

# De l'analyse de Fourier aux ondelettes

Georges KOEPFLER

**Mastère : Traitement de l'Information et Complexité du Vivant (TICV)**  
Co-diplomation : Université Paris Descartes - ENIT-Tunis - Université Tunis El Manar



2010-11

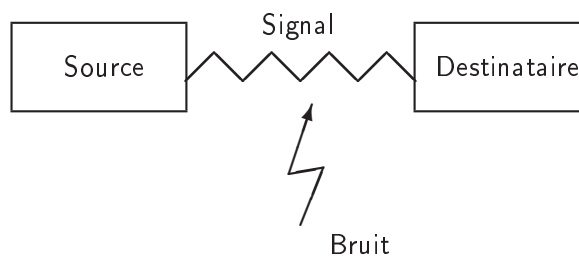
## Plan :

- 1 Introduction. Rappels analyse de Fourier
- 2 Analyse temps-fréquence
- 3 Analyse temps-échelle
- 4 Bases orthonormées d'ondelettes

## Introduction

### Définitions

- Un *signal* est la représentation physique de l'information qu'il convoie de la source vers la destination.
- Les *signaux analogiques* représentent l'information par une grandeur « continue » ; ils sont définis sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^2$ .
- Les *signaux discrets* représentent l'information par des suites de nombres ; ils sont définis sur les entiers  $\mathbb{Z}$ .



## Introduction

Un signal monodimensionnel est une fonction d'une variable, notée  $t$ , qui prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### Définitions

Le *support* d'un signal  $f$  défini sur  $\mathbb{R}$  est l'adhérence de l'ensemble des points sur lesquels la fonction ne s'annule pas :

$$\text{supp}(f) = \overline{\{t \in \mathbb{R} / f(t) \neq 0\}}.$$

Un signal est *stable* s'il est intégrable :

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \iff \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt < \infty.$$

Un signal est *d'énergie finie* s'il est de carré intégrable :

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \iff E_f = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < \infty.$$

## Introduction : Fourier

### Transformée de Fourier de $f$ :

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \hat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\nu t} dt.$$

### Transformée de Fourier de inverse :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\nu) e^{i\nu t} d\nu.$$

**Remarque** : Si l'on note  $\mathcal{F}_{cl}$  la transformée de Fourier usuelle (i.e. avec  $e^{\pm 2i\pi\nu t}$ ), on a la relation  $\hat{f}(\nu) = \mathcal{F}_{cl}(f)(\nu/2\pi)$ . Cette relation permet d'obtenir immédiatement tout le formulaire pour la transformée de Fourier réduite.

## Introduction : Fourier

### Formule de Plancherel

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\nu) \overline{\hat{g}(\nu)} d\nu$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu$$

*Remarque* :  $E_{\hat{f}} = 2\pi E_f$ .

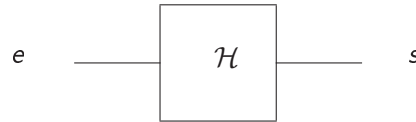
### Convolution

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(s)g(t-s) ds = \int_{\mathbb{R}} f(t-u)g(u) du = (g * f)(t)$$

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g} \quad \text{et} \quad \widehat{fg} = \frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{g}$$

## Introduction : Fourier

Un *filtre linéaire*  $\mathcal{H}$  est un opérateur qui associe à un signal en entrée  $e$ , un signal en sortie  $s$  :  $s = \mathcal{H}[e]$ .



Si  $\mathcal{H}$  est *linéaire* :  $\mathcal{H}[\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2] = \lambda_1 \mathcal{H}[e_1] + \lambda_2 \mathcal{H}[e_2]$   
et *stationnaire* :  $s = \mathcal{H}[e] \Rightarrow \tau_d s = \mathcal{H}[\tau_d e]$ , où  $\tau_d e(t) = e(t - d)$ .  
Alors  $\mathcal{H}$  est caractérisé par sa *réponse impulsionnelle*  $h$  :

$$s = h * e \iff \hat{s} = \hat{h} \hat{e}.$$

$\hat{h}$  est appelée *réponse fréquentielle* du filtre  $\mathcal{H}$ .

## Introduction : Fourier, interprétation

On peut écrire

$$\hat{f}(\nu) = A_f(\nu) e^{i\Phi_f(\nu)}, \text{ où } A_f(\nu) \geq 0 \text{ et } \Phi_f(\nu) \in ]-\pi, +\pi], (\text{mod } 2\pi)$$

Donc

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} A_f(\nu) e^{i(\Phi_f + \nu t)} d\nu.$$

$f$  s'écrit comme « somme infinie » des fonctions trigonométriques de toutes les fréquences qui forment son *spectre*.

Si  $\hat{h}(\nu) = A_h(\nu) e^{i\Phi_h(\nu)}$ ,

$$g = h * f \quad \text{vérifie} \quad A_g(\nu) = A_h(\nu) A_f(\nu) \text{ et } \Phi_g = \Phi_h + \Phi_f.$$

Ceci permet de *filtrer* (enlever ou amplifier) certaines des fréquences qui composent  $f$  !

Note :  $\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(t) dt$  = composante basse fréquence de  $f$ .

## Introduction : Transformée de Fourier rapide (FFT)

On pose  $x(n) = f(t_0 + n\Delta t)$ ,  $0 \leq n \leq N - 1$ , *signal discret de durée finie*.

### Transformée de Fourier discrète

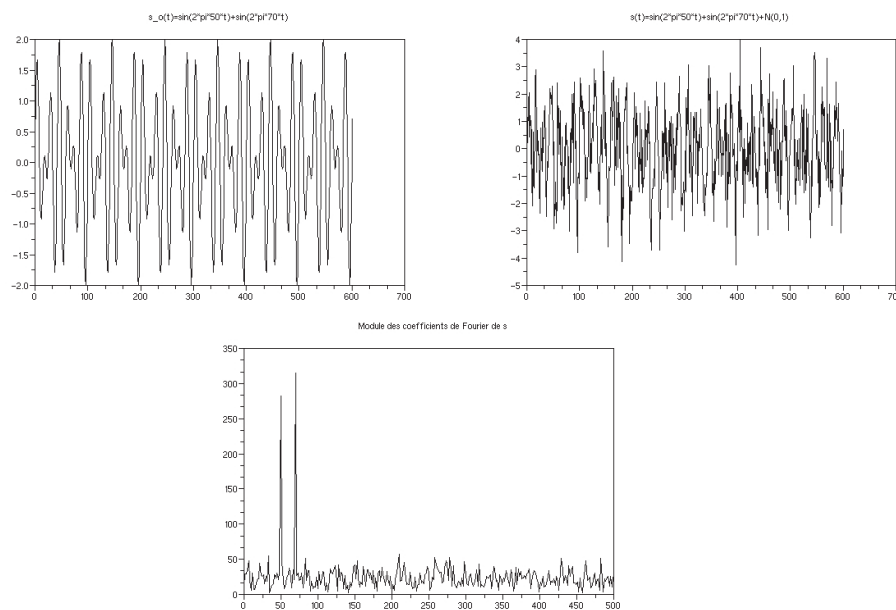
$$\text{analyse : } \hat{x}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1;$$

$$\text{synthèse : } x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}(k) e^{i2\pi kn/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

