SYMÉTRIES FORMELLES, MATHÉMATIQUES PROFONDES ET RÉALITÉ

Dominique Lambert*

1. Introduction

La notion de symétrie est devenue progressivement un concept clef de la physique théorique contemporaine. Est-ce un hasard ? Certainement pas. Ainsi que l'ont très bien illustré Gilles Cohen-Tannoudji et Michel Spiro[1] à la suite de Weyl, de Wigner ou d'Ullmo[2], cette notion semble bien être une des conditions nécessaires qui doivent être satisfaites par une représentation théorique pour qu'elle soit susceptible de signifier un élément de réalité naturelle. Mais quelle peut bien être la définition de la symétrie ? Un cadre trop restreint, trop lié au concept de groupe, nous obligerait à lui

*Facultés Universitaires N.-D. de la Paix, 61 rue de Bruxelles 5000 Namur Belgique.

1.— G. Cohen-Tannoudji et M. Spiro, *La Matière-Espace-Temps.* La logique des particules élémentaires, Paris, Fayard, 1986.

2.— J. Ullmo, *La pensée scientifique moderne,* Paris, Flammarion, 1958, Bibliothèque de philosophie scientifique.

conférer une place importante certes mais non comme condition nécessaire de toute représentation du réel physique. Nous voudrions revenir ici, dans un premier temps, sur la signification profonde du concept de symétrie pour en montrer la portée essentielle pour la physique contemporaine.

Dans un deuxième temps, nous montrerons que ce caractère fondamental se retrouve aussi en mathématiques. La symétrie n'est pas seulement un concept des mathématiques ou dans les mathématiques. Elle définit une sorte de méta-concept qui éclaire ce qui détermine la partie la plus *significative* des mathématiques : les mathématiques *profondes*. Un des buts de cette contribution est d'avancer un peu plus, sur les pas de Dieudonné, pour fournir des critères permettant de distinguer les mathématiques *vides* des mathématiques *significatives*. La symétrie, comprise d'une façon assez large, pourrait donc donner accès au lien essentiel qui unit les mathématiques et les sciences empiriques. Nous verrons que cela se comprend justement en reconnaissant dans les symétries, et donc aussi dans les mathématiques *profondes*, cette traduction formalisée des critères de réalité. Retrouver une conception plus large de symétrie nous invite donc à revisiter la philosophie des mathématiques, et en particulier la question de la *réalité* mathématique, mais aussi à redéfinir les fondements d'une interprétation formelle du monde empirique, autrement dit d'une philosophie *naturelle* qui ne se confond pas avec une philosophie de la nature au sens classique.

2. Qu'est-ce qu'une symétrie ?

L'évolution du concept de symétrie a été étudiée dans le livre désormais classique de Weyl, *Symmetry*[3]. Hermann Weyl montre comment on est passé d'une notion vague évoquant la juste proportion, l'harmonie ou la « commensurabilité » des quantités, c'est-à-dire le fait que leur rapport soit un entier, à une notion précise de symétrie définie au moyen des groupes. Dans ce dernier cas, un ensemble est « symétrique » ou pour le dire autrement il existe des symétries sur un ensemble si l'on peut définir sur lui une transformation qui possède les propriétés suivantes : être interne, partout

3.— H. Weyl, *Symmetry*, Princeton University Press, 1952. Traduction française : *Symétrie et mathématique moderne*, Paris, Flammarion, 1964.

définie et associative, il existe un élément neutre et chaque élément possède un inverse (ce qui est la propriété caractéristique du groupe). Cette notion de symétrie traduit assez bien l'intuition de figure symétrique que l'on trouve en art plastique : symétrie des motifs ornementaux, symétrie des temples grecs... De plus, elle a montré toute sa puissance au cœur de la physique contemporaine où les symétries constituent un des fondements de la description des interactions fondamentales.

Cependant, le développement récent de la physique théorique a montré que les transformations utiles pour la description de la nature ne pouvaient en aucun cas être seulement restreintes aux seuls éléments des groupes. En effet, il existe des situations intéressantes où l'objet fondamental à considérer est un semi-groupe (une transformation arbitraire n'a, dans ce cas, plus nécessairement d'inverse). Un exemple d'une telle situation est offert par le « groupe » (en réalité semi-groupe) de renormalisation qui permet de calculer des exposants critiques dans les phénomènes de transition de phase[4]. D'autres exemples sont fournis par les semi-groupes d'évolution en mécanique quantique ou par les « groupes » quantiques (qui sont en réalité des algèbres de Hopf et non des groupes[5]) qui peuvent être vus comme des « symétries » des espaces quantiques[6]. Nous en arrivons donc à nous demander s'il ne conviendrait pas d'élargir la signification du concept de symétrie pour ne pas l'enfermer dans les limites des seuls groupes. En fait, un tel élargissement doit se baser sur une compréhension plus profonde du terme même de symétrie.

Une telle compréhension a été grandement facilitée par l'excellent ouvrage de Luc Brisson, un des grands spécialistes de l'œuvre de Platon, et de F. Walter Meyerstein intitulé : *Inventer l'Univers*[7]. Dans cet ouvrage les

4.— *cf.* M. Le Bellac, *Des phénomènes critiques aux champs de jauge. Une introduction aux méthodes et aux applications de la théorie quantique des champs*, Paris, InterÉditions/Éditions du CNRS, 1988.

5.— A. Guichardet, *Groupes quantiques. Introduction au point de vue formel*, Paris, InterÉditions/Éditions du CNRS, 1995.

6.— Un exemple d'un tel espace est le plan de Manin dont les coordonnées x et y, non-commutatives, vérifient : $xy = qyx$ (*cf.* J. Madore, *An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and its Physical Applications*, Cambridge University Press, 1995).

