

La résolution des paradoxes de Zénon

WILLIAM MCLAUGHLIN

Pendant des millénaires, mathématiciens et philosophes ont tenté de réfuter les paradoxes de Zénon, qui suggèrent l'impossibilité de tout mouvement.

L'analyse non standard donne une meilleure solution.

Un jour, Achille rencontra une tortue. Celle-ci, plus vive d'esprit que véloce, défia à la course le bouillant Achille, qui, amusé, accepta. La tortue lui demanda de lui accorder une longueur d'avance, arguant qu'elle était bien plus lente que le demi-dieu. Celui-ci consentit avec grâce, et la tortue s'élança. Après avoir tranquillement lacé les lanières de ses sandales, Achille jaillit de la ligne de départ. En un rien de temps, il parcourut la moitié de la distance qui le séparait de la tortue. En un clin d'œil, il atteignit les trois quarts de cette distance. Moins d'un instant après, il en était aux sept huitièmes, puis aussitôt aux quinze seizièmes. Mais, quelle que fût sa célérité, il lui restait toujours une fraction de distance à parcourir. Il semblait que le héros ne parviendrait jamais à rattraper la pesante tortue!

Si Achille s'était davantage consacré à l'étude de la philosophie qu'à la pratique du sport, il aurait su qu'il vivait là l'un des paradoxes de Zénon destinés à démontrer l'impossibilité du mouvement. Zénon avait conçu le paradoxe d'Achille et de la tortue – ainsi que les énigmes qui l'accompagnent (nous y reviendrons plus loin) – pour étayer les théories philosophiques de son maître, Parménide.

Ces deux hommes étaient citoyens de la colonie grecque d'Élée, au Sud de l'Italie. Vers 445 avant J.-C., Parménide et Zénon rencontrèrent Socrate à Athènes pour y débattre de problèmes philosophiques fondamentaux. L'événement, l'une des plus grandes rencontres intellectuelles de l'histoire (si elle eut réellement lieu), est évoqué

dans le *Parménide*, un dialogue philosophique de Platon. Éminent penseur âgé d'environ 65 ans, Parménide exposa au jeune Socrate une thèse étonnante : la «réalité» est une entité unique et immuable ; le mouvement est impossible. Ce rejet de la pluralité et du changement a intrigué de nombreux penseurs. Par exemple, l'«idéisme absolu» du philosophe d'Oxford H. Bradley (1846-1924) n'est pas sans rapport avec la vision parméniennienne.

Les trois paradoxes de Zénon

Cette image du monde, incompatible avec notre expérience quotidienne, relègue nos perceptions les plus fondamentales dans le domaine de l'illusion. Parménide s'appuya sur les puissants arguments de Zénon – que l'on retrouva plus tard consignés dans les écrits d'Aristote – pour étayer sa philosophie. Durant 2 500 ans, les paradoxes de Zénon furent débattus et analysés. Aujourd'hui, grâce à une formulation du calcul différentiel élaborée au cours des trois dernières décennies, il est possible d'écarter les paradoxes de Zénon. On utilise à cette fin la notion de quantité infinitésimale, un concept connu depuis l'Antiquité, mais que la plupart des mathématiciens jugeaient injustifié.

L'histoire d'Achille et de la tortue est le paradoxe de Zénon lié à la dichotomie : toute distance, telle celle séparant deux coureurs peut être divisée en deux ($1/2$, $1/4$, $1/8$, etc.) en un nombre infini de segments, chacun représen-

tant une distance à parcourir. Dès lors, affirme Zénon, il subsiste toujours, quelle que soit sa petitesse, une certaine distance à franchir et, par conséquent, aucun mouvement ne peut être mené à son terme. Zénon ne dit pas que la somme d'une infinité de distances ne peut pas donner une distance finie (puisque un segment peut être décomposé en un nombre infini d'intervalles, un nombre infini d'intervalles peut redonner un segment de longueur finie), mais il affirme que, si l'on accepte le mouvement, on doit expliquer comment on peut accomplir à la suite un nombre infini d'actes, en l'occurrence le franchissement d'un intervalle.

