

Chapitre 3

Électromagnétisme et Optique

3.1 Généralités sur les ondes

3.1.1 L'équation d'onde

L'équation d'onde, appelée aussi équation de D'ALEMBERT lorsque f dépend d'une seule coordonnée x , s'écrit :

$$\Delta f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

où $\Delta = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}) = \nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ désigne l'opérateur laplacien et v est une constante homogène à une vitesse.

Toute solution de l'équation d'onde, qui dépend de façon explicite des variables d'espace et de temps est une **onde** : en un point M à l'instant t , $f(M, t) = f(\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}, t)$ où le point O est choisi comme origine. Plus généralement, nous appellerons onde une grandeur physique dépendant de l'espace et du temps, solution d'une équation aux dérivées partielles faisant intervenir l'espace et le temps. Les grandeurs physiques en question peuvent être de différents types (champ électrique, élongation d'un ressort à boudin, déformation d'une corde vibrante, surpression dans un tuyau sonore...). De même, l'équation aux dérivées partielles peut prendre des formes très variées. Nous nous limiterons à l'équation d'onde qui se rencontre dans de nombreux domaines de la physique.

3.1.2 Les différents types d'ondes

L'onde progressive

On appelle **onde progressive** toute grandeur physique f dont la variation dans l'espace et le temps ne dépend que de la quantité $x+vt$ ou (exclusif) $x-vt$, x étant une coordonnée d'espace. Plaçons nous dans le cas unidimensionnel en

supposant $f(\vec{r}, t) = f(x, t)$. L'équation d'onde devient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

La solution générale de cette équation s'écrit

$$f(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$$

où f_1 et f_2 sont des fonctions quelconques. Ainsi, f (qui n'est pas une onde progressive), est la superposition de deux ondes progressives :

- $f_1(x - vt)$ est une onde progressive se propageant à la vitesse v selon les x croissants (voir la figure 3.1) ;
- $f_2(x + vt)$ est une onde progressive se propageant à la vitesse v selon les x décroissants.

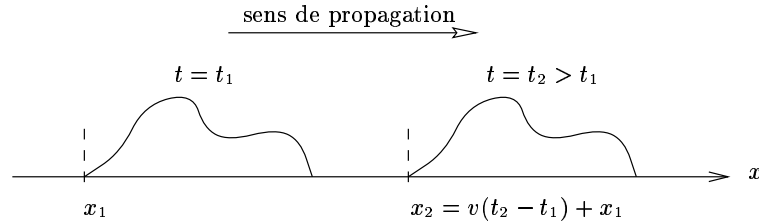


FIG. 3.1 - Une onde progressive se propageant à la vitesse v selon les x croissants

Les ondes f_1 et f_2 se propagent à la vitesse v , indépendamment de leurs caractéristiques (amplitude, fréquence...). On parle de **propagation non dispersive**. La structure mathématique des fonctions f_1 et f_2 ne dépend que des conditions aux limites et des conditions initiales imposées au système.

L'onde plane

Il s'agit d'une onde $F(\vec{r}, t)$ dont la valeur, à t donné, est constante dans un plan perpendiculaire à la direction déterminée par un vecteur \vec{u} unitaire : $F(\vec{r}, t) = F(\vec{u} \cdot \vec{r}, t)$. En orientant par un axe $[Ox]$ la direction \vec{u} ($x = \vec{u} \cdot \vec{r}$), l'équation d'onde se réduit à son expression unidimensionnelle

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

dont la solution s'écrit :

$$F(\vec{r}, t) = F_1(x - vt) + F_2(x + vt).$$

Il s'agit de la combinaison linéaire de deux *ondes planes progressives* :

- $F_1(\vec{r}, t) = F_1(x - vt)$ est une onde plane progressive se propageant à la vitesse v selon les x croissants ;

- $F_2(\vec{r}, t) = F_2(x + vt)$ est une onde plane progressive se propageant à la vitesse v selon les x décroissants.

Dans le cas où $F(\vec{r}, t) = F_1(x - vt)$ (onde plane progressive selon les x croissants), les plans d'onde, définis par

$$F(\vec{r}, t) = C^{te} \iff x - vt = C^{te}$$

se propagent à la vitesse v dans la direction de propagation.

Remarque : toute onde progressive est une onde plane. La réciproque est fautive (toute onde plane s'écrit comme la superposition de deux ondes progressives se propageant dans des sens opposés).

L'onde sphérique

Il s'agit d'une solution de l'équation d'onde dans le cas d'un problème à symétrie sphérique autour d'un point O : $F(\vec{r}, t) = F(r, t)$ où on a posé $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

Les surfaces d'onde sont définies par $r = C^{te}$: ce sont des sphères de centre O et de rayon r .

En utilisant l'expression de l'opérateur laplacien en coordonnées sphériques (voir les rappels mathématiques), l'équation d'onde a pour expression

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r F)}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0.$$

La solution générale de l'équation d'onde s'écrit alors

$$F(\vec{r}, t) = \frac{1}{r} F_1(r - vt) + \frac{1}{r} F_2(r + vt)$$

où

- $F_1(\vec{r}, t) = (1/r) F_1(r - vt)$ est une onde sphérique se propageant à la vitesse v selon les r croissants : on dit qu'il s'agit d'une onde sphérique divergente (voir la figure 3.2). Le facteur $1/r$ est un effet géométrique traduisant la conservation de l'énergie ;
- $F_2(\vec{r}, t) = (1/r) F_2(r + vt)$ est une onde sphérique se propageant à la vitesse v selon les r décroissants : on dit qu'il s'agit d'une onde sphérique convergente.

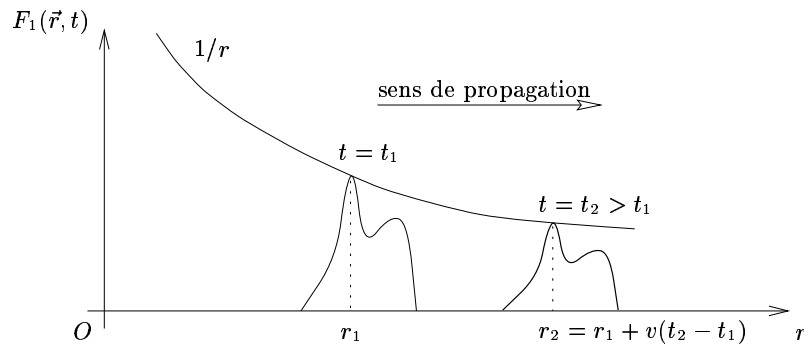


FIG. 3.2 - Une onde sphérique divergente se propageant à la vitesse v .

L'onde monochromatique

Il s'agit d'une onde dont la variation temporelle est sinusoïdale. Elle s'écrit $F(\vec{r}, t) = G(\vec{r}) \cos(\omega t + \varphi)$ en notation réelle, et $\underline{F}(\vec{r}, t) = \underline{H}(\vec{r}) e^{-i\omega t}$ en notation complexe (rappelons que l'on a $F(\vec{r}, t) = \text{Re}\{\underline{F}(\vec{r}, t)\}$). La recherche de telles solutions de l'équation d'onde conduit à l'équation de HELMHOLTZ, valable aussi bien en notation réelle qu'en notation complexe :

$$\Delta G + \frac{\omega^2}{v^2} G = 0.$$

L'onde plane progressive monochromatique

On recherche une solution de l'équation d'onde, en notation complexe, sous la forme

$$\underbrace{\underline{F}(\vec{r}, t)}_{\text{Onde}} = \underbrace{\underline{H}(x)}_{\text{plane}} \underbrace{e^{-i\omega t}}_{\text{monochromatique}}.$$

se propageant
selon x

$F(\vec{r}, t) = \text{Re}\{\underline{F}(\vec{r}, t)\}$ est donc une onde plane monochromatique. L'équation de HELMHOLTZ

$$\frac{d^2 \underline{H}}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2} \underline{H} = 0$$

conduit alors à :

$$\underline{H}(x) = \alpha e^{ikx} + \beta e^{-ikx}$$

où $\vec{k} = k\vec{e}_x = \omega/v \vec{e}_x$ est appelé le vecteur d'onde, α et β étant deux constantes déterminées par les conditions aux limites.

Ainsi, toute onde plane monochromatique est la superposition de deux OPPM (**O**ndes **P**lanes **P**rogressives **M**onochromatiques) et s'écrit :

$$\underline{F}(\vec{r}, t) = \alpha e^{i(kx - \omega t)} + \beta e^{-i(kx + \omega t)}$$

où

- $\alpha e^{i(kx - \omega t)}$ est une OPPM se propageant à la vitesse $v = \omega/k$ selon les x croissants ;
- $\beta e^{-i(kx + \omega t)}$ est une OPPM se propageant à la vitesse v selon les x décroissants.

On se limite désormais au cas d'une OPPM se propageant selon les x croissants : $\underline{F}(\vec{r}, t) = F_o e^{i(kx - \omega t)}$. L'onde a une période temporelle $T = 2\pi/\omega$ et une longueur d'onde (période spatiale) $\lambda = 2\pi/k$. Les plans d'onde (pour des OPPM, on les appelle aussi plans équiphases) sont définis par $kx - \omega t = C^{\text{te}}$ et ils se propagent à la vitesse de phase

$$v_\varphi \equiv \frac{\omega}{\|\vec{k}\|}.$$

Dans le cas d'un milieu dispersif, la vitesse de phase dépend de la longueur d'onde de l'OPPM, mais l'équation différentielle vérifiée par l'onde n'est plus l'équation d'onde. Ce cas est brièvement abordé dans la partie 3.1.4.

L'importance des OPPM en notation complexe réside dans la simplicité de leur manipulation mathématique (voir le paragraphe 3.1.3). Par ailleurs, on peut toujours décomposer une onde plane en une combinaison linéaire d'OPPM (on parle de paquet d'onde).

Remarque : de façon plus générale, si l'OPPM se propage dans une direction \vec{u} quelconque, on peut l'écrire sous la forme $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ avec $\vec{k} = k\vec{u}$.

L'onde stationnaire

C'est une onde que l'on peut écrire, **en notation réelle**, sous la forme

$$F(\vec{r}, t) = A(\vec{r}) B(t).$$

Dans le cas monodimensionnel, la recherche d'une telle solution $f(x, t) = A(x) B(t)$ conduit à

$$\frac{1}{A} \left(\frac{d^2 A}{dx^2} \right) = \frac{1}{v^2} \frac{1}{B} \left(\frac{d^2 B}{dt^2} \right) \quad \text{pour tout } x \text{ et tout } t.$$

En se limitant à la recherche de solutions oscillantes, il vient

$$\frac{d^2 A}{dx^2} = -k^2 A \quad \text{et} \quad \frac{d^2 B}{dt^2} = -\omega^2 B$$

avec $k = \omega/v$. La forme générale de l'onde stationnaire f est donc

$$f(x, t) = f_o \cos(kx + \varphi_x) \cos(\omega t + \varphi_t).$$

On réalise une onde stationnaire en superposant deux OPPM de même amplitude se propageant dans des sens opposés. Sans réduire la généralité du problème, on choisit l'origine de l'espace et celle du temps de façon à avoir $\varphi_x = 0$ et $\varphi_t = 0$. Dans ces conditions, la structure spatiale de l'onde stationnaire est composée

- de nœuds : ce sont des points de coordonnées $x_n = (p + 1/2)\lambda/2$, $p \in \mathbb{Z}$, où $f(x_n, t) = 0$ à tout instant
- de ventres : ce sont des points de coordonnées $x_v = p\lambda/2$, $p \in \mathbb{Z}$, où $f(x_v, t)$ est maximum pour $\omega t \neq \pi/2 [\pi]$.

Un exemple en électromagnétisme est donné dans la suite du cours et dans le problème 3.5.1, et un exemple d'onde stationnaire mécanique se trouve dans l'exercice 6.2.4.

Généralisation

Toutes les notions précédentes se généralisent à des grandeurs vectorielles pour lesquelles l'équation d'onde s'écrit :

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

Par projection, on retrouve, pour les composantes du vecteur \vec{A} , trois équations scalaires analogues à celle étudiée précédemment.

3.1.3 Remarques sur la notation complexe

Les ondes monochromatiques et les ondes planes progressives monochromatiques peuvent s'écrire sous forme réelle ou sous forme complexe. Nous avons choisi de noter \underline{f} une onde « complexe », reliée à l'onde réelle f par $f = \text{Re}(\underline{f})$. L'avantage de la notation complexe réside dans la forme simple que prennent les opérateurs scalaires et vectoriels. **Pour une OPPM** de la forme $\underline{V} = V_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ ou $\underline{A} = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ les opérateurs s'expriment en fonction du vecteur d'onde \vec{k} et de la pulsation ω :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} \underline{V} &= \overrightarrow{\text{grad}} \underline{V} = i\vec{k} \underline{V} \\ \text{div} \underline{A} &= \text{div} \underline{A} = i\vec{k} \cdot \underline{A} \\ \overrightarrow{\text{rot}} \underline{A} &= \overrightarrow{\text{rot}} \underline{A} = i\vec{k} \wedge \underline{A} \\ \partial \underline{V} / \partial t &= \partial \underline{V} / \partial t = -i\omega \underline{V}. \end{aligned}$$

Dans le cas d'une onde monochromatique $\underline{E}(\vec{r}, t) = \underline{H}(\vec{r}) e^{-i\omega t}$, seule la dérivée temporelle s'exprime simplement :

$$\frac{\partial \underline{E}}{\partial t} = -i\omega \underline{E}.$$

3.1.4 Propagation avec dispersion

Considérons une onde $f(x, t)$ solution d'une équation aux dérivées partielles *linéaire*. Cette équation n'est plus l'équation de D'ALEMBERT posée dans la partie 3.1.1. On cherche une solution sous la forme d'une OPPM $f(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$. En reportant dans l'équation différentielle, on obtient une relation entre k et ω sous la forme $k = k(\omega)$. Cette relation est appelée **équation de dispersion**.

Le milieu est dit dispersif si la relation de dispersion est non linéaire. Cela signifie que la vitesse de propagation de l'OPPM

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} \quad (\text{vitesse de phase})$$

dépend de k et donc de ω . Les différentes OPPM se propagent à des vitesses de phase différentes. Si l'équation aux dérivées partielles donne une relation de

dispersion linéaire $\omega = k v$ (c'est le cas de l'équation d'onde posée en 3.1.1), on a $v_\varphi = v = C^{te}$ et toutes les OPPM se propagent à la même vitesse de phase. La propagation est dite non dispersive.

On définit une seconde vitesse caractéristique

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (\text{vitesse de groupe}).$$

Lorsque $\omega(k)$ est une fonction « suffisamment régulière », la vitesse de groupe est la vitesse de propagation de l'énergie (cf. problème 3.5.1).

Dans le cas d'un milieu non dispersif, on a $v_\varphi = v = v_g$.

3.2 Électromagnétisme : rappels de cours

3.2.1 Introduction

La théorie générale de l'électromagnétisme impose de prendre en compte le caractère ondulatoire du champ électromagnétique, afin de pouvoir interpréter de façon satisfaisante les phénomènes dépendant du temps. L'électrostatique, la magnéto-statique et l'induction électromagnétique apparaissent alors comme des cas particuliers.

3.2.2 Ondes électromagnétiques dans le vide

Les équations de Maxwell

Ce sont les équations de base de l'électromagnétisme classique :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \text{Équation de MAXWELL-GAUSS} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{Équation de MAXWELL-FARADAY} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \text{Équation de MAXWELL-AMPÈRE,} \end{cases}$$

où ρ désigne la densité volumique de charge et \vec{j} la densité de courant.

Les équations de MAXWELL sont « linéaires » et satisfont au principe dit de superposition (voir le chapitre 2). La relation entre les potentiels et les champs s'écrit :

$$\begin{cases} \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \\ \vec{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \end{cases}$$

où V est le potentiel scalaire et \vec{A} le potentiel vecteur. Les deux relations précédentes ne définissent pas complètement les champs V et \vec{A} , qui n'ont pas de signification physique. Seuls \vec{E} et \vec{B} en ont une.

Remarque : on retrouve les équations de l'électrostatique et de la magnéto-statique en ne prenant pas en compte les dérivées temporelles dans les équations de MAXWELL et les équations de l'approximation des régimes quasi-permanents (voir le chapitre 4.1) en négligeant le terme $\varepsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$ (appelé courant de déplacement) dans l'équation de MAXWELL-AMPÈRE.

L'équation d'onde

En dehors des sources du champ électromagnétique (c'est-à-dire pour $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$), la combinaison des équations de MAXWELL conduit à l'équation d'onde, satisfaite par le champs \vec{E} (voir par exemple le problème 3.5.1) :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

où $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ apparaît comme la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide. Le champ magnétique \vec{B} vérifie la même équation.

Dans la suite, on se limite, sauf indications contraires, à des ondes progressives se propageant dans la direction des x croissants : on ne prend pas en compte les éventuels champs statiques supplémentaires.

Ondes planes progressives électromagnétiques

Dans le cas du champ électromagnétique, ce sont des solutions de l'équation d'onde qui s'écrivent sous la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}(x - ct) \quad , \quad \vec{B} = \vec{B}(x - ct).$$

On déduit des équations de MAXWELL

- que le trièdre $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{e}_x)$ est orthonormé direct avec la relation

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_x}{c} \wedge \vec{E} ;$$

- que les ondes électromagnétiques dans le vide sont des ondes transversales : le champ électrique et le champ magnétique sont dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation.

Ondes planes progressives monochromatiques électromagnétiques

Ce sont des ondes planes progressives de la forme

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_o e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad , \quad \underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}}_o e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

avec $\underline{\vec{E}}_o$ et $\underline{\vec{B}}_o$ deux vecteurs de coordonnées complexes. On obtient les champs réels en prenant la partie réelle des expressions précédentes.