7.— L. Brisson et F. W. Meyerstein, *Inventer l'Univers*. Le problème de la connaissance et les modèles cosmologiques, Paris, Les Belles Lettres, 1991.

auteurs retournent à l'étymologie du terme « symétrie » et à son usage dans le *Timée* de Platon, pour en extraire le sens le plus large. Une symétrie caractérise au fond l'existence d'au moins un invariant, c'est-à-dire, une propriété d'un système (formel ou physique) qui ne change pas alors que des transformations sont opérées sur lui. C'est là la thèse principale et essentielle de Brisson et Meyerstein[8]. Celle-ci rejoint l'idée de « sym-métrie » comme « com-mensurabilité » que suggère l'étymologie[9] : deux nombres sont « commensurables » si leur rapport est entier. Ce rapport est une sorte d'invariant, puisque je peux opérer des transformations sur le dénominateur et le numérateur de la fraction (multiplication par un même facteur) sans en changer la valeur. Nous allons nous inspirer de la thèse de Brisson-Meyerstein en tentant de définir formellement une symétrie au sens le plus large comme la donnée d'un ensemble de transformations ou plus généralement de relations et de ses invariants associés.

Remarquons au passage que cette extension de l'acception du concept de symétrie était déjà annoncée par un autre grand connaisseur de Platon : Albert Lautman. Celui-ci suggérait le rôle essentiel joué par la dialectique « symétrie-dissymétrie » en physique et en mathématique et étendait son concept de symétrie à des relations de dualité entre les nombres, par exemple, qui ne sont pas nécessairement liées à des groupes[10].

On pourrait commencer en définissant une symétrie en lien avec une structure (au sens de Bourbaki) qui est essentiellement la donnée d'un ensemble avec une ou plusieurs opérations ou relations. Nous pourrions dire que la symétrie est la donnée de cette structure et d'un sous-ensemble non-vide d'invariants qui lui sont associés. Si cet ensemble était vide on perdrait totalement l'idée de symétrie car il n'y a symétrie que s'il y a conservation d'au moins quelque chose ! Dans bien des cas l'ensemble de tous les invariants est inaccessible et c'est pourquoi nous nous limitons à un sous-

8.— L. Brisson et F.W. Meyerstein, op. cit. p. 152. Cette thèse rend tout à fait compte de l'usage effectif du concept de symétrie en physique et peut-être même en mathématiques (*cf.* notre prochaine section), même si les exemples donnés par les auteurs sont encore trop proches de la notion de symétrie comme groupe.

9.— *cf.* aussi Ch. Mugler, *Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des Grecs*, Paris, Klincksieck, 1958.

10.— A. Lautman, « Symétrie et dissymétrie en mathématique et en physique » in *Les grands courants de la pensée mathématique* (présentés par F. Le Lionnais), Paris, Albert Blanchard, 1962 (nouvelle édition augmentée), pp. 54-65.

ensemble d'invariants. Cette approche redonnerait la notion classique de symétrie associée à la structure de groupe, mais elle pourrait aussi contenir les situations où des semi-groupes agissant sur un ensemble met en évidence des grandeurs conservées (des invariants de semi-groupes de renormalisation ou d'évolution, par exemple). À ce niveau, nous avons déjà une grande richesse d'invariants. Les opérations définies par les structures préservent, en général, la nature mathématique de certains objets qui peuvent être des scalaires, il s'agit alors de l'invariance numérique traditionnelle ou des tenseurs, des spineurs ou des twisteurs, des tenseurs-spineurs, etc., il s'agit dans ce cas d'une invariance de « forme » c'est-à-dire d'une covariance.

Mais ce cadre est trop restreint, car il est clair que la pratique des mathématiques et de la physique amène à considérer des transformations dont les invariants caractéristiques sont non plus des objets associés à des structures, mais des structures en tant que telles. Le bon langage est donc ici celui des catégories[11]. Une catégorie est en gros la donnée d'un ensemble « d'objets » (des groupes, des variétés différentiables...) et d'un ensemble de « flèches » reliant les « objets » (morphismes). Une symétrie au sens large pourrait être la donnée d'une catégorie et d'un sous-ensemble non-vide d'invariants associés. Un exemple est donné par la catégorie où les objets sont les groupes et où les flèches sont les homomorphismes de groupes. L'invariant naturel est ici la structure même de groupe qui se conserve sous les homomorphismes.

Ce cadre n'est pas le plus général dans lequel on puisse traduire adéquatement le concept de symétrie que nous avons proposé ci-dessus. Prenons en effet deux catégories différentes, nous pouvons les relier par un « foncteur » qui envoie les objets et les flèches de l'une sur les objets et les flèches de l'autre tout en préservant la loi de composition des flèches. Nous obtenons ici un moyen assez puissant pour traduire des invariants qui sont de nouveau des structures. Considérons par exemple la catégorie des variétés différentiables (les objets sont les variétés différentiables et les flèches sont les homéomorphismes) et la catégorie des groupes (les objets sont les

11.— *cf.* F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra 1. Basic Category Theory*, Cambridge University Press, 1994, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, p. 50.

groupes et les flèches sont les homomorphismes). Nous pouvons définir un foncteur qui associe à chaque variété son premier groupe d'homotopie (groupe de Poincaré). Pour une classe de variété homéomorphes, le foncteur mettra en évidence un invariant topologique (à un isomorphisme de groupes près) : le premier groupe d'homotopie commun aux variétés de cette classe.