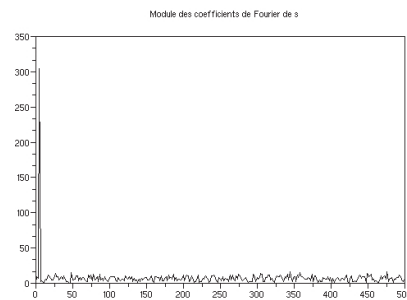
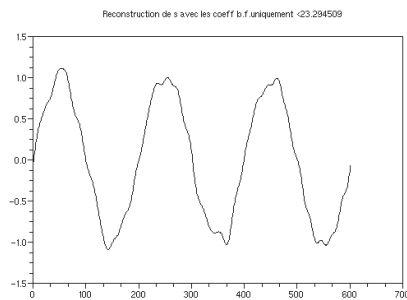
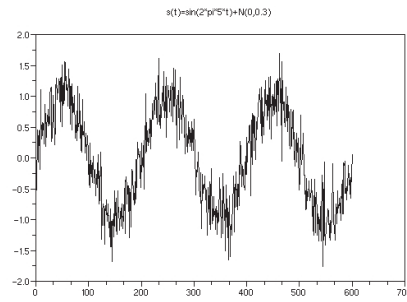
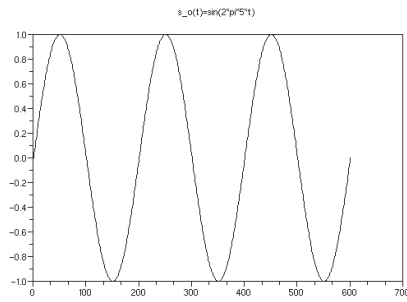
L'implémentation directe des ces formules nécessite  $O(N^2)$  opérations élémentaires (+, \*).

En réorganisant les calculs, on obtient l'algorithme de la transformée de Fourier rapide qui est en  $O(N \ln(N))$ .

## Analyse des fréquences d'un signal $s(t)$

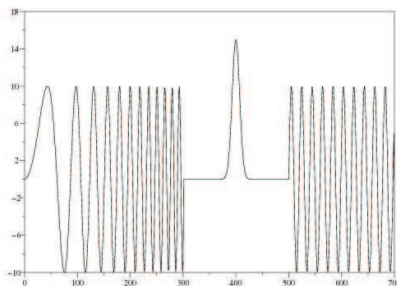


## Débruitage d'un signal $s(t)$

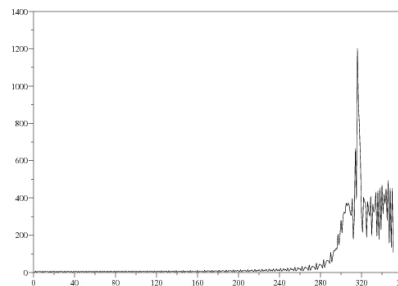


## Introduction : Fourier

L'analyse de Fourier est globale!



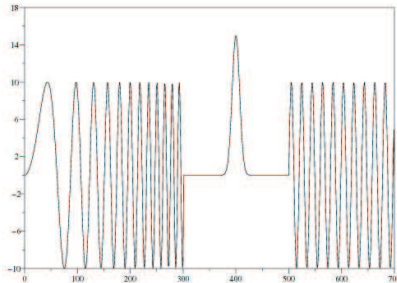
Signal  $s(t)$   
 $\sin(\alpha t^2) | e^{-\beta t^2} | \sin(t)$



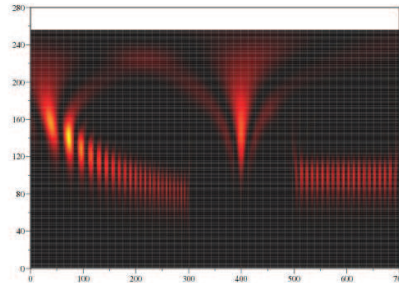
Module de  $\hat{s}(\nu)$

## Introduction : Fourier

L'analyse de Fourier est **globale**!



$$\text{Signal } s(t) \\ \sin(\alpha t^2) \mid e^{-\beta t^2} \mid \sin(t)$$



Analyse temps-échelle

(échelle=1/fréquence)

Besoin de « localiser » les fréquences!

## Analyse temps-fréquence

**Buts :**

- 1 Localiser les variations du signal.
- 2 Traiter un signal au fur et à mesure.

D'où l'introduction de représentations temps-fréquences,  
par exemple la transformée de Fourier à fenêtre glissante.

Comment « localiser » un signal en temps et en fréquence ?

Quelle précision peut-on espérer pour  $(t, \nu)$  ?

## Fenêtre temps-fréquence

Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , on rappelle que  $E_f = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = E_{\hat{f}}/2\pi$ .

On définit :

le **temps moyen** de  $f$  : 
$$t_f = \frac{1}{E_f} \int_{\mathbb{R}} t |f(t)|^2 dt ;$$

la **fréquence moyenne** de  $f$  : 
$$\nu_f = \frac{1}{E_{\hat{f}}} \int_{\mathbb{R}} \nu |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu ;$$

la **durée utile** de  $f$  : 
$$\Delta_t^2(f) = \frac{1}{E_f} \int_{\mathbb{R}} (t - t_f)^2 |f(t)|^2 dt ;$$

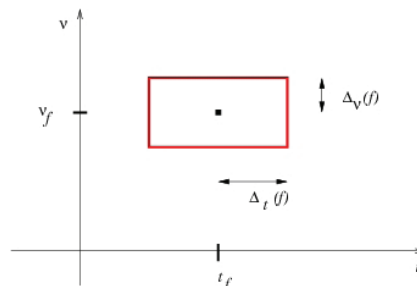
la **bande utile** de  $f$  : 
$$\Delta_\nu^2(f) = \frac{1}{E_{\hat{f}}} \int_{\mathbb{R}} (\nu - \nu_f)^2 |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu .$$

## Fenêtre temps-fréquence

Le couple  $(f, \hat{f})$  se concentre sur la **fenêtre temps-fréquence** :

$$[t_f - \Delta_t(f), t_f + \Delta_t(f)] \times [\nu_f - \Delta_\nu(f), \nu_f + \Delta_\nu(f)]$$

d'aire  $4\Delta_t(f)\Delta_\nu(f)$ .

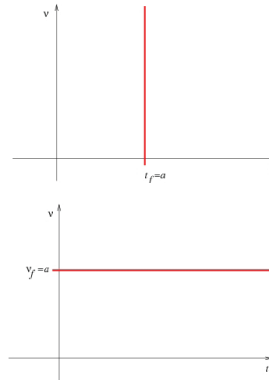




## Fenêtre temps-fréquence

Même si les quantités  $t_f$ ,  $\nu_f$ ,  $\Delta_t(f)$  ou  $\Delta_\nu(f)$  ne sont pas définies, il peut être intéressant d'utiliser la fenêtre temps-fréquence pour illustrer le comportement de  $(f, \hat{f})$ .

