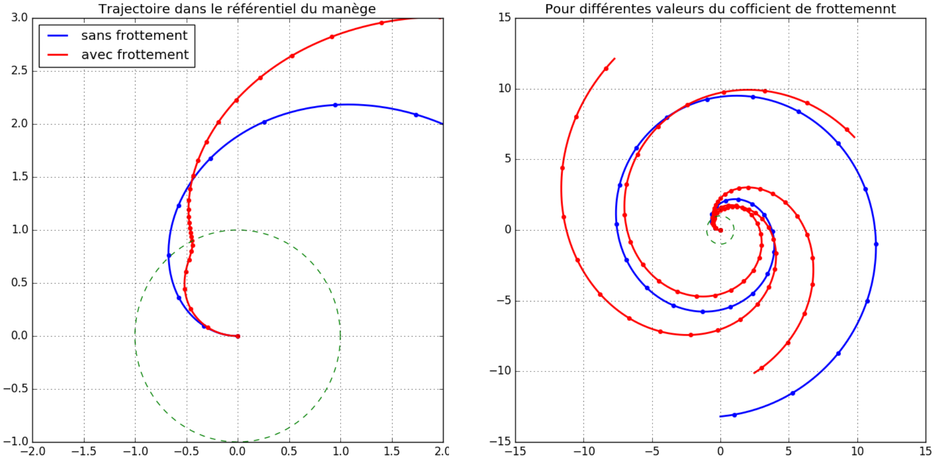
II. B. Cinématique du changement de référentiel

Guillaume Delannoy

MP* Chatô

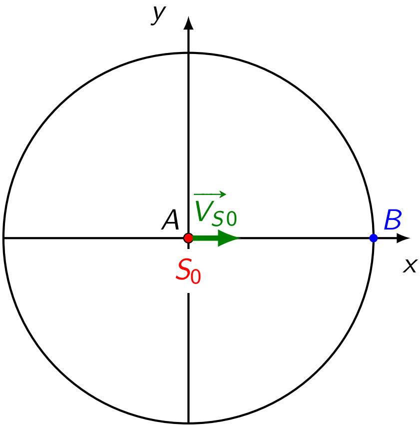
2016

Alice et Bob jouent au palet sur un plateau tournant



Alice et Bob dînent sur un plateau tournant

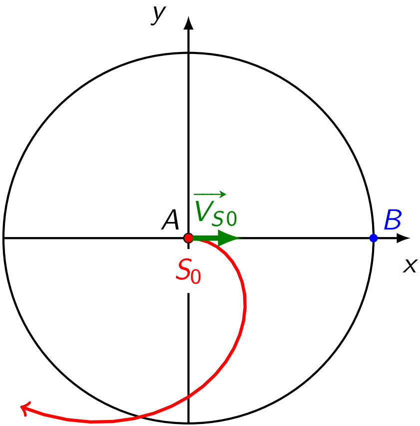
Bob dit à Alice : « Passe-moi le sel ! »



Référentiel tournant **non galiléen**

Alice et Bob dînent sur un plateau tournant

Bob dit à Alice : « Passe-moi le sel ! »

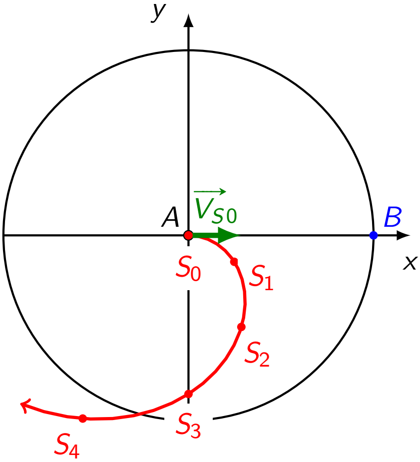


Raté !

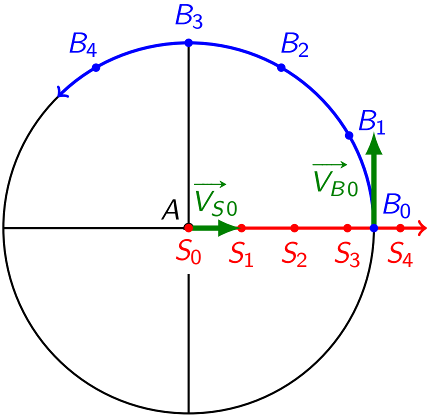
Référentiel tournant **non galiléen**

Alice et Bob dînent sur un plateau tournant

Bob dit à Alice : « Passe-moi le sel ! »



Référentiel tournant **non galiléen**



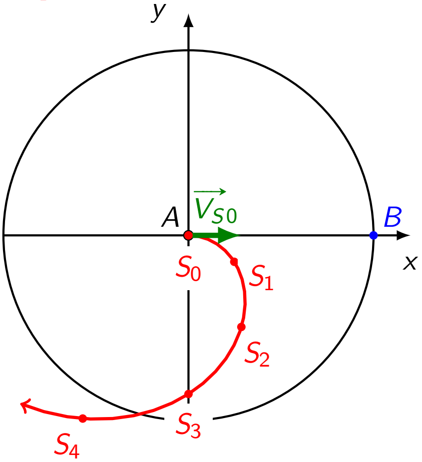
Référentiel du sol **galiléen**

Dans le référentiel du sol, Bob a bougé pendant le voyage de la salière S

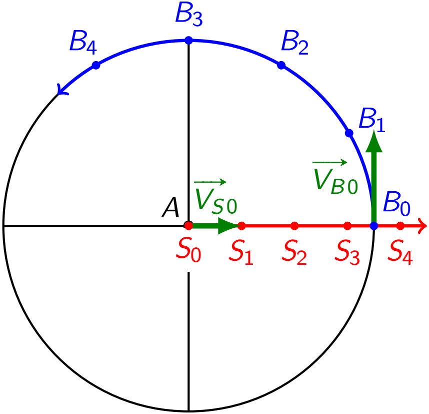
Alice et Bob dînent sur un plateau tournant