On peut continuer notre investigation plus loin, car on peut aussi définir des structures algébriques et topologiques sur les catégories, on peut aussi relier les foncteurs définis entre deux catégories par des « transformations naturelles » (morphisme de foncteurs) et cela donne naissance à des traductions de haut niveau de l'idée de symétrie en tant que donnée de relations extrêmement générales et de certains invariants qui leur sont caractéristiques. Nous ne parvenons donc pas à mettre la main sur le bon concept mathématique qui pourrait traduire l'idée de symétrie au sens large. Par contre, ainsi que nous venons de le voir, nous possédons beaucoup d'exemples qui traduisent ce concept dans des champs mathématiques particuliers, mais de plus en plus larges. Il semble donc que l'idée de symétrie que nous avons proposée soit plutôt une sorte de caractéristique « méta-théorique » plutôt qu'un concept théorique, c'est-à-dire une propriété structurale de certaines théories.

Nous proposons de dire qu'un domaine théorique manifeste une « symétrie formelle » (ou symétrie généralisée) si l'on peut y retrouver les trois ingrédients suivants :
(i) la donnée d'au moins une relation **R**,
(ii) la traduction formalisée de l'idée de conservation d'un objet mathématique[12] par rapport à **R** et
(iii) un ensemble non-vide d'objets mathématiques conservés au sens (ii).

12.— « Objet mathématique » n'a pas ici le sens qu'on lui donne en théorie des catégories. Il désigne plutôt un concept mathématique général : élément d'un ensemble, espace, structure, fonction... Ce terme n'implique aucun engagement concernant le statut ontologique de ces « objets ». Nous rappelons qu'il est difficile de conférer un statut ontologique fixe aux « objets mathématiques » car les « objets » peuvent être vus comme des relations et inversement (la fonction est tout aussi bien un objet d'un espace fonctionnel et le champ de vecteur un opérateur sur une algèbre de fonctions sur une variété).

Nous retrouvons en fait ici l'intuition profonde qui animait Eilenberg et Mac Lane lorsqu'ils jetaient, aux alentours de 1945, les bases de la théorie des catégories[13]. En effet, ainsi que l'a bien montré Leo Corry[14], ces mathématiciens cherchaient, entre autres, à établir des hiérarchies de propriétés de structures basées sur leur degré d'invariance par rapport à certaines transformations. La notion de symétrie formelle permet donc de situer le concept classique de symétrie évoqué par Weyl comme un cas particulier d'un thème (méta-théorique) plus vaste qui parcourt la mathématique tout entière souvent de manière implicite[15].

L'idée de symétrie formelle constitue un cadre adéquat pour étudier le processus par lequel on engendre une théorie à partir d'une autre[16]. Le cas le plus simple consiste en la généralisation de résultats connus. Celle-ci est bien entendu une manière de transformer le domaine étudié, tout en conservant certains invariants : les résultats précédemment établis. Il en va de même pour la production de nouvelles théories à partir d'extensions (extensions de corps...), de prolongements (prolongements analytiques...), etc. Dans tous ces cas, il s'agit d'opérer un type de transformation du cadre existant en un autre en préservant des invariants : numériques, algébriques ou formels (type d'équation, nature d'une structure...). On sait que certains processus d'engendrement théorique peuvent parfois se décrire à partir d'une déformation de structure. La mécanique quantique, dans son formalisme théorique par exemple, résulte d'une déformation à un paramètre (la constante de Planck) de l'algèbre des observables classiques en

13.— *cf.* S. Eilenberg et S. Mac Lane, « General Theory of Natural Equivalence », *Transactions of the American mathematical Society*, 28 (1945) 231-294.

14.— L. Corry, *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Basel, Birkhäuser, 1996, Science Network-Historical Studies 17, pp. 351-353.

15.— Nous donnons ici un exemple de cette résurgence implicite d'une notion de symétrie auquel la notion de symétrie formelle donne son statut propre : « ...Un énoncé de ce type est appelé un théorème de reconstruction. Il affirme que toute catégorie tensorielle tressée munie d'un foncteur tensoriel vers la catégorie k-mod$_f$ est essentiellement la catégorie des comodules sur une bigèbre cotressée. Cette dernière joue le rôle de « groupe de symétrie » de la situation. C'est une généralisation de la situation « tannakienne » étudiée par Grothendieck et son école... » (C. Kassel, « Nœuds, catégories tensorielles et groupes quantiques », *Gazette des mathématiciens*, avril 1993/n° 56, pp. 63-80).

16.— Nous avons donné une esquisse de classification des processus d'engendrement théorique en mathématiques dans notre article : « La création en mathématiques » in *Création et événement. Autour de Jean Ladrière* (Centre international de Cerisy-la-Salle. Actes de la décade du 21 au 31 août 1995 ; J. Greisch et G. Florival eds), Louvain-la-Neuve/Louvain, Éditions de l'Institut Supérieur de Philosophie/Peeters, 1996, pp. 61-66.

une algèbre d'opérateurs non-commutatifs[17]. Les classes de déformations possibles peuvent être caractérisées par des invariants topologiques (groupes de cohomologie)[18]. Ainsi, les engendrements théoriques peuvent être vus comme des symétries formelles reliant des théories différentes.

Ces symétries formelles constituent aussi un cadre adéquat pour rendre compte des transferts d'intuition d'un domaine dans un autre, ce qui est une pratique assez courante chez les mathématiciens d'aujourd'hui. Une manière de traduire ce transfert d'intuition peut être formalisé en utilisant la théorie logiques des modèles. Un modèle est en gros un domaine d'objets qui donne une interprétation d'une axiomatique. En général, il existe un grand nombre de modèles (inéquivalents) d'une même axiomatique. Le transfert d'intuition peut être vu comme un changement de modèle qui se caractérise par la conservation d'une large classe d'énoncés satisfaits dans un modèle bien connu. Le caractère non-trivial de ce genre de transfert vient du fait que toute proposition qui est satisfaite dans un modèle d'une axiomatique (toute « vérité » de ce modèle) n'est pas nécessairement satisfaite dans un autre et n'est pas nécessairement démontrable dans l'axiomatique en raison de théorèmes d'incomplétude à la Gödel. Les « principes de transfert » (de Tarski par exemple) qui assurent la conservation de résultats dans les modèles de la théorie des corps réels clos et qui ont été analysés très profondément par Madame Sinaceur[19], sont donc des exemples de symétries formelles (méta-théoriques) dans l'ensemble des modèles d'une axiomatique particulière.