- 1 La fonction  $f(t) = \begin{cases} 1 & t = a \\ 0 & t \neq a \end{cases}$  est localisée en temps ( $t_f = a$ ), mais pas en fréquence.
- 2 La fonction  $f(t) = e^{iat} = \cos(at) + i \sin(at)$  n'est pas localisée en temps, mais en fréquence ( $\nu_f = a$ ).



## Fenêtre temps-fréquence de la gaussienne

On pose  $g(t) = c e^{-\frac{\alpha}{2}t^2}$ , où  $\alpha > 0$  et  $c = (\alpha/\pi)^{\frac{1}{4}}$ .  
La constante  $c$  est choisie de façon à avoir  $E_g = 1$ .

On montre que  $\hat{g}(\nu) = \frac{\sqrt{2}}{c} e^{-\frac{1}{2\alpha}\nu^2}$ .

On a  $t_f = \nu_f = 0$ ,  $\Delta_t(f) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$  et  $\Delta_\nu(f) = \sqrt{\frac{\alpha}{2}}$ .

La gaussienne se concentre sur  $\left[-\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}, \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\right] \times \left[-\sqrt{\frac{\alpha}{2}}, \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right]$

fenêtre temps-fréquence d'aire  $4\Delta_t(f)\Delta_\nu(f) = 2$ .

**Exercice :** Exprimer  $g(t)$  et  $\hat{g}(\nu)$  grâce à  $\Delta_t(f)$  et  $\Delta_\nu(f)$ .  
Que constatez vous ?

## Inégalité de Heisenberg

### Théorème :

Soit  $f \in L^2$  admettant une fenêtre temps-fréquence bornée, alors

$$\Delta_t(f)\Delta_\nu(f) \geq \frac{1}{2}.$$

- 1 On ne peut pas avoir de temps-fréquences petites par rapport à chaque variable  $t$  et  $\nu$ .
- 2 La fonction gaussienne atteint la borne inférieure dans l'inégalité de Heisenberg.  
C'est la fonction la plus « concentrée » en temps et en fréquences.

**Exercice :** Soit  $f$  un signal de fenêtre temps-fréquence bornée.

Pour  $t_0 \in \mathbb{R}$ , déterminer la fenêtre temps-fréquence de  $f_{t_0}(t) = f(t - t_0)$ .

Pour  $\nu_0 \in \mathbb{R}$ , déterminer la fenêtre temps-fréquence de  $f_{\nu_0}(t) = f(t)e^{i\nu_0 t}$ .

## Transformée de Fourier à fenêtre glissante

Soit  $w \in L^2(\mathbb{R})$  de fenêtre temps-fréquence bornée et centrée en  $(0,0)$ .

### Définition :

On appelle **transformée de Fourier à fenêtre glissante** d'un signal  $f \in L^2(\mathbb{R})$  la fonction

$$\begin{aligned} W_f &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \\ (b, \nu) &\longmapsto W_f(b, \nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{w(t-b)} e^{-i\nu t} dt \end{aligned}$$

### Remarques :

- 1 En pratique, on prend  $w$  réelle et paire.
- 2 L'information du signal  $f(t)$  à l'instant  $t = b$  est contenue dans  $t \mapsto f(t)w(t-b)$  :  
on « restreint »  $f$  à la fenêtre  $\overline{w(t-b)}$   
et on calcule sa transformée de Fourier.

## Transformée de Fourier à fenêtre glissante

On pose  $w_{b,\nu}(t) = w(t - b)e^{i\nu t}$ , alors

$$W_f(b, \nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{w_{b,\nu}(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \overline{\widehat{w_{b,\nu}}(\omega)} d\omega$$

Donc  $W_f(b, \nu)$  contient l'information (énergie) :  
de  $f$  au voisinage de  $b$  et de  $\hat{f}$  au voisinage de  $\nu$ .

Le **spectrogramme**  $|W_f(b, \nu)|^2 = \left| \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{w_{b,\nu}(t)} dt \right|^2$   
mesure l'énergie de  $f$  dans le voisinage temps-fréquence de  $(b, \nu)$ .

En 1946, Gabor a montré que la transformée de Fourier à fenêtre glissante est stable et permet de reconstruire le signal  $f$ .

## Transformée de Fourier à fenêtre glissante

### Théorème (Gabor)

Soit  $w \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , réelle avec  $E_w = 1$ . Alors pour tout  $f \in L^2(\mathbb{R})$  :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} W_f(b, \nu) w_{b,\nu}(t) d\nu db, \quad \text{formule de reconstruction ;}$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |W_f(b, \nu)|^2 d\nu db = 2\pi E_f = E_{\hat{f}}, \quad \text{conservation d'énergie.}$$

La TFàFG est une application non surjective de  $L^2(\mathbb{R})$  dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$  :

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \longleftrightarrow W_f \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

On représente un signal 1D grâce à une fonction de deux variables.  
Un élément  $\Phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$  doit vérifier des propriétés de **redondance** pour pouvoir être la TFàFG d'un élément  $f$  de  $L^2(\mathbb{R})$ .

## Exemples de transformée de Fourier à fenêtre glissante

Pour les applications pratiques, différentes fenêtres  $w$  sont utilisées :

- $w(t) = g(t) = (\alpha/\pi)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\alpha}{2}t^2}$ ,  
c'est la **transformée de Gabor**;
- $w(t) = (1 - |t|/a) \mathbb{I}_{[-a,+a]}(t)$ ,  $a > 0$ , fenêtre triangulaire;
- $w(t) = (\alpha + (1 - \alpha) \cos(\pi t/a)) \mathbb{I}_{[-a,+a]}(t)$ ,  $a > 0$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ ;  
pour  $\alpha = 0$ , on a un cosinus tronqué sur  $[-a, +a]$ ;  
pour  $\alpha = 1$ , on a une fenêtre rectangulaire,  $\nu_w$  pas définie ;  
pour  $\alpha = 0.54$ , on a la fenêtre de Hamming.

## Calculs

On pose  $x(n) = f(t_0 + n\Delta t)$ ,  $0 \leq n \leq N - 1$ , *signal discret de durée finie*,  
et  $w(n)$ ,  $-N + 1 \leq n \leq N - 1$ , les coefficients discrets de la fenêtre réelle  
et symétrique, *i.e.*  $w(-n) = w(n)$  pour  $1 \leq n \leq N - 1$ , et  $\sum_{n=0}^{N-1} w(n)^2 = 1$ .

Transformée de Fourier à fenêtre glissante discrète :

$$W_x(k, l) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) w(n - k) e^{-i2\pi ln/N}, \quad k, l = 0, 1, \dots, N - 1;$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w(n - k) \sum_{l=0}^{N-1} W_x(k, l) e^{i2\pi ln/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Pour tout  $0 \leq k < N$ ,  $W_x(k, l)$  s'obtient par la FFT de  $x(n)w(n - k)$ ,  
la décomposition est donc en  $O(N^2 \ln(N))$ . De même pour la  
reconstruction.