Bob dit à Alice : « Passe-moi le sel ! »

http://techtv.mit.edu/videos/3714-the-coriolis-effect



Référentiel tournant **non galiléen**

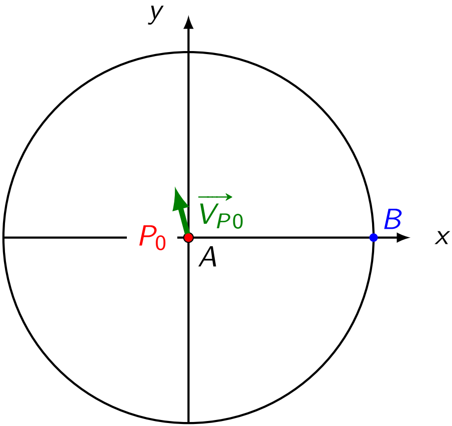


Référentiel du sol **galiléen**

Dans le référentiel du sol, Bob a bougé pendant le voyage de la salière S

Alice et Bob dînent sur un plateau tournant

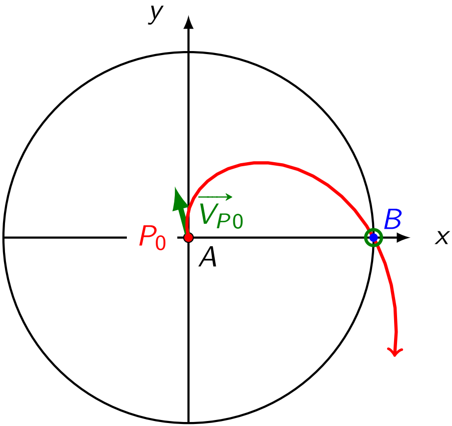
Bob dit à Alice : « Bon, ben le poivre alors ! »



Référentiel tournant **non galiléen**

Alice et Bob dînent sur un plateau tournant

Bob dit à Alice : « Bon, ben le poivre alors ! »

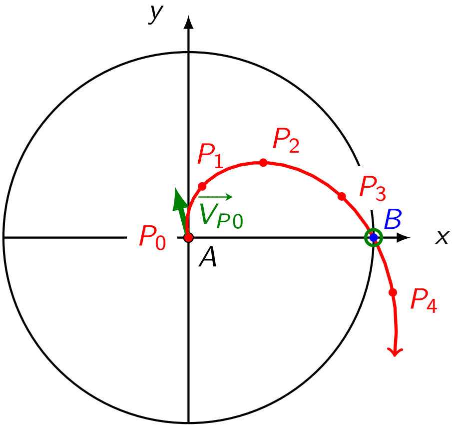


Bravo Alice !

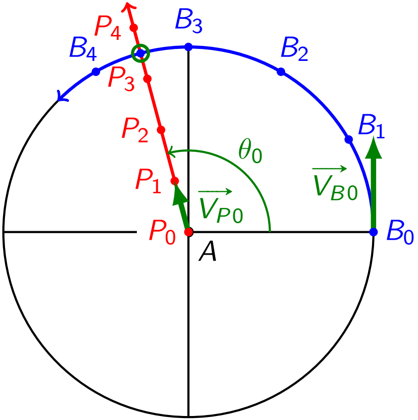
Référentiel tournant **non galiléen**

Alice et Bob dînent sur un plateau tournant

Bob dit à Alice : « Bon, ben le poivre alors ! »



Référentiel tournant **non galiléen**



Référentiel du sol **galiléen**

L'angle θ_0 correspond à celui parcouru par Bob pendant le voyage de P

Mouvement relatif de deux référentiels

Cas particuliers

Translation

Tous les points de $\mathcal{R}'$ se déplacent à la *même* vitesse dans $\mathcal{R}$, la vitesse d'un seul point suffit pour caractériser la translation (une translation peut-être rectiligne, circulaire . . .).

$$\forall M \in \mathcal{R}' \quad \vec{v}\,(M)\big|_{\mathcal{R}} = \vec{v}\,(O')\big|_{\mathcal{R}}$$

Rotation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ autour d'un axe (fixe)

Elle est caractérisée par le *vecteur* rotation :

- norme = angle balayé par unité de temps,
- direction = celle de l'axe de rotation,
- sens = tel que la rotation soit dans le sens *direct* autour de $\vec{\omega}$

$$\vec{\omega}\,|_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \omega(t)\,\vec{u}(t)$$

Mouvement relatif de deux référentiels

Cas général

Le mouvement **quelconque** de $\mathcal{R}'$ par rapport $\mathcal{R}$ peut être décomposée à l'instant t en

- une translation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$
- une rotation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ autour de O'

Les caractéristiques de ce mouvement relatif $\left(\vec{v}\,(O')|_{\mathcal{R}},\ \vec{\omega}\,|_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\right)$ sont des grandeurs instantanées, a priori fonction du temps.

Exemples : le yoyo, la roue de voiture

Différents points de vue : la porte

- $O' \in$ charnière : $\vec{v}\,(O')|_{\mathcal{R}} = \vec{0}$ et $\vec{\omega}\,|_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \neq \vec{0}$
- $O' \notin$ charnière : $\vec{v}\,(O')|_{\mathcal{R}} \neq \vec{0}$ et $\vec{\omega}\,|_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \neq \vec{0}$

Dérivation temporelle d'un vecteur

Cas particulier : vecteur de norme constante

$\vec{A}(t)$: vecteur de norme constante qui subit un mouvement de rotation de vecteur $\vec{\omega}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$.

Coordonnées cylindriques $\vec{\omega} = \dot{\theta}(t)\,\vec{e_z}$: M décrit un cercle

$$\vec{A}(t) = \overrightarrow{OM}(t) = \rho\,\vec{e_\rho}(t) + z\,\vec{e_z} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \rho = \text{cst} \\ z = \text{cst} \end{cases}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{v}(M)\big|_{\mathcal{R}} = \dot{\rho}\,\vec{e_\rho} + \rho\,\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + \dot{z}\,\vec{e_z} = \rho\,\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{A} = \left(\dot{\theta}\,\vec{e_z}\right) \wedge \left(\rho\,\vec{e_\rho} + z\,\vec{e_z}\right) = \rho\,\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} \quad \text{donc} \quad \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{\omega} \wedge \vec{A}$$

Dérivation temporelle d'un vecteur

Cas général

Soient $\mathcal{R}\ (\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$, $\mathcal{R}'\ (\vec{\imath}',\ \vec{\jmath}',\ \vec{k}')$ et $\vec{a}(t)$ un vecteur quelconque.

