

Diffraction à l'infini

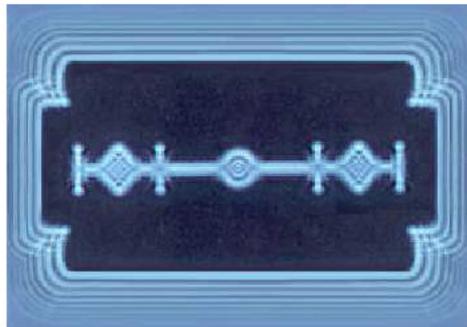


I) Principe d'Huygens - Fresnel :

1 – Présentation du phénomène de diffraction :

Faits expérimentaux : Le phénomène est décrit dès le 17ème siècle et s'observe facilement dans le quotidien.

- En 1665, le Père Grimaldi constate qu'au contour des obstacles ou au bord d'un trou la lumière subit un éparpillement, et appelle ce phénomène *diffraction*.
- Lorsqu'une source ponctuelle éclaire un objet, on constate des modulations de l'intensité autour de l'ombre géométrique.
- Si l'on cherche à isoler un rayon lumineux en envoyant un faisceau parallèle à travers un trou de plus en plus petit, on s'aperçoit que lorsque le trou est assez petit, le faisceau émergent diverge.
- Si l'on observe des lampadaires à travers un rideau, on voit des taches irisées de diffraction.

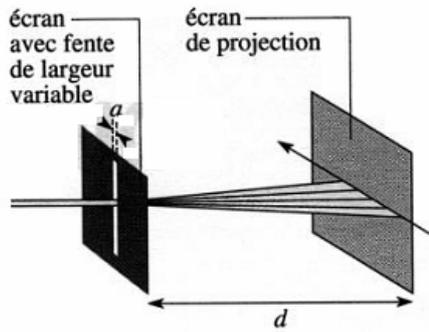


Diffraction de la lumière autour d'obstacles.

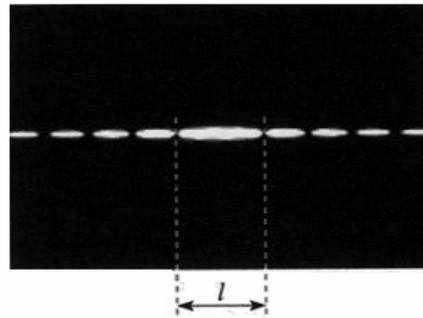
Notion de diffraction : La diffraction est un éparpillement de la lumière par les bords d'un obstacle avec apparition d'oscillation de l'éclairement près de l'ombre géométrique. La diffraction concerne aussi bien les ondes électromagnétiques (donc les ondes lumineuses) que les ondes mécaniques (ondes sonores, ondes à la surface de l'eau ...). Dans le cadre de l'optique, le phénomène de diffraction met en défaut les lois de l'optique géométrique pour laquelle la propagation de la lumière est rectiligne dans un milieu homogène et transparent. En fait le phénomène de diffraction apparaît chaque fois que l'onde lumineuse rencontre un obstacle mais les effets ne sont manifestement observables que lorsque les dimensions de cet obstacle sont de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde.

$$\text{Optique Géométrique} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \text{Optique Ondulatoire}$$

L'expérience suivante montre la diffraction d'un rayon laser par une fente de largeur variable a et de « grande » hauteur.



Diffraction d'un faisceau laser par une fente fine.



Diffraction d'un faisceau laser par une fente.

Sur un écran de projection située à quelques mètres, on constate que la tâche quasi-punctuelle formée par le faisceau, en l'absence d'obstacle, s'élargit perpendiculairement à la fente lorsque celle-ci se rétrécit. De plus, l'éclairement de l'écran n'est pas uniforme : autour de la tâche centrale existent des tâches secondaires, moins larges et moins lumineuses.

Des mesures expérimentales relient d (distance entre la fente et l'écran), ℓ (largeur de la tâche centrale), λ (longueur d'onde) et a (largeur de la fente) :

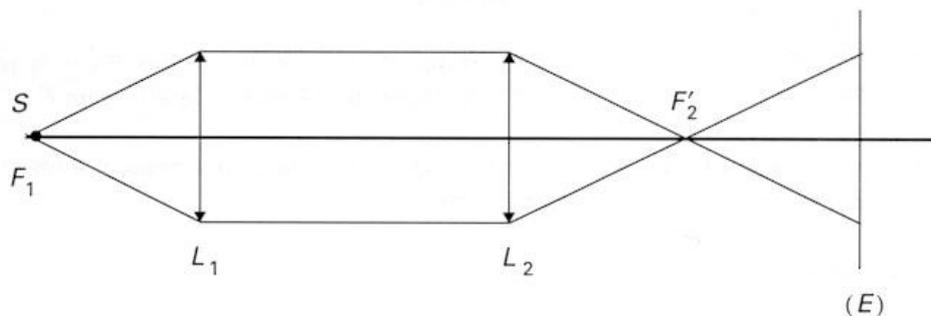
$$\ell \approx 2 \frac{\lambda d}{a}$$

Ce qui correspond à une tâche de demi-largeur angulaire $\alpha \approx \frac{\lambda}{a}$.

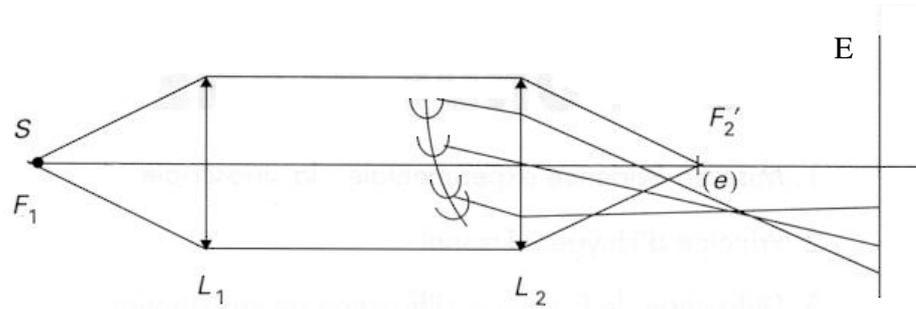
Si les lois de propagation rectiligne étaient vérifiées, la tâche serait plus fine dans la direction perpendiculaire à la fente : la tentative de limitation du faisceau a en fait abouti à un résultat opposé. En revanche, dans la direction de la fente, on n'observe aucun élargissement.

Mise en évidence expérimentale ; la strioscopie :

L'expérience suivante permet de mettre en évidence la diffraction d'une manière très nette. Au moyen d'une lentille L_1 , on forme un faisceau de lumière parallèle en plaçant une source de lumière monochromatique S au foyer objet F_1 de L_1 . On reçoit ce faisceau parallèle sur une lentille L_2 de foyer F'_2 et on place sur le faisceau réfracté un écran (E) .



On place alors en F'_2 un petit écran opaque (e) qui intercepte complètement le faisceau réfracté, de sorte que l'écran (E) ne reçoit alors plus de lumière.



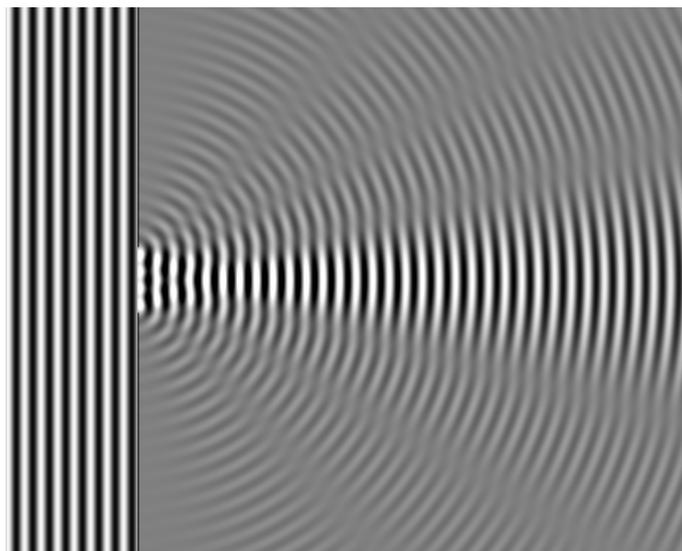
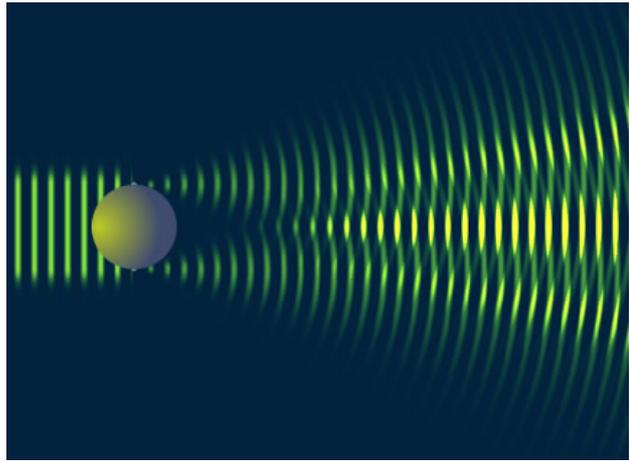
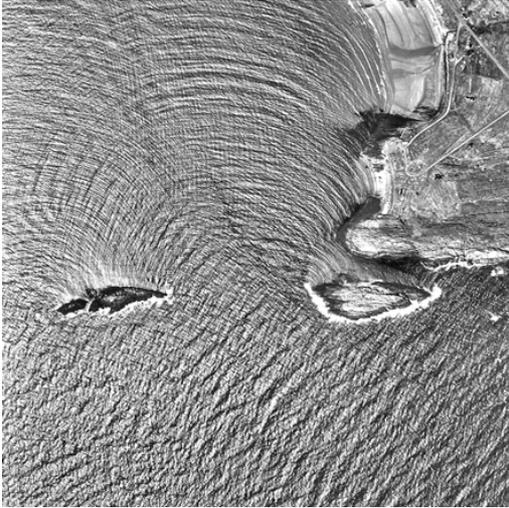
Dans le plan conjugué de (E) par rapport à L_2 , on place alors une plume P : on observe alors sur (E) l'image de la plume. L'existence de cette image est bien due à la diffraction, puisque, en l'absence de diffraction, l'écran (e) arrêterait toute la lumière. Le phénomène s'explique de la manière suivante : la plume P diffracte la lumière issue de L_1 , de sorte qu'après traversée de L_2 , la lumière passe au voisinage de (e) sans être arrêtée par cet écran.

Diffraction du son :

Lorsqu'une porte est entrebâillée, le bruit extérieur s'entend presque autant que si la porte était ouverte. Pourquoi ? Au fur et à mesure que la porte se ferme, le son devient plus aigu, pourquoi ?

Réponse :

Les longueurs d'ondes acoustiques (surtout celles des sons graves) étant plus grandes que l'ouverture de la porte, le son est diffracté de manière importante et ne se propage donc pas en ligne droite comme des rayons. Au fur et à mesure que la porte se ferme, les sons de plus courtes longueurs d'ondes sont à leur tour de plus en plus diffractés, ce qui correspond à un spectre sonore renforcé vers les aigus.

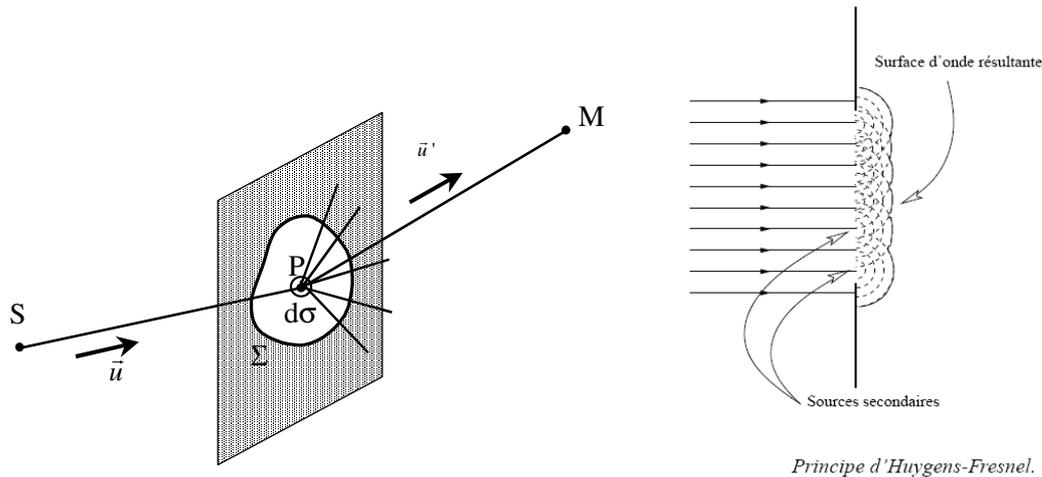


Quelques photos de phénomènes de diffraction

2 - Enoncé du principe de Huygens-Fresnel :

Soit (Σ) une ouverture plane éclairée par une source ponctuelle (S) monochromatique de longueur d'onde λ_0 . Soit un découpage de (Σ) en éléments de surface $d\sigma(P)$ centrés en P. Alors, pour le calcul de l'éclairement en un point M :

- Chaque élément de surface se comporte comme une source ponctuelle fictive, émettant une ondelette dont l'amplitude complexe instantanée en P est proportionnelle à l'amplitude complexe instantanée $\underline{a}_S(P,t)$ de l'onde émise par S en P et à l'élément de surface $d\sigma(P)$.