## Conclusions

La transformée de Fourier à fenêtre glissante permet d'analyser un signal dans une fenêtre temps-fréquence

$$[b - \Delta_t(w), b + \Delta_t(w)] \times [\nu - \Delta_\nu(w), \nu + \Delta_\nu(w)].$$

Ces fenêtres sont fixes :

on a toujours la même résolution en temps et en fréquences.

Certains signaux sont une succession de *phases stationnaires*, où la fréquence est stable sur une longue durée, et de *phases transitoires*, où il y a de fortes variations de fréquences sur une courte durée.

D'où l'idée d'adapter les dimensions des fenêtres temps-fréquence.

**Exercice :** Réfléchir à l'implémentation de la TFàFG discrète en utilisant la fonction `fft()` de Matlab ou Scilab.

## Analyse temps-échelle

Étudions l'influence d'un changement d'échelle sur les fenêtres temps-fréquence.

Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , pour  $a > 0$ , on pose  $f_a(t) = f\left(\frac{t}{a}\right)$ .

$$E_{f_a} = \int_{\mathbb{R}} \left| f\left(\frac{t}{a}\right) \right|^2 dt = a E_f.$$

$$\hat{f}_a(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{t}{a}\right) e^{-i\nu t} dt = a \hat{f}(a\nu).$$

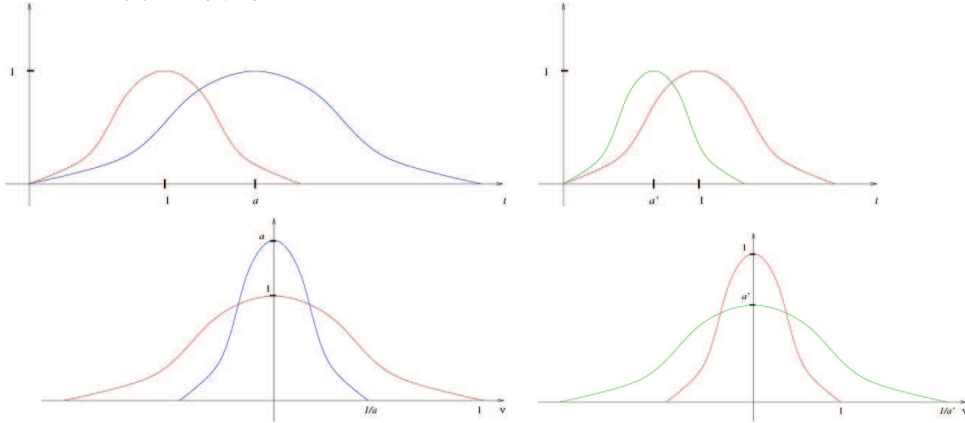
On calcule facilement :

$$t_{f_a} = a t_f \quad \text{et} \quad \Delta_t(f_a) = a \Delta_t(f)$$

$$\nu_{f_a} = \frac{1}{a} \nu_f \quad \text{et} \quad \Delta_\nu(f_a) = \frac{1}{a} \Delta_\nu(f)$$

## Analyse temps-échelle

Action d'un changement d'échelle sur  $f(t)$ ,  
avec  $f_a(t) = f(t/a)$  et  $0 < a' < 1 < a$  :



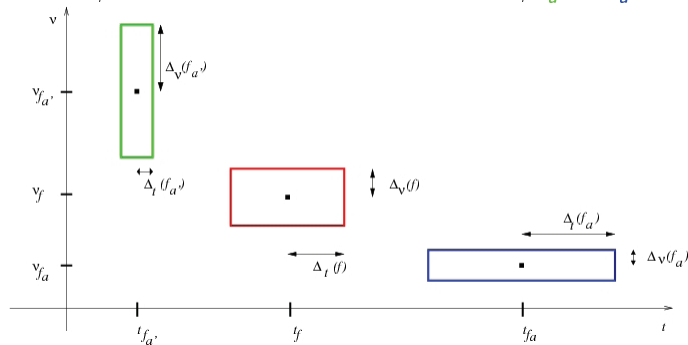
De même pour  $\hat{f}(v)$  et  $\hat{f}_a(v) = a\hat{f}(av)$ .

## Analyse temps-échelle

On a  $\Delta_t(f_a)\Delta_\nu(f_a) = \Delta_t(f)\Delta_\nu(f)$ , de plus

$$\frac{t_{f_a}}{t_f} = \frac{\Delta_t(f_a)}{\Delta_t(f)} = a \quad \text{et} \quad \frac{\nu_{f_a}}{\nu_f} = \frac{\Delta_\nu(f_a)}{\Delta_\nu(f)} = \frac{1}{a}$$

Soit  $0 < a' < 1 < a$ , on construit les fenêtres t.-f. de  $f$ ,  $f_{a'}$  et  $f_a$  :



## Analyse temps-échelle

### Définition :

On appelle *ondelette analysante* réelle, une fonction  $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , qui est dans  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ ,  $E_\Psi = 1$ , définissant une fenêtre temps-fréquence bornée et vérifiant la condition d'admissibilité

$$K_\Psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\Psi}(\nu)|}{\nu} d\nu < \infty$$

**Remarque :** On montre qu'alors  $\hat{\Psi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \Psi(t) dt = 0$ ,

Donc  $\Psi$  est une fonction *oscillante*, amortie à l'infini.

## Analyse temps-échelle

À la fonction  $\Psi$  on applique une translation de  $b \in \mathbb{R}$  et un changement d'échelle  $a \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$\Psi_{b,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

On a alors conservation d'énergie :  $E_{\Psi_{b,a}} = E_\Psi = 1$  et

$$\hat{\Psi}_{b,a}(\nu) = \sqrt{a} \hat{\Psi}(a\nu) e^{-i\nu b}.$$

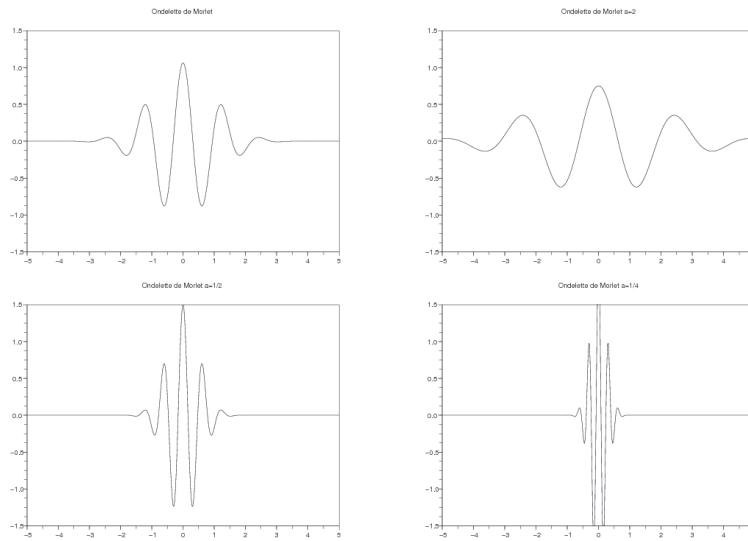
Pour  $\Psi$  paire, on a  $t_\Psi = 0$  et comme  $\Psi$  est réelle  $\nu_\Psi = 0$ .