Les plans d'onde, définis par $\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = C^{\text{te}}$ se propagent à la vitesse de phase

$$v_\varphi = \frac{\omega}{\|\vec{k}\|}.$$

Les deux composantes du champ électromagnétique sont liées par :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \underline{\vec{E}} \quad \text{qui n'est valable que pour des OPPM.}$$

En reportant l'expression de $\underline{\vec{E}}$ dans l'équation d'onde, on obtient la relation de dispersion reliant k à ω pour des ondes se propageant dans le vide :

$$k = \frac{\omega}{c}.$$

3.2.3 Polarisation

Polarisation des OPPM

La direction du champ électrique est *a priori* arbitraire dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation (plan de polarisation). La description du vecteur \vec{E}_o définit l'état de polarisation de l'onde électromagnétique. On suppose que l'onde se propage dans la direction des z croissants (cela signifie $\vec{k} = k\vec{e}_z$) et le plan de polarisation est le plan (\vec{e}_x, \vec{e}_y) : $\vec{E} = \vec{E}_o e^{i(kz - \omega t)}$.

- Polarisation rectiligne : $\vec{E}_o = \vec{A} e^{i\varphi}$ avec \vec{A} un vecteur réel.
Le champ électrique réel s'écrit alors

$$\vec{E} = \vec{A} \cos(\omega t - kz - \varphi).$$

- Polarisation elliptique : $\vec{E}_o = \vec{A} + i\vec{C}$ avec \vec{A} et \vec{C} deux vecteurs réels non colinéaires.
Le champ électrique réel s'écrit

$$\vec{E} = \vec{A} \cos(\omega t - kz) + \vec{C} \sin(\omega t - kz).$$

Le vecteur \vec{E} , dont les deux composantes dans le plan de polarisation sont déphasées d'un angle quelconque, décrit une ellipse que l'on peut caractériser par son sens de rotation (droit ou gauche selon le sens de rotation de \vec{E} lorsque l'onde « arrive » sur l'observateur, c'est-à-dire lorsque le vecteur \vec{k} « pointe » vers l'œil de l'observateur) et son aplatissement (voir figure 3.3).

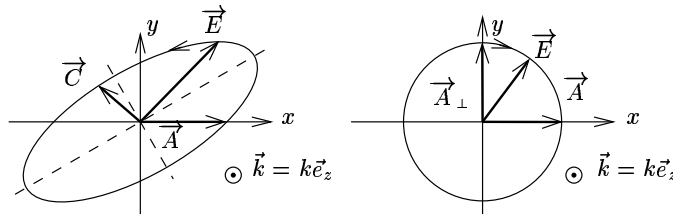


FIG. 3.3 - Polarisations elliptique gauche et circulaire droite.

- Polarisation circulaire : il s'agit d'un cas particulier de la polarisation elliptique pour lequel $\vec{E}_o = \vec{A} + i\vec{A}_\perp$ avec $\|\vec{A}\| = \|\vec{A}_\perp\|$ et $\vec{A} \perp \vec{A}_\perp$ (voir la figure 3.3).

Le champ électrique réel s'écrit alors

$$\vec{E} = \vec{A} \cos(\omega t - kz) + \vec{A}_\perp \sin(\omega t - kz).$$

Les deux composantes du champ \vec{E} dans le plan de polarisation sont déphasées de $\pm\pi/2$.

Polarisation d'une lumière

a) Lames polarisantes

Ce sont des lames qui modifient l'état de polarisation de l'onde (appelée aussi vibration lumineuse) les traversant. On définit les lignes neutres d'une lame comme suit : *une vibration polarisée rectilignement selon une ligne neutre voit sa polarisation inchangée après avoir traversé la lame.* Dans la suite de cette partie, on considère que la lame est contenue dans un plan (xOy) .

- Polariseur rectiligne :
à la sortie d'un polariseur rectiligne (lame cristalline ou « polaroïd »), une vibration lumineuse est polarisée rectilignement dans la direction du polariseur.
- Lamme $\lambda/2$ (demi onde) :
à la sortie d'une lame $\lambda/2$, la composante E_y du champ électrique de longueur d'onde λ est déphasée de π par rapport à la composante E_x . Les lignes neutres définissent les axes x et y .
- Lamme $\lambda/4$ (quart d'onde) :
à la sortie d'une lame $\lambda/4$, la composante E_y du champ électrique de longueur d'onde λ est déphasée de $\pi/2$ par rapport à la composante E_x .

Ainsi, un polariseur possède une ligne neutre tandis que les lames demi onde et quart d'onde possèdent deux lignes neutres en général perpendiculaires. Des combinaisons des lames précédentes sont utilisées en photographie (voir l'exercice 3.4.4), mais aussi pour analyser une lumière.

b) Analyse de la polarisation d'une lumière

La lumière naturelle (lumière émise par une lampe, par le soleil) n'est pas polarisée. Cependant, après avoir traversé un milieu matériel, cette lumière peut être partiellement ou totalement polarisée (voir l'exercice 3.4.2). L'analyse d'une telle lumière (type(s) de polarisation(s), taux de polarisation...) peut être faite au moyen des lames décrites au paragraphe précédent (un polariseur s'appelle alors un analyseur) en utilisant la loi de MALUS :

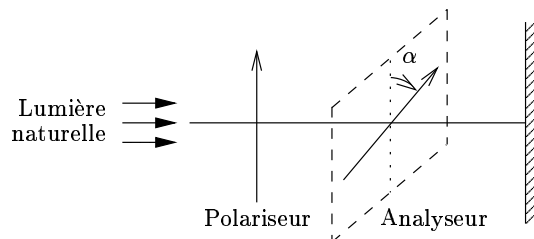


FIG. 3.4 - Mise en évidence de la loi de MALUS

Soit I_o l'intensité de la lumière incidente. L'intensité lumineuse reçue sur l'écran s'écrit :

$$I = I_o \cos^2 \alpha$$

l'angle α étant défini à la figure 3.4 (le polariseur et l'analyseur sont tous deux dans un plan orthogonal à la direction de lumière incidente). Ainsi, pour $\alpha = \pi/2$, $I = 0$: il n'y a pas de lumière à la sortie d'un analyseur dont la direction est perpendiculaire à celle du polariseur.

3.2.4 Énergie électromagnétique

a) Généralités

La combinaison des équations de MAXWELL permet d'obtenir l'équation de conservation de l'énergie électromagnétique (voir l'exercice 3.4.1 qui donne également l'interprétation des différents termes)

$$\operatorname{div} \left(\vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \right) = -\vec{j} \cdot \vec{E}.$$

On définit alors le vecteur densité de courant d'énergie électromagnétique appelé vecteur de POYNTING

$$\vec{P} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0},$$

et la densité volumique d'énergie électromagnétique

$$w_{em} = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}.$$

Le flux du vecteur de POYNTING à travers une surface fermée est égal à la puissance rayonnée à travers cette surface (on pourra consulter la figure 3.18 du problème 3.5.1).

La prise en compte des phénomènes ondulatoires permet de définir sans ambiguïté les densités d'énergie électrique et magnétique :

$$w_e = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2}, \quad w_m = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}.$$

On définit l'éclairement $\mathcal{E}(M)$ de l'onde au point M , (appelé aussi en optique, par abus de langage, intensité), par

$$\mathcal{E}(M) = \frac{d\Phi}{dS} = \|\langle \vec{P}(M) \rangle\|$$

où $d\Phi$ est le flux moyen d'énergie électromagnétique à travers la surface dS centrée autour de M , la notation $\langle A \rangle$ désignant la valeur moyenne temporelle de la quantité A .

Remarque 1 : lorsqu'on a adopté la notation complexe pour représenter une onde monochromatique, il est nécessaire de revenir en notation réelle avant de calculer le vecteur de POYNTING :

$$\vec{P} = \text{Re}(\vec{E}) \wedge \frac{\text{Re}(\vec{B})}{\mu_0}.$$

En effet, la partie réelle d'un produit de nombres complexes n'est en général pas égale au produit des parties réelles de ces nombres.

Remarque 2 : pour une onde monochromatique, en utilisant la notation complexe pour le champ, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \langle \vec{P} \rangle(M) &= \frac{1}{2} \text{Re} \left(\vec{E}(M) \wedge \frac{\vec{B}^*(M)}{\mu_0} \right) = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\vec{E}^*(M) \wedge \frac{\vec{B}(M)}{\mu_0} \right) \\ \langle w_{em} \rangle(M) &= \frac{\varepsilon_0}{4} \|\vec{E}\|^2(M) + \frac{1}{4\mu_0} \|\vec{B}\|^2(M) \end{aligned}$$

où la notation * désigne le complexe conjugué.

b) Cas des ondes planes progressives

Dans le cas d'une onde électromagnétique plane progressive se propageant selon l'axe des x croissants, on a la relation

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_x}{c} \wedge \vec{E}$$

qui conduit à :

$$w_e = w_{em}/2 = w_m \quad \text{et} \quad \vec{P} = c w_{em} \vec{e}_x.$$

Un raisonnement analogue à celui du complément de la question 2. du problème 3.5.1 permet de dire que **dans le vide**, l'énergie électromagnétique se propage à la vitesse c de la lumière.

Dans le cas d'une OPPM de pulsation ω , le vecteur de POYNTING se propage sous la forme d'une onde de pulsation 2ω .

3.2.5 Réflexion d'une onde électromagnétique sous incidence normale sur un conducteur parfait

a) Relations de passage

Les relations de passage pour le champ électromagnétique entre deux milieux 1 et 2 s'écrivent

$$\begin{aligned} \vec{E}_2 - \vec{E}_1 &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{B}_2 - \vec{B}_1 &= \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \end{aligned}$$

où σ est la densité surfacique de charges sur l'interface, \vec{j}_s est la densité surfacique de courant sur l'interface et $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ est le vecteur normal à l'interface entre les deux milieux, dirigé du milieu 1 vers le milieu 2.

b) Conditions aux limites sur un conducteur parfait

Un conducteur parfait est un conducteur de conductivité σ très grande que l'on considère comme « infinie ». Le courant circulant dans le conducteur étant fini, la loi d'OHM $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ donne

$$\vec{E} = \vec{0} \quad \text{et par suite} \quad \vec{B} = \vec{C}^{\text{tê}} :$$

les ondes électromagnétiques ne se propagent pas dans un conducteur parfait ; les charges et les courants sont confinés à la surface du conducteur. Ainsi, en $x = 0^-$, on a :

$$\vec{E} \wedge \vec{e}_x = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge (-\vec{e}_x)$$

avec les notations de la figure 3.5.

c) Structure des champs : l'onde stationnaire

Une OPPM incidente $\vec{E}_I = E_o e^{i(kx - \omega t)} \vec{e}_y$ se réfléchit sur la surface du conducteur sous la forme d'une OPPM $\vec{E}_R = -E_o e^{-i(kx + \omega t)} \vec{e}_y$ afin de satisfaire aux conditions aux limites : le champ électromagnétique total réel $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ dans la région $x \leq 0$ (assimilée au vide) a pour expression :

$$\begin{cases} \vec{E} &= \text{Re} \left(\vec{E}_I + \vec{E}_R \right) = 2E_o \sin(kx) \sin(\omega t) \vec{e}_y \\ \vec{B} &= \text{Re} \left(\vec{B}_I + \vec{B}_R \right) = 2(E_o/c) \cos(kx) \cos(\omega t) \vec{e}_z. \end{cases}$$

Le champ électromagnétique a la structure d'une onde stationnaire : en notation réelle, les parties temporelles et spatiales sont découplées et il existe des nœuds et des ventres pour les champs \vec{E} et \vec{B} . À t fixé, pour le champ électrique

$$\text{les nœuds sont localisés en } x_1 = -\frac{p\lambda}{2} : \vec{E}(x_1) = \vec{0}$$

$$\text{les ventres sont localisés en } x_2 = -(p + \frac{1}{2})\frac{\lambda}{2} : \|\vec{E}(x_2)\| \text{ est extrémal}$$

avec p un entier positif. Les ventres du champ magnétique sont décalés de $\lambda/4$ par rapport à ceux du champ électrique : le champ électromagnétique a la structure spatiale de la figure 3.5 (voir aussi le problème 3.5.1)

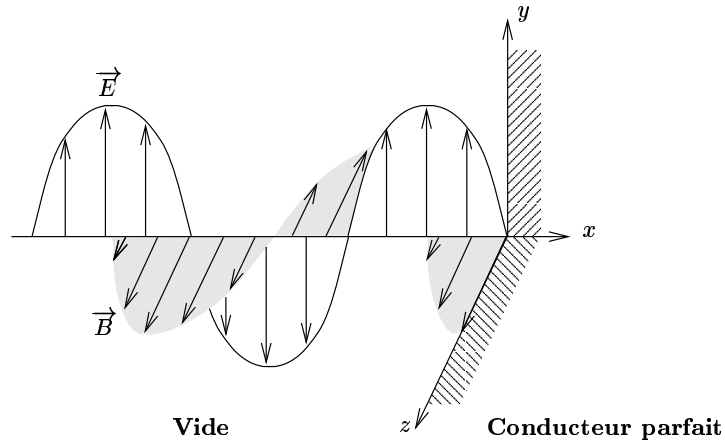


FIG. 3.5 - Structure de l'onde stationnaire. Le conducteur parfait occupe le demi-espace $x \geq 0$.

Le vecteur de POYNTING s'écrit

$$\vec{P} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \sin(2kx) \sin(2\omega t) \vec{e}_x.$$

Il s'agit également d'une onde stationnaire, de fréquence 2ω : il n'y a pas de propagation de l'énergie.

Remarque : $\vec{E}(x=0, t) = \vec{0}$, ce qui signifie qu'il n'y a pas de charges surfaciques sur le conducteur. En revanche, $\vec{B}(x=0, t) \neq \vec{0}$: il apparaît un courant surfacique qui est à l'origine de la pression de radiation subie par le conducteur (cf. problème 3.5.3).

d) Cas d'un conducteur non parfait

Dans ce cas, la conductivité est finie et l'onde électromagnétique pénètre dans le conducteur sur une épaisseur δ appelée *épaisseur de peau*. Le conducteur cause une perte d'énergie à l'onde, sous la forme d'effet JOULE (voir le problème 3.5.2).

3.2.6 Électromagnétisme dans les milieux linéaires homogènes et isotropes

Définition d'un milieu linéaire homogène et isotrope

Un milieu est dit

- *linéaire* si les relations entre les grandeurs le caractérisant sont linéaires ;
- *isotrope* si ses propriétés physiques sont les mêmes dans toutes les directions de l'espace ;
- *homogène* si ses propriétés physiques sont indépendantes du point choisi dans le milieu.

Par exemple, dans un milieu diélectrique linéaire, la polarisation statique $\vec{\mathcal{P}}$ (on ne confondra pas ce vecteur $\vec{\mathcal{P}}$ avec le vecteur de POYNTING \vec{P}) est reliée au champ électrique statique \vec{E} par

$$\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}) = \varepsilon_0 [\chi_e(\vec{r})] \vec{E}(\vec{r})$$

où $[\chi_e(\vec{r})]$ est la matrice susceptibilité électrique du milieu, qui dépend *a priori* de la position. Si le milieu est linéaire et isotrope, cette matrice se réduit à un scalaire $\chi_e(\vec{r})$. Enfin, si le milieu est **Linéaire Homogène et Isotrope** (l.h.i.), ce scalaire est indépendant de la position : la relation entre la polarisation du milieu et le champ électrique s'écrit

$$\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}(\vec{r}).$$

Vecteurs \vec{D} et \vec{H}

Dans les milieux l.h.i., on introduit le vecteur \vec{D} (souvent appelé vecteur induction électrique) et le vecteur \vec{H} (souvent appelé vecteur excitation magnétique), par les relations :

$$\begin{cases} \vec{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} \end{cases}$$

où ε_r (resp. ε) est la permittivité relative (resp. absolue) du milieu et μ_r (resp. μ) est la perméabilité magnétique relative (resp. absolue) du milieu. Pour des milieux non absorbants, ε et μ sont des grandeurs réelles.

Les équations de MAXWELL s'expriment alors sous la forme :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{D} &= \rho_{\text{libre}} \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j}_{\text{libre}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

(cf. problème 3.5.6) où ρ_{libre} (resp. \vec{j}_{libre}) est la densité volumique de charges (resp. de courants) libres (ou extérieures), par opposition aux charges et aux courants liés qui proviennent du milieu *via* sa polarisation et son aimantation et qui restent liés au matériau (par exemple, les électrons de valence). Les charges libres sont capables de se déplacer librement dans le milieu sur de grandes distances (électrons de conduction, ions dans une solution...).

Propagation dans un milieu l.h.i. non absorbant

a) Équation de propagation et indice de réfraction

L'équation de propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu l.h.i. se met sous la forme :

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

Pour des ondes monochromatiques $\vec{E}(\vec{r}, t) = \underline{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t}$, elle conduit à l'équation de HELMHOLTZ

$$\Delta \underline{E} + \varepsilon \mu \omega^2 \underline{E} = 0.$$

On définit alors l'indice de réfraction (réel) du milieu non absorbant par

$$\varepsilon \mu \omega^2 = n^2 \frac{\omega^2}{c^2} \implies n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}.$$

La relation de dispersion du milieu s'écrit

$$k = \sqrt{\varepsilon \mu} \omega = \frac{n\omega}{c},$$

ce qui signifie que les OPPM se propagent à la vitesse de phase $v_\varphi = c/n$.

Remarque: dans le cas de milieux absorbants, on peut introduire des grandeurs ε et μ complexes.

b) Vecteur de Poynting

De même que dans le vide, on définit la densité d'énergie électromagnétique et le vecteur de POYNTING dans le milieu :

$$w_{em} = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

$$\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H}.$$

c) Dispersion des ondes électromagnétiques

On appelle milieu dispersif un milieu pour lequel la relation de dispersion $k(\omega)$ n'est pas linéaire. La vitesse de phase $v_\varphi = \omega/k$ dépend alors de la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$.