$$\vec{A} = A_x\,\vec{\imath} + A_y\,\vec{\jmath} + A_z\,\vec{k} \quad \text{et} \quad \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{A}_x\,\vec{\imath} + \dot{A}_y\,\vec{\jmath} + \dot{A}_z\,\vec{k}$$

$$\vec{A} = A'_x\,\vec{\imath}' + A'_y\,\vec{\jmath}' + A'_z\,\vec{k}' \quad \text{et} \quad \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} = \dot{A}'_x\,\vec{\imath}' + \dot{A}'_y\,\vec{\jmath}' + \dot{A}'_z\,\vec{k}'$$

Dérivation temporelle d'un vecteur

Cas général

Soient $\mathcal{R}\ (\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\,)$, $\mathcal{R}'\ (\vec{\imath}\,',\ \vec{\jmath}\,',\ \vec{k}\,')$ et $\vec{a}(t)$ un vecteur quelconque.

$$\vec{A} = A_x\,\vec{\imath} + A_y\,\vec{\jmath} + A_z\,\vec{k} \quad \text{et} \quad \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{A}_x\,\vec{\imath} + \dot{A}_y\,\vec{\jmath} + \dot{A}_z\,\vec{k}$$

$$\vec{A} = A'_x\,\vec{\imath}\,' + A'_y\,\vec{\jmath}\,' + A'_z\,\vec{k}\,' \quad \text{et} \quad \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} = \dot{A}'_x\,\vec{\imath}\,' + \dot{A}'_y\,\vec{\jmath}\,' + \dot{A}'_z\,\vec{k}\,'$$

Dérivons dans $\mathcal{R}$ l'expression de $\vec{A}$ projetée sur la base $(\vec{\imath}\,',\ \vec{\jmath}\,',\ \vec{k}\,')$:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A'_x\,\vec{\imath}\,' + A'_y\,\vec{\jmath}\,' + A'_z\,\vec{k}\,'\right)\right|_{\mathcal{R}} \\
&= \dot{A}'_x\,\vec{\imath}\,' + A'_x\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\imath}\,'}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} + \dot{A}'_y\,\vec{\jmath}\,' + A'_y\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\jmath}\,'}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} + \dot{A}'_z\,\vec{k}\,' + A'_z\left.\frac{\mathrm{d}\vec{k}\,'}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} + \left(A'_x\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\imath}\,'}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} + A'_y\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\jmath}\,'}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} + A'_z\left.\frac{\mathrm{d}\vec{k}\,'}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}\right)
\end{aligned}$$

Dérivation temporelle d'un vecteur

Dérivées dans $\mathcal{R}$ des vecteurs de la base associée à $\mathcal{R}'$

$\mathcal{R}' \ / \ \mathcal{R} =$ translation + rotation

La translation ne modifie pas les vecteurs de base et

$$\| \vec{\imath}\,' \| = 1 = \text{cst} \quad \Longrightarrow \quad \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\imath}\,'}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{\imath}\,' \quad \Longrightarrow$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(A'_x\, \vec{\imath}\,' + A'_y\, \vec{\jmath}\,' + A'_z\, \vec{k}\,' \right)$$

Formule de Varignon : formule de la dérivation composée $\heartsuit+$

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{A}}$$

Dérivation temporelle d'un vecteur

Dérivées dans $\mathcal{R}$ des vecteurs de la base associée à $\mathcal{R}'$

$\mathcal{R}' \;/\; \mathcal{R} =$ translation + rotation

La translation ne modifie pas les vecteurs de base et

$$\| \vec{\imath}\,' \| = 1 = \text{cst} \quad \Longrightarrow \quad \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\imath}\,'}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{\imath}\,' \quad \Longrightarrow$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(A'_x\,\vec{\imath}\,' + A'_y\,\vec{\jmath}\,' + A'_z\,\vec{k}\,' \right)$$

Formule de Varignon : formule de la dérivation composée ♡+

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{A}}$$

Attention

Les dérivées temporelles d'un **même** vecteur par rapport à deux référentiels différents définissent deux vecteurs **différents**.

Propriété des vitesses angulaires

Changement de point de vue

D'après la relation précédente : $\vec{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'} = -\,\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$

Composition des vitesses angulaires

Les vecteurs rotation sont **additifs** : $\vec{\omega}_{2/0} = \vec{\omega}_{2/1} + \vec{\omega}_{1/0}$

Démonstration :

$$\left\{\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_0 &= \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_1 + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{A} \\
\left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_0 &= \left(\left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_2 + \vec{\omega}_{2/1} \wedge \vec{A}\right) + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{A} \\
\left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_0 &= \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_2 + \left(\vec{\omega}_{2/1} + \vec{\omega}_{1/0}\right) \wedge \vec{A}
\end{aligned}\right.$$

$\forall \vec{A}$ on a aussi $\left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_0 = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_2 + \vec{\omega}_{2/0} \wedge \vec{A}$

Loi de composition des vitesses

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ (de centres O et O') et un point M :

$$\begin{aligned}\vec{v}(M)\big|_{\mathcal{R}} &= \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} + \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} \\ &= \vec{v}(O')\big|_{\mathcal{R}} + \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}\end{aligned}$$

La vitesse d'entraînement

$$\vec{v_e}(M)\big|_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{v}(O')\big|_{\mathcal{R}} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

Finalement $\quad \vec{v}(M)\big|_{\mathcal{R}} = \vec{v}(M)\big|_{\mathcal{R}'} + \vec{v_e}(M)\big|_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$

Loi de composition des accélérations

Calcul

$$\vec{a}(M)\big|_{\mathcal{R}} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{\mathcal{R}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{v}(M)\big|_{\mathcal{R}'} + \vec{v}(O')\big|_{\mathcal{R}} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)\bigg|_{\mathcal{R}}$$

On a la somme de trois termes :

- $$\frac{\mathrm{d}\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}'}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{\mathcal{R}} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}'}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}\wedge\vec{v}(M)\big|_{\mathcal{R}'}$$
- $$\frac{\mathrm{d}\vec{v}(O')|_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{\mathcal{R}} = \vec{a}(O')\big|_{\mathcal{R}}$$
- $$\frac{\mathrm{d}\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)}{\mathrm{d}t}\Bigg|_{\mathcal{R}} = \frac{\mathrm{d}\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)}{\mathrm{d}t}\Bigg|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\wedge\overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}\wedge\vec{v}(M)\big|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)$$

Loi de composition des accélérations

Résultat

L'accélération d'entraînement

$$\vec{a_e}(M)\Big|_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{a}(O')\Big|_{\mathcal{R}} + \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$$

Finalement $\quad \vec{a}(M)\Big|_{\mathcal{R}} = \vec{a}(M)\Big|_{\mathcal{R}'} + \vec{a_e}(M)\Big|_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} + \vec{a_c}(M)\Big|_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$

L'accélération de Coriolis (ou accélération complémentaire)

$$\vec{a_c}(M)\Big|_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = 2\,\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)\Big|_{\mathcal{R}'} \qquad \heartsuit+$$

C'est la vitesse dans $\mathcal{R}'$ et heureusement !

