. Pour paraphraser « l'élève coïncident est un élève immobile qui change tout le temps de place. »

✧ Il en est de même avec l'accélération



#### Loi

L'accélération d'entraînement est l'accélération du point coïncident avec  $M$  à l'instant  $t$ .

## I.2.vi – observation importante

✧ Ces lois ont nécessité pour leurs démonstrations :

1

- le fait que  $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_O(t) + x(t)$ , ce qui est une relation géométrique (traduction de la relation de CHASLES);
- la définition des vecteurs vitesse et accélération;
- le caractère absolu du temps;
- le fait que  $\vec{u}_x = \vec{C}^{te}$ , *i.e.* que les référentiels étaient en translation.

✧ En revanche, nous n'avons pas eu besoin d'utiliser le caractère galiléen ou non des référentiels  $\tilde{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{R}$ .

✧ Nous pouvons donc en tirer la conséquence suivante.



#### Bon à retenir

⚡ *Les lois de composition sont des lois cinématiques indépendantes du caractère galiléen, de nature physique, des référentiels.*

## I.3 – Les lois de la mécanique

### I.3.i – le principe fondamental aux forceps

## ★ énoncé

**Loi**

Soit  $M$  un point matériel de masse  $m$  soumis à  $\sum \vec{f}$ . Alors son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}$ , référentiel non galiléen est tel que :

$$m \vec{a}_{|\mathcal{R}}(M, t) = \left( \sum \vec{f} \right) + \vec{f}_{ie} \quad \text{où}$$

$$\vec{f}_{ie} = -m \vec{a}_e(M, t) = -m \vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O, t) \text{ est la } \textit{force d'inertie d'entraînement}.$$

- ✧ En fait nous pouvons voir que, formellement, la loi de la dynamique en référentiel non galiléen ressemble comme deux gouttes d'eau au principe fondamental déjà connu.
- ✧ Toutefois, nous ne pouvons plus dire « officiellement » que c'est le PFD car, entre la loi originelle et celle-ci, il y a l'ajout d'une « force » dite d'inertie qui n'a de force que le nom. Nous y reviendrons.
- ✧ Dans la suite, par (mauvaise) habitude, nous nommerons encore cette loi le PFD.

## ★ démonstration

- ✧ La démonstration est toute simple. Commençons par écrire le PFD dans le référentiel  $\tilde{\mathcal{R}}$  :

$$m \vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M, t) = \sum \vec{f}(t) \quad (\text{I.25})$$

- ✧ Avec la loi de composition des accélérations, cela donne :

$$m (\vec{a}_{|\mathcal{R}}(M, t) + \vec{a}_e(M, t)) = \sum \vec{f}(t) \quad \rightsquigarrow \quad m \vec{a}_{|\mathcal{R}}(M, t) = \sum \vec{f}(t) - m \vec{a}_e(M, t) \quad (\text{I.26})$$

- ✧ Ce qui est bien le résultat en notant  $\vec{f}_{ie} \stackrel{\text{not}}{=} -m \vec{a}_e(M, t)$ .

## ★ invariance galiléenne des forces

- ✧ Cela va sans le dire, mais cela va mieux en le disant

**Loi**

Les forces physiques, celles qui représentent l'interaction entre deux choses sont invariantes par changement de référentiel, même non galiléen.

- ✧ Ainsi même par rapport à une voiture, la force qu'exerce un ressort s'écrit :

$$\vec{f} = -k(\ell - \ell_0) \overrightarrow{u}_{\text{sortant}} \quad (\text{I.27})$$

- ✧ Remarquons au passage que cette invariance dite « galiléenne » des forces :
  - porte mal son nom puisqu'elle fonctionne aussi avec des référentiels non galiléens (ce qui, au fond, n'est pas surprenant étant donné la démonstration du PFD dans un référentiel non galiléen) ;
  - n'a rien de si évident *a priori*.

**I.3-ii – une nouvelle force**

## ★ un nom compréhensible

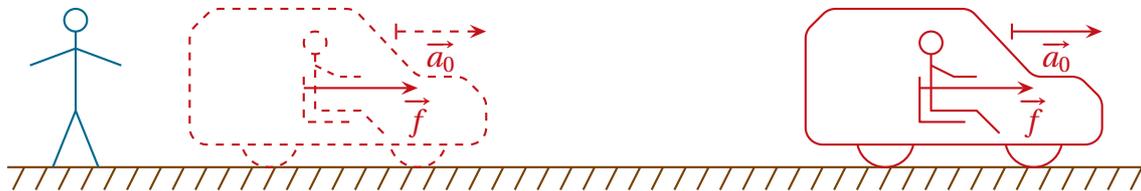
- ✧ La force s'appelle « force d'inertie » car elle fait intervenir la masse *inertielle*.
- ✧ Voir la démonstration pour s'en convaincre.

### ★ ce n'est pas une force physique

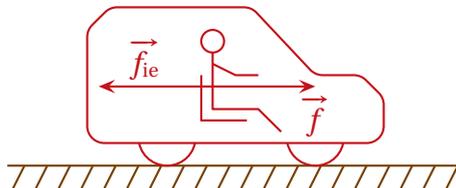
- ✧ Elle n'obéit pas au principe d'invariance galiléenne des forces !
- ✧ En effet, elle n'est pas invariante par changement de référentiel car, justement, elle dépend du référentiel dans lequel elle est utilisée, puisqu'elle fait intervenir  $\vec{a}_{|\mathcal{R}}(O,t)$ .
- ✧ Ce n'est donc pas une force physique. En clair : elle **n'existe pas**.

### ★ pourquoi la ressentons-nous alors ?

- ✧ Mais parce que nous ne la ressentons pas ! Il est là le « drame » des référentiels non galiléens.
- ✧ Prenons l'exemple d'une voiture qui démarre.
- ✧ Quelqu'un, à l'intérieur de la voiture, se sent « plaqué contre le siège », comme si quelque chose le tirait en arrière : il traduit cela par une force **vers l'arrière**.
- ✧ En fait, non seulement cette force n'existe pas, mais la seule force que subit le passager est une force **vers l'avant**.
- ✧ Pour comprendre, regardons une voiture, initialement immobile, qui accélère vers l'avant.



- ✧ Comme le passager « suit » la voiture, il faut qu'il ait exactement la même accélération que la voiture, c'est-à-dire  $\vec{a}_0$ .
- ✧ Or, d'après NEWTON (qui ne peut mentir), cela implique que le passager subit la force  $\vec{f} = \vec{a}_0/m$ .
- ✧ Cette force ne peut venir que du siège, seul objet en contact avec le passager.
- ✧ Pour simplifier, nous pouvons dire que le siège agit un peu comme un ressort. Ainsi pour qu'il exerce une force vers la droite (ici) il **faut** qu'il soit comprimé.
- ✧ Le passager est donc bien plaqué contre le siège mais **parce qu'il** subit de ce dernier une force vers l'avant.
- ✧ Ceci étant le passager interprète la situation de son point de vue : pour lui il est **immobile** puisque, pour lui, la voiture est « immobile ». Dans ses conditions, comme il ressent le siège qui le pousse vers l'avant, il **faut** qu'une force le pousse vers l'arrière pour assurer une résultante des forces nulles.



- ✧ C'est cette force vers l'arrière qui est interprétée comme une force d'inertie **bien qu'elle n'existe pas**.
- ✧ En fait tout se passe comme si le passager était « catapulté » par le siège.
- ✧ Remarquons ainsi que sans dossier c'est plus difficile d'accélérer en voiture. De même, sans portière gauche, difficile de tourner à droite sans que le chauffeur ne soit éjecté !
- ✧ Une autre preuve (s'il en fallait) pour montrer qu'il est possible de ressentir des forces qui n'existent pas se situe à Edimbourg, tout près du château, dans le musée des illusions d'optique *camera obscura*<sup>2</sup>.

2. Site : <http://www.camera-obscura.co.uk/>

- ✧ Il y a, dans ce musée, une simple passerelle, tout ce qu'il y a de plus immobile par rapport au référentiel terrestre, mais sur laquelle il est impossible de marcher tout droit tellement la sensation de tomber est grande.



- ✧ Le truc est que le décor, un gros tube, ne fait que tourner autour de la passerelle. Dans la photo ci-dessus<sup>3</sup>, il faut bien comprendre que chaque « trait » n'est que la trace d'une toute petite lumière.
- ✧ L'auteur confirme que *quiconque* essaye de traverser la passerelle en regardant le décor ne **peut pas** marcher droit (c'est bien pour cela que le mannequin sur la photo fait une pose !).
- ✧ Pour le plaisir et pour illustrer la « puissance » (et le danger) du cerveau, voilà une photo prise **sans aucun photoshop** dans ce même musée<sup>4</sup>.

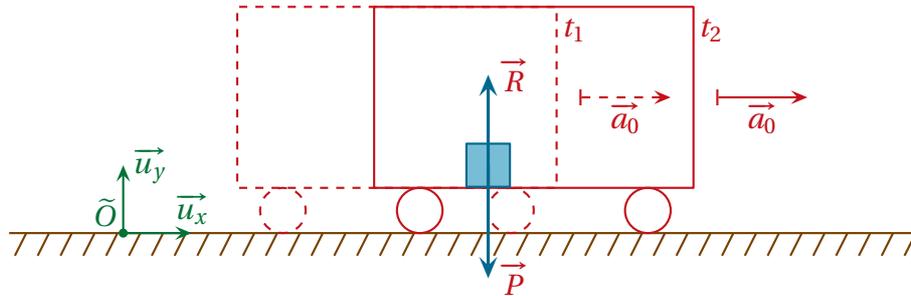


3. Source : [http://i.telegraph.co.uk/multimedia/archive/01770/camera-vortex\\_1770586b.jpg](http://i.telegraph.co.uk/multimedia/archive/01770/camera-vortex_1770586b.jpg)

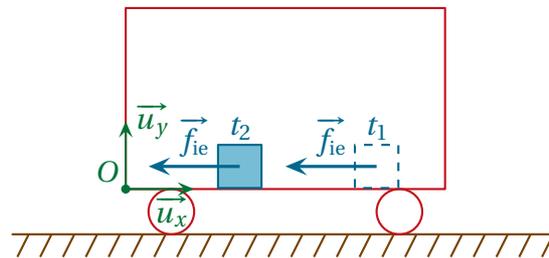
4. Source : [http://www.camera-obscura.co.uk/slideshow/index/Ames-Room-2011\\_2.jpg](http://www.camera-obscura.co.uk/slideshow/index/Ames-Room-2011_2.jpg)

### ★ juste un glaçon

- ✧ Prenons un autre exemple pour montrer que les forces d'inertie n'existent pas, qu'il s'agit que d'une illusion, certe extrêmement pratique, mais d'une simple illusion dangereuse.
- ✧ Imaginons un glaçon dans un wagon, le tout étant initialement immobile.
- ✧ Le wagon se met en mouvement.
- ✧ Supposons que le glaçon soit fondant (et sur un support plastique) de manière à ce que tout se passe comme s'il n'y avait pas de frottement : poids et réaction normale se compensent, la résultante des forces sur le glaçon est nulle, son accélération l'est donc aussi.
- ✧ Le glaçon reste donc **immobile** par rapport au sol : le wagon « glisse » sous lui !



- ✧ En revanche, la même situation représentée dans le référentiel du wagon donne lieu à une tout autre interprétation.
- ✧ Comme nous pouvons le voir avec le schéma du dessus, au début, le glaçon est immobile à l'avant du wagon alors qu'à la fin il fonce de plus en plus vite vers l'arrière. Tout se passe donc comme si une force le poussait vers l'arrière : c'est la force d'inertie.
- ✧ Dans le référentiel du wagon, le glaçon subit une force d'inertie bien qu'il soit en réalité immobile !



- ✧ Quand vous bougez la tête, **tous les objets, choses, personnes, étoiles, maison...** subissent des forces d'inertie par rapport à vous. Mais ils n'en sont pas écrasés pour autant !

### I.3.iii – vision énergétique

#### ★ les lois

- ✧ Les questions à se poser sont :
  - la force d'inertie d'entraînement est-elle conservative ?
  - peut-on associer une énergie potentielle à une force d'inertie d'entraînement ?



#### Bon à retenir

*Dans le cas de référentiels en translation, la force d'inertie d'entraînement n'est pas conservative.*

- ✧ La raison est simple.
- ✧ Une énergie potentielle, donc la force associée, ne doit dépendre *que* de l'espace et pas du temps.
- ✧ Or la force d'inertie s'écrit  $\vec{f}_{ie} = -m \vec{a}_e(t)$  ce qui signifie qu'elle dépend furieusement du temps par l'intermédiaire de l'accélération d'entraînement !
- ✧ Ceci étant, si l'accélération d'entraînement est constante...

★ cas particulier d'une force d'inertie constante



**Loi**

Lorsque l'accélération d'entraînement est constante, le travail fourni par la force d'inertie d'entraînement à un point de masse  $m$  qui bouge entre  $A$  et  $B$  s'écrit

$$W_{AB} = \vec{f}_{ie} \cdot \vec{AB}$$

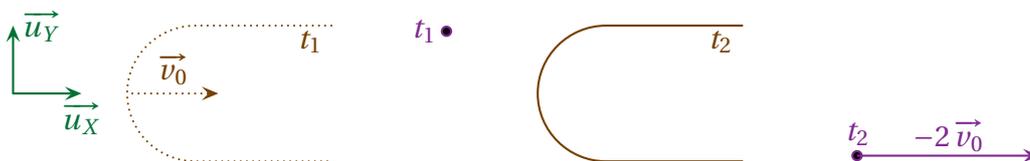
✧ Il s'agit en fait d'un cas particulier du travail fourni par une force constante.

★ paradoxe dans un raisonnement énergétique

- ✧ Considérons la situation suivante : une bille de masse  $m$  avance à la vitesse  $\vec{v}_0$  sur un plan horizontal sans frottement.
- ✧ Nous pouvons alors dire que, s'il n'y a aucun obstacle, elle conservera une vitesse vectoriellement constante.
- ✧ Mettons un rail courbé sur sa route de sorte que ce rail (sans frottement lui non plus) renvoie la bille dans la direction initiale.
- ✧ Alors une fois rééjectée du rail, la bille aura la vitesse  $-\vec{v}_0$  et, pour l'ensemble du mouvement, la variation totale d'énergie cinétique sera nulle, ce qui est cohérent avec le fait que  $\Delta E_c = W = 0$ .



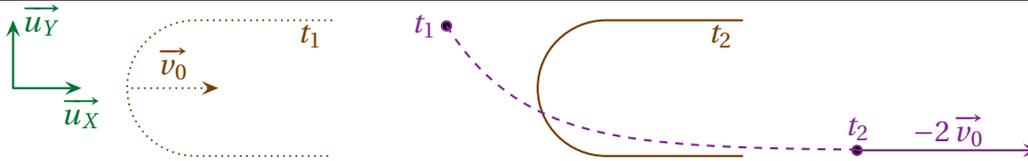
- ✧ Raisonnons maintenant dans le référentiel animé de la vitesse  $\vec{v}_0 = \vec{C}^{te}$ .
- ✧ Par rapport à ce référentiel, au début, la bille a une vitesse nulle, alors qu'après elle a une vitesse de  $-2\vec{v}_0$ .
- ✧ La variation d'énergie cinétique vaut donc cette fois  $\Delta E_c = 2 m v_0^2 \neq 0$ .



- ✧ D'où les questions :
  - quelles sont les forces qui ont travaillé ?
  - pourquoi la variation d'énergie cinétique n'est-elle pas la même ?

Réfléchissez quelques instants là-dessus avant de lire la suite.

- ✧ Pour savoir qui a travaillé, procédons par élimination, sachant qu'à la fin il doit en rester une :
  - ce ne sont pas les forces à distance : le poids parce que tout le mouvement est horizontal, la force électromagnétique parce que la bille n'est pas chargée ;
  - ce ne sont pas les forces d'inertie parce que l'autre référentiel est parfaitement galiléen ;
  - ce ne sont pas les forces de frottements parce qu'il n'y en a pas ;
  - ce sont donc les réactions normales du rail.
- ✧ En effet, bien que l'habitude soit grande de dire que les réactions normales ne travaillent pas, cela n'est vrai que lorsque le support est immobile.
- ✧ Ici, pour nous en convaincre, nous pouvons dessiner l'allure de la trajectoire de la bille dans le second référentiel pour constater qu'elle n'est effectivement *a priori* pas tangente au support.



- ✧ Il s'agit en fait ici de ce qu'il est possible d'appeler « l'effet raquette » : c'est **grâce** aux actions *normales* d'un support qu'un objet est mis en mouvement.
- ✧ La réponse à la deuxième question est alors (provisoirement) immédiate : les variations d'énergie dépendent du référentiel dans lequel elles sont calculées.



### Bon à retenir

⋈ Les variations d'énergie d'un système ne sont pas des grandeurs intrinsèques.

## I-4 – Les référentiels galiléens

### I-4.i – alors, finalement, c'est quoi ?

- ✧ N'oublions pas qu'au fond, la définition d'un référentiel galiléen est donnée par la première loi de NEWTON : « Il existe des référentiels dits *galiléens* dans lesquels tout point matériel a une trajectoire rectiligne uniforme si et seulement si la résultante des forces qu'il subit est nulle » ;
- ✧ Nous pouvons désormais traduire cela par :



### Bon à retenir

⋈ Un référentiel est galiléen si le PFD s'écrit sans force d'inertie.

- ✧ Malgré tout, nous pouvons caractériser assez fortement les référentiels galiléens.



### Loi

Un référentiel en translation par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen si et seulement si la translation est rectiligne uniforme.

- ✧ En effet, supposons  $\tilde{\mathcal{R}}$  galiléen et  $\mathcal{R}$  en translation rectiligne uniforme par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ .
- ✧ Dans ces conditions, la vitesse du centre  $O$  de  $\mathcal{R}$  est telle que

$$\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O) = \vec{C}^{\text{te}} \rightsquigarrow \vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O) = \vec{0} \rightsquigarrow \vec{f}_{\text{ie}} = \vec{0} \quad (\text{I.28})$$

- ✧ Comme les forces d'inerties sont nulles dans  $\mathcal{R}$ , cela prouve bien que ce dernier est galiléen.
- ✧ Autrement dit, en trouvant *un* référentiel galiléen, nous pouvons en déduire *tous* les autres.