Un milieu peut être dispersif à cause de ses propriétés physiques (voir les problèmes 3.5.2, 3.5.4, 3.5.5 et 3.5.6) et/ou à cause des conditions aux limites imposées aux ondes : c'est le cas du guide d'onde (problème 3.5.1) où la propagation a pourtant lieu dans le vide.

Dans un milieu dispersif où l'on peut négliger l'absorption, l'indice est un nombre réel et l'énergie se propage à la vitesse de groupe v_g (voir le complément de la question 2. du problème 3.5.1) définie par

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

tandis que les ondes planes se propagent à la vitesse de phase $v_\varphi = c/n$.

Remarque: le vide sans conditions aux limites particulières, qui est un « milieu l.h.i. » particulier, se caractérise par la relation de dispersion $\omega = ck$ ce qui implique :

$$v_g = c = v_\varphi.$$

Réflexion et réfraction d'une onde

Considérons deux milieux l.h.i non absorbants (1) et (2). Supposons l'absence de charges libres et de courants libres à l'interface.

- À la frontière entre les milieux (1) et (2), les relations de passage pour les composantes tangentielles des champs sont :

$$\begin{aligned}(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} &= 0 \\ (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} &= 0\end{aligned}$$

et pour les composantes perpendiculaires

$$\begin{aligned}(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} &= \vec{0} \\ (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} &= \vec{0}.\end{aligned}$$

- Soit une OPPM d'amplitude E_I arrivant du milieu 1 sur l'interface : cette onde se réfléchit en une OPPM d'amplitude E_R et une OPPM d'amplitude E_T est transmise dans le milieu 2. On définit les coefficients de réflexion r et de transmission t en amplitude par

$$r = \frac{E_R}{E_I} \quad \text{et} \quad t = \frac{E_T}{E_I}.$$

Sous incidence normale, ces coefficients ont pour expression :

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad \text{et} \quad t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

où n_1 (resp. n_2) est l'indice du milieu (1) (resp.(2)). Si $n_1 < n_2$, alors $r < 0$: l'onde réfléchie et l'onde incidente sont déphasées de π (voir la question II.2. du problème 3.5.7).

Les coefficients de réflexion et de transmission en énergie R et T sont définis par

$$R = \frac{\mathcal{P}_{ref}}{\mathcal{P}_{inc}} \quad , \quad T = \frac{\mathcal{P}_{trans}}{\mathcal{P}_{inc}}$$

où \mathcal{P}_{inc} (resp. \mathcal{P}_{ref} , \mathcal{P}_{trans}) est le flux d'énergie incident (resp. réfléchi, transmis) à travers un élément de l'interface (flux du vecteur de POYN- TING). Il vient alors

$$R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 = |r|^2 \quad \text{et} \quad T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}.$$

On vérifie que l'énergie se conserve : $R + T = 1$.

Attention : $T \neq |t|^2$, car les ondes ne se propagent pas à la même vitesse dans les deux milieux : on a $T = n_2 |t|^2 / n_1$. En revanche, $R = |r|^2$.

- Sous incidence quelconque θ_i par rapport à la normale à l'interface, les coefficients r et t ont des expressions plus compliquées. On a cependant des relations simples entre les rayons incident, réfléchi et réfracté : les lois de DESCARTES.

Première loi : le rayon réfléchi et le rayon réfracté sont contenus dans le plan incident (plan composé du rayon incident et de la normale à l'interface, voir la figure 3.6).

Deuxième loi : pour la réflexion

$$\theta_r = -\theta_i$$

et pour la réfraction

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t.$$

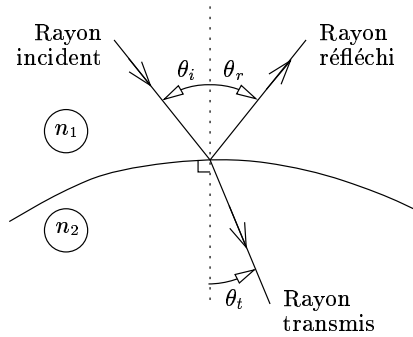


FIG. 3.6 - Notations relatives aux lois de DESCARTES

3.3 Optique ondulatoire : rappels de cours

3.3.1 Introduction

L'optique est généralement définie comme l'ensemble des phénomènes perçus par l'œil. À ce titre, puisque la lumière est une onde électromagnétique se propageant à la vitesse $c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$ dans le vide, l'optique est un cas particulier de l'électromagnétisme.

Cependant, les lois de DESCARTES (1621), l'optique géométrique, les phénomènes d'interférence et de diffraction (début du $XIX^{\text{ème}}$ siècle) étaient connus bien avant la théorie générale de l'électromagnétisme (1876 pour les équations de MAXWELL).

Ainsi, l'optique peut être étudiée sans les équations de MAXWELL, en utilisant uniquement le caractère ondulatoire de la lumière : cette dernière est composée d'ondes de longueurs d'onde approximativement comprises entre 400 nm et 800 nm .

3.3.2 Les phénomènes d'interférence

Introduction

On dit que deux ondes interfèrent si l'intensité résultant de leur superposition n'est pas égale à la somme de leurs intensités.

- Dans toute l'étude des interférences, on se limite à des milieux linéaires. De plus, on ne considère que des OPPM polarisées rectilignement et dont les directions de propagation ne font entre elles qu'un petit angle : on ne prend en compte ni l'effet de la polarisation ni l'effet de directions de propagation différentes. On travaillera donc avec des champs scalaires et on omettra dans toute l'étude des interférences le caractère vectoriel de la lumière.

Par exemple, dans le cas de deux ondes $\vec{E}_1 = E_1 \vec{u}$ et $\vec{E}_2 = E_2 \vec{u}$, le champ électrique résultant s'écrira $\vec{E} = (E_1 + E_2) \vec{u} = E \vec{u}$.

- Une source lumineuse émettant dans le vide des ondes de longueur d'onde λ_0 , placée en un point O , émet des ondes sphériques qui s'écrivent en notation complexe

$$\underline{E}(M, t) = E_0(M) \exp[i(\varphi(M) - \omega t)]$$

avec $\varphi(M) = (2\pi n/\lambda_0) OM$ le déphasage au point M et n l'indice optique du milieu.

En choisissant un point M_0 proche de M , on peut écrire

$$\varphi(M) = \varphi(M_0) + \overrightarrow{M_0 M} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_{M_0} \varphi$$

ce qui conduit à

$$\underline{E}(M, t) = E_0(M) \exp[i\varphi(M_0)] \exp\left[i\left(\vec{k} \cdot \overrightarrow{M_0 M} - \omega t\right)\right]$$

en posant $\vec{k} = \overrightarrow{\text{grad}}_{M_0} \varphi$. Si $E_0(M)$ varie peu sur une longueur d'onde, le champ électrique $\vec{E}(M, t)$ est représenté localement par une onde plane progressive de vecteur d'onde \vec{k} ($\|\vec{k}\| = 2\pi n/\lambda_0$). L'onde est dite « *localement plane* » (ou « *quasi plane* ») dans la direction de propagation de \vec{k} .

Pour des ondes quasi-planes, les rayons lumineux sont les lignes de champs du vecteur d'onde. Ainsi, le long d'un rayon lumineux, le déphasage entre un point A et un point B s'écrit

$$\varphi(B) - \varphi(A) = \int_{AB} \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \cdot \overrightarrow{dl} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \int_{AB} n dl = \frac{2\pi}{\lambda_0} (AB)$$

La quantité (AB) représente le **chemin optique** entre les points A et B :

$$(AB) = \int_{AB} n dl$$

l'intégrale étant prise le long d'un rayon lumineux.

On se limitera désormais à cette approximation : les ondes lumineuses interférant en un point M de l'espace sont considérées comme « localement planes » : la figure d'interférence n'est affectée que par les variations de phase des ondes lumineuses.

- Les récepteurs optiques sont sensibles au flux du vecteur de POYNTING, proportionnel pour des OPPM au carré du champ électrique (intensité lumineuse instantanée). De plus, les ondes optiques ont des fréquences de l'ordre de 10^{14} Hz , c'est-à-dire des périodes temporelles de l'ordre de 10^{-14} s . Les récepteurs qui réagissent sur des échelles de temps plus élevées (par exemple, l'œil ne peut percevoir des variations plus rapides que 0.1 s) ne sont donc sensibles qu'à l'intensité moyenne. L'intensité lumineuse reçue par le récepteur, (proportionnelle à l'éclairement), est

$$I(M) = K \langle \vec{E}(M)^2 \rangle,$$

où K est une constante de proportionnalité que l'on peut omettre (on ne s'intéresse souvent qu'à la répartition relative de l'éclairement).

Interférences à deux ondes

a) Le champ d'interférence dans le cas de deux OPPM

Considérons deux OPPM de longueur d'onde λ_0 dans le vide se propageant dans l'espace. Un observateur placé en un point M reçoit le champ électrique

$$\underline{E}(M) = \underline{E}_1 + \underline{E}_2 = E_{01} e^{-i(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})} + E_{02} e^{-i(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varphi)}$$

où $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ et φ est le déphasage éventuel entre les deux sources. L'intensité recueillie en M s'écrit alors :

$$\begin{aligned} I(M) &= K \underline{E}(M) \cdot \underline{E}^*(M) \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \left[(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r} - \varphi \right] \end{aligned}$$

en posant I_j l'intensité reçue au point M de la part de la source j . L'intensité lumineuse varie selon le point M d'observation.

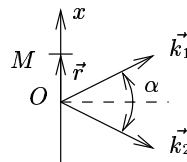


FIG. 3.7 - Définition de l'axe x .

Dans la configuration de la figure 3.7, en se plaçant dans le vide avec $\varphi = 0$, l'intensité en $M(x)$ a pour expression :

$$I(x) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \left[2\pi \frac{2 \sin(\alpha/2) x}{\lambda_0} \right].$$

La figure obtenue comporte des franges d'interférences (alternance de bandes sombres et brillantes) qui sont des plans $x = C^{\text{te}}$. L'interfrange i est la période spatiale des franges. Dans la configuration proposée,

$$i = \frac{\lambda_0}{2 \sin(\alpha/2)}.$$

b) Différence de marche

Prenons le cas général de deux sources ponctuelles S_1 et S_2 émettant dans le vide des ondes de longueur d'onde λ_0 . L'intensité au point d'observation M est, (les ondes sont considérées comme « localement planes ») :

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \left[\underbrace{\vec{k}_2 \cdot \vec{r}}_{k_0(S_2 M)} - \underbrace{\vec{k}_1 \cdot \vec{r}}_{k_0(S_1 M)} - \varphi \right]$$

avec $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ le module du vecteur d'onde dans le vide et $(S_i M)$ le chemin optique entre les points S_i et M .

On appelle **différence de marche** la quantité

$$\delta = (S_2 M) - (S_1 M).$$

Ainsi,

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta - \varphi \right].$$

c) Ordre d'interférence, contraste

On se place dans une situation où $\varphi = 0$.

Les franges brillantes (interférences constructives) sont obtenues pour

$$\delta_c = m\lambda_0 \quad \text{avec } m \in \mathbb{Z},$$

et leur intensité est $I_M = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$.

Les franges sombres (interférences destructives) sont obtenues pour

$$\delta_s = (m + 1/2)\lambda_0 \quad \text{avec } m \in \mathbb{Z},$$

et leur intensité est $I_m = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$.

On appelle *ordre d'interférence* $p = \delta/\lambda_0$: les franges brillantes sont obtenues pour p entier tandis que les franges sombres sont obtenues pour p demi-entier.

On définit aussi le contraste, ou facteur de visibilité des franges (voir la partie II du problème 3.5.7) par

$$C = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m}.$$

Ainsi, lorsque $I_M = I_m$, $C = 0$ et lorsque $I_m = 0$, $C = 1$. Dans le cas présent, le contraste prend la forme :

$$C = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \leq 1.$$

d) Étude de la figure d'interférence

Les franges d'interférence sont définies par la relation $\delta = (S_2 M) - (S_1 M) = C^{te}$, ce qui revient, dans un milieu homogène (l'indice n est alors constant) à

$$S_2 M - S_1 M = C^{te}.$$

Les franges sont des hyperboloïdes de révolution de foyers S_1 et S_2 et d'axe de révolution $(S_1 S_2)$. Deux cas particuliers sont abondamment utilisés dans la pratique (voir la figure 3.8)

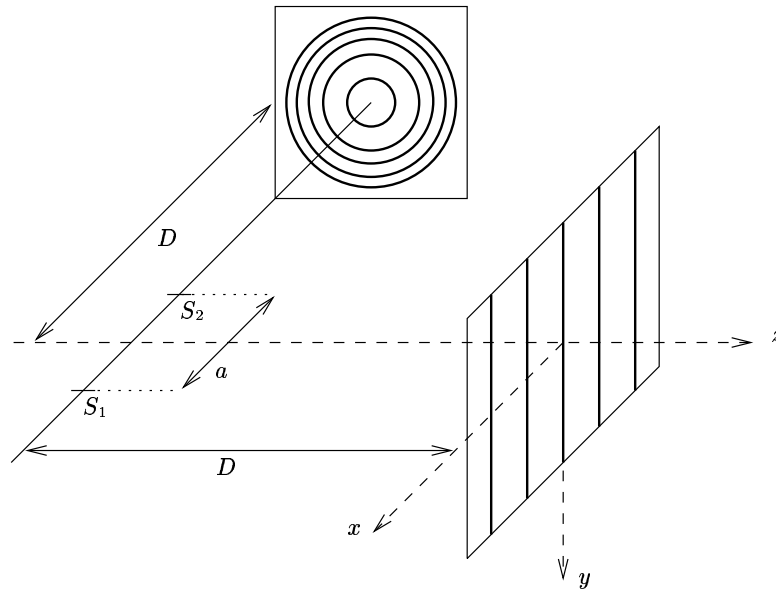


FIG. 3.8 - Deux cas usuels d'observation du phénomène d'interférence à deux ondes.

1. l'écran, placé à grande distance ($D \gg a$), est parallèle à $\overline{S_1 S_2}$: les franges sont des droites $x = C^{te}$, l'intensité sur l'écran est

$$I = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi a x}{\lambda_0 D} \right) \right]$$

et l'interfrange est

$$i = \frac{\lambda_0 D}{a}.$$

2. l'écran, placé à grande distance ($D \gg a$), est perpendiculaire à $\overrightarrow{S_1 S_2}$: les franges sont des cercles concentriques qui se resserrent lorsqu'on s'éloigne du centre de l'écran.

Remarque : dans le cas d'une lumière polychromatique, les figures d'interférences des différentes longueurs d'onde s'additionnent : on obtient ainsi des franges colorées et les couleurs de NEWTON (voir la partie III du problème 3.5.7).

Réalisation pratique et applications

En choisissant deux sources S_1 et S_2 quelconques, on n'observe en général pas de phénomène d'interférence car le déphasage φ entre les deux sources est aléatoire (on dit que les deux sources sont incohérentes).

Afin d'observer des interférences, il est donc nécessaire d'avoir des sources cohérentes, c'est-à-dire des sources pour lesquelles le déphasage entre les deux voies (1) et (2) n'est pas aléatoire. En pratique, on réalise cette condition en partant d'une source primaire S et en séparant le faisceau émis en deux voies. On est ainsi conduit à considérer deux types de systèmes interférométriques :

- les systèmes à division d'amplitude : les lames minces, l'interféromètre de MICHELSON...
- les systèmes à division du front d'onde : les trous ou les fentes d'YOUNG (voir la partie III du problème 3.5.7 ainsi que la partie III du problème 3.5.6), les miroirs de FRESNEL...

La partie I du problème 3.5.7 aborde brièvement la question de la cohérence temporelle liée à la nature non parfaitement monochromatique des sources. De même, le caractère non ponctuel des sources employées peut poser problème (on parle de cohérence spatiale).

Résumé

On retiendra

$$\underline{E}(M, t) = E_0(M) \exp[i(\varphi(M) - \omega t)]$$

avec

$$\varphi(M) = \varphi(M') + \frac{2\pi}{\lambda_0} \int_{MM'} n dl,$$

l'intégrale devant être évaluée le long du rayon lumineux. On considère souvent que l'amplitude $E_0(M)$ varie peu le long du rayon lumineux et peut être considérée comme constante. En revanche, la phase $\varphi(M)$ varie très vite (sur des distances de l'ordre de la longueur d'onde).

3.3.3 La diffraction

Définition

On appelle *diffraction* le phénomène « d'éparpillement » de la lumière lorsqu'une onde lumineuse est spatialement limitée. Une figure de diffraction manifeste un écart par rapport aux lois de l'optique géométrique.

On rencontre le phénomène de diffraction en éclairant par exemple un trou circulaire de petit diamètre. L'éclairement observé sur un écran placé derrière le trou présente une structure en anneaux, centrée sur l'image géométrique du trou : il s'agit de la figure de diffraction du trou circulaire. Ce phénomène ne peut s'observer que lorsque le diamètre du trou est de taille comparable ou inférieure à la longueur d'onde de la lumière utilisée.

Le principe d'Huygens-Fresnel

La théorie de la diffraction s'appuie sur le principe d'HUYGENS (1678)

Chaque point d'une surface d'onde Σ_0 atteinte par la lumière à l'instant t_0 se comporte comme une source fictive secondaire : la surface d'onde Σ à l'instant t est l'enveloppe des surfaces d'ondes provenant de ces différentes sources secondaires.

Fresnel a appliqué ce principe aux phénomènes de diffraction (1820) :

Chaque point P d'une surface Σ atteinte par la lumière peut être considéré comme une source secondaire émettant une onde sphérique. L'état vibratoire en un point M situé après la surface Σ est la somme des grandeurs lumineuses émises par chacun des éléments de la surface. L'amplitude de l'onde sphérique émise par un élément $d\Sigma_{(P)}$ de la surface Σ est proportionnelle à l'aire $d\Sigma_{(P)}$, à l'amplitude de l'onde incidente et en phase avec elle.