Attention aux indices *e* et *c* : soignez l'écriture !

Utilisation du point coïncident

Intérêt du point coïncident

Danger : $\vec{v}\,(\text{enfant})\big|_{\text{sol}} = \vec{v}\,(\text{enfant})\big|_{\text{manège}} + \vec{v}\,(\text{manège})\big|_{\text{sol}}$

Définition

Le **point coïncident** est le point P **fixe dans** $\mathcal{R}'$, qui à l'instant t est confondu avec le point matériel M.

$\vec{v}\,(\text{manège})\big|_{\text{sol}}$ = vitesse du point P du plancher où se trouve l'enfant à l'instant t considéré

Utilisation du point coïncident

Intérêt du point coïncident

Danger : $\vec{v}\,(\text{enfant})\big|_{\text{sol}} = \vec{v}\,(\text{enfant})\big|_{\text{manège}} + \vec{v}\,(\text{manège})\big|_{\text{sol}}$

Définition

Le **point coïncident** est le point P **fixe dans** $\mathcal{R}'$, qui à l'instant t est confondu avec le point matériel M.

$\vec{v}\,(\text{manège})\big|_{\text{sol}}$ = vitesse du point P du plancher où se trouve l'enfant à l'instant t considéré

Propriétés fondamentales

$$\text{Vitesse d'entraînement} = \vec{v}\,(P)\,\big|_{\mathcal{R}}$$

$$\text{Accélération d'entraînement} = \vec{a}\,(P)\,\big|_{\mathcal{R}}$$

Démonstration : il suffit d'utiliser les formules précédentes avec $\vec{v}\,(P)\big|_{\mathcal{R}'} = \vec{0}$ et $\vec{a}\,(P)\big|_{\mathcal{R}'} = \vec{0}$

Vitesse et accélération d'entraînement

Référentiels en translation

$$\vec{\omega} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad$$ **tous** les points de $\mathcal{R}'$ ont les **mêmes** vecteurs vitesse et accélération dans $\mathcal{R}$

C.Q.F.R.

Lorsque les deux référentiels sont en **translation** l'un par rapport à l'autre, les champs de vitesse d'entraînement et d'accélération d'entraînement sont **uniformes** et il n'y a pas d'accélération de Coriolis.

$$\vec{v_e} = \vec{v}\,(O')\big|_{\mathcal{R}} \qquad \text{et} \qquad \vec{a_e} = \vec{a}\,(O')\big|_{\mathcal{R}} \qquad \text{et} \qquad \vec{a_c} = \vec{0}$$

$$\vec{\omega} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{a_c} = 2\,\vec{\omega} \wedge \vec{v}\big|_{\mathcal{R}'} = \vec{0}$$

Vitesse et accélération d'entraînement

Référentiels en rotation uniforme

On choisit $O = O'$ sur l'axe de rotation et la base cylindrique avec $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \omega\,\vec{e_z}$: $\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) = \omega\,\vec{e_z} \wedge \left(\omega\,HM\,\vec{e_\theta}\right) = -\,\omega^2\,HM\,\vec{e_\rho}$

Vitesse et accélération d'entraînement

Référentiels en rotation uniforme

On choisit $O = O'$ sur l'axe de rotation et la base cylindrique avec $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \omega\,\vec{e_z}$: $\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) = \omega\,\vec{e_z} \wedge \left(\omega\,HM\,\vec{e_\theta}\right) = -\,\omega^2\,HM\,\vec{e_\rho}$

Quel que soit le mouvement du point M, le point P décrit un cercle, de centre H (projeté orthogonal de M sur l'axe) dans $\mathcal{R}$.

Les formules retrouvées

$$\begin{aligned}
\vec{v_e}(t) &= \vec{v}\,(P\in\mathcal{R}')\big|_{\mathcal{R}} = \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OM} = \omega\,HM(t)\,\vec{e_\theta} \\
\vec{a_e}(t) &= \vec{a}\,(P\in\mathcal{R}')\big|_{\mathcal{R}} = -\,\omega^2\,HM\,\vec{e_\rho} = -\,\omega^2\,\overrightarrow{HM}(t)
\end{aligned}$$

Dans le cas où la rotation n'est pas uniforme, il faut ajouter un terme dans l'accélération, la vitesse d'entraînement reste inchangée.

Exercice

Énoncé

Le référentiel du sol noté $\mathcal{R}$ est muni d'un repère d'espace $(O,\, \overrightarrow{e_x},\, \overrightarrow{e_y},\, \overrightarrow{e_z})$. Une voiture est considérée comme un référentiel $\mathcal{R}'$, muni d'un repère d'espace $(O',\, \overrightarrow{e_x}',\, \overrightarrow{e_y}',\, \overrightarrow{e_z}')$. À l'instant $t = 0$, les points O et O' sont confondus et les vecteurs $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$, $\overrightarrow{e_z}$ coïncident respectivement avec $\overrightarrow{e_x}'$, $\overrightarrow{e_y}'$, $\overrightarrow{e_z}'$.

La voiture initialement immobile se déplace (dans $\mathcal{R}$) avec une accélération constante $\overrightarrow{a} = A\,\overrightarrow{e_x}$ $(A > 0)$. Elle se déplace ensuite avec une vitesse constante $\overrightarrow{v} = V\,\overrightarrow{e_x}$ $(V > 0)$, enfin la voiture entre sur un rond point et entame un virage à gauche à l'instant t_0. Le point O' de la voiture décrit alors un cercle de rayon R dans le référentiel $\mathcal{R}$ avec une vitesse de norme constante égale à V.

Dans cette voiture un point matériel M effectue un mouvement tel que $\overrightarrow{O'M}(t) = X \sin(\omega_0 t)\,\overrightarrow{e_y}'$. Déterminer la vitesse et l'accélération du point M dans le référentiel $\mathcal{R}$ pour les trois phases du mouvement.

