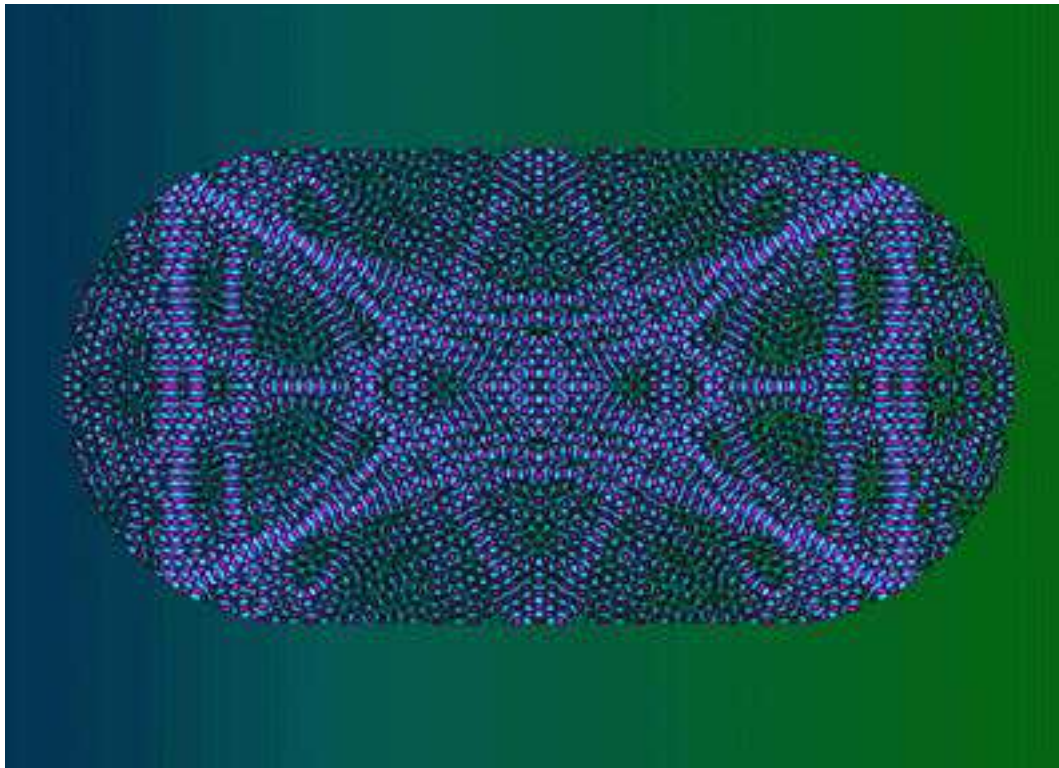


Introduction au chaos quantique

Plan :

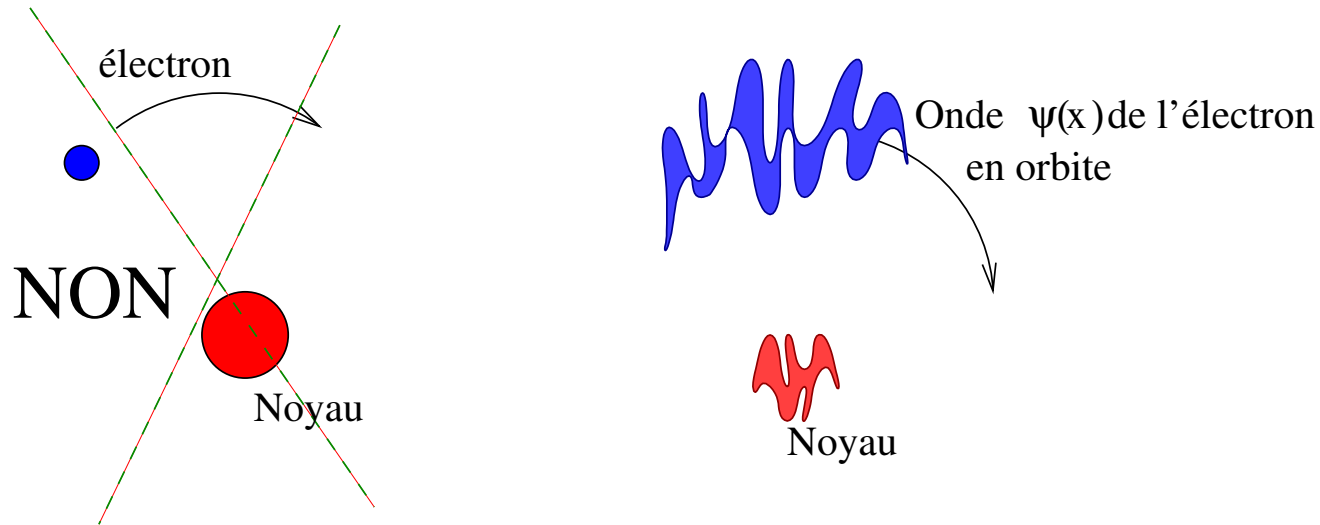
- 1) Introduction à la mécanique quantique (dualité onde/ corpuscule)
- 2) Problématique du chaos quantique et exemples
- 3) Temps caractéristiques et phénomènes associés ; (approches semi-classique)
- 4) Modèle des matrices aléatoires ; (approche statistique)



1) Introduction à la mécanique quantique

La mécanique quantique (1920) établit que la **matière** est de **nature ondulatoire**.

Exemple : un électron dans un atome est modélisé par une onde :



L'évolution de l'onde $\psi(\vec{x}, t) \in \mathbb{C}$ est régie par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2 \Delta \psi}{2m} - V(\vec{x}) \psi$$

avec $\hbar = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J.s.}$

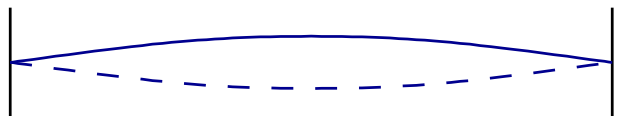
Manifestation de l'aspect ondulatoire : les raies atomiques

Comme une corde de guitare, l'onde de l'électron possède des modes stationnaires (spectre) :

Corde de guitare

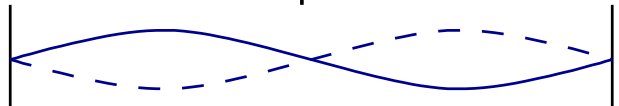


=



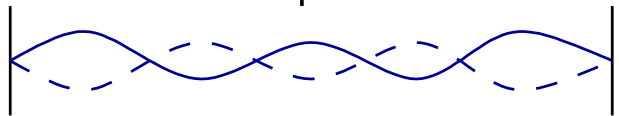
la $f_0 = 440$ Hz

+



la $f_1 = 880$ Hz

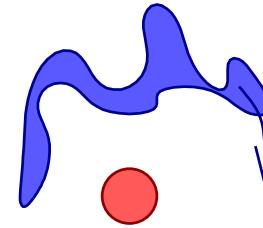
+



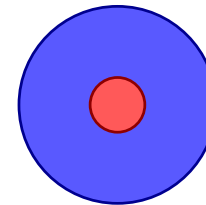
mi $f_2 = 3 f_0$

...

Electron

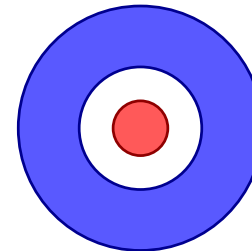


=



etat $|1s\rangle$, f_0

+

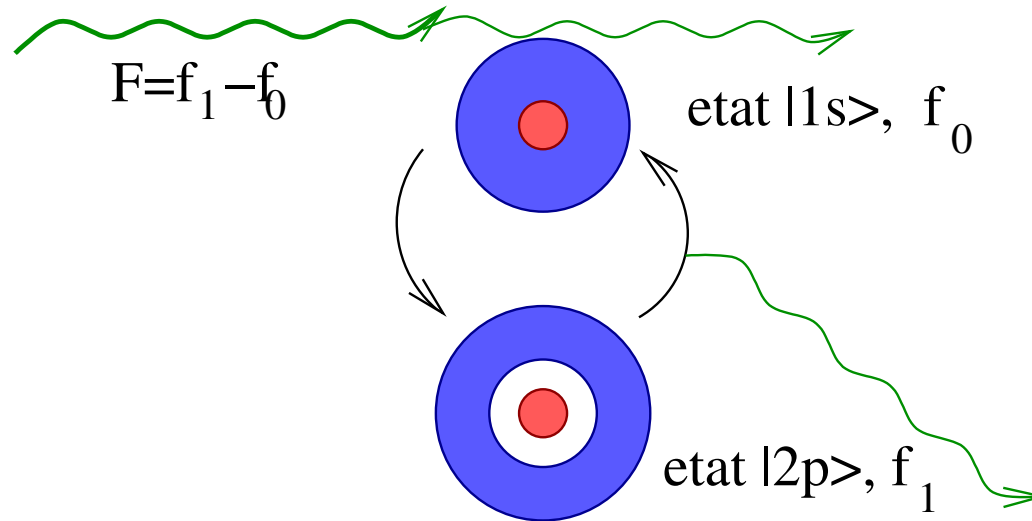


etat $|2p\rangle$, f_1

+ ...

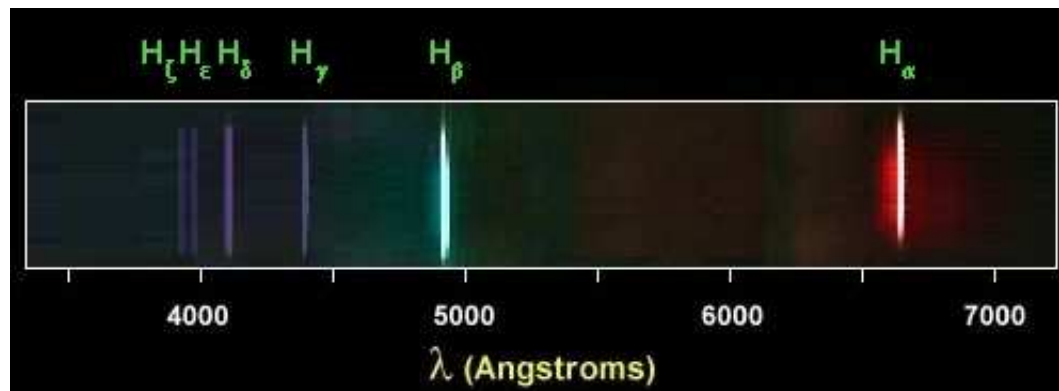
Fluorescence :

Une onde lumineuse de fréquence $F = f_1 - f_0$ (0,15eV) peut exciter l'électron dans le mode $|2p\rangle$ (il se met en résonance). Celui ci réémet ensuite la lumière dans une autre direction :

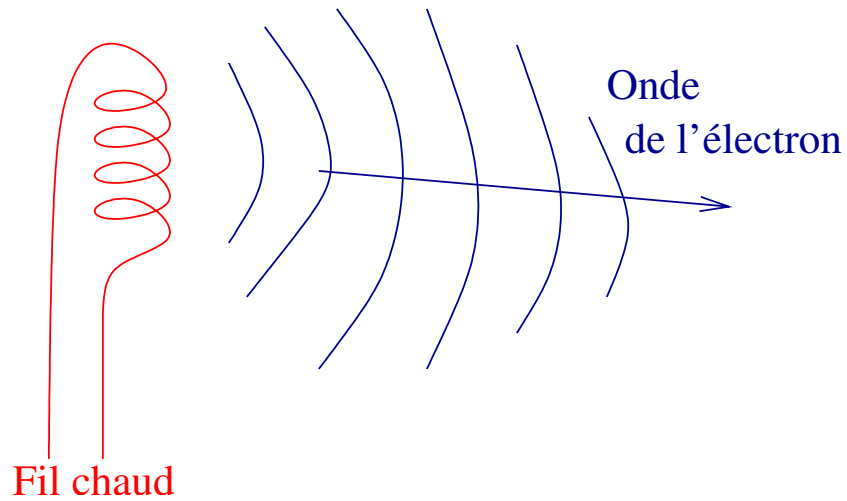


Cela explique les raies d'émission observée, caractéristiques de l'atome.