Nous voyons donc que la notion de symétrie formelle peut être vue comme un concept qui unifie les pratiques mathématiques qu'elles soient considérées : (i) au niveau des théories elles-mêmes (structures...), (ii) au niveau des relations inter-théoriques (catégories...) ou encore (iii) au niveau méta-théorique (modèles...).

17.— *cf.* A. Connes, *Géométrie non-commutative*, Paris, InterEditions, 1990.

18.— *cf.* Cl. Roger, « Déformations algébriques et applications à la physique », *Gazette des mathématiciens* (juin 1991/n° 49), 75-94.

19.— H. Sinaceur, *Corps et modèles. Essai sur l'histoire de l'algèbre réelle*, Paris, Vrin, 1991. Pour une présentation technique du principe de Tarski nous renvoyons à : J. Bochnak, M. Coste, M-F. Roy, *Géométrie algébrique réelle*, Berlin, Springer, 1987, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete.

Remarquons enfin que le « méta-concept » de symétrie formelle est aussi le fondement de toute procédure de classification ainsi que l'avaient remarqué Brisson et Meyerstein[20] à la suite de Jean Dieudonné[21] et de tous les physiciens qui utilisent les groupes de Lie pour classer les particules élémentaires. En effet, toute classification revient à déterminer les invariants qui permettent de placer deux objets dans la même classe.

3. LES MATHÉMATIQUES « PROFONDES » : LE POINT DE VUE DE L'UNIVERSEL

Toutes les mathématiques se valent-elles ? Une approche purement formaliste des mathématiques considérant que celles-ci ne sont que des jeux arbitraires avec des symboles pourrait le laisser supposer. Or, la pratique des mathématiciens ne confirme pas cela. Intuitivement, ces derniers font souvent la distinction entre ce qui relève de mathématiques « gratuites », « artificielles » et ce qui serait lié à des mathématiques « profondes ». La notion de « profondeur mathématique » relève-t-elle d'un simple effet de langage voire de la pure subjectivité (les préférences des mathématiciens) ou, au contraire, correspond-elle à une réalité significative au niveau épistémologique ? Dieudonné nous a donné un élément de réponse en caractérisant ce qu'il appelle des mathématiques « significatives » par opposition aux mathématiques « vides »[22].

Les mathématiques vides sont des mathématiques non-motivées et qui n'apportent aucune idée nouvelle, aucune solution à des problèmes non encore résolus... Elles constituent ce que Dieudonné appelle un « délayage » de mathématiques préexistantes. Par opposition, les mathématiques

20.— op.cit., p.152.

21.— J. Dieudonné, *Pour l'honneur de l'esprit humain. Les mathématiques aujourd'hui*, Paris, Hachette, 1987, Histoire et philosophie des sciences, pp. 162-164.

22.— J. Dieudonné, « Mathématiques vides et significatives » in *Penser les mathématiques* (Séminaire de philosophie et mathématiques de l'École normale supérieure. Sous la dir. de J. Dieudonné, M. Loi et R. Thom), Paris, Seuil, 1982, Points Sciences, pp. 15-38. *cf.* aussi l'introduction à : J. Dieudonné, *Panorama des mathématiques pures. Le choix bourbachique*, Paris, Gauthier-Villars, 1977, Coll. « Discours de la Méthode ».

significatives sont celles qui engendrent des idées[23] ou des méthodes nouvelles, qui organisent des champs mathématiques sous un point de vue unificateur ou qui permettent la résolution de problèmes compliqués. Parmi les mathématiques significatives, Dieudonné place la théorie des groupes et la géométrie algébrique en raison de leur puissance unificatrice. En permettant de relier un contexte théorique donné à un réseau d'autres champs théoriques, ces notions significatives augmentent notre intelligibilité. Ainsi, par exemple, on comprend pourquoi on ne peut avoir de formule donnant les solutions des équations du 7^{e} degré en se basant sur la théorie des groupes de Galois. Ou encore, on comprend le caractère totalement parallélisable de la sphère S^7 en se fondant sur la théorie des algèbres de Cayley-Dickson (ici précisément la théorie des octonions).

Dirac[24] établit aussi une distinction qualitative entre les théories mathématiques, mais cette distinction est fondée sur la « beauté » des théories. Il existe des théories « plus belles » que d'autres. Cette notion esthétique est en fait souvent liée à l'existence de groupes de transformations. Dans le contexte d'une discussion concernant les rapports entre les mathématiques et la physique, il déclare : « *It would probably be a good thing also to give a preference to those branch of mathematics that have an interesting group of transformations underlying them...* ». Puis il donne un exemple où l'on voit se côtoyer la « beauté théorique » et l'existence de transformations : « *...non-associative algebra is not a specially beautiful branch of mathematics, and is not connected with an interesting transformation theory* ». Ceci pourrait être critiqué puisque l'algèbre non-associative des octonions donne naissance à de jolies connexions avec la géométrie projective et les algèbres de Lie exceptionnelles. Cependant, ce qui nous intéresse ici, c'est l'idée que les mathématiques pourraient être hiérarchisées en se basant sur la présence ou non de (groupes) de transformations.