### ★ quel est le premier référentiel galiléen ?

- ✧ C'est un problème... un vrai de vrai gros problème.
- ✧ Quand un mouvement par rapport à un référentiel galiléen s'écarte du mouvement prévu par le PFD, il peut s'agir soit d'un caractère non galiléen non pris en compte, soit d'une force inconnue.
- ✧ C'est ainsi que le référentiel géocentrique a longtemps été soupçonné d'être non galiléen car des sondes à la limite du système solaire ne suivaient pas exactement la trajectoire prévue<sup>5</sup>.

5. L'effet est, à présent, compris. L'écart est dû au fait que la différence de température entre la face de la sonde tournée vers le Soleil et celle cachée de ce dernier, engendre des différences d'émission de radiation (cf. chapitre 2 de thermodynamique). Or émettre une radiation provoque une force (car les photons « emportent » de la quantité de mouvement). Et ainsi, qui dit différence d'émission, dit différence de force et, donc, une résultante non nulle.

## I-4-ii – référentiels usuels

### ★ référentiel de COPERNIC



#### Définition

Le *référentiel de COPERNIC* est le référentiel centré sur le centre de masse du système solaire et dont les axes pointent vers trois étoiles éloignées.

- ✧ Deux des axes du référentiel de COPERNIC constituent le plan moyen de l'écliptique.
- ✧ La grande question est : quelles sont ces étoiles<sup>6</sup> ?



#### Loi

Le référentiel de COPERNIC est postulé galiléen.

- ✧ Comme ça, plus de problème, nous avons *un* référentiel galiléen.



#### Bon à retenir

§ Le référentiel de COPERNIC est adapté à l'étude du système solaire.

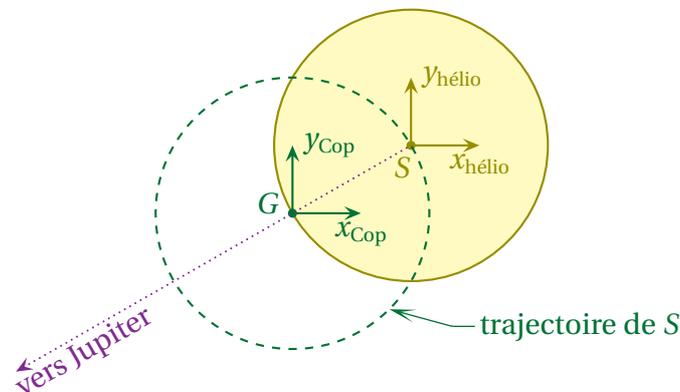
### ★ référentiel héliocentrique



#### Définition

Le *référentiel héliocentrique* est le référentiel centré sur le centre de masse du Soleil et dont les axes sont parallèles à ceux du référentiel de COPERNIC.

- ✧ À cause de la masse de Jupiter, le référentiel de COPERNIC est décalé d'environ un rayon solaire du centre du référentiel héliocentrique.



- ✧ De plus, comme la période de révolution de Jupiter autour du Soleil est d'environ 12 ans, nous pouvons dire que le référentiel héliocentrique est en *translation circulaire* par rapport au référentiel de COPERNIC.



#### Bon à retenir

§ Le référentiel héliocentrique n'est pas rigoureusement galiléen mais il est suffisamment galiléen pour quasiment toutes les études.



#### Bon à retenir

§ Le référentiel héliocentrique est adapté à l'étude de corps dans le système solaire sur des durées bien inférieures à la période de Jupiter (12 an).

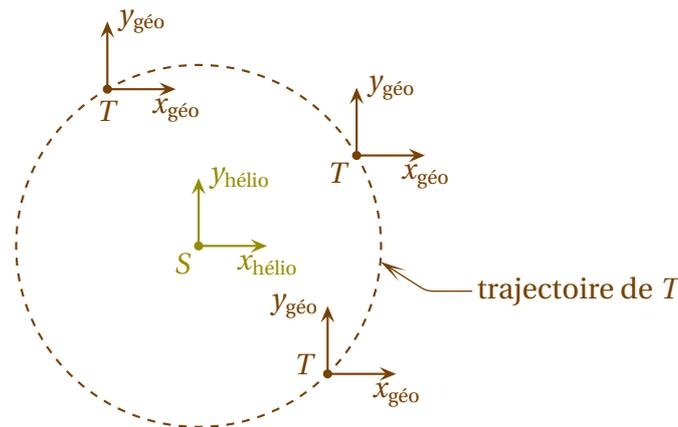
6. Si quelqu'un possède cette information, l'auteur est preneur car il cherche depuis qu'il a commencé à enseigner, en 2001.

★ référentiel géocentrique

**Définition**  
 Le *référentiel géocentrique* est le référentiel centré sur centre de masse de la Terre et dont les axes restent parallèles à ceux du référentiel de COPERNIC.

**Bon à retenir**  
 Le référentiel terrestre est en translation circulaire par rapport au référentiel héliocentrique d'une période d'un an.

- ⊘ Ne pas confondre translation circulaire et rotation !
- ⚡ Ci-dessous est représenté le référentiel terrestre à différents instants (séparés de plusieurs mois !)



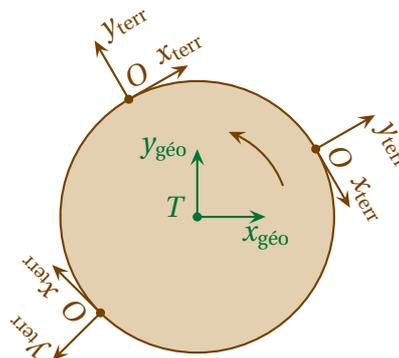
**Bon à retenir**  
 Le référentiel géocentrique est adapté à l'étude de corps céleste sur des durées bien inférieures à 1 an.

★ référentiel terrestre

- ⚡ Autant il n'y a qu'un seul référentiel de COPERNIC, un seul référentiel héliocentrique, un seul référentiel géocentrique... autant il existe autant de référentiels terrestres que de situations particulières.

**Définition**  
 Un référentiel est dit *terrestre* s'il est lié la surface de la Terre, *i.e.* si son centre et ses axes sont immobiles par rapport à la Terre.

- ⚡ Ce n'est ni plus ni moins que le fameux « référentiel lié au laboratoire ».
- ⚡ Le centre est souvent au niveau de la surface de la Terre, du moins lorsque l'étude porte sur un dispositif proche de la surface de la Terre. Ainsi, vu de dessus à des instants différents séparés de quelques heures :



- ✧ Le référentiel terrestre n'est pas en translation par rapport au référentiel de COPERNIC, il n'est donc pas galiléen et, en plus, nous ne pouvons pas encore faire de la mécanique dedans car il tourne.

### I.4.iii – pas de non galiléennité excessive

- ✧ Il est tout à fait légitime de parler de référentiel plus ou moins non galiléen car il est possible de chiffrer cette non galiléennité.
- ✧ Pour cela nous allons comparer la norme de la force d'inertie  $\|\vec{f}_{ie}\| = m a_e$  à celle de la force principale subie par le corps considéré.
- ✧ Dans le cas d'un mouvement au niveau de la surface de la Terre, comparons force d'inertie et poids  $\|\vec{P}\| = m g$ , ce qui revient à comparer  $a_e$  et  $g$ .
- ✧ Reste à évaluer  $a_e$ .

#### ★ référentiel héliocentrique

- ✧ Regardons ce que cela donne avec le référentiel héliocentrique.
- ✧ La trajectoire de  $O$  est circulaire de rayon  $R = 7,5 \cdot 10^5$  km et de période 12 ans. Cela donne :

$$a(O) = R\omega^2 = R \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 \simeq 2 \times 10^{-7} \text{ m.s}^{-2} \quad (\text{I.29})$$

- ✧ Autant dire que le référentiel héliocentrique est galiléen. Du moins il l'est au dix millionième près !
- ✧ Une autre façon de voir les choses est de dire que si le référentiel héliocentrique n'est pas galiléen, c'est à cause de Jupiter. En conséquence de quoi, supposer le référentiel héliocentrique revient à négliger l'influence de Jupiter. Ce n'est peut-être pas forcément toujours de bon aloi, surtout si Jupiter a eu le temps de se rapprocher de l'objet d'étude.

#### ★ référentiel géocentrique

- ✧ Pour le référentiel géocentrique,  $T$  décrit une trajectoire circulaire de rayon  $R = 150 \cdot 10^9$  m en 1,0 an. Cela donne de même :

$$a(T) = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m.s}^{-2} = 10^{-2} \text{ m.s}^{-2} \quad (\text{I.30})$$

- ✧ Là, l'approximation référentiel galiléen se fait au millième. C'est une excellente première approximation et nous la ferons systématiquement, sauf précision contraire ou évolution à l'échelle de l'orbite terrestre autour du Soleil.
- ✧ Comme précédemment, pour que le référentiel géocentrique soit parfaitement galiléen il faudrait pouvoir négliger l'influence du Soleil (ou, ce qui revient au même) dire que le Soleil n'existe pas.
- ✧ Or un phénomène bien connu est causé en grande partie par le Soleil : les marées. Cela signifie que pour ces dernières, nous **devons** tenir compte du caractère non galiléen du référentiel géocentrique. Nous y reviendrons à la fin de ce chapitre.

#### ★ référentiel terrestre

- ✧ Pour le référentiel terrestre, en prenant  $O$  au niveau de l'équateur, celui-ci décrit une trajectoire circulaire de rayon  $R = 6,4 \cdot 10^6$  m en 1,0 jour sidéral = 86 164 s. Cela donne :

$$a(O) = R\omega^2 \simeq 10^{-1} \text{ m.s}^{-2} \ll g \quad (\text{I.31})$$

- ✧ Nous pouvons donc dire que, sauf étude particulière (à l'échelle de la Terre par exemple), le référentiel terrestre est bien galiléen.

 Bien que nous ne l'ayons pas justifié encore pour un référentiel en rotation, le fait de calculer la force d'inertie d'entraînement de la manière précédente reste juste.

## I-5 – Étudier une situation

- ✧ Il n'y a pour ainsi dire *aucune* différence entre mener une étude dans un référentiel galiléen et mener une étude dans un référentiel non galiléen.
- ✧ La *seule* chose qui différencie les deux est que, dans le cas d'un référentiel non galiléen, il **faut** rajouter les forces d'inertie dans la liste des forces.

### I-5.i – analyse physique

- ✧ Il faut tout d'abord choisir le référentiel d'étude. Comme nous l'avons dit en introduction ce sera :
  - soit un référentiel naturel (voiture, train, manège...);
  - soit un référentiel imposé (bâti d'un sismographe...).
- ✧ Il faut ensuite bien voir en quoi ce référentiel est galiléen ou non (insistons : *a priori* le référentiel terrestre **est** galiléen).
- ✧ Une fois le référentiel choisi, **il faut s'y tenir et raisonner uniquement par rapport à lui**. Pour cela, il faut **refaire** un schéma comportant les axes de ce référentiel « droits » par rapport à la feuille.
- ✧ La suite est alors usuelle :
  - décrire qualitativement le mouvement dans le référentiel;
  - préciser le nombre de degrés de liberté et le nombre de degrés de description;
  - repérer si l'évolution est libre, forcée, conservative...;
  - identifier les paramètres caractéristiques (ou grandeurs pertinentes) du problème.

### I-5.ii – analyse technique

- ✧ Aucune différence ici par rapport à une étude dans un référentiel galiléen.
- ✧ Le repérage doit être le plus naturel possible étant donné l'étude qualitative faite avant (et notamment étant donné la trajectoire possible du ou des points matériels).
- ✧ Ensuite il faut choisir une approche : en terme de force ou d'énergie sachant que la force d'inertie d'entraînement n'est *a priori* pas conservative.

### I-5.iii – danger à éviter

- ✧ Le plus difficile dans les problèmes avec changement de référentiels reste l'interprétation.
- ✧ Tant que l'étude se fait dans un et **un seul** référentiel, en général tout va bien.
- ✧ Le problème vient du fait que le réflexe naturel (!) consiste à introduire des forces d'inertie dans les référentiels galiléens.



#### Bon à retenir

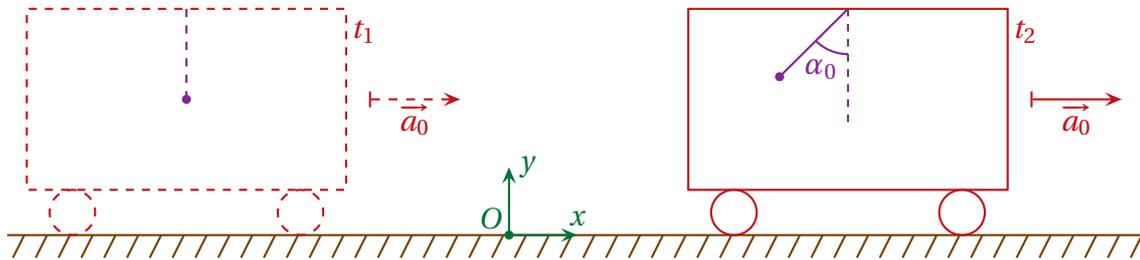
§ Il n'y a pas de force d'inertie dans les référentiels galiléens.

- ✧ Nous montrerons dans les exemples qui suivent à quel point les interprétations peuvent être piégeuses.
- ✧ En conséquence de quoi il faut se garder de toute interprétation hâtive.

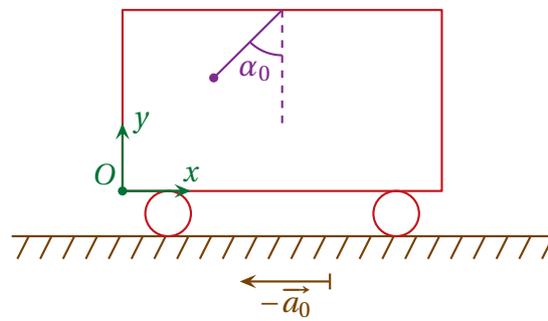
## I-6 – Pendule simple dans un train

### I-6.i – description – analyse

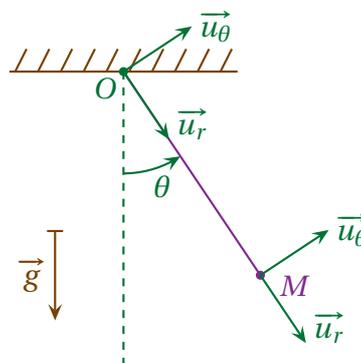
- ✧ Considérons un wagon au plafond duquel est accroché un pendule simple.
- ✧ Ce wagon accélère avec une accélération constante  $\vec{a}_0$ .
- ✧ Avec quel angle  $\alpha_0$  par rapport à la verticale va se stabiliser le pendule ?



- ✧ Étant donné que le pendule est accroché au wagon, mieux vaut prendre ce dernier pour référentiel... non galiléen.
- ✧ Commençons par redessiner la situation dans ce référentiel.



- ✧ Pour l'analyse physique :
  - il y a trois degrés de liberté mais en admettant que le fil soit tendu, il n'en reste que 2 ;
  - toutes les forces étant coplanaires à la vitesse initiale (nulle) le mouvement sera plan : il ne reste qu'un degré de description, la trajectoire sera circulaire ;
  - les grandeurs pertinentes :  $m$  pour la masse,  $\ell$  pour la géométrie,  $g$  pour l'action de la pesanteur,  $a_0$  pour l'action de la force d'inertie d'entraînement.
- ✧ Analyse technique :
  - le repérage cylindro-polaire va de soi ;
  - ici, comme nous ne connaissons pas d'énergie potentielle associée à la force d'inertie d'entraînement et bien que le mouvement soit libre, nous allons utiliser une approche en terme de forces.
- ✧ Nous pouvons donc représenter la situation *physique* avec le schéma ci-dessous.

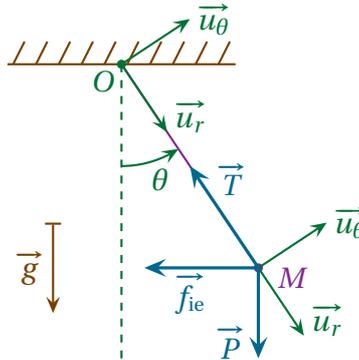


### I-6-ii – équation du mouvement dans $\mathcal{R}$

⇨ Listons les forces qui s'exercent sur le système  $\{ m \}$  dans le référentiel *non galiléen* lié au wagon :

- force à distance : le poids  $\vec{P} = m \vec{g} = m g (\cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta)$ ;
- force de contact :
  - la tension exercée par le fil  $\vec{T} = -T \vec{u}_{\text{sortant}} = -T \vec{u}_r$ ;
  - les frottements sont négligés;
- la force d'inertie d'entraînement :  $\vec{f}_{ie} = -m \vec{a}_0 = m a_0 (-\sin\theta \vec{u}_r - \cos\theta \vec{u}_\theta)$ .

