Université Pierre et Marie Curie
M1 Mathématiques
MM26E Numerical Approximation of PDEs

Final exam, May 21, 2012

Duration: 3 hours. No document allowed.
The three exercises are independent of each other.
The English and French versions are translations of each other/les versions française et anglaise sont des traductions l'une de l'autre.

English Version

Exercise I

Let T be a triangle with vertices A^i, $i = 1,2,3$, and G be its center of gravity. Let λ_i, $i = 1,2,3$, be the barycentric coordinates associated with triangle T.

a. Let $\mathscr{P} = \text{vect}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1\lambda_2\lambda_3\}$. Show that $\mathscr{P}$ is a vector space of dimension 4 such that $P_1 \subset \mathscr{P} \subset P_3$.

b. We introduce the linear forms $\phi_i(P) = P(A^i)$, $i = 1,2,3$, and $\phi_4(P) = P(G)$ on the space of polynomials. Construct a basis of $\mathscr{P}$ that is dual to this family of linear forms[1] and deduce that the finite element $\big(T, \mathscr{P}, \{\phi_i\}_{i=1,\dots,4}\big)$ is unisolvent.

c. Let $\mathscr{T}_h$ be a triangulation of a polygonal open subset Ω of $\mathbb{R}^2$ having N_t triangles and N_s internal vertices. We set

$$V_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}); \forall T \in \mathscr{T}_h, v_{|T} \in \mathscr{P}; v = 0 \text{ on } \partial\Omega\}.$$

Show that each element of V_h is uniquely determined by its values at the internal vertices and at the centers of gravity of the triangles.

d. Conversely, show that given any set of values for these points, there exists an element v_h of V_h that takes these values at these points (pay particular attention to showing the continuity of v_h).

e. Deduce from the previous two questions a basis of V_h based on the former finite element. What is the dimension of V_h?

f. Assuming that we are looking to approximate the solution u of a variational problem set on $V = H_0^1(\Omega)$ that involves a continuous, V-elliptic bilinear form a and a continuous linear form ℓ, *briefly* indicate how to use the previously defined space V_h and associated basis to transform the approximate problem into a linear system (emphasis on *briefly*: this is the same thing as in class, it is *really unnecessary* to write several pages about it).

[1] Be careful not to forget one of the four conditions to be checked!

Exercise II

Let Ω be a bounded Lipschitz subset of $\mathbb{R}^2$. We consider the bilinear form

$$a(u,v) = \int_\Omega \Big(2\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_2} + 2\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\Big)\,dx \\ + \int_\Omega uv\,dx + \int_{\partial\Omega} \gamma_0(u)\gamma_0(v)\,d\sigma.$$

Let us be given $f \in L^2(\Omega)$ and $g \in L^2(\partial\Omega)$. We set $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Show that for all $\xi \in \mathbb{R}^2$, we have $A\xi \cdot \xi \geq |\xi|^2$ where $\xi \cdot \zeta$ denotes the canonical scalar product on $\mathbb{R}^2$ and $|\xi|^2 = \xi \cdot \xi$.

b. Show that the variational problem: Find $u \in H^1(\Omega)$ such that

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad a(u,v) = \int_\Omega fv\,dx + \int_{\partial\Omega} g\gamma_0(v)\,d\sigma$$

has one and only one solution.

c. Assuming that the solution in question belongs to $H^2(\Omega)$, identify the boundary value problem thus solved.

Exercise III

We work in one space dimension with $\Omega =]0,1[$. Let c be a constant such that $c > -\pi^2$. We consider problem (P)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + cu(x,t) = 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$

for $x \in \Omega$ and $t \in [0,T]$, u_0 and T being given.

a. We assume that $u_0(0) = u_0(1) = 0$ and that u_0 is of class C^1 on $[0,1]$. Show that there exist coefficients a_k, $k \in \mathbb{N}^*$ such that

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin(k\pi x)e^{-(k^2\pi^2+c)t}$$

is a solution of problem (P).

We are going to approximate solutions of problem (P) that are of class C^2 in time t and C^4 in space x using the finite difference method. Let N, M be to integers ≥ 1, $h = \frac{1}{N+1}$, $k = \frac{T}{M+1}$, $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, N+1$ and $t_j = jk$, $j = 0, \ldots, M+1$.