Raies de Balmer de l'atome H (1885, transition vers etat $|2\rangle$) :



Autre Exemple : l'électron issu d'une électrode dans le vide.

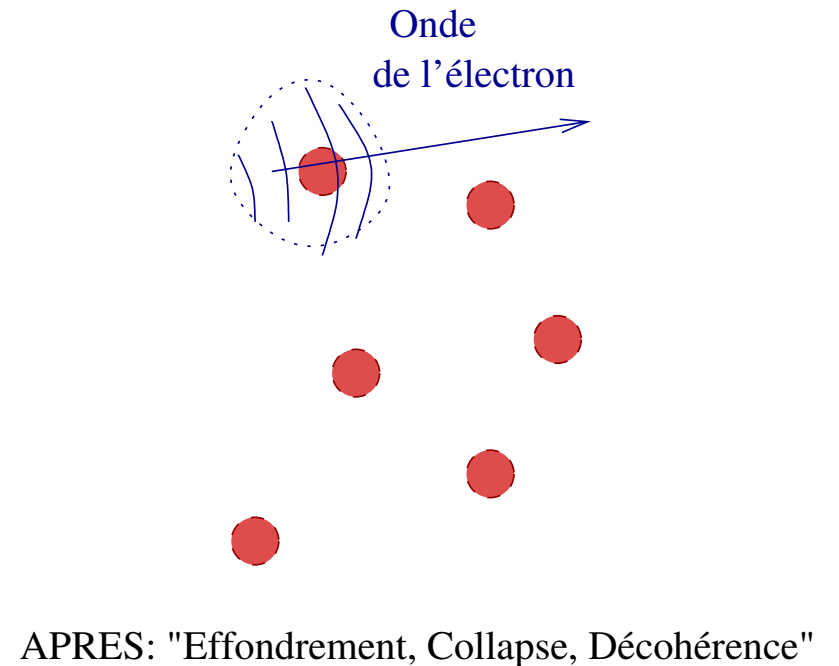
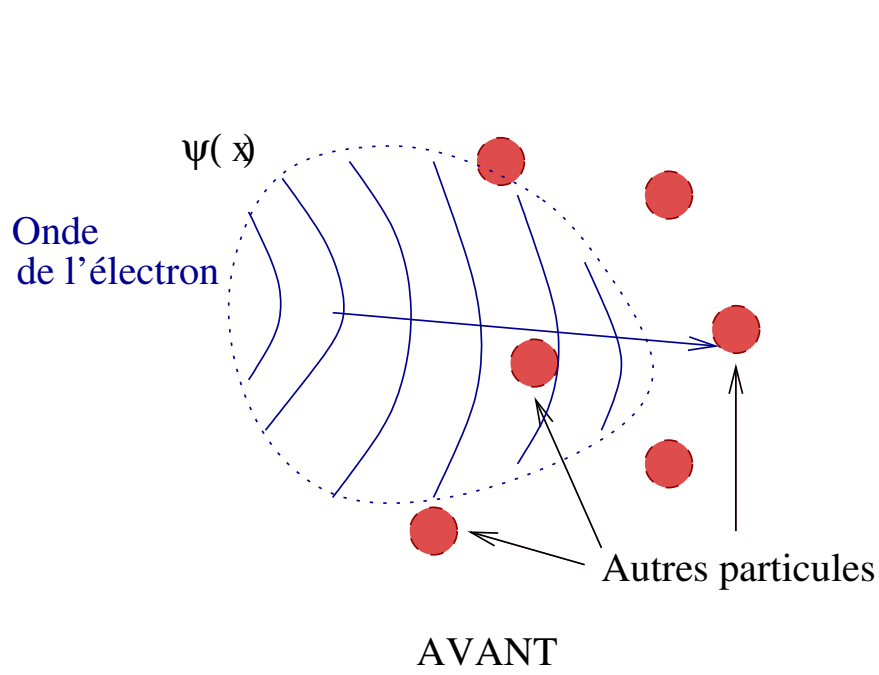


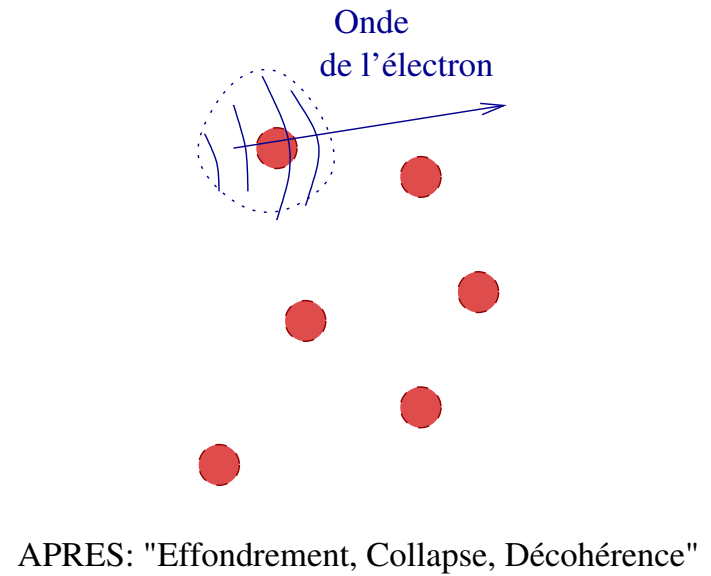
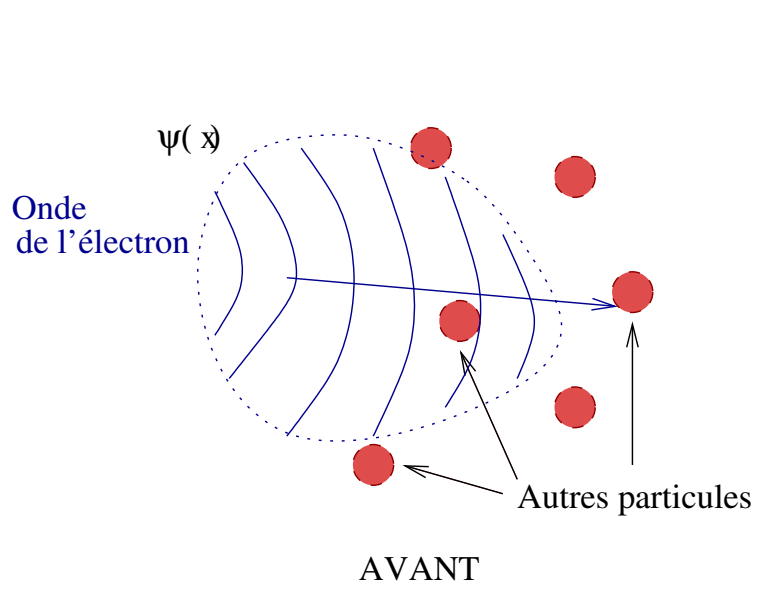
Question : Pourquoi à notre échelle la matière semble être constituée de particules et non pas d'ondes ?

Car le "modèle quantique" de la matière ne s'arrête pas là.

Le comportement est aussi probabiliste :

Si l'électron interagit avec l'extérieur (i.e. modifie l'état de l'environnement), alors l'onde quantique est **perturbée de façon aléatoire (pur hasard)** :



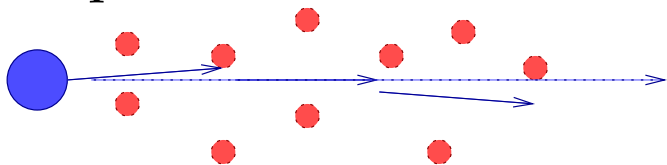


Règle de la "mesure" :

La probabilité de présence en x après la mesure est proportionnelle à l'intensité de l'onde en x avant :

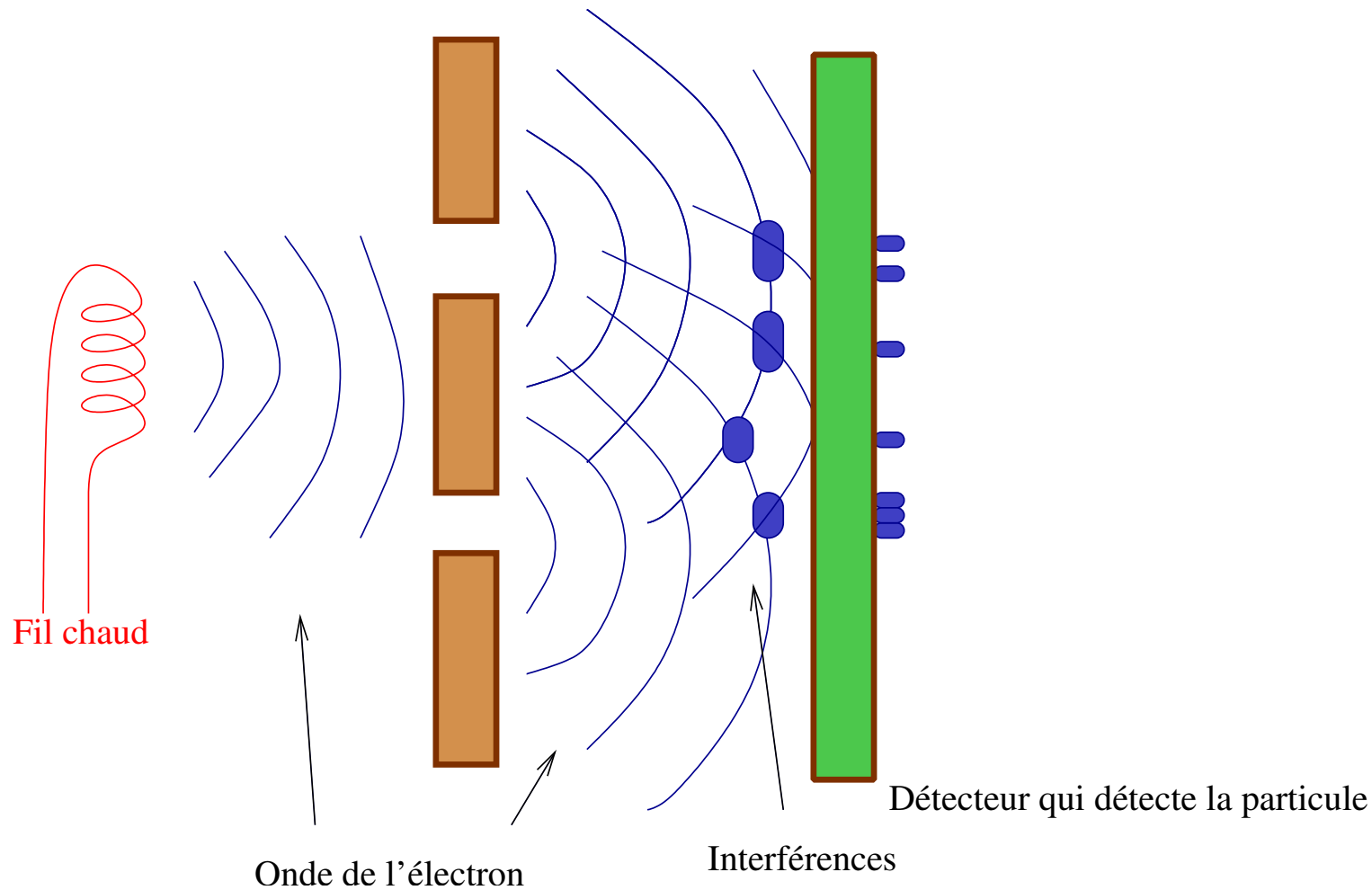
$$P(x) \propto |\psi(x)|^2$$

Conséquence : à notre échelle l'électron semble être une **particule** localisée, se déplaçant selon les lois de la mécanique classique :



Figures d'interférences

Des expériences soigneuses montrent directement cette “dualité” entre onde et corpuscule :



Chaque électron éjecté est une onde, mais il apparaît un impact localisé sur le détecteur. Après l'envoi de plusieurs électrons **identiques**, l'histogramme des impacts reproduit la figure de $|\psi(x)|^2$ et ses ondulations.