- Les sources fictives sont cohérentes : les ondes émises par ces sources secondaires interfèrent donc entre elles.

Remarque : la 1^{ère} partie de ce principe est due à Huygens (en 1678) et la 2^{nde} à Fresnel (en 1818).

3 – Expression mathématique du principe :

Dans le cas où S et M sont à distance finie de (Σ) dans un milieu homogène, les ondes correspondantes sont sphériques. Si l'ensemble du dispositif est plongé dans l'air d'indice 1, l'amplitude complexe instantanée reçue en P s'écrit, avec $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$:

$$\underline{a}_S(P,t) = \frac{A_0}{SP} \exp\left[i(\omega t - k_0 \vec{u} \cdot \overline{SP})\right]$$

(Le terme $1 / SP$ peut s'expliquer par des considérations énergétiques : le flux du vecteur de Poynting à travers toute sphère centrée sur S est constant).

L'amplitude complexe émise en M par la source élémentaire centrée en P s'écrit donc :

$$d\underline{a}_P(M,t) = K \underline{a}_S(P,t) \frac{\exp\left[-ik_0 \vec{u}' \cdot \overline{PM}\right]}{PM} d\sigma(P)$$

(Le terme $1 / PM$ traduit la nature sphérique de l'onde et le terme en $\exp[-ik_0 PM]$ traduit la propagation de P à M).

Soit :

$$d\underline{a}_p(M, t) = K \frac{A_0 \exp\left[i(\omega t - k_0 \vec{u} \cdot \overline{SP})\right]}{SP} \frac{\exp\left[-ik_0 \vec{u}' \cdot \overline{PM}\right]}{PM} d\sigma(P)$$

Les sources fictives étant cohérentes, leurs amplitudes complexes instantanées sont additives :

$$\underline{a}(M, t) = K \iint_{(\Sigma)} \frac{A_0}{SP} \exp\left[i(\omega t - k_0 \vec{u} \cdot \overline{SP})\right] \frac{\exp\left[-ik_0 \vec{u}' \cdot \overline{PM}\right]}{PM} d\sigma(P)$$

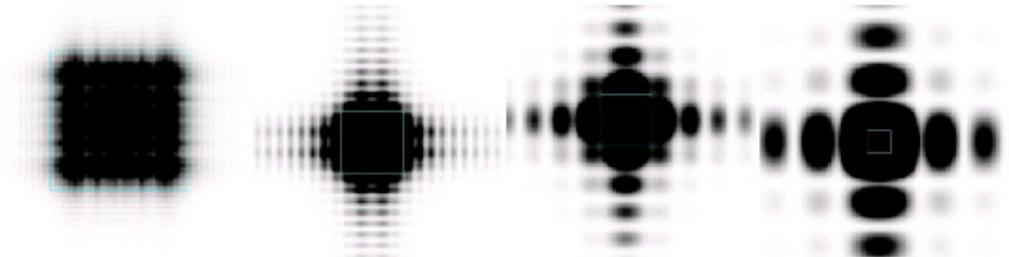
L'amplitude complexe vaut alors (en simplifiant par $\exp(i\omega t)$) :

$$\underline{a}(M) = K \iint_{(\Sigma)} \frac{A_0}{SP} \frac{1}{PM} \exp\left[-ik_0 \vec{u} \cdot \overline{SP}\right] \exp\left[-ik_0 \vec{u}' \cdot \overline{PM}\right] d\sigma(P)$$

4 – Distinction « diffraction à distance finie » et « diffraction à l'infini » :

Lorsque la distance entre la pupille de diffraction et l'écran d'observation est finie, on parle de diffraction à distance finie ou « diffraction de Fresnel ».

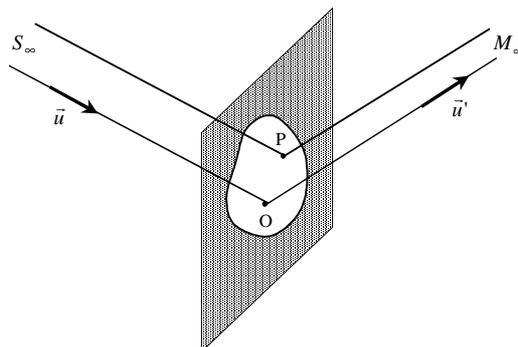
Dans le cas contraire, on parle de diffraction à l'infini ou encore « diffraction de Fraunhofer ». Les calculs sont plus simples et l'on étudiera le phénomène de diffraction dans une direction définie par le vecteur unitaire \vec{u} ; en pratique, les observations se feront dans le plan focal d'une lentille convergente.



Passage du régime de Fresnel au régime de Fraunhofer : évolution de la figure de diffraction lorsque le plans d'observation s'éloigne de l'ouverture.

Lorsque les points S et M sont très éloignés, les variations de $1 / SP$ et $1 / PM$ intervenant dans l'expression complexe de l'amplitude sont négligeables et ces termes peuvent être considérés comme des constantes qui peuvent être incluses dans la constante K. Il vient :

$$\underline{a}(M) = KA_0 \iint_{(\Sigma)} \exp\left[-ik_0 \vec{u} \cdot \overline{SP}\right] \exp\left[-ik_0 \vec{u}' \cdot \overline{PM}\right] d\sigma(P)$$



On rappelle que le vecteur \vec{u} donne la direction de l'onde initiale et \vec{u}' la direction de l'onde diffractée. On a alors, en faisant intervenir le point origine O de la pupille :

$$\overline{SP} = \overline{OP} - \overline{OS} \quad \text{et} \quad \overline{PM} = \overline{OM} - \overline{OP}$$

D'où :

$$\underline{a}(M) = KA_0 \iint_{(\Sigma)} \exp\left[-ik_0\vec{u} \cdot (\overline{OP} - \overline{OS})\right] \exp\left[-ik_0\vec{u}' \cdot (\overline{OM} - \overline{OP})\right] d\sigma(P)$$

D'où l'expression « utilisable » du principe d'Huygens-Fresnel :

$$\underline{a}(M) = KA_0 \exp\left[ik_0\vec{u} \cdot \overline{OS} - ik_0\vec{u}' \cdot \overline{OM}\right] \iint_{(\Sigma)} \exp\left[ik_0(\vec{u}' - \vec{u}) \cdot \overline{OP}\right] d\sigma(P)$$

On remarque que le 1^{er} terme en exponentiel ne dépend plus du point P situé sur la pupille diffractante.

On peut le noter :

$$\exp\left[ik_0\vec{u} \cdot \overline{OS} - ik_0\vec{u}' \cdot \overline{OM}\right] = \exp\left[-ik_0(S_\infty OM_\infty)\right]$$

où $(S_\infty OM_\infty)$ représente le chemin optique du rayon référence qui passe par le centre de la pupille diffractante.

Réalisation pratique des conditions de Fraunhofer :

La source S à l'infini peut être obtenue à l'aide d'un laser et l'observation à l'infini peut être approchée par l'observation sur un écran éloigné.

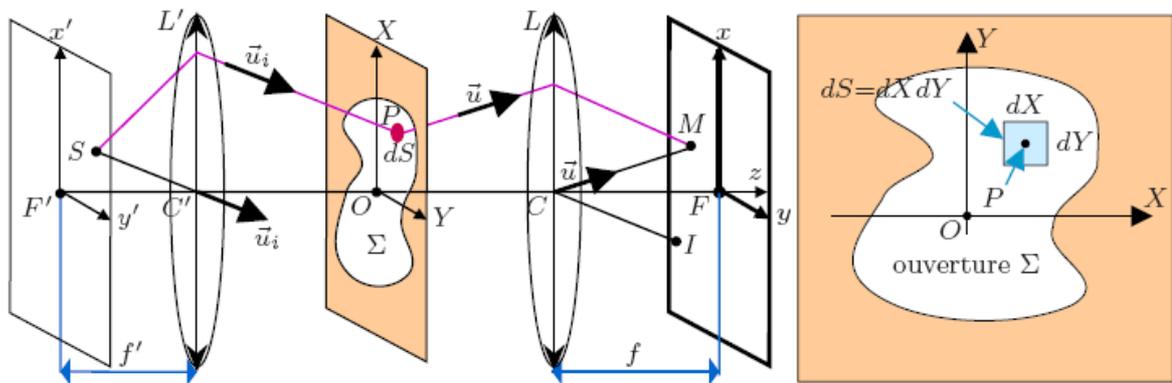
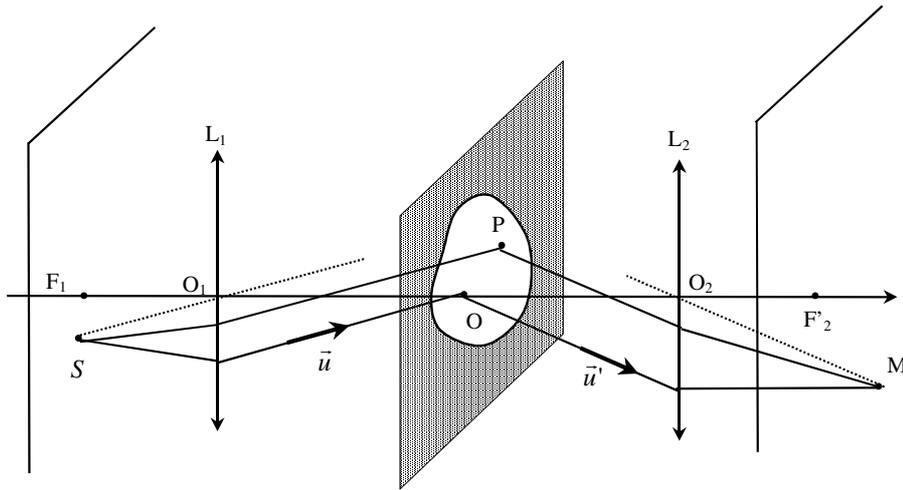
Si l'on note $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\vec{u}'(\alpha', \beta', \gamma')$, alors, avec $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ et $\overline{OP}(X, Y)$:

$$\underline{a}(M) = KA_0 \exp\left[-ik_0(S_\infty OM_\infty)\right] \iint_{(\Sigma)} \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda_0}((\alpha' - \alpha)X + (\beta' - \beta)Y)\right] dX dY$$

5 – Diffraction à l'infini d'une onde plane par un diaphragme plan :

On peut aussi réaliser un collimateur en plaçant une source ponctuelle S dans le plan focal objet d'une lentille mince convergente (L_1) et en plaçant l'écran d'observation dans le plan focal image d'une lentille mince convergente (L_2). Les directions \vec{u} et \vec{u}' s'obtiennent dans ce cas en utilisant les rayons non déviés, passant par les centres des lentilles :

$$\vec{u} = \frac{\overline{SO_1}}{SO_1} \approx \frac{\overline{SO_1}}{f'_1} \quad \text{et} \quad \vec{u}' = \frac{\overline{O_2M}}{O_2M} \approx \frac{\overline{O_2M}}{f'_2}$$

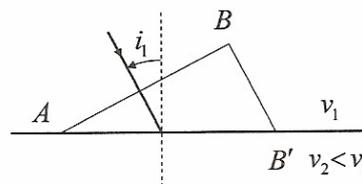


Si on note (x_S, y_S, z_S) les coordonnées de S et (x, y, z) celles de M :

$$\vec{u} \approx \begin{pmatrix} -\frac{x_S}{f'_1} \\ -\frac{y_S}{f'_1} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{u}' \approx \begin{pmatrix} \frac{x}{f'_2} \\ \frac{y}{f'_2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

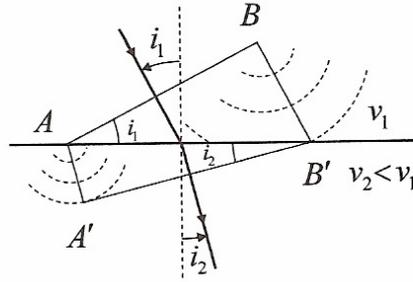
Exemple ; une application originale du principe d'Huygens – Fresnel :

Un dioptre AB' sépare deux milieux dans lesquels les célérités sont v_1 et $v_2 < v_1$. Sur le schéma ci-contre AB est un plan d'onde dans le milieu 1 à l'instant t (A est sur le dioptre). Représenter le plan d'onde correspondant $A'B'$ dans le milieu 2 à l'instant $t + \Delta t$ (B' est sur le dioptre) en appliquant le principe d'Huygens-Fresnel. Montrer que cela permet de retrouver la loi de Descartes-Snell sur la réfraction ; commentaire.



Réponse :

Il faut compléter la figure de l'énoncé par les ondelettes émises par les sources secondaires A et B de la surface d'onde AB à l'instant t en faisant bien apparaître que dans leur propagation $v_2 < v_1$. Leur enveloppe donne la surface d'onde $A'B'$ à l'instant $t + \Delta t$. On note que la réfraction des plans d'onde entraîne celle des rayons qui leur sont perpendiculaires (théorème de Malus).