Zénon lança une autre attaque contre les fondements conceptuels du mouvement en envisageant son premier argument sous un angle légèrement différent. Son deuxième paradoxe est le suivant : avant qu'un objet – par exemple, une flèche – ne parvienne à la moitié du trajet qu'il est censé parcourir (opération tenue pour acquise dans le premier paradoxe), il doit d'abord parcourir un quart de cette distance. Si, comme dans la première objection de Zénon, on poursuit ce raisonnement indéfiniment, on aboutit à une régression infinie et à la conclusion que le mouvement ne peut jamais commencer.

Le troisième paradoxe de Zénon montre que le concept même de mouvement est dépourvu de signification. Zénon nous invite à imaginer la flèche à un instant particulier de son vol : elle occupe alors une région d'espace égale à sa longueur, et l'on ne constate aucun mouvement ; cette

observation étant vraie à chaque instant, la flèche n'est jamais en mouvement. Historiquement, cette objection a été, pour les philosophes, la plus difficile à contrer.

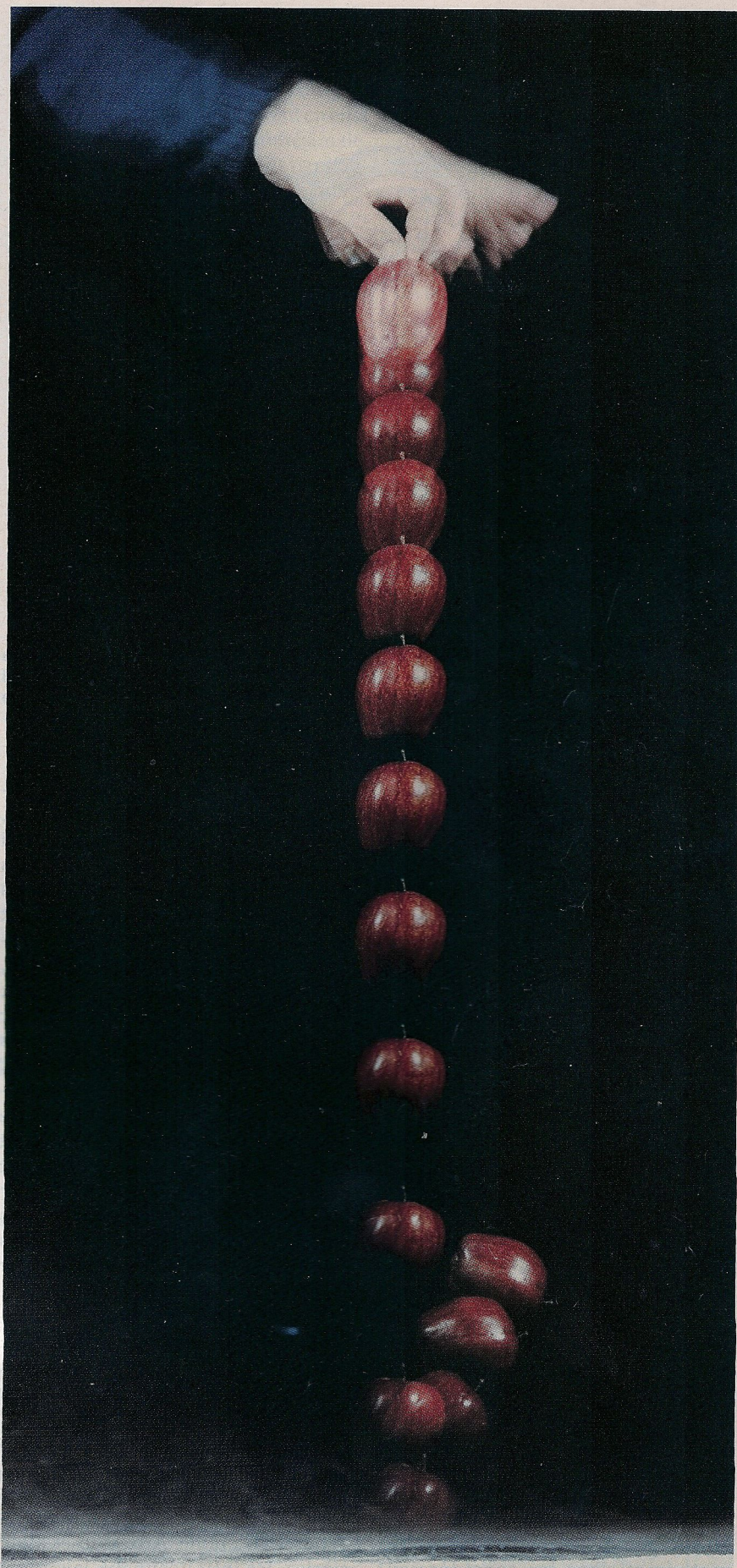
Nombre de philosophes et de mathématiciens se sont efforcés de résoudre les paradoxes de Zénon. Certains, tout d'abord, ont nié l'existence des paradoxes : en 1782, le professeur de philosophie allemand Johann Waldin écrivit qu'en s'opposant au concept de mouvement, les philosophes d'Élée reconnaissaient en fait l'existence du mouvement. À l'évidence, le bon professeur ignorait la forme de raisonnement nommée démonstration par l'absurde, où l'on part d'une hypothèse que l'on infirme en montrant qu'elle engendre une conclusion illogique.

