

## EXAMEN de PHÉNOMÈNES COLLECTIFS COMPLEXES

Durée : 3 heures

Les calculatrices et les documents de toute origine sont autorisés.

## Mélange binaire de condensats de Bose-Einstein

On considère une vapeur atomique ultrafroide composée du mélange de deux états hyperfins du même élément chimique (un boson, par exemple  $^{87}\text{Rb}$ ). À température assez faible (on se place dans toute la suite à  $T = 0$ ) le système subit une condensation de Bose-Einstein. Tout se passe alors comme si on avait deux condensats, décrits chacun par un paramètre d'ordre complexe:  $\psi_1(\vec{r})$  et  $\psi_2(\vec{r})$ . Les paramètres d'ordre ne sont pas conservés, en ce sens qu'une des composantes peut se transformer en l'autre (en modifiant son spin nucléaire). En d'autres termes, en utilisant les conventions de normalisation usuelles dans ce domaine, les nombres d'atome de "type 1"  $N_1 = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r |\psi_1(\vec{r})|^2$  et de "type 2"  $N_2 = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r |\psi_2(\vec{r})|^2$  ne sont pas fixés *a priori*, mais par la minimisation d'une énergie. Par contre la somme  $N_1 + N_2$  est fixée *a priori*.

En l'absence de potentiel de piégeage l'énergie du système se met sous la forme

$$E = \int d^3r \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} |\vec{\nabla}\psi_1|^2 + \frac{\hbar^2}{2m} |\vec{\nabla}\psi_2|^2 + \frac{\hbar\Omega}{2} (\psi_1\psi_2^* + \psi_1^*\psi_2) + \frac{g}{2} |\psi_1|^4 + \frac{g}{2} |\psi_2|^4 + g_{12} |\psi_1|^2 |\psi_2|^2 \right\}. \quad (1)$$

Dans cette expression le terme en  $\Omega$  correspond à un couplage (pilote expérimentalement selon une procédure qui ne sera pas détaillée ici) qui transforme les atomes de "type 1" en atomes de "type 2" et *vice versa*. La constante  $g$  ( $g > 0$ ) décrit l'interaction intra-espèce (atomes 1 entre eux ou atomes 2 entre eux). La constante  $g_{12}$  décrit l'interaction inter-espèce (atomes 1 avec atomes 2). Son signe peut être positif (répulsion entre les deux espèces) ou négatif (attraction inter-espèce).

1/ On considère une configuration homogène et stationnaire et on écrit  $\psi_1(\vec{r}) = \sqrt{\rho_1}$  et  $\psi_2(\vec{r}) = \sqrt{\rho_2} \exp\{i\theta\}$ , où  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  et  $\theta$  sont des constantes ( $\theta \in [0, 2\pi]$ ).  $\rho_i$  est la densité: nombre d'atomes  $i$  par unité de volume ( $i = 1$  ou  $2$ ) et  $\theta$  la phase relative entre les paramètres d'ordre.

- (a) Écrire l'énergie par unité de volume du système, soit  $e(\rho_1, \rho_2, \theta) = E(\rho_1, \rho_2, \theta)/V$  (on note  $V$  le volume du système). Montrer que lorsque  $\Omega > 0$ ,  $e(\rho_1, \rho_2, \theta)$  est minimale pour  $\theta = \pi$ . Que se passe-t-il si  $\Omega < 0$ ? Écrire la forme de l'énergie volumique minimisée par rapport aux variations de  $\theta$  (soit  $e(\rho_1, \rho_2) = \min \{e(\rho_1, \rho_2, \theta) ; \theta \in [0, 2\pi]\}$ ) valable pour  $\Omega$  positif et négatif.
- (b) On travaille à densité totale  $\rho = \rho_1 + \rho_2$  fixée. On note  $\rho_1 = \frac{1}{2}\rho \times (1 + n)$  et  $\rho_2 = \frac{1}{2}\rho \times (1 - n)$  avec donc  $n \in [-1, 1]$ . Montrer que l'énergie par unité de volume  $e(\rho_1, \rho_2)$  déterminée en fin de question précédente s'écrit alors

$$e(\rho_1, \rho_2) = \frac{1}{4}g\rho^2 \left\{ 2 + \gamma - \gamma n^2 - 2\omega\sqrt{1 - n^2} \right\} \equiv e(n, \rho), \quad (2)$$

où on a noté  $\omega = \hbar|\Omega|/(g\rho)$  et  $\gamma = (g_{12} - g)/g$ .