Dans la suite de l'exposé, on oublie le hasard quantique dû à l'interaction et l'influence de l'onde de matière sur son environnement.

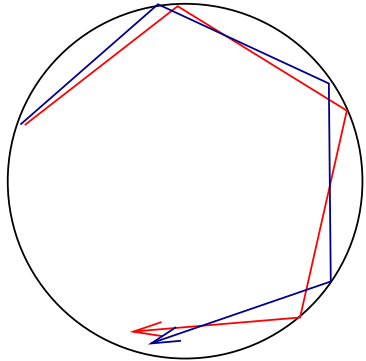
On considère seulement **l'évolution de l'onde quantique isolée** (son aspect ondulatoire).

⇒ Cette étude s'appliquera aussi aux ondes acoustiques, sismiques, électromagnétiques,...

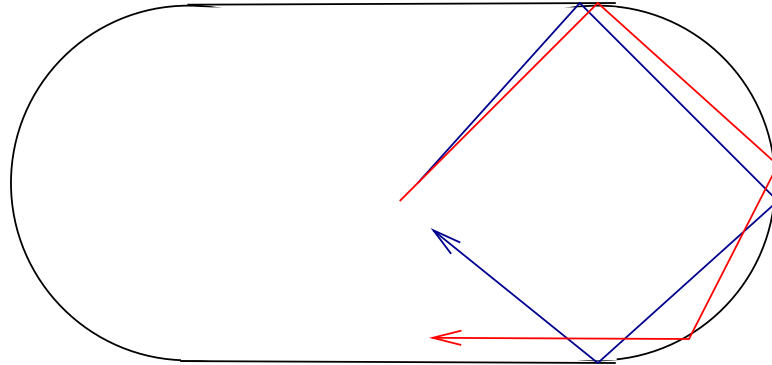
2) Problématique du chaos quantique

Considérons un électron dans une cavité (billard) conductrice **chaotique**.

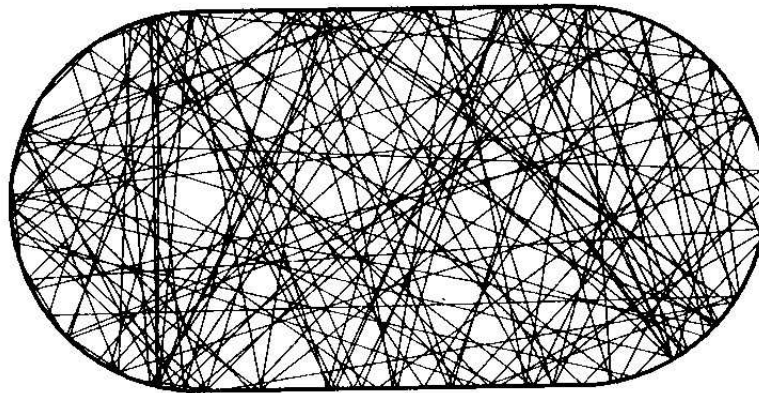
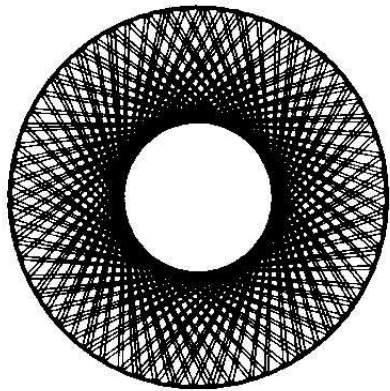
A) L'électron comme particule classique :



Billard régulier



Billard chaotique

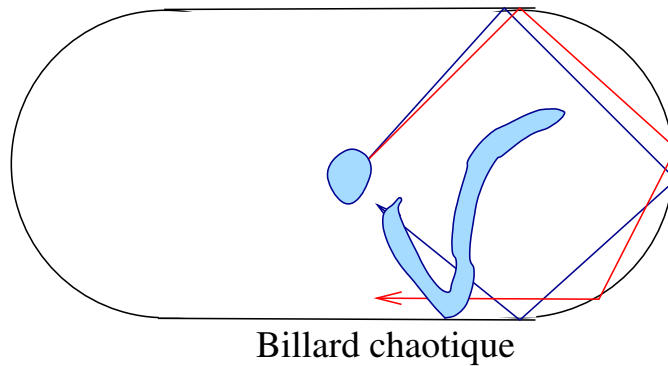
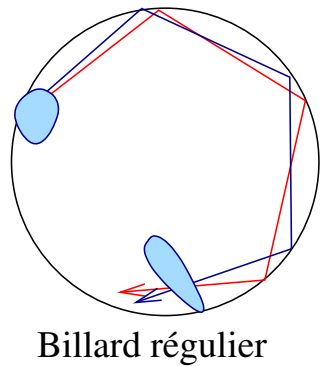


Chaos \Leftrightarrow Sensibilité aux conditions initiales \Leftrightarrow imprévisibilité

$$\Delta x(t) \simeq \Delta x(0) e^{t/\tau}, \quad \tau : \text{temps caractéristique d'amplification}$$

(tant que $\Delta x(t) \ll L$)

B) L'électron comme onde quantique (dans conducteur "mésoscopique") :



L'électron (paquet d'onde) envahit rapidement tout l'espace. Des interférences s'installent.

Question : quelles lois permettent de décrire l'évolution de l'onde $\psi(\vec{x}, t)$?
lois statistique, répartition uniforme ?

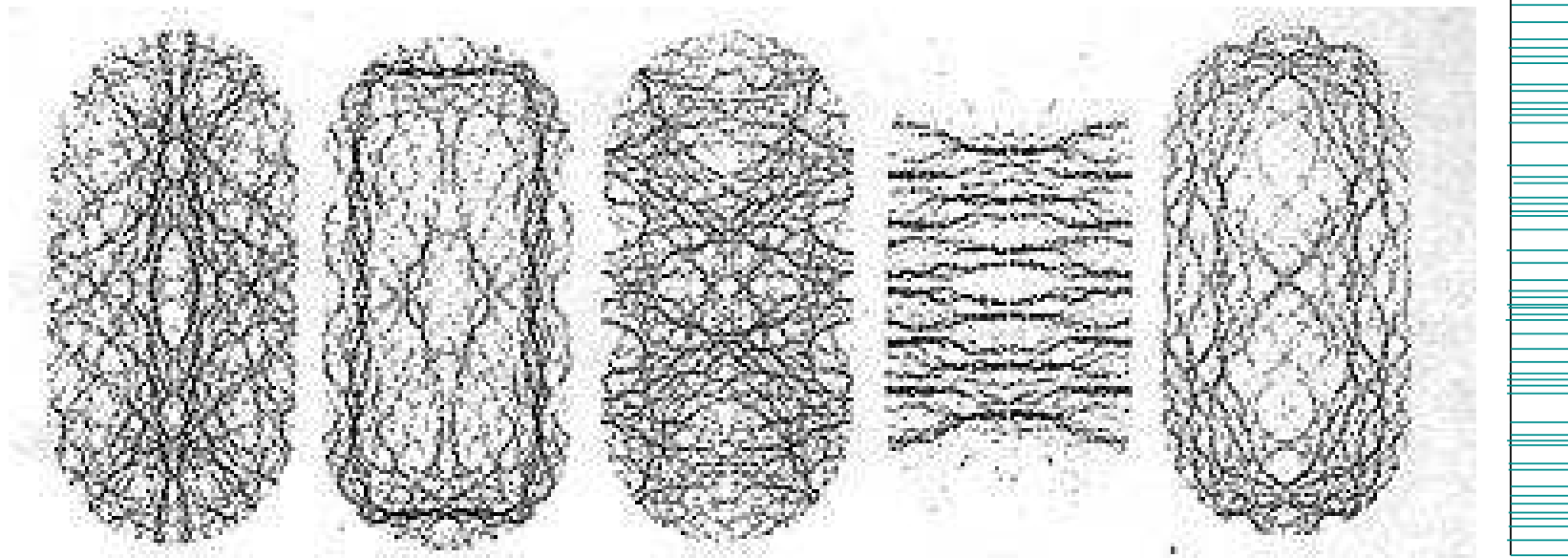
Question : concernant les **ondes stationnaires** de la cavité :

$$\Psi_k(\vec{x}, t) = \psi_k(\vec{x}) e^{-iE_k t/\hbar}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Comment se répartit leur intensité $|\psi_k(\vec{x})|^2$ et les différentes énergies E_k ? Au “hasard” ? dépend de la forme de la cavité ?

Y a t-il des lois statistiques ?

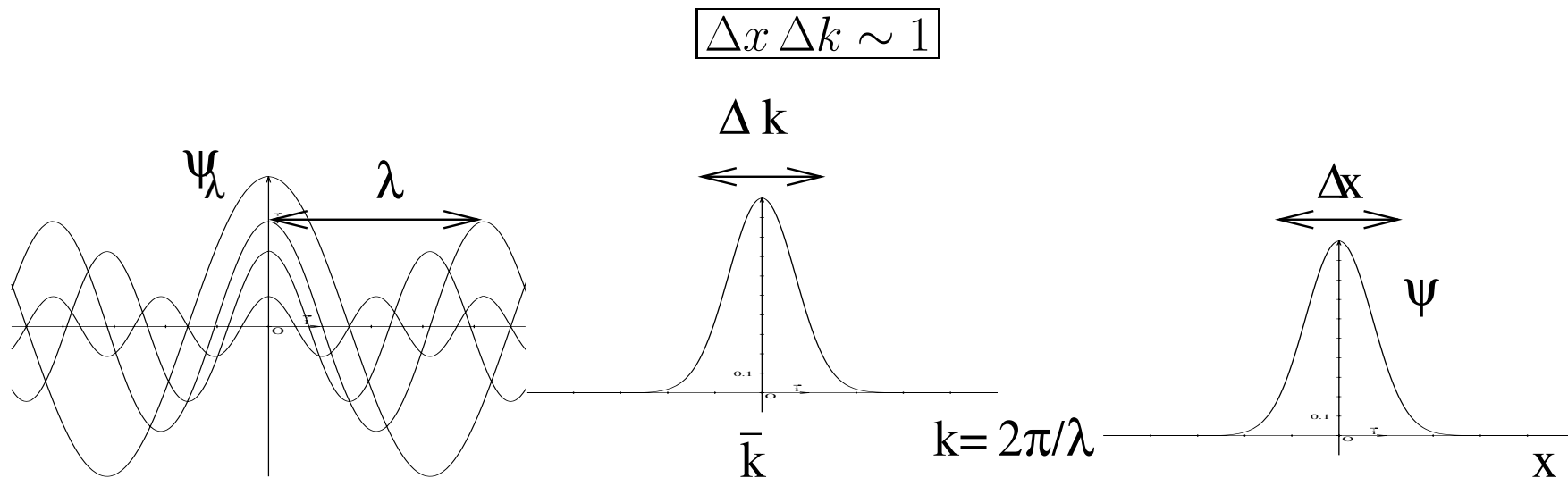
Ondes stationnaires ψ_k et énergies E_k :



C) Remarques sur la dispersion de l'onde :

Principe d'incertitude :

Une superposition d'ondes sinusoidales $\psi_\lambda(x) = \cos(2\pi x/\lambda)$ sur un intervalle de longueur d'ondes Δk , avec $k = 2\pi/\lambda$, donne un paquet d'onde $\psi(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2\right)$, de largeur Δx donné par le **principe d'incertitude** :