Finalement,  $t_{\Psi_{b,a}} = b$ ,  $\nu_{\Psi_{b,a}} = 0$ ,

$$\Delta_t(\Psi_{b,a}) = a \Delta_t(\Psi) \text{ et } \Delta_\nu(\Psi_{b,a}) = \frac{1}{a} \Delta_\nu(\Psi).$$

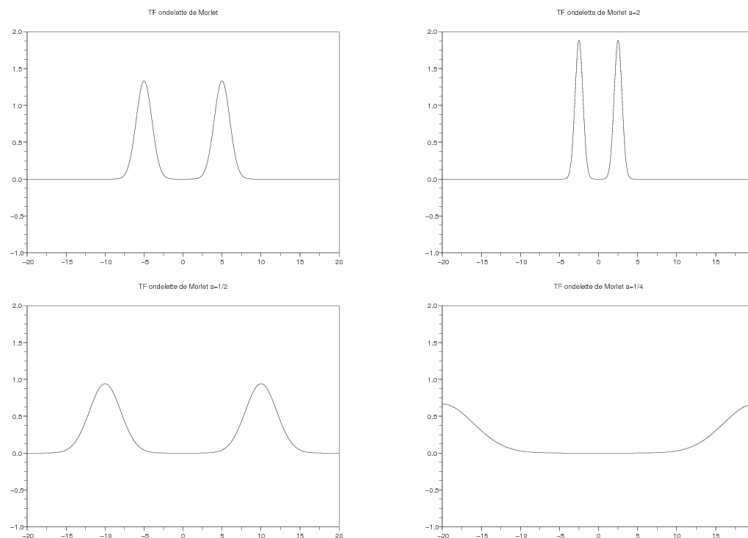
## Exemple : ondelette de Morlet

$$\Psi(t) = c e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(5t), \quad \text{avec } c \text{ telle que } E_\Psi = 1$$



## Exemple : ondelette de Morlet (suite)

$$\hat{\Psi}(\nu) = c \sqrt{\pi/2} \left( e^{-(t+5)^2/2} + e^{-(t-5)^2/2} \right), \quad \hat{\Psi}(0) \neq 0.$$





## Exemples :

- ① Ondelette de Haar :  $\Psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq t < 1/2; \\ -1 & \text{pour } -1/2 \leq t < 0; \\ 0 & \text{ailleurs .} \end{cases}$

On montre que  $\hat{\Psi}(\nu) = i \frac{\sin^2(\nu/4)}{\nu/4} e^{-i\nu/2}$ .

**Exercice :** tracer  $\Psi_{b,a}$  et  $\hat{\Psi}_{b,a}$  pour  $a = 1, 2, 1/2$  et  $b = 0, 2, -2$ .

- ② Le chapeau mexicain :  $\Psi(t) = c_1 (1 - t^2) e^{-\frac{t^2}{2}}$ ,

$c_1$  est telle que  $E_\Psi = 1$ .

C'est la dérivée seconde de la gaussienne (au signe près),

et  $\hat{\Psi}(\nu) = c_2 \nu^2 e^{-\frac{\nu^2}{2}}$ .

**Exercice :** tracer  $\Psi_{b,a}$  et  $\hat{\Psi}_{b,a}$  pour  $a = 1, 2, 1/2$  et  $b = 0$ .

## Transformé en ondelettes

### Définition :

On appelle **transformée en ondelettes** (réelle) d'une fonction  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , associée à une ondelette analysante  $\Psi$ , la fonction

$$\begin{aligned} C_f &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ (b, a) &\longmapsto C_f(b, a) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \Psi_{b,a}(t) dt \end{aligned}$$

Le coefficient d'ondelette

$$C_f(b, a) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \Psi_{b,a}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \sqrt{a} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\nu) \overline{\hat{\Psi}(a\nu)} e^{+i\nu b} d\nu$$

mesure les variations à l'échelle  $a$  au voisinage de  $t = b$ .

**Exercice :**

Pour  $d \in \mathbb{R}$ , on pose  $f_d(t) = f(t - d)$ , calculer  $C_{f_d}(b, a)$ .

Pour  $\alpha > 0$ , on pose  $f_\alpha(t) = f(t/\alpha)/\sqrt{\alpha}$ , calculer  $C_{f_\alpha}(b, a)$ .

## Transformé en ondelettes

**Théorème (Morlet-Grossmann, 1984) :**

Soit  $\Psi$  une ondelette analysante réelle, alors pour tout  $f \in L^2(\mathbb{R})$  :

$$f(t) = \frac{1}{K_\Psi} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} C_f(b, a) \Psi_{b,a}(t) \frac{dbda}{a^2}, \quad \text{formule de reconstruction ;}$$

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} |C_f(b, a)|^2 \frac{dbda}{a^2} = K_\Psi E_f, \quad \text{conservation d'énergie.}$$

La TO est une application de  $L^2(\mathbb{R})$  dans  $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*; dbda/a^2)$  :  
elle représente un signal 1D grâce à une fonction de deux variables  $(b, a)$ .  
Comme pour la TFàFG, un élément  $\Phi \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*; dbda/a^2)$  doit vérifier  
des propriétés de **redondance** pour pouvoir être la TO d'un élément  $f$  de  
 $L^2(\mathbb{R})$ .

## Calculs TO :

On pose  $x(n) = f(t_0 + n)$ ,  $0 \leq n \leq N - 1$ , *signal discret de durée finie*,  
( $\Delta t = 1$ ).

$\Psi$  ondelette réelle, paire, avec :

$$\text{supp}(\Psi) = [-1/2, 1/2] \text{ donc } \text{supp}(\Psi(t/a)) = [-a/2, +a/2].$$

Discretisation :  $t \rightarrow n$  et  $a \rightarrow 2^j$ , mais pour quels  $j \in \mathbb{Z}$  ?

Il suffit d'avoir

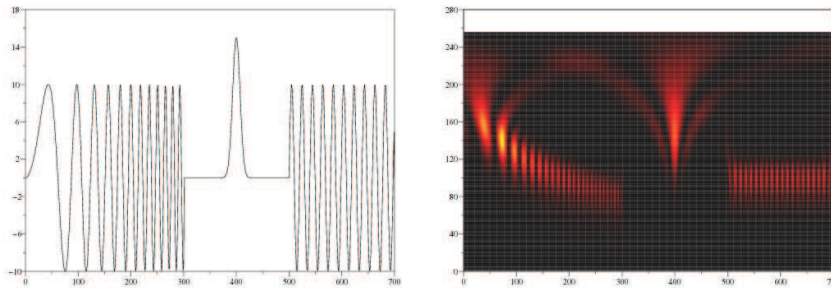
$$\begin{aligned} \text{longueur}[\text{supp}(\Psi(t/a))] &= a \leq N = \text{longueur}(x) : 2^j \leq N \\ \text{et } \text{longueur}[\text{supp}(\Psi(t/a))] &= a \geq 2 = 2\Delta t : 2^j \geq 2. \end{aligned}$$

Finalement  $1 \leq j \leq \ln_2(N) = p$  si  $N = 2^p$ .