5



⇨ Le « PFD » s'écrit donc :

6

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{f}_{ie} = m \vec{a} \quad (\text{I.32})$$

$$= m (-\ell \dot{\theta}^2(t) \vec{u}_r + \ell \ddot{\theta}(t) \vec{u}_\theta) \quad (\text{I.33})$$

⇨ Et en projection sur  $\vec{u}_\theta$  (de manière à nous débarrasser de  $T$  inconnu) nous obtenons :

$$-m g \sin\theta + 0 - m a_0 \cos\theta = m \ell \ddot{\theta} \quad (\text{I.34})$$

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{\ell} \sin\theta(t) + \frac{a_0}{\ell} \cos\theta(t) = 0 \quad (\text{I.35})$$

⇨ La position d'équilibre *par rapport au wagon* impose donc :

$$\ddot{\theta}(t) = 0 \quad (\text{I.36})$$

$$\frac{g}{\ell} \sin\alpha_0 + \frac{a_0}{\ell} \cos\alpha_0 = 0 \quad (\text{I.37})$$

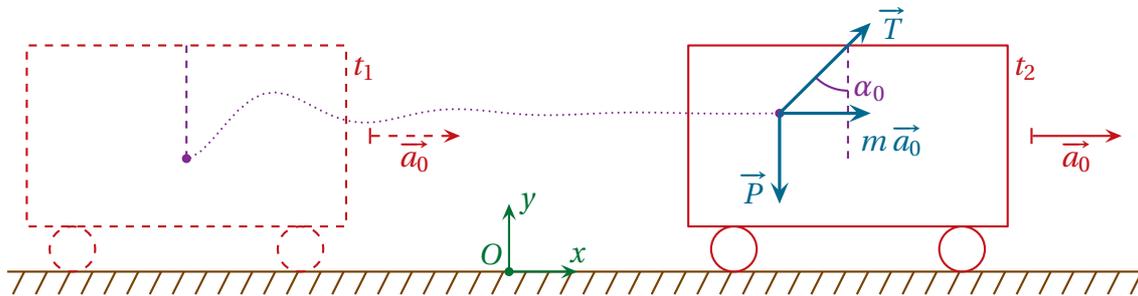
$$\tan\alpha_0 = -\frac{a_0}{g} \quad (\text{I.38})$$

⇨ Interprétation du résultat :

- $\alpha_0 < 0$ , ce qui est intuitif compte tenu de la force d'inertie et de l'algébrisation de la rotation ;
- la masse  $m$  n'intervient pas, ce qui est normal car les masses du poids et de la force d'inertie se simplifient ;
- la longueur  $\ell$  n'intervient pas ! Nous aurions pu le deviner *a priori* avec une analyse dimensionnelle. Comme les grandeurs pertinentes sont  $m$ ,  $\ell$ ,  $g$  et  $a_0$ , la seule manière de fabriquer une grandeur sans dimension (comme  $\alpha_0$ ) est d'utiliser le rapport  $\frac{g}{a_0}$  (ou n'importe laquelle de ses puissances) donc sans utiliser  $\ell$ .

### I.6.iii – vision dans $\tilde{\mathcal{R}}$ de l'équilibre dans $\mathcal{R}$

- ✧ Dans le référentiel terrestre  $\tilde{\mathcal{R}}$  le pendule n'est certainement pas à l'équilibre! En fait, comme il est attaché au wagon, si ce dernier a une accélération  $\vec{a}_0$  alors le pendule immobile *par rapport au wagon* doit aussi avoir une accélération  $\vec{a}_0$  par rapport au référentiel terrestre.

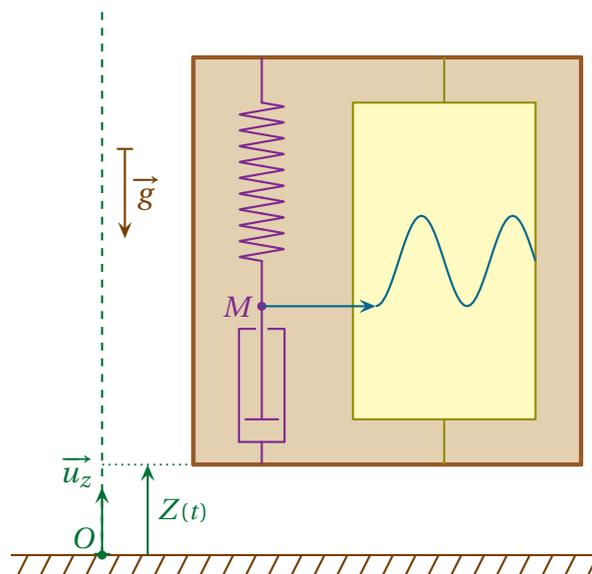


- ✧ Il faut aussi remarquer que, pour que le pendule se stabilise par rapport au wagon, des forces de frottement sont nécessaires!
- ✧ Les avoir négligées change sans aucun doute l'équation d'évolution (et le fait que le pendule se stabilise) mais ne change pas la position d'équilibre, pourvu que les forces de frottement soient nulle lorsque  $\theta = C^{\text{te}}$ !

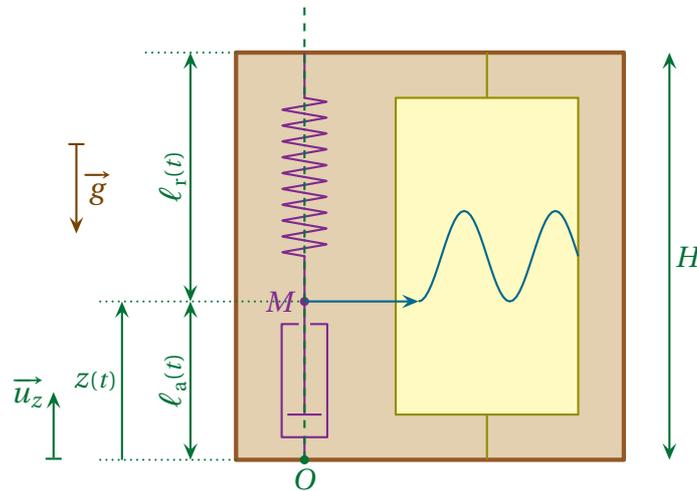
## I.7 – Sismographe

### I.7.i – description – analyse

- ✧ Un sismographe est constitué d'une boîte rigide dans laquelle le mouvement un stylet enregistre le mouvement qu'il a par rapport à la boîte. Le stylet est relié à un ressort et un amortisseur.
- ✧ La boîte est mise en mouvement vertical par rapport au référentiel terrestre considéré comme galiléen. La cote de la boîte est notée  $Z(t)$ .



- ✧ Étant donné que le mouvement intéressant est le mouvement du stylet *par rapport à la boîte*, nous allons tout naturellement choisir cette dernière comme référentiel.
- ✧ Redessinons la situation dans le référentiel de la boîte : cette dernière est donc immobile.



✧ Analyse physique :

- la masse est mise en mouvement par les forces d'inertie : elle va osciller et être amortie, c'est un oscillateur mécanique « tout simple » ;
- nous n'allons considérer ici qu'un seul degré de description à savoir le mouvement vertical de la masse ;
- étant donnée l'excitation (via la force d'inertie), le régime ici n'est pas libre mais forcé ;
- les grandeurs pertinentes sont  $m$  pour la masse,  $H$  pour la géométrie,  $k$ ,  $\ell_0$  pour le ressort,  $h$  pour l'amortisseur,  $g$  pour la pesanteur,  $\ddot{Z}(t)$  pour les forces d'inertie.

✧ Analyse technique :

- le repérage va à peu près de soi : l'origine est prise sur l'axe du mouvement avec un repérage ascendant ;
- nous allons utiliser l'approche en terme de force étant donné que le mouvement n'est pas conservatif.

**I.7.ii – équation du mouvement**

✧ La liste des forces qui s'exercent sur  $\{ m \}$  dans le référentiel de la boîte est :

- force à distance : le poids

$$\vec{P} = m \vec{g} = -m g \vec{u}_z \tag{I.39}$$

- force de contact :

- la force exercée par le ressort :

$$\vec{f}_{\text{ressort}} = -k(\ell_r(t) - \ell_0) \vec{u}_{\text{sort, res}} = -k(\ell_r(t) - \ell_0) (-\vec{u}_z) \tag{I.40}$$

- la force exercée par l'amortisseur :

$$\vec{f}_{\text{amort}} = -h \frac{d\ell_a(t)}{dt} \vec{u}_{\text{sort, am}} = -h \frac{d\ell_a(t)}{dt} \vec{u}_z \tag{I.41}$$

- les autres forces de frottement (air...) sont négligées ;

- la force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{f}_{\text{ie}} = -m \vec{a}_{|\mathcal{R}}(O) = -m \ddot{Z}(t) \vec{u}_z \tag{I.42}$$

✧ Le « PFD » s'écrit donc :

5

6

$$\vec{P} + \vec{f}_{\text{ressort}} + \vec{f}_{\text{amort}} + \vec{f}_{\text{ie}} = m \vec{a}(t) \quad (\text{I.43})$$

$$-m g \vec{u}_z + k(\ell_r(t) - \ell_0) \vec{u}_z - h \frac{d\ell_a(t)}{dt} \vec{u}_z - m \ddot{Z}(t) \vec{u}_z = m \ddot{z}(t) \vec{u}_z \quad (\text{I.44})$$

✧ Nous voulons une équation en  $z(t)$  donc nous allons devoir « éliminer »  $\ell_r(t)$  et  $\ell_a(t)$ .

✧ Géométriquement, nous avons :

$$\ell_r(t) = H - z(t) \quad \text{et} \quad \ell_a(t) = z(t) \quad (\text{I.45})$$

✧ Nous obtenons ainsi en projection sur  $\vec{u}_z$  :

$$-m g + k(H - z(t) - \ell_0) - h \frac{dz}{dt}(t) - m \ddot{Z}(t) = m \frac{d^2 z}{dt^2}(t) \quad (\text{I.46})$$

✧ Et en réarrangeant les termes :

$$\frac{d^2 z}{dt^2}(t) + \frac{h}{m} \frac{dz}{dt}(t) + \frac{k}{m} z(t) = -\ddot{Z}(t) + \frac{k}{m} (H - \ell_0) - g \quad (\text{I.47})$$

### I.7.iii – lecture

✧ L'équation différentielle obtenue est bien homogène (ouf!)

✧ Nous pouvons constater que, sous forme canonique, les trois coefficients de  $z(t)$ ,  $\frac{dz}{dt}(t)$  et  $\frac{d^2 z}{dt^2}(t)$  sont de même signe : la solution ne diverge pas, c'est rassurant.

✧ Du côté des sources (le second membre) :

→ il y a un terme d'excitation  $-\ddot{Z}(t)$  ;

→ il y a un terme correspondant à la position d'équilibre, dont nous pouvons voir qu'elle est d'autant plus basse que  $H$  est petit,  $\ell_0$  est grand ou  $g$  est grand, normal quoi !

✧ Enfin, l'équation obtenue est une équation **linéaire** ce qui signifie que pour la résoudre, nous allons pouvoir décomposer l'excitation en ses différentes harmoniques et résoudre morceau par morceau en RSE.

## II – Référentiel en rotation pure et uniforme

### II.1 – Définir deux référentiels en rotation pure

#### II.1.i – c'est tout simple



#### Définition

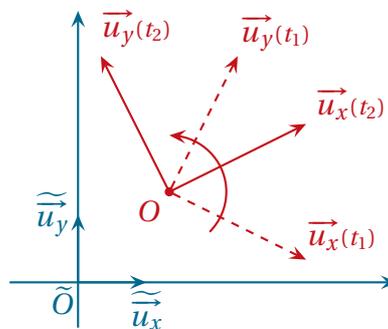
Un référentiel  $\mathcal{R}$  est en *rotation pure* par rapport à un autre référentiel  $\tilde{\mathcal{R}}$  lorsque le centre du premier est immobile par rapport au deuxième.

✧ Des exemples :

- un référentiel lié à un manège qui tourne par rapport au référentiel terrestre ;
- un référentiel terrestre centré sur l'axe de rotation de la Terre qui tourne par rapport au référentiel géocentrique.

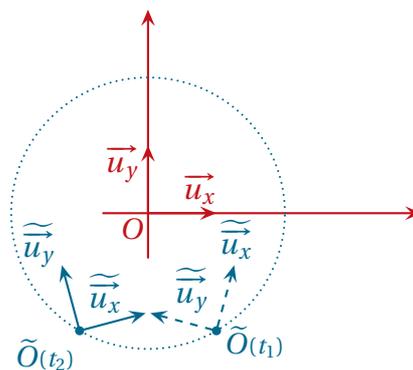
✧ Un référentiel terrestre centré sur la surface de la Terre a son centre qui possède une trajectoire circulaire dans le référentiel géocentrique : il n'est donc pas en rotation *pure*.

✧ Voilà comment cela se représente.



✧ Attention, si un référentiel  $\mathcal{R}$  est en rotation pure par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ , le référentiel  $\tilde{\mathcal{R}}$  n'est pas forcément en rotation pure par rapport à  $\mathcal{R}$ .

✧ Refaisons le schéma précédent par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ .



#### Bon à retenir

Deux référentiels sont en rotation pure l'un par rapport à l'autre si leurs centres sont confondus.

✧ Dans la suite, nous prendrons toujours  $O = \tilde{O}$  car :

- c'est plus facile techniquement ;
- c'est plus naturel : si le point  $O$ , centre de la rotation du référentiel  $\mathcal{R}$ , est immobile par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ , c'est qu'il est physiquement et intrinsèquement particulier (pensez au centre de rotation d'un manège) et mérite donc d'être particularisé en étant *aussi* le centre de  $\tilde{\mathcal{R}}$ .

- ✧ De même, pour l'axe de rotation qui constitue un axe *physiquement* privilégié, nous allons *techniquement* le privilégier.



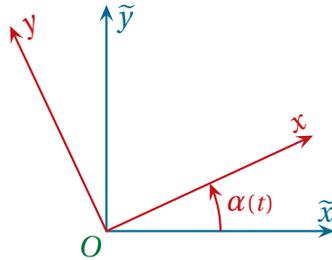
### Bon à retenir

⌘ Lorsque la rotation se fait autour d'un axe unique, cet axe est choisi comme l'un des axes du repère.

- ✧ La plupart du temps ce sera l'axe  $\vec{u}_z$ .

## II.1.ii – rotation uniforme

- ✧ Étant donné que nous avons choisi d'étudier deux référentiels de mêmes centres  $\tilde{O}$  et  $O$ , la seule chose qui reste à faire pour décrire entièrement leurs positions relatives, c'est de préciser l'angle  $\alpha(t)$  entre les deux.



### Bon à retenir

⌘ Pour deux référentiels en rotation pure, la connaissance du seul angle  $\alpha(t)$  entre les deux permet de décrire entièrement le mouvement de l'un par rapport à l'autre.



### Définition

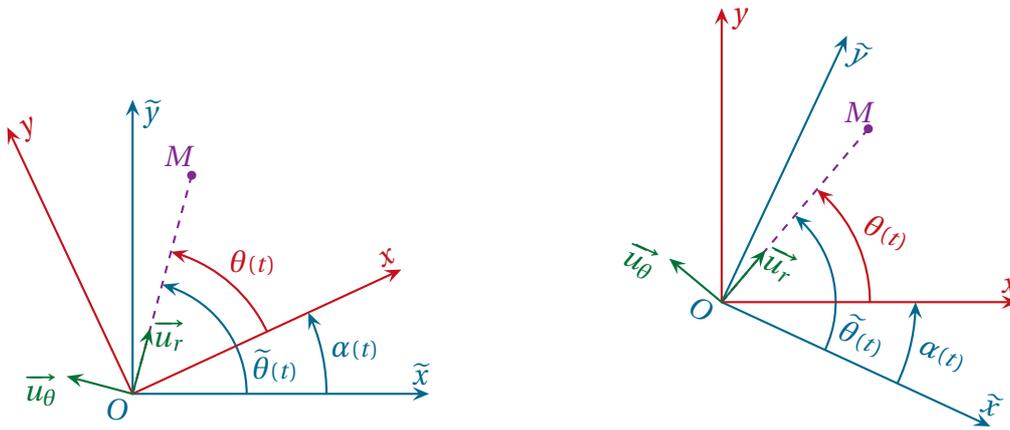
Deux référentiels sont en *rotation uniforme* si la vitesse angulaire de rotation de l'un par rapport à l'autre est constante.

- ✧ Dans cette partie, nous étudierons donc le cas où  $\dot{\alpha}(t) = C^{\text{te}}$ , ce que nous noterons  $\omega \stackrel{\text{not}}{=} \dot{\alpha}(t)$ .

## II.2 – Description du mouvement dans les deux référentiels

### II.2.i – poser les notations

- ✧ Cette fois, et contrairement au cas où les deux référentiels étaient en translation, nous n'avons pas à décrire le mouvement de  $O$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  puisqu'il est immobile. Seul compte la connaissance de  $\omega$ .
- ✧ En revanche, il va falloir décrire le mouvement de  $M$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{R}$ .
- ✧ Comment décrire la position de  $M$  par rapport aux deux référentiels  $\tilde{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{R}$  ?
- ✧ Étant donné qu'il est question de *rotation*, il semble plus naturel de choisir une description cylindro-polaire.
- ✧ Faisons un schéma, ou plutôt deux, histoire de mieux voir : un dans le référentiel  $\tilde{\mathcal{R}}$  et un dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .



✧ L'avantage c'est que les **vecteurs** décrivant le mouvement dans  $\tilde{\mathcal{R}}$  et dans  $\mathcal{R}$  sont les mêmes, à savoir  $(\vec{u}_r(t), \vec{u}_\theta(t), \vec{u}_z)$ . Ce sont, certes, des vecteurs fonction du temps, mais au moins ce sont les mêmes.

✧ Il va falloir, en revanche, faire très attention à la manière dont nous allons les dériver.

✧ Description du mouvement de  $M$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ . Les coordonnées sont  $(r(t), \tilde{\theta}(t), z(t))$ .

→ vecteur position :

$$\vec{OM}(t) = r(t) \vec{u}_r(t) + z(t) \vec{u}_z \quad (\text{II.1})$$

→ vecteur vitesse :

$$\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M, t) = \dot{r}(t) \vec{u}_r(t) + r(t) \dot{\tilde{\theta}}(t) \vec{u}_\theta(t) + \dot{z}(t) \vec{u}_z \quad (\text{II.2})$$

→ vecteur accélération :

$$\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M, t) = \left( \ddot{r}(t) - r(t) \dot{\tilde{\theta}}^2(t) \right) \vec{u}_r(t) + \left( 2 \dot{r}(t) \dot{\tilde{\theta}}(t) + r(t) \ddot{\tilde{\theta}}(t) \right) \vec{u}_\theta(t) + \ddot{z}(t) \vec{u}_z \quad (\text{II.3})$$

✧ Description du mouvement de  $M$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . Les coordonnées sont  $(r(t), \theta(t), z(t))$ .