En effet (transformée de Fourier) :

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2\right) = \int \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{\Delta k}\right)^2\right) \cos(kx) dk$$

Remarque : en musique pour une note on a de même

$$\underbrace{\Delta t}_{\text{durée}} \underbrace{\Delta f}_{\text{hauteur}} \sim 1$$

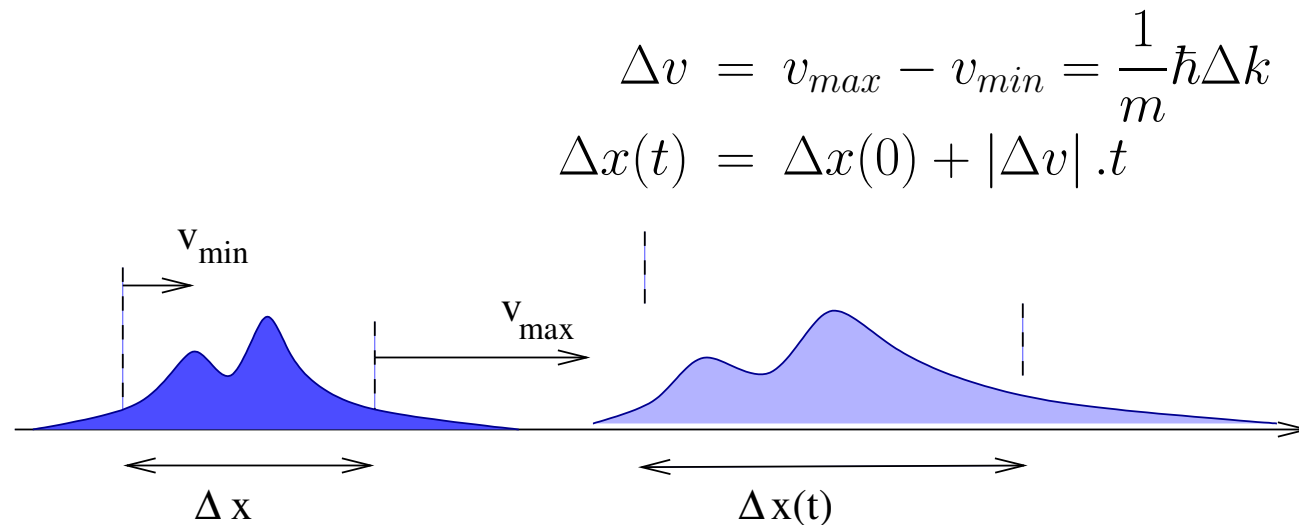
Et donc la hauteur de la note est mal défini si elle est courte (cela s'entend bien dans le grave : $\Delta t = 0.2s$ $\Delta f > 1/2\text{ton}$, si $f = 55Hz$).

Dispersion de l'onde en régime régulier (non chaotique) :

pour une particule libre la vitesse moyenne \bar{v} du paquet d'onde est relié à \bar{k}

d'après $\bar{v} = \frac{\hbar}{m}\bar{k}$,

Conséquence : l'onde est composée de vitesses différentes et se disperse :



D'après $v = \frac{\hbar}{m}k$, le principe d'incertitude $\Delta x \Delta k \sim 1$ s'écrit :

$$\Delta x \Delta v \geq \frac{\hbar}{m}$$

i.e. Δx petit \rightarrow Δv grand, et Δv petit \rightarrow Δx grand. Donc l'onde ne peut pas rester localisée.

Valeurs numériques :

avec $\hbar = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$

– Pour un électron (libre) $m = 9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, $(\hbar/m) = 10 \text{ cm}^2/\text{s}$

Donc les effets ondulatoires peuvent être de taille macroscopique pour l'électron. (si pas de décohérence).

– Pour la Lune (libre) $m = 7 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ $(\hbar/m) = 10^{-56} \text{ m}^2/\text{s}$

Les effets ondulatoires ne peuvent pas atteindre une taille macroscopique en des temps raisonnables.

On verra que le chaos invalide cette analyse, faite ici pour une particule libre.

Dispersion de l'onde en régime chaotique :

Au contraire pour un objet macroscopique ayant une dynamique chaotique, l'incertitude quantique peut rapidement atteindre la taille de l'objet.

Exemple : boule de loto :

$$\Delta x (0) \Delta v (0) \geq \hbar/m \sim 10^{-36} m^2/s$$

Alors au mieux : $\Delta x (0) \simeq 10^{-18} m$

mais $\Delta x (t) \simeq \Delta x (0) 10^{t/\tau}$ avec $\tau \simeq 1 s$.

alors $\Delta x (t) \simeq 1 m$ après **le temps d'Erhenfest** $t \simeq 18 s$ qui est très court.

En réalité la décohérence intervient bien avant.

Exemple : Hypérior, satellite de Saturne qui a une rotation propre chaotique,

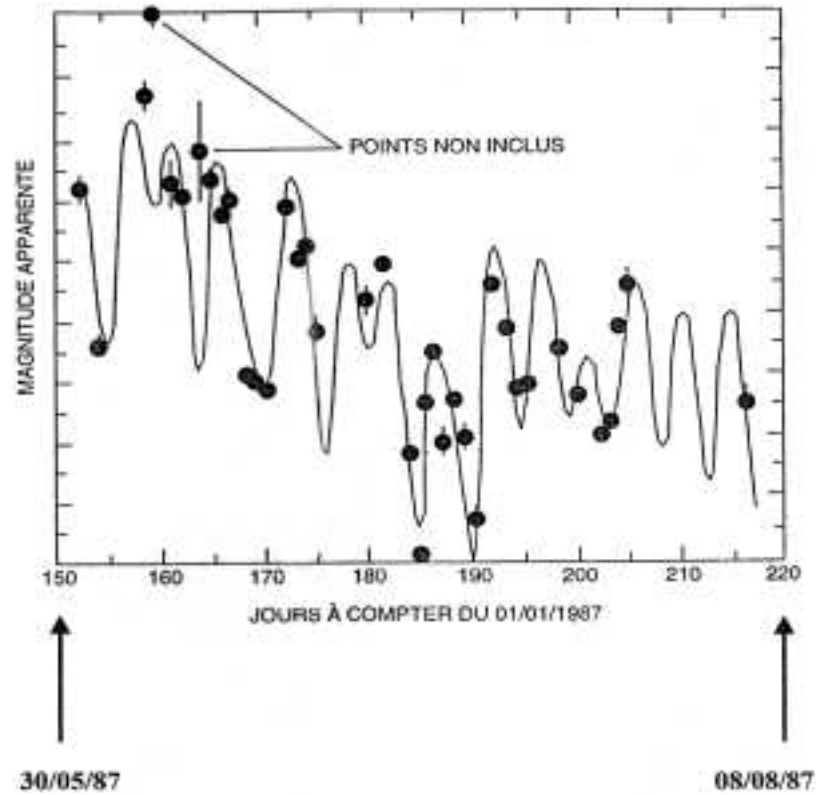
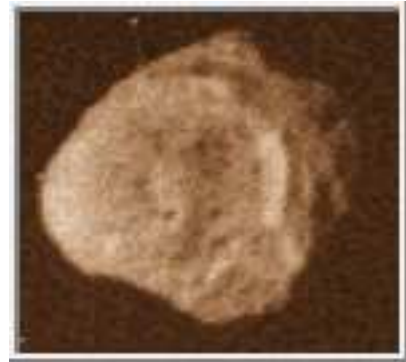


Figure 12 : variations aléatoires observées dans la luminosité d'Hypérior.



On évalue $t_{Erhenfest} \simeq 15$ ans.

Attention :

C'est une fiction que d'appliquer une description ondulatoire (quantique) à des objets macroscopiques. Aucune expérience ne le valide (la décohérence rend cette observation difficile/impossible ?)

D) Exemples de chaos ondulatoire

On note $L =$ **taille de la cavité**, et $\lambda =$ **longueur d'onde**.

On suppose le régime **semi-classique** $\lambda \ll L$, c'est à dire

$$\tilde{\hbar} = \frac{\lambda}{L} \ll 1$$

On note

- $v_0 \equiv$ vitesse de la particule (ou paquet d'onde),
- $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$ son énergie,
- $t_0 = L/v_0$: temps caractéristique pour traverser la cavité.

On considère des grandeurs sans dimension :

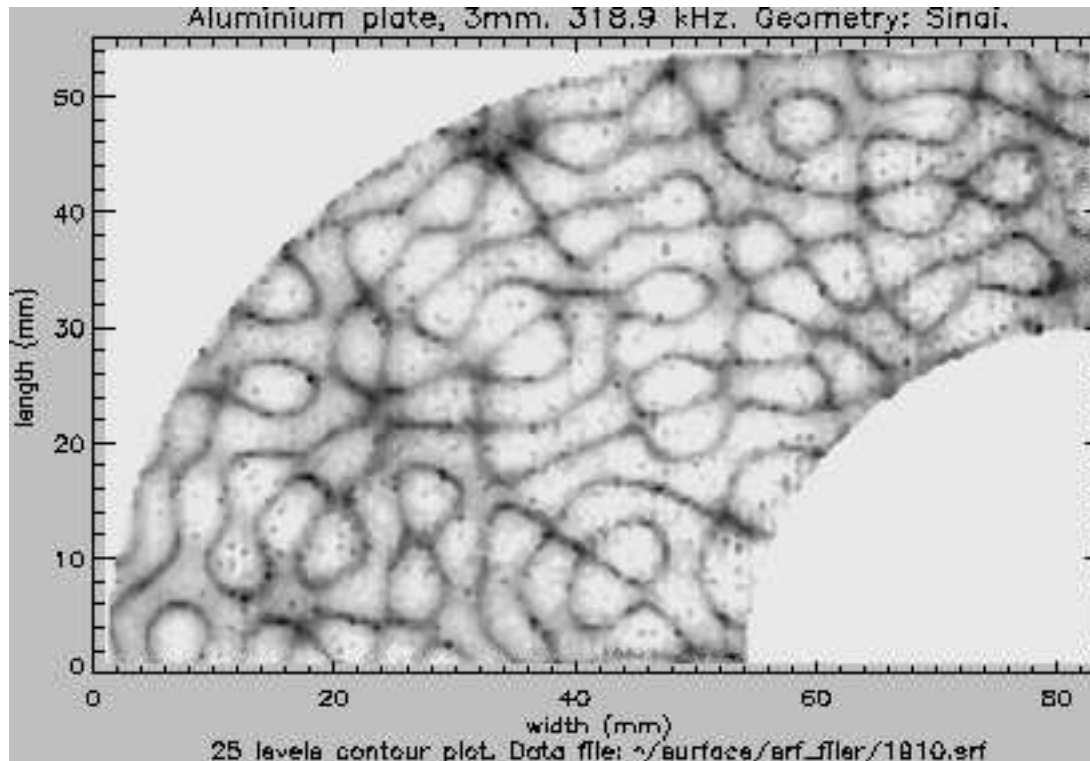
- $\tilde{x} = x/L, \tilde{v} = v/v_0, \tilde{E} = E/E_0,$
- $\tilde{\hbar} = \hbar / (Lmv_0) \simeq \lambda/L.$
- $\tilde{t} = t/t_0.$

Dans la suite, on omettra les $\tilde{}$

1) Ondes acoustiques (Ultra sons) :

$L \sim 10\text{cm}$, $\lambda \sim 3\text{mm}$. Alors $\tilde{h} \sim 0.03$.