Solution

Translation

Accélération constante

Le référentiel $\mathcal{R}'$ est en **translation** par rapport à $\mathcal{R}$, on a donc

$$\overrightarrow{v_e} = A\,t\,\overrightarrow{e_x} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{a_e} = A\,\overrightarrow{e_x} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{a_c} = \overrightarrow{0}$$

$$\begin{aligned}
\left.\overrightarrow{v}\,(M)\right|_{\mathcal{R}} &= X\omega_0\cos(\omega_0 t)\,\overrightarrow{e_y} + A\,t\,\overrightarrow{e_x} \\
\left.\overrightarrow{a}\,(M)\right|_{\mathcal{R}} &= -X\omega_0^2\sin(\omega_0 t)\,\overrightarrow{e_y} + A\,\overrightarrow{e_x}
\end{aligned}$$

Solution

Translation

Accélération constante

Le référentiel $\mathcal{R}'$ est en **translation** par rapport à $\mathcal{R}$, on a donc

$$\overrightarrow{v_e} = A\,t\,\overrightarrow{e_x} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{a_e} = A\,\overrightarrow{e_x} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{a_c} = \overrightarrow{0}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}\,(M)\big|_{\mathcal{R}} &= X\omega_0\cos(\omega_0 t)\,\overrightarrow{e_y} + A\,t\,\overrightarrow{e_x} \\ \vec{a}\,(M)\big|_{\mathcal{R}} &= -X\omega_0^2\sin(\omega_0 t)\,\overrightarrow{e_y} + A\,\overrightarrow{e_x} \end{aligned}$$

Vitesse constante

$\mathcal{R}'$ est en **translation rectiligne et uniforme** par rapport à $\mathcal{R}$, donc $\overrightarrow{v_e} = V\,\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{a_e} = \overrightarrow{a_c} = \overrightarrow{0}$

$$\begin{aligned} \vec{v}\,(M)\big|_{\mathcal{R}} &= X\omega_0\cos(\omega_0 t)\,\overrightarrow{e_y} + V\,\overrightarrow{e_x} \\ \vec{a}\,(M)\big|_{\mathcal{R}} &= -X\omega_0^2\sin(\omega_0 t)\,\overrightarrow{e_y} \end{aligned}$$

Exercice

Rotation uniforme

$\mathcal{R}'$ est en *rotation uniforme* par rapport à $\mathcal{R}$ autour du centre C du rond point avec $\vec{\omega} = \frac{V}{R}\,\vec{e_z}$. Le point coïncident décrit un cercle.

$\rho(t) = CM(t) = R - X\sin(\omega_0 t)$ et $\forall t \quad \vec{e_\rho} = -\vec{e_y}\,'$ et $\vec{e_\theta} = +\vec{e_x}\,'$

$$\vec{v_e} = \rho\,\omega\,\vec{e_\theta} = \frac{\rho}{R}\,V\,\vec{e_x}\,'$$

$$\vec{a_e} = -\rho\,\omega^2\,\vec{e_\rho} = +\frac{\rho}{R}\,\frac{V^2}{R}\,\vec{e_y}\,'$$

pour calculer l'accélération de Coriolis, il faut utiliser la formule :

$$\begin{aligned}\vec{a_c} &= 2\,\vec{\omega} \wedge \vec{v}\,|_{\mathcal{R}'} = 2\left(\frac{V}{R}\,\vec{e_z}\right) \wedge \left(X\omega_0\cos(\omega_0 t)\,\vec{e_y}\,'\right)\\ &= -2\,\frac{X}{R}\,V\,\omega_0\cos(\omega_0 t)\,\vec{e_x}\,'\end{aligned}$$

Remarque

on fait tous les calculs avec le point coïncident (sans se soucier du point M) et tout **à la fin**, on remplace ρ par la distance CM.

Subtilités

Attention

$\omega \neq \dot{\theta}$ car en général la trajectoire de M n'est pas un cercle.

Subtilités

Attention

$\omega \neq \dot{\theta}$ car en général la trajectoire de M n'est pas un cercle.

Subtil, vous avez dit subtil...

En général, l'accélération n'est pas égale à la dérivée par rapport au temps de la vitesse d'entraînement

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_e}}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\overrightarrow{v_e}(t+\mathrm{d}t) - \overrightarrow{v_e}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\overrightarrow{v}\left(P_{t+\mathrm{d}t}(t+\mathrm{d}t)\right) - \overrightarrow{v}\left(P_t(t)\right)}{t+\mathrm{d}t - t}$$

$$\overrightarrow{a_e}(t) = \frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{v}\left(P_t(t)\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\overrightarrow{v}\left(P_t(t+\mathrm{d}t)\right) - \overrightarrow{v}\left(P_t(t)\right)}{t+\mathrm{d}t - t}$$

car P_t est **fixe** dans le référentiel $\mathcal{R}'$!

Subtilités

Attention

$\omega \neq \dot{\theta}$ car en général la trajectoire de M n'est pas un cercle.

Subtil, vous avez dit subtil...

En général, l'accélération n'est pas égale à la dérivée par rapport au temps de la vitesse d'entraînement

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v_e}}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\vec{v_e}(t+\mathrm{d}t) - \vec{v_e}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{v}\left(P_{t+\mathrm{d}t}(t+\mathrm{d}t)\right) - \vec{v}\left(P_t(t)\right)}{t+\mathrm{d}t\, - \, t}$$

$$\vec{a_e}(t) = \frac{\mathrm{d}\,\vec{v}\left(P_t(t)\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{v}\left(P_t(t+\mathrm{d}t)\right) - \vec{v}\left(P_t(t)\right)}{t+\mathrm{d}t\, - \, t}$$

car P_t est **fixe** dans le référentiel $\mathcal{R}'$!

Très important

La trajectoire du point P n'a **rien** à voir avec celle du point M, en particulier $\vec{v_e}$ ne dépend pas de $\vec{v}\,(M)\big|_{\mathcal{R}'}$!

Bilan

Il faut bien **définir** et distinguer les choses suivantes :

- Le référentiel de définition d'un vecteur ;
- Le référentiel par rapport auquel s'effectue la dérivation ;
- La base de projection.

Bilan

Il faut bien **définir** et distinguer les choses suivantes :

- Le référentiel de définition d'un vecteur ;
- Le référentiel par rapport auquel s'effectue la dérivation ;
- La base de projection.