→ vecteur position :

$$\vec{OM}(t) = r(t) \vec{u}_r(t) + z(t) \vec{u}_z \quad (\text{II.4})$$

→ vecteur vitesse :

$$\vec{v}_{|\mathcal{R}}(t) = \dot{r}(M, t) \vec{u}_r(t) + r(t) \dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta(t) + \dot{z}(t) \vec{u}_z \quad (\text{II.5})$$

→ vecteur accélération :

$$\vec{a}_{|\mathcal{R}}(M, t) = \left( \ddot{r}(t) - r(t) \dot{\theta}^2(t) \right) \vec{u}_r(t) + \left( 2 \dot{r}(t) \dot{\theta}(t) + r(t) \ddot{\theta}(t) \right) \vec{u}_\theta(t) + \ddot{z}(t) \vec{u}_z \quad (\text{II.6})$$

✧ Pour la position, il n'y a rien à faire, le vecteur position est le même :

$$r(t) \vec{u}_r + z(t) \vec{u}_z = r(t) \vec{u}_r + z(t) \vec{u}_z \quad (\text{II.7})$$

## II·2·ii– vitesse

✧ Écrivons la vitesse de  $M$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  et remplaçons  $\dot{\tilde{\theta}}(t)$  par  $\dot{\tilde{\theta}}(t) = \dot{\theta}(t) + \dot{\alpha}(t)$ . N'oublions pas que  $\dot{\alpha}(t) \stackrel{\text{not}}{=} \omega = C^{\text{te}}$ .

$$\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}(M,t)} = \dot{r}(t) \vec{u}_r(t) + r(t) \dot{\tilde{\theta}}(t) \vec{u}_\theta(t) + \dot{z}(t) \vec{u}_z \quad (\text{II.8})$$

$$= \dot{r}(t) \vec{u}_r(t) + r(t) \times (\dot{\theta}(t) + \omega) \times \vec{u}_\theta(t) + \dot{z}(t) \vec{u}_z \quad (\text{II.9})$$

$$= \left( \dot{r}(t) \vec{u}_r(t) + r(t) \dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta(t) + \dot{z}(t) \vec{u}_z \right) + r(t) \omega \vec{u}_\theta(t) \quad (\text{II.10})$$

$$= \vec{v}_{|\mathcal{R}(M,t)} + r(t) \omega \vec{u}_\theta(t) \quad (\text{II.11})$$

✧ Nous pouvons constater, sans trop de surprise que :

- les deux vitesses  $\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}(M,t)}$  et  $\vec{v}_{|\mathcal{R}(M,t)}$  sont bien différentes, conformément au fait que les vitesses sont des grandeurs relatives ;
- la différence entre les deux vitesses  $\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}(M,t)}$  et  $\vec{v}_{|\mathcal{R}(M,t)}$  est  $r(t) \omega \vec{u}_\theta(t)$ , *i.e.* dépend du mouvement de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  via  $\omega$ .

✧ Mais nous pouvons aussi constater, avec un peu plus de surprise que, contrairement au cas où les référentiels étaient en translation, la différence entre les deux vitesses  $\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}(M,t)}$  et  $\vec{v}_{|\mathcal{R}(M,t)}$  dépend aussi de  $r(t)$  et  $\vec{u}_\theta(t)$ , *i.e.* de la **position de M**.

### II.2.iii – accélération

✧ Partons de l'expression de l'accélération de  $M$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  et, comme pour la vitesse, remplaçons  $\tilde{\theta}(t)$  par  $\theta(t) + \alpha(t)$ . N'oublions pas que  $\dot{\alpha}(t) = \omega = C^{\text{te}}$ .

$$\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}(M,t)} = \left( \ddot{r}(t) - r(t) \dot{\tilde{\theta}}^2(t) \right) \vec{u}_r(t) + \left( 2 \dot{r}(t) \dot{\tilde{\theta}}(t) + r(t) \ddot{\tilde{\theta}}(t) \right) \vec{u}_\theta(t) + \ddot{z}(t) \vec{u}_z \quad (\text{II.12})$$

$$= \left( \ddot{r}(t) - r(t) (\dot{\theta}(t) + \omega)^2 \right) \vec{u}_r(t) + \left( 2 \dot{r}(t) (\dot{\theta}(t) + \omega) + r(t) (\ddot{\theta}(t) + 0) \right) \vec{u}_\theta(t) + \ddot{z}(t) \vec{u}_z \quad (\text{II.13})$$

$$= \left( \ddot{r}(t) - r(t) \dot{\theta}^2(t) - r(t) \omega^2 - 2 r(t) \dot{\theta}(t) \omega \right) \vec{u}_r(t) \dots \dots + \left( 2 \dot{r}(t) \dot{\theta}(t) + 2 \dot{r}(t) \omega + r(t) \ddot{\theta}(t) \right) \vec{u}_\theta(t) + \ddot{z}(t) \vec{u}_z \quad (\text{II.14})$$

$$= \left( \ddot{r}(t) - r(t) \dot{\theta}^2(t) \right) \vec{u}_r(t) + \left( 2 \dot{r}(t) \dot{\theta}(t) + r(t) \ddot{\theta}(t) \right) \vec{u}_\theta(t) + \ddot{z}(t) \vec{u}_z \dots \dots - r(t) \omega^2 \vec{u}_r(t) - 2 r(t) \dot{\theta}(t) \omega \vec{u}_r(t) + 2 \dot{r}(t) \omega \vec{u}_\theta \quad (\text{II.15})$$

$$= \vec{a}_{|\mathcal{R}(M,t)} - r(t) \omega^2 \vec{u}_r(t) + 2 \omega \left( -r(t) \dot{\theta}(t) \vec{u}_r(t) + \dot{r}(t) \vec{u}_\theta \right) \quad (\text{II.16})$$

✧ Nous pouvons faire les mêmes constatations que pour la vitesse :

- les accélérations par rapport aux deux référentiels sont différentes ;
- la différence dépend de  $\omega$  donc du mouvement de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ .

✧ La différence entre les deux accélérations se sépare en deux termes de nature physique différente :

- le premier terme  $-r(t) \omega^2 \vec{u}_r(t)$  dépend de  $\omega$ , mais aussi de la **position** de  $M$ , comme pour la vitesse ;
- le second terme  $-2 \omega \left( r(t) \dot{\theta}(t) \vec{u}_r(t) + \dot{r}(t) \vec{u}_\theta \right)$  dépend également de  $\omega$ , mais surtout dépend de la **vitesse de M par rapport à  $\mathcal{R}$** . C'est un terme assez étrange en fait.

### II.2.iv – écriture intrinsèque

#### ★ objectif

✧ Dans ce paragraphe, nous allons chercher une écriture des lois de composition qui ne dépend pas de la manière de repérer le point  $M$ .

- ✧ En effet, nous avons repéré  $M$  avec les coordonnées cylindro-polaires, car la vision simultanée par rapport aux deux référentiels faisaient apparaître une rotation naturelle. Mais, plus tard, lorsque nous nous contenterons d'étudier la situation dans un seul des deux référentiels,  $\mathcal{R}$ , l'aspect « rotation » ne sera peut-être plus naturelle et nous utiliserons alors parfois les coordonnées cartésiennes.
- ✧ Nous voulons donc écrire les lois de composition en fonction de  $\vec{OM}(t)$ ,  $\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t)$ ,  $\vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)$  et du mouvement de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ .
- ✧ Dans la partie précédente, le mouvement de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  s'écrivait simplement de manière intrinsèque avec le mouvement de  $O$  :  $\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t)$  et  $\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t)$ .
- ✧ Sauf que désormais, le mouvement est une rotation. Il faut donc d'abord chercher à décrire de manière intrinsèque la rotation de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ .

### ★ décrire la rotation

- ✧ Pour décrire la rotation, il faut plusieurs choses :
  - la position de l'axe de rotation (ou l'axe instantané s'il change à chaque instant) ;
  - la direction de l'axe de rotation ;
  - le sens de la rotation ;
  - la vitesse angulaire de rotation.
- ✧ Comme nous nous limitons au cas où  $\mathcal{R}$  est en rotation pure par rapport  $\tilde{\mathcal{R}}$ , nous n'avons pas besoin de préciser la position de l'axe de rotation : nous savons déjà qu'il passe par  $O$ .
- ✧ Il ne reste plus qu'à définir les trois autres caractéristiques. Nous le ferons par un vecteur qui est appelé « taux de rotation » en SI.

#### Définition

Le **vecteur rotation**  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}}$  caractérise la rotation de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ . Il est tel que :

- sa direction soit celle de l'axe de rotation ;
- son sens est donné par la règle de la main droite ;
- sa norme est la vitesse angulaire  $\Omega(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt}$  où  $\alpha$  est l'angle repérant la position de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ .



#### Bon à retenir

*Du point de vue dimensionnel*

$$\left[ \left\| \vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \right\| \right] = \text{rad.s}^{-1}$$

- ✧ Pour nous, le vecteur rotation  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}}$  sera quasiment toujours porté par  $\vec{u}_z$ .



#### Bon à retenir

RÈGLE DE LA MAIN DROITE

*En fermant légèrement la main (comme pour tenir un bâton) et en tenant le pouce en l'air, les doigts indiquent le sens de rotation et le pouce le sens du vecteur correspondant à cette rotation.*

- ✧ En fait, ce vecteur rotation ressemble, comme deux gouttes d'eau, au vecteur rotation utilisé pour les solides tournants.

## ★ réécrire la loi de composition des vitesses

**Loi**

La loi de composition des vitesses s'écrit, entre  $\tilde{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{R}$  en rotation pure de vecteur rotation  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  :

$$\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M, t) = \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M, t) + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{OM}$$

- ✧ Vérifions ce résultat.
- ✧ Pour l'instant, nous avons

$$\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M, t) = \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M, t) + r(t) \omega \vec{u}_\theta(t) \quad (\text{II.17})$$

- ✧ Nous savons que  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} = \omega \vec{u}_z$ .
- ✧ Calculons  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{OM}$  :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{OM} = \omega \vec{u}_z \wedge (r(t) \vec{u}_r + z(t) \vec{u}_z) = \omega r(t) \vec{u}_\theta \quad (\text{II.18})$$

- ✧ Le compte est bon.

## ★ réécrire la loi de composition des accélérations

**Loi**

La loi de composition des accélérations s'écrit entre  $\tilde{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{R}$  en rotation de vecteur rotation  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  :

$$\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M, t) = \vec{a}_{|\mathcal{R}}(M, t) - \omega^2 \vec{HM} + 2 \vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M, t) \quad \text{où}$$

$H$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe de rotation  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}}$ .

- ✧ Vérifions, là aussi.
- ✧ Nous avons

$$\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M, t) = \vec{a}_{|\mathcal{R}}(M, t) - r(t) \omega^2 \vec{u}_r(t) + 2\omega \left( -r(t) \dot{\theta}(t) \vec{u}_r(t) + \dot{r}(t) \vec{u}_\theta \right) \quad (\text{II.19})$$

- ✧ Cherchons chaque terme séparément.
- ✧ Le premier terme  $-r(t) \omega^2 \vec{u}_r(t)$  associe  $r(t)$  et  $\vec{u}_r$  : c'est presque le vecteur position. Sans le  $z(t) \vec{u}_z$ . Nous pouvons donc bien l'écrire  $-\omega^2 \vec{HM}$  où  $H$  est le projeté de  $M$  sur l'axe de  $\mathcal{R}$  portant le vecteur rotation.
- ✧ Pour le second terme, calculons  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M, t)$  :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M, t) = \omega \vec{u}_z \wedge \left( \dot{r}(t) \vec{u}_r + r(t) \dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta(t) + \dot{z}(t) \vec{u}_z \right) \quad (\text{II.20})$$

$$= \omega \dot{r}(t) \vec{u}_\theta - \omega r(t) \dot{\theta}(t) \vec{u}_r + \vec{0} \quad (\text{II.21})$$

- ☞ *Remarque.* Dans le cas où les référentiels ne sont pas en rotation pure, la projection de  $H$  doit se faire sur l'axe de  $\mathcal{R}$  **portant** le vecteur rotation, **pas** sur l'axe de rotation physique. Autrement dit, si le centre  $O$  du référentiel non galiléen n'est pas choisi sur l'axe de rotation, attention à la casse !

## ★ rappels produit vectoriel

- ✧ Car nous en aurons bien besoin !

**Loi**

Lorsque  $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ , alors :

- $\vec{c}$  est orthogonal à  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ , i.e.  $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$  et  $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$ ;
- $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  forment un trièdre direct ;
- $\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$ .

**Loi**

PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES

$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$  si et seulement si  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  sont colinéaires.

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$$

**Loi**

Avec les vecteurs d'une base orthonormée directe,  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  ou  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ , nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \vec{u}_z \\ \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_x \\ \vec{u}_z \wedge \vec{u}_x = \vec{u}_y \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = \vec{u}_z \\ \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_r \\ \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r = \vec{u}_\theta \end{array} \right.$$

**Loi**

Pour déterminer les composantes, nous avons :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -a_x b_z + a_z b_x \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

**II·2·v – écriture traditionnelle**

✧ Cela permettra de faire (un peu) d'interprétation.

## ★ lois de composition

**Loi**

La loi de composition des vitesses entre  $\tilde{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{R}$  en rotation de vecteur rotation  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  s'écrit :

$$\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M, t) = \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M, t) + \vec{v}_e(M, t) \quad \text{où :}$$

$$\vec{v}_e(M, t) = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{OM} \text{ est la } \textit{vitesse d'entraînement}.$$

**Loi**

La loi de composition des accélérations entre  $\tilde{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{R}$  en rotation de vecteur rotation  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  s'écrit :

$$\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t) = \vec{a}_{|\mathcal{R}}(M,t) + \vec{a}_e(M,t) + \vec{a}_c(M,t) \quad \text{où :}$$

- $\vec{a}_e(M,t) = -\omega^2 \overrightarrow{HM}$  avec  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe de  $\mathcal{R}$  portant le vecteur rotation est l'**accélération d'entraînement**;
- $\vec{a}_c(M,t) = 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)$  est l'**accélération de CORIOLIS**, appelée aussi **accélération complémentaire**.

⋄ Les notations ont été suffisamment bien faites pour que les résultats concernant le point coïncident fonctionnent même avec des référentiels en rotation pure. Ainsi

**Bon à retenir**

La vitesse d'entraînement est la vitesse du point coïncident avec  $M$  à l'instant  $t$ , que les référentiels soient en translation ou en rotation pure.

**Bon à retenir**

L'accélération d'entraînement est l'accélération du point coïncident avec  $M$  à l'instant  $t$ , que les référentiels soient en translation ou en rotation pure.

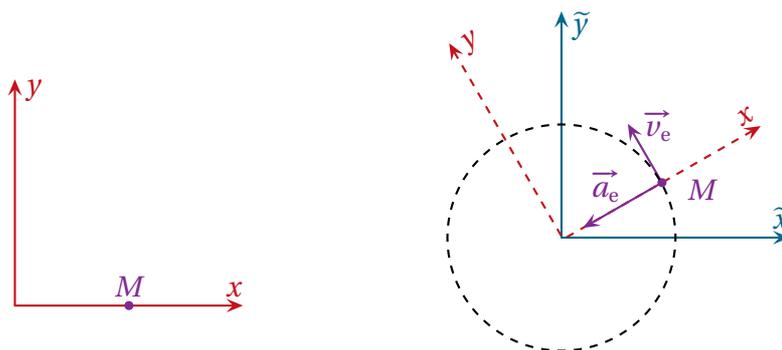
★ **vitesse et accélération d'entraînement**

⋄ L'interprétation est la même que pour les référentiels en translation.

**Bon à retenir**

La vitesse et l'accélération d'entraînement sont la vitesse et l'accélération qu'aurait  $M$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  si  $M$  était fixe par rapport à  $\mathcal{R}$ .

⋄ Regardons ce qu'il en est pour un cas simple :  $M$  est immobile par rapport à  $\mathcal{R}$ . Dans ces conditions  $\vec{v}_{M|\tilde{\mathcal{R}}}(t) = \vec{v}_e(M,t)$  et  $\vec{a}_{M|\tilde{\mathcal{R}}}(t) = \vec{a}_e(M,t)$ .



⋄ Nous pouvons constater que l'accélération d'entraînement correspond à l'accélération radiale du mouvement circulaire uniforme qu'a  $M$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ .

**Bon à retenir**

Lorsque  $\mathcal{R}$  est en rotation pure et uniforme par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ , l'accélération d'entraînement est dirigée vers l'axe de rotation, i.e. elle est **centripète**.

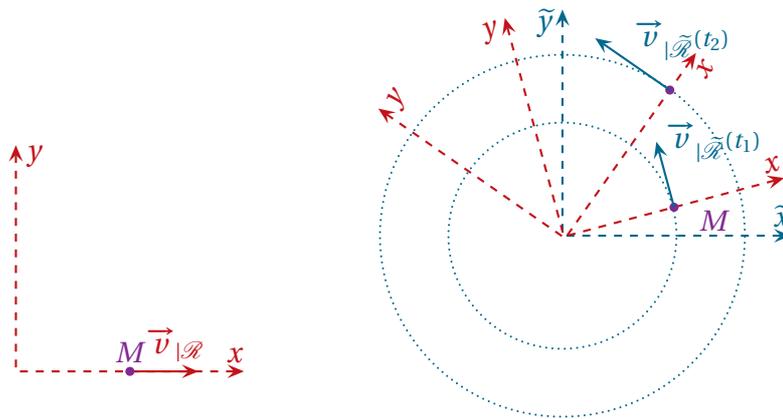
★ **accélération de CORIOLIS**

- ✧ C'est un terme plus difficile à interpréter de manière générale. Interressons-nous plutôt à deux exemples mettant en avant les effets de l'accélération de CORIOLIS suivant que la vitesse est suivant  $\vec{u}_r$  ou suivant  $\vec{u}_\theta$ .
- ✧ N'oublions pas qu'il s'agit d'un terme qui doit s'interpréter par rapport au référentiel  $\tilde{\mathcal{R}}$ .