D'autres philosophes examinèrent comment un nombre d'actes infini peut se dérouler dans le monde physique. Leurs explications faisaient constamment appel à la notion d'infiniment petit, un intervalle d'espace ou de temps exprimant la quintessence de la petitesse. Certains supposaient qu'un infiniment petit était si proche de zéro qu'il n'avait aucune valeur numérique ; de telles quantités se dérobaient ainsi à la mesure, quelle que fût sa précision, comme un sable très fin à travers un tamis.

Giovanni Benedetti (1530-1590), un prédécesseur de Galilée, affirma que, lorsque Zénon observait un objet suspendu, immobile dans l'air, il ne voyait en fait qu'une partie de l'action, comme lorsqu'on regarde une diapositive au lieu d'un film. Entre ces images statiques vues par Zénon, il subsiste des durées infinitésimales pendant lesquelles l'objet se déplace en parcourant des distances tout aussi infinitésimales.

D'autres philosophes éludèrent le problème en maintenant que, dans le monde physique, les intervalles ne

1. LA POMME TOMBE-T-ELLE? Selon Zénon, la pomme semblant immobile à chaque instant de sa prétendue descente, elle n'est jamais en mouvement. En outre, Zénon soutient que rien ne démontre que la pomme finit par atteindre le sol. Auparavant, elle doit d'abord franchir la moitié de la distance séparant le sol de son point de départ. Ensuite elle doit parcourir la moitié de la distance restante, puis la moitié de cette moitié, et ainsi de suite. Pourquoi atteint-elle finalement le sol ? Utilisant un raisonnement analogue, Zénon doute qu'une pomme puisse même commencer à tomber.





2. LA COURSE ENTRE ACHILLE ET LA TORTUE illustre l'un des paradoxes de Zénon. Achille donne une longueur d'avance à la tortue. Il doit alors parcourir la moitié de la distance qui les sépare, puis les trois quarts de cette distance, puis les sept huitièmes, et ainsi de suite à l'infini. Il semble donc qu'il ne puisse jamais rattraper la tortue.

peuvent être indéfiniment subdivisés. Friedrich Trendelenburg (1802-1872), de l'Université de Berlin, construisit un système philosophique qui expliquait la perception humaine en termes de mouvement. Il s'épargnait ainsi de devoir expliquer le concept de mouvement.

Plus récemment, le philosophe et mathématicien anglais Alfred Whitehead (1861-1947) échafauda une métaphysique fondée sur le changement et où le mouvement jouissait d'un statut spécial. Whitehead répondit aux objections de Zénon en affirmant que les phénomènes physiques avaient nécessairement une certaine dimension et qu'ils ne pouvaient être ponctuels. Le philosophe écossais David Hume (1711-1776) avait émis une idée analogue : « Les espèces de quantités sur lesquelles raisonnent les mathématiciens ne sont pas des universaux et, en tant que telles, sont suggérées par les sens et par l'imagination ; par conséquent, elles ne peuvent être indéfiniment divisibles. »

Quoi qu'il en soit, la question des infinitésimaux (et de leur existence) suscita un long et âpre débat. Il y a encore peu de temps, la plupart des mathématiciens les considéraient

comme une chimère. L'évêque irlandais George Berkeley (1685-1753), célèbre pour son idéalisme radical, qui niait la réalité de la matière, n'a pas esquivé le débat ; les mathématiciens de son temps, Newton compris, avaient engendré des monstres : « Les infinitésimaux ne sont ni des quantités finies, ni des quantités infiniment petites ; ils ne sont rien. Ne doit-on pas voir en eux les fantômes de quantités défuntes ? » Poursuivant ses réflexions, il écrivait : « Quoique les mathématiciens pensent des fluxions [taux de variation] ou du calcul différentiel, et des idées de ce genre, ils doivent admettre qu'avec ces méthodes, leur conception ou représentation des lignes ou des surfaces ne s'étend pas au-delà de ce qui est perceptible par les sens. »