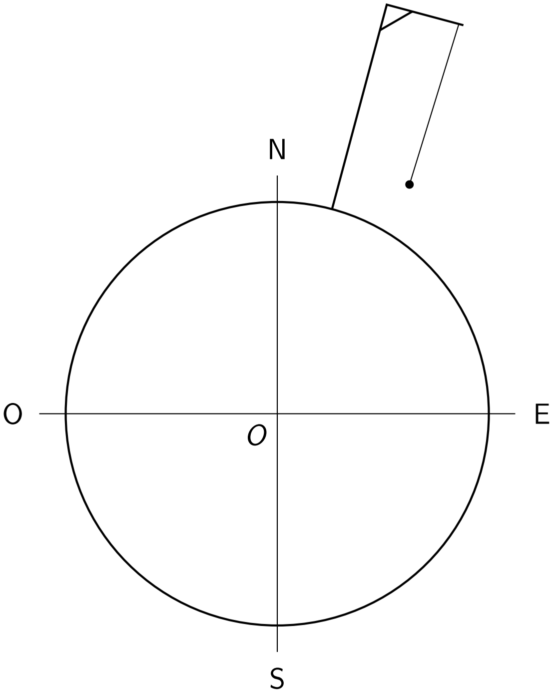
Le poids des mots : les lois de composition sont parfois écrites

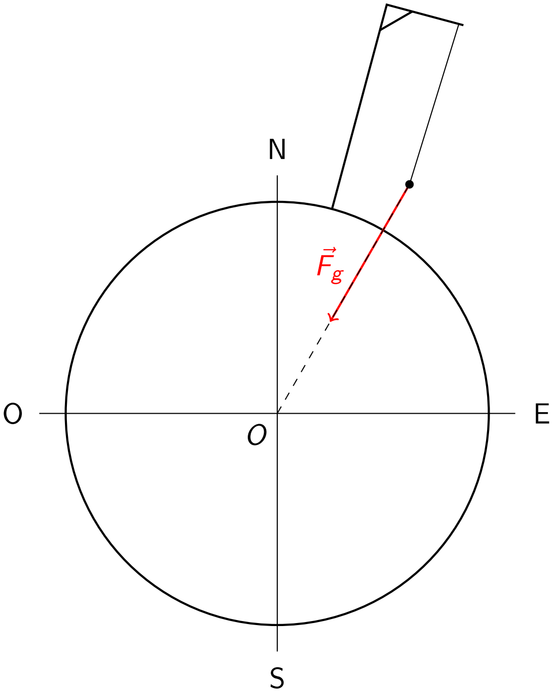
$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v_e} \qquad \text{et} \qquad \vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a_e} + \vec{a_c}$$

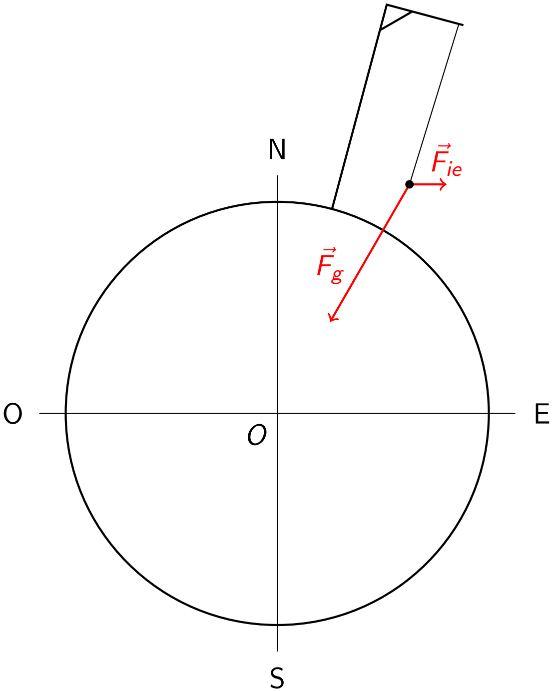
Attention :

Il n'existe pas de référentiel « absolu » ou « relatif », en cinématique tous les référentiels sont **équivalents** : on peut reverser le rôle de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.

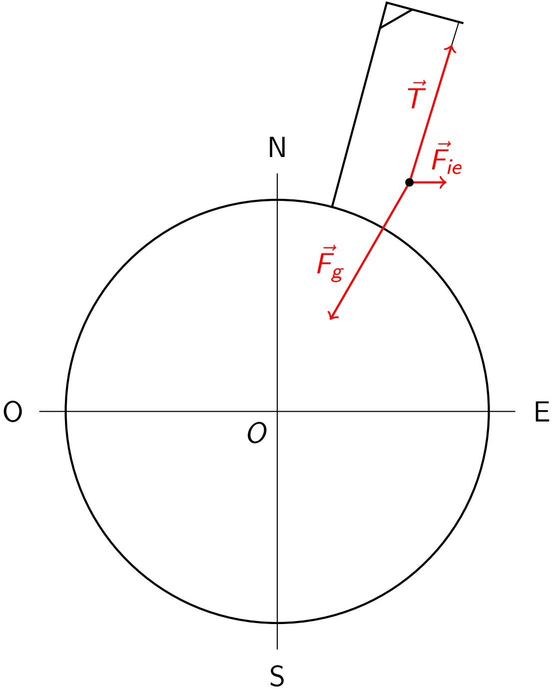
Un référentiel n'est pas *intrinsèquement* immobile ou en mouvement : la notion de mouvement est **relative**.