On pose  $\psi(n, j) = 2^{-j/2} \Psi(2^{-j}n)$  et alors

$$C_x(n, j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \psi(k - n, j), \quad 0 \leq n < N, 1 \leq j \leq J \leq p.$$

## Calculs TO (suite) :



$s$  est composée de :  $\sin(\alpha t^2) | e^{-\beta t^2} | \sin(t)$   
à droite on a affiché  $|C_s(n, j)|$  ( $a = 2^j \nearrow = \nu \searrow$ ).

On a toujours une représentation redondante de  $s$  par les coefficients  $C_s(b, a)$ .

Dans la suite, on va construire une base de  $L^2(\mathbb{R})$  permettant de représenter  $s$  en temps et échelle.

## Introduction : bases orthonormées d'ondelettes

- On a vu dans ce qui précède que l'analyse temps-échelle permet d'analyser certains signaux plus finement que l'analyse de Fourier.
- Il reste néanmoins la complexité des calculs et le problème de la redondance de la TO continue.
- Dans la suite, on va construire une représentation de  $f$  dans une base dont les éléments peuvent être interprétés en termes de temps-échelle :

$$f(t) = \sum_{n,j \in \mathbb{Z}} c_{n,j} \Psi_{n,j}(t).$$

## Analyse multi-résolution (AMR)

Rappel : l'espace vectoriel  $L^2(\mathbb{R})$  est muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t) dt, \text{ ainsi } E_f = \langle f, f \rangle.$$

### Définition :

Une **analyse multi-résolution** est une suite  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  de sous-espaces vectoriels fermés de  $L^2(\mathbb{R})$  vérifiant :

- 1 Il existe  $\varphi \in V_0$  telle que  $\{\varphi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  soit une base de  $V_0$ .
- 2 Pour tout  $j \in \mathbb{Z}$  :  $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2}\right) \in V_{j+1}$ .
- 3 Pour tout  $(j, k) \in \mathbb{Z}$  :  $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t - 2^j k) \in V_j$ .
- 4 Pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $V_{j+1} \subset V_j$  :  
 $\{O\} \subset \dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R})$   
où  $\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = L^2(\mathbb{R})$  et  $\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \{O\}$ .

## Analyse multi-résolution : interprétation

- Pour tout  $f \in V_0$  on a  $f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a[n] \varphi(t - n)$ .

On peut échantillonner les éléments de  $V_0$ .

- $V_j$  est un **espace d'approximation** à l'échelle  $2^j$  (résolution  $2^{-j}$ ) :

$$f \in V_0 \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2^j}\right) = f(2^{-j}t) \in V_j.$$

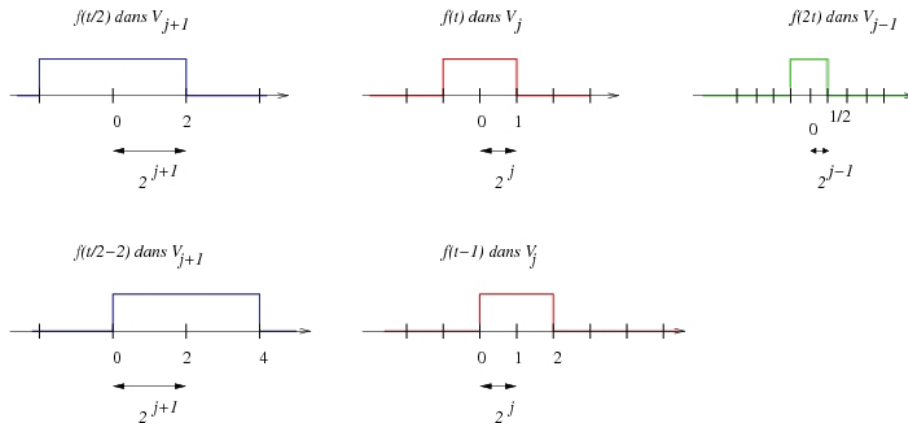
- $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2^{-1}t) \in V_{j+1}$  affirme qu'une dilatation de 2 (= chgt d'échelle avec  $a = 2$ ) de  $f \in V_j$ , donne une approximation dans  $V_{j+1}$ , i.e. à l'échelle  $2^{j+1}$ .

Comme  $V_{j+1} \subset V_j$ , une approximation à l'échelle  $2^{j+1}$  s'obtient aussi comme approximation à l'échelle (plus petite/fine)  $2^j$ .

Note : petite échelle = grande résolution !

## Analyse multi-résolution (AMR)

La figure suivante permet d'illustrer les hypothèses :



## Analyse multi-résolution (AMR)

### Définition :

La fonction  $\varphi \in V_0$  est appelée **fonction échelle**.

On note :  $\varphi_{n,j}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \varphi\left(\frac{t - 2^j n}{2^j}\right) = 2^{-j/2} \varphi(2^{-j} t - n) \in V_j$

Pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ ,

les fonctions  $\{\varphi_{n,j}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  forment une base orthonormée du s.e.v.  $V_j$ .

On a  $\varphi_{0,1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi\left(\frac{t}{2}\right) \in V_1 \subset V_0$ ,

d'où l'équation d'échelle :  $\frac{1}{\sqrt{2}} \varphi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] \varphi(t - n)$ .

Les coefficients  $\{h[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$  sont uniques.

## Base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$

Soit  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  une AMR de  $L^2(\mathbb{R})$ ,  $f \in L^2(\mathbb{R})$ .

On note  $P_{V_j} f$  la projection orthogonale de  $f$  sur  $V_j$ ,

$P_{V_j} f$  est l'approximation de  $f$  à l'échelle  $2^j$ .

$P_{V_{j-1}} f$  est l'approximation de  $f$  à l'échelle (plus fine)  $2^j/2 = 2^{j-1}$ .

Or,  $V_j \subset V_{j-1}$ , on note alors  $W_j$  le s.e.v. orthogonal à  $V_j$  dans  $V_{j-1}$  :

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j.$$

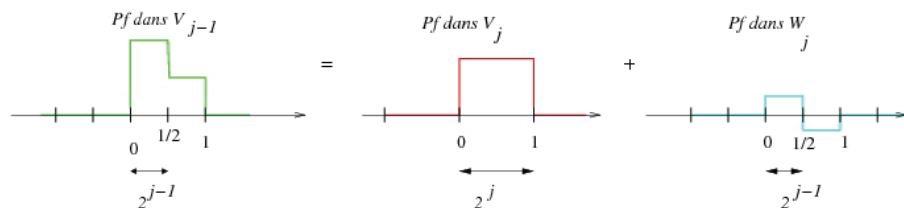
$W_j$  est appelé **espace des détails** à l'échelle  $2^{j-1}$  et on a

$$P_{V_{j-1}} f = P_{V_j} f + P_{W_j} f.$$

Donc l'approximation à l'échelle fine  $2^{j-1}$  est la somme de l'approximation à l'échelle grossière  $2^j$  et des détails à l'échelle  $2^{j-1}$ .