En dépit de la répulsion que les infinitésimaux leur inspiraient, les mathématiciens ne pouvaient s'en passer. Certains historiens pensent que le grand Archimède (environ 287-212 avant J.-C.) obtint quelques-uns de ses résultats mathématiques en utilisant les infinitésimaux, mais employa des méthodes plus classiques pour les exposer au public. Aux XVII^e et XVIII^e siècles, les infinitésimaux laissèrent

également leur marque dans le développement du calcul différentiel et intégral. Les manuels de mathématiques ont longtemps fait appel à des « infinitésimaux concrets » pour exposer aux étudiants certaines idées du calcul différentiel.

Chaque fois que les spécialistes de l'analyse tentaient de justifier rigoureusement l'existence de quantités infiniment petites, d'innombrables difficultés apparaissaient. Finalement les mathématiciens du XIX^e siècle, notamment Augustin Cauchy (1789-1857), trouvèrent un substitut technique aux infinitésimaux en inventant la théorie des limites. Le triomphe de cette théorie fut si complet que certains mathématiciens affirmèrent que les infinitésimaux avaient été « bannis » de leur discipline.

Les nombres non standards

Dans les années 1960, cependant, les bruits de pas fantomatiques des infinitésimaux résonnèrent à nouveau dans les couloirs des mathématiques, grâce aux travaux du logicien Abraham Robinson. Depuis, outre l'approche de Robinson, plusieurs méthodes utilisant les infinitésimaux ont vu le jour.

Lorsque Sylvia Miller et moi avons commencé à étudier les paradoxes de Zénon, les infinitésimaux avaient déjà acquis une respectabilité mathématique. Ces objets nous semblaient fournir une vision microscopique des détails du mouvement. Edward Nelson avait créé l'outil nécessaire à notre entreprise, une version de l'analyse non standard baptisée du nom assez sévère de théorie des ensembles internes. La méthode de Nelson interprète de façon étonnante des structures mathématiques familières ; ses résultats sont semblables, par leur étrangeté, aux structures de la théorie quantique et de la relativité générale.

Les mathématiciens élargissent l'ensemble des nombres en introduisant de nouveaux objets qui possèdent les propriétés souhaitées – c'est ainsi, par exemple, que l'on a intercalé les fractions entre les nombres entiers, puis que l'on a introduit les nombres irrationnels. En fait, le système numérique utilisé par les mathématiciens modernes s'est développé comme un massif de corail, par accréation sur un noyau fondamental : « Dieu a créé les

entiers, le reste est l'œuvre de l'homme», a dit Leopold Kronecker (1823-1891). Avec l'analyse non standard, on dévisage l'ensemble des nombres existants jusqu'à y discerner des nombres qui, très raisonnablement, peuvent être considérés comme des infinitésimaux.

Nelson a trouvé des nombres non standards sur la droite réelle en ajoutant trois règles, ou axiomes, à la dizaine d'énoncés qui fondent la plupart des systèmes mathématiques (tels les axiomes de Zermelo-Fraenkel en théorie des ensembles). L'ajout de ces trois règles introduit le nouveau qualificatif «standard» et permet de déterminer quels nombres sont standards et quels nombres sont non standards. Naturellement les infinitésimaux appartiennent – ainsi que d'autres nombres que nous examinerons plus loin – à la catégorie non standard.

Un infiniment petit est un nombre qui se trouve entre zéro et tout nombre standard positif. Si, au premier abord, cette définition ne vous paraît pas traduire une notion de petitesse, sachez que les nombres standards incluent tous les nombres (plus quelques autres) habituels : 10, π , 1/1 000, etc. Ainsi un infiniment petit est supérieur à zéro, mais inférieur à tout nombre, quelle que soit sa petitesse. Si l'existence de ces infiniment petits n'est pas évidente, la cohérence logique de la théorie de Nelson a été établie avec un degré de certitude égal à celui qui justifie notre foi en bien d'autres systèmes mathématiques.