Avec $\Delta t = \frac{BB'}{v_1} = \frac{AA'}{v_2}$ soit $\frac{AB' \sin i_1}{v_1} = \frac{AB' \sin i_2}{v_2}$, il vient la relation

$$\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2}$$

En optique où $v_i = c/n_i$, on retrouve la loi de réfraction de Descartes-Snell :

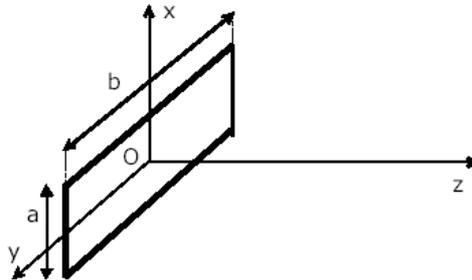
$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

Mais le résultat encadré est plus général et s'applique à d'autres types d'ondes (par exemple les ondes acoustiques).

II) Exemple d'une ouverture rectangulaire :

1 – Expression de l'éclairement :

On intègre la relation précédente sur une ouverture rectangulaire (largeur a et longueur b) en remarquant que les variables x et y sont indépendantes.



On choisit l'origine O au centre de l'ouverture rectangulaire ; alors, en notant X et Y les coordonnées du point P :

$$(\bar{u}' - \bar{u}) \cdot \overline{OP} = (\alpha' - \alpha) X + (\beta' - \beta) Y$$

L'intégrale se factorise :

$$\underline{a}(M) = KA_0 \exp[-ik_0(S_\infty OM_\infty)] \int_{-a/2}^{+a/2} \exp\left[i \frac{2\pi}{\lambda_0} ((\alpha' - \alpha) X)\right] dX \int_{-b/2}^{+b/2} \exp\left[i \frac{2\pi}{\lambda_0} ((\beta' - \beta) Y)\right] dY$$

Soit :

$$\underline{a}(M) = KA_0 \exp[-ik_0(S_\infty OM_\infty)] \frac{2i \sin\left(\frac{2\pi (\alpha' - \alpha) a}{\lambda_0}\right)}{i \frac{2\pi}{\lambda_0} (\alpha' - \alpha)} \frac{2i \sin\left(\frac{2\pi (\beta' - \beta) b}{\lambda_0}\right)}{i \frac{2\pi}{\lambda_0} (\beta' - \beta)}$$

En définissant la fonction sinus-cardinal ($\text{sinc}(u) = \frac{\sin u}{u}$) :

$$\underline{a}(M) = KA_0 ab \exp[-ik_0(S_\infty OM_\infty)] \text{sinc}\left(\frac{\pi(\alpha' - \alpha)a}{\lambda_0}\right) \text{sinc}\left(\frac{\pi(\beta' - \beta)b}{\lambda_0}\right)$$

Ainsi le retard de phase de l'onde diffractée en M vaut $\phi = k_0(S_\infty OM_\infty)$. Il en résulte que l'onde diffractée en M par l'ouverture rectangulaire est en phase avec l'ondelette émise par son centre O.

L'éclairement vaut, en notant $E_0 = K^2 A_0^2 a^2 b^2$:

$$E(M) = E_0 \text{sinc}^2\left(\frac{\pi(\alpha' - \alpha)a}{\lambda_0}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{\pi(\beta' - \beta)b}{\lambda_0}\right)$$

Le graphe de la fonction $\text{sinc}^2(u)$ est donné ci-dessous. On constate que :

- $\text{sinc}^2(u)$ présente un maximum absolu, appelé maximum principal, égal à 1 en $u = 0$.
- $\text{sinc}^2(u)$ s'annule pour $u = n\pi$, avec n entier non nul.
- Entre deux zéros successifs, $\text{sinc}^2(u)$ présente un maximum secondaire situé pratiquement au milieu de deux zéros successifs. On peut ainsi évaluer :

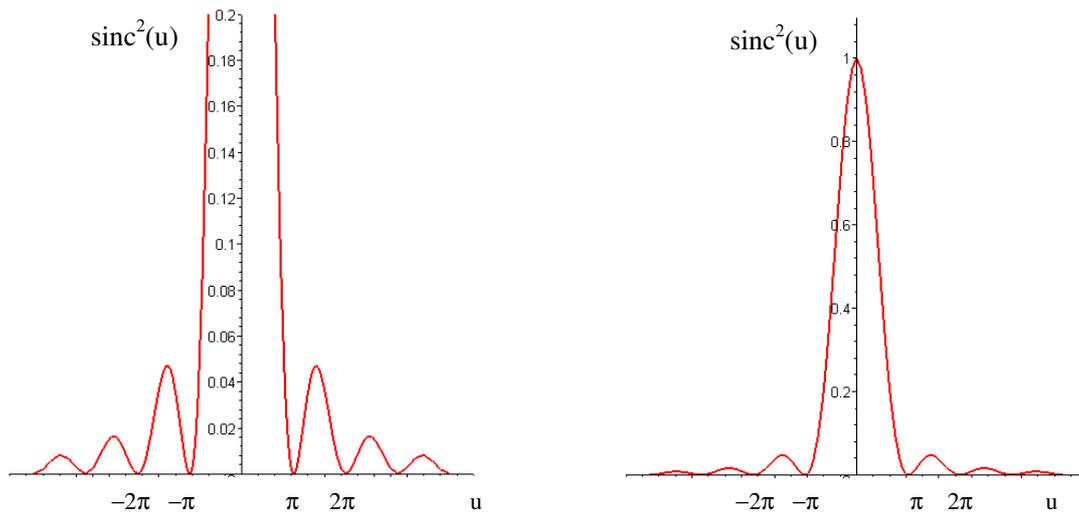
$$\text{sinc}^2\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0,04 \quad \text{et} \quad \text{sinc}^2\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0,016$$

Représentation graphique de l'éclairement :

L'éclairement $E(M) = E_0 \text{sinc}^2\left(\frac{\pi(\alpha' - \alpha)a}{\lambda_0}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{\pi(\beta' - \beta)b}{\lambda_0}\right)$ est donné sur les figures suivantes (à α ou β fixés, en choisissant $b = 2a$).

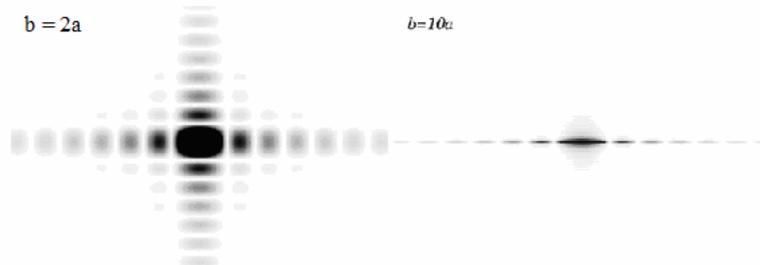
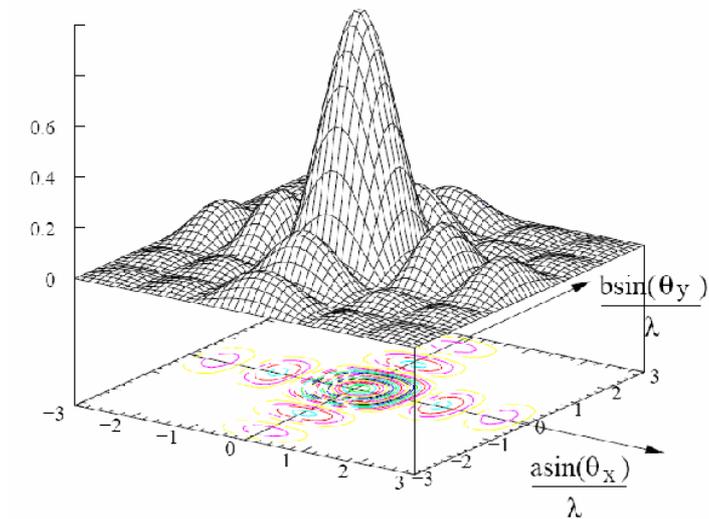
En fonction de x et y , l'éclairement devient (en supposant $f'_1 = f'_2 = f'$) :

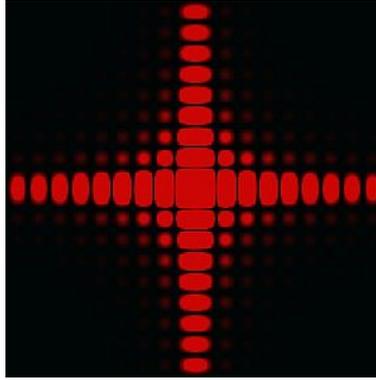
$$E(M) = E_0 \text{sinc}^2\left(\frac{\pi(x - x_s)a}{\lambda_0 f' }\right) \text{sinc}^2\left(\frac{\pi(y - y_s)b}{\lambda_0 f' }\right)$$



Graphique de la fonction $\text{sinc}^2(u)$

amplitude de l'onde diffractée par une fente avec $a=b$





Conclusions :

- L'éclairement est maximum pour $\alpha = \alpha'$ et $\beta' = \beta$, c'est-à-dire pour $\vec{u} = \vec{u}'$, soit au point M situé sur le rayon lumineux non dévié. M est l'image géométrique de la source S à travers les deux lentilles.

Ce résultat est général : « Dans un phénomène de diffraction à l'infini, l'éclairement est maximal sur l'image géométrique de la source ».

- L'essentiel de l'énergie lumineuse est concentrée dans la frange centrale de diffraction, centrée sur l'image géométrique S' de la source S et de demi-largeurs angulaires :

$$|\alpha' - \alpha| = \frac{\lambda_0}{a} \quad \text{et} \quad |\beta' - \beta| = \frac{\lambda_0}{b}$$

On retrouve dans la figure de diffraction les dimensions caractéristiques de la pupille diffractante. « Dans une figure de diffraction à l'infini, les dimensions caractéristiques de la pupille diffractante δ interviennent par leurs inverses $1 / \delta$ ».

Ainsi, dans le cas où $b = 2a$, les franges sont deux fois plus longues selon (Ox) que selon (Oy). On peut aussi dire que le phénomène de diffraction est le plus marqué dans la direction où la fente est la plus étroite.

- Les franges secondaires de diffraction sont deux fois moins larges que la frange centrale et beaucoup moins lumineuses. On peut calculer l'intensité des taches relativement à celle de la tache centrale ; pour les 4 taches les plus voisines, cette intensité relative est de 4,7% et elle tombe à 1,6% pour les 4 suivantes.

2 – Cas limite d'une fente fine :

On s'intéresse au cas fréquent où l'une des dimensions de l'ouverture est très inférieure à l'autre ; ici, on considérera que $a \ll b$.

La diffraction s'effectue alors dans la direction verticale (Ox) ; le point P de la pupille diffractante est alors définie uniquement par sa coordonnée X et l'expression de l'amplitude diffractée se simplifie :

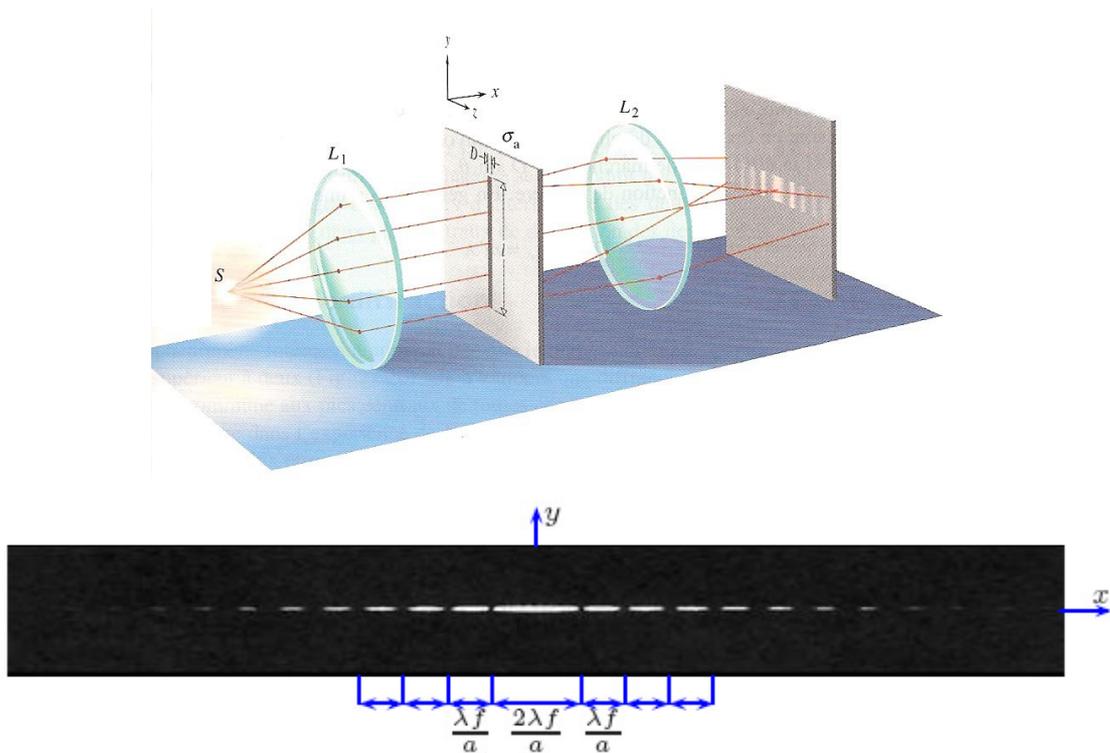
$$\underline{a}(M) = KA_0 \exp[-ik_0(S_\infty OM_\infty)] \int_{-a/2}^{a/2} \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda_0}((\theta' - \theta) X)\right] dX$$

où θ et θ' désignent les angles d'inclinaison des rayons incident et diffracté par rapport à l'axe optique (Voir schéma ci-dessous, dans le cas d'une incidence normale).