🌀 **vitesse radiale par rapport au référentiel tournant**

- ✧ Dessinons les deux situations, dans  $\mathcal{R}$  puis dans  $\tilde{\mathcal{R}}$ .  $t_1$  et  $t_2$  sont deux instants où le point  $M$  est immobile :

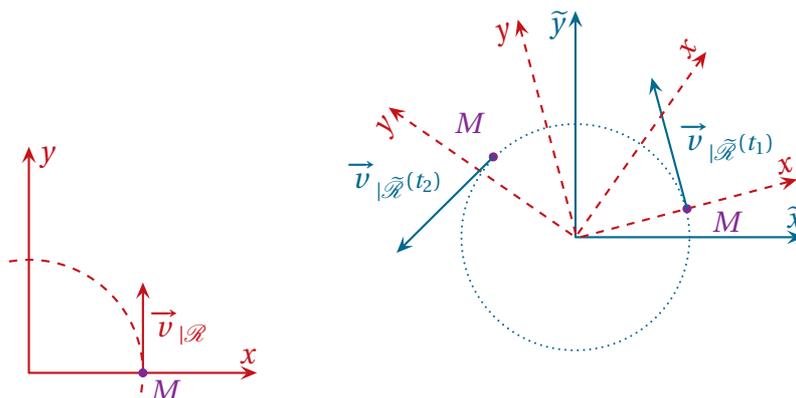
  - ➔  $t_1$  est un instant avant que  $M$  ne se mette en mouvement par rapport à  $\mathcal{R}$  ;
  - ➔  $t_2$  un instant une fois  $M$  réimmobilisé.



- ✧ Nous pouvons constater que  $\|\vec{v}_{\tilde{\mathcal{R}}}(t_2)\| > \|\vec{v}_{\tilde{\mathcal{R}}}(t_1)\|$ . L'accélération de CORIOLIS est l'accélération qui a permis l'augmentation de la vitesse tangentielle.

🌀 **vitesse orthoradiale par rapport au référentiel tournant**

- ✧ Dessinons les deux situations, dans  $\mathcal{R}$  puis dans  $\tilde{\mathcal{R}}$ .



- ✧ Nous pouvons constater que  $\|\vec{v}_{\tilde{\mathcal{R}}}(t_2)\| = \|\vec{v}_{\tilde{\mathcal{R}}}(t_1)\|$ . L'accélération de CORIOLIS aide l'accélération d'entraînement à faire tourner le point  $M$ .

## II.3 – Les lois de la mécanique

### II.3.i – le PFD change mais ne change pas

7



**Loi**

Soit  $M$  un point matériel étudié par rapport à un référentiel non galiléen  $\mathcal{R}$   
et soumis à  $\sum \vec{f}$ . Alors nous avons :

$$m \vec{a}_{|\mathcal{R}} = \sum \vec{f} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic} \quad \text{où :}$$

→  $\vec{f}_{ie} = -m \vec{a}_e(M, t)$  est la *force d'inertie d'entraînement* ;

→  $\vec{f}_{ic} = -m \vec{a}_c(M, t)$  est la *force d'inertie de CORIOLIS*.

### II.3.ii – la force d'inertie d'entraînement

8

- ✧ La force d'inertie d'entraînement s'écrit  $\vec{f}_{ie} = +m\omega^2 \overrightarrow{HM}$  où  $H$  est le projeté sur l'axe de  $\mathcal{R}$  portant le vecteur rotation.
- ✧ Cette force est orthogonale à l'axe



#### Bon à retenir

✧ La force d'inertie d'entraînement est **axifuge**.

- ☞ *Remarque.* Même si le vocabulaire officiel est « axifuge », nous emploierons souvent le mot profane « centrifuge » à la place. En effet, au sens propre, « centrifuge » peut laisser penser que le « centre de force », *i.e.* le point que nous avons noté  $H$  est le même pour tous les points  $M$ , ce qui est faux.
- ✧ Le **gros** problème, avec cette force axifuge (ou centrifuge), c'est qu'elle est souvent utilisée pour expliquer des phénomènes dans des référentiels *galiléens* où **elle n'existe pas**.
- ✧ Par exemple pour le panier à essorer la salade. Un panier tourne (vite) et de l'eau est éjectée. Mais ce n'est **pas** la force axifuge (ou centrifuge ou peu importe le nom) qui l'éjecte puisque, par rapport au référentiel galiléen dans lequel nous pouvons voir tourner le panier à salade, cette force *n'existe pas*.
- ✧ Comment expliquer, alors, que le panier à salade remplit bien son rôle lorsque nous voyons tourner la salade ? Comment expliquer l'éjection des gouttes sans force centrifuge ?
- ✧ Dans le référentiel galiléen, quand la salade tourne, s'il fallait que les gouttes d'eau restent sur les feuilles, elles auraient une trajectoire circulaire uniforme. Dans ces conditions, l'accélération (et donc la force) qu'elles subiraient serait **centripète**<sup>7</sup>. La force nécessaire à cette accélération, force exercée par la salade, serait intense (proportionnelle à  $\omega^2$ ). Or, l'eau glisse un peu sur les feuilles et les forces mises en jeu ne peuvent pas être aussi intenses. Donc les gouttes d'eau ne tournent pas avec la salade, elles vont « tout droit » dans le référentiel terrestre et finissent donc leur course contre le panier.
- ✧ Regardons ce qui se passe vraiment dans le référentiel par rapport au référentiel non galiléen.

Montrer la vidéo de la bille

- ✧ Là, oui, il y a la force centrifuge. Parce que le rail est immobile.

### II.3.iii – la force d'inertie de CORIOLIS

- ✧ Tout comme l'accélération de CORIOLIS, la force d'inertie d'entraînement est plus difficile à interpréter dans le cas général.
- ✧ Nous nous contenterons de l'interpréter au cas par cas.

7. Ou « axipète » pour suivre le vocabulaire officiel.

### II.3-iv – aspect énergétique des forces d'inertie

✧ Nous pourrions faire les mêmes démonstrations que celles faites dans le cours sur l'énergétique et nous trouverions les théorèmes suivants.

#### Loi

##### THÉORÈME DE LA PUISSANCE CINÉTIQUE

Soit  $M$  un point matériel de masse  $m$  étudié par rapport à un référentiel non galiléen  $\mathcal{R}$  et soumis à  $\sum \vec{f}$ . Alors :

$$\frac{dE_c(t)}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{f}) + \mathcal{P}(\vec{f}_{ie}) + \mathcal{P}(\vec{f}_{ic}) \quad \text{où :}$$

- $E_c(t) = \frac{1}{2} m v_{M|\mathcal{R}}^2(t)$  est l'énergie cinétique par rapport à  $\mathcal{R}$  ;
- $\mathcal{P}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)$  est la puissance fournie par  $\vec{f}$  dans  $\mathcal{R}$  ;
- $\mathcal{P}(\vec{f}_{ie})$  et  $\mathcal{P}(\vec{f}_{ic})$  sont les puissances fournies par les forces d'inertie d'entraînement et de CORIOLIS.

#### Loi

##### THÉORÈME DE LA PUISSANCE MÉCANIQUE

Soit  $M$  un point matériel de masse  $m$  étudié par rapport à un référentiel non galiléen  $\mathcal{R}$  et soumis à  $\sum \vec{f}$ . Alors :

$$\frac{dE_m(t)}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{f}_{nc}) + \mathcal{P}(\vec{f}_{ie}) + \mathcal{P}(\vec{f}_{ic}) \quad \text{où :}$$

- $E_m(t) = E_m + E_p$  est l'énergie mécanique par rapport à  $\mathcal{R}$  ;
- $\mathcal{P}(\vec{f}_{nc}) = \vec{f}_{nc} \cdot \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)$  est la puissance fournie par les forces non conservatives ;
- $\mathcal{P}(\vec{f}_{ie})$  et  $\mathcal{P}(\vec{f}_{ic})$  sont les puissances fournies par les forces d'inertie d'entraînement et de CORIOLIS.

#### Loi

##### THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE

Soit  $M$  un point matériel de masse  $m$  étudié par rapport à un référentiel non galiléen  $\mathcal{R}$  et soumis à  $\sum \vec{f}$ . Alors entre deux points de sa trajectoire, nous pouvons écrire :

$$\Delta E_c(t) = \sum W(\vec{f}) + W(\vec{f}_{ie}) + W(\vec{f}_{ic}) \quad \text{où :}$$

- $E_c(t) = \frac{1}{2} m v_{|\mathcal{R}}^2(M,t)$  est l'énergie cinétique par rapport à  $\mathcal{R}$  ;
- $W(\vec{f})$  est le travail fourni par  $\vec{f}$  dans  $\mathcal{R}$  ;
- $W(\vec{f}_{ie})$  et  $W(\vec{f}_{ic})$  sont les travaux fournis par les forces d'inertie d'entraînement et de CORIOLIS.

#### Loi

##### THÉORÈME DE L'ÉNERGIE MÉCANIQUE

Soit  $M$  un point matériel de masse  $m$  étudié par rapport à un référentiel non galiléen  $\mathcal{R}$  et soumis à  $\sum \vec{f}$ . Alors entre deux points de sa trajectoire :

$$\Delta E_m(t) = \sum W(\vec{f}_{nc}) + W(\vec{f}_{ie}) + W(\vec{f}_{ic}) \quad \text{où :}$$

- $E_m(t) = E_c + E_p$  est l'énergie mécanique par rapport à  $\mathcal{R}$  ;
- $W(\vec{f}_{nc})$  est le travail fourni par une force non conservative  $\vec{f}_{nc}$  ;
- $W(\vec{f}_{ie})$  et  $W(\vec{f}_{ic})$  sont les travaux fournis par les forces d'inertie d'entraînement et de CORIOLIS.

✧ Comme nous nous intéressons aux forces d'inertie, ces considérations énergétiques se font dans le référentiel tournant  $\mathcal{R}$ .

### ★ la force d'inertie de CORIOLIS



#### Loi

La force d'inertie de CORIOLIS ne travaille jamais.

✧ En d'autres termes la force d'inertie de CORIOLIS ne fait que dévier les points matériels.

✧ Calculons le travail élémentaire qu'elle fournit à  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  :

$$\delta W_{ic} = \vec{f}_{ic} \cdot d\vec{r} = -2m (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{v}_{|\mathcal{R}(M,t)}) \cdot \vec{v}_{|\mathcal{R}(M,t)} dt = 0 \quad (\text{II.22})$$

✧ C'est à redire de manière systématique.

### ★ la force d'inertie d'entraînement



#### Loi

La force d'inertie d'entraînement dans un référentiel  $\mathcal{R}$  en rotation pure et uniforme par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  est conservative et son énergie potentielle vaut :

$$E_{p,ie} = -\frac{1}{2} m \omega^2 H M^2 \quad \text{où :}$$

→  $\omega$  est la vitesse de rotation de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  ;

→  $H$  est le projeté de  $M$  sur l'axe de  $\mathcal{R}$  portant le vecteur de rotation.

### 🕒 démonstration

✧ Cherchons s'il existe une énergie potentielle telle que  $\delta W_{ie} = -dE_p$ .

✧ Nous avons tout d'abord

$$\vec{f}_{ie} = +m\omega^2 r \vec{u}_r \quad (\text{II.23})$$

$$d\vec{r} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z \quad (\text{II.24})$$

✧ Et ainsi

$$\delta W = \vec{f}_{ie} \cdot d\vec{r} = +m\omega^2 r dr \stackrel{?}{=} -dE_p \quad (\text{II.25})$$

✧ Cela conduit à

$$\frac{dE_p}{dr} = -m\omega^2 r \quad (\text{II.26})$$

✧ Et, avec la convention usuelle (énergie potentielle nulle lorsque la force est nulle), nous trouvons bien le résultat énoncé

$$E_p = -\frac{1}{2} m \omega^2 r^2 + C^{te} = -\frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \quad (\text{II.27})$$

**🔦 interprétation**

- ✧ L'énergie d'autant plus faible que la distance à l'axe est grande et nous savons qu'un point est « attiré » vers les zones où l'énergie est faible.
- ✧ En conséquence : l'énergie associée à la force d'inertie d'entraînement traduit bien le fait que cette force est centrifuge.

## II.4 – Référentiels galiléens

### II.4.i – une condition identique

- ✧ Nous pouvons constater que, dès lors que  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \neq \vec{0}$ , il existe des forces d'inertie d'entraînement et de CORIOLIS.



**Bon à retenir**

⚡ *Un référentiel en rotation par rapport à un référentiel galiléen ne peut pas être galiléen.*

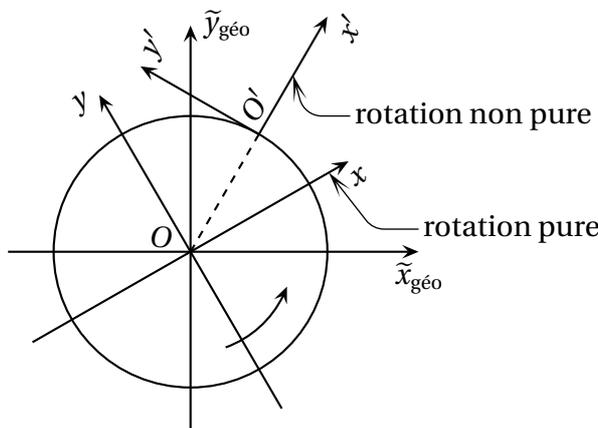


**Bon à retenir**

⚡ *Tous les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel de COPERNIC.*

### II.4.ii – le référentiel terrestre

- ✧ Considérons les référentiels héliocentrique et géocentrique galiléens (ou, du moins, suffisamment).
- ✧ Alors pour que le référentiel terrestre soit en rotation pure par rapport au référentiel géocentrique, il faut le centrer sur l'axe.



**Bon à retenir**

⚡ *Le référentiel terrestre n'est en rotation pure par rapport au référentiel géocentrique que s'il est centré sur l'axe de rotation de la Terre.*

- ✧ La force d'inertie d'entraînement s'écrit alors :

$$\vec{f}_{ie} = -m \vec{a}_e \quad \text{avec} \quad \vec{a}_e = -\omega^2 \overrightarrow{HM} \tag{II.28}$$

- ✧ Numériquement cela donne :

$$\|\vec{a}_e\| \simeq \left( \frac{2\pi}{86164} \right)^2 \times 6,4 \times 10^6 \simeq 10^{-1} \text{ m.s}^{-2} \quad (\text{II.29})$$

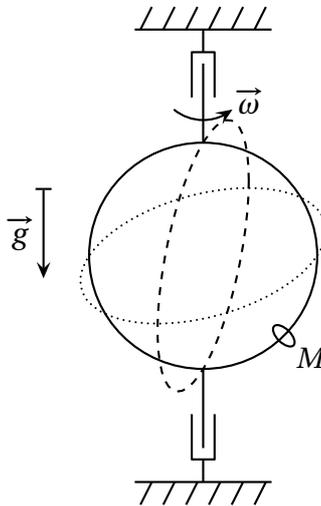
✧ Ce résultat montre bien que  $\|\vec{a}_e\| \ll \|\vec{g}\|$  donc que le référentiel terrestre peut légitimement être considéré galiléen.

## II.5 – Tour de manège pour une bille

✧ Repensons à la vidéo de la bille et essayons d'étudier et de décrire la position d'équilibre.

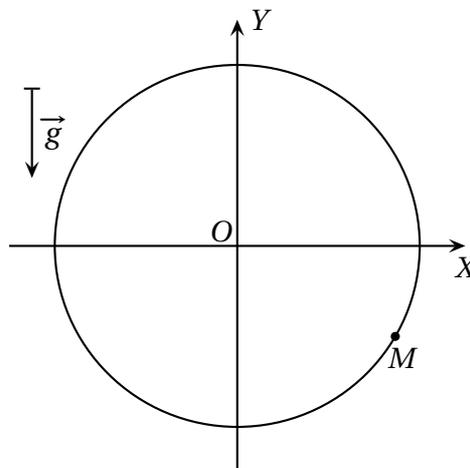
### II.5.i – description – analyse

✧ Considérons un cerceau dans un plan vertical sur lequel une perle peut se déplacer sans frottement. Le cercle est mis en rotation autour de son diamètre vertical à la vitesse angulaire  $\omega = C^{\text{te}}$  par un moteur (non représenté).



✧ L'expérience montre que la perle se stabilise à une certaine hauteur. Laquelle ?

✧ Étant donné que le cerceau a un mouvement contraint et que la bille se déplace sur lui, nous allons le choisir comme référentiel. La situation est désormais la suivante :



✧ Analyse physique :

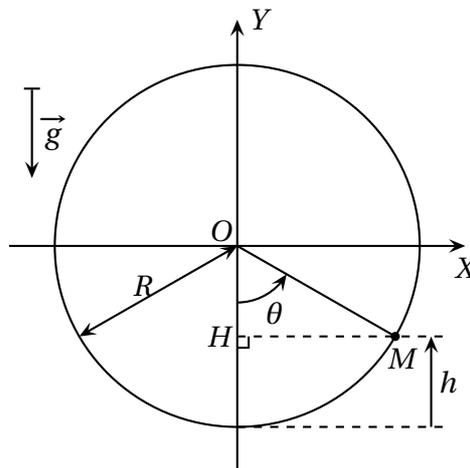
- la perle  $M$  va avoir tendance à s'éloigner de l'axe vertical ( $OY$ ) grâce à la force d'inertie, mais en s'éloignant elle monte et ce mouvement sera contrarié par la pesanteur : un point d'équilibre peut effectivement être atteint ;
  - le mouvement de la perle est circulaire, il n'y a ici qu'un seul degré de liberté donc un seul degré de description ;
  - le mouvement est libre et puisqu'il n'y a pas de frottement et que la force d'inertie est conservative, le mouvement est globalement conservatif ;
  - les grandeurs pertinentes :  $m$  pour la masse,  $R$  pour la géométrie,  $\omega$  pour la force d'inertie et  $g$  pour la pesanteur.
- ◇ Analyse technique, elle est immédiate :
- le mouvement circulaire impose un repérage cylindro-polaire ;
  - un mouvement à un degré de description libre et conservatif nous incite plus que fortement à utiliser une méthode énergétique.

### II.5.ii – position d'équilibre

#### ★ existence

- ◇ Pour trouver la position d'équilibre, nous devons chercher les valeurs  $\theta_{\text{éq}}$  tels que  $\frac{dE_p}{d\theta}(\theta_{\text{éq}}) = 0$ .

9



- ◇ Les forces qui s'exercent sur la perle sont :
- force à distance : le poids dont l'énergie potentielle s'écrit

$$E_{p,\text{pes}} = m g h = m g R (1 - \cos\theta) \quad (\text{II.30})$$

- force de contact :
  - la réaction normale du support qui ne travaille pas puisque le support est immobile ;
  - les frottements (solide et fluide) sont négligés ;
- force d'inertie :
  - la force d'inertie d'entraînement est associée à l'énergie potentielle

$$E_{p,\text{ie}} = -\frac{1}{2} m \omega^2 H M^2 = -\frac{1}{2} m \omega^2 R^2 \sin^2\theta \quad (\text{II.31})$$

- la force d'inertie de CORIOLIS ne travaille pas.