Un exemple de théorie douée de beauté nous est donné par Dirac : « *...the theory of functions of a complex variable. This branch of mathematics*

23.— On retrouve ici l'idée de « générativité » des formalismes que l'on trouve, entre autres, chez Alain Connes (en dialogue avec J.-P. Changeux) dans : *Matière à pensée*, Paris, Odile Jacob, 1989, p.92.

24.— P.A.M.Dirac, « The relation between mathematics and physics », *Proceedings of the Royal Society* (Edinburgh), 59, part II, (1938-39) 122-129. Les passages cités se trouvent à la page 125.

is of exceptional beauty, and further, the group of transformations in the complex plane, is the same as the Lorentz group governing the space-time of restricted relativity. One is thus lead to suspect the existence of some deep-lying connection between the theory of functions of a complex variable and the space-time of restricted relativity, the working out of which will be a difficult task for the future »[25]. Pour Dirac donc, il existe à l'intérieur des mathématiques des théories qui sont plus « belles » que d'autres. Les exemples qu'il nous donne montrent qu'il s'agit de théories associées à de riches ensembles de transformations et de plus, ce sont celles-là qui semblent jouer un rôle dans la description de la nature.

Si nous suivons l'intuition de Dieudonné, nous pourrions dire qu'il existe bel et bien des mathématiques significatives que nous appellerons ici « profondes ». Ces mathématiques sont celles qui donnent une intelligibilité en reliant des domaines superficiellement distincts, c'est-à-dire en les plongeant dans une cohérence plus profonde. Il s'agit donc de théories qui exhibent une sorte d'invariant commun aux divers champs théoriques qu'elles relient. Mais, c'est précisément un des aspects de la symétrie formelle dont nous parlions ci-dessus. Ces mathématiques profondes sont aussi celles qui engendrent des idées ou des cadres théoriques nouveaux. Or, ici aussi, la mise en évidence de symétries formelles est souvent l'outil qui permet de découvrir de nouveaux « objets mathématiques » (les symétries des diagrammes de Dynkin, par exemple, permirent la découverte systématique d'algèbres de Lie auxquelles on ne pensait pas de prime abord : les algèbres exceptionnelles). La symétrie est pourrait-on dire une puissance d'engendrement théorique et c'est pour cela que la générativité des formalismes est souvent liée à la présence de ces symétries. Nous comprenons donc pourquoi Dirac associe toujours les mathématiques intéressantes, belles, nous dirions encore une fois profondes, à la présence de groupes de transformations, qui sont des symétries formelles parmi d'autres.

25.— Cette tâche a été en partie réalisée, par Penrose, dans la théorie des twisteurs (*cf.* R. Penrose, « On the origin of twistor theory » in *Gravitation and Geometry (A volume in honour of I. Robinson)* ; W. Rindler, A. Trautman eds), Naples, Bibliopolis, 1987, pp. 341-361.

Ainsi, nous pouvons nous risquer en proposant la caractérisation suivante. Il existe bel et bien différents types de mathématiques. Les mathématiques profondes qui sont des domaines liés à des symétries formelles — et donc à de riches classes d'invariants — et des mathématiques superficielles ou vides qui n'exhibent aucun ou peu d'invariants associés à des ensembles de relations. On peut vérifier cette caractérisation en observant ce qui fait l'intérêt de la démonstration de Wiles du dernier théorème de Fermat. Cet intérêt provient en grande partie du fait qu'elle fait intervenir des représentations du groupe de Galois absolu sur des courbes elliptiques ou sur des formes modulaires et qu'elles relie des domaines différents des mathématiques comme la géométrie algébrique et la théorie des nombres[26]. Traduit dans le langage de la section précédente, ceci signifie que l'intérêt, la profondeur d'une telle démonstration viennent de la mise en évidence de symétries formelles.

L'approche de Dirac suggère un lien entre ce que nous appelons les mathématiques profondes et la description des phénomènes de la nature. Il n'existe que peu, voire pas, de théories fécondes au niveau des mathématiques qui ne soient pas engagées dans la description des phénomènes qu'étudient les sciences naturelles ou mêmes humaines. Certains pourraient prétendre que le scientifique ne fait que suivre la loi du moindre effort en prenant ce qui est à sa disposition chez les mathématiciens. Mais ceci n'est pas toujours vrai. En effet, le physicien réinvente souvent des pans entiers de théories qui existaient déjà dans les mathématiques profondes, prouvant par là que la description phénoménale le conduit, un peu malgré lui, vers ce genre de mathématiques. Nous voudrions citer, par exemple, la redécouverte des algèbres de Clifford ou des représentations spinorielles (de Cartan) par Dirac dans sa théorie de l'électron relativiste. Nous pensons qu'il ne s'agit pas là d'un hasard. Les mathématiques profondes et la description de la réalité naturelle ne peuvent que se rencontrer, de temps à autres, pour des raisons que nous expliquerons dans la suite.

La caractérisation des mathématiques profondes que nous venons de donner n'est certainement pas complète. En effet, la « profondeur » est

26.— *cf.* Y. Hellegouarch, *Invitation aux mathématiques de Fermat-Wiles*, Paris, Masson, 1997, Enseignement des mathématiques.

définie par des cadres doués de ce que l'on pourrait appeler : une « universalité ». La profondeur vient de ce que des « objets » ou des « domaines » variés partagent une même propriété (l'invariant). Or, cela ne rend pas bien compte d'un autre aspect de la pratique du mathématicien qui attribue souvent implicitement une « profondeur » à des objets exceptionnels. Ici, c'est le caractère singulier qui est la trace de la « profondeur ». Nous devons donc aller un peu plus loin dans notre analyse des mathématiques profondes.