L'éclairement est ensuite :

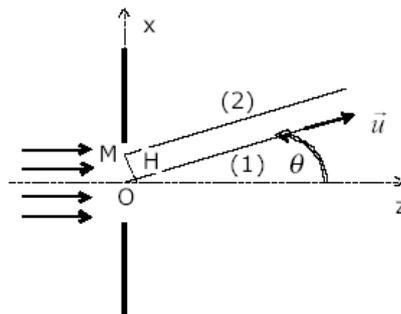
$$E(M) = E_0 \sin^2 \left(\frac{\pi(\theta' - \theta)a}{\lambda_0} \right)$$

Selon la direction (Oy) et pour $b \gg \lambda_0$, les taches se rapprochent et se confondent en une tache centrale unique ; on se contente donc d'étudier le phénomène dans le plan Oxz.



Calcul direct de l'intensité diffractée dans le cas d'une incidence normale :

On se place dans le cas de la figure ci-dessous :



L'amplitude diffractée en un point M d'un écran situé dans le plan focal d'une lentille CV est :

$$a(M) = K \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp(ik_0 \cdot OH) b dX = K \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot X \theta\right) b dX$$

Avec $\theta = x / f'$, il vient :

$$a(M) = K \int_{-a/2}^{a/2} \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{x}{f'} X\right) b dX = Kab \sin c \left(\frac{\pi xa}{\lambda_0 f'} \right)$$

On en déduit ensuite l'éclairement :

$$I(M) = I_0 \sin^2 \left(\frac{\pi x a}{\lambda_0 f'} \right)$$

La largeur de la tâche centrale est donc de $d = \frac{2\lambda_0 f'}{a}$. Si on considère que le phénomène de diffraction n'est plus visible si d devient inférieure à 1 mm, alors, avec $F = 20$ cm par exemple :

$$a > 400 \lambda_0$$

III) Cas d'une ouverture circulaire :

C'est un cas très fréquent en diffraction car la monture des lentilles ou des miroirs utilisés dans les instruments d'optique (appareils photographiques, télescopes, ...) sont généralement circulaires.

La figure de diffraction obtenue a la symétrie de révolution : elle se compose d'anneaux alternativement sombres et brillants, entourant une tâche centrale beaucoup plus brillante, qui porte le nom de Tache d'Airy.

Les limites angulaires de la tâche d'Airy sont données par :

$$\sin \theta_L = 1,22 \frac{\lambda_0}{D}$$

où D est le diamètre du diaphragme circulaire.

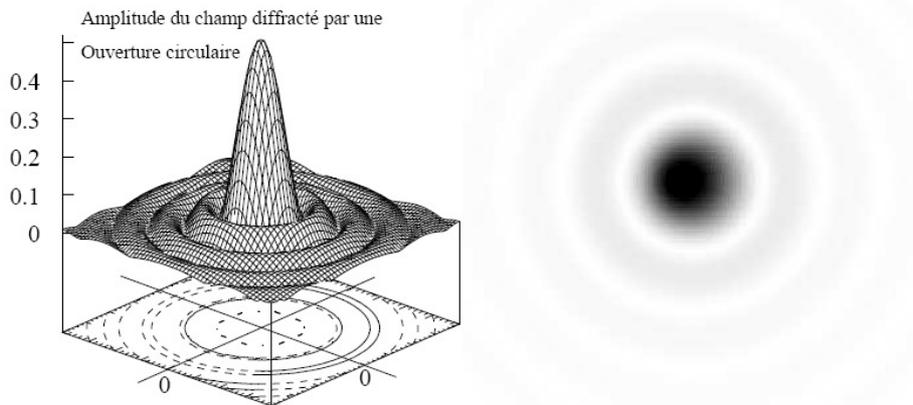


Figure de diffraction générée par une pupille circulaire. La tache circulaire centrale s'appelle la tache d'Airy.

Remarque : si E_{\max} est l'éclairement au centre de la tache d'Airy, celui correspondant au premier anneau brillant n'est plus que de $1,75\% \times E_{\max}$.

On peut évaluer le rayon du 1^{er} anneau noir, obtenu quand $\theta = \theta_L$; alors $r = f' \theta_L = 1,22 \frac{\lambda_0 f'}{D}$

IV) Diagramme de phase, diagramme d'amplitude :

On a considéré jusqu'à présent que la pupille n'avait pas d'action sur l'amplitude des ondes qui, pour les points de l'ouverture, est supposée être la même juste avant le diaphragme et juste après le diaphragme (la pupille laisse passer l'onde par l'ouverture et elle l'arrête par sa partie opaque).

Il existe des cas d'ouverture agissant de manière plus nuancée.

Exemple d'application ; apodisation

On étudie la figure de diffraction par une fente éclairée par un faisceau monochromatique de lumière parallèle en incidence normale. Grâce à un cache, on obtient un coefficient de transparence variable avec l'abscisse, sur la largeur de la fente :

$$t(X) = \exp\left(-\frac{|X|}{a}\right)$$

On admet que la décroissance de cette fonction avec $|X|$ est assez rapide pour que l'on puisse raisonner avec X variant sur $[-\infty, +\infty]$. L'observation a lieu dans le plan focal image d'un objectif.

- Comment peut-on produire un faisceau de lumière monochromatique et parallèle à l'axe, à partir d'une lampe à incandescence blanche ?
- Soit F' le foyer de l'objectif et F sa distance focale, quelle est l'expression des variations relatives de l'éclairement en fonction de l'abscisse x , sur l'axe ($F'x$) ?
- Par comparaison avec le cas d'une fente de coefficient de transparence uniformément égal à 1, quelles sont les caractéristiques de la nouvelle figure de diffraction ?

Solution :

a) Il faut utiliser un filtre sélectif capable de sélectionner un intervalle de longueur d'ondes étroit. De plus, la source placée à distance finie ne produit pas un faisceau de lumière parallèle. On peut donc utiliser un diaphragme placé au foyer objet d'une lentille convergente. Le faisceau en sortie est alors composé de rayons issus du foyer, donc parallèles à l'axe optique de la lentille. Le réglage du parallélisme des rayons peut être effectué par autocollimation à l'aide d'un miroir.

b) On doit calculer :

$$\underline{A}(\alpha) = K \int_{-\infty}^{\infty} t(X) \exp\left(j \frac{2\pi\alpha X}{\lambda}\right) dX.$$

Pour X parcourant l'intervalle $[-\infty, 0]$: $t(X) = \exp\left(\frac{X}{a}\right)$,

tandis que sur $[0, \infty]$: $t(X) = \exp\left(-\frac{X}{a}\right)$.

On calcule donc la somme de deux intégrales :

$$\int_{-\infty}^0 \exp\left(\frac{X}{a} + j \frac{2\pi\alpha X}{\lambda}\right) dX = \frac{1}{\frac{j2\pi\alpha}{\lambda} + \frac{1}{a}}$$

et de même :

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{X}{a} + j \frac{2\pi\alpha X}{\lambda}\right) dX = \frac{-1}{\frac{j2\pi\alpha}{\lambda} - \frac{1}{a}}.$$

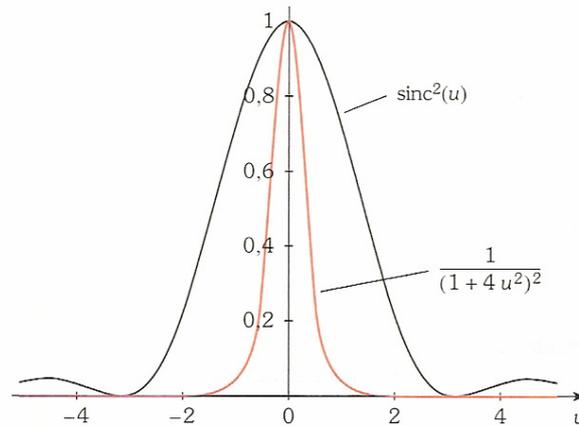
Par sommation, après réduction au même dénominateur, on aboutit à :

$$\underline{A}(\alpha) = \underline{A}_0 \frac{1}{1 + 4\pi^2 \frac{a^2 \alpha^2}{\lambda^2}}.$$

Le passage à l'éclairement, qui s'effectue usuellement par calcul du carré du module de l'amplitude complexe, s'obtient ici par simple élévation au carré :

$$\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon_0}{\left(1 + 4\pi^2 \frac{a^2 x^2}{\lambda^2 f'^2}\right)^2}.$$

c) Par comparaison avec l'expression $\varepsilon(\alpha) = \varepsilon_0 \text{sinc}^2\left(\frac{\pi \alpha x}{\lambda f'}\right)$, on constate que la nouvelle fonction est monotone décroissante pour x positif. Ainsi, on n'observe plus de franges de part et d'autre de l'image géométrique : la frange centrale n'est en revanche plus délimitée précisément par des abscisses où l'éclairement s'annule.



Un avantage de la disparition des pieds, en astronomie par exemple, est que l'on ne risque plus de confondre les maxima secondaires avec des objets moins lumineux situés au voisinage de l'objet central observé.

V) Diffraction par N motifs jumeaux :

1 – Expression de l'éclairement :

On envisage la diffraction à l'infini par un diaphragme constitué d'une association de N ouvertures identiques disjointes centrés sur des points O_i tels qu'on passe du motif (1) au motif (i) par une translation de vecteur $\overline{O_1 O_i} = (i-1) \vec{a}$ où \vec{a} est un vecteur constant.

Le principe d'Huygens-Fresnel s'écrit :

$$\underline{a}(M) = KA_0 \sum_{i=1}^N \iint_{(D_i)} \underline{t}(P) \exp(-ik_0(SPM)) d\sigma(P)$$

où la transmittance $\underline{t}(P)$ est celle des domaines (D_i) correspondants aux différentes ouvertures.

En faisant apparaître pour chaque domaine le chemin optique $(SO_i M)$ et la différence de marche :

$$(SPM) - (SO_i M) = (\vec{u} - \vec{u}') \cdot \overline{O_i P}$$

Il vient :

$$\underline{a}(M) = KA_0 \sum_{i=1}^N \exp(-ik_0(SO_i M)) \iint_{(D_i)} \underline{t}(P) \exp(ik_0(\vec{u}' - \vec{u}) \cdot \overline{O_i P}) d\sigma(P)$$

Les domaines étant identiques, l'intégrale double ne dépend pas de l'indice i et peut être factorisée :

$$\underline{a}(M) = KA_0 \iint_{(D_i)} \underline{t}(P) \exp(ik_0(\bar{u}' - \bar{u}) \cdot \overline{O_i P}) d\sigma(P) \left(\sum_{i=1}^N \exp(-ik_0(SO_i M)) \right)$$

L'éclairement total devient :

$$E(M) = K^2 A_0^2 \left| \iint_{(D_i)} \underline{t}(P) \exp(ik_0(\bar{u}' - \bar{u}) \cdot \overline{O_i P}) d\sigma(P) \right|^2 \left| \sum_{i=1}^N \exp(-ik_0(SO_i M)) \right|^2$$

Le 1^{er} terme correspond à l'éclairement diffracté par un motif (noté $E_{\text{motif}}(M)$) et le second est l'éclairement (noté $I(M)$) associé aux interférences entre N ondes d'éclairement unité émises par les origines O_i prises sur chaque motif :

$$E(M) = E_{\text{motif}}(M) I(M) \quad \text{avec} \quad I(M) = \left| \sum_{i=1}^N \exp(-ik_0(SO_i M)) \right|^2$$

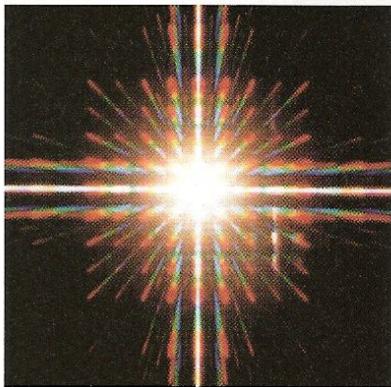


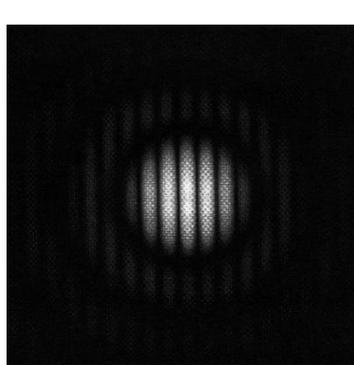
Figure de diffraction par un grand nombre d'ouvertures. C'est l'image d'une source ponctuelle de lumière blanche observée à travers un morceau de tissu serré.