N
O
O
E
S

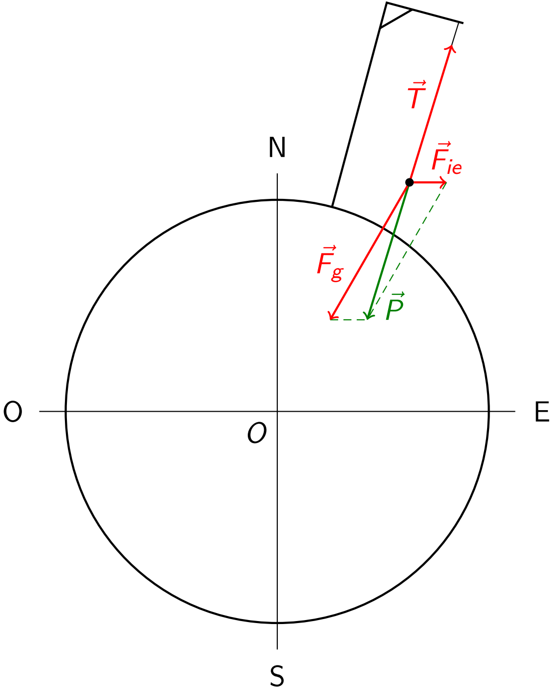

N
O
E
S
O
$\vec{F}_g$



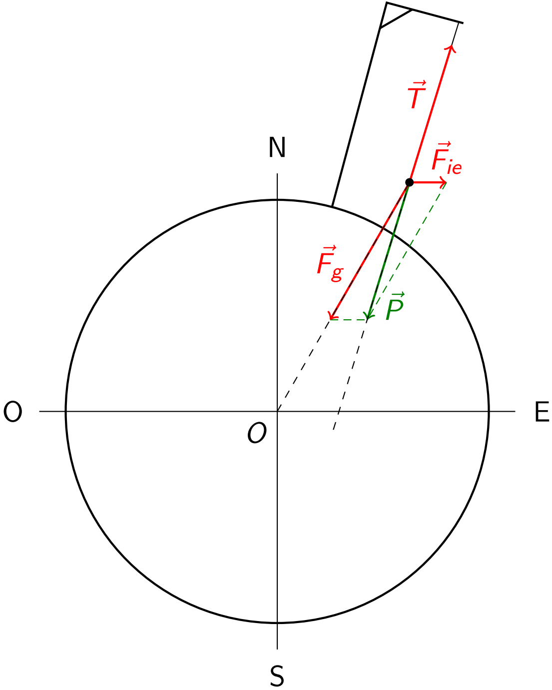
N
$\vec{F}_{ie}$
$\vec{F}_g$
O
O
E
S

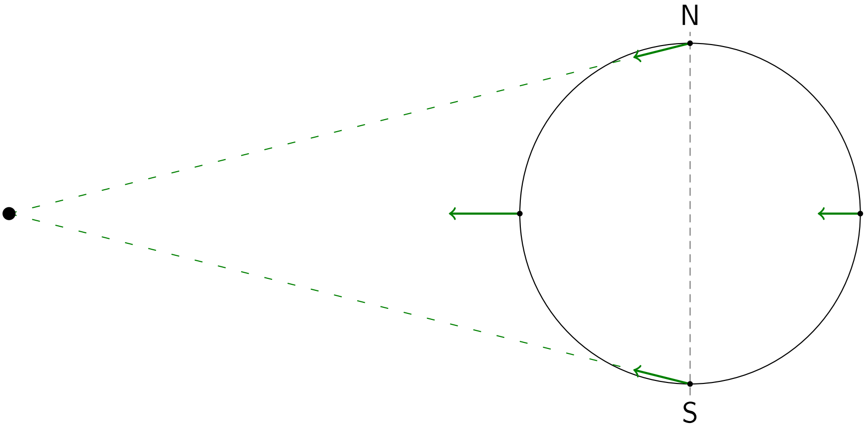


$\vec{T}$
N
$\vec{F}_{ie}$
$\vec{F}_g$
O
O
E
S

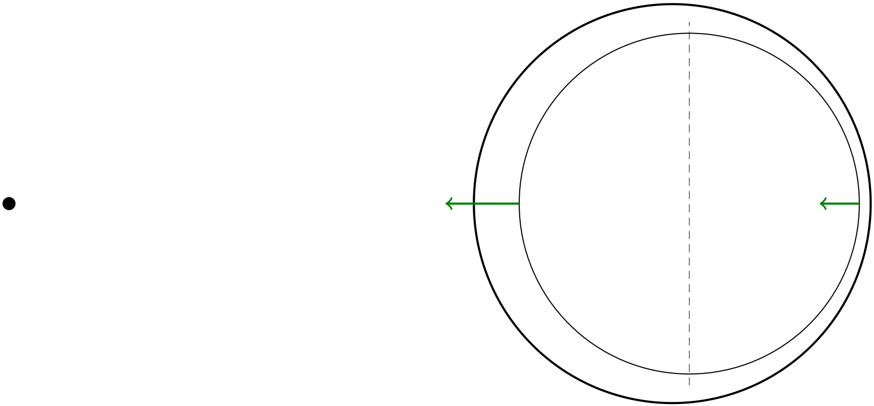


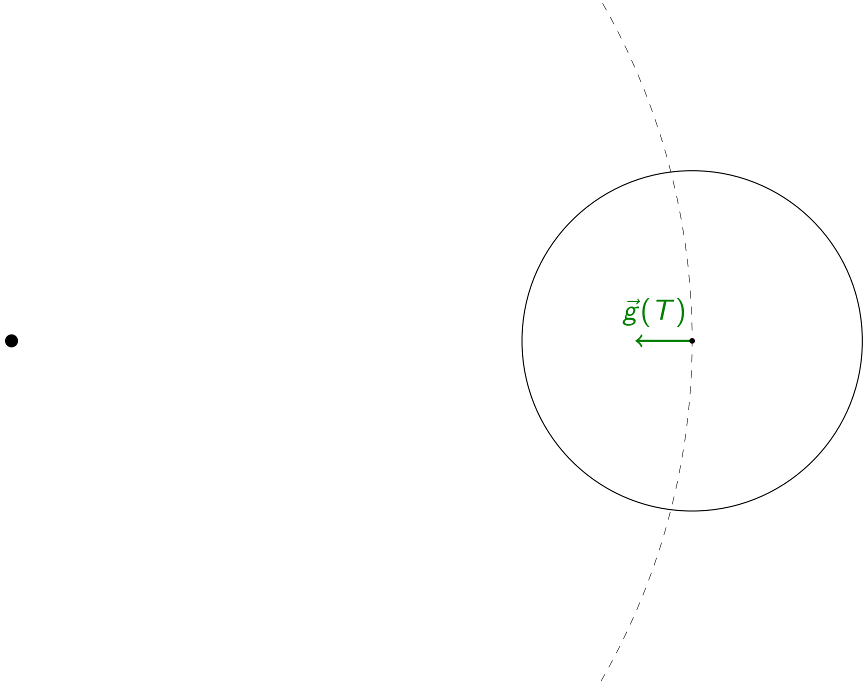
MP*