Il n'en reste pas moins que les infiniment petits sont des entités insaisissables : deux nombres standards – autrement dit, ayant un contenu numérique effectif – ne peuvent en effet différer d'une quantité infinitésimale. Cela se démontre facilement par l'absurde : la différence entre deux nombres concrets est concrète ; c'est donc un nombre standard. Si cette différence était un infiniment petit, alors cet infiniment petit ne serait pas inférieur à tous les nombres standards. Ainsi les deux extrémités d'un intervalle infinitésimal ne peuvent être repérées par des nombres standards. Il en résulte qu'un intervalle infinitésimal ne peut être mesuré et que les infinitésimaux restent à jamais inobservables.

Analyse non standard et paradoxes de Zénon

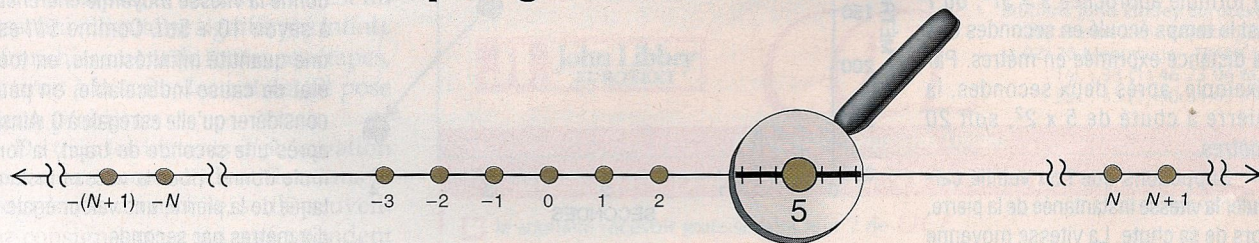
Comment utilise-t-on ces nombres fantômes pour réfuter les paradoxes de Zénon ? D'après l'exposé précédent, les points de l'espace ou du temps repérés par des nombres standards sont isolés. Toute trajectoire, et l'intervalle de temps qui lui est associé, sont riches en régions infinitésimales. Réexaminons alors la troisième objection de Zénon : certes l'extrémité de la flèche est perçue «stroboscopiquement» au repos à tous les instants repérés par un nombre standard, mais, durant l'immense majorité du temps, il se produit du mouvement. Et ce mouvement échappe aux critiques de Zénon, parce

qu'il se déroule au sein d'intervalles infinitésimaux, inobservables.

Quelle est la nature de ce mouvement ? Est-ce une progression continue ou un saut instantané d'une extrémité à l'autre des intervalles infinitésimaux, ou bien correspond-il à une succession d'étapes intermédiaires, voire à un processus se déroulant hors de l'espace et du temps ? Les possibilités sont infinies, et l'on ne peut en vérifier ou en exclure aucune, parce que l'on ne peut pas faire d'observation dans un intervalle infinitésimal. Cette réfutation du troisième paradoxe de Zénon, conçue initialement par Benedetti, Trendelenburg et Whitehead, prend un sens rigoureux dans le cadre de l'analyse non standard.

Nous réfuterons les deux premières objections de Zénon plus facilement que nous n'avons éliminé la troisième, en utilisant un autre résultat mathématique : tout ensemble infini de nombres contient au moins un nombre non standard. Avant d'examiner les conséquences de cette affirmation sur les paradoxes de Zénon, envisageons deux autres types de nombres non standards qui se déduisent immédiatement des infiniment petits. Considérons d'abord l'ensemble des infiniment petits : par définition, ils sont contenus entre zéro et tous les nombres standards positifs. Plaçons maintenant un signe moins devant chacun d'eux ; nous obtenons ainsi un amas de ces petits objets centré sur zéro. Pour créer des nombres non standards «mixtes», on prend un nombre standard quelconque,

La topologie de la droite réelle



Les nombres réels comprennent les nombres entiers positifs et négatifs, les nombres rationnels (les nombres qui s'expriment sous forme de quotient de nombre entiers) et les nombres irrationnels (les nombres qui ne peuvent s'exprimer sous forme de fraction). Ces nombres réels peuvent être représentés par des points sur une droite nommée la «droite réelle» (ci-dessus).

