

Chapitre 3

Amplitudes de transition

Le problème de l'évolution temporelle d'un système quantique est la question la plus naturelle que l'on est amené à se poser pour décrire une observation expérimentale donnée. Etant donné une situation initiale bien définie, quelle est la probabilité pour que l'on observe le système après un certain temps dans tel ou tel état ?

Quand on a su diagonaliser complètement l'Hamiltonien, ce problème a une réponse élémentaire. Notons $|\alpha\rangle$ les vecteurs propres de H et E_α les énergies propres associées. Le vecteur d'état à l'instant t se déduit simplement du vecteur d'état initial par :

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} e^{-iE_{\alpha}t/\hbar} |\alpha\rangle \quad \text{avec} \quad c_{\alpha} = \langle \alpha | \psi(0) \rangle \quad (3.1)$$

Dans la plupart des cas, la situation n'est pas si simple et il faut avoir recours à des approximations. Le but de ce chapitre est de mettre en place un formalisme bien adapté à cette étude approchée de l'évolution temporelle d'un système. On va y dégager en particulier la notion d'amplitude de transition, que l'on retrouve par exemple lorsque l'on étudie la désexcitation d'un niveau instable (atomique, nucléaire,...). Cette notion est également essentielle en théorie des collisions, où l'on cherche à caractériser la probabilité qu'une particule d'impulsion initiale \mathbf{p}_i se retrouve avec l'impulsion finale \mathbf{p}_f après diffusion par un potentiel. Pour déterminer ces amplitudes de transition, on utilise l'opérateur d'évolution $U(t)$ ou sa "transformée de Fourier", la résolvante $G(z)$.

3.1 L'opérateur d'évolution

La définition générale de l'opérateur d'évolution $U(t_f, t_i)$, d'un instant t_i vers un instant t_f , pour un système dont l'Hamiltonien peut éventuellement dépendre du temps, est donnée par :

$$U(t_i, t_i) = 1 \quad (3.2)$$

$$i\hbar \frac{\partial U(t_f, t_i)}{\partial t_f} = H(t_f) U(t_f, t_i) \quad (3.3)$$

Il est alors immédiat de vérifier que :

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_i) |\psi(t_i)\rangle \quad (3.4)$$

est solution de l'équation de Schrödinger $i\hbar|\dot{\psi}(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle$. L'amplitude de transition d'un état ψ_i à l'instant t_i vers un état ψ_f à l'instant t_f est donnée par :

$$a(\psi_i, t_i \rightarrow \psi_f, t_f) = \langle \psi_f | U(t_f, t_i) | \psi_i \rangle \quad (3.5)$$

De cette définition découlent immédiatement les propriétés suivantes :

1. Si H est indépendant du temps, alors

$$U(t_f, t_i) = \exp(-iH(t_f - t_i)/\hbar) \quad (3.6)$$

que l'on note plus simplement $U(t_f - t_i)$.

2. L'Hamiltonien H est hermitien, donc U est unitaire.
3. On a, quel que soit l'instant relai t_r :

$$U(t_f, t_i) = U(t_f, t_r)U(t_r, t_i) \quad (3.7)$$

Cette égalité conduit à la notion d'interférence entre amplitudes de probabilité, puisque qu'elle entraîne, en introduisant une relation de fermeture :

$$a(\psi_i, t_i \rightarrow \psi_f, t_f) = \sum_{\psi_r} a(\psi_i, t_i \rightarrow \psi_r, t_r) a(\psi_r, t_r \rightarrow \psi_f, t_f) \quad (3.8)$$

4. $U^\dagger(t_f, t_i) = U(t_i, t_f)$
5. $i\hbar \frac{\partial U(t_f, t_i)}{\partial t_i} = -U(t_f, t_i)H(t_i)$

3.2 L'opérateur résolvante

3.2.1 Définition

On considère dans cette partie un système isolé, dont l'Hamiltonien est donc indépendant du temps. On pose :

$$G(z) = \frac{1}{z - H} \quad (3.9)$$

où z est un nombre complexe. En d'autres termes, $G(z)$ agit sur la base propre de H par :

$$G(z)|\alpha\rangle = \frac{1}{z - E_\alpha}|\alpha\rangle \quad (3.10)$$

L'opérateur $G(z)$ est donc défini pour tout z non égal à une valeur propre de H . La forme habituelle du spectre de H est indiquée sur la figure 3.1. Il comporte certaines valeurs discrètes, qui correspondent à des pôles de $G(z)$, et un continuum, qui correspond à une coupure dans la définition de $G(z)$. Il est alors utile de définir la limite de $G(z)$ de part et d'autre de la coupure :

$$G_+(E) = \frac{1}{E - H + i\eta} \quad G_-(E) = \frac{1}{E - H - i\eta} \quad (3.11)$$

où E est un nombre réel et où il faut prendre $\eta \rightarrow 0_+$. Considérons par exemple l'action de $G_\pm(E)$ sur un état propre $|\alpha\rangle$ de H . Cette limite se prend en utilisant la formule habituelle :

$$\frac{1}{E - E_\alpha \pm i\eta} = \mathcal{PP} \left(\frac{1}{E - E_\alpha} \right) \mp i\pi\delta(E - E_\alpha) \quad (3.12)$$

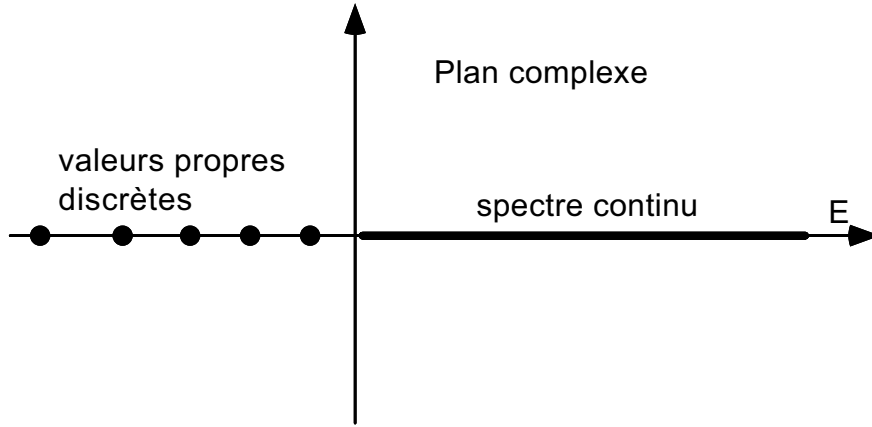


FIG. 3.1 – Forme typique du spectre de H , situé sur l'axe réel, correspondant aux points où la résolvante $G(z)$ n'est pas définie.

3.2.2 Lien entre $G(z)$ et $U(t)$

L'intérêt de $G(z)$ réside dans sa structure mathématique très simple, qui permet de faire de multiples développements perturbatifs, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant. Une fois $G(z)$ connue, le retour vers $U(t)$ se fait simplement par la formule :

$$U(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iEt/\hbar} (G_-(E) - G_+(E)) dE \quad (3.13)$$

Cette formule se démontre en regardant l'action des deux membres sur un état propre $|\alpha\rangle$ de H . A gauche, on trouve simplement $\exp(-iE_\alpha t/\hbar)|\alpha\rangle$. A droite, on fait apparaître :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iEt/\hbar} \left(\frac{1}{E - E_\alpha - i\eta} - \frac{1}{E - E_\alpha + i\eta} \right) dE |\alpha\rangle \quad (3.14)$$

On utilise la technique habituelle d'intégration dans le plan complexe. Pour $t < 0$, il faut utiliser un contour longeant l'axe réel et fermé vers le haut du plan complexe (figure 3.2) ; c'est alors $G_-(E)$ qui contribue, puisque son pôle est situé en $E = E_\alpha + i\eta$. Le résidu correspondant est $2i\pi \exp(-iE_\alpha t/\hbar)$. Pour $t > 0$, c'est le pôle de $G_+(E)$, situé en $E = E_\alpha - i\eta$ qui contribue, puisque le contour à considérer longe l'axe réel puis se ferme par le bas du plan complexe. Le résidu est alors $-2i\pi \exp(-iE_\alpha t/\hbar)$, ce qui, compte tenu du signe $-$ devant $G_+(E)$, donne bien le résultat cherché.

