BEC à 2 composantes

BM1

1/ $\frac{E}{V} = \underbrace{\sqrt{\rho_1\rho_2}\cos\theta\,\hbar\Omega}_{}+\frac{g}{2}(\rho_1^2+\rho_2^2)+g_{12}\rho_1\rho_2$

valeur minimale = $-\hbar|\Omega|\sqrt{\rho_1\rho_2}$ (obtenue pour $\theta=\pi$ si $\Omega>0$ et $\theta=0$ si $\Omega<0$)

on pose $\rho=\rho_1+\rho_2$ et $n=\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho}$ alors $\rho_{(1/2)}=\frac{1}{2}\rho(1\pm n)$

et $\rho_1\rho_2=\frac{1}{4}\rho^2(1-n^2)$ $\quad \rho_1^2+\rho_2^2=\frac{\rho^2}{2}(1+n^2)$

donc $e(n)=-\hbar|\Omega|\frac{\rho}{2}\sqrt{1-n^2}+\frac{g\rho^2}{4}(1+n^2)+g_{12}\frac{1}{4}\rho^2(1-n^2)$

et $\frac{e(n)}{\frac{1}{4}g\rho^2}=-2\frac{\hbar|\Omega|}{g\rho}\sqrt{1-n^2}+1+n^2+\frac{g_{12}}{g}(1-n^2)$

on pose $\omega=\frac{\hbar|\Omega|}{g\rho}$ et $\frac{g_{12}}{g}=\gamma+1$ cela donne

$$\boxed{\frac{e(n)}{\frac{1}{4}g\rho^2}=2+\gamma(1-n^2)-2\omega\sqrt{1-n^2}}$$

par la suite on notera $f(n)$ cette fonction.

$\frac{\partial f}{\partial n}=2n\left(\frac{\omega}{\sqrt{1-n^2}}-\gamma\right)$ nul pour $n=0$ et pour $\sqrt{1-n^2}=\frac{\omega}{\gamma}$ soit $n^2=1-\frac{\omega^2}{\gamma^2}$

comme $|n|<1$ $\sqrt{1-n^2}<1$ et cette égalité impose $\omega<\gamma$

$\frac{\partial^2 f}{\partial n^2}=2\left(\frac{\omega}{\sqrt{1-n^2}}-\gamma\right)+\frac{2\omega n^2}{(1-n^2)^{3/2}}$

donc $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial n^2}\right)_{n=0}=2(\omega-\gamma)$

$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial n^2}\right)_{\sqrt{1-n^2}=\frac{\omega}{\gamma}}=2\gamma\,\frac{\gamma^2-\omega^2}{\omega^2}$ positif (puisque cet extremum n'existe que si $\gamma>\omega$)

on a $f(0) = 2 + \gamma - 2\omega$

et $f\begin{pmatrix}\text{autre}\\ \text{extremum}\end{pmatrix} = 2 + \gamma \dfrac{\omega^2}{\gamma^2} - 2\omega \dfrac{\omega}{\gamma}$

$$= f(0) + \underbrace{\gamma\left(\frac{\omega^2}{\gamma^2} - 1\right) - 2\omega\left(\frac{\omega}{\gamma} - 1\right)}$$

comme $\dfrac{\omega}{\gamma} < 1$ il est facile de vérifier que ce terme est négatif : cela s'écrit :

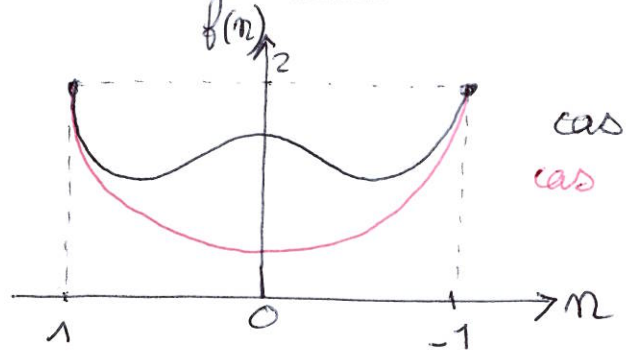
$$\gamma\left(\frac{\omega}{\gamma}+1\right)\left(\frac{\omega}{\gamma}-1\right) < 2\omega\left(\frac{\omega}{\gamma}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \gamma\left(\frac{\omega}{\gamma}+1\right) > 2\omega \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\omega}{\gamma}+1 > 2\frac{\omega}{\gamma}$$

qui est évident

et enfin, pour faire le tracé il est utile de remarquer que $f(\pm 1) = 2$ et que $\left.\dfrac{\partial f}{\partial n}\right)_{\pm 1} = \pm\infty$