Le phénomène de diffraction se ramène ainsi à un phénomène d'interférence entre un très grand nombre de sources localisées sur l'objet diffractant et émettant des ondes sphériques.

Le principe d'HUYGENS-FRESNEL permet d'écrire l'expression de l'amplitude complexe diffractée au point M par un obstacle Σ (voir la figure 3.9) :

$$\underline{A}(M) = \iint_{P \in \Sigma} K(P) \underline{A}_i(P) \frac{e^{i(2\pi/\lambda)PM}}{PM} d\Sigma_{(P)}$$

où P est un point de l'objet diffractant, $\underline{A}_i(P)$ est l'amplitude complexe de l'onde incidente au point P et $K(P)$ un facteur de proportionnalité qui dépend *a priori* du point P : $K(P)$ tient compte de l'inclinaison des rayons lumineux par rapport à l'obstacle et de l'absorption éventuelle (appelée aussi transmittance) à la traversée de celui-ci.

Diffraction de Fraunhofer

On se limite souvent à la diffraction de FRAUNHOFER, appelée aussi *approximation de la diffraction à l'infini*. Dans ce cas, en utilisant les vecteurs

unitaires \vec{u} et \vec{u}_0 définis par la figure 3.9, il vient :

$$\underline{A}(M) = A_0 \iint_{P \in \Sigma} t(\vec{OP}) \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda} (\vec{u} - \vec{u}_0) \cdot \vec{OP} \right] d\Sigma(P)$$

où O est un point origine sur l'objet diffractant Σ et $t(\vec{OP})$ est le facteur de transmission en amplitude de l'objet diffractant : il traduit une éventuelle absorption de l'onde à la traversée du système diffractant. C'est le cas par exemple du verre qui absorbe la lumière.

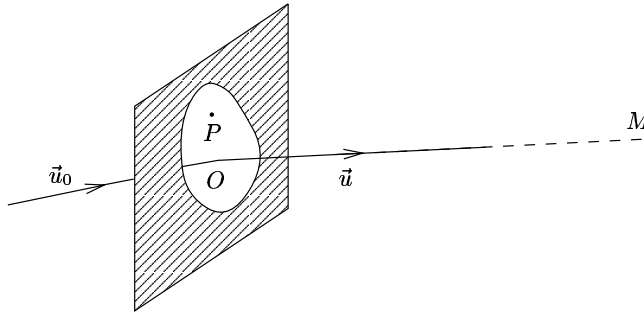


FIG. 3.9 - Notations relatives à la diffraction de FRAUNHOFER ($OM \gg OP$).

La figure 3.10 montre comment réaliser expérimentalement ce type de diffraction, par un montage rigoureux utilisant deux lentilles et par un montage plus simple, ne nécessitant qu'une seule lentille « collée » à l'objet diffractant dont le rôle est de faire l'image de la source sur l'écran d'observation.

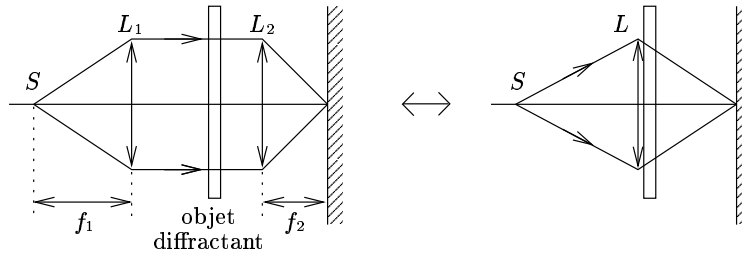


FIG. 3.10 - Réalisation expérimentale de la diffraction de FRAUNHOFER

Applications

- **Diffraction de Fraunhofer par une ouverture rectangulaire :**
 l'obstacle diffractant de la figure 3.9 est une ouverture rectangulaire de dimensions $a \times b$. L'intensité diffractée dans la direction $\vec{u} = (\nu, \beta, \gamma)$ sous une direction d'incidence $\vec{u}_0 = (\nu_0, \beta_0, \gamma_0)$ s'écrit sous la forme :

$$I(\vec{u}) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{\pi a}{\lambda} (\nu - \nu_0) \right] \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{\pi b}{\lambda} (\beta - \beta_0) \right]$$

C O U R S

avec la notation $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$. On peut remarquer que lorsque $\lambda \ll a$ et $\lambda \ll b$, $I(\vec{u})$ est quasiment nul en dehors de $\vec{u} = \vec{u}_0$. On retrouve ainsi l'optique géométrique comme l'approximation de faible longueur d'onde de l'optique ondulatoire.

- Diffraction de Fraunhofer par une fente

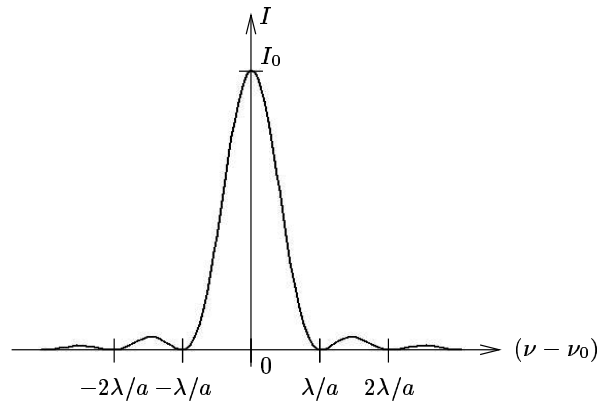


FIG. 3.11 - Intensité diffractée par une fente de dimension a .

Une fente est une ouverture rectangulaire telle que $b \gg a$. Il n'y a quasiment pas de lumière en dehors de $\beta = \beta_0$. L'intensité diffractée dans la direction $\vec{u} = (\nu, \beta, \gamma)$ sous une direction d'incidence $\vec{u}_0 = (\nu_0, \beta_0, \gamma_0)$ se déduit de l'expression précédente dans la limite $b \rightarrow \infty$:

$$I(\vec{u}) = I(\nu - \nu_0) = I_0 \text{sinc}^2 \left[\frac{\pi a}{\lambda} (\nu - \nu_0) \right]$$

(voir la figure 3.11).

- Diffraction de Fraunhofer par un trou circulaire

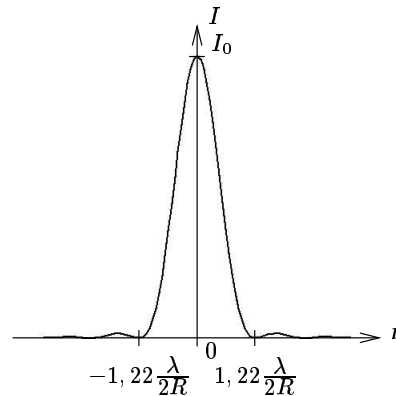


FIG. 3.12 - Intensité diffractée par un diaphragme circulaire de rayon R éclairé sous incidence normale.

L'obstacle diffractant est un trou de rayon R . L'intensité diffractée dans la direction \vec{u} , sous incidence normale a l'allure représentée à la figure 3.12. Elle se compose d'une tâche centrale (tâche d'AIRY) de rayon $1,22\lambda/(2R)$ et de lobes secondaires dont l'intensité est beaucoup plus faible (1,7% de l'intensité maximale pour le premier lobe et 0,4% pour le deuxième lobe).

• **Les réseaux :**

en optique, on appelle réseau une structure périodique qui diffracte une onde incidente. La structure périodique peut par exemple être un ensemble de fentes rectangulaires identiques et régulièrement espacées.

Pour un réseau de pas a , éclairé sous un angle i par un faisceau de longueur d'onde λ , la direction des maxima d'intensité diffractée *en transmission* est donnée par la relation (voir la partie optique du problème 3.5.2)

$$\sin \theta_n - \sin i = n \left(\frac{\lambda}{a} \right).$$

n est appelé l'ordre du maximum considéré.

Ainsi, pour $n \neq 0$, l'angle de diffraction θ_n dépend de la longueur d'onde : une lumière incidente polychromatique est décomposée en ses différentes composantes de longueur d'onde λ . On obtient le spectre de la lumière incidente. On dit que les réseaux sont des éléments dispersifs.

Si l'on prend en compte la forme du motif périodique, on peut exprimer l'intensité diffractée par le réseau dans la direction θ :

$$I(\theta) = [A(\theta)]^2 \left[\frac{\sin(N\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)} \right]^2 \quad \text{avec} \quad \varphi = 2\pi a(\sin \theta - \sin i)/\lambda,$$

où N est le nombre de motifs du réseau et $A(\theta)$ est l'amplitude diffractée dans la direction θ par un motif.

3.4 Exercices

3.4.1 Vecteur de Poynting et densité d'énergie électromagnétique

Université Paul SABATIER, Toulouse

Durée 30 min

- Établir l'équation de l'énergie électromagnétique (conseils : commencer par multiplier scalairement par \vec{B} les deux membres de l'équation de MAXWELL contenant le rotationnel de \vec{E} et vice-versa ; utiliser les formules

$$\operatorname{div} (\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}) = \vec{\beta} \cdot \operatorname{rot} \vec{\alpha} - \vec{\alpha} \cdot \operatorname{rot} \vec{\beta}$$

et

$$\vec{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{\alpha}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha^2}{\partial t}$$

où $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ sont des vecteurs fonctions de x, y, z et t).

2. Que représentent les quantités suivantes :

- $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right)$
- $\vec{\mathcal{P}} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ et $\mathcal{P} = \int_S \vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{n} dS$ (S surface de normale \vec{n})
- $s = \vec{j} \cdot \vec{E}$ où \vec{j} est la densité de courant.

3. Justifier en détails l'interprétation :

- a) de $\vec{\mathcal{P}}$ (on pourra se placer dans une région vide et se référer à une équation de conservation connue) ;
 - b) de s (on pourra commencer par évaluer l'énergie gagnée par un électron soumis au champ $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ pendant l'unité de temps).
4. Est-ce que l'équation de l'énergie électromagnétique décrit la conservation de l'énergie électromagnétique ? Justifier votre réponse en expliquant le bilan énergétique complet. Illustrer cette réponse avec un exemple simple.

Solution

1. Les équations de MAXWELL concernées s'écrivent :

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{cases}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \text{div} \left(\vec{E} \wedge \vec{B} \right) &= \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{B} \\ &= -\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu_0 \vec{E} \cdot \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right), \end{aligned}$$

que nous réécrivons :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \text{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0.}$$

Il s'agit de l'équation bilan de l'énergie électromagnétique.

2. \mathcal{E} représente la densité volumique d'énergie électromagnétique. $\vec{\mathcal{P}}$ est le vecteur de POYNTING de l'onde électromagnétique. Son flux \mathcal{P} à travers une

surface S est la puissance électromagnétique traversant S dans le sens de la normale \vec{n} . Quant à la grandeur s , elle représente la puissance électromagnétique cédée par unité de volume aux particules.

3. Interprétation. Il est intéressant de répondre tout de suite à la question 3.b). Considérons une particule de charge q , de masse m , animée d'une vitesse \vec{v} . Celle-ci est en général plongée dans un champ $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ et ressent donc la force :

$$\vec{f} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right).$$

La puissance de cette force est

$$\vec{f} \cdot \vec{v} = q \vec{E} \cdot \vec{v},$$

puisque la force magnétique $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ ne travaille pas (elle est à tout moment orthogonale à la vitesse et donc au déplacement). Si l'on s'intéresse non plus à une charge ponctuelle mais à une distribution décrite par la densité volumique ρ , un volume élémentaire δv reçoit la puissance $\rho \vec{v} \cdot \vec{E} \delta v$. La densité volumique de puissance gagnée par les charges est donc :

$$s = \rho \vec{v} \cdot \vec{E} = \vec{j} \cdot \vec{E}.$$

Intégrons la relation trouvée à la question 1. sur un volume V délimité par une surface fermée S .

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \mathcal{E} d^3v + \iiint_V \operatorname{div} \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} d^3v + \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} d^3v = 0.$$

À l'aide du théorème de la divergence, nous pouvons écrire

$$\iiint_V \operatorname{div} \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} d^3v = \oiint_S \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{S}.$$

Lorsque le volume V est l'espace tout entier, le terme précédent est nul (nous admettons que les champs décroissent suffisamment vite à l'infini). On a donc

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \mathcal{E} d^3v = - \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} d^3v.$$

Au vu des considérations précédentes sur s , nous pouvons dire que $\iiint \mathcal{E} d^3v$ représente l'énergie du champ électromagnétique. Lorsque celle-ci diminue, les charges reçoivent de l'énergie de la part du champ. D'un point de vue local, \mathcal{E} est donc la densité volumique d'énergie du champ $\{\vec{E}, \vec{B}\}$.

Il nous reste à interpréter le vecteur \vec{P} . Plaçons nous dans une région vide de charge,

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{P} = 0 \quad \text{car} \quad \vec{j} = \vec{0}.$$

Cette équation a la même forme que l'équation locale de conservation de la charge (ou de la masse)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0,$$

ρ étant la densité volumique de charge et \vec{j} le vecteur courant de charge (voir par exemple le problème 5.3.2). Sans calcul supplémentaire, on peut donc interpréter le vecteur \vec{P} comme le vecteur densité de courant d'énergie électromagnétique.

4. L'énergie électromagnétique ne se conserve qu'à condition que l'onde ne cède pas d'énergie à des charges. Nous avons vu que la grandeur s traduisait cette perte du champ au profit des charges. Lorsque $\vec{j} = \vec{0}$, $s = 0$ et l'énergie électromagnétique se conserve. Mais en règle générale, c'est la somme de l'énergie électromagnétique et de l'énergie cinétique des charges qui se conserve.

Prenons l'exemple simple d'une charge soumise à un champ \vec{E} constant, comme c'est le cas entre les armatures d'un condensateur. Le champ cède de l'énergie à la charge qui accroît son énergie cinétique. Le champ électrique reste néanmoins constant : le générateur qui maintient fixe la différence de potentiel entre les armatures fournit de l'énergie au champ électromagnétique.

3.4.2 Le bleu du ciel...

Durée 10 min

La puissance moyenne rayonnée à grande distance par un dipôle électrique de moment dipolaire $\vec{p} = p_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$ s'exprime sous la forme :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

où c est la vitesse de la lumière. En vous aidant de ce résultat, expliquer pourquoi le ciel est bleu et pourquoi le soleil nous apparaît rouge au moment de son lever ou de son coucher. De quelle couleur est le ciel sur la lune ?

EXERCICES

Solution

Les molécules d'air constituant l'atmosphère sont polarisables et acquièrent un moment dipolaire oscillant sous l'action du champ électrique de la lumière. Ce moment dipolaire oscille à la fréquence de la radiation lumineuse qui excite les électrons des molécules. Les orientations des dipôles oscillants étant aléatoires, il n'y a pas d'interférences entre les rayonnements émis par ces molécules. Or, la puissance moyenne rayonnée par un dipôle oscillant est proportionnelle à $p_0^2 \omega^4$: $\langle \mathcal{P} \rangle \propto p_0^2 \omega^4$. Par ailleurs, la pulsation ω d'un rayonnement lumineux est inversement proportionnelle à la longueur d'onde $\omega \propto 1/\lambda$, soit $\langle \mathcal{P} \rangle \propto p_0^2 / \lambda^4$. Nous pouvons considérer pour les rayonnements visibles que p_0 ne dépend pas de ω : $\langle \mathcal{P} \rangle$ est d'autant plus important que λ est petit.

L'atmosphère rayonne donc de manière plus intense les faibles longueurs d'onde : le bleu est plus diffusé que le rouge. Ainsi, en regardant le ciel, nous le voyons bleu. Cela signifie aussi que la lumière provenant directement du soleil (et qui n'a pas été diffusée par les molécules d'air) est « appauvrie » en bleu. Sur la lune, le ciel est noir, en raison de l'absence d'atmosphère.

Au lever ou au coucher du soleil, l'épaisseur d'atmosphère traversée par les rayons solaires est plus importante que dans la journée : la lumière provenant du soleil s'appauvrit davantage en bleu, ce qui « rougit » le soleil lorsque nous le regardons.

Remarque : à titre indicatif, en utilisant un modèle isotherme de l'atmosphère (où la densité varie exponentiellement avec l'altitude), on obtient, pour chaque longueur d'onde, l'estimation suivante de l'intensité lumineuse reçue à la surface de la terre :

	Zénith	Lever ou Coucher
Rouge ($\lambda = 0,65 \mu\text{m}$)	0,96	0,21
Vert ($\lambda = 0,52 \mu\text{m}$)	0,90	0,024
Violet ($\lambda = 0,41 \mu\text{m}$)	0,76	0,000065

par rapport à l'intensité des rayons solaires de même longueur d'onde avant leur entrée dans l'atmosphère. Le soleil apparaît d'autant plus « rouge » qu'il est éloigné du zénith.

3.4.3 Électromagnétisme et changement de référentiel

Durée 15 min

Soient \mathcal{R} et \mathcal{R}' deux référentiels galiléens. \mathcal{R}' est en translation par rapport à \mathcal{R} à la vitesse \vec{u} . Dans \mathcal{R} , une charge q est soumise au champ électromagnétique $\{\vec{E}, \vec{B}\}$. Dans \mathcal{R}' , ce champ est noté $\{\vec{E}', \vec{B}'\}$. Dans le cadre de la mécanique newtonienne, la force est invariante par changement de référentiel galiléen. En postulant l'invariance de la charge, déterminer la formule de transformation du champ électromagnétique par changement de référentiel galiléen. Quelles sont les limitations de cette approche ?