Conclusion : l'éclairement $E(M)$ est le produit de l'éclairement $E_{\text{motif}}(M)$ qui serait diffracté par un des motifs s'il était seul par la fonction d'interférences $I(M)$ de N ondelettes d'éclairement unité émises par les origines O_i prises sur les motifs.

On utilise ce résultat dans le complément sur les trous et les fentes d'Young.

2 – Applications aux trous d'Young et aux fentes d'Young

Une plaque opaque est percée de deux trous circulaires, de même rayon R et leurs centres sont distants de a . Elle est éclairée sous incidence normale par une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ . On observe le phénomène de diffraction sur un écran placé dans le plan focal image d'une lentille de distance focale image f' .



Trous d'Young : figure de diffraction

Le terme d'interférences est celui de deux sources synchrones distance de a . Soit, sur l'écran, avec des notations habituelles :

$$E_{int}(M) \propto 1 + \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda f'}\right)$$

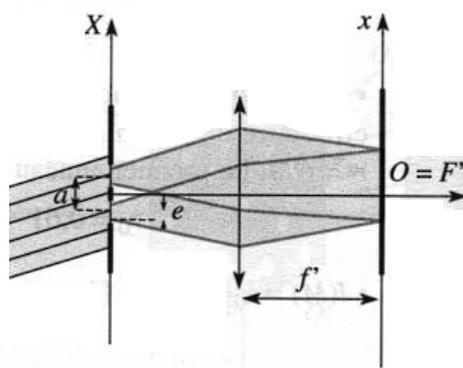
Le terme de diffraction est fonction de la distance $r = OM$ et s'écrit $E_{Diff}(M)$. Le 1^{er} anneau noir a pour rayon $r_0 = 0,61 \frac{\lambda_0 f'}{R}$.

Globalement, le terme de diffraction va moduler le terme d'interférences :

$$E(M) = KE_{Diff}(r) \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda f'}\right) \right)$$

Application aux fentes d'Young :

Une plaque opaque dans laquelle deux fentes longues (selon OY) sont percées, d'épaisseur e et distantes de a , est éclairée sous une incidence (α_i, β_i) par une OPPM de longueur d'onde λ . On souhaite déterminer la figure de diffraction obtenue dans le plan focal image d'une lentille de distance focale f' . La source de lumière est ici supposée ponctuelle.



Fentes de YOUNG.

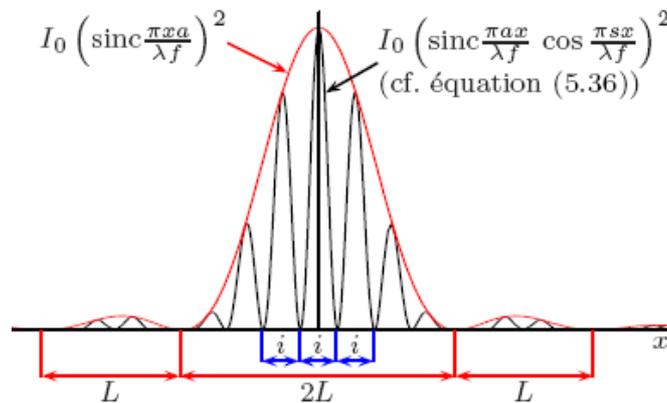
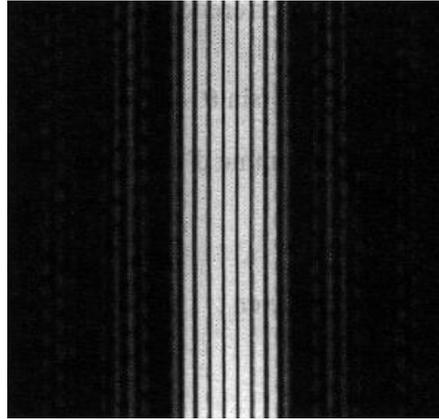
Le phénomène de diffraction ne se produit que dans la direction (Ox). La figure de diffraction, dans le plan d'observation, est localisée sur la droite $y = \beta_i f'$.

Le terme d'interférences est celui de deux sources ponctuelles synchrones distantes de a :

$$E_{int}(M) \propto 1 + \cos\left[\frac{2\pi a}{\lambda} \left(\frac{x}{f'} - \alpha_i\right)\right]$$

Le terme de diffraction est celui d'une fente de largeur e :

$$E_{Diff}(M) \propto \sin^2 \left(\frac{\pi \left(\frac{x}{f'} - \alpha_i\right) e}{\lambda} \right)$$



Globalement, si $y = \beta_i f'$ (sinon, l'éclairement est nul) :

$$E(M) = E_0 \sin^2 \left(\frac{\pi e}{\lambda} \left(\frac{x}{f'} - \alpha_i \right) \right) \left[1 + \cos \left[\frac{2\pi a}{\lambda} \left(\frac{x}{f'} - \alpha_i \right) \right] \right]$$

Le terme de diffraction module le terme d'interférences. L'interfrange i et la demi-largeur du champ d'interférences sont données par :

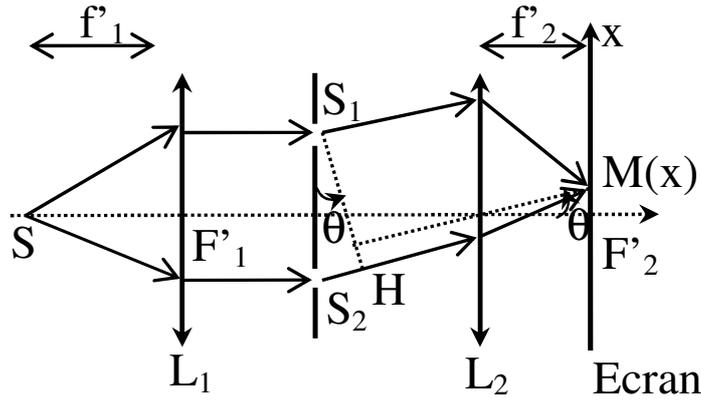
$$i = \frac{\lambda f'}{a} \quad ; \quad L = \frac{\lambda f'}{e}$$

Comme $e \ll a$, la figure d'interférences est bien modulée en amplitude par le terme dû à la diffraction.

Si l'onde incidente est issue d'une fente fine parallèle aux fentes d'Young et placée dans le plan focal objet d'une lentille, la figure de diffraction est constituée de bandes parallèles à (Oy) (voir photo ci-dessus). Il y a superposition des figures de diffraction dues aux différents points sources, qui sont disjointes (on somme donc les intensités).

On peut faire le calcul complètement dans le cas d'une incidence normale et pour deux fentes d'Young infiniment fines dans une direction :

Le schéma expérimental est le suivant :



L'amplitude diffractée par les deux fentes S_1 et S_2 est : (a désigne ici la largeur d'une fente)

$$\underline{a}_1(M) = KA_0 \exp[-ik_0(SO_1M)] \int_{-a/2}^{a/2} \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda_0}(\theta X)\right] dX = KA_0 \exp[-ik_0(SO_1M)] \sin c\left(\frac{\pi\theta a}{\lambda_0}\right)$$

Et :

$$\underline{a}_2(M) = KA_0 \exp[-ik_0(SO_2M)] \sin c\left(\frac{\pi\theta a}{\lambda_0}\right)$$

L'amplitude résultante en M est ensuite :

$$\underline{a}(M) = \underline{a}_1(M) + \underline{a}_2(M) = KA_0 \sin c\left(\frac{\pi\theta a}{\lambda_0}\right) (\exp[-ik_0(SO_1M)] + \exp[-ik_0(SO_2M)])$$

Or, $(SO_2M) = (SO_1M) + (S_2H) = (SO_1M) + d\theta$, d'où : (attention, ici d désigne la distance entre les milieux des fentes et a la largeur des fentes !)

$$\underline{a}(M) = \underline{a}_1(M) + \underline{a}_2(M) = KA_0 \sin c\left(\frac{\pi\theta a}{\lambda_0}\right) (1 + \exp[-ik_0d\theta]) \exp[-ik_0(SO_1M)]$$

L'intensité résultante en M est alors :

$$I(M) = \frac{1}{2} k \operatorname{Re}(\underline{a}\underline{a}^*) = I_0 \sin^2\left(\frac{\pi\theta a}{\lambda_0}\right) (1 + \cos(k_0d\theta))$$

Soit, avec $\theta = x / f'_2$:

$$I(M) = I_0 \sin^2\left(\frac{\pi xa}{\lambda_0 f'_2}\right) \left(1 + \cos\left(2\pi \frac{dx}{\lambda_0 f'_2}\right)\right)$$

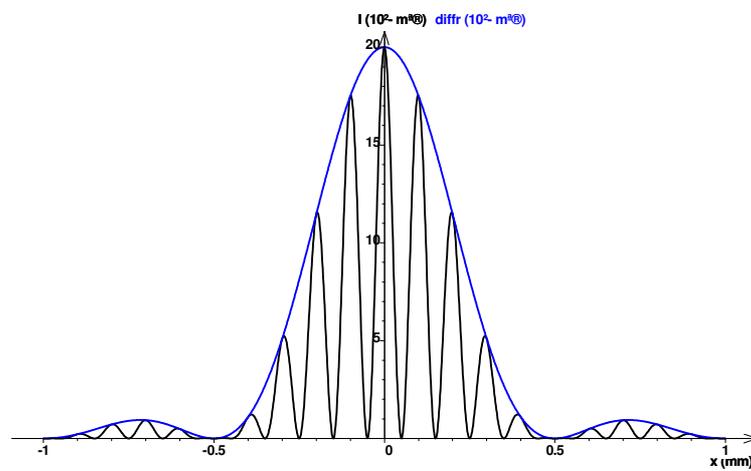
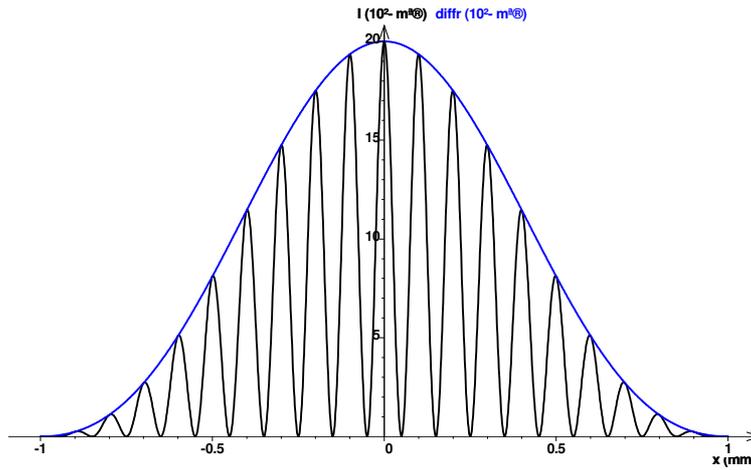
On retrouve bien l'expression du terme d'interférences, modulé par un terme dû à la diffraction par une fente.

Les courbes suivantes ont été tracées avec regressi.

On a choisi : $f'_2 = 20$ cm, $\lambda_0 = 0,5$ μm , $d = 1$ mm.

Pour le 1^{er} graphe, $a = 0,1$ mm.

Pour le 2nd, $a = 0,2$ mm (le pic de diffraction est alors moins étalé).

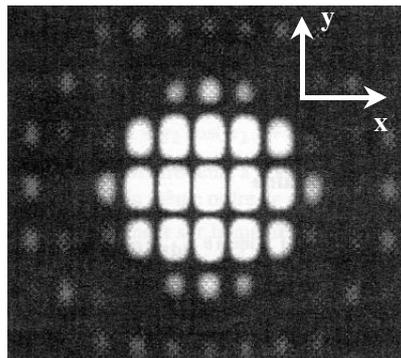


Remarque :

Pour retrouver l'image d'interférences décrite dans le chapitre sur les « Interférences », il faut que la diffraction soit suffisamment importante, de façon à ce que la fonction sinus cardinal ait ses premiers zéros rejetés très loin de O. Dans ce cas, on reste dans le pic central (qui est très étalé) et on ne voit pas la décroissance lente de l'enveloppe. On considère ainsi que l'épaisseur e des fentes tend vers zéro.

Exercices d'application :

1) Un écran percé de quatre ouvertures identiques donne la figure de diffraction de Fraunhofer représentée ci-dessous. Déterminer la forme des ouvertures et leur disposition.

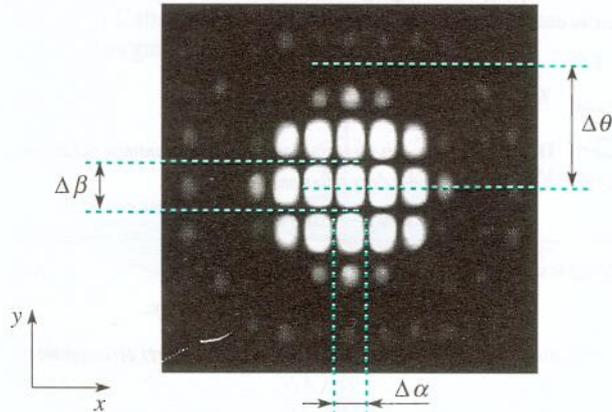


Solution :

La structure la plus large, qui est la figure de diffraction d'une ouverture, est constituée d'anneaux concentriques et de luminosité décroissante. Les ouvertures sont donc circulaires de rayons R .