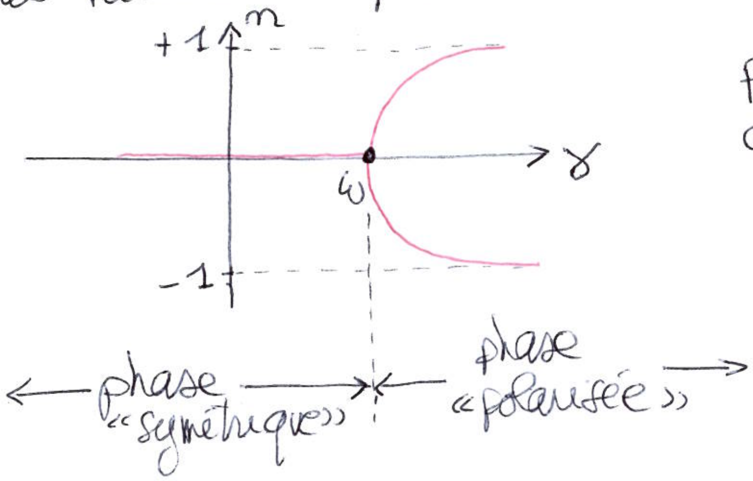
d'où l'allure :



cas $\gamma > \omega$

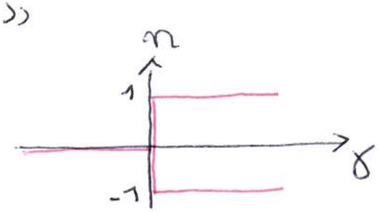
cas $\gamma < \omega$

on voit que pour $\gamma > \omega$ l'état d'énergie minimale n'est pas l'état symétrique $\rho_1 = \rho_2$, mais un état "polarisé" avec $n \neq 0$. n est le paramètre d'ordre de notre transition qui est pilotée par les valeurs respectives de ω et γ. On a :



pour $\gamma > \omega$ on a $n = \pm\sqrt{1 - \dfrac{\omega^2}{\gamma^2}}$

remarque : pour $\omega = 0$ on a : la transition devient du 1er ordre



transition de demixtion : $(\Omega \equiv 0)$

→ approche macroscopique :

$*$ $E_{sép} = \frac{g}{2}\left(\frac{N_1^2}{V_1} + \frac{N_2^2}{V_2}\right)$ avec $V_1 + V_2 = V$

$\frac{dE_{sép}}{dV_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{N_1^2}{V_1^2} = \frac{N_2^2}{V_2^2}$ soit, puisque $V_1 + V_2 = V$ $\begin{cases} V_1 = \frac{N_1 V}{N_1+N_2} \\ V_2 = \frac{N_2 V}{N_1+N_2} \end{cases}$

et donc $E_{sép} = \frac{g}{2}\frac{(N_1+N_2)^2}{V}$

$*$ $E_{hom} = \frac{g}{2}\frac{N_1^2 + N_2^2}{V} + g_{12}\frac{N_1 N_2}{V} = \overbrace{\frac{g}{2V}(N_1+N_2)^2}^{E_{sép}} + (g_{12}-g)\frac{N_1 N_2}{V}$

donc la phase "séparée" est favorable lorsque $g_{12} > g$ cad $\gamma > 0$ comme on l'a obtenu en fin de la question précédente.

→ approche microscopique : $\rho_{1/2}(x) = \rho/2\,(1 \pm n(x))$

$*$ $|\vec\nabla\psi_{1/2}|^2 = \left|\frac{d}{dx}\sqrt{\rho_{1/2}}\right|^2 = \frac{\rho}{2}\left|\frac{d}{dx}\sqrt{1\pm n}\right|^2 = \frac{\rho}{2}\left|\frac{1}{2}\frac{\pm n_x}{\sqrt{1\pm n}}\right|^2$

et $\frac{\hbar^2}{2m}\left(|\vec\nabla\psi_1|^2 + |\vec\nabla\psi_2|^2\right) = \frac{\hbar^2}{8m}\rho\frac{n_x^2}{1-n^2} = \frac{\xi^2 g\rho^2}{8}\frac{n_x^2}{1-n^2}$ (où ξ est défini par $\frac{\hbar^2}{m\xi^2} = g\rho$)