- Acoustic wave function of Aluminium Sinai stadium (C. Ellegaard, M. Ox-borrow, P. Bertelsen and K. Schaadt) :



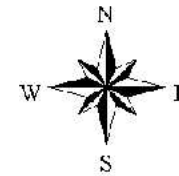
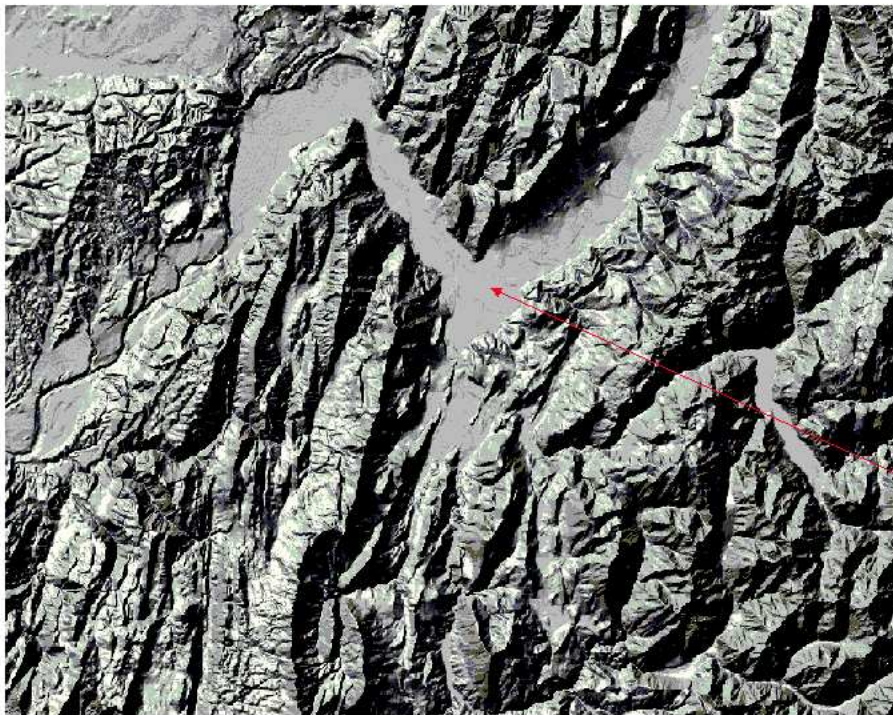
- Ondes ultrasonores en échographie ; imagerie médicale. La boîte crânienne est une cavité chaotique ? (expériences de M. Fink et al.)

2) Ondes sismique dans le bassin grenoblois.

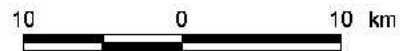
(Fabrice Cotton, Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique)

Voir film. $L \sim 10\text{km}$, $\lambda \sim 100\text{m}$. Alors $\tilde{h} \sim 0.01$. Importance pour la prévision.

Une ville sur un bassin sédimentaire



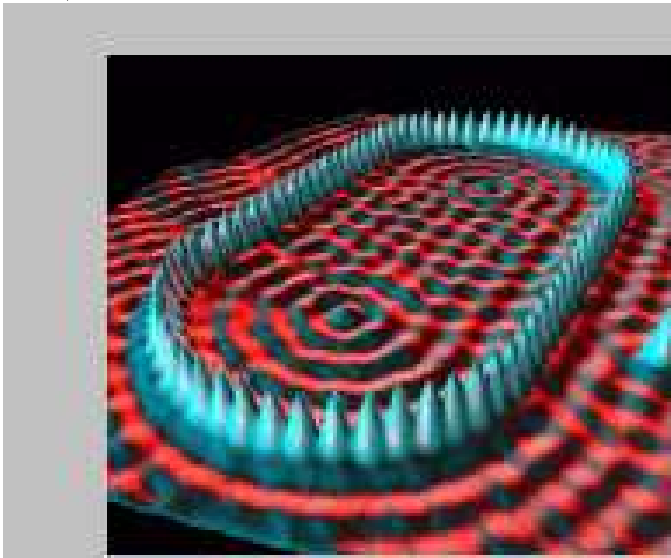
Grenoble



3) Ondes quantiques :

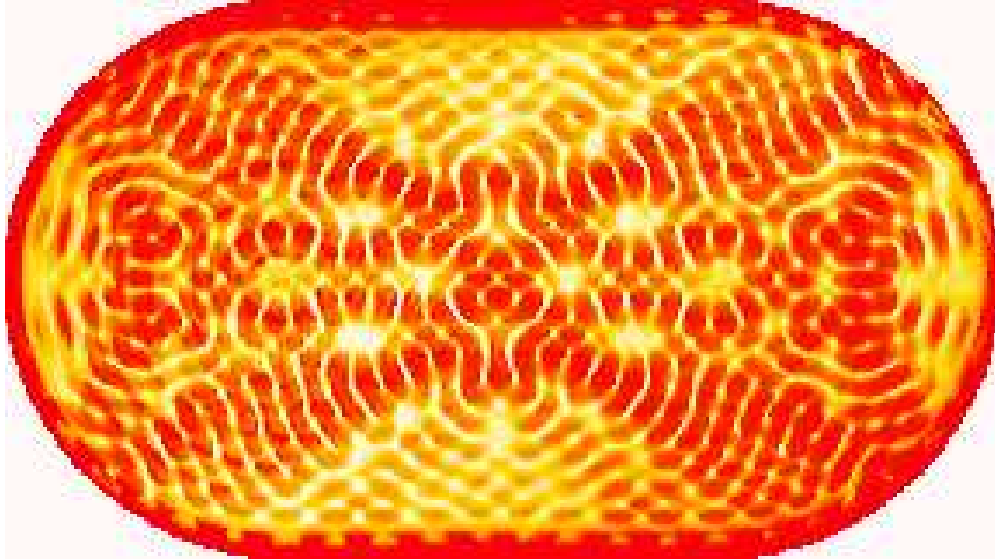
- Electron dans un atome d'Hydrogène avec champ magnétique fort ($B \sim 1T$, dans les étoiles à neutron , ou en labo).
- Electron dans une molécule (→importance pour les propriétés chimiques) ;
- Electron dans un dispositif mésoscopique. Importance en informatique.

Exemple : image STM (microscope effet tunnel) of the surface electron density of a quantum stadium corral made from Iron atoms deposited on Copper (111), taken from Crommie et al, Nature 363, 524 (1993) :



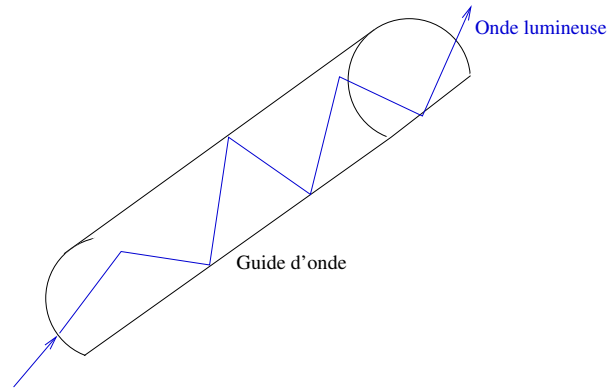
4) Ondes de surface

(fluide à faible viscosité dans un bac) (problème non linéaire), Jerry Gollub,
Arshad Kudrolli, Mathew Abraham

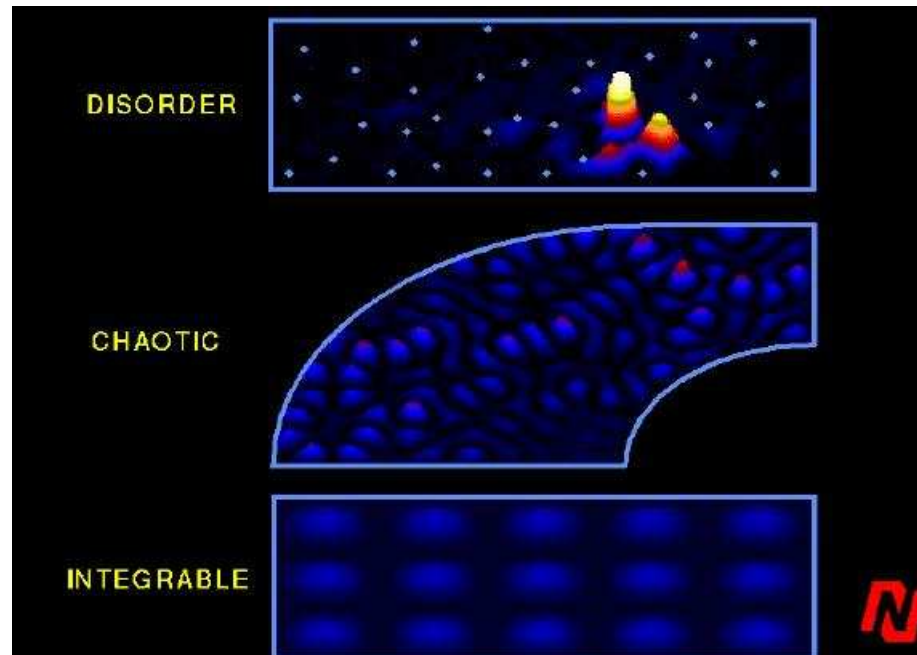


5) Ondes électromagnétique :

– Lumière laser dans un guide d'onde. (Nice, Minuaturat et al.) ($\lambda \sim 1\mu m$)



– Micro onde dans une cavité chaotique. ($\lambda \sim 1cm$) (S.Shridar)



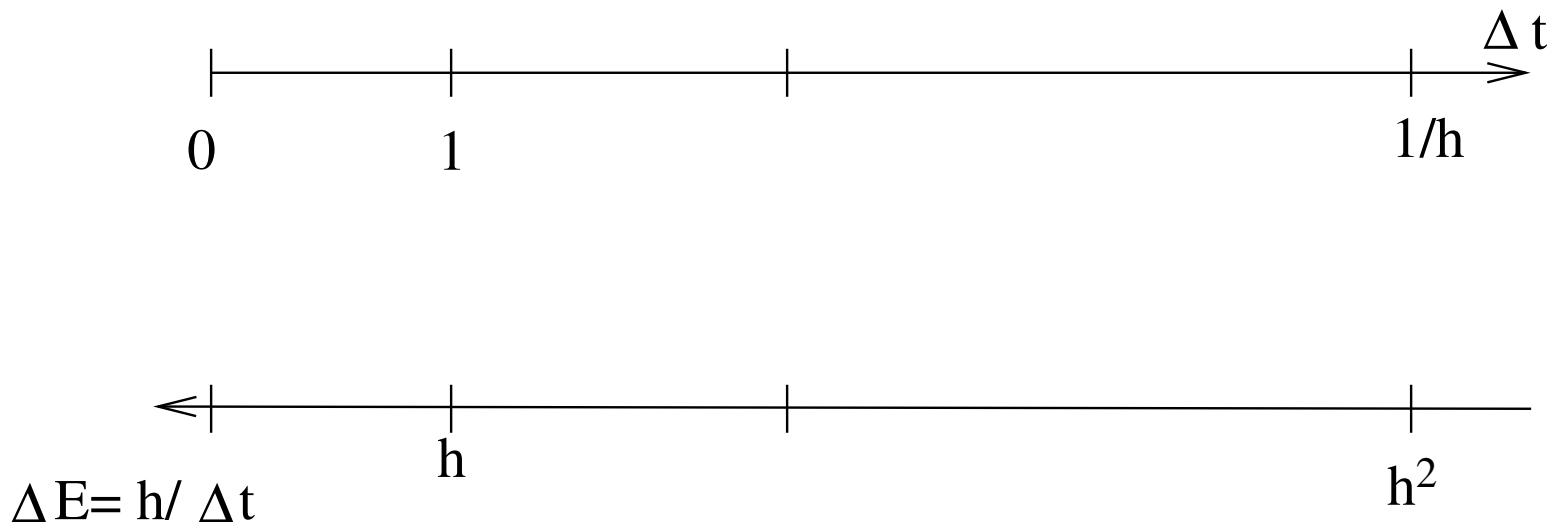
3) Temps caractéristiques et phénomènes associés