3.2.3 Développement de l'opérateur résolvante

La structure mathématique de la résolvante $G(z)$ se prête bien à des développements perturbatifs, et c'est ce qui justifie son utilisation pour des problèmes très variés. Considérons par exemple un Hamiltonien du type

$$H = H_0 + V \quad (3.15)$$

pour lequel on souhaite exprimer les amplitudes de transition en puissances de V , sachant que l'on peut diagonaliser exactement H_0 .

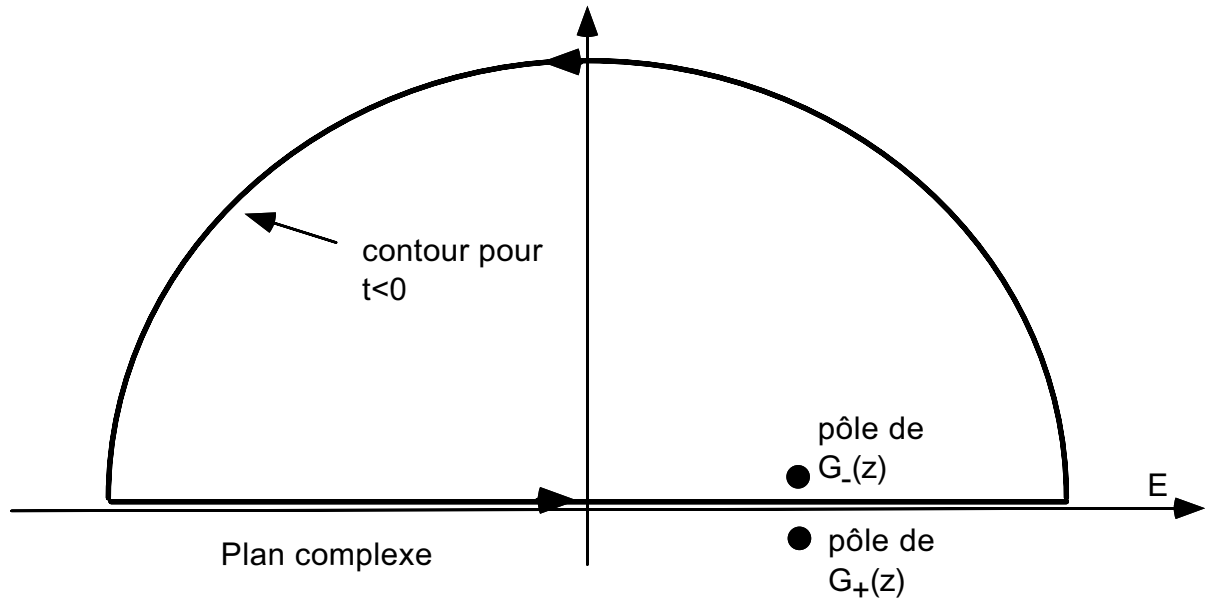


FIG. 3.2 – Contours à utiliser pour établir la relation entre $G_{\pm}(E)$ et $U(t)$.

On utilise l'identité entre opérateurs :

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{1}{A}(B - A)\frac{1}{B} = \frac{1}{B}(B - A)\frac{1}{A} \quad (3.16)$$

qui donne, en posant $A = z - H$ et $B = z - H_0$:

$$G(z) = G_0(z) + G(z)V G_0(z) = G_0(z) + G_0(z)V G(z) \quad (3.17)$$

avec

$$G_0(z) = \frac{1}{z - H_0} \quad (3.18)$$

Ces deux égalités sont le point de départ pour un développement de $G(z)$ (inconnue) en fonction de puissances de $G_0(z)$ et V (supposés connus). On trouve ainsi :

$$G = G_0 + G_0 V G_0 + \dots + (G_0 V)^n G_0 + \dots \quad (3.19)$$

développement que l'on peut tronquer de manière exacte en remplaçant dans le dernier terme de la somme de droite un des G_0 par G ; par exemple :

$$G = G_0 + G_0 V G_0 + G_0 V G V G_0 \quad (3.20)$$

Nous aurons l'occasion d'utiliser ce type de développement dans les chapitres suivants.

Chapitre 4

Couplage d'un état discret à un continuum

Pour le problème élémentaire de l'évolution temporelle d'un système à deux niveaux a et b , d'énergie E_a et E_b , ces deux niveaux étant couplés par un potentiel d'élément de matrice V_{ab} , la probabilité pour passer de a en b en un temps t se calcule exactement :

$$P_{ab}(t) = \frac{4|V_{ab}|^2}{(E_a - E_b)^2 + 4|V_{ab}|^2} \sin^2 \left(\frac{t\sqrt{(E_a - E_b)^2 + 4|V_{ab}|^2}}{2\hbar} \right) \quad (4.1)$$

C'est la formule de Rabi, démontrée au premier chapitre de cette partie.

Pour de multiples problèmes, cette quantité n'est pas pertinente. On mesure plutôt la probabilité de passer d'un état initial i à un domaine \mathcal{D}_f d'états finals f , ces états finals représentant un continuum. Par exemple, dans un problème d'émission spontanée, l'état i représente l'atome ou le noyau dans un état excité, en l'absence de photons, et les états f possibles correspondent à l'atome ou au noyau, en présence d'un (ou plusieurs) photon(s). Les états finals sont repérés par l'énergie du photon émis, par sa direction et par sa polarisation ; les deux premières grandeurs peuvent donc prendre un ensemble continu de valeurs correspondant à des états finals orthogonaux.

Nous modéliserons ce problème en partant de l'Hamiltonien H_0 en l'absence de couplage entre l'état discret i et les états finals f . L'état i est état propre de H_0 avec la valeur propre E_i :

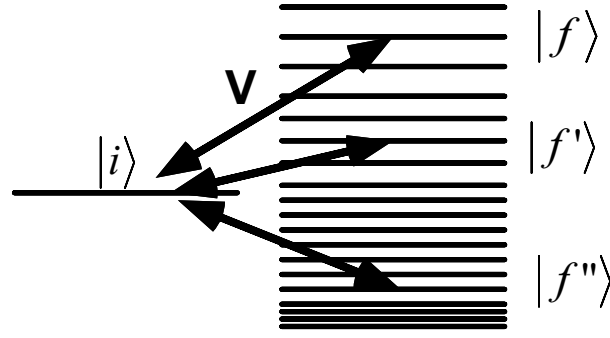
$$H_0|i\rangle = E_i|i\rangle \quad (4.2)$$

Les états finals f sont repérés par deux nombres : $f \equiv (E_f, \xi_f)$; E_f représente leur énergie :

$$H_0|E_f, \xi_f\rangle = E_f|E_f, \xi_f\rangle \quad (4.3)$$

et ξ_f correspond à l'ensemble des nombres quantiques supplémentaires nécessaires pour préciser complètement l'état f . Pour le cas d'un photon, évoqué plus haut, ξ_f repère la direction de propagation et la polarisation de ce photon. Nous supposons que l'état i est couplé aux états f par un potentiel V caractérisé par ses éléments de matrice :

$$V_{fi} = \langle f|V|i\rangle \quad (4.4)$$

FIG. 4.1 – Spectre en énergie de l'hamiltonien non perturbé H_0 .