$*$ $g/2\,(\rho_1^2 + \rho_2^2) + g_{12}\rho_1\rho_2 = \frac{g}{2}(\rho_1+\rho_2)^2 + (g_{12}-g)\rho_1\rho_2 = \frac{g}{2}\rho^2 + \gamma\frac{g\rho^2}{4}(1-n^2)$

donc $E[n] = L_y L_z \frac{g\rho^2}{4}\int_{\mathbb{R}} dx\left\{\frac{\xi^2}{2}\frac{n_x^2}{1-n^2} + \gamma(1-n^2) + 2\right\}$

on pose $n(x) = \sin\varphi(x)$ où $\varphi(x) \in [-\pi/2\,; +\pi/2]$ alors $n_x = \varphi_x\cos\varphi$ et l'intégrale ci-dessus s'écrit :

$$\int_{\mathbb{R}} dx\left\{\frac{\xi^2}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \gamma\cos^2\varphi + 2\right\}$$

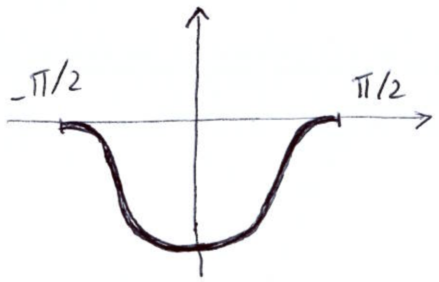
et alors

$\frac{\delta E}{\delta\varphi(x)} = 0$ s'écrit : $-\xi^2\frac{d^2\varphi}{dx^2} - 2\gamma\cos\varphi\sin\varphi = 0$

en multipliant par $\frac{d\varphi}{dx}$ on trouve une intégrale première. Il est également adapté de poser $X = x/\xi$. On a alors :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dX}\right)^2 - \gamma \cos^2\varphi = E_{cl}$$

et pour $\gamma > 0$ le potentiel effectif $-\gamma\cos^2\varphi$ a l'allure :



on pourra trouver une solution avec les bonnes conditions limites ($\varphi \to \pm\pi/2$ lorsque $x \to \pm\infty$) si l'on prend $E_{cl} = 0$.

(rien de tel n'est bien-sûr possible pour $\gamma < 0$ = logique dans ce cas on préfère la phase homogène)

alors, pour $E_{cl} = 0$ on écrit :

$$\int dX = + \int \frac{d\varphi}{|\varphi'|} = \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \ln \frac{1 + \operatorname{tg}\varphi/2}{1 - \operatorname{tg}\varphi/2}$$

le signe correspond à nos conditions limites

pour calculer $\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$ on pose $t = \operatorname{tg}\varphi/2$

alors $dt = \frac{1}{2}(1+t^2)\,d\varphi$

et $\cos\varphi = \frac{\cos^2\varphi/2 - \sin^2\varphi/2}{\cos^2\varphi/2 + \sin^2\varphi/2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ on a donc :

$$\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \int \frac{2\,dt}{1-t^2} = \int\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)dt = \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$$

en inversant la relation entre X et φ on obtient :

$$\operatorname{tg}\varphi/2 = \frac{e^{\sqrt{2\gamma}X} - 1}{e^{\sqrt{2\gamma}X} + 1} \quad \text{soit} \quad \boxed{\varphi(X) = 2\arctg \frac{e^{\sqrt{2\gamma}X} - 1}{e^{\sqrt{2\gamma}X} + 1}}$$

la constante d'intégration est fixée de telle sorte que $\varphi(X=0) = 0$ (cad $n(X=0) = 0$).

ensuite il faut calculer $n(x) = \sin\varphi = \sin[2 \operatorname{arctg} Z]$

où Z est une notation pour : $\dfrac{e^{\sqrt{2\gamma}x} - 1}{e^{\sqrt{2\gamma}x} + 1}$

$$\sin[2\operatorname{arctg} Z] = 2 \underbrace{\sin(\operatorname{arctg} Z)}\underbrace{\cos(\operatorname{arctg} Z)} = \frac{2Z}{1+Z^2} = 2\,\frac{\dfrac{e^{\sqrt{2\gamma}x}-1}{e^{\sqrt{2\gamma}x}+1}}{1+\left(\dfrac{e^{\sqrt{2\gamma}x}-1}{e^{\sqrt{2\gamma}x}+1}\right)^2}$$

$$\frac{Z}{\sqrt{1+Z^2}} \qquad \frac{1}{\sqrt{1+Z^2}}$$

en effet posons $\alpha = \operatorname{arctg} Z \iff \operatorname{tg}\alpha = Z$ et $\alpha \in [-\pi/2, +\pi/2]$

alors $\sin(\operatorname{arctg} Z) = \sin\alpha$ et $Z = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} \iff \sin^2\alpha = \dfrac{Z^2}{1+Z^2}$