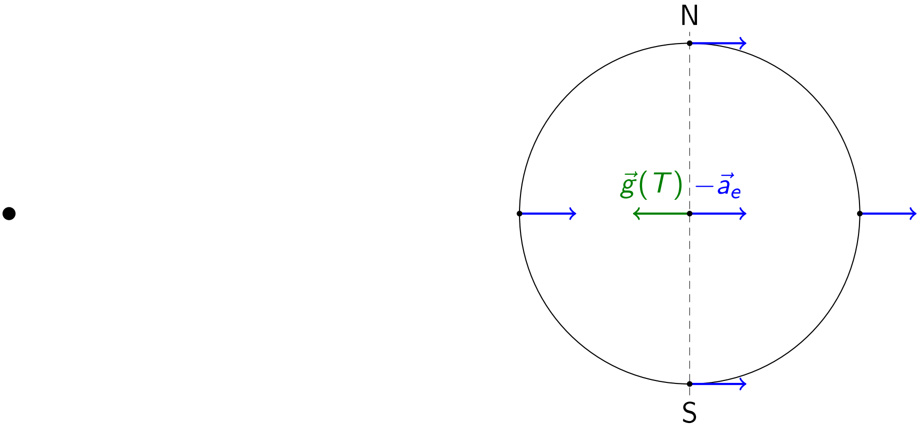

N
$\vec{T}$
$\vec{F}_{ie}$
$\vec{F}_g$
$\vec{P}$
O
O
E
S

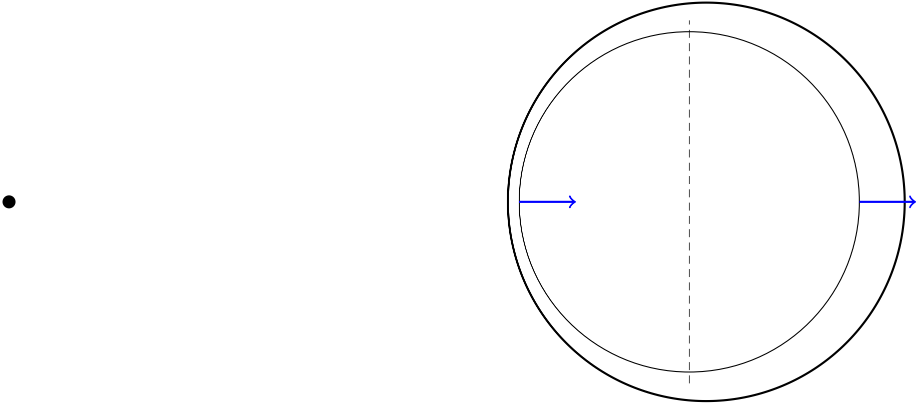


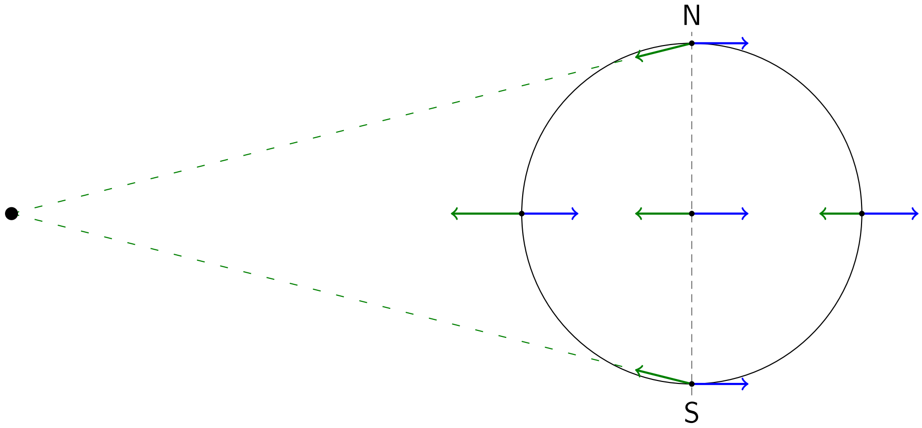
MP*



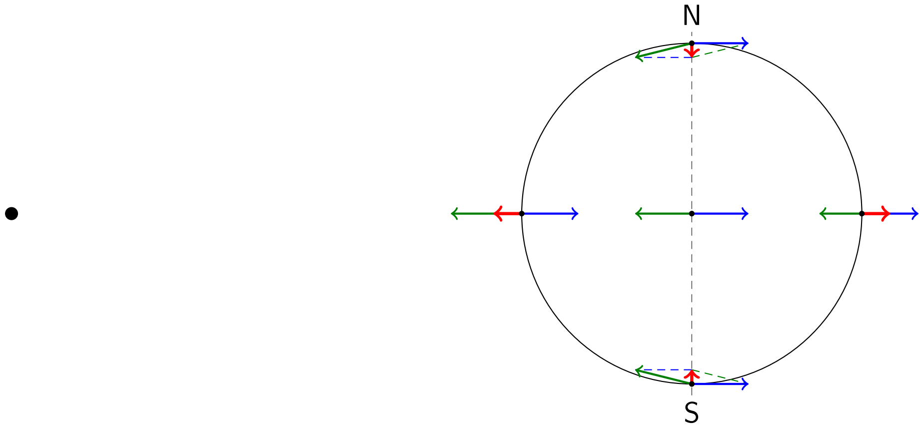

$\vec{g}(T)$

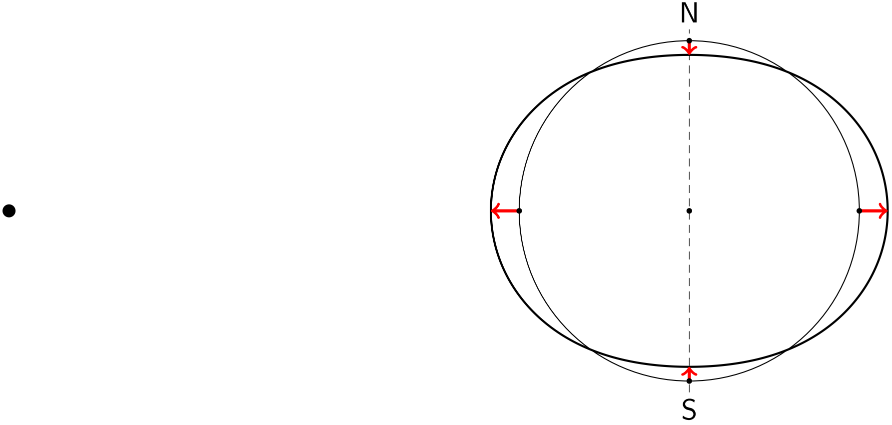

N
$\vec{g}(T)$
$-\vec{a}_e$
S





MP*


N
S


N
S