Le mathématicien Edward Nelson a défini, au sein de cet ensemble numérique «standard», trois types de nombres «non standards». Les nombres non standards infiniment petits sont inférieurs à tout nombre standard positif, tout en étant supérieurs à zéro. Les nombres

non standards mixtes, notamment ceux qui sont groupés ici autour de l'entier 5, s'obtiennent en additionnant et en soustrayant des quantités infinitésimales aux nombres standards. En fait, tout nombre standard est entouré de tels nombres non standards mixtes. Les infiniment grands non standards, par exemple ceux désignés par N et $N+1$ sur la figure, sont les inverses des infiniment petits non standards. Tout nombre infiniment grand non standard est supérieur à tout nombre standard, mais ne devient pas pour autant infini. Les nombres réels non standards sont utiles pour résoudre les paradoxes de Zénon.

par exemple 0,5, et on lui additionne chacun des infinitésimaux de l'amas centré sur zéro. Cette addition translate l'amas d'infinitésimaux initial pour le centrer sur le nombre 0,5. Par la même opération, on voit que tout nombre standard est le centre d'un «halo», composé de nombres non standards, tous situés à une distance infiniment petite du centre.

Les nombres non standards du troisième type sont les inverses des infiniment petits (l'inverse d'un nombre standard tel qu'un millionième est un million). Ces nombres non standards se nomment illimités : bien que très grands, ils sont finis et, donc, inférieurs aux vrais nombres infinis inventés en mathématiques. Ces nombres illimités sont dans une région crépusculaire située entre les nombres standards familiers – qui sont finis – et les nombres infinis.

Comme tout ensemble infini de nombres contient un nombre non standard, la suite infinie des points envisagés par Zénon pour mesurer le mouvement, dans le premier paradoxe, contient nécessairement un nombre non standard mixte. En fait, lorsque la suite numérique infinie de Zénon s'approche de la valeur 1, il apparaît à un moment donné un élément de cette suite qui se trouve à une dis-

tance infinitésimale de 1. À partir de cet élément, tous les éléments de la suite sont des nombres non standards qui appartiennent au halo centré sur 1, et ni Zénon ni personne ne pourra suivre la progression d'un objet en mouvement dans cette région inaccessible.

Il est curieux qu'en utilisant le concept d'infini, qui était l'arme de Zénon, on démonte ses arguments. Pour réfuter le premier paradoxe, il suffit d'énoncer le principe épistémologique que nous n'avons pas à expliquer des situations que nous ne pouvons observer. Comme la suite infinie des points de Zénon contient des nombres non standards, dépourvus de signification numérique, nous sommes en droit de rejeter un argument fondé sur ces entités. Personne ne pouvant, même en principe, observer le domaine entier de ces points, le comportement inacceptable que ce domaine confère aux objets en mouvement perd sa valeur paradoxale. Le second argument de Zénon, qui tente de démontrer qu'un objet ne peut jamais commencer à se mouvoir, est balayé par les mêmes raisons que le premier.

Nous avons résolu les trois paradoxes de Zénon en utilisant, d'une part, certains résultats de l'analyse non standard et, d'autre part, le principe selon lequel les nombres non standards ne

sont pas adaptés à la description des phénomènes physiques, observés ou imaginés. Nous pouvons toutefois faire plus : construire une théorie du mouvement en utilisant l'analyse non standard. Si cette dernière donne les mêmes résultats que le calcul différentiel, elle est cependant plus facile à visualiser et ne s'expose pas aux objections de Zénon.

L'ensemble fini des nombres non standards

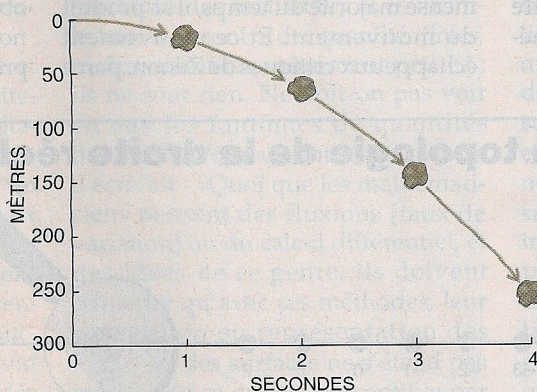
Nelson a prouvé qu'il existe un ensemble fini – nommons-le F – qui contient tous les nombres standards ! On pourrait penser que, de ce fait, il n'existe qu'un nombre fini de nombres standards, mais curieusement, ce dernier résultat n'est pas vrai. Nelson a dû affiner les méthodes classiques utilisées par les mathématiciens pour former de nouveaux objets. En analyse non standard, un énoncé est dit «interne» s'il ne contient pas le qualificatif «standard» ; dans le cas contraire, il est dit «externe». Les mathématiciens construisent fréquemment des sous-ensembles d'ensembles plus grands en indiquant une qualité qui caractérise les éléments du sous-ensemble – les balles qui sont rouges ou les entiers qui sont pairs. En analyse non standard,