Pour simplifier le traitement mathématique de ce problème, nous supposons que V n'a pas d'autres éléments de matrice non nuls, c'est-à-dire que :

$$V_{ii} = \langle i|V|i\rangle = 0 \quad V_{ff'} = \langle f|V|f'\rangle = 0 \quad (4.5)$$

La structure des niveaux d'énergie de H_0 est indiquée sur la figure 4.1. et elle est caractérisée par la *densité d'états* $\rho(E_f, \xi_f)$. Cette fonction est telle que $\rho(E_f, \xi_f) dE_f d\xi_f$ est le nombre d'états f d'énergie comprise entre E_f et $E_f + dE_f$, et de paramètre ξ compris entre ξ_f et $\xi_f + d\xi_f$.

4.1 La règle d'or de Fermi

Nous allons dans un premier temps évaluer la probabilité d'atteindre un domaine donné d'états finals \mathcal{D}_f pour les temps "courts". L'échelle de temps caractéristique sur laquelle ce traitement est valable sera déterminée de manière auto-cohérente à la fin de ce paragraphe.

4.1.1 Equation de Schrödinger

La fonction d'onde à l'instant initial est :

$$|\psi(0)\rangle = |i\rangle \quad (4.6)$$

A l'instant t , elle s'écrit :

$$|\psi(t)\rangle = \alpha(t)|i\rangle + \sum_f \beta_f(t)|f\rangle \quad (4.7)$$

L'évolution des coefficients α et β_f est donnée par l'équation de Schrödinger :

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{\alpha} &= E_i\alpha + \sum_f V_{if}\beta_f \\ i\hbar\dot{\beta}_f &= E_f\beta_f + V_{fi}\alpha \end{aligned}$$

Pour préparer le traitement perturbatif de V , définissons de nouvelles fonctions inconnues $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}_f$ n'évoluant que sous l'effet du couplage :

$$\tilde{\alpha}(t) = \alpha(t)e^{iE_it/\hbar} \quad \tilde{\beta}_f(t) = \beta_f(t)e^{iE_ft/\hbar} \quad (4.8)$$

L'équation de Schrödinger se réécrit alors :

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{\tilde{\alpha}} &= \sum_f V_{if} \tilde{\beta}_f e^{i\omega_{if}t} \\ i\hbar \dot{\tilde{\beta}}_f &= V_{fi} \tilde{\alpha} e^{-i\omega_{if}t} \end{aligned}$$

où l'on a posé $\omega_{if} = (E_i - E_f)/\hbar$.

4.1.2 Résolution perturbative

A l'ordre 0 en V , les fonctions $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}_f$ n'évoluent pas. A l'ordre 1 en V , on peut donc remplacer dans (4.9) $\tilde{\alpha}(t)$ par sa valeur initiale égale à 1 :

$$i\hbar \dot{\tilde{\beta}}_f \simeq V_{fi} e^{-i\omega_{if}t} \quad (4.9)$$

ce qui s'intègre en :

$$\tilde{\beta}_f(t) \simeq \frac{V_{fi}}{\hbar\omega_{if}} (e^{-i\omega_{if}t} - 1) \quad (4.10)$$

On calcule alors la probabilité $\delta P_f(t)$ de trouver le système dans le domaine d'états finals \mathcal{D}_f :

$$\delta P_f(t) = \sum_{f \in \mathcal{D}_f} |\beta_f(t)|^2 = \sum_{f \in \mathcal{D}_f} \frac{4|V_{fi}|^2}{(\hbar\omega_{if})^2} \sin^2 \frac{\omega_{if}t}{2} \quad (4.11)$$

4.1.3 Définition d'une probabilité par unité de temps

Dans le résultat pour $\delta P_f(t)$ apparaît une quantité proportionnelle au carré de la fonction :

$$\delta^{(t)}(E_f - E_i) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin((E_f - E_i)t/2\hbar)}{E_f - E_i} = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-t/2}^{+t/2} e^{i(E_f - E_i)t'/\hbar} dt' \quad (4.12)$$

Cette fonction $\delta^{(t)}(E)$ est paire et son intégrale sur E est égale à 1 puisque :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \pi \quad (4.13)$$

Elle ne prend des valeurs significativement différentes de 0 que pour $|E| \leq \hbar/t$ et elle tend vers la distribution de Dirac $\delta(E)$ quand t tend vers l'infini. On peut alors écrire l'élément de matrice de l'opérateur d'évolution entre $|i\rangle$ et $|f\rangle$ à l'aide de $\delta^{(t)}(E)$:

$$\beta_f(t) = \langle f|U(t)|i\rangle = -2i\pi V_{fi} e^{-i(E_i + E_f)t/(2\hbar)} \delta^{(t)}(E_f - E_i) \quad (4.14)$$

Dans (4.11), c'est plutôt le carré de $\delta^{(t)}(E)$ qui intervient. Ce carré peut se mettre sous la forme :

$$\left(\delta^{(t)}(E_f - E_i)\right)^2 = \frac{t}{2\pi\hbar} \bar{\delta}^{(t)}(E_f - E_i) \quad (4.15)$$

où l'on a posé :

$$\bar{\delta}^{(t)}(E_f - E_i) = \frac{1}{\pi} \frac{2\hbar \sin^2((E_f - E_i)t/2\hbar)}{t (E_f - E_i)^2} \quad (4.16)$$

Tout comme $\delta^{(t)}(E)$, cette nouvelle fonction $\bar{\delta}^{(t)}(E)$ est paire et d'intégrale égale à 1 puisque :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du = \pi \quad (4.17)$$

Elle tend également vers la distribution de Dirac $\delta(E)$ quand t tend vers l'infini.

En utilisant cette nouvelle fonction, on peut mettre $\delta P_f(t)$ sous la forme :

$$\delta P_f(t) = \frac{2\pi}{\hbar} t \sum_{f \in \mathcal{D}_f} |V_{fi}|^2 \bar{\delta}^{(t)}(E_f - E_i) \quad (4.18)$$

ou encore, en remplaçant la somme par une intégrale et en introduisant la densité d'états $\rho(E_f, \xi_f)$:

$$\delta P_f(t) = \frac{2\pi}{\hbar} t \int_{f \in \mathcal{D}_f} |V_{fi}|^2 \bar{\delta}^{(t)}(E_f - E_i) \rho(E_f, \xi_f) df \quad (4.19)$$

Supposons que le temps t dans (4.19) soit suffisamment grand pour qu'il soit légitime de remplacer $\bar{\delta}^{(t)}(E_f - E_i)$ par la distribution de Dirac $\delta(E_f - E_i)$; la validité de cette approximation sera discutée dans le paragraphe qui suit. Si $|V_{fi}|^2 \rho(E_f, \xi_f)$ varie peu sur l'extension $\delta \xi_f$ du domaine \mathcal{D}_f considéré, on trouve alors :

$$\delta P_f(t) = \frac{2\pi}{\hbar} t |V_{fi}|^2 \rho(E_f = E_i, \xi_f) \delta \xi_f \quad (4.20)$$