Nous utiliserons le fait que

Les échelles de temps et d'énergie sont reliées d'après le principe d'incertitude (car phase $e^{-iEt/\hbar}$) :

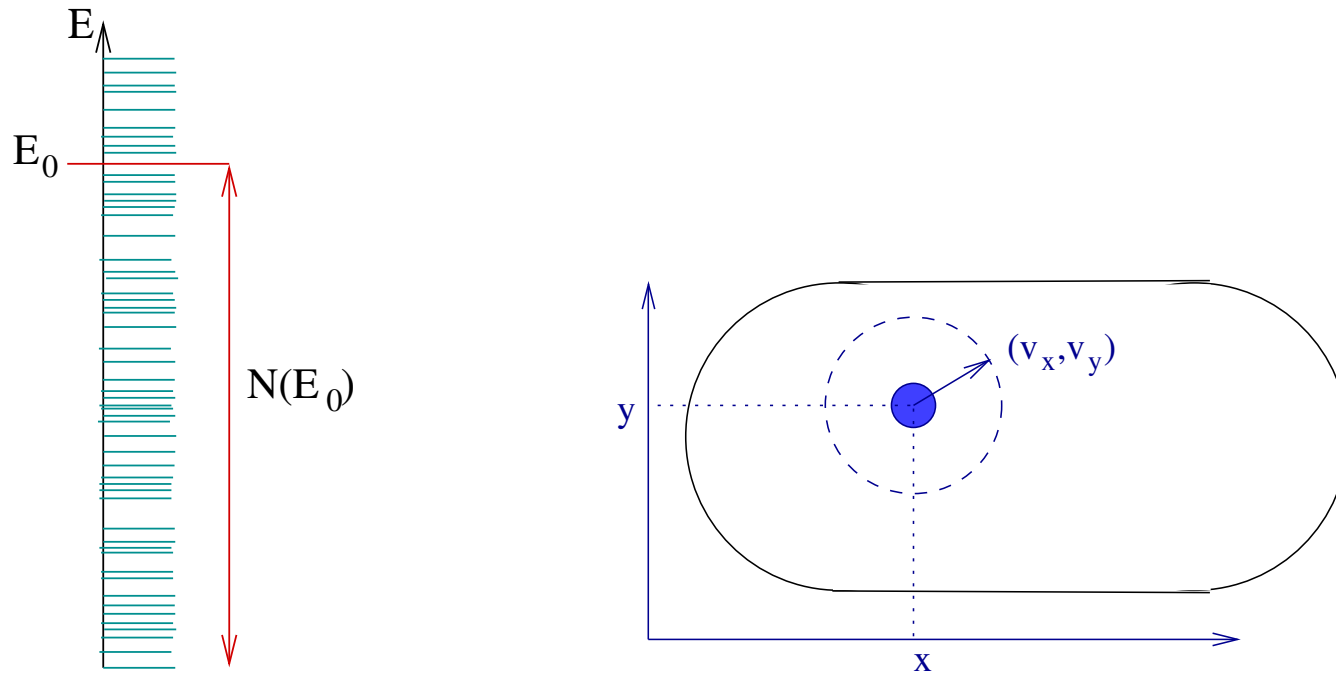
$$\Delta t \Delta E \sim \hbar$$

Signification : ΔE : précision en énergie de l'onde, Δt : temps typique que met l'onde à changer d'aspect.



Echelle de temps $\delta t \ll 1, \delta E \gg \hbar$. Densité moyenne de modes ; formule de Weyl

Question : évaluer le nombre $\mathcal{N}(E_0)$ de niveaux d'énergie E inférieure à E_0 ?



Réponse : En mécanique classique l'énergie est $E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2)$ et ne dépend pas des variables (x, y) .

Donc $E \leq E_0$ si $(v_x^2 + v_y^2) \leq 2E_0/m \Leftrightarrow (v_x, v_y) \in$ **cercle de surface** $\pi(2E_0/m)$.

Les variables (x, y) sont seulement contraintes rester dans **la surface S du billard**.

D'après le principe d'incertitude $\Delta x \Delta v_x \simeq \hbar/m$, un paquet d'onde quantique occupe le **volume élémentaire** $\Delta x \Delta v_x \Delta y \Delta v_y \simeq h^2/m^2$ dans l'espace de phase (variables dynamiques x, v_x, y, v_y). On estime donc :

$$\mathcal{N}(E_0) \simeq \frac{\pi (2E_0/m) S}{(h^2/m^2)} = \frac{S (\pi 2mE_0)}{h^2}$$

La densité d'états est alors :

$\rho(E) = \frac{d\mathcal{N}(E)}{dE} = \frac{2\pi S m}{h^2} : \quad \text{Formule de Weyl – Thomas – Fermi – 1930}$
--

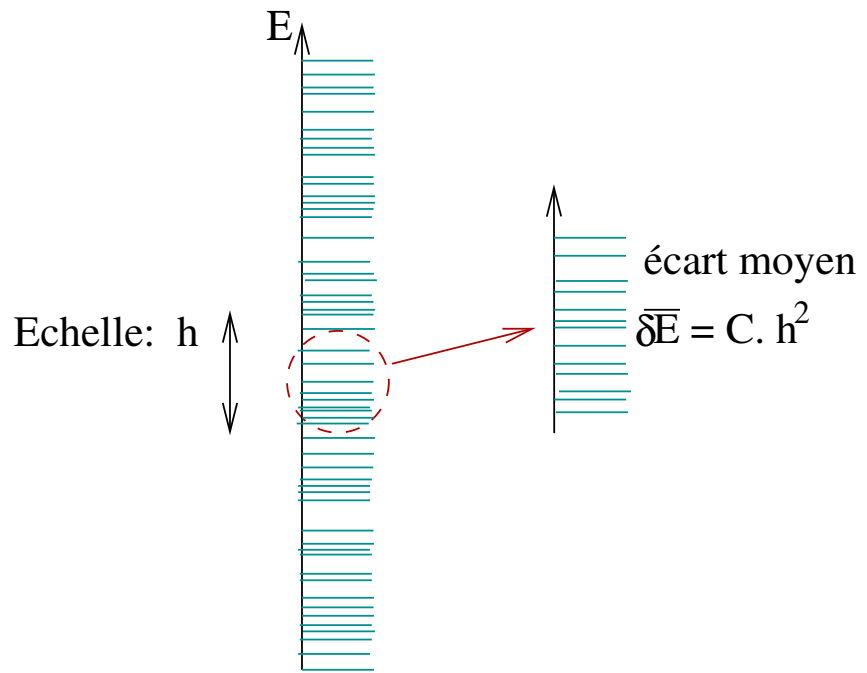
Précision de cette estimation : on a considéré des paquets d'ondes comme immobiles (stationnaires). Cela est valable pour des temps $\delta t \ll 1$. D'après le principe d'incertitude temps-énergie $\delta t \delta E \simeq \hbar$, on déduit une précision limitée par l'échelle

$$\delta E \simeq \frac{\hbar}{\delta t} \gg \hbar$$

pour la formule de Weyl.

On déduit aussi que **l'écart moyen entre niveaux** est

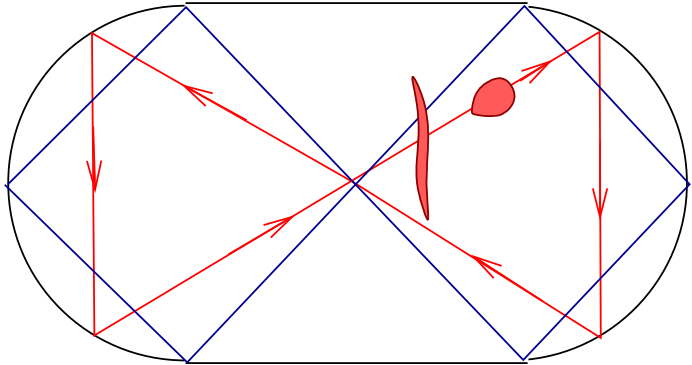
$\overline{\delta E} \simeq \frac{1}{\rho(E)} = \frac{1}{2\pi S m} h^2$



$$h^2 \ll h \ll 1$$

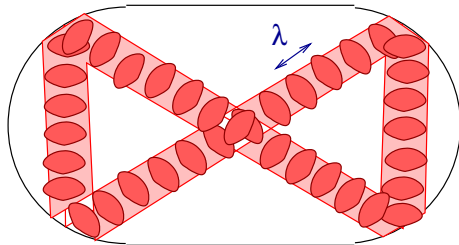
Echelle de temps $\delta t \simeq 1$, $\delta E \sim \hbar$. Théorie des orbites périodiques (1970') :

Suivons un paquet d'onde.

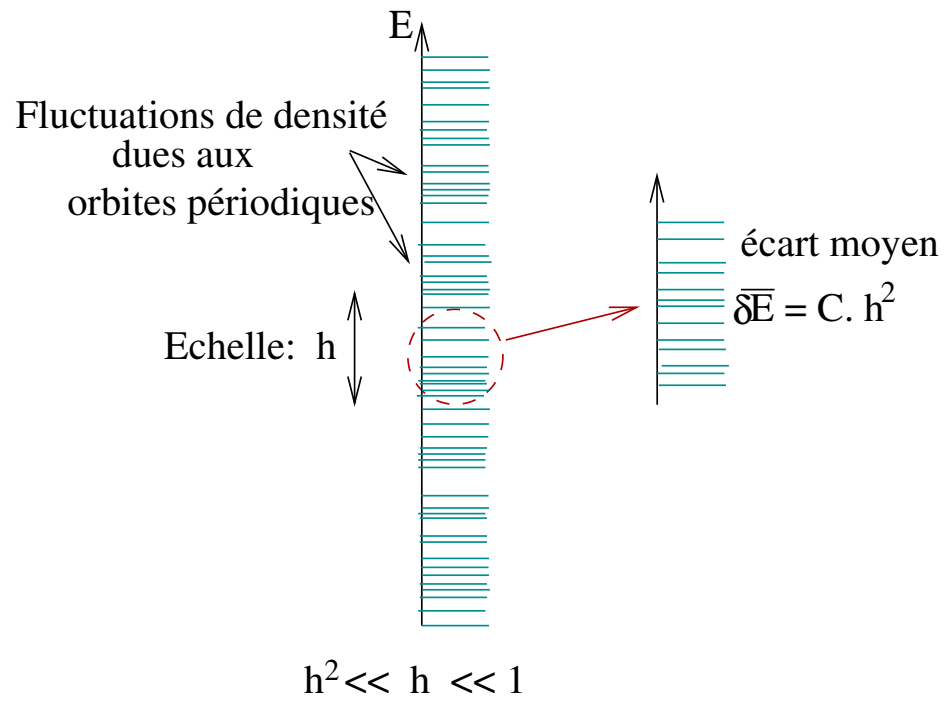


S'il se trouve sur une orbite périodique (instable) de longueur L_0 , il revient à sa position initiale, avec une phase relative, et un étirement .

On imagine donc pouvoir construire un quasi-mode stationnaire sur cette orbite. Mais le résultat est modulé par les interférences constructives ou destructrices, selon "la longueur optique du chemin" L_0/λ .