- ◇ L'énergie potentielle totale s'écrit donc

$$E_p = E_{p,p} + E_{p,\text{ie}} = m g R (1 - \cos\theta) - \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 \sin^2\theta \quad (\text{II.32})$$

⇨ Et ainsi

$$\frac{dE_p}{d\theta}(\theta) = +m g R \sin\theta - m \omega^2 R^2 \sin\theta \cos\theta \quad (\text{II.33})$$

$$= m R \sin\theta (g - \omega^2 R \cos\theta) \quad (\text{II.34})$$

⇨ Nous voyons donc qu'il y a deux positions d'équilibre possibles

$$\theta_{\text{éq},1} = 0 \quad \text{et} \quad \cos\theta_{\text{éq},2} = \frac{g}{R\omega^2} \quad (\text{II.35})$$

⇨ La deuxième position d'équilibre n'existe que pour  $R\omega^2 > g$ , *i.e.* que si les forces d'inertie sont suffisamment grandes.

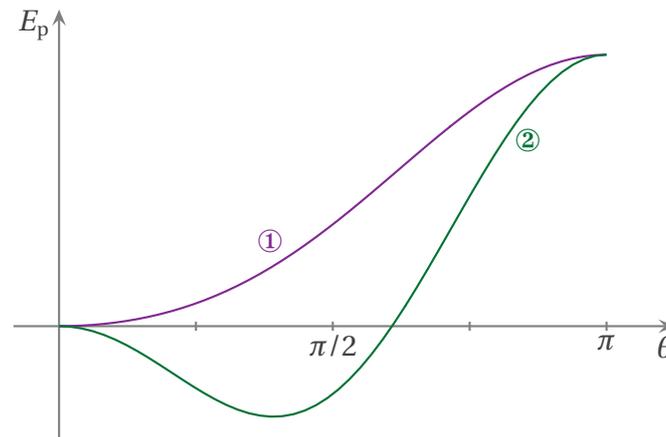
### ★ stabilité

#### 🕒 approche graphique

⇨ Représentons l'expression de  $E_p(\theta)$  dans les deux cas :

→ cas ① :  $R\omega^2 < g$  (en violet) ;

→ cas ② :  $R\omega^2 > g$  (*envert fonce*).



⇨ Nous pouvons constater que, dans le cas ①, lorsque ça ne tourne pas très vite, la seule position d'équilibre est une position d'équilibre stable et elle est en  $\theta_{\text{éq}} = 0$ .

⇨ En revanche, dès que ça tourne assez vite, il existe une position d'équilibre stable entre 0 et  $\pi/2$ .

#### 🕒 approche formelle

⇨ Pour qu'une position d'équilibre soit stable, il suffit que  $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta_{\text{éq}}) > 0$ .

⇨ Calculons d'abord  $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta)$  :

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta) = +m g R \cos\theta - m \omega^2 R^2 (\cos^2\theta - \sin^2\theta) = +m g R \cos\theta - m \omega^2 R^2 (2 \cos^2\theta - 1) \quad (\text{II.36})$$

⇨ Pour  $\theta_{\text{éq},1} = 0$  cela donne

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta_{\text{éq},1}) = +m g R - m \omega^2 R^2 = m R (g - R\omega^2) \quad (\text{II.37})$$

⇨ Nous avons donc

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta_{\text{eq},1}) > 0 \quad \text{pour} \quad g > R\omega^2 \quad (\text{II.38})$$

✧ Autrement dit, la position d'équilibre  $\theta_{\text{eq},1} = 0$  est stable si et seulement si la position d'équilibre  $\theta_{\text{eq},2}$  n'existe pas.

✧ Pour  $\theta_{\text{eq},2}$  cela donne

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta_{\text{eq},1}) = +m g R \frac{g}{R\omega^2} - m \omega^2 R^2 \left( 2 \frac{g^2}{R^2 \omega^4} - 1 \right) \quad (\text{II.39})$$

$$= -\frac{m g^2}{\omega^2} + m \omega^2 R^2 = \frac{m}{\omega^2} (R^2 \omega^4 - g^2) \quad (\text{II.40})$$

✧ Finalement, la position d'équilibre  $\theta_{\text{eq},2}$  est stable si  $R^2 \omega^4 > g^2$ , ce qui signifie qu'elle est stable dès lors qu'elle existe.

### ★ interprétation finale

✧ La position  $\theta_{\text{eq},1} = 0$  est naturelle : c'est celle qui existerait avec  $\omega = 0$ . Il est donc cohérent de la retrouver pour  $\omega \rightarrow 0$ .

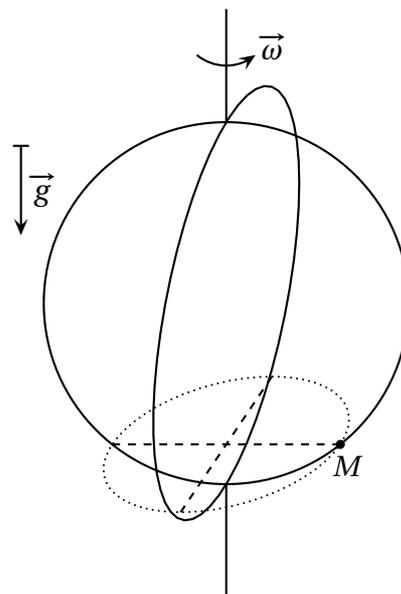
✧ Plus  $\omega$  est grand, plus  $\cos\theta_{\text{eq},2}$  est petit et à la limite  $\theta_{\text{eq},2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$  ce qui est là aussi cohérent : plus  $\omega$  est grand, plus les forces d'inertie sont grande et plus la tendance « éloignement de l'axe » prend le dessus sur la pesanteur.

### II.5.iii – vision de l'« équilibre » par rapport au référentiel $\tilde{\mathcal{R}}$

#### ★ vision en terme de forces

✧ Considérons la position d'équilibre de  $M$  par rapport au cerceau, *i.e.* considérons que  $\theta = \theta_{\text{eq}} = \text{C}^{\text{te}}$ .

✧ Alors la trajectoire de  $M$  dans  $\tilde{\mathcal{R}}$  est circulaire de rayon  $HM = R \sin\theta_{\text{eq}}$ .



✧ Le PFD appliqué à  $M$  dans  $\tilde{\mathcal{R}}$  s'écrit :

$$m \vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M) = \vec{P} + \vec{R}_N \rightsquigarrow -m (R \sin\theta_{\text{eq}}) \omega^2 \vec{u}_r = \vec{P} + \vec{R}_N \quad (\text{II.41})$$

- ✧ Et en passant le terme d'accélération de l'autre côté du signe égal, nous retrouvons l'écriture de l'équilibre dans le référentiel  $\mathcal{R}$  lié au cerceau :

$$\underbrace{m(R \sin \theta_{\text{éq}}) \omega^2 \vec{u}_r}_{\vec{f}_{ie}} + \vec{P} + \vec{R}_N = \vec{0} \quad (\text{II.42})$$

### ★ vision en termes énergétiques

- ✧ Nous raisonnons toujours dans le référentiel  $\tilde{\mathcal{R}}$ .
- ✧ Imaginons le cerceau en train de tourner. La perle est initialement immobile en position basse, monte sur le cerceau et se stabilise à sa position finale.
- ✧ Le TEC s'écrit alors :

$$\Delta E_c = W(\vec{P}) + W(\vec{R}_N) = -\Delta E_{p,p} + W(\vec{R}_N) \quad (\text{II.43})$$

- ✧ Or :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m (R \sin \theta_{\text{éq}} \times \omega)^2 - 0 > 0 \quad (\text{II.44})$$

$$-\Delta E_{p,p} = -m g h < 0 \quad (\text{II.45})$$

$$W(\vec{R}_N) \stackrel{?}{=} 0 \quad (\text{II.46})$$

- ✧ Cela semble impossible... Et même rajouter les forces de frottements ne ferait qu'empirer le problème parce que  $W_{\text{frott}} < 0$ !
- ✧ La solution de ce « paradoxe » est simple : c'est parce que dans ce référentiel le support (le cerceau) n'est pas immobile, en conséquence de quoi le travail fourni par  $\vec{R}_N$  n'est pas *a priori* nul.
- ✧ Nous voyons là un exemple flagrant montrant que le travail fourni par une force est une grandeur *relative*.

## II-6 – Lanceur de ball-trap

### II-6.i – description – analyse

- ✧ Un lanceur de ball-trap est un dispositif qui, à l'aide d'un simple ressort, permet d'envoyer des pigeons d'argile de 50 à 100 m.



✧ Un pigeon d'argile est un simple disque.



✧ Nous allons étudier pourquoi la rotation du bras permet d'éjecter le disque.

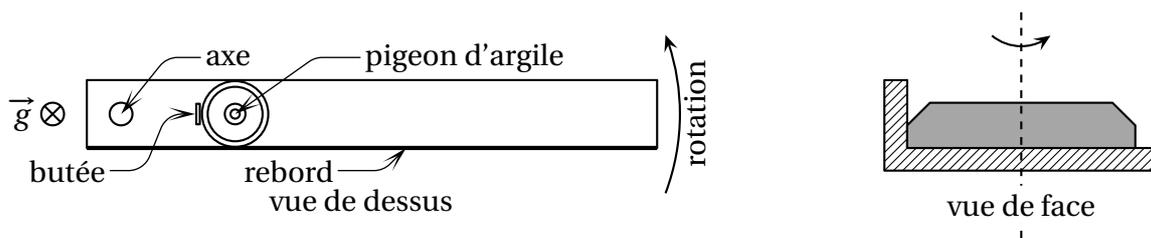
### ★ simplification

✧ Nous allons simplifier le problème :

- nous allons considérer que le lanceur tourne dans un plan horizontal ;
- nous allons supposer que la rotation du bras se fait à vitesse angulaire constante.

✧ Bien sûr ces deux simplifications sont fausses, mais elles ne changent pas la phénoménologie du dispositif, *i.e.* son aspect qualitatif.

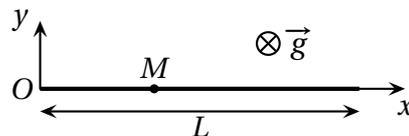
✧ Nous pouvons donc dessiner le lanceur de la manière suivante.



### ★ analyses

✧ Comme il y a une rotation du bras et que le lanceur est astreint à se déplacer uniquement le long de celui-ci, nous allons étudier l'ensemble dans le référentiel *non galiléen* lié au lanceur.

✧ Commençons par dessiner le *schéma* de la situation.



✧ Analyse physique :

- le pigeon  $M$  va être mis en mouvement par la force d'inertie vers l'extérieur du bras du lanceur ;
- le mouvement est à un seul degré de liberté donc de description ;
- le mouvement est, ici, libre et conservatif car la force d'inertie dans un référentiel en rotation uniforme est associée à une énergie potentielle ;
- les paramètres pertinents sont :  $m$  pour la masse,  $L$  pour la géométrie,  $\omega$  pour la force d'inertie et  $x_0$  pour les conditions initiales. Le poids ne jouant aucun rôle,  $g$  n'interviendra pas.

✧ Analyse technique :

- le repérage est immédiat ;
- un mouvement à un seul degré de description et conservatif : l'approche énergétique est plus appropriée.

## II-6-ii – mouvement

✧ Pour l'exemple, nous allons faire les deux approches, même si nous savons d'avance que l'approche énergétique sera plus efficace.

### ★ approche en terme de force

✧ Dans le référentiel lié au lanceur, les forces qui s'exercent sur { } sont :

- force à distance : le poids  $\vec{P} = m \vec{g} = -m g \vec{u}_z$ ;
- forces de contact :
  - l'action normale du support :  $\vec{R}_N = R_N \vec{u}_{\text{sort}} = R_N \vec{u}_z$ ;
  - les frottements avec le support et l'air sont négligés;
- les forces d'inertie :
  - la force d'inertie d'entraînement s'écrit

$$\vec{f}_{ie} = +m \omega^2 \overline{HM} = +m \omega^2 x(t) \vec{u}_x \quad (\text{II.47})$$

→ la force d'inertie de CORIOLIS

$$\vec{f}_{ic} = -2 m \vec{\Omega} \wedge \vec{v} = -2 m \omega \vec{u}_z \wedge \dot{x}(t) \vec{u}_x = -2 m \omega \dot{x}(t) \vec{u}_y \quad (\text{II.48})$$

✧ Le « PFD » s'écrit donc

$$\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic} = m \vec{a} \quad (\text{II.49})$$

✧ Cela donne, en projection sur  $\vec{u}_x$

$$0 + 0 + m \omega^2 x(t) + 0 = m \ddot{x} \quad \rightsquigarrow \quad \ddot{x}(t) - \omega^2 x(t) = 0 \quad (\text{II.50})$$

✧ La présence du signe « - » nous rassure sur le fait que  $x(t)$  va diverger, *i.e.* que le pigeon d'argile va se diriger vers l'extrémité.

### ★ approche énergétique

✧ Comme il s'agit de trouver l'équation différentielle vérifiée par le mouvement, nous allons utiliser un TPM plutôt qu'un TEM.

✧ Ce dernier s'écrit

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{nc} \quad \text{avec} \quad E_m = E_c + E_p \quad \text{où} \quad E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) \quad (\text{II.51})$$

✧ L'énergie potentielle se réduit à l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement car la pesanteur n'intervient pas (mouvement horizontal) ainsi

$$E_{p,ie} = -\frac{1}{2} m \omega^2 \overline{HM}^2 = -\frac{1}{2} m \omega^2 x^2(t) \quad (\text{II.52})$$

✧ De plus  $\mathcal{P}_{nc} = 0$  car il n'y a pas de frottement et que le support est immobile et aussi parce que la force d'inertie de CORIOLIS ne travaille pas.

✧ Il reste donc

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2(t) \quad (\text{II.53})$$

✧ Ce qui donne, en simplifiant par la solution  $\dot{x}(t) = 0$  non intéressante correspondant à l'équilibre dans le référentiel lié au lanceur

$$m\dot{x}(t)\ddot{x}(t) - m\omega^2 \dot{x}(t)x(t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \ddot{x}(t) - \omega^2 x(t) = 0 \quad (\text{II.54})$$

✧ Nous retrouvons bien la même équation qu'avec l'approche en terme de forces et ce de manière moins compliquée.

### ★ résolution

✧ La solution générale est du type

$$x(t) = \cosh(\omega t) + B \sinh(\omega t) \quad (\text{II.55})$$

✧ Les conditions initiales  $x(0) = x_0$  et  $\dot{x}(0) = 0$  donnent rapidement

$$x(t) = x_0 \cosh(\omega t) \quad (\text{II.56})$$

✧  $x(t)$  diverge, c'est rassurant.

✧ L'extrémité du lanceur est atteinte à  $t_f$  tel que

$$x(t_f) = L \quad \rightsquigarrow \quad x_0 \cosh(\omega t_f) = L \quad \rightsquigarrow \quad t_f = \frac{1}{\omega} \operatorname{argch} \frac{L}{x_0} \quad (\text{II.57})$$

### ★ petit paradoxe

✧ Projetons le PFD sur  $\vec{u}_y$

$$0 - 2m\omega \dot{x}(t) \vec{u}_y = 0 \quad (\text{II.58})$$

✧ Cela semble impossible. Et pourtant NEWTON ne saurait mentir!

✧ La raison en fait est que la réaction normale au support est **normale** au support : si celui-ci a pour but de guider suivant  $\vec{u}_x$  cela implique qu'il faut le contraindre en  $\vec{u}_z$  et  $\vec{u}_y$ .

✧ Autrement dit, la réaction normale devrait s'écrire

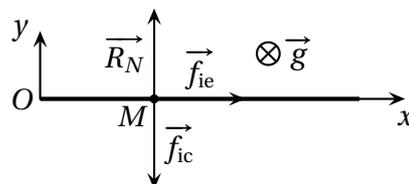
$$\vec{R}_N = R_{N,y} \vec{u}_y + R_{N,z} \vec{u}_z \quad (\text{II.59})$$

✧ D'ailleurs nous pouvons voir sur le premier schéma « vue de face » un rebord, rebord qui va, justement exercer la force dirigée suivant  $\vec{u}_y$ ...

## II-6-iii – interprétation

### ★ dans $\mathcal{R}$

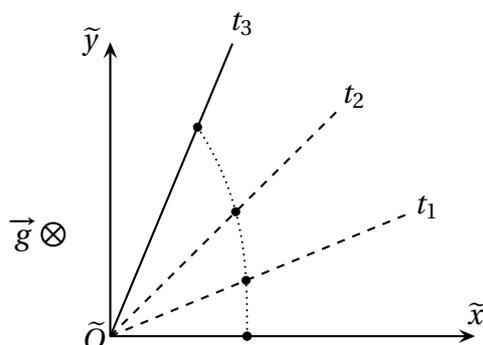
✧ Représentons la situation dans  $\mathcal{R}$ .



✧ Dans ce référentiel, la force d'inertie de CORIOLIS permet de contraindre le pigeon d'argile à rester sur le lanceur.

★ dans  $\tilde{\mathcal{R}}$

- ✧ Avec un support qui bouge, nous ne devons plus être étonné du fait que  $\vec{R}_N$  travaille et apporte de l'énergie.
- ✧ De plus, comme  $\vec{R}_N$  tourne, puisqu'elle reste normale à la direction du lanceur, cela permet à la trajectoire d'être incurvée.



## III – Mécanique en référentiels terrestres

✧ Dans cette partie nous allons préciser quels effets peut avoir le fait que les référentiels liés à la Terre (les référentiels terrestre et géocentriques) sont non galiléens.

### III.1 – Interaction gravitationnelle

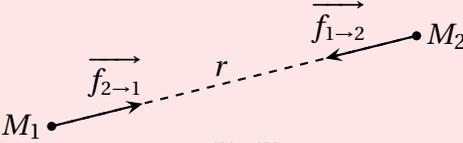
#### III.1.i – lois

##### ★ en terme de force

✧ Quelques rappels tout d'abord.