On en déduit que la probabilité d'atteindre le domaine \mathcal{D}_f croît linéairement avec le temps, ce qui conduit à la définition d'une probabilité par unité de temps et par unité de paramètre ξ_f :

$$\frac{\delta w}{\delta \xi_f} = \frac{1}{t} \frac{\delta P_f(t)}{\delta \xi_f} = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}|^2 \rho(E_f = E_i, \xi_f) \quad (4.21)$$

Ce résultat est connu sous le nom de règle d'or de Fermi, que l'on utilise également sous la forme d'une somme discrète :

$$\delta w = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{f \in \mathcal{D}_f} |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) \quad (4.22)$$

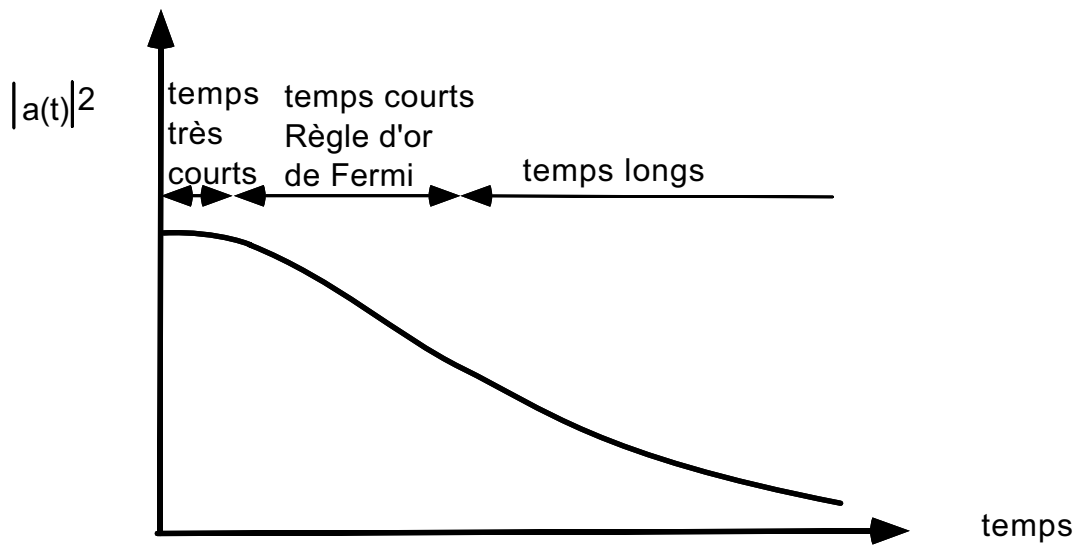
On déduit de cette probabilité par unité de temps que la probabilité de présence dans l'état initial $|\alpha(t)|^2$ diminue linéairement avec le temps :

$$|\alpha(t)|^2 = 1 - \Gamma t \quad (4.23)$$

Le taux de départ de l'état initial s'écrit :

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_f |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) \quad (4.24)$$

où la somme porte cette fois sur tous les états finals f possibles.

FIG. 4.2 – Evolution temporelle de la probabilité de présence dans l'état i .

4.1.4 Validité du traitement perturbatif

Deux approximations différentes ont été nécessaires pour arriver à la règle d'or de Fermi. Ces deux approximations mettent des contraintes différentes sur le domaine temporel pour lequel le résultat (4.21) est valable. Tout d'abord, nous avons remplacé dans les équations de départ $\tilde{\alpha}(t)$ par 1. Il faut donc que $|\alpha(t)|$ évolue peu pendant le temps t , c'est-à-dire :

$$\Gamma t \ll 1 \quad (4.25)$$

Par ailleurs nous avons remplacé la fonction $\bar{\delta}^{(t)}(E)$ par la distribution de Dirac $\delta(E)$. Ceci est valable si $\bar{\delta}^{(t)}(E)$, qui a pour largeur en énergie \hbar/t , est multipliée par une fonction de E variant très lentement à l'échelle de \hbar/t . La fonction en question est $|V_{fi}|^2 \rho(E_f, \xi_f)$; notons $\hbar\kappa$ sa largeur en énergie. Il faut donc :

$$\hbar/t \ll \hbar\kappa \quad (4.26)$$

En oubliant les facteurs 2π , nous aboutissons finalement à la double contrainte sur le temps (figure 4.2) :

$$\frac{1}{\kappa} \ll t \ll \frac{1}{\Gamma} \quad (4.27)$$

qui ne peut être satisfaite que si :

$$\Gamma \ll \kappa \quad (4.28)$$

Cette dernière inégalité doit être comprise comme une condition auto-cohérente sur la méthode suivie. Pour un problème donné, κ est fixée. On calcule Γ par la formule (4.24) et on doit alors vérifier que (4.28) est vérifiée. Si c'est le cas, il existe une gamme de temps, donnée par (4.27), pour laquelle la règle d'or de Fermi s'applique. Si ce n'est pas le cas, cela signifie que ce problème ne peut pas être abordé par le traitement perturbatif que nous venons de présenter.

4.2 Exemples d'application

4.2.1 Le calcul de la densités d'états

Il s'agit d'un calcul que l'on retrouve dans de nombreux problèmes. Décrivons ici les deux cas standards de particules libres dans une boîte de volume L^3 , ces particules étant soit non relativistes, soit ultra-relativistes. Dans les deux cas, on sait que l'on peut repérer l'état de la particule (supposée ici sans spin) par son vecteur d'onde \mathbf{k} . Pour des conditions aux limites périodiques, ce vecteur d'onde doit être tel que :

$$k_i = \frac{2\pi}{L} n_i \quad i = x, y, z \quad (4.29)$$

où n_x, n_y, n_z sont des entiers. Pour un volume élémentaire d^3k donné dans l'espace des \mathbf{k} , il y a donc :

$$d^3n = \frac{L^3}{8\pi^3} d^3k = \frac{L^3}{8\pi^3} k^2 dk d^2\Omega \quad (4.30)$$

états possibles, Ω repérant l'angle solide dans lequel pointe \mathbf{k} ; cette variable correspond au paramètre ξ_f que nous avons introduit pour préciser complètement un état $|f\rangle$. Il s'agit maintenant de relier le volume élémentaire d^3k à l'intervalle élémentaire en énergie dE .

Particules non relativistes

On a la relation de dispersion :

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (4.31)$$

soit :

$$dE = \frac{\hbar^2}{m} k dk \implies dk = \frac{m}{\hbar^2} \frac{\hbar}{\sqrt{2mE}} dE \quad (4.32)$$

On a donc :

$$d^3n = \frac{mL^3}{8\pi^3\hbar^3} \sqrt{2mE} dE d^2\Omega \quad (4.33)$$

soit :

$$\rho(E, \Omega) = \frac{d^3n}{dE d^2\Omega} = \frac{mL^3}{8\pi^3\hbar^3} \sqrt{2mE} \quad (4.34)$$

Cette densité d'état en \sqrt{E} est caractéristique de particules libres non relativistes à 3 dimensions.