$\iff \sin\alpha = \dfrac{Z}{\sqrt{1+Z^2}}$

(car $\sin\alpha$ et Z ont le m signe)

$\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$

et $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{1+Z^2}}$

alors un calcul simple donne $n(x) = \dfrac{e^{2\sqrt{2\gamma}x} - 1}{e^{2\sqrt{2\gamma}x} + 1} = \operatorname{th}\left(\sqrt{2\gamma}\,\dfrac{x}{\xi}\right)$

on voit qu'on s'est donné bcp de peine pour arriver à un résultat simple - Il y a + simple :

reportons de $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d\varphi}{dx}\right)^2 - \gamma\cos^2\varphi = 0$

on pose $n = \sin\varphi$: $\dfrac{dn}{dx} = \dfrac{d\varphi}{dx}\cos^2\varphi$ et $\cos^2\varphi = 1 - n^2$ on a

donc pour équation :

$$\left(\frac{dn}{dx}\right)^2 - 2\gamma(1-n^2)^2 = 0$$

et comme les conditions limites correspondent à une fct croissante cela s'écrit : $\dfrac{dn}{dx} = \sqrt{2\gamma}\,(1-n^2)$

soit $\sqrt{2\gamma}\int dx = \int \dfrac{dn}{1-n^2} = \operatorname{argth} n$ soit $\boxed{n(x) = \operatorname{th}\left[\sqrt{2\gamma}\,\dfrac{x}{\xi}\right]}$

on a : $E[n] = L_y L_z \dfrac{g\rho^2}{4} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} dx \left\{ \frac{\xi^2}{2} \frac{n_x^2}{1-n^2} + \gamma(1-n^2) + 2 \right\}$

ce 2 donne, avec le facteur multiplicatif, une contribution

$$L_x L_y L_z \, g \frac{\rho^2}{2} = \frac{g}{2}\left(\frac{N}{V}\right)^2 V = E_{sép}$$

on peut donc écrire :

$$\boxed{E[n] = L_y L_z \, \sigma + E_{sép} \text{ avec } \sigma = \frac{g\rho^2}{4} \int_{\mathbb{R}} dx \left\{ \frac{\xi^2}{2} \frac{n_x^2}{1-n^2} + \gamma(1-n^2) \right\}}$$

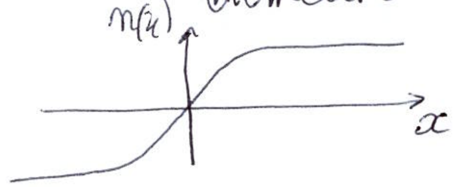
or, on a vu que pour la solution qui nous intéresse, $n_x^2 = 2\gamma(1-n^2)^2$

soit $\dfrac{\xi^2}{2} \dfrac{n_x^2}{1-n^2} = \gamma(1-n^2)$ cad $\sigma = \dfrac{g\rho^2}{2} \gamma \displaystyle\int_{\mathbb{R}} dx \, (1 - n^2(x))$

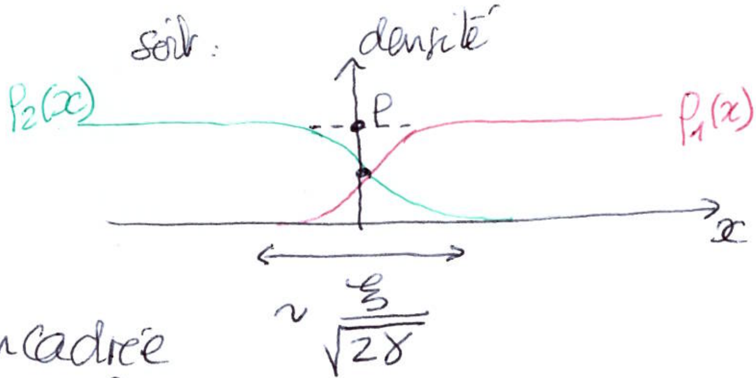
avec $n(x) = \operatorname{th}\left[\sqrt{2\gamma}\,\frac{x}{\xi}\right]$. En posant $y = \sqrt{2\gamma}\,\frac{x}{\xi}$ cela donne :

$$\sigma = \frac{g\rho^2}{2} \xi \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dy \left[1 - \operatorname{th}^2(y)\right]}_{[\operatorname{th} y]_{-\infty}^{+\infty} = 2} = g\rho^2 \xi \sqrt{\frac{\gamma}{2}}$$

c'est la tension de surface associée au ~~domaine~~ mur de domaine :



soit :



la formule "microscopique" encadrée ci-dessus montre que l'approche macroscopique de la question précédente est valable car la correction correspondant à l'énergie de surface de l'interface (non prise en compte dans l'approche microscopique) est négligeable à la limite thermodynamique.