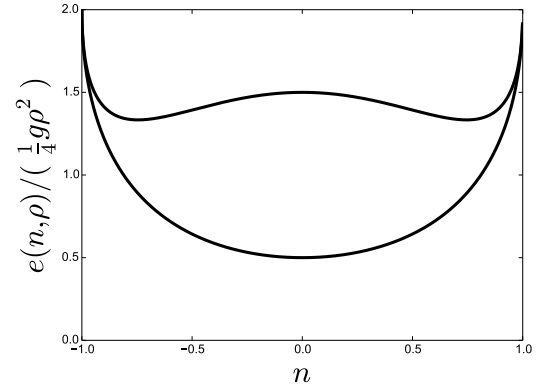


Figure 1: Deux allures possibles pour la courbe  $e(n, \rho)/(\frac{1}{4}g\rho^2)$  tracée en fonction de  $n$ . Vous identifierez pour quelles valeurs de  $\omega$  et  $\gamma$  on obtient l'un ou l'autre des deux comportements.

- (c) Étudier la courbe (2) pour  $n \in [-1, 1]$  (on pourra s'aider des indications fournies dans la figure 1). Préciser la nature de ses extréma. Montrer que pour certaines valeurs des paramètres  $\gamma$  et  $\omega$  (à préciser) le système subit une transition de phase du second ordre correspondant à la brisure d'une symétrie que vous identifierez.
- (d) Tracer alors l'allure de la densité relative  $n$  en fonction du paramètre  $\gamma$  ( $\gamma \in \mathbb{R}$ ). Commentez le graphe.

**2/** D'après la réponse à la dernière question, le comportement de  $n$  en fonction de  $\gamma$  est particulier lorsque  $\omega = 0$ . Expliquer pourquoi. Quel est alors l'ordre de la transition ?

En fait, il s'agit dans ce cas d'une transition de démixtion: comme les atomes ne peuvent plus changer d'espèce ( $\Omega = 0$ ), le nombre  $N_i$  d'atome de l'espèce  $i$  est fixé ( $i = 1$  ou  $2$ ), et pour certaines valeurs relatives de  $g$  et  $g_{12}$  il est plus favorable énergétiquement que le système se scinde en deux sous-systèmes: l'un de volume  $V_1$  contenant les  $N_1$  particules de "type 1", et l'autre de volume  $V_2$  contenant les  $N_2$  particules de "type 2" (avec  $V_1 + V_2 = V$ ).

Écrire la valeur de l'énergie du système  $E_{\text{sép}}$  dans cette configuration séparée en fonction de  $N_1$ ,  $N_2$  et  $V$  (attention il faut la minimiser par rapport aux variations de  $V_1$  par exemple, en prenant alors  $V_2 = V - V_1$ ). Comparer avec la valeur de l'énergie dans la configuration homogène  $E_{\text{hom}}$  obtenue à la question 1.(a) (avec ici  $\Omega = 0$ ). Conclure.

**3/** On veut étudier plus en détail le profil de l'interface entre les deux sous systèmes dans le cas de la configuration "séparée" ( $\Omega = 0$  dans toute cette question, comme dans la précédente). On suppose donc que  $\rho$  est une constante et que  $n$  dépend de  $x$  seulement, avec les conditions limites  $n(x \rightarrow \pm\infty) = \pm 1$ . Le système a une extension  $L_y$  selon  $y'Oy$ ,  $L_z$  selon  $z'Oz$  et infinie selon  $x'Ox$ .

- (a) Montrer que l'énergie (1) du système s'écrit (pour  $\Omega = 0$  et  $\theta = C^{\text{ste}}$ )

$$E[n] = L_y L_z \frac{g\rho^2}{4} \int_{\mathbb{R}} dx \left\{ \frac{\xi^2}{2} \frac{1}{1-n^2} \left( \frac{dn}{dx} \right)^2 + \gamma(1-n^2) + 2 \right\}, \quad (3)$$

où l'on a défini la longueur de relaxation  $\xi$  par  $\hbar^2/(m\xi^2) = g\rho$ .