Université Pierre et Marie Curie
M1 Mathématiques
MM26E Numerical Approximation of PDEs

We consider for this the following scheme:

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{k}-\frac{u_{i+1}^{j+1}-2u_i^{j+1}+u_{i-1}^{j+1}}{h^2}+cu_i^{j+1}=0,\ 1\leq i\leq N,$$

with boundary conditions

$$u_0^j=u_{N+1}^j=0,\ \text{for } j=0,\dots,M+1$$

and initial condition

$$u_i^0=u^0(x_i),\ i=1,\dots,N.$$

We denote by $U^j\in\mathbb{R}^N$ the vector with components u_i^j, $i=1,\dots,N$.

b. Is the scheme explicit or implicit?

c. Rewrite the scheme in the form of a vector recursion formula

$$U^{j+1}=\mathscr{A}_hU^j$$

giving the matrix $\mathscr{A}_h$ in terms of the $N\times N$ identity matrix I_h and of the $N\times N$ matrix

$$A_h=\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix}2&-1&0&\cdots&0\\-1&2&-1&\cdots&0\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\0&\cdots&-1&2&-1\\0&\cdots&0&-1&2\end{pmatrix}.$$

Is $\mathscr{A}_h$ a normal matrix?

d. Express the truncation (or consistency) error of the scheme

$$\varepsilon(u)_i^j=\frac{u(x_i,t_{j+1})-u(x_i,t_j)}{k}-\frac{u(x_{i+1},t_{j+1})-2u(x_i,t_{j+1})+u(x_{i-1},t_{j+1})}{h^2}+cu(x_i,t_{j+1}),$$

where u denotes an exact solution of the problem of C^4 in space and C^2 in time, in terms of h, k, $\frac{\partial^2u}{\partial t^2}$ et $\frac{\partial^4u}{\partial x^4}$. Deduce from this the order in time and space of the scheme for the family of norms $\|\cdot\|_{2,h}$ (recall that the norm in question on $\mathbb{R}^N$ is $\|U\|_{2,h}=\sqrt{h}\big(\sum_{i=1}^N U_i^2\big)^{1/2}$).

e. Show that the scheme is unconditionally stable in the $\|\cdot\|_{2,h}$ norms (recall that the eigenvalues of A_h are $\lambda_n=\frac{4}{h^2}\sin^2\big(\frac{n\pi}{2(N+1)}\big)$, $n=1,\dots,N$. You may want to use a second order expansion of the function $h\mapsto\frac{4}{h^2}\sin^2\big(\frac{\pi h}{2}\big)-\pi^2$ around 0).

f. Deduce from the previous questions that the scheme is unconditionally convergent in the $\|\cdot\|_{2,h}$ norms.

Université Pierre et Marie Curie
M1 Mathématiques
MM26E Numerical Approximation of PDEs

Version française

Exercice I

Soit T un triangle de sommets A^i, $i = 1,2,3$, et G son centre de gravité. Soient λ_i, $i = 1,2,3$, les coordonnées barycentriques associées au triangle T.

a. Soit $\mathscr{P} = \text{vect}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1\lambda_2\lambda_3\}$. Montrer que $\mathscr{P}$ est un espace vectoriel de dimension 4 tel que $P_1 \subset \mathscr{P} \subset P_3$.

b. On introduit les formes linéaires $\phi_i(P) = P(A^i)$, $i = 1,2,3$, et $\phi_4(P) = P(G)$ sur l'espace des polynômes. Construire une base de $\mathscr{P}$ duale de cette famille de formes linéaires[2] et en déduire que l'élément fini $\big(T, \mathscr{P}, \{\phi_i\}_{i=1,\dots,4}\big)$ est unisolvant.

c. Soit $\mathscr{T}_h$ une triangulation d'un ouvert polygonal Ω de $\mathbb{R}^2$ possédant N_t triangles et N_s sommets internes. On pose

$$V_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}); \forall T \in \mathscr{T}_h, v_{|T} \in \mathscr{P}; v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Montrer que tout élément de V_h est uniquement déterminé par la donnée de ses valeurs aux sommets internes et aux centres de gravité des triangles.

d. Réciproquement, montrer que pour tout jeu de valeurs en ces points, il existe un élément v_h de V_h qui prend ces valeurs en ces points (on montrera soigneusement la continuité de v_h).

e. Déduire des deux questions précédentes une base de V_h construite à l'aide de l'élément fini précédent. Quelle est la dimension de l'espace V_h ?

f. En supposant que l'on cherche à approcher la solution u d'un problème variationnel posé sur $V = H_0^1(\Omega)$ faisant intervenir une forme bilinéaire a continue et V-elliptique, et une forme linéaire continue ℓ, indiquer *brièvement* comment utiliser l'espace V_h et la base construite précédemment pour se ramener à un système linéaire (il s'agit d'une question de cours, il est donc *tout à fait inutile* d'en mettre plusieurs pages).