4. Les mathématiques « profondes » : le point de vue du singulier

Il est intéressant de donner quelques exemples de ces situations exceptionnelles. Une des plus anciennes est illustrée par l'existence des cinq polyèdres platoniciens. On peut citer ensuite les algèbres de Lie exceptionnelles E_6, E_7, E_8, G_2 et F_4 ainsi que les algèbres exceptionnelles de Jordan. Les algèbres des nombres complexes, des quaternions et des octonions sont exceptionnelles en un certain sens puisque ce sont les seules algèbres normées, à division. Elles sont précisément liées aux sphères S^1, S^3, S^7 qui sont exceptionnelles, dans la mesure où ce sont les seules qui sont parallélisables (les seules sur lesquelles nous pouvons définir de manière globale un champ de vecteurs). L'algèbre O des octonions donne naissance également à une géométrie projective exceptionnelle OP^2 décrite par Moufang[27]. D'autres exemples de situations exceptionnelles apparaissent dans la classification des groupes finis simples où l'on met en évidence des groupes sporadiques (le « Monstre » par exemple). En topologie ou en théorie des groupes, certaines dimensions d'espaces sont exceptionnelles. Ainsi la structure du groupe conforme apparaît exceptionnellement riche en dimension 2 (le groupe conforme y est de dimension infinie alors qu'il est de dimension finie pour des dimensions supérieures). La dimension 3 est exceptionnelle en ce qui concerne les nœuds, puisqu'en dimension supérieure, tous les nœuds se dénouent ! Ainsi que l'a montré Simon Donaldson, la dimension 4 est exceptionnelle du point de vue des variétés différentiables : $\mathbf{R}^4$ possède, en effet, une infinité de structures différentiables « exotiques » qui

27.— Nous renvoyons ici au livre suivant : F. Gürsey et Ch.-H. Tze, *On the role of division, Jordan and related algebras* in particle physics, Singapore, World Scientific, 1996.

sont absentes dans des espaces de dimensions différentes[28]. Toutes ces situations exceptionnelles sont liées à des mathématiques fécondes, « significatives » au sens où elles sont liées à des résultats non-triviaux.

Les considérations que nous venons de faire sont seulement « phénoménologiques ». Elles sont basées sur une constatation qu'il semble exister un lien entre le caractère exceptionnel de certains « objets mathématiques » et leur « profondeur ». Il importe maintenant de comprendre pourquoi l'exceptionnalité pourrait être une facette de la « profondeur » ?

Rappelons tout d'abord que le terme « profondeur » signifie, entre autres, la fécondité théorique, celle-ci impliquant soit une capacité d'engendrement d'idées ou de concepts nouveaux, soit une possibilité de résolution de problèmes difficiles, soit finalement une capacité unificatrice de domaines apparemment distincts. Un objet exceptionnel peut être dit « profond » en raison du fait qu'il suscite de lui-même, par l'étonnement qu'il provoque, la recherche de concepts, de théories ou de méthodes « expliquant » pourquoi il est singulier, exceptionnel. La profondeur est ici une mesure de l'ampleur des méthodes développées pour comprendre l'exceptionnalité d'un « objet mathématique ». Ces méthodes et concepts trouvent alors une unité naturelle en se reliant tous en ce « nœud » que constitue l'objet exceptionnel (la capacité unificatrice est, nous l'avons dit il y a un instant, une autre caractérisation de la profondeur). Comme exemple citons d'abord les algèbres de Lie exceptionnelles. Elles apparaissent dans toute leur fécondité, dans toute leur profondeur, lorsqu'on comprend vraiment pourquoi elles sont exceptionnelles. Dans ce cas, ce sont les travaux de Jacques Tits qui nous aident à comprendre la raison profonde de l'apparition de ces algèbres et qui en mesure la profondeur[29]. Un autre exemple est lié au « Monstre », ce groupe fini d'un ordre extrêmement élevé. Son caractère exceptionnel se mesure, entre autres, par les liens qui se tissent entre ce groupe et les « algèbres de vertex » que l'on rencontre en théorie des champs.

28.— S.K. Donaldson et P.B. Kronheimer, *The geometry of four-manifold*, Oxford, Clarendon Press, 1990 ; M. Freedman et F. Quinn, Topology of four-manifolds, Princeton University Press, 1990.

29.— *cf.* A. Valette, « Quelques coups de projecteurs sur les travaux de Jacques Tits », *Gazette des mathématiciens*, n° 61 (juillet 1994), 61-78.

Celles-ci sont liées à leur tour aux théories conformes à deux dimensions et donc aux algèbres de Lie de dimension infinie... Ce réseau théorique contribue à lui seul à manifester clairement la profondeur de ce groupe exceptionnel[30].

L'exceptionnalité est une des facettes du « singulier » en mathématiques, mais il y en a une autre qui pourrait se déduire de ce que nous avons dit sur les symétries formelles. En effet, des « objets » mathématiques intéressants apparaissent lorsqu'on restreint le cadre « universel » défini par les symétries formelles. Cette restriction peut être une brisure de symétrie au sens des physiciens. Par exemple, nous étudions le comportement des équations décrivant un système lorsque le groupe de symétries qui le caractérise est réduit à l'un de ses sous-groupes. Mais la restriction peut prendre aussi la forme d'un « passage au quotient ». L'exemple typique est donné par la classification des espaces symétriques en géométrie. Nous considérons le groupe $SO(3)$ des rotations dans l'espace euclidien ordinaire. Nous prenons ensuite son sous-groupe compact maximal $SO(2)$ et nous classons les rotations de $SO(3)$ à des rotations de $SO(2)$ près. Nous obtenons de cette manière la sphère usuelle $S^2 = SO(3)/SO(2)$ qui possède des propriétés nouvelles par rapport à celles de $SO(3)$. La méthodologie de restriction peut être aussi illustrée par la procédure de limite projective où l'on considère la limite d'une suite de sous-ensembles emboîtés munis d'une structure donnée. Ici, on peut faire apparaître des « objets » intéressants par une sorte de focalisation théorique. Nous avons à faire ici à une procédure générale qui, partant d'une symétrie formelle, met en évidence un cadre théorique (qui peut être aussi, mais pas toujours, une symétrie formelle ; cela dépend en fait de l'existence d'invariants) au moyen d'une restriction du domaine de définition de la relation qui définit la symétrie de départ ou d'un passage au quotient. On peut appeler cette procédure une « brisure de symétrie formelle ». Ce qui nous intéresse ici, c'est que des mathématiques fécondes ou significatives puissent être engendrées par de telles « brisures ». La profondeur des objets « singuliers » obtenus vient ici de tout le chemin théorique qu'il nous faut parcourir pour montrer comment ils se relient à des cadre plus universels : les symétries formelles de