La figure d'interférences $F_I(\alpha, \beta)$, périodique en x et en y , s'obtient en plaçant les quatre ouvertures aux coins d'un rectangle de dimensions a selon (Ox) et b selon (Oy) . Avec cette hypothèse :

$$F_I(\alpha, \beta) = \left[1 + \cos \frac{2\pi a \alpha}{\lambda} \right] \left[1 + \cos \frac{2\pi b \beta}{\lambda} \right].$$



L'interfrange selon (Ox) est proportionnelle à $\Delta\alpha = \frac{\lambda}{a}$.

L'interfrange selon (Oy) est proportionnelle à $\Delta\beta = \frac{\lambda}{b} \approx 1,5 \Delta\alpha$.

Le rayon angulaire du premier anneau noir est proportionnel à :

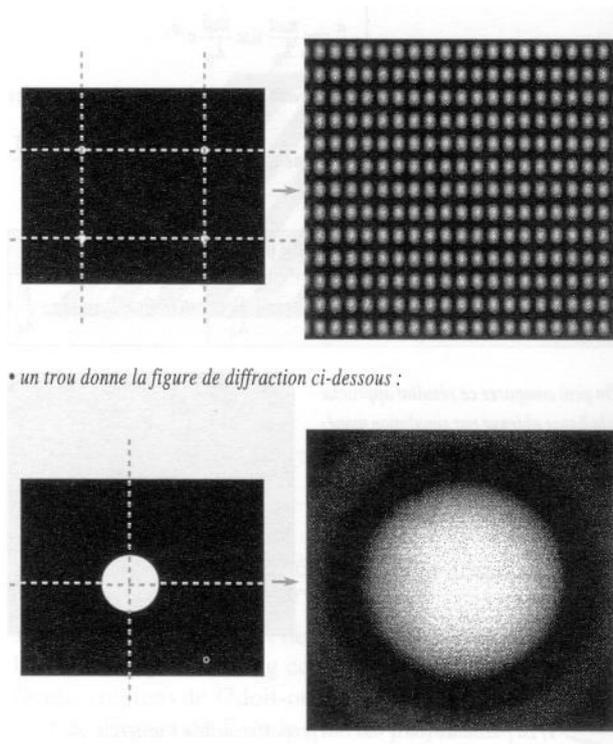
$$\Delta\theta = 0,61 \frac{\lambda}{R} \approx 3,5 \Delta\alpha.$$

On en déduit $a \approx 4 R$ et $b \approx 6 R$.

Remarque :

Sur les schémas suivants, on fait l'interprétation de l'image finale.

- quatre trous infiniment fins donnent comme figure d'interférence l'aspect ci-dessous :



La figure de diffraction finale donnée par les quatre trous identiques est le produit de la figure d'interférence initiale des quatre sources ponctuelles situées au centre des trous par la figure de diffraction d'un trou.

2) Plaque de verre et petits grains :

Le plan de diffraction Σ est une plaque de verre et l'objet diffractant (S) est composé d'un nombre important N de petits grains identiques, opaques, assimilés à de petits disques de rayon R et répartis aléatoirement sur la plaque. Décrire la figure de diffraction dans le plan E (1)

AN : $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$, $f'_2 = 0,5 \text{ m}$; le premier anneau noir a pour rayon $r = 1,5 \text{ cm}$.

En déduire le rayon R des grains.

Réponse :

Le théorème de Babinet indique que la figure de diffraction est inchangée en remplaçant le système étudié par un écran opaque percé de trous aux mêmes endroits et de même taille que les grains.

Le théorème de translation de la pupille affirme que chaque trou diffracte la même amplitude $A_d(\vec{k})$ que s'il était au centre O' (origine des phases) ; l'amplitude subit un simple déphasage de $\exp(i\varphi_i)$ où $\varphi_i = \vec{k} \cdot \vec{r}_i$ et $\vec{r}_i = \overline{O'P_i}$ la position du trou numéro i .

Les ondes issues des différents trous (éclairés par la même onde incidente) étant cohérentes entre elles, il faut sommer les amplitudes complexes :

$$\underline{A}(\vec{k}) = A_d(\vec{k}) \sum_{i=1}^N \exp(i\varphi_i)$$

L'intensité résultante est donnée par :

$$I(\vec{k}) = \alpha \underline{A}(\vec{k}) \cdot \underline{A}^*(\vec{k}) = I_d(\vec{k}) \left(\sum_{i=1}^N \exp(i\varphi_i) \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^N \exp(-i\varphi_j) \right) \text{ avec } I_d(\vec{k}) = \alpha A_d^2(\vec{k})$$

Dans cette opération, isolons les produits de termes de même indice, il y en a N et ils valent tous 1 (car $\exp(i\varphi_i) \cdot \exp(-i\varphi_i) = 1$), des produits de termes d'indices différents, à regrouper 2 à 2 ($\exp(i\varphi_i) \cdot \exp(-i\varphi_j) + \exp(i\varphi_j) \cdot \exp(-i\varphi_i) = 2 \cos(\varphi_i - \varphi_j)$) :

$$I(\vec{k}) = I_d(\vec{k}) \left(N + 2 \sum_i \sum_{j < i} \cos(\varphi_i - \varphi_j) \right)$$

Contrairement au cas du réseau ou dans un Fabry-Perot, il n'y a ici aucune régularité ; bien au contraire, les grains sont répartis de manière aléatoire, et donc les $\cos(\varphi_i - \varphi_j)$ sont aléatoirement répartis entre -1 et 1 ; comme ils sont nombreux, leur somme est nulle et donc :

$$I(\vec{k}) = NI_d(\vec{k})$$

L'intensité totale est donc simplement multipliée par N comme si les éclaircissements étaient incohérents ; la figure est celle d'une ouverture circulaire, mais bien plus lumineuse.

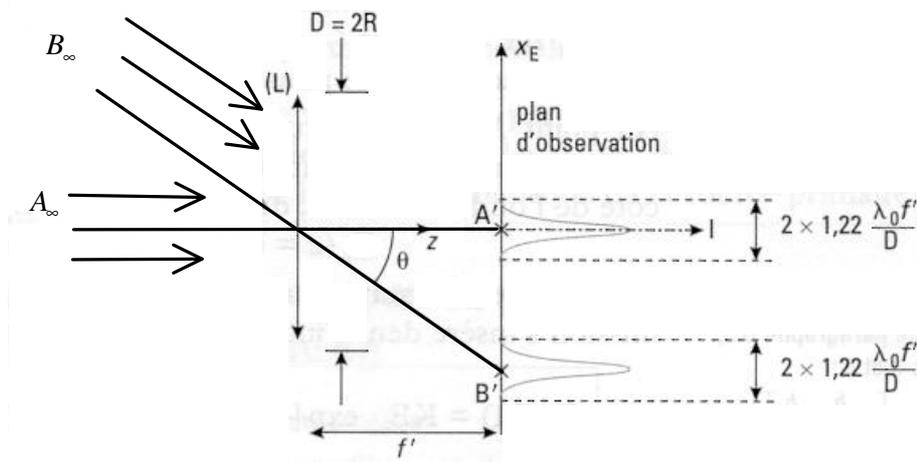
La tache d'Airy prend fin dans la direction $\theta_0 = 1,22 \frac{\lambda}{2R} \approx \frac{r}{f_2} \Rightarrow \underline{R \approx 10 \mu\text{m}}$

VI) Diffractions et limitations d'un système optique :

Il n'est pas possible d'obtenir un point image dont la taille soit inférieure à la tache de diffraction donnée par l'ouverture limitant un faisceau de lumière.

Cette constatation est importante pour l'industrie car la diffraction limite les applications utilisant la lumière (lecteurs CD et DVD, capteurs CCD, télescopes, ...).

Si on utilise un télescope par exemple, il est impossible de distinguer deux points objets si leurs images se chevauchent et se confondent. L'instrument ne sépare plus les taches images : cette séparation dépasse son pouvoir de résolution.

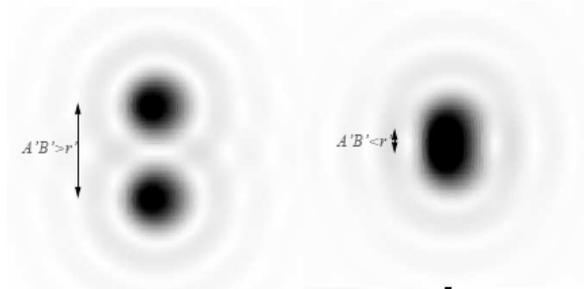


On considère l'instrument simplifié sur la figure, composé d'une lentille (L) convergente et de sa monture, de diamètre $D = 2R$, de distance focale f' , qui permet d'observer deux étoiles A_∞ et B_∞ situées à l'infini, dont les images se forment dans le plan focal qui est le plan d'observation.

Les bords de la lentille, ou ceux de la monture, de forme circulaire, diffractent la lumière reçue et chaque point objet donne une tache image de diamètre :

$$2 * 1,22 \frac{\lambda_0 f'}{D}$$

Les deux étoiles étant des sources incohérentes, supposées de même fréquence, les intensités lumineuses s'ajoutent si les taches se recouvrent. Il peut donc y avoir fusion des deux images : le pouvoir de résolution est bien limité par la diffraction.



Critère de Rayleigh : lorsque les deux tâches sont séparées par une distance inférieure au rayon d'une tâche, on considère que les deux points images ne sont pas résolus.

Le critère de Rayleigh stipule que dans le cas de deux taches de diffraction d'intensités comparables, l'œil cesse de les résoudre quand le pied d'un pic principal coïncide avec le sommet de l'autre pic principal.

Ce critère appliqué à cet instrument nous indique que l'on peut séparer deux étoiles si :

$$\theta > \theta_0 = 1,22 \frac{\lambda_0 f'}{D}$$

On remarque que la tache de diffraction est d'autant plus réduite que D est grand : c'est une raison pour fabriquer des miroirs de télescope de grands diamètres.

Le pouvoir séparateur peut être amélioré en utilisant un diaphragme de phase ou d'amplitude (voir exercices).

instrument	D	λ	$\Delta\theta$
lunette	14 cm	550 nm	1''
télescope (Mt Palomar)	5 m	550 nm	$(2,7 \cdot 10^{-2})''$
radiotélescope (Jodrell Bank)	75 m	21 cm	700''
œil humain	2 mm	550 nm	70''

Il faut également tenir compte des problèmes liés à l'atmosphère terrestre (turbulences) qui limite également le pouvoir de résolution.

Quelques remarques à propos de la diffraction et du pouvoir de résolution :

1) Informations contenues sur des DVD :

Quel est l'ordre de grandeur de la puissance et de la longueur d'onde de la diode laser utilisée dans un lecteur de CD ou dans une imprimante laser ?

Quel est l'avantage des diodes bleues (le fameux « blue ray ») sur les diodes rouges pour la lecture d'informations contenues sur des DVD ?

Réponse :

Dans les deux cas, la puissance de la diode laser utilisée est de l'ordre de 5 mW et la longueur d'onde se situe dans la fourchette de 770 à 810 nm, ce qui n'est plus guère visible puisqu'au début de l'infrarouge.

Les diodes bleues émettent une lumière de longueur d'onde en gros moitié de celle des diodes précédentes ; la diffraction est donc deux fois moindre, et comme il s'agit d'un problème bidimensionnel (un faisceau doit lire les informations sur la surface d'un disque gravé), la résolution du « blue ray » est quatre fois supérieure à celle d'une diode rouge classique, ce qui permet aux DVD HD (pour Haute Définition) ainsi lus de stocker quatre fois plus d'informations.

2) Résolution d'un télescope en ondes radio et ondes lumineuses :

En radioastronomie une des longueurs d'onde utilisée est $\lambda = 21$ cm (correspondant à une raie hyperfine du spectre de l'hydrogène) ; pour des télescopes de diamètre identique, comparer la résolution en ondes radio et en ondes lumineuses ; quel est alors l'intérêt des observations en ondes radio ? Comment est-il possible d'améliorer cette résolution ?

Réponse :

La résolution d'un télescope de diamètre D est liée à la diffraction en λ/D ; la résolution en ondes radio ($\lambda = 21$ cm) est donc nettement moins bonne qu'en ondes lumineuses ($\lambda \approx 0,5 \mu\text{m}$). L'intérêt cependant des ondes radio à $\lambda = 21$ cm est d'exister, d'être peu perturbées par la traversée de l'atmosphère, de permettre aux radioastronomes de travailler de jour (il n'y a pas de perturbation vers 1,4 GHz) ; de plus, la réalisation de tel gros télescope à $\lambda/20$ près, soit à 1 cm, ne pose aucun problème de fabrication (un simple grillage métallique de maille inférieure à λ suffit, et ceci sur une surface énorme focalisée vers un foyer récepteur).