Le calcul à l'aide des infinitésimaux

Pour comprendre le lien entre les infinitésimaux et le calcul différentiel, considérons le cas simple d'une pierre en chute libre. La distance parcourue par la pierre est donnée par la formule approchée $s = 5t^2$, où t est le temps écoulé en secondes et s la distance exprimée en mètres. Par exemple, après deux secondes, la pierre a chuté de 5×2^2 , soit 20 mètres.

Supposons que l'on veuille calculer la vitesse instantanée de la pierre, lors de sa chute. La vitesse moyenne d'un corps en mouvement est égale à la distance parcourue divisée par le temps mis pour parcourir cette distance. En appliquant cette formule à une variation infinitésimale de la distance et du temps, on obtient une bonne approximation de la vitesse instantanée du corps.

Soit dt un écart de temps infinitésimal et ds l'écart également infinitésimal de distance parcourue pendant dt . La vitesse de la pierre après une seconde de chute se détermine ainsi : l'intervalle temporel



considéré s'étend de $t = 1$ à $t = 1 + dt$. Durant cet intervalle de temps, la pierre s'est déplacée de $s = 5(1)^2$ à $s = 5(1 + dt)^2$. La variation totale de distance, $10dt + 5dt^2$, divisée par dt , donne la vitesse moyenne cherchée, à savoir $10 + 5dt$. Comme $5dt$ est une quantité infinitésimale, en tout état de cause indécidable, on peut considérer qu'elle est égale à 0. Ainsi, après une seconde de trajet, la formule donne, pour la vitesse instantanée de la pierre, une valeur égale à dix mètres par seconde.

Cette manipulation rappelle celle qui est utilisée en calcul différentiel classique, où le petit résidu $5dt$, quantité non infinitésimale, ne peut être supprimé à la fin du calcul. On l'élimine alors en utilisant la théorie des limites : le passage à la limite a essentiellement pour effet de rendre l'intervalle dt arbitrairement petit, de sorte que la vitesse moyenne est arbitrairement proche de la valeur 10. Comme précédemment, la vitesse instantanée de la pierre au bout d'une seconde est égale à 10 mètres par seconde.

on interdit le recours aux qualités externes – telles que «standard» – pour définir des sous-ensembles. Cette restriction permet d'éviter des contradictions.

Par exemple, imaginons que nous voulions considérer l'ensemble de tous les nombres standards contenus dans F . Cet ensemble étant un sous-ensemble d'un ensemble fini, il devrait être lui-même fini. Il contiendrait alors un plus petit élément r ; de ce fait, $r-1$ serait un nombre standard inférieur à r qui est pourtant censé être le plus petit des nombres standards. Ainsi on ne peut dire que les nombres standards sont en nombre fini ou infini, parce que l'on ne peut pas former l'ensemble qu'ils constituent pour les compter.

L'ensemble fini F , bien que difficilement visualisable, permet d'élaborer une théorie du mouvement : ce dernier correspond à un déplacement dans F , chaque élément de F représentant un instant différent. Par commodité, considérons uniquement les éléments de F compris entre 0 et 1. Supposons que nous commencions à suivre le mouvement d'un mobile à partir de l'instant 0. Soit f_1 l'instant suivant où nous tentons d'observer le mobile, f_1 étant le plus petit élément de F supérieur à 0. Poursuivant ainsi dans F , nous atteignons finalement un temps f_n , où f_n est le plus grand élément de F inférieur à 1. Un pas de plus et nous atteignons 1 lui-même, la fin du déplacement. Pour pouvoir franchir une distance non infinitésimale, telle celle séparant 0 de 1, en utilisant des pas infinitésimaux, il faut que l'indice n de f_n soit un entier illimité. Le mouvement se divise alors en $n+1$ étapes, et comme $n+1$ est lui aussi fini (illimité ne signifie pas infini), le franchissement de toutes ces étapes, les unes à la suite des autres, ne pose aucun problème.