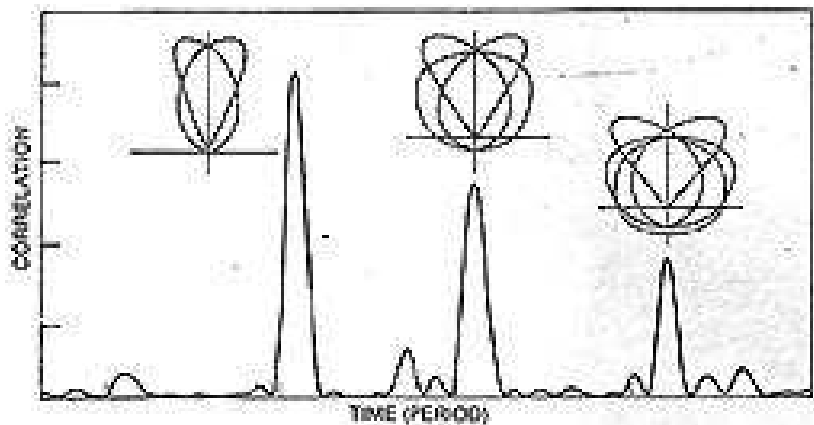
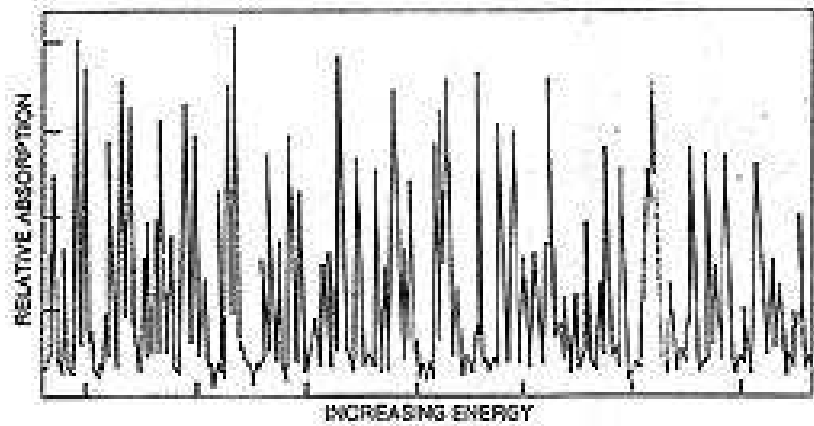


Cad que la densité d'état est modulée par $\cos(2\pi L_0/\lambda)$, sur une échelle d'énergie $\delta E \simeq \frac{\hbar}{\delta t_{o.p.}} \propto \hbar$.



Manifestation expérimentale :

Spectre d'absorption de la lumière par un atome d'hydrogène en présence d'un champ magnétique fort (la dynamique de l'électron est alors chaotique). Une transformée de Fourier du spectre fait apparaître des pics associés aux orbites périodiques classiques de l'électron.



Le temps d'Erhenfest T_E

Avec le chaos, les incertitudes augmentent comme

$$\Delta x(t) \simeq \Delta x(0) e^{t/\tau}$$

(tant que $\Delta x(t) < L$).

Un paquet d'onde, (vérifiant $\Delta x \Delta v \simeq \hbar/m$), de taille initiale microscopique $\Delta x(0) \geq \hbar$ aura une taille ultérieure macroscopique :

$$\Delta x(T_E) \geq \hbar e^{T_E/\tau} \simeq 1$$

pour le temps d'Ehrenfest :

$$T_E \simeq \tau \log(1/\hbar)$$

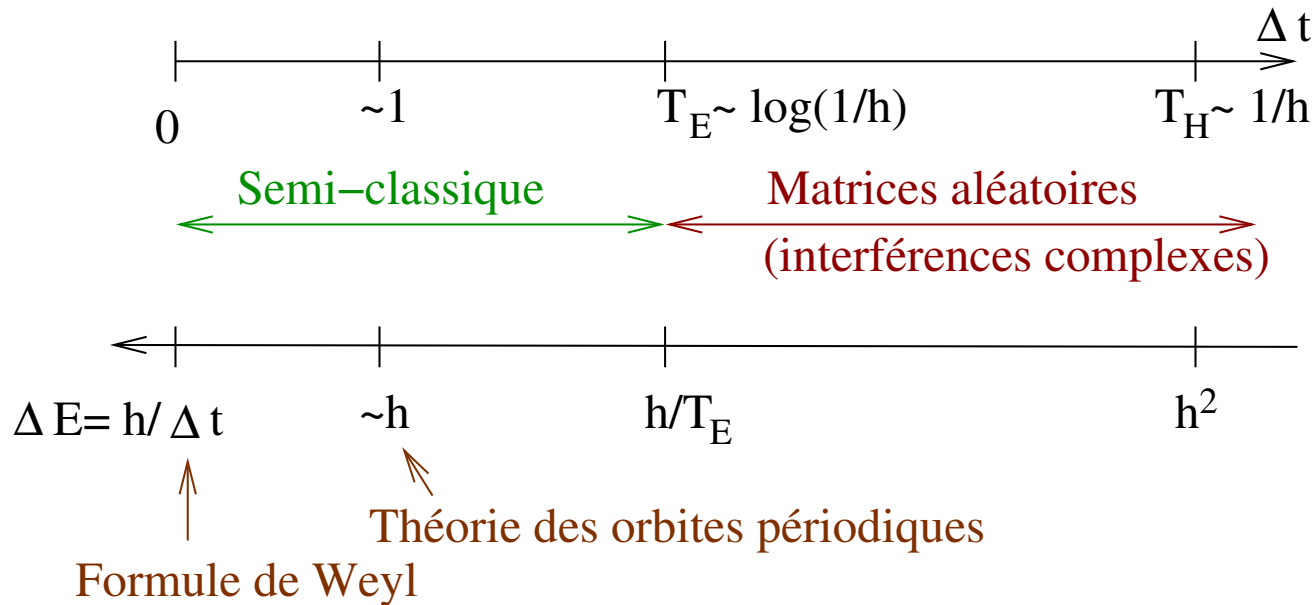
Cad échelle d'énergie $\delta E \simeq \frac{\hbar}{T_E} \simeq \frac{\hbar}{\tau \log(1/\hbar)}$.

Ensuite des interférences complexes apparaissent.

Le temps d'Heisenberg T_H

L'écart moyen entre niveaux $\overline{\delta E} \simeq \frac{1}{\rho(E)} = \frac{h^2}{2\pi S m}$ définit le temps d'Heisenberg

$$T_H = \hbar / \overline{\delta E} \simeq \frac{1}{\hbar} \left(\frac{S m}{2\pi} \right)$$

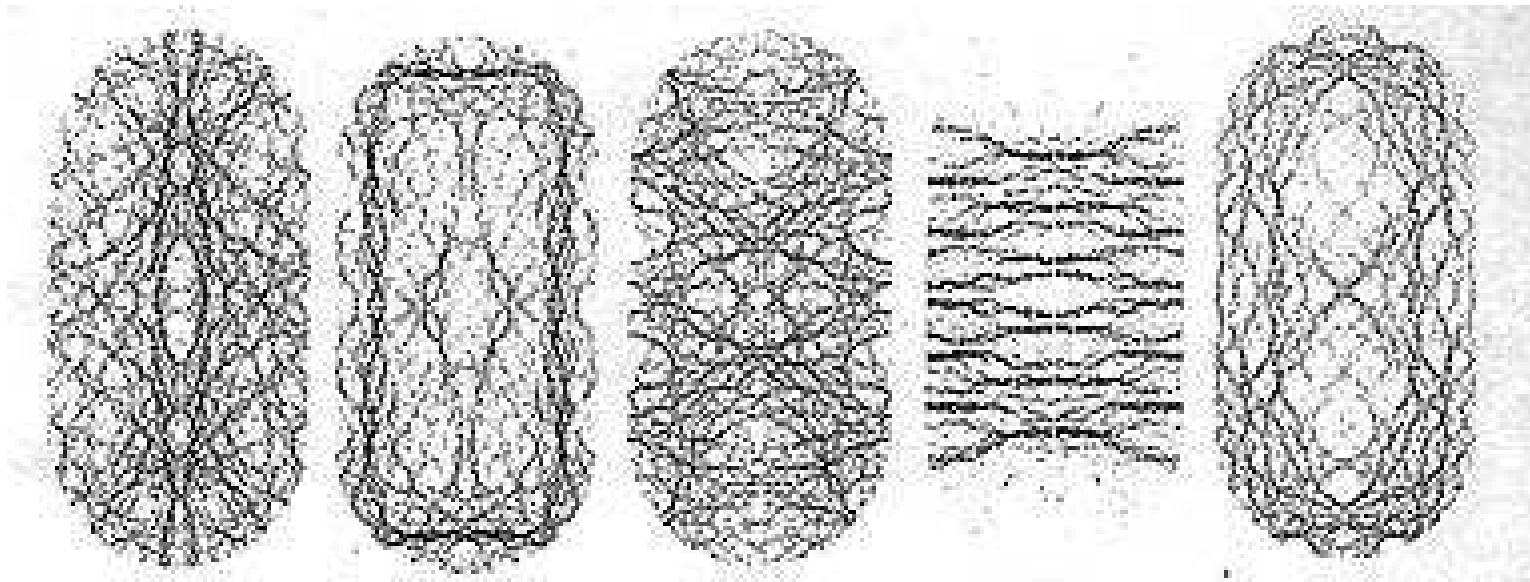


La théorie semi-classique permet de décrire l'évolution d'une onde pour $|t| < T_E$. Ensuite, il faut une approche **statistique** "la théorie des matrices aléatoires".

Un autre résultat semi-classique important est le **théorème de Schnirelmann-Colin de Verdière** :

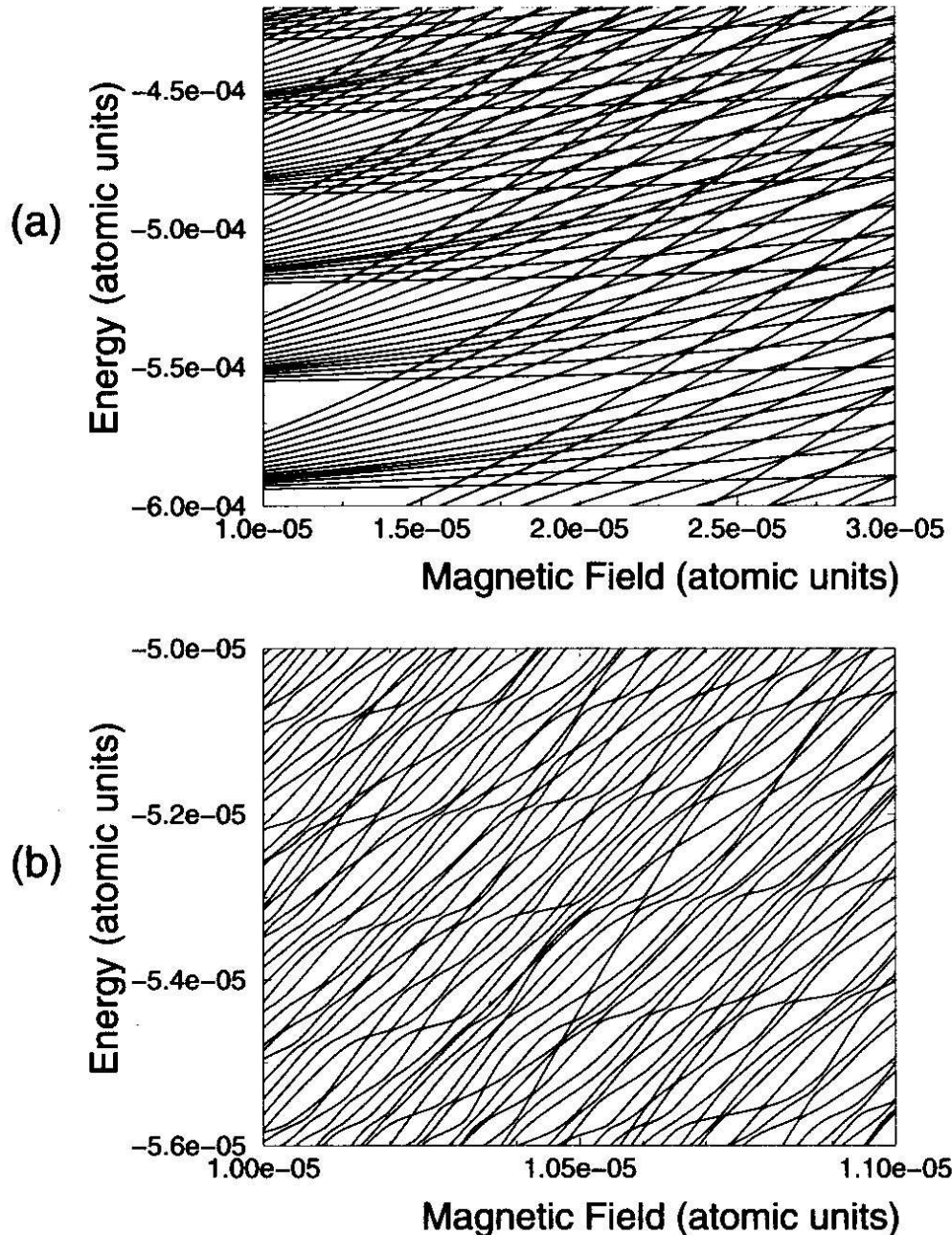
“pour $\lambda \ll L$, et une cavité chaotique (ergodique) presque tout état stationnaire $\psi_k(x)$ est uniformément réparti sur le billard (et même dans l'espace de phase).”