Exercice II

Soit Ω un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^2$. On considère la forme bilinéaire

$$a(u,v) = \int_\Omega \Big(2\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_2} + 2\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\Big)\, dx + \int_\Omega uv\, dx + \int_{\partial\Omega} \gamma_0(u)\gamma_0(v)\, d\sigma$$

[2] Attention à ne pas oublier une des quatre conditions à vérifier !

et on se donne $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$. On note $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^2$, on a $A\xi \cdot \xi \geq |\xi|^2$ où $\xi \cdot \zeta$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$ et $|\xi|^2 = \xi \cdot \xi$.

b. Montrer que le problème variationnel : trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad a(u,v) = \int_\Omega f v \, dx + \int_{\partial\Omega} g \gamma_0(v) \, d\sigma$$

admet une solution et une seule.

c. En supposant que cette solution appartient à $H^2(\Omega)$, identifier le problème aux limites ainsi résolu.

Exercice III

On se place en dimension 1 d'espace avec $\Omega =]0,1[$. Soit c est une constante telle que $c > -\pi^2$. On s'intéresse au problème (P)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + cu(x,t) = 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$

pour $x \in \Omega$ et $t \in [0,T]$, u_0 et T donnés.

a. On suppose que $u_0(0) = u_0(1) = 0$ et que u_0 est de classe C^1 sur $[0,1]$. Montrer que l'on peut trouver des coefficients a_k, $k \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin(k\pi x) e^{-(k^2\pi^2+c)t}$$

est solution du problème (P).

On va approcher les solutions de classe C^2 en temps t et C^4 en espace x du problème (P) par différences finies. Soit N, M deux entiers ≥ 1 , $h = \frac{1}{N+1}$, $k = \frac{T}{M+1}$, $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, N+1$ et $t_j = jk$, $j = 0, \ldots, M+1$.

On considère pour cela le schéma suivant :

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} - \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} + cu_i^{j+1} = 0, \; 1 \leq i \leq N,$$

et pour les conditions aux limites,

$$u_0^j = u_{N+1}^j = 0, \text{ pour } j = 0, \ldots, M+1$$

et la condition initiale

$$u_i^0 = u^0(x_i),\ i = 1, \ldots, N.$$

On note $U^j \in \mathbb{R}^N$ le vecteur de composantes u_i^j, $i = 1, \ldots, N$.

b. Ce schéma est-il explicite ou implicite ?

c. Réécrire le schéma sous forme d'une récurrence vectorielle

$$U^{j+1} = \mathscr{A}_h U^j$$

en explicitant la matrice $\mathscr{A}_h$ en fonction de la matrice identité I_h de taille $N \times N$ et de la matrice $N \times N$

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathscr{A}_h$ est-elle normale ?

d. Exprimer l'erreur de consistance de ce schéma

$$\varepsilon(u)_i^j = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} - \frac{u(x_{i+1}, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_{j+1}) + u(x_{i-1}, t_{j+1})}{h^2} + cu(x_i, t_{j+1}),$$

où u désigne une solution exacte du problème de classe C^4 en espace et C^2 en temps, en fonction de h, k, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ et $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$. En déduire l'ordre de ce schéma en temps et en espace pour la famille de normes $\|\cdot\|_{2,h}$ (on rappelle que la norme sur $\mathbb{R}^N$ dont il est question est $\|U\|_{2,h} = \sqrt{h}\big(\sum_{i=1}^N U_i^2\big)^{1/2}$).

e. Montrer que le schéma est inconditionnellement stable en norme $\|\cdot\|_{2,h}$ (on rappelle que les valeurs propres de A_h sont $\lambda_n = \frac{4}{h^2}\sin^2\big(\frac{n\pi}{2(N+1)}\big)$, $n = 1, \ldots, N$. On pourra être amené à considérer un développement limité à l'ordre 2 de la fonction $h \mapsto \frac{4}{h^2}\sin^2\big(\frac{\pi h}{2}\big) - \pi^2$ au voisinage de 0).

f. En déduire que le schéma est inconditionnellement convergent pour les normes $\|\cdot\|_{2,h}$.