De tous les instants d'observation que nous venons d'identifier dans la progression du mobile, seuls peuvent être consignés ceux qui correspondent à certains nombres standards de F (notons que f_1 et f_n étant infinitésimalement proches de, respectivement, 0 et 1, ils sont non standards). Par exemple, bien que nous puissions écrire un nombre de décimales fini (mais non illimité) d'un nombre standard et utiliser cette approximation pour traduire une mesure, nous n'avons pas accès à la partie illimitée de son développement décimal pour en modifier un chiffre et définir ainsi un nombre



3. LES MESUREURS, un tableau du XVII^e siècle, attribué au peintre hollandais Hendrik van Balen, illustre l'aphorisme du poète romain Horace : « Il y a une mesure pour toute chose. » Quelle que soit la pré-

cision acquise par les mesures, les quantités infinitésimales resteront cependant hors de notre portée : toute unité de mesure concrète correspond en effet nécessairement à un nombre standard.

voisin non standard infinitésimalement proche. Seuls les nombres standards concrets peuvent servir à exprimer une mesure ; l'utilité, sur le plan des mesures, de leurs voisins non standards est illusoire.

Cette théorie du mouvement contient des éléments superflus et reste muette sur certains autres points. Elle est cependant satisfaisante, car elle se traduit facilement dans le langage symbolique du calcul différentiel et intégral classiquement utilisé pour décrire les mouvements (voir l'encadré de la page 90). Pour ce qui nous concerne ici, le plus important est que la finitude de l'ensemble F permet d'éviter les pièges des deux premiers paradoxes de Zénon. Quant au troisième paradoxe, elle le réfute comme nous l'avons fait précédemment : le mouvement en temps réel est un phénomène inconnu qui se déroule durant des intervalles de temps infinitésimaux situés entre les points standards de F ; les points non standards de F ne pouvant être observés, ils ne présentent aucun intérêt.

Durant de nombreux siècles, la logique de Zénon n'a pas été véritablement réfutée. Il fallut attendre deux caractéristiques fondamentales de l'analyse non standard pour lever les paradoxes : premièrement, la possibi-

lité de diviser un intervalle de temps ou d'espace en un nombre fini d'éléments infinitésimaux, et, deuxièmement, le fait que les points qualifiés de standards – les seuls que l'on puisse utiliser lors d'une mesure – sont des éléments isolés de la droite réelle. Ce travail n'est-il que la solution d'une énigme séculaire ? Peut-être, mais il y a plusieurs directions dans lesquelles on pourrait le prolonger.

Outre sa valeur mathématique, l'analyse non standard présente également un grand intérêt épistémologique. En outre, les intervalles infinitésimaux, ou leur généralisation, pourraient fournir un cadre technique où s'intégreraient les entités « réelles » de Whitehead, les atomes générateurs de son système philosophique. Enfin la théorie non standard du mouvement et la physique quantique ne sont guère différentes dans la mesure où toutes deux limitent l'observation de certains événements à des valeurs discrètes. Bien sûr, cette théorie du mouvement n'est pas une version de la théorie quantique (ni, en l'occurrence, de la relativité). Comme elle résulte d'une expérience de pensée menée sur des arguments de Zénon, elle n'a aucun lien direct avec la théorie physique actuelle. De surcroît, les

règles de l'analyse non standard ne sont pas probablement les plus appropriées pour une description de la réalité. La physique moderne pourrait adapter l'approche non standard en modifiant son système de règles et en introduisant des « constantes physiques », par exemple en introduisant des paramètres dans la description de l'ensemble F .

William McLaughlin est directeur technique du Groupe d'astrophysique du Laboratoire Jet Propulsion, à Pasadena.

Gregory VLASTOS, *Zeno of Elea*, in *The Encyclopedia of Philosophy*, sous la direction de Paul Edwards, Macmillan Publishing Company, 1967.

M. DAVIS et R. HERSH, *Nonstandard Analysis*, in *Scientific American*, vol. 226, n° 6, pp. 78-86, juin 1972.

Edward NELSON, *Internal Set Theory : A New Approach to Nonstandard Analysis*, in *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 83, n° 6, pp. 1165-1198, novembre 1977.

W. I. MCLAUGHLIN et S. L. MILLER, *An Epistemological Use of Nonstandard Analysis to Answer Zeno's Objections Against Motion*, in *Synthese*, vol. 92, n° 3, pp. 371-384, septembre 1992.