Des états exceptionnels localisés sur des orbites périodiques instables sont parfois observés.



4) La théorie des matrices aléatoires (1980')

Observations du spectre à l'échelle de l'écart entre niveaux $\overline{\delta E} \sim \hbar^2$.



Niveaux d'énergie d'un électron dans un atome Hydrogène, à basse énergie et haute énergie **dynamique régulière, puis chaotique** (from D. Delande) :

On observe des **niveaux qui se croisent** en régime régulier, et une **répulsion des niveaux** dans le régime chaotique.

Histogramme d'espacement des niveaux

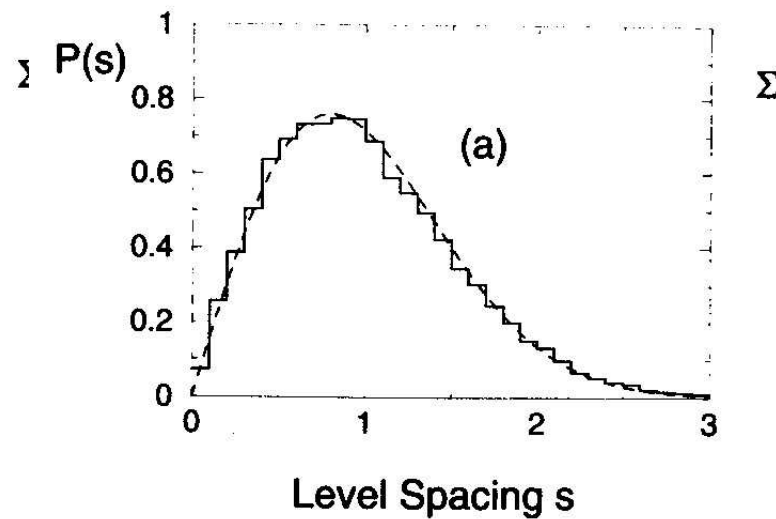
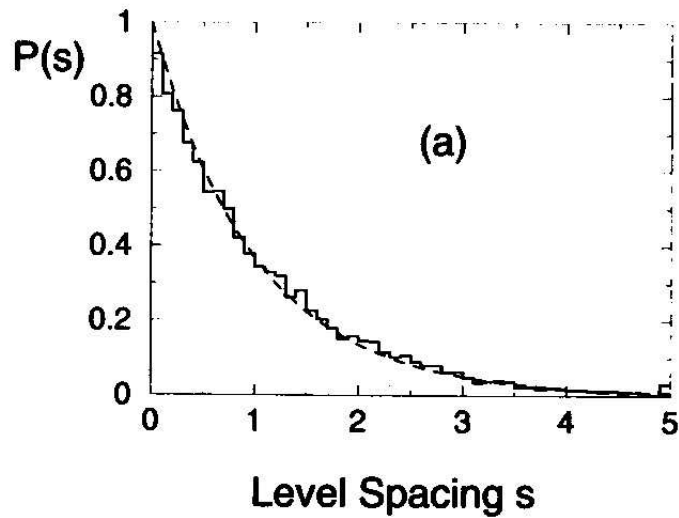
Avec une normalisation de l'énergie $x = E/\overline{\delta E}$, soit $s =$ écart entre deux niveaux successifs.

Si niveau en x_0 , soit :

$P(s) ds =$ proba du niveau suivant dans intervalle $[x_0 + s; x_0 + s + ds]$.

Rem : $\int_0^\infty P(s) ds = 1$ et si distribution au hasard, alors $P_{poisson}(s) = \exp(-s)$.

On obtient pour le régime régulier et chaotique :



Conjecture (O. Bohigas et al. 1984) "Loi d'universalité" : à l'échelle $\Delta E \ll \hbar/T_E$,

les valeurs propres $E_k/\overline{\delta E}$ (renormalisées par rapport à l'écart moyen $\overline{\delta E}$), sont réparties au hasard comme celles d'une matrice aléatoire, donc indépendantes du système.

Pourquoi matrice ? : car l'équation de schrodinger $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(x)\psi = E\psi$ est linéaire. On cherche les valeurs propres d'un opérateur linéaire \equiv matrice H (dans une base).

Qu'est une Matrice aléatoire ? :

On considère les matrices H symétrique réelle de taille $N \times N$,

$$H = (H_{ij})_{i,j=1 \rightarrow N}$$

(telle que $H_{ij} = H_{ji}$).

On considère une mesure de probabilité invariante par changement de base orthogonal (G.O.E= Gaussian Orthogonal Ensemble) :

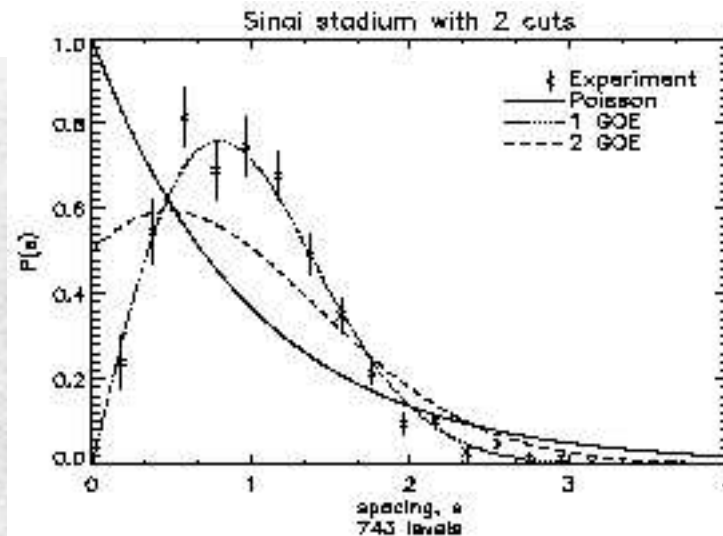
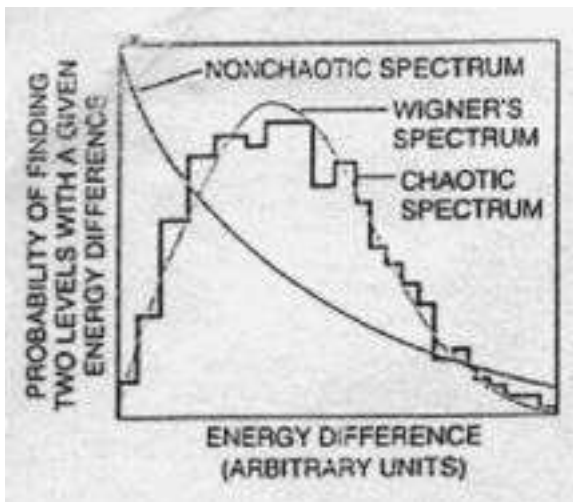
$$dP(H) = \frac{1}{Z} \exp(-\text{Tr}(H^2)) d\mu(H)$$

$$d\mu(H) = \prod_{i < j} \delta H_{ij} \prod_i \delta H_{ii}$$

$$\text{Tr}(H^2) = \sum_i (H_{ii})^2 + 2 \sum_{i < j} (H_{ij})^2$$

donne une loi d'espacement des niveaux :

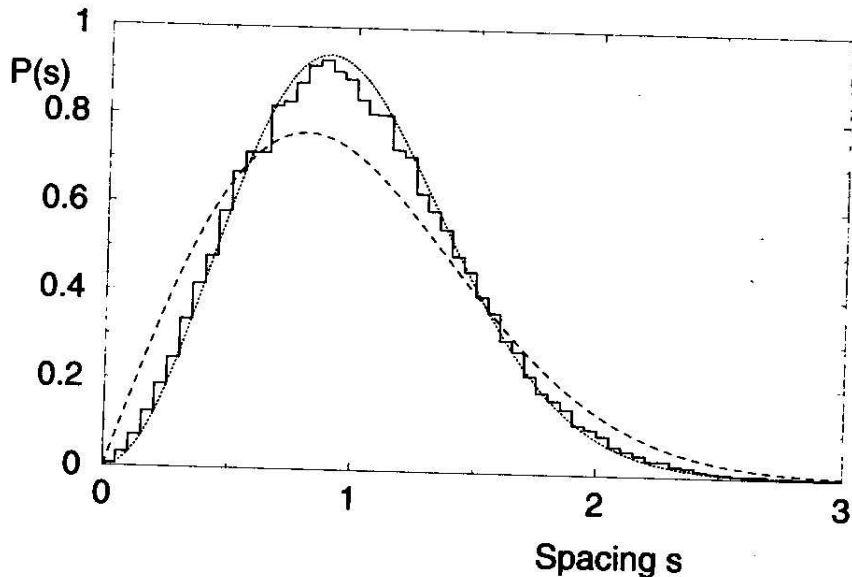
$$P_{wigner}(s) \simeq \frac{\pi}{2} s \exp(-\pi s^2/4)$$



De nombreuses expériences valident cette conjecture.

Remarques :

- Pour un problème non invariant par renversement du temps, il faut considérer des matrices Hermitiennes, ensemble G.U.E.



- Explication intuitive de la répulsion de niveau : cad du facteur s dans $P_{wigner}(s)$:

pour une matrice 2×2 , $H = \begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix}$, on calcule un écart entre niveaux

$s = \sqrt{(A - B)^2 + C^2}$, donc $s = 0$ est "peu probable" car nécessite les conditions $A = B$ et $C = 0$. Plus précisément, si $x = A - B$, $y = C$, alors la mesure uniforme $dx dy$ induit la mesure $s ds$. Pour des matrices Hermitiennes, on obtient $s^2 ds$.

Conclusion :

- Le **chaos classique de la particule** a une forte empreinte sur le comportement ondulatoire (si *longueur d'onde* $\lambda \ll L$ *taille*), et rend celui ci très complexe (encore mal compris).
- Malgré tout l'équation des ondes est une équation linéaire, et en "chaos ondulatoire", la sensibilité aux conditions initiales s'arrête à l'échelle λ .
- De façon équivalente, **le régime semi-classique** pour un paquet d'onde est $t < T_{Erhenfest}$. Audelà, il faut utiliser l'heuristique des **matrices aléatoires**.

Bibliographie :

Articles :

- Martin Gutzwiller "Le chaos quantique" Revue "Pour la Science" 1991 numéro 173 , p.36-42
- Pour la Science, Hors Série "Le chaos" Janvier 1995.
- Cours de Dominique Delande "Quantum Chaos in Atomic Physics" LES HOUCHES 1999 SUMMER SCHOOL SESSION LXXII
- Session Les houches 1989.

Livres :

- Hans-Jurgen Stockmann "*Quantum Chaos : An Introduction*"
- Martin Gutzwiller "*Chaos in Classical and Quantum Mechanics*"