Solution

Soit \vec{v} la vitesse de la charge q dans \mathcal{R} . La force de LORENTZ agissant sur la charge q est

$$\vec{f} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right).$$

Dans le référentiel \mathcal{R}' , la charge q se déplace à la vitesse $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$ et est soumise à la force

$$\vec{f}' = q \left(\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}' \right).$$

En écrivant $\vec{f} = \vec{f}'$, il vient :

$$\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{E}' + \vec{v} \wedge \vec{B}' - \vec{u} \wedge \vec{B}'.$$

Cette relation doit être valable quelle que soit la vitesse \vec{v} de la particule d'où

$$\boxed{\begin{cases} \vec{E}' = \vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B} \\ \vec{B}' = \vec{B} \end{cases}}$$

qui indique de quelle façon le champ électromagnétique est affecté par le passage de \mathcal{R} à \mathcal{R}' .

Si u se rapproche de la vitesse de la lumière c , il faut se placer dans un cadre relativiste et la force n'est plus invariante par changement de référentiel galiléen. De même, la relation $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$ est un cas limite de la transformation de LORENTZ, valable seulement pour $u \ll c$.

Remarque : on constate d'après les expressions précédentes qu'une approche classique permet d'obtenir un terme de transformation du champ électrique mais aucun terme de transformation du champ magnétique. De ce fait, la relation de transformation classique du champ magnétique peut être aisément mise en défaut. Considérons un paquet de charges positives, fixes dans le référentiel mobile \mathcal{R}' . Le champ magnétique est *rigoureusement* nul dans ce référentiel ($\vec{B}' = \vec{0}$), alors que dans \mathcal{R} , les charges sont en mouvement et créent un champ magnétique ($\vec{B} \neq \vec{0}$). Dans ce cas, on doit avoir $\vec{B} \neq \vec{B}'$, la différence entre ces deux champs étant une correction relativiste à la loi « classique » qui a été obtenue plus haut.

3.4.4 Utilisation des polariseurs en photographie.

Durée 20 min

EXERCICES

1. Lorsque l'on observe le ciel bleu dans une direction perpendiculaire à celle du soleil, on constate que la lumière est polarisée rectilignement, bien que la lumière provenant du soleil ne soit pas polarisée.
Expliquer, à partir de cette remarque, comment modifier le contraste entre le ciel bleu et les objets à photographier, en utilisant un seul polariseur dont on précisera la nature.
2. À l'aide de deux polariseurs rectilignes, comment peut-on éliminer les reflets du flash lors d'une prise de vue à travers une vitre (on supposera que l'éclairage est normal à la vitre)? Voyez-vous un inconvénient à cette méthode?
3. On considère l'association d'un polariseur rectiligne (P) et d'une lame quart d'onde (voir la figure 3.13), sous incidence normale.
 - a) Pour quelle orientation du polariseur voit-on le miroir obscur? Justifier votre réponse.
 - b) En déduire une méthode permettant de supprimer, comme à la question 2., les reflets du flash (on négligera, comme souvent en photographie, l'influence de la longueur d'onde sur l'effet produit par les lames).

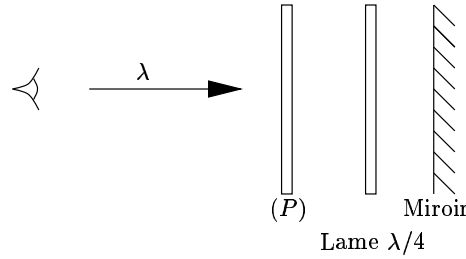


FIG. 3.13 - Association d'un polariseur rectiligne (P) et d'une lame $\lambda/4$.

Solution

1. La lumière diffusée par le ciel bleu étant polarisée rectilignement, seule l'utilisation d'un polariseur rectiligne convient : en faisant tourner la direction du polariseur par rapport à celle de la polarisation de la lumière du ciel, on peut faire varier le contraste de la scène à photographier en diminuant l'intensité lumineuse du ciel.

2. En plaçant un polariseur rectiligne sur le flash et un polariseur rectiligne sur l'objectif, leurs directions étant perpendiculaires, on supprime les réflexions parasites : la lumière émise par le flash est polarisée rectilignement. Sa réflexion sur la vitre ne change pas cette polarisation, qui est perpendiculaire au polariseur placé sur l'objectif.

Cependant, l'objectif ne laisse passer qu'une lumière polarisée rectilignement en provenance de l'autre côté de la vitre, ce qui peut représenter un inconvénient : certaines polarisations naturelles sont rectilignes (bleu de la mer, lumière naturelle réfléchie par un miroir sous l'incidence de BREWSTER...) et peuvent donc être arrêtées par ce dispositif. Une solution à ce problème est présentée à la question suivante.

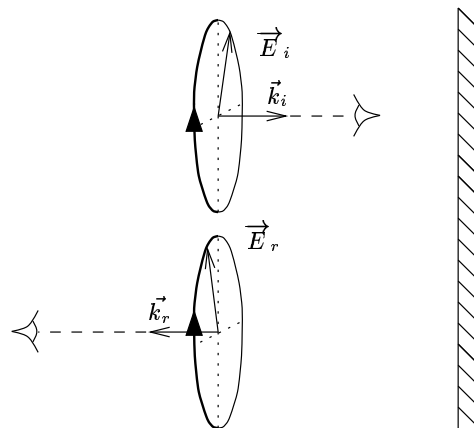


FIG. 3.14 - Effet de la réflexion sur une onde polarisée circulaire droite.

EXERCICES

3.a) L'association d'un polariseur (P) et d'une lame $\lambda/4$ permet d'obtenir, à partir d'une lumière naturelle, une polarisation elliptique. Si le polariseur est à 45° des lignes neutres de la lame $\lambda/4$ selon la première (resp. deuxième) bissectrice, on obtient une onde polarisée circulaire droite (resp. gauche).

La réflexion de cette onde circulaire sur le miroir inverse le sens de la polarisation (voir figure 3.14).

Ainsi, en plaçant le polariseur à 45° des lignes neutres de la lame quart d'onde, selon la première bissectrice par exemple, la lumière incidente subira les transformations décrites sur la figure 3.15. La lumière est d'abord polarisée suivant la première bissectrice. Après réflexion sur le miroir et passage à travers la lame quart d'onde, la polarisation est suivant la seconde bissectrice, orthogonale à la première, d'où l'extinction après passage par (P).

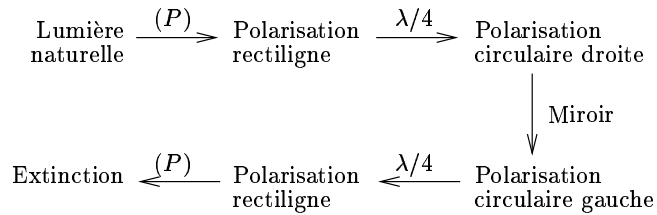


FIG. 3.15 - Dispositif d'extinction de la lumière réfléchie par le miroir.

3.b) L'utilisation d'un ensemble $((P) + \lambda/4)$, dans la configuration de la question précédente, sur le flash et sur l'objectif permet d'éliminer les reflets de la vitre. Cette méthode offre l'avantage, par rapport à celle de la question 2., de n'arrêter que certaines polarisations circulaires provenant de l'autre côté de la vitre (type de polarisation rare dans la « nature » : par exemple, la carapace de certains insectes polarise la lumière circulairement).

Remarque : en pratique, l'éclairage n'a pas lieu sous incidence normale. L'effet des polariseurs est donc plus complexe, et les deux méthodes proposées ne font que diminuer les reflets du flash. De plus, l'introduction des polariseurs diminue l'intensité de la lumière reçue sur la pellicule, effet dont il faut tenir compte lors de la prise de vue...

3.4.5 Application du critère de Rayleigh au pouvoir séparateur d'une lunette astronomique

Durée 10 min

On considère une lunette astronomique de diamètre $D = 2R$. Cette lunette pointe vers une étoile (considérée comme une source ponctuelle à l'infini) émettant une lumière de longueur d'onde λ_0 . Une seconde étoile, émettant un rayonnement de même longueur d'onde et de même intensité que la première, se situe à un angle α de la première, c'est-à-dire à un angle α de l'axe de la lunette.

Résultats

- La figure de diffraction d'un diaphragme circulaire de rayon R éclairé par une lumière de longueur d'onde λ est centrée sur l'image géométrique de la source et se compose d'une tâche centrale très intense (tâche d'AIKY), de diamètre $1,22\lambda/R$, et de lobes secondaires d'intensité négligeable.
- Critère de RAYLEIGH : la limite de résolution d'un système optique est la séparation de deux objets donnant dans l'espace image deux tâches de diffraction telles que le maximum central de l'une coïncide avec le premier minimum de l'autre.

En utilisant ces résultats, donner la limite inférieure α_0 de l'angle α permettant de distinguer les deux étoiles. En déduire la limite de résolution de la lunette astronomique (simplifiée) considérée.

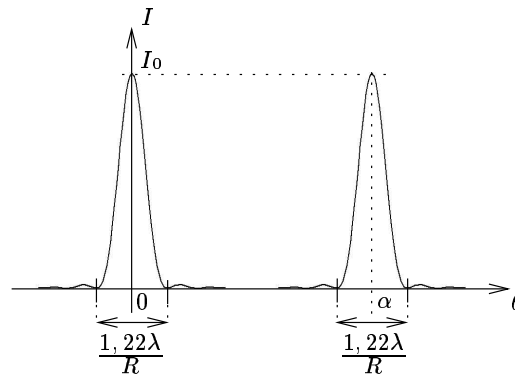
Solution

FIG. 3.16 - La figure de diffraction des deux étoiles séparées d'un angle α (θ est l'angle d'observation par rapport à l'axe de la lunette)

Chacune des deux étoiles donne, sur l'écran d'observation (dont le rôle peut être joué par l'œil), une figure de diffraction comportant une tâche d'AIKY centrée sur l'image géométrique de l'étoile (voir la figure 3.12 des rappels de cours) ; la figure de diffraction de la première étoile est centrée sur l'axe de la lunette tandis que la figure de diffraction de la seconde est centrée autour d'un angle α par rapport à l'axe de la lunette (voir la figure 3.16).

Chaque tâche d'AIKY a pour diamètre $1,22\lambda/R$. Ainsi, en appliquant le critère de RAYLEIGH, on pourra distinguer les deux tâches de diffraction si

$$\alpha \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1,22\lambda}{R} \right) = \frac{1,22\lambda}{D}.$$

D'où

$$\boxed{\alpha_0 = \frac{1,22\lambda}{D}}.$$

L'angle α_0 est la limite de résolution de cette lunette astronomique, car on considère dans ce modèle que la seule source de diffraction est un diaphragme circulaire de rayon R . En augmentant R , on diminue l'extension de la tâche et on améliore la résolution de la lunette.

3.5 Problèmes

3.5.1 Propagation guidée ; cavité

Université de Versailles

Durée 1 h 30

Un guide d'onde rectangulaire est formé de quatre plaques métalliques. Deux sont parallèles au plan yOz et situées en $x = 0$ et $x = a$ (voir la figure 3.17). Les dimensions dans la direction Oy n'interviennent pas. Dans tout le problème, les plaques métalliques seront assimilées à des conducteurs parfaits.

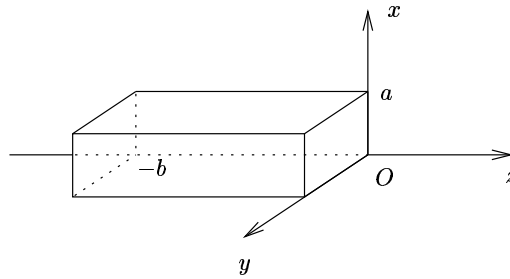


FIG. 3.17 - Vue schématique du guide d'onde

Une onde électromagnétique se propage dans l'espace vide intérieur à ce guide. Son vecteur champ électrique en un point M est de la forme :

$$\vec{E}(M, t) = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(kz - \omega t)} \vec{e}_y.$$

1. L'onde électromagnétique ci-dessus est-elle plane? Écrire l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M, t)$. Calculer le vecteur de POYNTING $\vec{R}(M, t)$, puis sa valeur moyenne dans le temps ; que représente cette valeur?
2. Établir la relation de dispersion du vecteur d'onde k en fonction de ω . Calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe de l'onde électromagnétique.
3. On ferme le guide d'onde à l'une de ses extrémités en plaçant perpendiculairement à l'axe Oz une plaque métallique en $z = 0$. Montrer qu'il existe un champ réfléchi $\vec{E}_r(M, t)$ à l'intérieur du guide. Donner l'expression de ce champ.

4. Quelle est alors l'expression du champ électrique $\vec{\mathcal{E}}(M, t)$ en tout point à l'intérieur du guide?
5. Pour former une cavité, le guide est fermé à l'autre extrémité en $z = -b$, également par une plaque métallique perpendiculaire à Oz . Montrer que le champ électromagnétique ne peut exister à l'intérieur de cette cavité que pour certaines valeurs de la fréquence, que l'on déterminera.

Solution

1. Il est possible d'écrire le champ électrique sous la forme :

$$\vec{E}(M, t) = \frac{E_0}{2i} \left\{ \exp i \left(\frac{\pi x}{a} + kz - \omega t \right) - \exp i \left(-\frac{\pi x}{a} + kz - \omega t \right) \right\} \vec{e}_y.$$

Ainsi, ce champ est la superposition de deux ondes planes progressives monochromatiques de vecteurs d'onde $(\pi/a, 0, k)$ et $(-\pi/a, 0, k)$. Cette onde progressive selon les z croissants et monochromatique n'est en revanche pas une onde plane : le champ réel s'écrit

$$\vec{E}_R = E_0 \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \cos(kz - \omega t) \vec{e}_y$$

et l'équation

$$\sin(\pi x/a) \cos(kz - \omega t) = C^{\text{te}}$$

ne définit pas une droite dans le plan (xz) .

On peut remarquer que la composante du champ suivant \vec{e}_y (qui est la seule non nulle) ne dépend pas de y . Par conséquent, $\text{div } \vec{E} = 0$, ce qui traduit l'absence de charges à l'intérieur du guide.

Calculons le champ magnétique à l'aide de la relation

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

$$\text{rot } \vec{E} = \begin{pmatrix} -\partial E_y / \partial z \\ 0 \\ \partial E_y / \partial x \end{pmatrix} = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \begin{pmatrix} -ik \sin(\pi x/a) \\ 0 \\ (\pi/a) \cos(\pi x/a) \end{pmatrix}.$$

On obtient \vec{B} par intégration sur le temps. La constante d'intégration est nulle pour assurer que $\vec{B} = \vec{0}$ lorsque $\vec{E} = \vec{0}$ puisqu'on ne s'intéresse pas aux phénomènes statiques :

$$\boxed{\vec{B}(M, t) = \frac{1}{i\omega} E_0 e^{i(kz - \omega t)} \left[-ik \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \vec{e}_x + \frac{\pi}{a} \cos \left(\frac{\pi x}{a} \right) \vec{e}_z \right]}.$$

On peut vérifier que le champ magnétique est de divergence nulle et que les champs électriques et magnétiques satisfont bien les conditions aux limites sur les plaques métalliques en $x = 0$ et en $x = a$:

$$\vec{E} \wedge \vec{e}_x = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{B} \cdot \vec{e}_x = \vec{0}.$$

Le vecteur de POYNTING est défini par

$$\vec{R}(M, t) = \frac{1}{\mu_0} \left\{ \text{Re} \left[\vec{E}(M, t) \right] \right\} \wedge \left\{ \text{Re} \left[\vec{B}(M, t) \right] \right\}.$$

Il est calculé à partir des champs réels.

$$\vec{R}(M, t) = \frac{E_0^2}{\omega \mu_0} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(kz - \omega t) \left[\frac{\pi}{a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(kz - \omega t) \vec{e}_x + k \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(kz - \omega t) \vec{e}_z \right].$$

Calculons la valeur moyenne de $\vec{R}(M, t)$ sur une période temporelle $T = 2\pi/\omega$

$$\langle \vec{R}(M, t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{R}(M, t) dt,$$

d'où

$$\langle \vec{R}(M, t) \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0\omega} k \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \vec{e}_z.$$

Considérons un volume V quelconque délimité par une surface (Σ) de vecteur normal sortant \vec{n} (cf. figure 3.18).

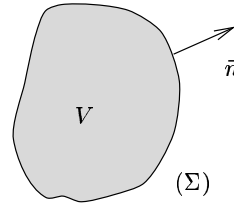


FIG. 3.18 - Surface de calcul du flux du vecteur de POYNTING

Le flux du vecteur de POYNTING sur la surface (Σ) ,

$$\oiint_{\Sigma} \vec{R} \cdot \vec{n} dS$$

est le flux instantané d'énergie traversant la surface (Σ) par unité de temps. Il s'agit de la puissance fournie par V à l'extérieur. Le complément développé à la fin de la question suivante permettra d'interpréter plus quantitativement le vecteur de POYNTING.

2. Établissons l'équation d'onde pour \vec{E} :

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

puisque aucun courant ne circule à l'intérieur de la cavité. Par ailleurs, les opérateurs rot et $\partial/\partial t$ commutent puisqu'ils portent sur des variables différentes, d'où

$$\text{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = -\text{grad}(\text{div} \vec{E}) + \Delta \vec{E}.$$

Puisque le champ électrique est ici de divergence nulle, il vient :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Le champ magnétique obéit à la même équation. On en déduit :

$$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

La relation de dispersion est donc :

$$\boxed{\omega^2 = \omega_c^2 + k^2 c^2},$$

où l'on a posé $\omega_c = \pi c/a$. Il s'agit d'une pulsation de coupure dans la mesure où l'onde envisagée ne peut se propager que pour $\omega > \omega_c$.