**Loi**

Deux points  $M_1$  et  $M_2$  de masse  $m_1$  et  $m_2$  s'attirent et exercent une force l'un sur l'autre telle que



$$\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{12} \text{ où :}$$

- $G$  est la constante universelle de gravitation ;
- $r$  est la distance entre les deux masses ;
- $\vec{u}_{12}$  est le vecteur unitaire dirigé de 1 vers 2.

**Définition**

La *masse grave* caractérise la capacité d'un corps à attirer et à être attiré par l'interaction gravitationnelle.

##### ★ en terme de champ

**Définition**

Un *champ* est une zone de l'espace dans laquelle il est possible de définir en chacun des points soit une grandeur vectorielle (champ de vecteurs ou champ vectoriel) soit une grandeur scalaire (champ scalaire).

**Définition**

Le *champ de gravitation* créé par un point  $P$  de masse  $m$  en un point  $M$  a pour expression :

$$\vec{\mathcal{G}}_{P(M)} = -G \frac{m}{r^2} \vec{u}_{PM} \quad \text{où :}$$

- $G$  est la constante universelle de gravitation ;
- $r$  est la distance  $PM$  ;
- $\vec{u}_{PM}$  est le vecteur unitaire dirigé de  $P$  vers  $M$ .

Dimensionnellement parlant :  $[\vec{\mathcal{G}}] = (\text{m}) \cdot (\text{s})^{-2} \equiv \text{accélération}$

**Loi**

Le point  $M_2$  de masse  $m_2$  est attiré par le point  $M_1$  de masse  $M_1$  selon l'expression :

$$\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = m_2 \vec{\mathcal{G}}_1(M_2) \quad \text{où :}$$

$\vec{\mathcal{G}}_1(M_2)$  est le champ de gravitation créé par le point 1 au point où se trouve  $M_2$ .



### Bon à retenir

§ *Le champ de gravitation a une étendue infinie.*

- ✧ Dans les films quand nous entendons « Ça y est capitaine ! Nous sommes sortis du champ de gravitation de la planète. » c'est *stricto sensu* complètement absurde. Il faut plutôt le comprendre comme : « Ça y est capitaine ! Nous avons suffisamment augmenté notre énergie mécanique de sorte que, désormais, nous sommes dans un état de diffusion vis-à-vis de la planète. ». Il n'est pas certain que l'effet dramatique soit identique.

### ★ vision énergétique



#### Loi

L'interaction gravitationnelle entre un point  $M_2$  de la part de  $M_1$  est conservative et son énergie potentielle s'écrit :

$$E_{p,\text{grav}} = -G \frac{m_1 m_2}{r} \quad \text{où}$$

- $G$  est la constante universelle de gravitation ;
- $r$  est la distance  $M_1 M_2$ .

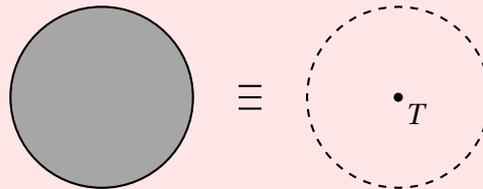
- ✧ Rappelons qu'il s'agit, ici, de l'énergie potentielle pour *l'interaction*. Il faut donc que les deux points soient dans le même système.
- ✧ En revanche, si l'un des deux points peut être considéré comme fixe (parce que beaucoup plus massif que l'autre), par exemple  $M_1$ , alors l'énergie potentielle précédente est celle que possède  $M_2$ , le point « mobile ».

### III·1·ii – cas des astres



#### Loi

Les corps à symétrie sphérique se comporte, **du point de vue de la gravitation**, comme un point matériel situé en leurs centres et de masse leurs masses totales.



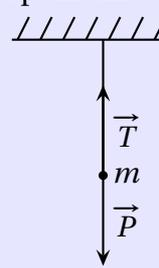
- ✧ Nous le montrerons plus tard, dans la partie électromagnétisme.
- ✧ Cela signifie que, tant pour les forces subies que pour les forces exercées, nous pouvons remplacer un corps à symétrie sphérique par un point unique situé en son centre.
- ✧ **Ce ce n'est pas une approximation !** Ce qui est une approximation, c'est de dire que tel ou tel astre est à symétrie sphérique.
- ✧ Il est bien évident que cela ne concerne que les forces de gravitation et que si, sur un schéma la Terre est représentée ponctuelle, nous ne sous-entendons pas qu'elle est considérée comme ponctuelle : un objet posé sur sa surface restera à sa surface et ne se dirigera pas vers le centre de la Terre.

## III·2 – Le poids

**III·2·i – définition**

**Définition**

Soit  $M$  un point matériel attaché à un fil idéal et immobile par rapport au référentiel terrestre. Alors le fil exerce une force opposée au *poids* du point matériel.



Dans ces conditions, la direction du fil est *verticale*.

**Définition**

En notant  $m$  la masse d'un point matériel et  $\vec{P}$  son poids, alors l'*accélération de pesanteur*  $\vec{g}$  vaut :

$$\vec{P} \triangleq m \vec{g}$$

✧ Il est tout à fait possible de parler du *champ de pesanteur* étant donné que nous pouvons définir  $\vec{g}$  dans toute une zone de l'espace (en général à la surface de la Terre).

**III·2·ii – direction du fil à plomb**

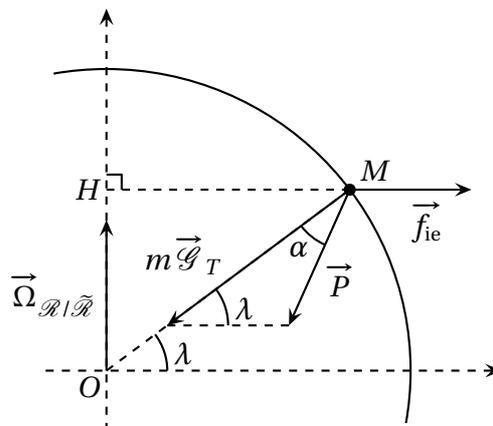
10

✧ Étudions le point matériel  $M$  d'un pendule simple immobile dans le référentiel terrestre, considéré comme non galiléen (pour une fois).

✧ Les forces qui s'exercent sont donc :

- force à distance : l'interaction gravitationnelle exercée par la Terre  $\vec{f}_{\text{grav}} = m \vec{\mathcal{G}}_T(M)$  ;
- force de contact : le fil ;
- force d'inertie d'entraînement :  $\vec{f}_{\text{ie}} = +m \omega^2 \overrightarrow{HM}$  ;
- force d'inertie de CORIOLIS : nulle car le point  $M$  est à l'équilibre.

✧ À l'échelle de la Terre, le point  $M$  est véritablement à la surface de la Terre. Cela donne le schéma suivant où  $\lambda$  est la latitude du point considéré.



✧  $\mathcal{R}$  est le référentiel terrestre et  $\tilde{\mathcal{R}}$  est le référentiel géocentrique considéré comme galiléen.

✧ La somme de  $m \vec{\mathcal{G}}_T(M)$  et de  $\vec{f}_{\text{ie}}$  donne, par définition,  $\vec{P}$ .

✧ Ainsi, dans le triangle formé par les trois vecteurs, nous avons :

$$\frac{\sin \lambda}{m g} = \frac{\sin \alpha}{f_{ie}} \quad \rightsquigarrow \quad \sin \alpha = \frac{\omega^2 (HM) \sin \lambda}{g} = \frac{\omega^2 R_T \cos \lambda \sin \lambda}{g} = \frac{\omega^2 R_T \sin(2 \lambda)}{2 g} \quad (\text{III.1})$$

✧ Numériquement

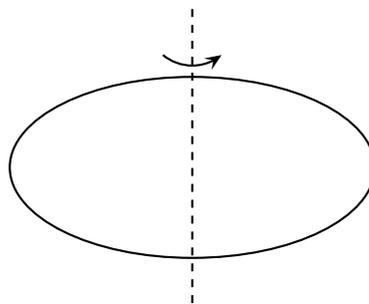
$$\sin \alpha = \alpha \simeq 10^{-2} \text{ rad} = 0,5^\circ \quad (\text{III.2})$$

✧ Cela signifie qu, à nos latitude, **tout** est penché de  $0,5^\circ$  non pas par rapport à la verticale, mais par rapport à la direction qui pointe vers le centre de la Terre. En faisant un trou **parfaitement vertical**, nous n'arriverions pas au centre de la Terre.

### III.2.iii – d'autres causes de variation

#### ★ causes globales

✧ La Terre est légèrement aplatie aux pôles.

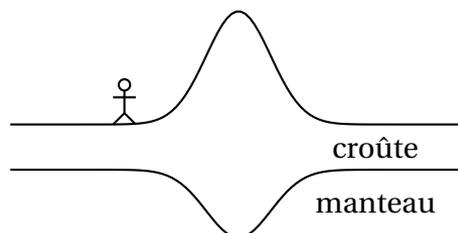


✧ La différence entre les deux diamètres est de l'ordre de 40 km.

#### ★ causes locale

✧ La structure locale de la croûte terrestre peut aussi influence le champ de pesanteur.

✧ Par exemple une montagne : sa racine s'enfonce aussi un peu dans le manteau, de manière analogue à un navire. La croûte étant moins dense que le manteau, le bonhomme « sent » un déficit d'attraction sur la droite donc tout se passe comme si la gauche l'attirait un peu plus.



### III.2.iv – que faire avec le poids désormais ?

✧ Même si le poids ne se limite pas rigoureusement à l'attraction terrestre, nous allons continuer à le considérer comme une force à distance et ce, de manière systématique.



#### Bon à retenir

Que le référentiel terrestre soit considéré ou non comme galiléen, nous prendrons toujours en compte le poids subi par un point matériel.

✧ Dans le poids est compté la contribution de la force d'inertie d'entraînement due au caractère non galiléen du référentiel terrestre.

STOP C'est bien la force d'inertie d'entraînement due à la rotation de la Terre qui est incluse dans le poids. Pour d'autres référentiels, il **faudra** compter la force d'inertie d'entraînement.



### Loi

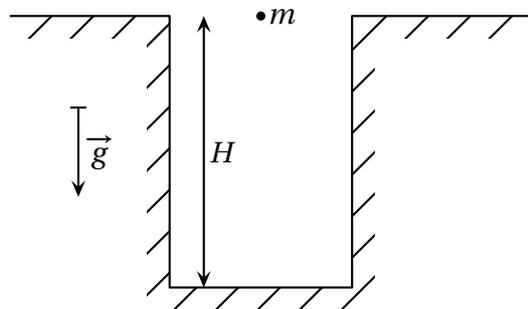
Il n'y a pas de force d'inertie d'entraînement dans le **référentiel terrestre** et **uniquement** dans le référentiel terrestre.

## III.3 – Déviation vers l'est

### III.3.i – situation – analyse

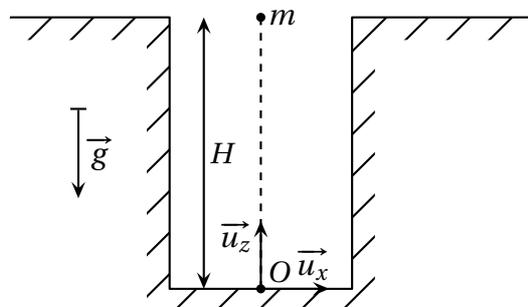
#### ★ expérience

- ✧ Considérons un petit objet de masse  $m$  lâché sans vitesse initial dans un puit de hauteur  $H$ .
- ✧ Nous allons étudier ce qui se passe de manière précise, *i.e.* en tenant compte du caractère non galiléen du référentiel terrestre.



#### ★ analyse

- ✧ Déjà le petit objet tombe vers le bas, c'est le mouvement principal : l'influence du caractère non galiléen sera minime.
- ✧ Nous avons tendance à dire que le mouvement devrait être plan, voire rectiligne avec une vitesse initiale nulle, sauf que là la force de CORIOLIS change la donne puisque cette force est orthogonale à la trajectoire.
- ✧ Finalement le mouvement est à 3 degrés de description  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$ .
- ✧ Les grandeurs influençant le mouvement seront :  $m$ ,  $g$ ,  $\omega$  (vitesse de rotation terrestre)
- ✧ Nous allons repérer la position de  $M$  avec des coordonnées cartésiennes :  $\vec{u}_z$  sera vertical,  $\vec{u}_x$  vers l'est et  $\vec{u}_y$  vers le nord.

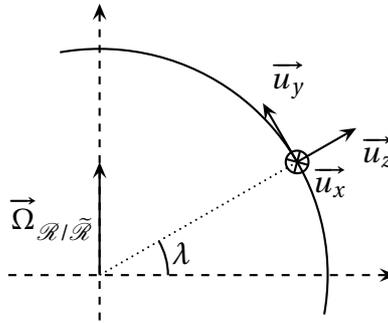


### III-3-ii – équation régissant le mouvement

⇧ Liste des forces s'exerçant sur le point  $M$  dans le référentiel terrestre :

- force à distance : le poids  $\vec{P} = m \vec{g} = -m g \vec{u}_z$ ;
- force de contact : aucune, nous négligeons les frottements avec l'air ;
- force d'inertie d'entraînement : déjà compté dans le poids ;
- force d'inertie de CORIOLIS :  $\vec{f}_{ic} = -2 m \vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{v}|_{\mathcal{R}(M,t)}$ .

⇧ Cherchons les composantes de  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}}$  dans le repère choisi.



⇧ Nous trouvons  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} = \omega (\cos \lambda \vec{u}_y + \sin \lambda \vec{u}_z)$  et ainsi :

$$\vec{f}_{ic} = -2 m \vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{v} = -2 m \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \cos \lambda \\ \Omega \sin \lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = -2 m \begin{pmatrix} \Omega \dot{z}(t) \cos \lambda - \Omega \dot{y}(t) \sin \lambda \\ \Omega \dot{x}(t) \sin \lambda \\ -\Omega \dot{x}(t) \cos \lambda \end{pmatrix} \quad (\text{III.3})$$

⇧ Nous pouvons ainsi écrire le PFD et le projeter sur les trois axes.

$$\vec{P} + \vec{f}_{ic} = m \vec{a}(t) \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} m \ddot{x}(t) = -2 m \Omega \dot{z}(t) \cos \lambda + 2 m \Omega \dot{y}(t) \sin \lambda \\ m \ddot{y}(t) = -2 m \Omega \dot{x}(t) \sin \lambda \\ m \ddot{z}(t) = -m g + 2 m \Omega \dot{x}(t) \cos \lambda \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

⇧ Nous pouvons constater que la résolution exacte risque de poser quelques difficultés car les équations différentielles sont couplées.

⇧ D'un autre côté, nous savons qu'en première approximation le mouvement est celui d'une chute libre et que la différence est uniquement due au terme perturbatoire qu'est la force d'inertie de CORIOLIS.

⇧ C'est typiquement le genre de situation pour lequel nous pouvons utiliser la méthode de résolution par ordre successif.

### III-3-iii – résolution à l'ordre 0

⇧ Résolvons d'abord le cas où il n'y a pas de force d'inertie de CORIOLIS.

⇧ Il s'agit de la chute libre sans frottement et sans vitesse initiale, ce qui donne, compte tenu des conditions initiales :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = 0 \\ \ddot{z}(t) = -g \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = 0 \\ \dot{y}(t) = 0 \\ \dot{z}(t) = -g t \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = H - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

⇧ Pas de surprise.

### III-3-iv – résolution à l'ordre 1

#### ★ nouvelles équations horaires



#### Bon à retenir

La méthode de résolution par ordre successif consiste à injecter une solution approchée dans un terme perturbatif et de rechercher la nouvelle solution.

⇨ Nous devons donc remplacer les expressions de  $\dot{x}(t)$ ,  $\dot{y}(t)$  et  $\dot{z}(t)$  dans les équations différentielles initiales. Cela donne :

$$\begin{cases} m \ddot{x}(t) = +2 m \Omega g t \cos \lambda \\ m \ddot{y}(t) = 0 \\ m \ddot{z}(t) = -m g \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = +\Omega g t^2 \cos \lambda + 0 \\ \dot{y}(t) = 0 \\ \dot{z}(t) = -g t \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x(t) = +\frac{1}{3} \Omega g t^3 \cos \lambda \\ y(t) = 0 \\ z(t) = H - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

⇨ Nous pouvons voir qu'il y a désormais un mouvement sur  $\vec{u}_x$ , i.e. dans la direction est-ouest.

#### ★ écart à l'impact

⇨ Cherchons de combien s'est écarté l'objet par rapport à sa verticale initiale à l'instant de l'impact.

⇨ L'impact est défini par  $z(t_0) = 0$ , ce qui donne :

$$H - \frac{1}{2} g t_0^2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (\text{III.7})$$

⇨ Et donc

$$x(t_0) = \frac{1}{3} g \Omega \cos \lambda \left( \frac{2h}{g} \right)^{3/2} \quad (\text{III.8})$$

⇨ Numériquement

$$x(t_0) = 1,4 \text{ cm} \quad \text{pour} \quad H = 100 \text{ m} \quad (\text{III.9})$$

⇨ L'écart n'est pas grand, mais peut commencer à devenir mesurable dans des conditions contrôlées, surtout au niveau de la nullité de la vitesse initiale.

⇨ Cet écart se situe vers l'est  $x(t_0) > 0$  quel que soit l'hémisphère (la déviation est en  $\cos \lambda$ ) et la déviation sera d'autant plus grande que le lancé aura lieu près de l'équateur.

#### ★ ordres supérieurs

⇨ Nous pourrions réinjecter la solution trouvée précédemment dans l'expression initiale de la force d'inertie de CORIOLIS.

⇨ Nous aurions alors une solution à l'ordre 2 que nous pourrions réinjecter...

⇨ Dans des cas non pathologiques, cette méthode converge vers la bonne solution.