## Base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$

La figure suivante montre la décomposition de  $P_{V_{j-1}} f$  sur  $P_{V_j} f$  et  $P_{W_j} f$  :



Propriétés :

$$\forall i \neq j : W_i \perp W_j;$$

$$\forall j : V_{j-1} = W_j \oplus W_{j+1} \oplus W_{j+2} \oplus \dots \oplus W_i \oplus \dots;$$

$$L^2(\mathbb{R}) = \dots \oplus W_{i-1} \oplus W_i \oplus W_{i+1} \oplus \dots$$

## Construction d'une orthonormée d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$ (Meyer, Mallat, 1989)

Soit  $\varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  une **fonction échelle** et  $(h[n])_{n \in \mathbb{Z}}$  définie par :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \varphi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] \varphi(t-n).$$

On pose alors, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $g[n] = (-1)^{1-n} h[1-n]$

et on considère l'**ondelette**  $\Psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$  telle que :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \Psi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[n] \varphi(t-n),$$

i.e. telle que  $\Psi(t/2)/\sqrt{2} \in V_0$ , où encore  $\Psi(t) \in V_{-1} = V_0 \oplus W_0$ .

On montre que  $\Psi(t) \in W_0$

et que  $\{\Psi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $W_0$ .

## Construction d'une orthonormée d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$ (Meyer, Mallat, 1989)

On pose

$$\Psi_{n,j}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \Psi\left(\frac{t-2^j n}{2^j}\right) = 2^{-j/2} \Psi(2^{-j}t - n).$$

Alors, pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $\{\Psi_{n,j}(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $W_j$ .

Finalement,

$\{\Psi_{n,j}(t-n)\}_{n,j \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée d'ondelettes de  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Exemple :** Ondelettes de Haar.  $\varphi(t) = \mathbb{I}_{[0,1[}(t)$  et

$$V_j = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) / f \text{ est constante sur } [n2^j, (n+1)2^j[, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

On montre que  $h[0] = h[1] = 1/\sqrt{2}$  et  $h[n] = 0$  pour  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ .

On en déduit  $(g[n])_{n \in \mathbb{Z}}$  et l'on obtient l'ondelette de Haar :

$$\Psi(t) = \mathbb{I}_{[1/2,1[}(t) - \mathbb{I}_{[0,1/2[}(t).$$

## Algorithme fwt

Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , on suppose  $f$  connue à l'échelle  $2^j$ , i.e.  $P_{V_j} f$  donnée.  
Comme  $V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}$  on a la relation :

$$P_{V_j} f = P_{V_{j+1}} f + P_{W_{j+1}} f,$$

et comme

$$P_{V_j} f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_j[n] \varphi_{n,j}(t),$$

$$P_{V_{j+1}} f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{j+1}[n] \varphi_{n,j+1}(t) \text{ et } P_{W_{j+1}} f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_{j+1}[n] \psi_{n,j+1}(t).$$

But : exprimer  $(a_{j+1}[n])_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $(d_{j+1}[n])_{n \in \mathbb{Z}}$  en fonction de  $(a_j[n])_{n \in \mathbb{Z}}$

## Algorithme fwt

**Théorème (Mallat 1989) :**

**Décomposition** de  $P_{V_j} f$  sur  $V_{j+1} \oplus W_{j+1}$  :

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{Z} : a_{j+1}[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n-2k] a_j[n],$$

$$d_{j+1}[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[n-2k] a_j[n].$$

**Reconstruction** de  $P_{V_j} f$  à partir de  $P_{V_{j+1}} f$  et  $P_{W_{j+1}} f$  :

pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  :

$$a_j[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n-2k] a_{j+1}[k] + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[n-2k] d_{j+1}[k].$$



## Algorithme fwt, interprétation :

- Posons, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $h^s[n] = h[-n]$ , i.e. on inverse la suite  $(h[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ . La convolution discrète de  $(a_j[n])_{n \in \mathbb{Z}}$  par  $(h^s[n])_{n \in \mathbb{Z}}$  est donnée par :

$$s[m] = (h^s * a_j)[m] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h^s[m-n]g[n] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[n-m]g[n],$$

$$a_{j+1}[k] = s[2k] = (h^s * a_j)[2k].$$

On obtient  $(a_{j+1}[n])_{n \in \mathbb{Z}}$  par une **convolution** et une **décimation** par 2.

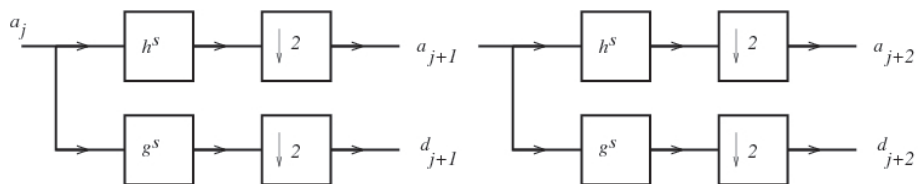
- Posons,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $a_{j+1}^i[l] = \begin{cases} a_{j+1}[k] & \text{si } l = 2k \\ 0 & \text{si } l = 2k + 1 \end{cases}$   
i.e. on insère des 0 dans la suite  $(a_{j+1}[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ . Alors

$$(h * a_{j+1}^i)(n) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h[n-l]a_{j+1}^i[l] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[n-2k]a_{j+1}[k].$$

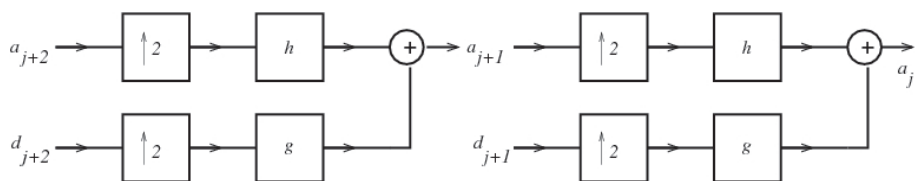
On obtient  $(a_j[n])_{n \in \mathbb{Z}}$  par **insertion de zéros** tous les 2 et **convolution**.

## Algorithme fwt, schéma fonctionnel

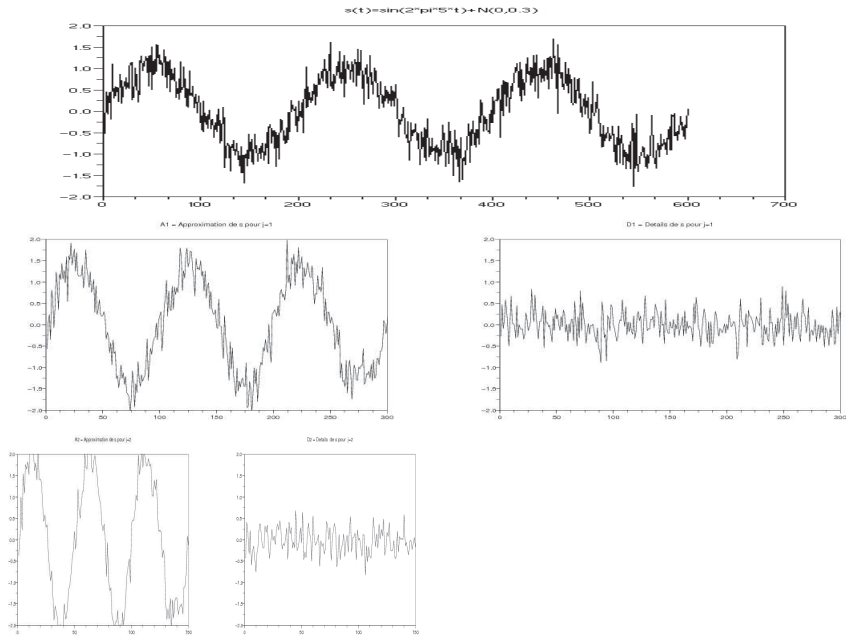
Pour la décomposition / analyse :