Particules ultra-relativistes ou photons

La relation de dispersion est alors :

$$E = cp = \hbar ck \quad (4.35)$$

et un raisonnement analogue au précédent donne :

$$\rho(E, \Omega) = \frac{L^3}{8\pi^3\hbar^3 c^3} E^2 \quad (4.36)$$

4.2.2 Emission spontanée d'un système à deux niveaux

On considère un système à deux niveaux, notés e et g . L'état e est un état excité, qui est instable. Le système peut passer de e à l'état fondamental g en émettant un photon. L'état fondamental est stable en l'absence de photons. En présence de photons, le système peut passer de g à e en absorbant un photon. On décrit ces deux systèmes *atome+champ* par l'Hamiltonien suivant :

$$H = H_{\text{atome}} + H_{\text{champ}} + V \quad (4.37)$$

avec :

$$H_{\text{atome}} = \hbar\omega_A |e\rangle\langle e| \quad (4.38)$$

Par convention l'énergie de l'état fondamental est choisie nulle. L'Hamiltonien du champ est :

$$H = \sum_{\lambda} \hbar\omega_{\lambda} a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda} \quad (4.39)$$

Le paramètre λ repère à la fois le vecteur d'onde \mathbf{k} associé à un mode du champ électromagnétique ainsi que la polarisation ϵ de ce mode :

$$\lambda \equiv (\mathbf{k}, \epsilon) \quad (4.40)$$

Le couplage entre l'atome et le champ s'écrit, à l'approximation dipolaire électrique (*c.f.* cours de S. Haroche) :

$$V = \left(\sum_{\lambda} v_{\lambda} a_{\lambda}^{\dagger} \right) |g\rangle\langle e| + \left(\sum_{\lambda} v_{\lambda}^* a_{\lambda} \right) |e\rangle\langle g| \quad (4.41)$$

Les coefficients v_{λ} ont pour valeur :

$$v_{\lambda} = \langle g; \mathbf{k}, \epsilon | V | e, 0 \rangle = (\mathbf{d} \cdot \epsilon) \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 L^3}} \quad (4.42)$$

où $|0\rangle$ repère l'état à 0 photon du champ électromagnétique ; \mathbf{d} représente le dipole électrique réduit pour la transition atomique ou nucléaire considérée.

Avec les notations du premier paragraphe, on a

$$H_0 = H_{\text{atome}} + H_{\text{champ}} \quad (4.43)$$

L'état initial est $|i\rangle = |e, 0\rangle$, d'énergie propre vis à vis de H_0 : $\hbar\omega_0$; le continuum d'états finals est $|f\rangle = |g, \lambda\rangle$, d'énergie propre vis à vis de H_0 : $\hbar\omega_{\lambda}$.

Le coefficient Γ décrivant le taux de départ de l'état excité est alors donné par :

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\lambda} |v_{\lambda}|^2 \delta(\hbar\omega_A - \hbar\omega_{\lambda}) \quad (4.44)$$

que nous allons maintenant calculer plus explicitement. La probabilité par unité de temps d'émettre un photon d'énergie $\hbar\omega$ et de polarisation ϵ , dans un angle solide $\delta\Omega$, est donnée par :

$$\delta w = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathbf{d} \cdot \epsilon|^2 \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 L^3} \frac{L^3}{8\pi^3 \hbar^3} \frac{(\hbar\omega)^2}{c^3} \delta\Omega \quad (4.45)$$

cette probabilité devant être évaluée pour $\hbar\omega = \hbar\omega_A$. On a donc :

$$\frac{\delta w}{\delta\Omega} = \frac{\omega_A^3}{8\pi^2\epsilon_0\hbar c^3} |\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\epsilon}|^2 \quad (4.46)$$

L'intégrale sur les angles ne pose pas de problème. Pour une direction de \mathbf{k} donnée, repérée par son angle polaire θ par rapport à l'axe Oz parallèle à \mathbf{d} , on prend comme base de polarisation $\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2$, où $\boldsymbol{\epsilon}_1$ est dans le plan xOy et où $\boldsymbol{\epsilon}_2$ fait un angle $\theta - \pi/2$ avec l'axe Oz . On a donc $\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_1 = 0$ et $|\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_2|^2 = d^2 \sin^2 \theta$. L'intégrale angulaire se fait ainsi aisément :

$$\Gamma = \int \int \frac{\delta w}{\delta\Omega} d\Omega = \frac{\omega_A^3 d^2}{8\pi^2\epsilon_0\hbar c^3} \int \int \sin^2 \theta d\theta d\phi \quad (4.47)$$

ou encore

$$\Gamma = \frac{\omega_A^3 d^2}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3} \quad (4.48)$$

On voit ainsi que la probabilité d'émission spontanée augmente comme le cube de la fréquence de la transition en jeu ; ceci est une conséquence directe de la densité d'états pour les photons, qui varie comme $(\hbar\omega)^2$. Quasiment négligeable dans le domaine radio-fréquence, elle devient importante pour des transitions situées dans le domaine visible ou ultra-violet. Prenons par exemple le cas de la raie de résonance de l'atome d'hydrogène (transition Lyman α) :

$$2s \longrightarrow 1s + \text{photon} \quad (4.49)$$

La fréquence angulaire ω est de l'ordre de $2 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$, correspondant à une longueur d'onde de 130 nm et à une énergie d'une dizaine d'électron-volt ; la durée de vie est de l'ordre de 2 nanosecondes ($\Gamma = 5 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}$).

On comprend également que l'on peut modifier ce taux d'émission spontanée de manière importante si l'on place l'atome dans une cavité quasi-résonnante avec la transition $e-g$. Suivant le sens de la modification de la densité d'états, on peut augmenter ou au contraire inhiber l'émission spontanée¹.

Nous pouvons sur cet exemple tester la validité de la règle d'or de Fermi. La fréquence κ typique sur laquelle la fonction $|V_{fi}|^2 \rho(E_f, \xi_f)$ varie est ici $\kappa \sim \omega_A$. Il faut donc pour qu'il existe un domaine temporel sur lequel la règle d'or de Fermi est valable :

$$\Gamma \ll \omega_A \implies \frac{\omega_A^2 d^2}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3} \ll 1 \quad (4.50)$$

Pour un atome on a

$$\hbar\omega_A \sim \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} \implies \omega_A d \simeq \omega_A q a_0 \sim \frac{q^3}{4\pi\epsilon_0 \hbar} \quad (4.51)$$

La condition requise s'écrit alors :

$$\left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \right)^3 = \alpha^3 \ll 1 \quad (4.52)$$

C'est donc la petitesse de la constante de structure fine α qui assure que le traitement perturbatif à la base de la règle d'or de Fermi peut être valable dans un certain domaine temporel. Si cela n'avait pas été le cas, la seule approche possible à l'émission spontanée de photons par un atome aurait été un traitement non perturbatif, beaucoup plus difficile à mettre en œuvre.

¹Pour une revue des phénomènes d'électro-dynamique en cavité, voir par exemple : S. Haroche et J.-M. Raimond, Scientific American, Avril 1993 ; traduction française dans *Pour la Science*.

4.3 Le comportement aux temps très courts

Aux temps très courts ($\Omega t \leq 1$), le résultat (4.21) n'est pas valable. En utilisant (4.10), on trouve dans cette gamme de temps que

$$\beta_f(t) \sim -\frac{iV_{fi}t}{\hbar} \quad (4.53)$$

ce qui signifie que $\delta P_f(t)$ croît comme t^2 , et que $|\alpha(t)|^2$ décroît comme $1 - \mu t^2$, où μ est une constante que l'on peut déterminer en fonction des paramètres du système.