Effondrement du condensat :

On se place dans le cas $\gamma < \omega$: d'après les résultats de la 1e question cela correspond à la situation homogène $n \equiv 0$, donc $\rho_1 = \rho_2$ et $N_1 = N_2 \left(= \frac{N}{2}\right)$. Mais ici les atomes sont concentrés sur un petit domaine de volume v :

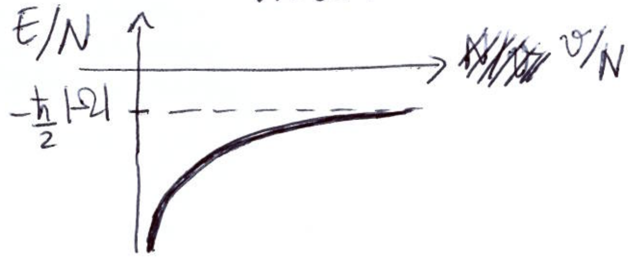
$$\rho_1(\vec{r}) = \rho_2(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{N}{2v} & \text{si } \vec{r} \in \text{domaine} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour déterminer l'énergie de cette configuration on ne tient pas compte des termes en gradient dans l'expression de l'énergie (on a vu dans un exemple précédent qu'ils sont négligeables à la limite thermodyn) et on a alors :

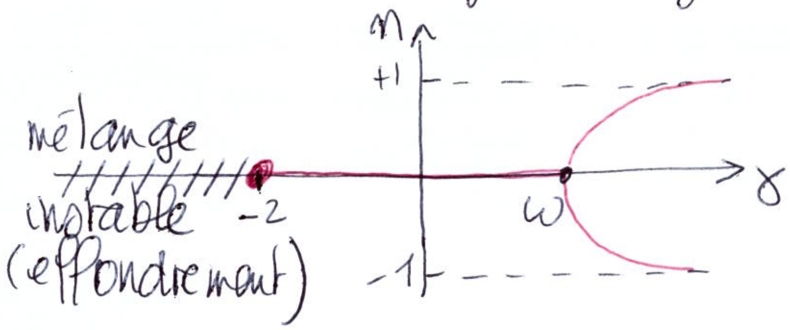
$$E = -\hbar|\Omega|\left(\frac{N}{2v}\right) \cdot v + \frac{g}{2}\left[\left(\frac{N}{2v}\right)^2 + \left(\frac{N}{2v}\right)^2\right] v + g_{12}\left(\frac{N}{2v}\right)^2 v$$

$$E = -\hbar|\Omega|\frac{N}{2} + (g + g_{12})\frac{N^2}{4v}$$

dans cette expression v est un paramètre variationnel, et si $g_{12} < -g$ (soit $\gamma < -2$) alors on a :



Donc l'énergie minimale est obtenue pour $v = 0$. le condensat s'effondre sur un domaine d'extension nulle. Physiquement cela correspond à une situation où l'attraction inter-espèce l'emporte sur la répulsion intra-espèce. La figure de la question 1d doit donc être modifiée légèrement :



BMP

juste pour moi : petit test de cohérence :
si dans la dernière question on a $g+g_{12}>0$ alors l'énergie minimale est atteinte pour v maximal : $v=V$
et alors :

$$\frac{E}{V} = -\hbar|\Omega|\frac{N}{2V} + (g+g_{12})\frac{N^2}{4V^2}$$

soit
$$e = -\hbar|\Omega|\rho/2 + (g+g_{12})\rho^2/4$$
$$= -\omega g\rho^2/2 + g\rho^2/4 + g(\gamma+1)\rho^2/4 \quad \left(\text{car } g_{12}=g(\gamma+1)\right)$$

et on a bien : $\dfrac{e}{g\rho^2/4} = -2\omega + 2 + \gamma$

comme dans la formule (2) de l'énoncé lorsque $n \equiv 0$