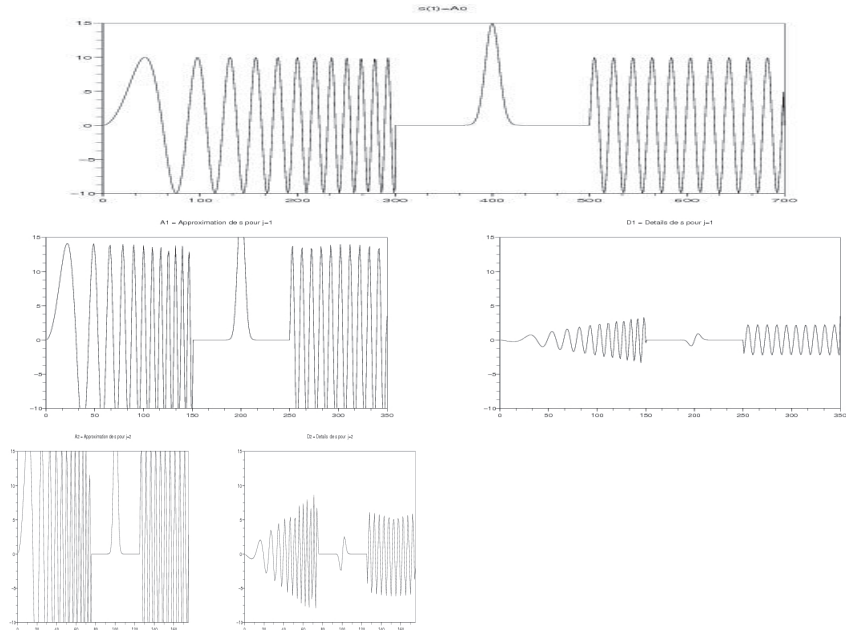
Pour la reconstruction / synthèse :



## Décomposition d'un signal



## Décomposition d'un autre signal



## Produit tensoriel de sous-espaces vectoriels de $L^2(\mathbb{R})$

Soient  $F$  et  $G$  deux s.e.v. de  $L^2(\mathbb{R})$ ,  
on définit le **produit tensoriel** de  $f \in F$  et  $g \in G$  comme suit :

Pour tout  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , on pose  $(f \otimes g)(x_1, x_2) = f(x_1)g(x_2)$ .

Le produit tensoriel des s.e.v.  $F \otimes G$  est un s.e.v. formé des éléments

$$h(x_1, x_2) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m(x_1)g_m(x_2).$$

où  $f_m \in F$  et  $g_m \in G$ .

## Bases d'ondelettes séparables de $L^2(\mathbb{R}^2)$

Si  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  est une AMR de  $L^2(\mathbb{R})$ ,  
alors  $\{V_j^2\}_{j \in \mathbb{Z}}$  est une AMR de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , où  $V_j^2 = V_j \otimes V_j$ .

Pour  $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$  et  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , on pose

$$\varphi_{j,n}^2(x) = \varphi_{j,n_1}(x_1) \varphi_{j,n_2}(x_2) = \frac{1}{2^j} \varphi\left(\frac{x_1 - 2^j n_1}{2^j}\right) \varphi\left(\frac{x_2 - 2^j n_2}{2^j}\right).$$

Alors  $\{\varphi_{j,n}^2\}_{n \in \mathbb{Z}^2}$  est une b.o.n. de  $V_j^2$ .

On définit le s.e.v. supplémentaire orthogonal,  $W_j^2$  grâce à :

$$V_{j-1}^2 = V_j^2 \oplus W_j^2$$

## AMR de $L^2(\mathbb{R}^2)$

### Théorème

Soit  $\varphi$  une fonction échelle d'une AMR de  $L^2(\mathbb{R})$  et  $\Psi$  l'ondelette associée. On construit trois ondelettes dans  $W_0^2 \subset L^2(\mathbb{R}^2)$ , pour  $x = (x_1, x_2)$  :

$$\Psi^1(x) = \varphi(x_1)\Psi(x_2) ; \Psi^2(x) = \Psi(x_1)\varphi(x_2) ; \Psi^3(x) = \Psi(x_1)\Psi(x_2) .$$

Pour  $1 \leq k \leq 3$ ,  $x = (x_1, x_2)$  et  $n = (n_1, n_2)$  on pose :

$$\Psi_{j,n}^k(x) = \frac{1}{2^j} \Psi^k \left( \frac{x_1 - 2^j n_1}{2^j}, \frac{x_2 - 2^j n_2}{2^j} \right) .$$

Alors la famille d'ondelettes  $\{\Psi_{j,n}^1, \Psi_{j,n}^2, \Psi_{j,n}^3\}_{n \in \mathbb{Z}^2}$  est une b.o.n. de  $W_j^2$  et  $\{\Psi_{j,n}^1, \Psi_{j,n}^2, \Psi_{j,n}^3\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}^3}$  est une b.o.n. de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .

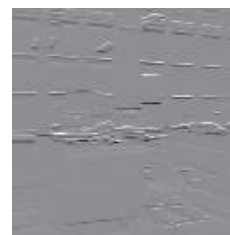
## Décomposition d'une image



$A_0(f)$ , taille  $2^8 \times 2^8$



$A_1(f)$ , taille  $2^7 \times 2^7$



$D_1^1(f)$ , taille  $2^7 \times 2^7$



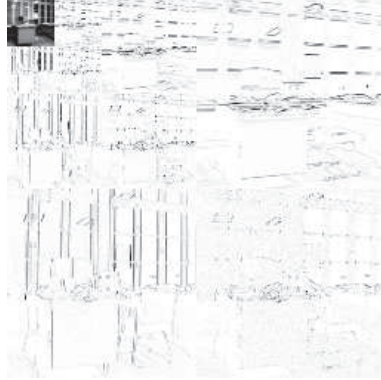
$D_1^2(f)$ , taille  $2^7 \times 2^7$



$D_1^3(f)$ , taille  $2^7 \times 2^7$

## Décomposition d'une image

Décomposition à l'ordre  $J = 3$  :  $D_j^i(f)$ ,  $1 \leq i, j \leq 3$ , et  $A_3(f)$ .



Pour les détails  $D_j^i(f)$ ,  $1 \leq i, j \leq 3$ , on représente la valeur absolue avec affichage en inversion vidéo.

i.e.  $|D_j^i(f)[l, c]| = 0 \rightarrow$  blanc et  $|D_j^i(f)[l, c]| = \text{"grand"} \rightarrow$  noir.