Ce départ quadratique en temps est inévitable dans une évolution hamiltonienne. Il a des conséquences amusantes comme le paradoxe de Zénon, qui indique que l'on peut empêcher un système d'évoluer en l'observant trop fréquemment. Pour montrer ce paradoxe, considérons simplement un système à deux niveaux a et b . Initialement, le système est dans l'état a et on suppose qu'un potentiel de couplage tend à le faire osciller entre a et b (formule de Rabi). Faisons une mesure après un temps t court devant la fréquence d'oscillation Ω entre a et b . Les probabilités de trouver le système dans les états a et b sont :

$$P_a(t) = 1 - (\Omega t)^2 \quad P_b(t) = (\Omega t)^2 \quad (4.54)$$

Supposons maintenant que l'on fasse une mesure à l'instant $t/2$, puis une mesure à l'instant t . Quelle est la probabilité de trouver le système dans l'état b à l'une ou l'autre de ces mesures ? A l'instant $t/2$, on a les probabilités :

$$P_a(t/2) = 1 - \frac{(\Omega t)^2}{4} \quad P_b(t/2) = \frac{(\Omega t)^2}{4} \quad (4.55)$$

Si on trouve le système dans l'état b , c'est gagné. Si on le trouve dans l'état a , on projette la fonction d'onde sur l'état a et on repart pour la durée $t/2$ restante, au terme de laquelle la probabilité de trouver b est encore :

$$P_b(t) = \frac{(\Omega t)^2}{4} \quad (4.56)$$

La probabilité totale de trouver le système dans l'état b dans l'une ou l'autre des mesures n'est donc que de $(\Omega t)^2/2$, deux fois plus faible que si on ne fait la mesure qu'à l'instant t . Le lecteur se convaincra aisément que n mesures faites entre 0 et t réduisent la probabilité initiale par un facteur n .

Cet effet Zénon quantique a été observé expérimentalement sur un ion unique piégé par Itano et al². Il s'agit d'un système à trois niveaux a , b , c (figure 4.3). On essaie de faire basculer l'ion de l'état a vers l'état b au moyen d'une radiofréquence résonnante, et on observe simultanément si l'ion est présent ou non sur le niveau a en l'éclairant par un laser résonnant avec la transition $a \leftrightarrow c$.

Remarque : Il existe une manière de comprendre ce résultat expérimental sans faire appel au postulat de réduction du paquet d'onde³. Il faut alors écrire l'évolution du système à trois niveaux sous l'effet des deux champs, radiofréquence et optique. Le champ laser induit un couplage avec l'extérieur, ce qui impose le recours à la matrice densité. Dans ce point de vue, la cohérence ρ_{ab} est affectée par le laser, ce qui en retour modifie l'oscillation entre a et b .

²W. Itano *et al*, Phys. Rev. **A 41**, 2295 (1990).

³Ballentine, Comment Phys. Rev. **A 43**, 5165 (1991); Itano *et al*, Reply to Comment, Phys. Rev. **A 43**, 5168 (1991).

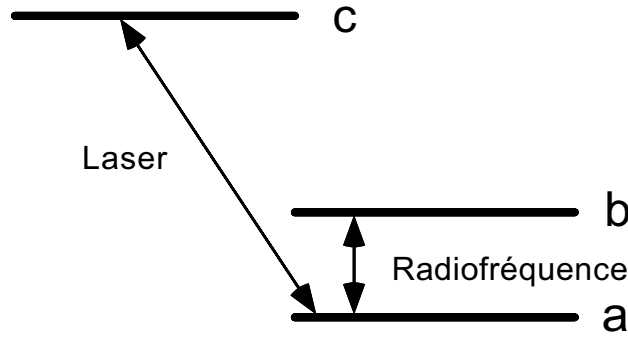


FIG. 4.3 – Schéma de niveaux utilisé pour l'observation de l'effet Zénon quantique.

4.4 Le comportement aux temps longs

L'approximation qui a conduit à la règle d'or de Fermi n'est valable qu'aux temps relativement courts puisque l'on a supposé $|\alpha(t)| \sim 1$ pour résoudre de manière approchée le système différentiel correspondant à l'équation de Schrödinger. Le but de ce paragraphe est d'indiquer comment la loi linéaire $|\alpha(t)|^2 \simeq 1 - \Gamma t$ est modifiée quand le temps t devient de l'ordre de ou supérieur à Γ^{-1} .

Une première voie possible est de persister dans la voie *développement perturbatif*, en allant à un ordre supérieur en V dans la résolution. Cette voie n'est pas très prometteuse. On peut en effet deviner qu'elle reviendra simplement à remplacer la loi linéaire donnée ci-dessus par une loi polynomiale en t . Cette loi sera de toute façon manifestement fautive quand $t \rightarrow +\infty$.

4.4.1 L'approche "équation intégral-différentielle"

Une seconde voie est de chercher à résoudre de manière non perturbative le système différentiel de départ. En intégrant formellement l'équation sur $\dot{\tilde{\beta}}_f$, on obtient, compte tenu de la condition initiale $\tilde{\beta}_f(0) = 0$:

$$\tilde{\beta}_f(t) = \frac{V_{if}}{i\hbar} \int_0^t \tilde{\alpha}(t') e^{-i\omega_{if}t'} dt' \quad (4.57)$$

On reporte cette valeur dans l'équation d'évolution de $\tilde{\alpha}$ pour obtenir :

$$\dot{\tilde{\alpha}}(t) = - \int_0^t \mathcal{N}(\tau) \tilde{\alpha}(t - \tau) d\tau \quad (4.58)$$

où l'on a posé :

$$\mathcal{N}(\tau) = \frac{1}{\hbar^2} \sum_f |V_{if}|^2 e^{i\omega_{if}\tau} \quad (4.59)$$

Il n'y a pas en général de solution analytique simple à cette équation intégral-différentielle sur $\tilde{\alpha}$. On peut en chercher une solution approchée en tirant parti du fait que la fonction $\mathcal{N}(\tau)$

est piquée autour de 0 ; c'est en effet une superposition d'un grand nombre d'exponentielles oscillantes, toutes en phase pour $\tau = 0$, et dont la transformée de Fourier peut s'écrire :

$$\hat{\mathcal{N}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}(\tau) d\tau = \frac{1}{\hbar^2} \sum_f |V_{if}|^2 \delta(\omega - \omega_{if}) \quad (4.60)$$

La largeur en fréquence de cette transformée de Fourier est donc de l'ordre de κ , et la largeur temporelle de $\mathcal{N}(\tau)$ est $\tau_c \sim \kappa^{-1}$.

On peut alors remplacer dans l'équation intégral-différentielle $\tilde{\alpha}(t - \tau)$ par $\tilde{\alpha}(t)$, en tirant parti du fait que $\tilde{\alpha}$ évolue peu pendant l'intervalle de temps τ_c qui est le seul à contribuer à l'intégrale de (4.58)⁴. On arrive alors à :

$$\dot{\tilde{\alpha}}(t) = - \left(\int_0^t \mathcal{N}(\tau) d\tau \right) \tilde{\alpha}(t) \quad (4.61)$$

équation beaucoup plus simple à analyser et à résoudre que l'équation intégral-différentielle.