La vitesse de phase a pour expression :

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c \sqrt{1 + \frac{\omega_c^2}{k^2 c^2}}}.$$

et la vitesse de groupe

$$\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk} = c / \sqrt{1 + \frac{\omega_c^2}{k^2 c^2}} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}.$$

Pour toutes les relations de dispersion du type

$$\omega^2 = C^{\text{te}} + k^2 c^2,$$

on a

$$2\omega d\omega = c^2 2k dk \quad \text{i.e.} \quad v_g v_\varphi = c^2.$$

C'est bien le cas ici (la vitesse de phase est supérieure à la vitesse de la lumière mais $v_g < c$ et l'énergie se propage à la vitesse de groupe v_g). Remarquons que ce type d'onde transporte d'autant plus vite l'énergie que ses variations spatiales sont rapides, c'est-à-dire k grand ou encore $\lambda = 2\pi/k$ (longueur d'onde) petite.

Complément : il est possible de retrouver l'expression de la vitesse de groupe à partir du vecteur de POYNTING et de la densité d'énergie électromagnétique u (voir aussi l'exercice 3.4.1) :

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}.$$

Dans le cas présent, en valeur moyenne sur le temps :

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon_0 \frac{E_0^2}{2} \sin^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) + \frac{E_0^2}{2\mu_0 \omega^2} \left[k^2 \sin^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) + \frac{\pi^2}{a^2} \cos^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) \right] \right\},$$

d'où

$$\langle u \rangle(M) = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} \left[\left(1 + \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) + \frac{\pi^2 c^2}{a^2 \omega^2} \cos^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) \right].$$

Pour retrouver l'expression de v_g , considérons la surface S suivante

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq \ell \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{où } \ell \text{ est arbitraire.}$$

Pendant un intervalle de temps $T = 2\pi/\omega$, l'énergie qui traverse S est simplement

$$T \iint_S \langle \vec{R} \rangle(M) \cdot \vec{dS}.$$

Or, l'énergie se déplace à la vitesse de groupe, ce qui implique que la quantité d'énergie traversant la surface S durant T est contenue dans le parallélépipède \mathcal{P} défini par :

$$\mathcal{P} \begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq \ell \\ -v_g T \leq z \leq 0 \end{cases},$$

d'où

$$T \iint_S \langle \vec{R} \rangle(M) \cdot \vec{dS} = \iiint_{\mathcal{P}} \langle u \rangle(M) d^3v.$$

Évaluons séparément les deux membres de la relation précédente.

$$\begin{aligned} \iint_S \langle \vec{R} \rangle(M) \cdot \vec{dS} &= a \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4\omega} k c^2 \ell, \\ \iiint_{\mathcal{P}} \langle u \rangle(M) d^3v &= \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{8} \left[1 + \frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \frac{\pi^2 c^2}{a^2 \omega^2} \right] \underbrace{v_g T \ell a}_{\text{volume de } \mathcal{P}}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$2 \frac{k c^2}{\omega} = v_g \left(1 + \frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \frac{\pi^2 c^2}{a^2 \omega^2} \right) = 2v_g,$$

c'est-à-dire que l'on retrouve

$$v_g = \frac{k c^2}{\omega} = \frac{c^2}{v_\varphi}.$$

3. On met un conducteur parfait en $z = 0$. Cela signifie que le champ électrique total doit s'annuler sur ce plan. Or

$$\text{Re} \left[\vec{E}(M, t) \right] \neq \vec{0} \quad \text{pour } z = 0.$$

On en déduit l'existence d'un champ réfléchi $\vec{E}_r(M, t)$ de telle sorte que $\vec{E} + \vec{E}_r$ s'annule sur la plaque ajoutée en $z = 0$.

Pour étudier le phénomène de réflexion, il est plus simple de raisonner sur une onde plane de vecteur d'onde \vec{k} (\vec{E} est la somme de deux ondes planes) : la composante de \vec{k} tangente à la paroi se conserve tandis que la composante orthogonale change de signe. Le métal étant parfait, le coefficient de réflexion est égal à -1 , i.e. $E_r = -E_0$. Ainsi,

$$\vec{E}_r(M, t) = -E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i(kz + \omega t)} \vec{e}_y.$$

4. Le champ électrique total est :

$$\vec{\mathcal{E}}(M, t) = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i\omega t} (e^{ikz} - e^{-ikz}) \vec{e}_y,$$

ce qui correspond à un champ réel :

$$\vec{\mathcal{E}}_R(M, t) = \text{Re} \left[\vec{\mathcal{E}}(M, t) \right] = 2E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(kz) \sin(\omega t) \vec{e}_y.$$

Le champ électrique dans la cavité est une onde stationnaire.

5. Une autre plaque est ajoutée en $z = -b$; il faut alors avoir $\sin kb = 0$ pour assurer la nullité du champ total en $z = -b$. Les seules valeurs admissibles de k sont de la forme :

$$k_n = \frac{n\pi}{b}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Le champ électrique obéit toujours à l'équation d'onde de la question 2. :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2} - n^2 \frac{\pi^2}{b^2} \right) \vec{\mathcal{E}} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Posons

$$\omega_n = \pi c \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z}.$$

Nous voyons que si $\omega \neq \omega_n$, l'équation de dispersion implique la nullité du champ électrique total. Celui-ci ne peut exister dans la cavité que pour des valeurs quantifiées de la fréquence. On parle de « modes » associés à chaque valeur de n , les différents modes étant sélectionnés par les conditions aux limites.

3.5.2 Introduction à l'effet de peau ; diffraction par un réseau

Université d'Angers

Durée 3 h

Les deux parties de ce sujet sont indépendantes.
Les calculatrices sont interdites.

Électromagnétisme (2 h 30) :

On cherche à étudier l'état d'un conducteur homogène, en régime harmonique de pulsation ω . Le champ électrique et la densité de courant seront représentés en notation complexe

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t} \quad \text{et} \quad \vec{j} = \vec{j}_0 e^{-i\omega t}.$$

Les applications numériques concernent un métal de conductivité

$$\sigma = 5 \cdot 10^7 \text{ U.S.I..}$$

1. Ordres de grandeur, propriétés et équations dans un conducteur.

- Jusqu'à quelle valeur de la fréquence ν le courant de déplacement $\vec{j}_D = \varepsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$ est-il inférieur au centième de \vec{j} ? Dans quel domaine du spectre électromagnétique cette fréquence est-elle située? On se placera dans la suite du problème dans le cas où \vec{j}_D est négligeable.
- Énoncer les propriétés relatives aux conducteurs.
- Énoncer les équations de MAXWELL dans un conducteur.

2. Première méthode de résolution.

- À partir des équations de MAXWELL, établir une équation locale relative à \vec{E} et en déduire une relation locale pour \vec{j} :

$$\Delta \vec{j} + i\omega \mu_0 \sigma \vec{j} = 0.$$

- Le conducteur précédent occupe le demi-espace défini par $z > 0$. Cet espace est parcouru par des courants parallèles à Oy :

$$\vec{j} = j(z) \vec{u}_y.$$

Déduire de l'équation précédente que $j(z)$ est de la forme

$$j(z) = j_0 e^{-z/\delta} e^{-i(\omega t - \varphi)}.$$

Exprimer δ en fonction de σ et ν , et φ en fonction de z et δ . Déduire la signification physique du résultat obtenu.

- c) Exprimer en fonction de δ , b et j_0 le courant qui parcourt la région du conducteur définie par $-b/2 < x < b/2$.
En déduire l'intensité efficace du courant.
- d) Exprimer en fonction de I_{eff} , σ , l et δ la puissance moyenne dissipée par effet JOULE dans la région définie par

$$\frac{-b}{2} < x < \frac{b}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-l}{2} < y < \frac{l}{2}.$$

En déduire que le conducteur offre au courant une résistance qui est la même que celle d'une plaque d'épaisseur δ et parcourue par un courant continu.

3. Deuxième méthode de résolution.

On cherche une solution des équations de MAXWELL correspondant à des ondes planes progressives de pulsation ω . On cherche pour \vec{E} des solutions de la forme $\vec{E} = E_0 f(z) e^{i(kz - \omega t)} \vec{u}_y$, où $f(z)$ est une fonction que l'on se propose de calculer.

- a) À partir de \vec{E} , déterminer \vec{B} et vérifier que ces deux champs sont bien à divergence nulle.
- b) En écrivant l'équation de MAXWELL-AMPÈRE et en négligeant le courant de déplacement comme précédemment, montrer que l'on obtient

$$f(z) = Ae^{-z/\delta}.$$

Donner l'expression de k et δ , où δ est appelée la profondeur de pénétration dans le conducteur.

- c) Calculer le vecteur de POYNTING.
- d) En déduire l'énergie qui se propage dans le conducteur dans une région définie par

$$\frac{-b}{2} < x < \frac{b}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-l}{2} < y < \frac{l}{2}.$$

Conclusion.

Optique (30 min) :

1. On éclaire par transmission un réseau plan comportant 500 traits/mm à l'aide d'un faisceau parallèle de lumière ayant deux composantes monochromatiques de longueur d'onde $\lambda_1 = 656,3 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = 486,1 \text{ nm}$.
- a) En établissant la différence de marche entre deux rayons diffractés consécutifs, déterminer la relation entre la direction θ_0 de la lumière incidente, la direction θ de la lumière transmise pour les maxima principaux, la longueur d'onde λ et le pas e du réseau.
- b) Dans le cas de l'incidence normale ($\theta_0 = 0$) déterminer, pour chaque longueur d'onde, le nombre de maxima principaux que l'on peut observer.

2. On éclaire une fente rectiligne de largeur a par un faisceau parallèle de lumière monochromatique normalement au plan de la fente. Donner, sans calcul mais en précisant le raisonnement conduisant au résultat, l'expression de l'intensité diffractée dans une direction quelconque.

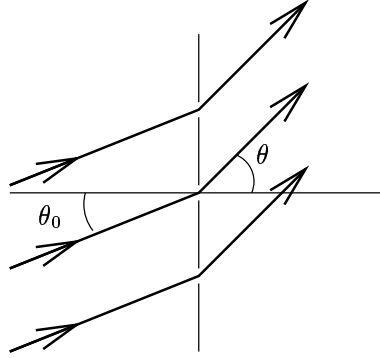


FIG. 3.19 - Réseau optique en transmission.

Solution

Électromagnétisme :

1.a) Le courant \vec{j} est lié au champ électromagnétique par la loi d'OHM locale :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E},$$

où la conductivité σ dépend de la fréquence. Cependant, pour des fréquences suffisamment basses, la conductivité du matériau peut être assimilée à sa valeur statique σ_0 (voir la remarque 1 à la fin de la partie II du problème 3.5.6). C'est le cadre dans lequel on se place de façon implicite dans ce problème, en supposant que la conductivité est constante.

Dans le cas d'une onde électromagnétique plane, en notation complexe, le courant de déplacement vaut quant à lui

$$\vec{j}_D = -i\omega\varepsilon_0 \vec{E}.$$

La condition de l'énoncé se traduit donc par :

$$\begin{aligned} \frac{\|\vec{j}_D\|}{\|\vec{j}\|} < 10^{-2} &\Leftrightarrow \frac{\omega\varepsilon_0}{\sigma} < 10^{-2} \\ &\Leftrightarrow \frac{2\pi\nu\varepsilon_0}{\sigma} < 10^{-2} \\ &\Leftrightarrow \nu < \frac{10^{-2}\sigma}{2\pi\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

Application Numérique : la relation numérique $1/\varepsilon_0 = 36\pi 10^9$ permet d'obtenir une condition sur la longueur d'onde λ de l'onde électromagnétique :

$$\boxed{\lambda > 33 \text{ nm}}.$$

Cette borne inférieure correspond aux rayons U.V. ou aux rayons X. Rappelons pour fixer les idées que les longueurs d'onde de la lumière visible sont approximativement comprises entre 0,4 et 0,8 μm , c'est-à-dire largement dans la zone qui vient d'être définie et dans laquelle on peut négliger le courant de déplacement.

1.b) Les propriétés d'un conducteur sont les suivantes :

- dans le *référentiel du conducteur*, il existe une relation constitutive, linéaire, entre le vecteur densité de courant et le champ électrique ; cette relation appelée loi d'OHM locale s'écrit

$$\vec{j}(\omega) = \sigma(\omega) \vec{E}(\omega)$$

et demeure valable jusqu'à des valeurs du champ électrique d'environ 10^5 V/cm , valeurs auxquelles commencent à apparaître des effets non linéaires ;

- les propriétés diélectriques et magnétiques du matériau sont négligeables, ce qui permet d'écrire $\varepsilon = \varepsilon_0$ et $\mu = \mu_0$;
- tant que les fréquences restent suffisamment faibles (cette condition est moins contraignante que celle permettant de négliger le courant de déplacement), on peut considérer la densité volumique de charge comme étant uniformément nulle :

$$\rho = 0.$$

En effet, en supposant que la conductivité est indépendante de la fréquence, l'équation de conservation de la charge, l'équation de MAXWELL-GAUSS et la loi d'OHM locale se combinent pour donner :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0 \\ \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \rho = 0.$$

Toute perturbation ρ_0 de la densité de charge relaxe donc exponentiellement vers 0 avec un temps caractéristique $\tau = \varepsilon_0/\sigma$. Tant que les fréquences mises en jeu seront inférieures à l'inverse de ce temps, on pourra bien considérer la densité de charge nulle.

1.c) Lorsque l'on tient compte des propriétés énoncées à la question précédente ($\rho = 0$ et $\vec{j}_D = \vec{0}$), on obtient les équations de MAXWELL dans un conducteur :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{div } \vec{E} = 0 \\ \text{div } \vec{B} = 0 \end{array} \right.}$$

2.a) Pour un champ à divergence nulle, comme c'est le cas ici à la fois pour le champ électrique et pour le champ magnétique, on a la relation d'analyse vectorielle :

$$\text{rot rot } \vec{W} = -\Delta \vec{W}.$$

En combinant les deux équations sur les rotationnels, on trouve

$$-\Delta \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}.$$

Dans le référentiel du conducteur, le champ électrique est lié à \vec{j} par la loi d'OHM locale ce qui conduit à la relation

$$\Delta \vec{j} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \vec{0}.$$

Pour un vecteur densité de courant ayant une dépendance temporelle en $e^{-i\omega t}$ en notation complexe, cette équation se réécrit :

$$\boxed{\Delta \vec{j} + i\omega \mu_0 \sigma \vec{j} = \vec{0}}.$$

2.b) On suppose désormais que $\vec{j}(\vec{r})$ est de la forme $j(z)\vec{u}_y$, c'est-à-dire que le vecteur densité de courant s'écrit $j(z)e^{-i\omega t}\vec{u}_y$. Le conducteur occupe la région de l'espace $z > 0$, comme l'indique le schéma de la figure 3.20.

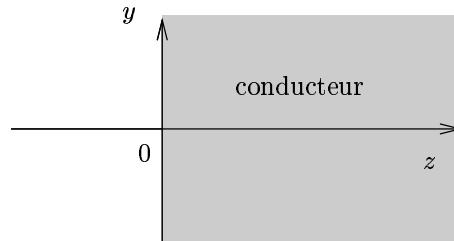


FIG. 3.20 - Région de l'espace occupée par le conducteur.

L'équation trouvée au 2.a) se réduit dans ces conditions à

$$\frac{d^2 j}{dz^2} + \alpha^2 j = 0,$$

où l'on a posé :

$$\alpha^2 = i\omega \mu_0 \sigma.$$

On peut alors exprimer α sous la forme

$$\alpha = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu_0 \omega \sigma},$$

ce qui conduit pour $j(z)$ à :

$$j(z) = Ae^{iz/\delta}e^{-z/\delta} + Be^{-iz/\delta}e^{z/\delta}, \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\omega\sigma}}.$$

Comme $z > 0$ dans le conducteur, le coefficient B est nécessairement nul, afin de prévenir une divergence de $j(z)$ qui n'aurait aucun sens physique. En posant $A = j_0$, on a finalement :

$$j(z, t) = j_0 e^{-z/\delta} e^{-i(\omega t - \varphi)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\omega\sigma}} \\ \varphi = \frac{z}{\delta}. \end{cases}$$

Il apparaît ainsi que la densité de courant décroît exponentiellement lorsque l'on pénètre dans le conducteur avec une distance caractéristique δ ; c'est ce qu'on appelle *l'effet de peau* dans un conducteur : les champs et courants restent localisés à la surface.

2.c) Le courant instantané $I(t)$ parcourant la région du conducteur $-b/2 < x < b/2$ s'exprime en fonction de la densité de courant par la relation intégrale :

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_0^\infty dz \int_{-b/2}^{b/2} dx j_0 e^{-i\omega t} e^{-(1-i)z/\delta} \\ &= bj_0 e^{-i\omega t} \frac{\delta}{1-i} \end{aligned}$$

que l'on peut réécrire

$$I(t) = \frac{bj_0\delta}{2}(1+i)e^{-i\omega t}.$$

Pour calculer l'intensité efficace, il est nécessaire de revenir à la notation réelle. D'après le résultat précédent, l'intensité instantanée réelle est

$$I_R(t) = \frac{bj_0\delta}{2}(\cos\omega t + \sin\omega t).$$

Comme l'intensité efficace est définie par

$$I_{\text{eff}}^2 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} I_R^2(t) dt,$$

on trouve :

$$I_{\text{eff}} = \frac{bj_0\delta}{2}.$$

On peut remarquer que le module maximal de l'intensité est

$$I_{\text{max}} = \frac{bj_0\delta}{2}\sqrt{2}.$$

Ainsi, $I_{\text{max}} = \sqrt{2}I_{\text{eff}}$, relation qui est toujours vérifiée par des signaux sinusoïdaux.