30.— I. Frenkel, J. Lepowsky et A. Meurman, *Vertex operator and the Monster*, New york, Academic Press, 1988.

départ. C'est donc le lien entre l'universel et le singulier qui est ici l'indice de la profondeur mathématique.

La profondeur mathématique se révèle donc par l'existence de symétries formelles dont la fonction peut être lue de deux manières différentes. (i) Ces symétries mettent en évidence de riches classes d'invariants. (ii) Elles servent à manifester, à pointer des objets théoriques dans leur singularité ou dans leur exceptionnalité aux moyens de « brisures de symétries ».

À partir de cette caractérisation on peut établir une hiérarchie de formalismes basée sur la profondeur mathématique, qui recoupe d'ailleurs celle de Dieudonné (en traduisant profond par significatif). Par exemple, la théorie des fonctions à une variable complexe est en ce sens plus profonde que la théorie des fonctions à une variable complexe hyperbolique[31]. Ces nombres complexes (nombres doubles) sont du type : $z = x + ey$ où x, y sont des réels et $e^2 = +1$. Il s'agit en fait d'un cas particulier d'algèbre de Clifford à un générateur associée à un espace à deux dimensions muni d'une métrique hyperbolique. En effet, si nous définissons un conjugué $z^* = x - ey$ nous pouvons définir une norme pseudo-euclidienne par $zz^* = z^*z = x^2 - y^2$. Cette algèbre possède des diviseurs de zéro (sur le « cône de lumière » $x^2 - y^2 = 0$) ce qui interdit d'en faire un corps comme les complexes ordinaires. On peut montrer que l'agèbre de ces complexes ordinaires est en fait isomorphe à $\mathbf{R} + \mathbf{R}$. La théorie des fonctions définies sur cette algèbre est donc une autre notation pour la théorie des fonctions à deux variables réelles et l'on sait que cette théorie est très différente de la théorie des fonctions à une variable complexe usuelle. Par exemple, les liens avec le groupe conforme à deux dimensions et la sphère de Riemann sont perdus. La différence de « profondeur » entre les deux théories peut se visualiser de manière éclatante ainsi que l'a montré Metzler[32]. En effet, on sait que l'ensemble de Mandelbrot M, qui est défini à partir d'un processus itératif simple dans le plan complexe ($f_c(z) = z^2 + c$; M est l'ensemble des c tel que $f_c^n(z)$

31.— *cf.* D. Lambert, « Les nombres complexes hyperboliques. Des complexes qui nous laissent perplexes », *Revue des Questions Scientifiques* **166** (1996) 383-400.

32.— W. Metzler, « The mystery of the quadratic Mandelbrot set », *American Journal of Physics* **62** (1994) 813-814.

ne s'éloigne pas à l'infini quand n tend vers l'infini) est d'une exceptionnelle richesse. Metzler remplace z par une variable complexe hyperbolique et montre que l'ensemble de Mandelbrot n'est plus qu'un... carré ! La profondeur liée à la riche symétrie sous-jacente à la théorie des fonctions d'une variable complexe disparaît ici. On pourrait montrer aussi (deuxième facette de la profondeur : lien entre l'universel et le singulier) qu'une théorie ou qu'un problème très particulier dont on ne peut pas expliquer la particularité, la singularité ou l'exceptionnalité par un processus de liaison à des symétries formelles est (momentanément ou définitivement) sans profondeur mathématique. Entrent dans cette classe ce que Dieudonné nomme les « problèmes sans postérité »[33] qui, une fois résolus, n'engendrent aucun développement mathématique, aucun progrès conceptuel.

Nous ne prétendons pas bien entendu avoir épuisé la signification de ce concept intuitif de profondeur mathématique, notre but est plutôt de montrer que l'on peut peut-être lui donner des contours un peu plus précis en repérant certains traits constants de la profondeur. Il est également clair qu'il s'agit d'un concept relatif. On ne peut jamais donner une définition vraiment opérationnalisable de la profondeur mathématique « absolue », celle-ci pouvant seulement être appréhendée comme horizon ou comme idée régulatrice. La profondeur se définit par rapport à un réseau de symétries formelles connues à un moment donné de l'histoire des mathématiques.

5. Les critères formels de réalité

Qu'est-ce qu'une réalité ? La réponse à cette question relève de la métaphysique. Cependant, elle concerne aussi le scientifique qui doit faire constamment la différence entre la réalité et l'illusion ou l'artefact. Pour cela il doit, implicitement ou explicitement, faire appel à des critères (et non directement à un concept) de réalité[34]. Quels sont ces critères ?

33.— J. Dieudonné, *Panorama des mathématiques pures...*, op.cit., pXII.

34.— Nous renvoyons ici à l'excellent ouvrage de M. Bitbol, *L'aveuglante proximité du réel*, Paris, Flammarion, 1998.