Aux temps t très courts ($t < \tau_c$), l'intégrale varie linéairement avec t , et l'on retrouve le comportement en t^2 discuté au paragraphe précédent pour la variation de $\tilde{\alpha}(t)$. Dès que t dépasse quelques τ_c , l'intégrale atteint une valeur constante, *a priori* complexe, que nous noterons :

$$i\delta\omega_i + \frac{\Gamma}{2} = \int_0^{\infty} \mathcal{N}(\tau) d\tau \quad (4.62)$$

Le sens mathématique à donner à cette intégrale est le suivant : il faut ajouter un facteur de convergence temporelle $e^{-\eta t/\hbar}$ à chaque terme oscillant, calculer l'intégrale, puis faire tendre η vers 0. On a donc :

$$i\delta\omega_i + \Gamma/2 = \frac{1}{\hbar^2} \sum_f |V_{if}|^2 \int_0^{\infty} e^{-(i(E_f - E_i) + \eta)\tau/\hbar} d\tau = \frac{1}{\hbar} \sum_f \frac{|V_{if}|^2}{i(E_f - E_i) + \eta} \quad (4.63)$$

soit encore :

$$i\delta\omega_i + \frac{\Gamma}{2} = \frac{i}{\hbar} \sum_f \mathcal{P} \left(\frac{|V_{if}|^2}{E_i - E_f} \right) + \frac{\pi}{\hbar} \sum_f |V_{if}|^2 \delta(E_f - E_i) \quad (4.64)$$

Avec cette écriture, on constate que la définition de la partie réelle $\Gamma/2$ coïncide bien avec celle obtenue au premier paragraphe ; cette partie réelle va conduire à une décroissance exponentielle de la probabilité de présence dans l'état initial i . La partie imaginaire en $\delta\omega_i$ correspond à un déplacement de la position de l'état discret sous l'effet du couplage au continuum. L'équation d'évolution de $\alpha(t)$ s'écrit en effet :

$$t \gg \tau_c \implies i\hbar\dot{\alpha}(t) = \left(E_i + \hbar\delta\omega_i - i\frac{\hbar\Gamma}{2} \right) \alpha(t) \quad (4.65)$$

ce qui s'intègre en :

$$t \gg \tau_c \implies \alpha(t) = e^{-i(E_i + \hbar\delta\omega_i)t/\hbar} e^{-\Gamma t/2} \implies |\alpha(t)|^2 = e^{-\Gamma t} \quad (4.66)$$

⁴La validité de cette approximation est la même que celle de la règle d'or de Fermi : il faut que l'échelle de temps caractéristique des variations de $\tilde{\alpha}(t)$, à savoir Γ^{-1} , soit grande devant $\tau_c \sim \kappa^{-1}$.

Remarquons que l'expression du déplacement en énergie $\hbar \delta\omega_i$ est identique à la formule bien connue des perturbations stationnaires au deuxième ordre. Dans le cas du couplage d'un système atomique au champ électromagnétique, le déplacement en fréquence $\delta\omega_i$ s'appelle déplacement de Lamb. Son observation expérimentale a constitué un des points de départ de la construction de l'électrodynamique quantique moderne.

Le coefficient $\alpha(t)$ étant déterminé, nous pouvons maintenant trouver très simplement l'expression de $\beta_f(t)$ en intégrant

$$i\hbar\dot{\beta}_f = E_f\beta_f + V_{fi}\alpha$$

Nous trouvons :

$$\beta_f(t) = -\frac{V_{fi}}{\bar{E}_i - E_f + i\hbar\Gamma/2} \left(e^{-iE_ft/\hbar} - e^{-i\bar{E}_it/\hbar} e^{-\Gamma t/2} \right) \quad (4.67)$$

où l'on a posé $\bar{E}_i = E_i + \hbar\delta\omega_i$. En particulier, pour $t \gg \Gamma^{-1}$, nous pouvons évaluer la probabilité que le système aboutisse dans l'état f :

$$P_f = |\beta_f(\infty)|^2 = \frac{|V_{fi}|^2}{(E_f - \bar{E}_i)^2 + \hbar^2\Gamma^2/4}$$

On trouve donc une loi de probabilité lorentzienne pour la distribution en énergie finale ; cette distribution est centrée sur l'énergie perturbée \bar{E}_i et a pour largeur totale à mi-hauteur $\hbar\Gamma$. Rappelons qu'en général chaque probabilité individuelle P_f tend vers 0 quand la taille de la boîte de quantification tend vers l'infini, la quantité physique pertinente étant plutôt la somme des $P_f(t)$ sur un domaine \mathcal{D}_f d'états finals.

4.4.2 L'approche "opérateur résolvante"

Plutôt que travailler avec l'équation de Schrödinger, on peut préférer utiliser l'opérateur résolvante $G(z)$ introduit au chapitre précédent, pour revenir à la fin du calcul au coefficient $\alpha(t)$ donnant l'amplitude de probabilité de trouver la système sur le niveau $|i\rangle$ à l'instant t :

$$\alpha(t) = \langle i|\psi(t)\rangle = \langle i|U(t)|i\rangle \quad (4.68)$$

Il s'agit donc de calculer $\langle i|G(z)|i\rangle$.

Développement diagrammatique

Une première méthode consiste à utiliser le développement infini de $G(z)$ mentionné au chapitre précédent :

$$G = G_0 + G_0VG_0 + G_0VG_0VG_0 + \dots \quad (4.69)$$

Puisque les états i et f sont états propres de H_0 et donc de G_0 , et puisque V fait passer de i à f et de f à i , seuls les termes comportant un nombre pair d'opérateurs V auront une contribution non nulle à $\langle i|G(z)|i\rangle$. Le terme comportant $2n$ opérateurs V s'écrit :

$$c_n(z) = \langle i|G_0(VG_0)^{2n}|i\rangle = \langle i|G_0VG_0VG_0VG_0\ldots VG_0VG_0|i\rangle \quad (4.70)$$

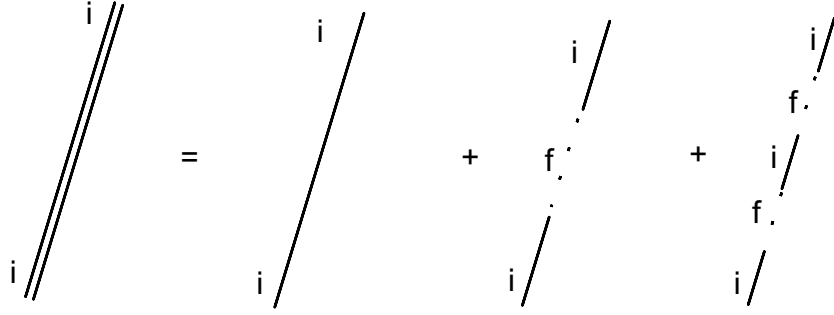


FIG. 4.4 – L'élément de matrice $\langle i|G(z)|i\rangle$ correspond à la somme infinie de diagrammes impliquant un nombre pair d'interactions via le couplage V .

Chaque bloc VG_0V fait passer de i à i , soit :

$$c_n(z) = \frac{1}{(z - E_i)^{n+1}} (\langle i|VG_0V|i\rangle)^n = \frac{1}{(z - E_i)^{n+1}} \left(\sum_f \frac{|V_{fi}|^2}{z - E_f} \right)^n \quad (4.71)$$

La série des c_n se somme donc comme une série géométrique pour donner :

$$\langle i|G(z)|i\rangle = \frac{1}{z - E_i - \sum_f \frac{|V_{fi}|^2}{z - E_f}} \quad (4.72)$$

Ce résultat exact est équivalent à l'équation intégral-différentielle, elle aussi exacte, obtenue au paragraphe précédent. Il correspond à la resommation de tous les processus d'interactions élémentaires décrits par le couplage V (figure 4.4).

Equation implicite

On peut obtenir le même résultat sans faire appel à un développement en série infinie. Il suffit d'utiliser l'expression exacte (implicite) pour $G(z)$:

$$G = G_0 + G_0VG_0 + G_0VG_0VG$$

En prenant l'élément de matrice de cet opérateur entre $\langle i|$ et $|i\rangle$, on trouve immédiatement :

$$\langle i|G(z)|i\rangle = \frac{1}{z - E_i} + \frac{1}{z - E_i} \sum_f \frac{|V_{if}|^2}{z - E_f} \langle i|G(z)|i\rangle \quad (4.73)$$

ce qui conduit au résultat (4.72). Cette méthode est mathématiquement plus simple que celle fondée sur le développement infini de $G(z)$, mais ne montre pas aussi clairement la nature des termes pris en compte dans $G(z)$.