2.d) La puissance cédée par le champ électromagnétique à un volume $d\tau$ de conducteur s'écrit (voir l'exercice 3.4.1) :

$$d\mathcal{P} = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau.$$

En appliquant alors la loi d'OHM locale on obtient :

$$\mathcal{P}_j = \int_V \frac{j_R^2}{\sigma} d\tau.$$

En utilisant l'expression de la partie réelle de la densité de courant, il vient

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}_j \rangle &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt \int_0^\infty dz \, bl \frac{j_0^2 e^{-2z/\delta} \cos^2(\omega t - \varphi(z))}{\sigma} \\ &= \int_0^\infty dz \, bl \frac{j_0^2 e^{-2z/\delta} \langle \cos^2(\omega t - \varphi(z)) \rangle}{\sigma} \\ &= \frac{1}{2} bl \frac{j_0^2}{\sigma} \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

En utilisant l'expression de l'intensité efficace trouvée à la question précédente, cela nous donne :

$$\langle \mathcal{P}_j \rangle = I_{\text{eff}}^2 \frac{l}{b\delta\sigma}.$$

On considère la portion de barreau métallique, de longueur l , parcourue par un courant continu d'intensité I_{eff} , représentée sur la figure 3.21.

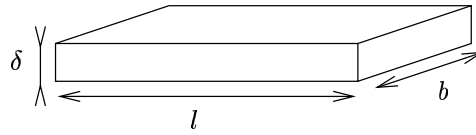


FIG. 3.21 - Barreau de résistance équivalente.

La résistance d'une telle portion de barreau est donnée par la formule :

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

où $\rho = 1/\sigma$ désigne la résistivité du matériau et où S désigne l'aire d'une section droite du barreau : $S = b\delta$. On obtient ainsi

$$R_{\text{barreau}} = \frac{l}{b\delta\sigma}.$$

La puissance moyenne dissipée par effet JOULE dans cette portion de barreau est

$$\langle \mathcal{P} \rangle = R_{\text{barreau}} I_{\text{eff}}^2 = \frac{l}{b\delta\sigma} I_{\text{eff}}^2.$$

On constate que la résistance équivalente du conducteur, que l'on pouvait extrapoler à partir de l'expression de la puissance JOULE dissipée en utilisant :

$$\langle \mathcal{P}_j \rangle = R_{\text{eq}} I_{\text{eff}}^2,$$

est la même que celle d'un barreau de mêmes dimensions transverses que le conducteur mais d'épaisseur δ .

3.a) On cherche désormais la solution sous la forme :

$$\vec{E} = E_0 f(z) e^{i(kz - \omega t)} \vec{u}_y.$$

L'équation de MAXWELL-FARADAY

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

s'exprime dans ces conditions :

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_z E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Il en résulte, en prenant un champ magnétique monochromatique, que :

$$-i\omega \vec{B} = E_0 [f'(z) e^{i(kz - \omega t)} + ikf(z) e^{i(kz - \omega t)}] \vec{u}_x,$$

qui se met sous la forme

$$\boxed{\vec{B} = \frac{iE_0}{\omega} [f'(z) + ikf(z)] e^{i(kz - \omega t)} \vec{u}_x}.$$

Les champs \vec{E} et \vec{B} ne dépendent que de la variable d'espace z et sont respectivement suivant les directions \vec{u}_y et \vec{u}_x ; la divergence de chacun de ces deux champs est donc nulle.

3.b) En négligeant une nouvelle fois le courant de déplacement, l'équation de MAXWELL-AMPÈRE devient

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

En utilisant la loi d'OHM locale dans le référentiel du conducteur, cette dernière relation donne

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \sigma \vec{E}.$$

Effectuant comme à la question précédente le produit vectoriel de l'opérateur $\vec{\nabla}$ avec \vec{B} , on aboutit à

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \frac{\partial B(z)}{\partial z} \vec{u}_y.$$

En prenant pour $B(z)$ l'expression trouvée au 3.a), on trouve finalement que $f(z)$ doit vérifier l'équation différentielle suivante :

$$f''(z) + 2ikf'(z) + (i\mu_0\sigma\omega - k^2)f(z) = 0.$$

On cherche $f(z)$ fonction réelle. Comme k , σ et ω sont eux aussi réels, l'équation précédemment obtenue pour f se décompose en un système de deux équations qui correspondent pour l'une à la partie réelle et pour l'autre à la partie imaginaire. Le système ainsi formé s'écrit :

$$\begin{cases} f'' = k^2 f & (1) \\ f' = -\frac{\mu_0\sigma\omega}{2k} f. & (2) \end{cases}$$

Après dérivation par rapport à z , l'équation (2) devient

$$f'' = -\frac{\mu_0\sigma\omega}{2k} f' = \left(\frac{\mu_0\sigma\omega}{2k}\right)^2 f.$$

Pour que cette dernière relation ainsi que (1) puissent être satisfaites simultanément, il faut que les coefficients de la fonction f soient les mêmes :

$$k^2 = \left(\frac{\mu_0\sigma\omega}{2k}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad k = \pm \sqrt{\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}},$$

car k est une grandeur réelle, ce qui permet d'écartier les racines

$$k = \pm i \sqrt{\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}}.$$

On reporte la valeur obtenue pour k dans (2) pour obtenir

$$f' = \mp \sqrt{\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}} f \quad \Leftrightarrow \quad f(z) = Ae^{\mp z/\delta}.$$

L'impossibilité pour f de diverger aux grands z nous permet de choisir le signe de k et finalement de trouver

$$f(z) = Ae^{-z/\delta} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k = \frac{1}{\delta} \\ \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}}. \end{cases}$$

On peut vérifier que l'on retrouve pour le vecteur densité de courant, le même résultat qu'à la question 2.

3.c) Le vecteur de POYNTING réel a pour expression :

$$\vec{R} = \vec{E}_R \wedge \frac{\vec{B}_R}{\mu_0},$$

où \vec{E}_R (resp. \vec{B}_R) est le champ électrique (resp. magnétique) réel. D'après les résultats des questions 3.a) et 3.b), on a :

$$\begin{cases} \vec{E}_R &= E_0 e^{-z/\delta} \cos(kz - \omega t) \vec{u}_y \\ \vec{B}_R &= \frac{-E_0}{\omega} e^{-z/\delta} \left[k \cos(kz - \omega t) - \frac{1}{\delta} \sin(kz - \omega t) \right] \vec{u}_x, \end{cases}$$

ce qui conduit à

$$\vec{R} = \frac{E_0^2}{\mu_0 \omega} e^{-2z/\delta} \left[k \cos^2(kz - \omega t) - \frac{1}{\delta} \cos(kz - \omega t) \sin(kz - \omega t) \right] \vec{u}_z.$$

Dans les équations précédentes, on a pris $A = 1$ puisque l'amplitude du champ électrique en $z = 0$ est E_0 .

Le vecteur de POYNTING moyenné sur une période temporelle s'écrit quant à lui, en utilisant 3.b) :

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 \omega \delta} e^{-2z/\delta} \vec{u}_z.$$

3.d) Soit \mathcal{P} la puissance qui pénètre dans la région du conducteur définie par $-b/2 < x < b/2$ et $-l/2 < y < l/2$, c'est-à-dire celle qui traverse le plan $z = 0$. Par définition du vecteur de POYNTING :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \int_{-b/2}^{b/2} dx \int_{-l/2}^{l/2} dy \vec{u}_z \cdot \langle \vec{R} \rangle_{(z=0)}.$$

En utilisant l'expression précédente pour la valeur moyenne du vecteur de POYNTING, on obtient

$$\langle \mathcal{P} \rangle = bl \frac{E_0^2}{2\mu_0 \omega \delta}.$$

On effectue un dernier réarrangement de cette relation en utilisant l'expression de δ trouvée à la question 3.b), ce qui donne

$$\langle \mathcal{P} \rangle = bl \delta \frac{\sigma E_0^2}{4}.$$

Que devient cette puissance électromagnétique cédée par le champ au conducteur? Pour le savoir, reprenons l'expression de la puissance JOULE trouvée à la question 2.d). Grâce à la loi d'OHM locale, celle-ci peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}_j \rangle &= bl \delta \frac{j_0^2}{4\sigma} \\ &= bl \delta \frac{\sigma^2 E_0^2}{4\sigma}. \end{aligned}$$

On trouve donc que

$$\langle \mathcal{P}_j \rangle = \langle \mathcal{P} \rangle.$$

Ainsi, la puissance fournie par la source (le champ électromagnétique) est égale à la puissance dissipée par le récepteur (le conducteur). Ici, seul l'effet JOULE est source de dissipation.

Optique :

1.a) Si l'on définit les points O , O' , H et H' comme sur la figure 3.22, la différence de marche entre deux rayons diffractés consécutifs s'exprime au moyen de la relation :

$$\delta = OH' - O'H.$$

Utilisant le pas e du réseau, ainsi que les angles incident θ_0 et transmis θ , cette formule se transforme en :

$$\delta = e (\sin \theta - \sin \theta_0).$$

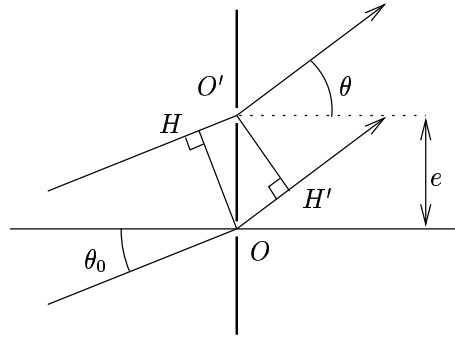


FIG. 3.22 - Calcul de la différence de marche.

Les maxima d'intensité correspondent aux configurations pour lesquelles les interférences entre les différents rayons transmis sont constructives, c'est-à-dire :

$$\delta = n\lambda \quad \Leftrightarrow \quad n \frac{\lambda}{e} = (\sin \theta_n - \sin \theta_0),$$

où θ_n désigne l'angle localisant le maximum d'ordre n . Cette formule peut se réécrire :

$$\sin \theta_n = \sin \theta_0 + n \frac{\lambda}{e}.$$

1.b) Pour $\theta_0 = 0$, la relation précédente devient

$$\sin \theta_n = n \frac{\lambda}{e}.$$

La fonction sinus étant majorée en valeur absolue par 1, l'ordre du dernier maximum observable devra vérifier :

$$\left| N_{\max} \frac{\lambda}{e} \right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |N_{\max}| < \frac{e}{\lambda}.$$

Application Numérique : le réseau comporte 500 traits par millimètre, d'où

$$e = 2\mu m,$$

soit pour l'ordre maximum observable :

$$\begin{cases} |N_{\max}(\lambda_1)| < 3,05 \\ |N_{\max}(\lambda_2)| < 4,11. \end{cases}$$

On peut donc observer 7 maxima principaux avec la première longueur d'onde (ne pas oublier de compter l'ordre 0) et 9 avec la seconde.

Remarque : en pratique, on observe généralement un nombre beaucoup plus petit d'ordres car :

- les angles de déviation deviennent rapidement très grands : pour la première longueur d'onde par exemple, l'ordre $n = 3$ correspond à un angle de déviation $\theta \simeq 80^\circ$;
- l'intensité des maxima principaux diminue avec l'ordre que l'on observe : les intensités des ordres sont modulées par une fonction sinc qui correspond à la dimension finie de chaque trait du réseau (voir le complément à la fin de la question suivante).

2. Pour déterminer l'intensité diffractée dans la direction repérée par un angle α , on applique le principe de HUYGENS-FRESNEL en chaque point P de la fente. Cette dernière est supposée infiniment étendue dans la direction transverse à la figure 3.23. Chaque point de la fente situé en \vec{r}_P se comporte donc comme une source secondaire, qui réémet l'onde incidente avec un déphasage $(\vec{k}_d - \vec{k}_i) \cdot \vec{r}_P$:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \int_{-a/2}^{a/2} e^{i(\vec{k}_d - \vec{k}_i) \cdot \vec{r}_P} dS.$$

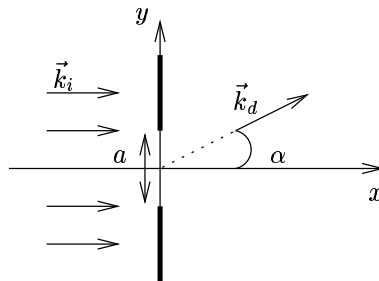


FIG. 3.23 - Diffraction par une fente rectiligne.

PROBLÈMES

Avec les notations adoptées, cette expression devient

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}_0 \int_{-a/2}^{a/2} e^{ikx \sin \alpha} dx \\ &= \mathcal{A}_0 a \frac{2}{ka \sin \alpha} \sin \left(\frac{ka \sin \alpha}{2} \right). \end{aligned}$$

En posant $\text{sinc } u = (\sin u)/u$, on obtient pour l'intensité de l'onde diffractée dans une direction α :

$$\mathcal{I} = |\mathcal{A}|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \text{sinc}^2 \left(\frac{\pi a \sin \alpha}{\lambda} \right)}.$$

Complément : en considérant désormais que l'intervalle entre deux traits du réseau définit une fente d'épaisseur a , l'amplitude diffractée s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \sum_{n=-N}^{n=N} \frac{2\mathcal{A}_0 a}{ka \sin \alpha} \sin \left(\frac{ka \sin \alpha}{2} \right) e^{i(kne \sin \alpha)} \\ &= \frac{2\mathcal{A}_0 a}{ka \sin \alpha} \sin \left(\frac{ka \sin \alpha}{2} \right) \frac{\sin \left(\frac{ke(N + 1/2) \sin \alpha}{2} \right)}{\sin \left(\frac{ke \sin \alpha}{2} \right)} \end{aligned}$$

en utilisant la relation

$$\sum_{n=-p}^{n=q} x^n = x^{(-p)} \frac{1 - x^{(p+q+1)}}{1 - x}$$

et les notations de la figure 3.22. L'intensité diffractée par le réseau devient :

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \text{sinc}^2 \left(\frac{\pi a \sin \alpha}{\lambda} \right) \left[\frac{\sin \left(\frac{\pi e(2N + 1) \sin \alpha}{\lambda} \right)}{\sin \left(\frac{\pi e \sin \alpha}{\lambda} \right)} \right]^2.$$

On retrouve ainsi la formule des réseaux en transmission dans le cas de l'incidence normale (questions 1.a) et 1.b) : le maximum d'intensité d'ordre n est caractérisé par

$$\sin \alpha = \frac{n\lambda}{e}.$$

L'intensité de ce maximum s'écrit alors :

$$\mathcal{I}_n = (2N + 1)^2 \mathcal{I}_0 \text{sinc}^2 \left(\frac{\pi an}{e} \right).$$

En pratique, on peut être dans la situation où $a \simeq e$. Dans ce cas, l'intensité des maxima décroît rapidement avec l'ordre n .

Le réseau, comme le prisme, sont des éléments dispersifs. Cependant, le mécanisme de la dispersion n'est pas le même dans les deux cas : en lumière blanche, le prisme dévient plus la radiation violette que la radiation rouge tandis que le réseau dévient plus la radiation rouge que la radiation violette. Le principal avantage du réseau par rapport au prisme est d'avoir une dispersion angulaire linéaire autour de $\theta = 0$:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} \simeq \frac{n}{e} = Cte$$

ce qui signifie que toutes les longueurs d'onde sont dispersées de la même manière. Ce n'est pas le cas pour le prisme : dans le cas de la lumière blanche, la dispersion angulaire du violet est beaucoup plus importante que celle du rouge. De plus, les réseaux sont des éléments beaucoup plus dispersifs que les prismes, ce qui facilite la mesure de longueurs d'onde. Les réseaux, en transmission comme en réflexion, sont utilisés en spectrométrie et permettent de mesurer de façon très précise des longueurs d'onde.

3.5.3 La supraconductivité

Université Joseph FOURIER, Grenoble

Durée 2 h

Partie I :

Certains métaux ou alliages, à température suffisamment basse, deviennent supraconducteurs. C'est le cas par exemple du plomb. Nous admettrons qu'un tel corps est un conducteur parfait (il ne peut porter aucune charge interne et le champ électrique y est strictement nul) et que d'autre part, la densité de courant \vec{j} y est reliée au potentiel vecteur \vec{A} par la relation fondamentale :

$$\vec{j} = -\frac{2nq^2}{m} \vec{A}, \quad (1)$$

\vec{A} étant choisi de façon que sa divergence soit nulle. Ici, q et m sont respectivement la charge et la masse de l'électron ($q = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $m = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$), n est le nombre d'électrons de conduction par unité de volume ($3 \cdot 10^{28}$ électrons par mètre cube pour le plomb).

1. On définit la quantité

$$\delta = \sqrt{\frac{m}{2nq^2\mu_0}}.$$

Montrer que δ a la dimension d'une longueur. Pour ce faire, on pourra par exemple comparer la formule (1) à celle reliant habituellement \vec{A} à \vec{j} . La calculer dans le cas du plomb (on rappelle que $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ u.S.I.}$). Dans une expérience de laboratoire courante, δ doit-elle être considérée comme très petite ou très grande?

2. À l'intérieur d'un supraconducteur, on écrira les équations de MAXWELL qui sont les mêmes que dans le vide (avec $\vec{E} = \vec{0}$). Montrer, en les combinant avec la relation (1), que le champ magnétique y vérifie une équation de la forme :

$$\Delta \vec{B} - \frac{\vec{B}}{\delta^2} = \vec{0} \quad (2)$$

où Δ est l'opérateur laplacien.