★ **et les frottements dans tout cela ?**

- ✧ Négliger les frottements après une chute de 100 m n'est peut-être pas si valide.
- ✧ Calculons la force de frottement subie. Pour cela considérons une bille d'acier de 2,0 cm de rayon.
- ✧ L'acier a une masse volumique de  $\rho = 7,85 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$  et une sphère a un  $C_x$  de 0,5.
- ✧ Son poids est

$$P = \frac{4}{3} \pi R^3 \times \rho \times g = 2,6 \text{ N} \tag{III.10}$$

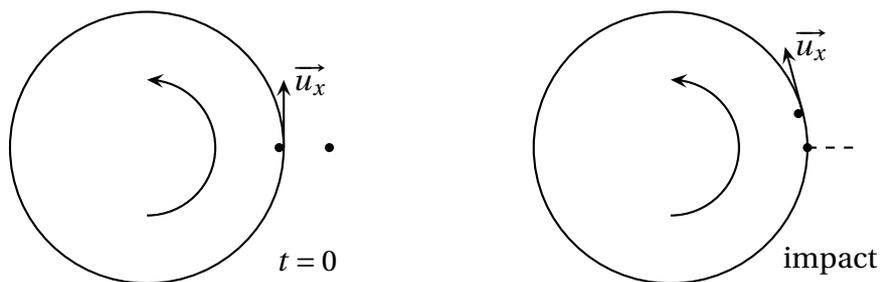
- ✧ La force de traînée vaut

$$f = \frac{1}{2} C_x \rho_{\text{air}} (\pi R^2) v^2 = 0,8 \text{ N} \tag{III.11}$$

- ✧ Elle n'est donc pas si négligeable.
- ✧ Ceci étant, cela ne change pas l'analyse précédente et le fait que la bille tombe à l'est de son point de chute « vertical », car la force de traînée est essentiellement portée par  $\vec{u}_z$ .

**III.3.v – interprétation dans le référentiel géocentrique**

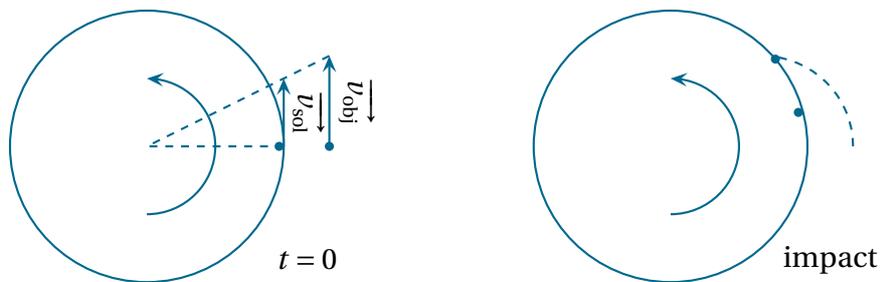
- ✧ Interprétons cette déviation dans un cas simple, celui où l'expérience se fait à l'équateur de manière à maximiser l'effet non galiléen.
- ✧ Représentons la situation vue de dessus dans ce référentiel.



- ✧ L'objet est lâché sans vitesse initiale, il tombe verticalement.
- ✧ Pendant ce temps là, la Terre tourne « en dessous » de l'objet. L'objet devrait alors tomber « en arrière » de sa verticale, *i.e.* vers l'ouest... or il s'agit d'une déviation vers l'est !

★ **la bonne interprétation**

- ✧ L'erreur vient du fait que l'objet n'est **pas** lancé sans vitesse initiale dans le référentiel géocentrique. Il est lancé avec une vitesse plus importante que le sol qu'il surplombe.



- ✧ Comme rien ne vient freiner l'objet dans sa course **en avant vers l'est**, il avance plus vite que le sol en dessous et tombe donc avec de l'avance sur sa verticale. Il s'agit bien d'une déviation vers l'est.

## III.4 – Les marées

11

✧ Dans cette partie, nous allons survoler le phénomène de marées. D'autres aspects seront vus en analyse documentaire.

### III.4.i – le terme de marée

✧ La démonstration qui suit n'est, bien sûr, pas au programme car elle fait intervenir un référentiel qui n'est ni en translation, ni en rotation pure, mais la démarche est instructive. Et comme la loi générale manquante n'est pas très difficile, ne nous en privons pas !

#### ★ origine

✧ Nous allons chercher les forces subies par un point matériel **immobile** dans le référentiel terrestre en ne supposant plus que le référentiel géocentrique soit galiléen.

✧ Pour que le référentiel géocentrique soit non galiléen, il ne faut *pas* qu'il ait une trajectoire rectiligne uniforme par rapport au référentiel héliocentrique. Et, en l'occurrence, son centre a une trajectoire plutôt circulaire.

✧ Posons-nous la question : « Qui est à l'origine de la trajectoire circulaire du centre de la Terre ? » Réponse : « Le Soleil. »

✧ Nous allons donc prendre en compte l'effet du Soleil et de l'autre astre le plus proche : la Lune.

#### ★ situation – analyse

✧ Considérons un point matériel  $M$  de masse  $m$  suspendu à un fil idéal et immobile dans le référentiel terrestre, non galiléen.

✧ Quelles sont les forces qui s'exercent sur le point  $M$  ?

→ force à distance :

→ l'attraction gravitationnelle exercée par la Terre  $\vec{f}_{g,T} = m \vec{\mathcal{G}}_T(M)$  ;

→ l'attraction gravitationnelle exercée par la Lune  $\vec{f}_{g,L} = m \vec{\mathcal{G}}_L(M)$  ;

→ l'attraction gravitationnelle exercée par le Soleil  $\vec{f}_{g,S} = m \vec{\mathcal{G}}_S(M)$  ;

→ force de contact :

→ la tension exercée par le fil  $\vec{T}$  ;

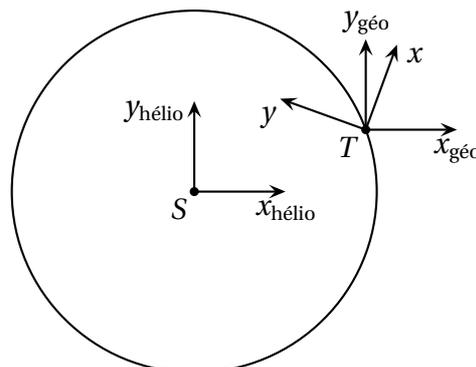
→ les frottements sont nuls car le point est immobile ;

→ forces d'inertie :

→ force d'inertie d'entraînement :  $\vec{f}_{ie}$  ;

→ force d'inertie de CORIOLIS : nulle car le point est à l'équilibre.

✧ Représentons le mouvement du référentiel terrestre par rapport au référentiel héliocentrique, que nous allons considérer galiléen, en notant  $T$  le centre de la Terre



- ✧ Nous pouvons constater que le référentiel terrestre n'est ni en rotation pure ni en translation par rapport au référentiel héliocentrique...
- ✧ La loi générale à utiliser alors, loi que nous n'avons **pas** démontré est d'utiliser « simplement » la somme des deux accélérations d'entraînement. Il faut faire toutefois attention à bien à ce que  $H$ , projeté de  $M$ , se fasse sur l'axe du référentiel non galiléen. Ici le référentiel terrestre.

$$\vec{a}_{e(M,t)} = \vec{a}_{|\mathcal{R}_{\text{hélio}}(T,t)} - \Omega_{\mathcal{R}|\mathcal{R}_{\text{hélio}}}^2 \overrightarrow{HM} \quad (\text{III.12})$$

où  $H$  est le projeté sur l'axe de  $\mathcal{R}$  portant la rotation.

### III.4.ii – champ de marée

#### ★ expression vectorielle

#### 🕒 le poids

- ✧ Remarquons d'abord que  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\mathcal{R}_{\text{hélio}}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\mathcal{R}_{\text{géo}}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_{\text{géo}}|\mathcal{R}_{\text{hélio}}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\mathcal{R}_{\text{géo}}}$ .
- ✧ Nous pouvons donc écrire l'équilibre sous la forme :

$$\vec{0} = \vec{T} + m \vec{\mathcal{G}}_T(M) - \Omega^2 \overrightarrow{HM} + m \vec{\mathcal{G}}_T(M) + m \vec{\mathcal{G}}_T(M) - m \vec{a}_{|\mathcal{R}_{\text{hélio}}(T,t)} \quad (\text{III.13})$$

- ✧ Comme  $H$  est le projeté sur l'axe de  $\mathcal{R}$  portant le vecteur rotation, alors  $H$  est le projeté sur l'axe de rotation de la Terre et ainsi nous reconnaissons l'expression du poids

$$\vec{P} = m \vec{\mathcal{G}}_T(M) - \Omega^2 \overrightarrow{HM} \quad (\text{III.14})$$

#### 🕒 le terme de marée

- ✧ Quelle est l'accélération de la Terre par rapport au référentiel héliocentrique ?
- ✧ Faisons un PFD sur la Terre. Cela ne pose pas de soucis étant donné que nous allons la considérer comme sphérique et que dans ces conditions, elle se comporte comme un point matériel du point de vue de la gravitation.
- ✧ Les seules forces qui s'exercent sont les attractions gravitationnelles exercées par la Lune et le Soleil :

$$m_T \vec{a}_{|\mathcal{R}_{\text{hélio}}(T,t)} = m_T \vec{\mathcal{G}}_L(T) + m_T \vec{\mathcal{G}}_S(T) \quad \rightsquigarrow \quad \vec{a}_{|\mathcal{R}_{\text{hélio}}(T,t)} = \vec{\mathcal{G}}_L(T) + \vec{\mathcal{G}}_S(T) \quad (\text{III.15})$$

- ✧ Et ainsi pour le point  $M$  immobile à la surface de la Terre :

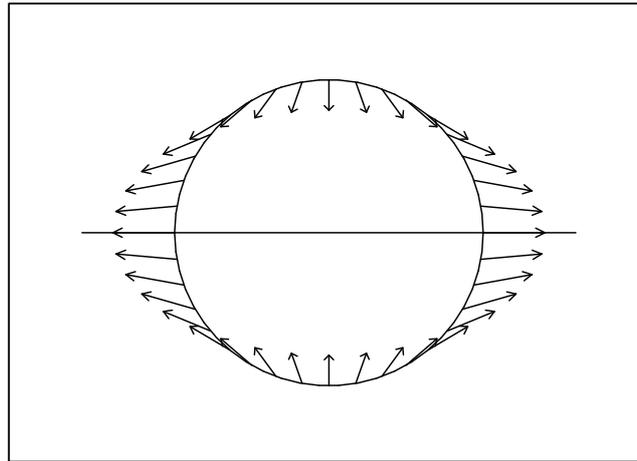
$$\vec{0} = \vec{T} + \vec{P} + m \left( \vec{\mathcal{G}}_L(M) - \vec{\mathcal{G}}_L(T) \right) + m \left( \vec{\mathcal{G}}_S(M) - \vec{\mathcal{G}}_S(T) \right) \quad (\text{III.16})$$

- ✧ Le terme  $\vec{\mathcal{G}}_L(M) - \vec{\mathcal{G}}_L(T)$  représente le champ de marée créé par la Lune sur la Terre.

#### ★ représentation graphique

- ✧ Sur le graphique ci-dessous, nous avons représenté le champ de marée à la surface de Terre créé par un astre dans la direction horizontale.

Graphique 1



✧ Les accélérations résultantes valent, pour un astre :

→ dans la direction de l'astre :  $\frac{2GM_{\text{astre}}R_T}{d_{\text{astre}}^3}$

→ dans la direction orthogonale à l'astre :  $\frac{GM_{\text{astre}}R_T}{d_{\text{astre}}^3}$  soit deux fois moins

✧ Nous pouvons constater que deux points opposés sur la Terre subissent les mêmes marées : il y a deux marées par jour.

### III.4.iii – la Lune et le Soleil

#### ★ contributions

✧ Nous avons :

$R_T = 6,36.10^6 \text{ m}$	$M_S = 1,99.10^{30} \text{ kg}$	$M_L = 7,34.10^{22} \text{ kg}$
$G = 6,67.10^{-11} \text{ N.m.kg}^{-2}$	$d_S = 1,50.10^{11} \text{ m}$	$d_L = 3,8.10^8 \text{ m}$

✧ Nous trouvons :

$$\frac{2GM_S R_T}{d_S^3} = 5,06.10^{-7} \text{ m.s}^{-2} \quad \text{et} \quad \frac{2GM_L R_T}{d_L^3} = 1,1.10^{-6} \text{ m.s}^{-2} \quad \text{(III.17)}$$



#### Bon à retenir

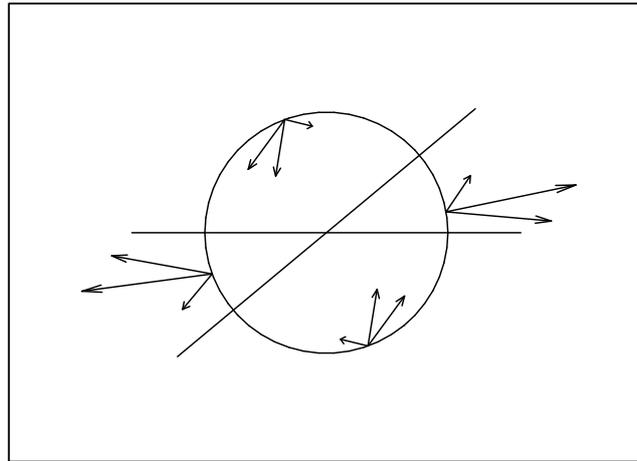
§ La lune a un effet deux fois plus important que celui du Soleil sur les marées.

✧ D'un autre côté, étant donné les accélérations mises en jeu, nous pouvons largement négliger les effets de marée en première approximation.

#### ★ mortes eaux et vives eaux

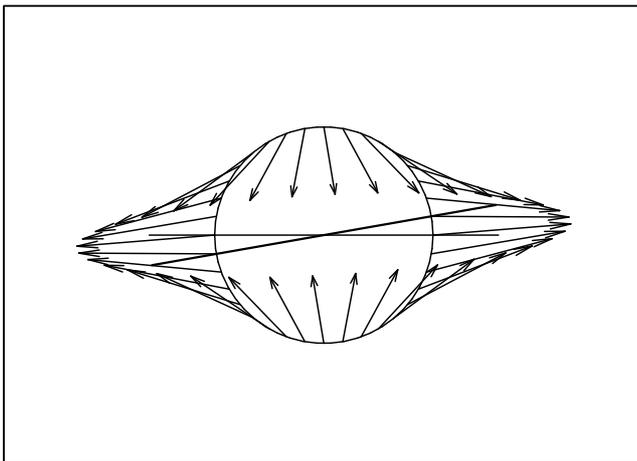
✧ Regardons ce qui se passe lorsque nous tenons compte des deux astres.

Graphique 2

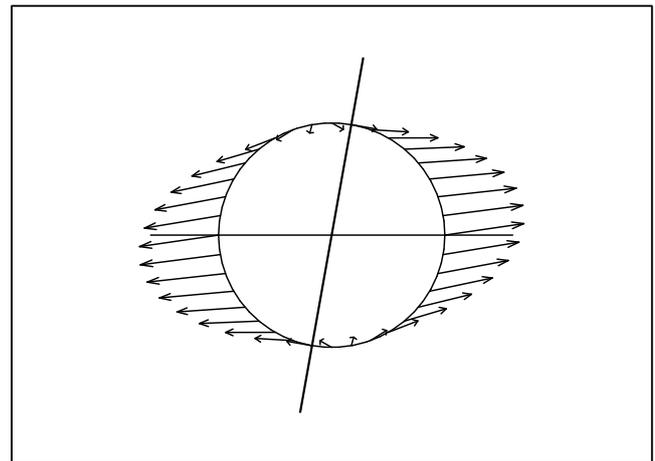


- ✧ Lorsque le Soleil, la Lune et la Terre sont alignés, nous pouvons voir que les effets s'ajoutent. Les marées sont plus importantes, ce sont les *vives eaux*.
- ✧ En revanche, lorsque le Soleil, la Lune et la Terre sont en quadrature, les effets se retranchent. Les marées sont faibles, ce sont les *mortes eaux*.

Graphique 3



Graphique 4



### ★ un phénomène plus complexe

- ✧ Nous n'avons ici fait qu'effleurer le phénomène des marées.
- ✧ De plus nous n'avons pas du tout tenu compte de l'aspect dynamique des marées. Nous avons considéré des points immobiles, or il faut du temps pour que la mer monte ou descende, ce qui peut fortement influencer l'effet de marée.

## Compétences du chapitre

*Les compétences à vocation essentiellement expérimentale sont indiquées en italique.*

### Deuxième année

#### Mécanique – 1.1 Changements de référentiel en mécanique classique

✧ Cas d'un référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un autre : transformation de GALILÉE, composition des vitesses.

1 Relier ces lois à la relation de CHASLES et au caractère supposé absolu du temps. [12,15]

✧ Composition des vitesses et des accélérations dans le cas d'un référentiel en translation par rapport à un autre : point coïncident, vitesse d'entraînement, accélération d'entraînement.

2 Utiliser le point coïncident pour exprimer la vitesse d'entraînement et l'accélération d'entraînement. [15]

✧ Composition des vitesses et des accélérations dans le cas d'un référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe : point coïncident, vitesse d'entraînement, accélération d'entraînement, accélération de CORIOLIS.

3 Utiliser le point coïncident pour exprimer la vitesse d'entraînement et l'accélération d'entraînement. [38,38]

4 Citer et utiliser l'expression de l'accélération de CORIOLIS. [37,39]

#### Mécanique – 1.2 Dynamique dans un référentiel non galiléen

✧ Cas d'un référentiel en translation par rapport à un référentiel galiléen : force d'inertie d'entraînement

5 Déterminer la force d'inertie d'entraînement. [27,29]

6 Appliquer la loi de la quantité de mouvement, la loi du moment cinétique et la loi de l'énergie cinétique dans un référentiel non galiléen. [27,29]

✧ Cas d'un référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen : force d'inertie d'entraînement, force d'inertie de CORIOLIS.

7 Exprimer la force d'inertie axifuge et la force d'inertie de CORIOLIS. [40,50,58]

8 Associer la force d'inertie axifuge à l'expression familière « force centrifuge ». [40]

9 Appliquer la loi de la quantité de mouvement, la loi du moment cinétique et la loi de l'énergie cinétique dans un référentiel non galiléen. [45,50,50,58]

✧ Exemples, champ de pesanteur : définition, évolution qualitative avec la latitude, ordres de grandeur ;

10 Distinguer le champ de pesanteur et le champ gravitationnel. [55]

11 Approche documentaire : associer les marées à un terme gravitationnel différentiel et comparer l'influence de la Lune et du Soleil pour analyser des documents scientifiques. [61]