Lien avec l'approche "temporelle"

Pour pousser les calculs plus loin, il s'agit maintenant de faire une approximation sur l'expression de $\langle i|G(z)|i\rangle$. Notons que cette approximation ne correspond pas à sommer un nombre

fini de diagrammes (ceci donnerait le comportement polynomial en temps décrit au début de ce paragraphe) ; elle consiste à remplacer le résultat de la somme infinie par une valeur approchée, qui continue à prendre en compte l'ensemble des diagrammes possibles.

Pour revenir au point de vue temporel, on sait que l'on aura besoin, pour les temps positifs, de :

$$\langle i | G_+(E) | i \rangle = \frac{1}{E - E_i + i\eta - \sum_f \frac{|V_{fi}|^2}{E - E_f + i\eta}} \quad (4.74)$$

Les valeurs de E pour lesquelles cet élément de matrice prend des valeurs importantes sont situées au voisinage de $E = E_i$, puisque c'est là que la contribution essentielle au dénominateur $(E - E_i + i\eta)$ s'annule. Dans le deuxième morceau du dénominateur, qui fait intervenir V , on remplace alors E par cette valeur E_i , en partant du principe que ce deuxième morceau ne contribue de toute façon de manière significative que pour E voisin de E_i :

$$\sum_f \frac{|V_{fi}|^2}{E - E_f + i\eta} \longrightarrow \sum_f \frac{|V_{fi}|^2}{E_i - E_f + i\eta} \quad (4.75)$$

On reconnaît alors dans ce terme approché les deux paramètres $\delta\omega_i$ et Γ introduits plus haut :

$$\sum_f \frac{|V_{fi}|^2}{E_i - E_f + i\eta} = \hbar\delta\omega_i - i\frac{\hbar\Gamma}{2} \quad (4.76)$$

L'élément de matrice recherché s'écrit donc :

$$\langle i | G_+(E) | i \rangle \simeq \frac{1}{E - \bar{E}_i + i\frac{\hbar\Gamma}{2}} \quad (4.77)$$

où l'on a introduit l'énergie $\bar{E}_i = E_i + \hbar\delta\omega_i$ de l'état i , "renormalisée" par le couplage de cet état au continuum.

Le retour au point de vue temporel se fait maintenant sans difficulté. $\langle i | G_+(E) | i \rangle$ a un pôle en $\bar{E}_i - i\hbar\Gamma/2$ qui donne après transformation de Fourier⁵ :

$$(t > 0) \quad \alpha(t) = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iEt/\hbar} \langle i | G_+(E) | i \rangle dE = e^{-i\bar{E}_i t/\hbar} e^{-\Gamma t/2} \quad (4.78)$$

ce qui est identique au résultat obtenu en transformant l'équation intégral-différentielle en équation différentielle. On retrouve en particulier la décroissance exponentielle de la probabilité de présence en $|i\rangle$ avec le taux Γ .

4.4.3 Battements quantiques

La situation envisagée plus haut est la plus simple qui puisse se produire lors du couplage d'un état i avec un continuum. Des situations un peu plus complexes apparaissent lorsque plusieurs états discrets $|i_1\rangle, |i_2\rangle, \dots, |i_N\rangle$ sont couplés au même continuum, des phénomènes d'interférence appelés battements quantiques pouvant alors se produire. Il est conseillé sur chaque cas de revenir soit à l'équation intégral-différentielle (on obtient après approximation un système de N équations différentielles couplées), soit à l'approche résolvante (il faut alors évaluer les N^2 éléments de matrice $\langle i_k | G(z) | i_l \rangle$, $k, l = 1 \dots N$) pour déterminer l'évolution du système.

⁵Remarquer que l'interaction entre $|i\rangle$ et le continuum a donné au pôle de G_+ une partie imaginaire finie, $i\Gamma/2$, alors que le pôle correspondant de G_{0+} avait une partie imaginaire infiniment petite $i\eta$.

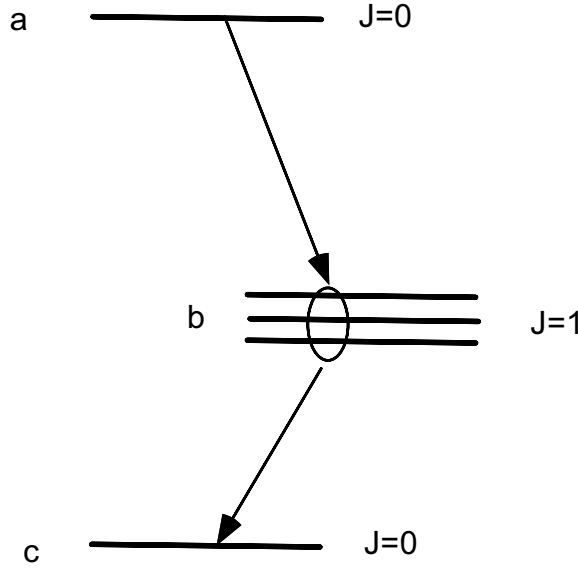


FIG. 4.5 – Cascade atomique faisant apparaître des battements quantiques. L'atome ou le noyau est initialement dans l'état a . La détection d'un photon émis sur la transition $a \rightarrow b$ avec une polarisation ϵ_x prépare le système dans une combinaison linéaire de $|b, m_z = +1\rangle$ et $|b, m_z = -1\rangle$. L'interférence entre les deux possibilités de décroissance $|b, m_z = +1\rangle \rightarrow |c\rangle$ et $|b, m_z = -1\rangle \rightarrow |c\rangle$ conduisent à un phénomène de battement.

Donnons sans calculs un exemple d'une telle situation⁶. On considère un système atomique ou nucléaire à trois niveaux a, b, c (figure 4.5). Les niveaux a et c sont de moment cinétique nul, et b est de moment cinétique 1. Le système initialement dans l'état a peut se désexciter en émettant un photon et en tombant sur l'état b . Celui-ci peut à son tour se désexciter et tomber sur l'état c . Supposons que l'on détecte le photon correspondant à la transition $a \rightarrow b$ avec une polarisation ϵ_x . L'état après détection est alors :

$$|b, m_x = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|b, m_z = 1\rangle + |b, m_z = -1\rangle) \quad (4.79)$$

Notons $t = 0$ l'instant de cette première détection et intéressons-nous à la probabilité $P_x(t) dt$ et $P_y(t) dt$ de détecter le photon $b \rightarrow c$ entre t et $t + dt$, avec une polarisation ϵ_x ou ϵ_y . En l'absence de champ magnétique, les trois sous-niveaux de b sont dégénérés et l'on se convainc aisément que l'on retrouve la loi de décroissance habituelle $\exp(-\Gamma_b t)$, le photon émis étant toujours polarisé selon ϵ_x . En revanche, si l'on impose un champ magnétique non nul parallèle à Oz , on constate que P_x et P_y sont modulées à une fréquence égale à la fréquence de Larmor pour le niveau b . A partir du formalisme présenté dans ce chapitre, le lecteur pourra essayer de retrouver ce résultat et de montrer que l'on a toujours $P_x(t) + P_y(t) = \exp(-\Gamma_b t)$.

⁶A. Aspect *et al*, Optics Commun. **49**, 429 (1984)