- (b) Pour continuer, il est plus simple de poser momentanément  $n(x) = \sin \varphi(x)$  avec  $\varphi(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Écrire  $E[\varphi]$ , puis déterminer l'équation que vérifie  $\varphi(x)$  en imposant  $\delta E/\delta \varphi(x) = 0$ .
- (c) Montrer que l'équation obtenue admet une intégrale première dont vous donnerez une interprétation en terme d'une particule classique fictive soumise à un potentiel effectif. Montrer que si l'on veut vérifier les conditions limites  $\varphi(x \rightarrow \pm\infty) = \pm\pi/2$  alors le signe de  $\gamma$  est fixé<sup>1</sup> ainsi que la constante

<sup>1</sup>Ce signe correspond-il au critère de démixtion que vous avez obtenu à la question 2/ ?

d'intégration. Vérifier que l'intégrale première s'écrit alors

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\sqrt{2\gamma}}{\xi} \cos \varphi . \quad (4)$$

- (d) Faite un changement de fonction pour revenir à  $n(x)$  puis intégrer<sup>2</sup>. Tracer le graphe de  $n(x)$ . Sur un second schéma tracer celui de  $\rho_1(x)$  et de  $\rho_2(x)$ . Quel nom donner à cette configuration ?

4/ On veut mieux comprendre l'articulation entre l'approche macroscopique de la question 2/ et celle, plus microscopique, de la question 3/. Montrer que l'énergie (3) du système se met sous la forme<sup>3</sup>

$$E[n] = \sigma L_y L_z + E_{\text{sép}} , \quad (5)$$

où  $E_{\text{sép}}$  est l'énergie de la configuration séparée qui a été déterminée à la question 2/ et

$$\sigma = \frac{g\rho^2}{4} \int_{\mathbb{R}} dx \left\{ \frac{\xi^2}{2} \frac{1}{1-n^2} \left( \frac{dn}{dx} \right)^2 + \gamma(1-n^2) \right\} . \quad (6)$$

- (a) Quel nom peut-on donner à  $\sigma$  ? Calculer sa valeur explicite pour la solution  $n(x)$  déterminée à la question 3/.<sup>4</sup>
- (b) Expliquer en utilisant (5) si l'approche microscopique change la discussion macroscopique de la condition de démixtion obtenue à la question 2/ (justifier votre réponse: si oui, comment ? si non, pourquoi ?).

5/ Effondrement du condensat. On revient maintenant à une configuration où  $\Omega \neq 0$ . Pour certaines valeurs des paramètres le mélange homogène (caractérisé par  $n$  qui a été déterminé à la question 1(d)) n'est pas stable: le condensat peut, dans certains cas, s'effondrer sur lui même.

Considérons donc une configuration telle que  $\gamma < \omega$  avec  $N_1 = N_2 = N/2$  (expliquez pourquoi) où les atomes de type 1 ou 2 n'occupent qu'un petit sous-domaine (de volume  $v$ ) de l'espace. On a donc  $\rho_1(\vec{r}) = \rho_2(\vec{r}) = N/(2v)$  à l'intérieur du domaine de volume  $v$  et  $\rho_1(\vec{r}) = \rho_2(\vec{r}) = 0$  ailleurs.

- (a) Déterminer l'énergie d'une telle configuration et fonction de  $N$ ,  $v$  et des paramètres du système. Pour faire ce calcul on ne tiendra pas compte dans l'expression (1) des termes en gradient, pourriez-vous expliquer pourquoi ?
- (b) Dans cette approche,  $v$  est un paramètre caractéristique de la solution qui doit être choisi de manière à minimiser l'énergie du système. Déterminer alors pour quelles valeurs de  $g$  et  $g_{12}$  on assiste à l'effondrement de toutes les particules composant le système dans un volume d'extension négligeable.<sup>5</sup>

<sup>2</sup>Indication : On pourra utiliser  $\int dn (1-n^2)^{-1} = \text{arctanh}(n)$ .

<sup>3</sup>Il faudra utiliser une technique de régularisation appropriée pour prendre correctement en compte un terme *a priori* infini dans (3).

<sup>4</sup>Indication :  $\int_{\mathbb{R}} (1 - \tanh^2(y)) dy = 2$ .

<sup>5</sup>Bien-sûr le processus ne continue pas *ad infinitum*: lorsque la densité augmente beaucoup, des collisions à trois corps (non pris en compte dans (1)) éjectent des atomes de la zone d'expérience. Ces collisions à trois corps deviennent importantes à haute densité car le vrai fondamental du système à  $T = 0$  n'est pas gazeux, mais solide. L'état gazeux n'est que métastable.