L'amélioration de la résolution s'effectue en associant plusieurs antennes en parallèle de manière à constituer un réseau et produire des interférences à N ondes comme au radiotélescope de Nançay. C'est d'ailleurs pour la même raison que la réception domestique d'ondes hertziennes télévisées s'effectue avec des antennes (sur les toits) en forme de « râteau ».

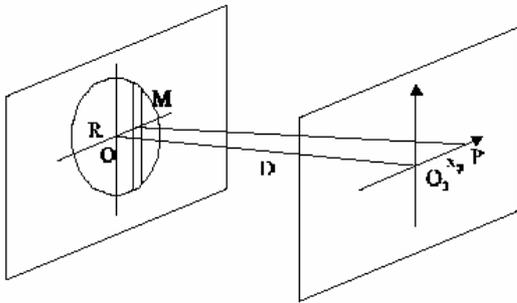


Annexe : diffraction à l'infini (Fente circulaire, JJ.Rousseau)

[Animation JJ.Rousseau](#)

Diffraction à l'infini (fente circulaire)

Cette étude présente beaucoup d'analogie avec celle d'une fente rectangulaire. On considère un écran opaque percé par une fente circulaire de rayon R, éclairée par une onde plane de longueur d'onde λ parallèle au plan de la fente. Le plan d'observation est situé à la distance $OO_0 = D$ de la fente. Compte tenu de la symétrie du problème, il suffit de calculer l'intensité en un point P distant de x_0 de O_0 .



Soit une bande de largeur dx située à la distance $OM = x$.

On calcule δ la différence de chemin entre MP et OP.

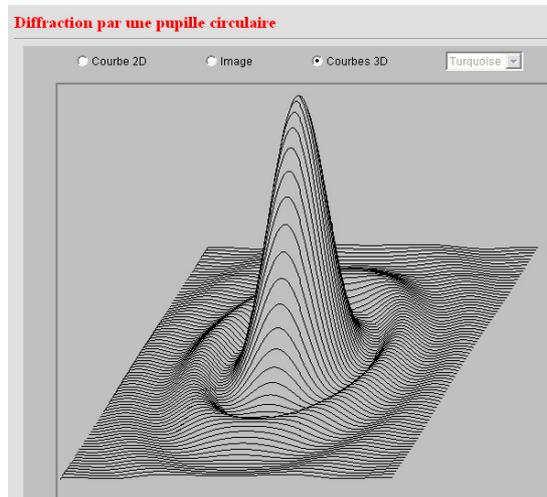
$$MP^2 = (\vec{OP} - \vec{OM})^2.$$

$$MP^2 = OP^2 + OM^2 - 2 \cdot \vec{OP} \cdot \vec{OM}$$

$$\vec{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}; \quad \vec{OP} = D \cdot \vec{k} + x_0 \cdot \vec{j}$$

$$\vec{OM} \cdot \vec{OP} = x \cdot x_0.$$

$$OP = \sqrt{D^2 + x_0^2} = d$$



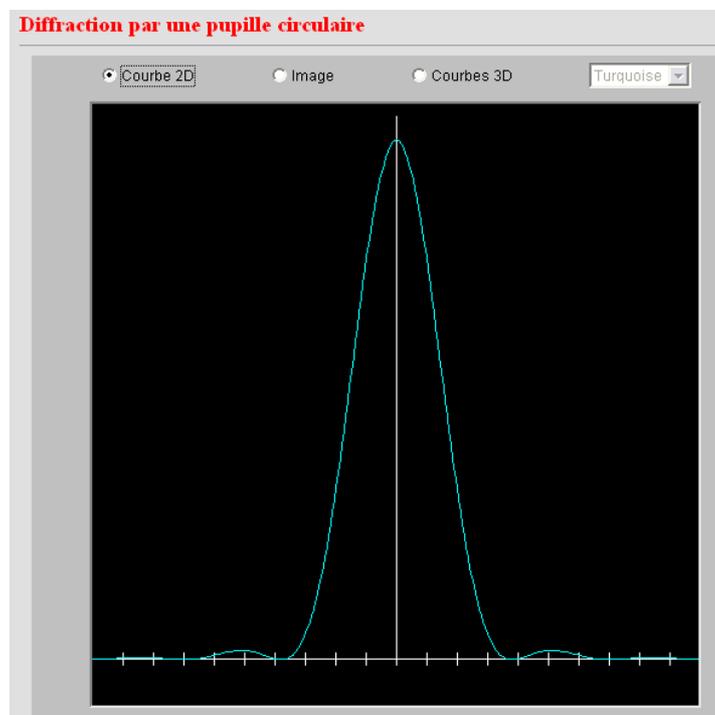
Comme $OM \ll OP$, un développement au premier ordre donne : $\delta = MP - OP = -\frac{xx_0}{d}$.

Le déphasage est donc $\varphi = 2\pi\delta/\lambda$

L'amplitude de la vibration en P, due à la bande de largeur dx , est donc :

$$dp_p = Ae^{i\omega t} \cdot dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} e^{i\varphi} dy = 2Ae^{i\omega t} e^{i\varphi} \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \cdot dx$$

Soit pour l'ensemble de la fente : $p_p = 2A \cdot e^{i\omega t} \int_{-R}^{+R} R \left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)^{1/2} e^{\frac{2i\pi x x_0}{\lambda d}} dx$.



En posant $u = \frac{x}{R}$ et $k = \frac{2\pi x_0 R}{\lambda d}$, on tire :

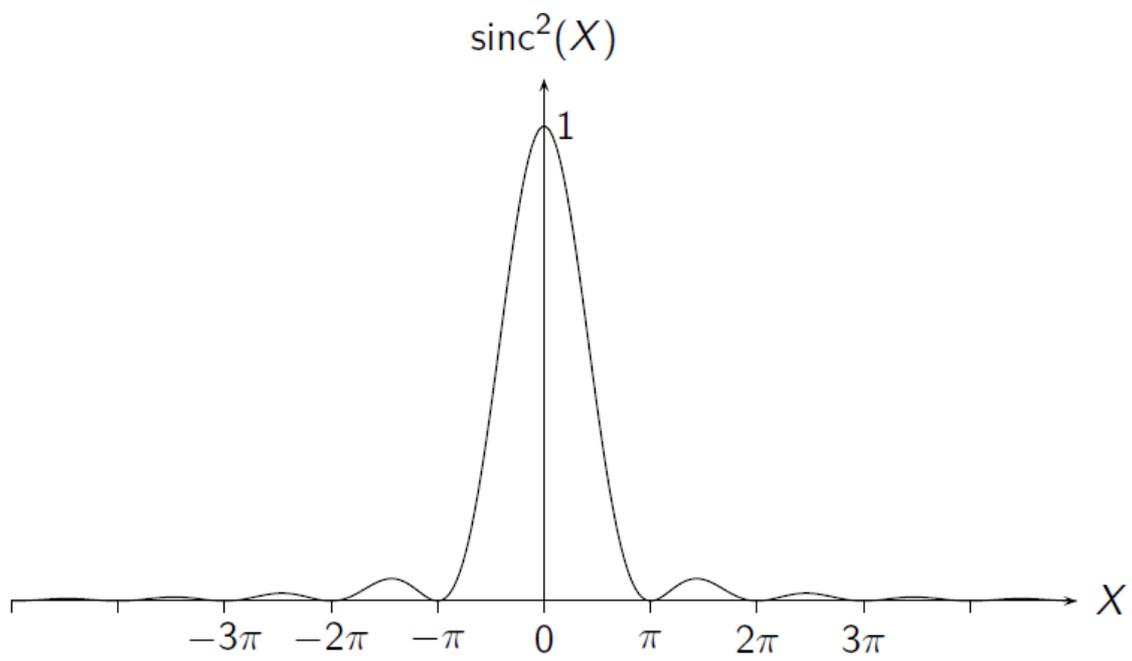
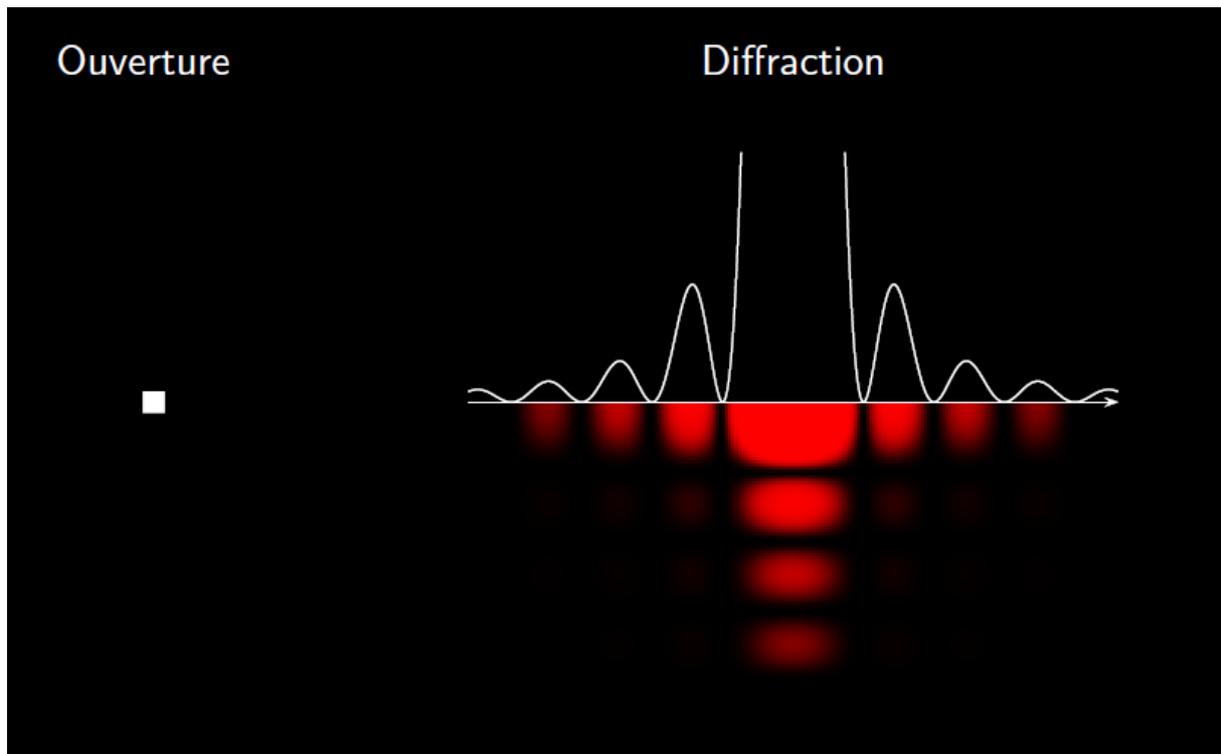
$p_p = 2A \cdot R^2 \cdot e^{j\alpha} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-u^2} (\cos ku + j \sin ku) dx$ et comme la fonction sinus est impaire, on a :