On admettra facilement qu'il n'existe pas de réalité sans que subsiste, au moins de manière partielle, une subsistance ou une persistance de quelque chose dans le flux temporel ou dans les changements de points de vue, d'instruments d'observations... Un premier critère de réalité est donc l'existence d'invariants sous des transformations particulières.

Mais la réalité, c'est aussi ce qui nous apparaît comme doué d'une certaine unité, une certaine cohérence interne. Si, par exemple, deux ensembles de choses ne semblent reliés en aucune façon dans notre perception visuelle ordinaire, nous ne parlerons pas d'une réalité, mais de deux. Une réalité est reconnue par nous comme une unité. Cela veut dire que la notion de relation qui unit des parties à un tout est un des ingrédients nécessaires pour que nous prenions conscience d'une chose comme d'une réalité particulière.

Tout ceci se traduit formellement en disant que la représentation théorique de tout élément de réalité doit comprendre au moins la donnée d'une symétrie formelle au sens défini ci-dessus. En effet, ce genre de symétrie implique un lien constitutif entre des relations (entre points de vue ou internes au réel) et des invariants, ce qui traduit, tout à la fois, et la persistance du réel et sa cohérence, son unité.

Toute reconnaissance d'un élément de réalité implique de le poser en même temps dans un rapport à d'autres éléments de réalité et dans sa propre singularité. En effet, pour *identifier* quelque chose, nous devons le relier à un concept, à une idée qui justement permet son identification. Il s'agit de ce fait de poser une réalité particulière dans un cadre doué d'une certaine universalité pour pouvoir la comparer à d'autres et lui donner sa signification propre. Mais la charge de réalité ne vient pas seulement de cette reconnaissance d'une idée. Elle vient aussi d'une capacité à identifier l'élément de réalité dans sa particularité. Lorsque je mets en évidence un élément de réalité, ce n'est pas une forme générale, une catégorie ou un type abstrait que j'appréhende, mais un objet particulier : « cet objet-ci et pas un autre ». Autrement dit, nous attribuons une *charge de réalité* au sein d'une sorte de tension dialectique entre l'universel et le singulier. L'universel est cette dimension de la cognition qui nous aide à comprendre l'élément de réalité (étymologiquement à *prendre* la réalité *avec* d'autres du même type !) et le singulier est cette autre dimension qui est la signature de sa particularité[35]. Ce que nous avons dit des brisures de symétries formelles et de l'exceptionnalité trouve ici son application. En effet, la brisure de symétrie formelle ou la mise en évidence de relations entre des symétries formelles très générales et des objets singuliers ou exceptionnels constituent des outils mathématiques permettant de signifier la particularité et donc permettant de traduire un des critère de réalité.

6. CONCLUSION : DES SYMÉTRIES FORMELLES À LA RÉALITÉ

Les mathématiques vraiment significatives ou profondes sont celles qui s'organisent autour des symétries formelles, de leurs relations et de leurs brisures. Or, ces derniers concepts sont aussi ceux qui traduisent les conditions nécessaires de manifestation d'éléments de réalité. Il faut donc en déduire que toute mathématique profonde peut être *potentiellement* utilisée comme description d'un élément de réalité et, inversement, que tout essai de description d'un domaine de la réalité naturelle par exemple, est une source de mathématiques profondes (ce que confirme bon nombre d'exemples tirés de l'histoire des rapports entre mathématiques et physique).

La philosophie platonicienne des mathématiques, qui attribue aux mathématiques un statut ontologique très fort, est très répandue parmi les mathématiciens. Une critique superficielle consisterait à discuter sur les difficultés à admettre l'existence d'un « monde d'idées mathématiques ». Pourtant, il est clair que la pratique mathématique confronte ceux qui s'y adonnent à une sorte d'impression de réalité ; les résultats semblent préexister au travail du mathématicien, certains domaines opposent une sorte

35.— Remarquons que cela n'induit aucune option sur le caractère séparable de la réalité ou sa localité ou encore sur la discernabilité des particules. Ce que nous venons de dire sur la singularité ou sur la particularité d'un élément de réalité s'applique aussi à des systèmes caractérisés par une non-localité, une inséparabilité ou une indiscernabilité des constituants. Si un système qui a un comportement non-local (comme en mécanique quantique), apparaît comme une réalité (dans une expérience par exemple), il devra aussi se manifester comme cette réalité précise-ci (et pas une autre !).

de résistance qui s'apparente à celle que l'on rencontre lors de la découverte d'un monde inconnu... Nous voyons ici qu'il n'est nul besoin de faire appel à un monde d'idées ontologiquement séparé pour comprendre ce qui fait la base de l'intuition platonicienne. Il suffit peut-être, si notre analyse du rôle des symétries formelles est correcte, de reconnaître que les mathématiques profondes sont précisément la traduction, dans un langage formalisé, de tous les développements des potentialités de notre intuition fondamentale (en partie innée et en partie acquise) de réalité ; celle-ci permettant précisément notre adaptation au monde environnant. Toutes les mathématiques (significatives) ne viennent pas de la réalité empirique, comme le supposait Aristote, mais toutes ces mathématiques sont de près ou de loin liées à notre *intuition* de ce qu'est le réel, à notre représentation anticipée de ce qu'il doit être. En ce sens, on retrouve ici une intuition assez fondamentale qui, des Pythagoriciens à Newton et à la physique théorique la plus récente, fait des mathématiques une *philosophia naturalis*, un cadre rationnel tentant d'appréhender la nature sous son aspect formel. Les symétries et leurs brisures, la compréhension du caractère exceptionnel de certains « objets » mathématiques, bien loin d'être seulement des concepts marginaux pourraient bien constituer les fondements mêmes d'une nouvelle philosophie naturelle apte à intégrer les acquis les plus récents des sciences de la nature et des mathématiques.