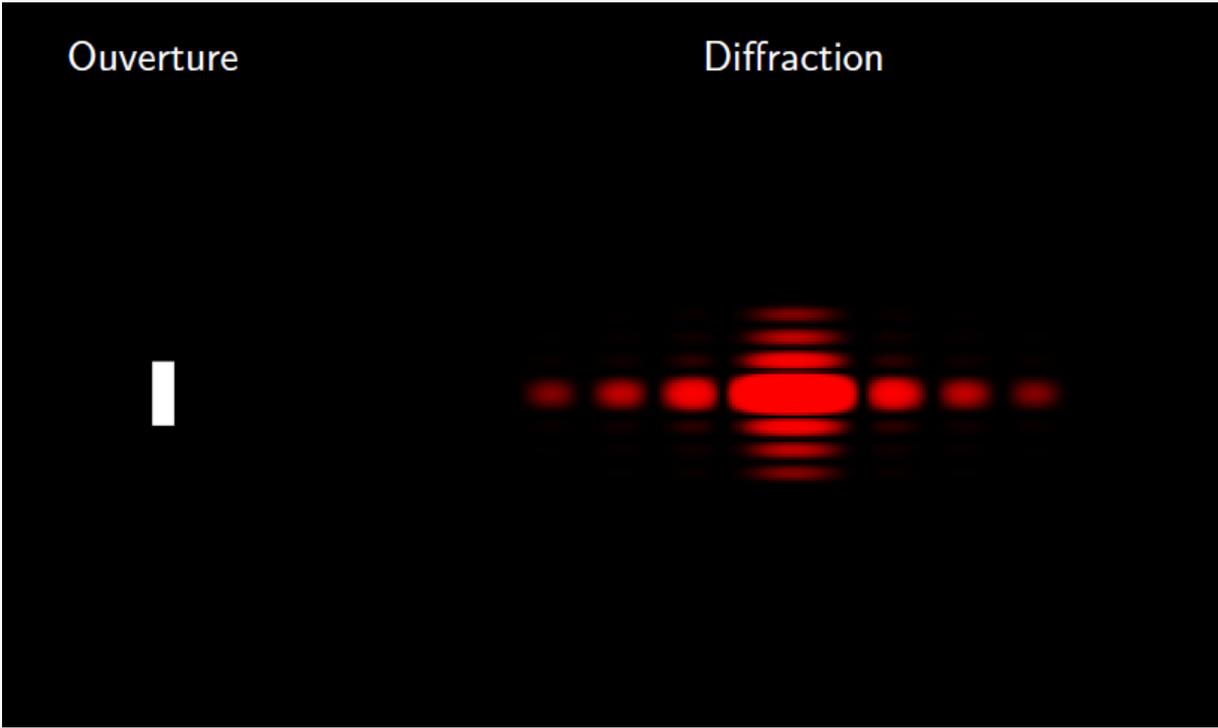
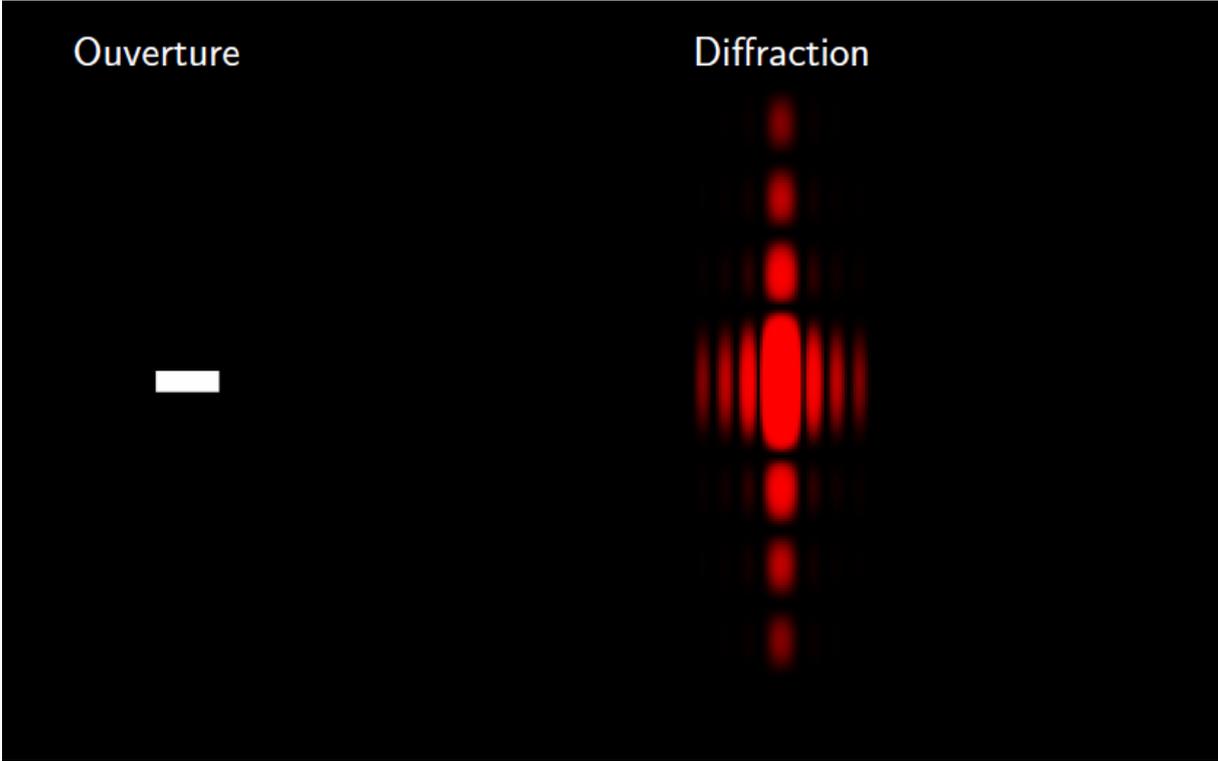
$$p_p = 4A \cdot R^2 \cdot e^{j\alpha} \int_0^{+1} \sqrt{1-u^2} \cdot \cos ku \cdot dx$$

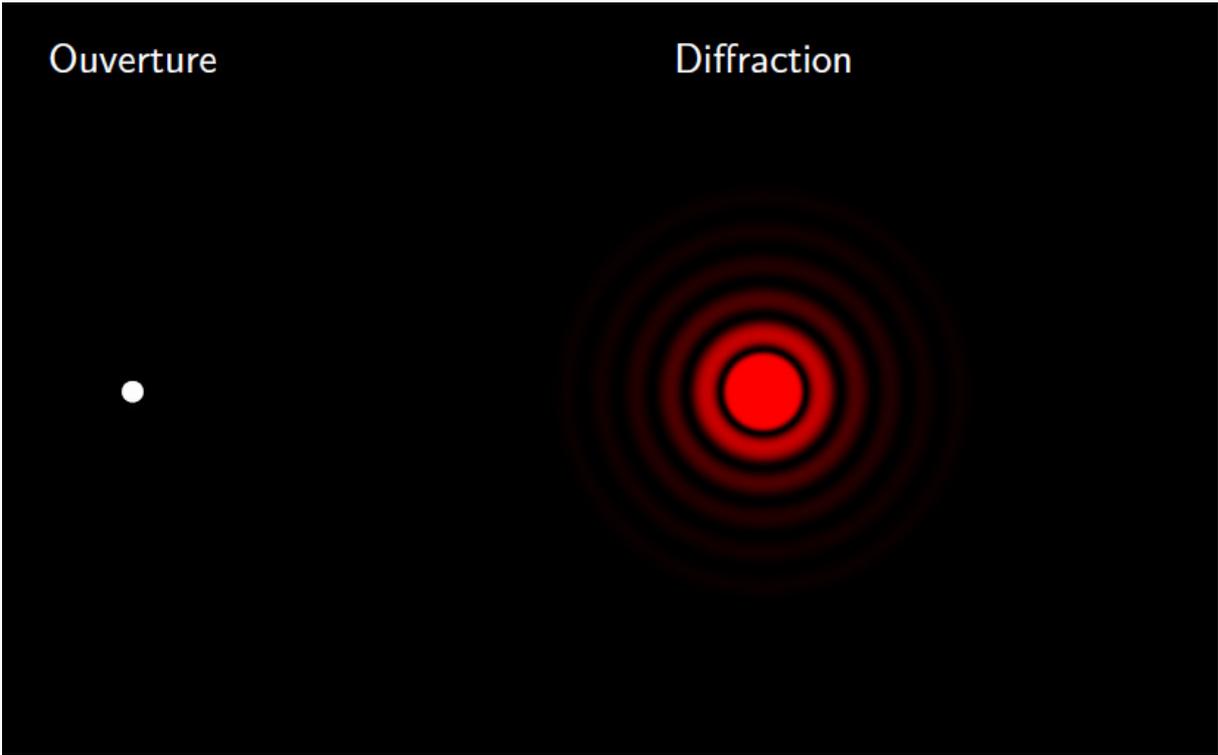
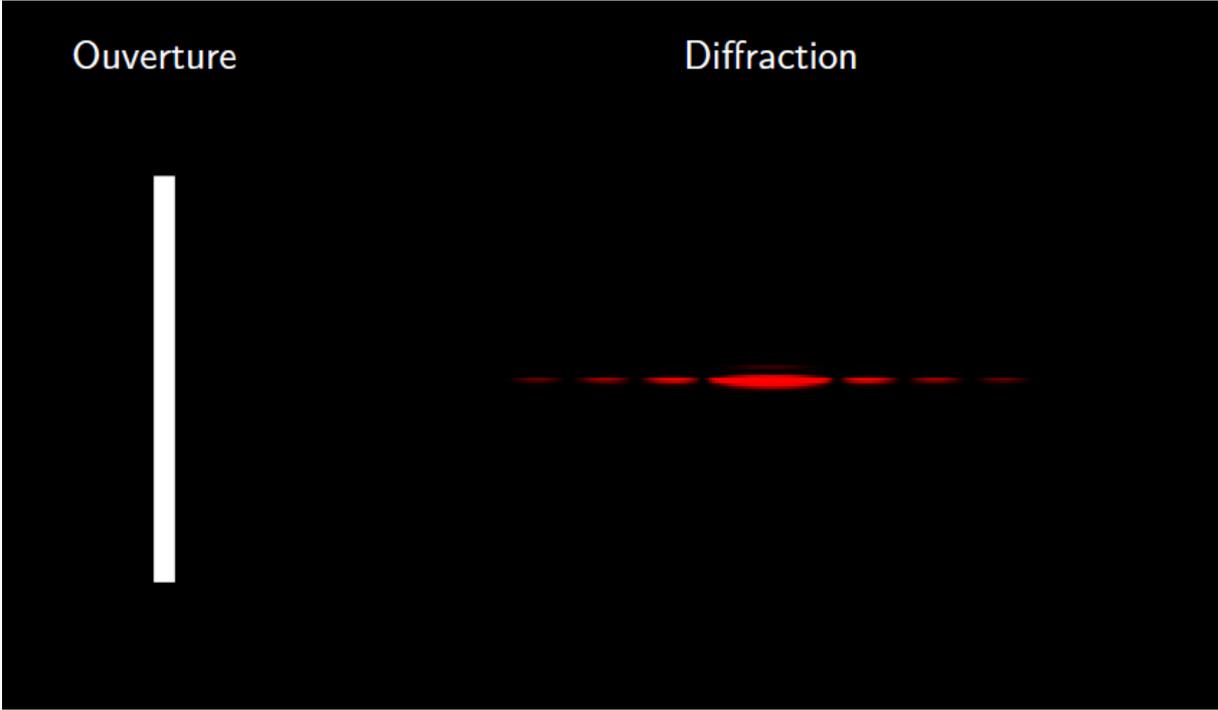
Cette intégrale doit être calculée numériquement.

L'observable est l'intensité. Elle est proportionnelle au carré de l'amplitude.

FIGURES DE DIFFRACTION



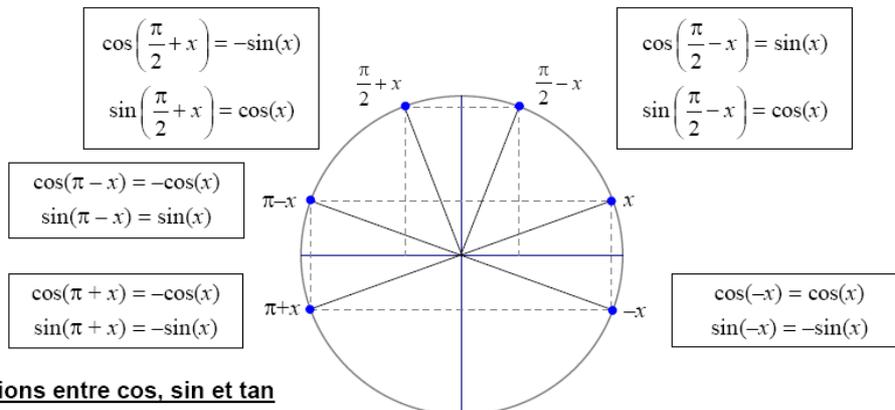




TRIGONOMÉTRIE : FORMULAIRE

Angles associés

Une lecture efficace du cercle trigonométrique permet de retrouver les relations suivantes :



Relations entre cos, sin et tan

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Formules d'addition

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$$

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a) \tan(b)}$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \tan(b)}$$

Formules de duplication

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2 \cos^2(a) - 1 = 1 - 2 \sin^2(a) \quad \sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a) \quad \tan(2a) = \frac{2 \tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$$

Extensions : $\cos(3a) = 4\cos^3(a) - 3\cos(a)$

$\sin(3a) = 3\sin(a) - 4\sin^3(a)$

$\tan(3a) = \frac{3\tan(a) - \tan^3(a)}{1 - 3\tan^2(a)}$

Au delà, utiliser la formule de Moivre.

Formules de linéarisation

$$\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$

$$\sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

$$\tan^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{1 + \cos(2a)}$$

Extensions : $\cos^3(a) = \frac{\cos(3a) + 3\cos(a)}{4}$

$\sin^3(a) = \frac{-\sin(3a) + 3\sin(a)}{4}$

$\tan^3(a) = \frac{-\sin(3a) + 3\sin(a)}{\cos(3a) + 3\cos(a)}$

Au delà, utiliser les formules d'Euler. Les formules d'Euler permettent également de montrer que :

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)] \quad \cos(a) \sin(b) = \frac{1}{2} [\sin(a + b) - \sin(a - b)] \quad \sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

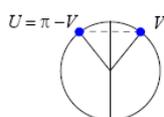
$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

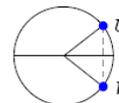
Résolution d'équations trigonométriques



$$\cos(U) = \cos(V) \Leftrightarrow (U = V [2\pi] \text{ ou } U = -V [2\pi])$$

$$\sin(U) = \sin(V) \Leftrightarrow (U = V [2\pi] \text{ ou } U = \pi - V [2\pi])$$

$$\tan(U) = \tan(V) \Leftrightarrow U = V [\pi]$$



Expression du cosinus, sinus et tangente en fonction de la tangente de l'angle moitié

Si $t = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$, on a : $\cos(a) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\sin(a) = \frac{2t}{1+t^2}$; $\tan(a) = \frac{2t}{1-t^2}$