3. L'espace étant rapporté à un repère orthonormé direct $Oxyz$, on considère un supraconducteur dont la surface est le plan d'équation $x = 0$, et qui remplit la région $x > 0$. À l'extérieur, règne un champ magnétique \vec{B}_0 , statique et uniforme, d'orientation *a priori* arbitraire. La question est traitée à l'échelle microscopique, le champ sera pris continu à la surface.
- Expliquer pourquoi il est raisonnable de penser que le champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur ne dépend que de la coordonnée x . Montrer alors, à partir de la relation (2), que le champ magnétique est égal à $\vec{B}_0 \exp(-x/\delta)$, du côté des $x > 0$.
 - En écrivant que \vec{B} est de divergence nulle, déduire que la composante normale du champ externe B_{0x} doit être nulle. On supposera \vec{B}_0 suivant Oz pour fixer les idées.
4. Déduire des équations de MAXWELL la densité de courant à l'intérieur du supraconducteur.
5. En intégrant la densité de force magnétique $\vec{j} \wedge \vec{B}$ suivant le demi-axe $x > 0$, montrer que le champ magnétique exerce sur le supraconducteur une pression

$$p = \frac{B_0^2}{2\mu_0}.$$

PROBLÈMES

Partie II :

- En s'appuyant sur ce qui précède, on justifiera avec soin les règles suivantes pour les conditions *macroscopiques* qui règnent à l'intérieur et à la surface d'un supraconducteur.
 - Le champ magnétique interne y est nul.
 - La composante normale du champ magnétique externe s'annule à la frontière.
 - Il circule un courant superficiel obéissant à la formule

$$\vec{j} = \frac{\vec{n} \wedge \vec{B}_e}{\mu_0},$$

où \vec{n} est le vecteur unitaire normal à la surface du supraconducteur et dirigé vers l'extérieur, et \vec{B}_e le champ externe à la frontière.

- d) Il s'exerce en tout point de la surface une pression, due au champ magnétique,

$$p = \frac{B_e^2}{2\mu_0}.$$

On admettra que ces règles restent vraies en régime dépendant du temps.

2. On considère un supraconducteur en forme d'anneau plat (voir la figure 3.24) et on appelle S le disque médian (vide) s'appuyant sur le bord interne de l'anneau.

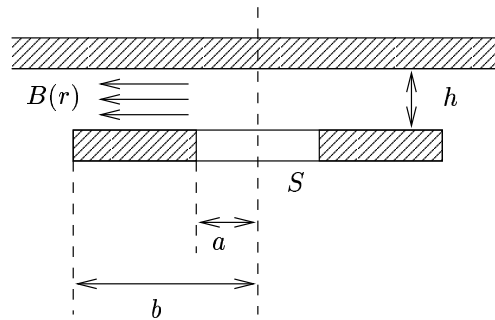


FIG. 3.24 - Vue en coupe des deux supraconducteurs

En utilisant l'équation de MAXWELL-FARADAY, prouver que le flux magnétique ϕ au travers de S est une constante indépendante du temps et donc du mouvement des dispositifs physiques extérieurs à l'anneau, quels qu'ils soient (on prendra garde au fait que le champ électrique peut être non nul en dehors du corps supraconducteur).

3. Au dessus de l'anneau, supposé horizontal, est placé un autre supraconducteur dont la surface plane et horizontale est située à la distance h de l'anneau. On fait l'hypothèse simplificatrice suivante : dans la zone située entre les deux supraconducteurs, à une distance r de l'axe de l'anneau comprise entre le rayon interne a et le rayon externe b , le champ \vec{B} est radial, et son intensité ne dépend que de r .

- a) Calculer cette intensité $B(r)$ en fonction de ϕ , h et r .
 b) En déduire que l'anneau tend à repousser le supraconducteur qui le surmonte avec une force, suivant la verticale, d'amplitude :

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0} \left(\frac{\phi}{h}\right)^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

On ne tiendra compte dans le calcul que de la force exercée à l'aplomb de l'anneau.

c) À quel phénomène amusant peut conduire à votre avis cet effet?

Solution

Partie I

I.1. En régime permanent, la relation entre le champ magnétique et la densité volumique de courant est :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

D'autre part, $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$, d'où

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{A} &= \mu_0 \vec{j} \\ &= \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} \\ &= -\Delta \vec{A} \end{aligned}$$

puisque le potentiel vecteur est choisi de divergence nulle. En coordonnées cartésiennes, l'opérateur laplacien a pour expression

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ce qui signifie que $\mu_0 \vec{j}$ a la dimension de \vec{A} divisée par une longueur au carré. Ainsi, $nq^2 \mu_0 / m$ a la dimension de l'inverse d'une longueur au carré ou encore :

$$\delta \text{ est homogène à une longueur.}$$

Application Numérique :

$$\delta = 2.17 \cdot 10^{-8} \text{ m} = 21,7 \text{ nm.}$$

Dans une expérience de laboratoire courante, cette longueur peut être considérée comme très petite comparée à la résolution des appareils de mesure. Toutefois, des appareils comme le microscope à force atomique ou le microscope à effet tunnel permettent de sonder la matière à des échelles de l'ordre du nanomètre...

I.2. Les équations de MAXWELL relatives au champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur, sont :

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{B} &= 0 \\ \vec{\text{rot}} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

Les deux équations relatives au champ électrique sont sans intérêt puisque $\vec{E} = \vec{0}$. Prenons le rotationnel de la dernière relation

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{B} &= \mu_0 \vec{\text{rot}} \vec{j} \\ &= \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{B} - \Delta \vec{B} \\ &= -\Delta \vec{B} \end{aligned}$$

Avec la relation constitutive donnée dans l'énoncé, il vient :

$$\mu_0 \vec{\text{rot}} \vec{j} = -\frac{1}{\delta^2} \vec{\text{rot}} \vec{A} = -\frac{1}{\delta^2} \vec{B},$$

d'où

$$\boxed{\Delta \vec{B} - \frac{1}{\delta^2} \vec{B} = \vec{0}}.$$

I.3.a) Le système est invariant par translation suivant les axes Oy et Oz (voir la figure 3.25).

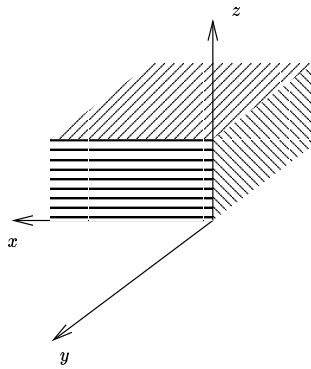


FIG. 3.25 - Vue en coupe du supraconducteur et choix du système d'axes

Dans ces conditions, le champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur ne dépend pas des variables y et z . Bien entendu, cela ne signifie pas que le champ n'a pas de composantes suivant les axes Oy et Oz . L'équation (2) se simplifie alors en :

$$\frac{d^2 \vec{B}}{dx^2} = \frac{1}{\delta^2} \vec{B},$$

avec comme condition aux limites $\vec{B}(x=0) = \vec{B}_0$. En intégrant cette équation différentielle composante par composante, il vient :

$$\boxed{\vec{B}(x) = \vec{B}_0 e^{-x/\delta}} \quad \text{pour } x > 0,$$

puisque \vec{B} doit rester fini lorsque $x \rightarrow \infty$.

I.3.b) Calculons la divergence de \vec{B} :

$$\text{div } \vec{B} = -B_{0x} \frac{1}{\delta} e^{-x/\delta}.$$

Le champ magnétique étant toujours de flux conservatif, sa divergence est nulle en vertu de quoi :

$$\boxed{B_{0x} = 0}.$$

I.4. Prenons un champ externe suivant l'axe Oz : $\vec{B} = B \vec{u}_z$. La densité de courant se déduit du champ magnétique grâce à :

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_z}{\partial x} \vec{u}_y, \end{aligned}$$

où \vec{u}_y est un vecteur unitaire de l'axe Oy . Ainsi,

$$\boxed{\vec{j} = \frac{1}{\mu_0 \delta} B_0 e^{-x/\delta} \vec{u}_y.}$$

I.5. Un élément de volume dv subit la force de LORENTZ

$$d^3 \vec{f} = \vec{j} \wedge \vec{B} dv.$$

Calculons la force s'exerçant sur un volume de supraconducteur de côté $dydz$ et s'étendant du côté des $x > 0$ (voir la figure 3.25) :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{F}}{dydz} &= \int_{x=0}^{\infty} \vec{j} \wedge \vec{B} dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\mu_0 \delta} (B_0)^2 e^{-2x/\delta} \vec{u}_x dx \\ &= \frac{1}{2\mu_0} (B_0)^2 \vec{u}_x. \end{aligned}$$

Le champ magnétique exerce une force par unité de surface, de direction perpendiculaire à cette surface. Il s'agit donc d'une pression, donnée par la relation :

$$\boxed{p = \frac{B_0^2}{2\mu_0}.}$$

Cette pression est bien de signe positif, puisque la force exercée par le champ est orientée suivant \vec{u}_x , *i.e.* vers l'intérieur du supraconducteur.

Partie II

La partie précédente donnait une description microscopique du supraconducteur. Nous allons dans ce qui suit l'étudier avec une résolution spatiale plus grossière et adopter un point de vue macroscopique.

II.1.a) Le champ magnétique pénètre dans le supraconducteur sur une distance de l'ordre de quelques δ . Par exemple, pour $x = 5\delta$, l'amplitude du champ a chuté d'un facteur $e^5 \simeq 150$. Ces distances sont inférieures au micron, et ne sont pas accessibles à une résolution macroscopique. Nous affirmerons donc que le champ magnétique interne est nul.

II.1.b) Le champ \vec{B} est nul à l'intérieur du supraconducteur. Or, la composante normale du champ \vec{B} est continue à l'interface supraconducteur / milieu extérieur. Ainsi, la composante normale du champ magnétique externe s'annule à la frontière.

II.1.c) Dans une description microscopique et avec les notations de la partie précédente :

$$\vec{j}(x) = \frac{1}{\mu_0 \delta} B_e e^{-x/\delta} \vec{u}_y.$$

Il apparaît que la densité volumique de courant, tout comme le champ magnétique, s'annule très rapidement au fur et à mesure que x augmente. Il est donc raisonnable de modéliser la répartition des courants par une nappe située dans le plan $x = 0$ et d'intensité \vec{i} donnée par :

$$\begin{aligned} \vec{i} \, dy \, dz &= \int_{x=0}^{\infty} \vec{j}(x) \, dx \, dy \, dz \\ &= \frac{B_e}{\mu_0 \delta} \left[\int_0^{\infty} e^{-x/\delta} \, dx \right] dy \, dz \, \vec{u}_y \\ &= \frac{B_e}{\mu_0} \vec{u}_y \, dy \, dz. \end{aligned}$$

Avec $\vec{n} \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_y$ (ou encore, $\vec{n} = -\vec{u}_x$), il vient :

$$\vec{i} = \frac{\vec{n} \wedge \vec{B}_e}{\mu_0},$$

qui est sous cette forme indépendant du système d'axe ($Oxyz$) choisi. On retrouve le résultat qui relie généralement la discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique à la présence de courants surfaciques.

II.1.d) La pression magnétique est une grandeur macroscopique : comme dans la partie précédente, le champ exerce sur le supraconducteur une pression

$$p = \frac{B_e^2}{2\mu_0},$$

dont on peut obtenir l'expression en moyennant la densité de forces subies par le supraconducteur sur un volume mésoscopique (« grand » à l'échelle microscopique mais « petit » à l'échelle macroscopique). La force exercée sur un élément de surface de supraconducteur est normale à celui-ci et dirigée vers l'intérieur (suivant $-\vec{n}$).

II.2. L'équation de MAXWELL-FARADAY est la relation clé des phénomènes d'induction électromagnétique :

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

À l'aide de la formule du rotationnel (ou de STOKES), nous pouvons transformer la circulation du champ électrique sur une ligne fermée C quelconque délimitant

une surface S , en un terme de flux à travers la surface S en question :

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \iint_S \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}.\end{aligned}$$

Prenons pour contour \mathcal{C} le bord interne de l'anneau et pour S le disque médian. On a :

$$\frac{d\phi}{dt} = -\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Le champ électrique à l'extérieur du supraconducteur peut être non nul. En revanche, on a $\vec{E} = \vec{0}$ à l'intérieur. Nous savons par ailleurs que la composante de \vec{E} tangente à une surface de discontinuité des courants est continue (alors que la discontinuité de la composante normale est liée à l'existence de charges surfaciques). Sur le contour \mathcal{C} , le champ électrique est en conséquence orthogonal à \mathcal{C} . Ainsi,

$$\boxed{\frac{d\phi}{dt} = 0}.$$

II.3.a) Pour calculer le champ magnétique, utilisons la nullité du flux de \vec{B} sur toute surface fermée. Soit Σ le cylindre de rayon r représenté en coupe sur la figure 3.26.

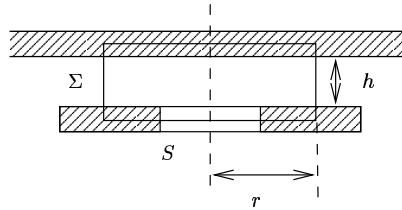


FIG. 3.26 - Coupe latérale de la surface d'intégration Σ .

On a :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

où $d\vec{S} = dS \vec{n}$ est orienté vers l'extérieur de Σ . Comme \vec{B} est nul à l'intérieur d'un supraconducteur :

$$\phi + \iint_{\text{bords verticaux de } \Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Sur les bords verticaux de Σ , le champ magnétique est par hypothèse colinéaire au vecteur normal à la surface et son intensité est constante d'où :

$$\phi + 2\pi r h B(r) = 0,$$

ou encore

$$B(r) = -\frac{\phi}{2\pi r h}$$

II.3.b) Une couronne de supraconducteur de rayon r et de largeur dr ressent une force magnétique :

$$d\vec{F} = \underbrace{2\pi r dr}_{\text{surface de la couronne}} \underbrace{\frac{B^2(r)}{2\mu_0}}_{\text{pression magnétique}} \vec{u}_z$$

où \vec{u}_z est dirigé suivant la verticale ascendante. Ainsi, le supraconducteur situé au dessus de l'anneau est soumis à une force orientée vers le haut, d'amplitude :

$$\begin{aligned} F &= \int_a^b 2\pi r \frac{B^2(r)}{2\mu_0} dr \\ &= \frac{1}{4\pi\mu_0} \left(\frac{\phi}{h}\right)^2 \int_a^b \frac{dr}{r}. \end{aligned}$$

En définitive,

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \left(\frac{\phi}{h}\right)^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) \vec{u}_z.$$

II.3.c) L'anneau tend à faire léviter le supraconducteur qui se trouve au dessus de lui !

Complément : le principal intérêt de la supraconductivité réside dans la possibilité de transporter un courant électrique continu sans résistance et par conséquent sans pertes (cette propriété n'apparaît pas directement dans le problème que nous venons de traiter). Ce phénomène quantique de chute de la résistivité s'accompagne d'une tendance à expulser le champ magnétique en dehors du matériau. Il s'agit de l'effet MEISSNER : lorsque l'expulsion est totale, les lignes de champ ne pénètrent pas dans le supraconducteur (voir les questions II.1.a) et II.1.b)).

Généralement, les électrons de conduction d'un matériau conducteur se repoussent. Dans certains cas, cette répulsion peut être remplacée par une attraction indirecte via les ions du réseau cristallin et les électrons peuvent s'associer en paires dites paires de COOPER. Celles-ci sont d'autant plus nombreuses que la température est basse. La supraconduction se manifeste lorsque leur nombre est suffisant : le courant électrique qui apparaît persiste quasi indéfiniment.

Plusieurs mécanismes peuvent briser la supraconduction et rendre le matériau normal : tout d'abord des températures trop élevées (la température maximale est appelée température critique), ensuite un champ magnétique trop fort. Dans le cas des supraconducteurs de type I, on n'observe que deux situations extrêmes : pour $B < B_c$, le champ magnétique est totalement expulsé et pour $B > B_c$, il pénètre intégralement la substance. Les supraconducteurs de type II présentent une physique plus riche. Pour $B < B_{c1}$, il y a expulsion complète et pour $B > B_{c2}$ pénétration complète d'où destruction de la supraconductivité.

Toutefois pour B compris entre B_{c1} et B_{c2} , le flux magnétique pénètre partiellement en formant un réseau de tubes. À l'intérieur des tubes, le matériau est normal et à l'extérieur, il est supraconducteur.

La supraconductivité à basse température a été découverte au début du siècle, mais il a fallu attendre les années 50 pour qu'une théorie soit formulée (BARDEEN, COOPER et SCHRIEFFER, prix NOBEL en 1972). Les températures critiques des composés « classiques » sont très basses (4 K pour le mercure, 7 K pour le plomb). Ces derniers sont refroidis avec de l'hélium liquide à 4 K (-269 °C). Plus récemment, une nouvelle forme de supraconductivité a été découverte (BEDNORZ et MÜLLER, prix NOBEL en 1986). Celle-ci échappe pour l'instant à toute explication théorique et concerne des matériaux aux allures de mille-feuille à base de terres rares (yttrium, lanthane...) et d'oxydes de cuivre. À l'heure actuelle, la plus haute température critique ainsi obtenue à pression atmosphérique avoisine les 130 K. Ces supraconducteurs « haute température » sont de type II, alors que les supraconducteurs classiques sont de type I ou II. Il aura donc fallu attendre 80 ans pour gagner 130 degrés, mais les premières applications industrielles commencent à voir le jour : les supraconducteurs sont maintenant refroidis avec de l'azote liquide (-196 °C, 77 K) ce qui permet d'utiliser des systèmes moins coûteux que ceux fonctionnant avec de l'hélium.

3.5.4 Réflexion d'une onde électromagnétique sur un plasma

*Extrait d'un problème de l'Université de Versailles-St-Quentin
Durée 1 h 30*

PROBLÈMES

Introduction

Lors de la rentrée dans l'atmosphère d'un engin spatial, le frottement à grande vitesse (quelques 10000 km/h) sur les couches atmosphériques, induit un très fort échauffement du bouclier thermique (2000 à 3000 °C). À cette température, les atomes (de l'atmosphère ou du matériau) s'ionisent dans les couches les plus externes. Ce processus donne un mélange ions-électrons libres dénommé plasma. Ce plasma est opaque aux ondes électromagnétiques dont les fréquences sont situées entre les MHz et les GHz (bande radio).

Nous nous proposons d'étudier la propagation des ondes électromagnétiques dans ce plasma et de montrer que le coefficient de réflexion R d'une onde électromagnétique incidente peut être égal à 1 (réflexion totale sur le plasma) dans un certain intervalle de fréquence. Dans ce cas précis, aucune onde radio ne peut pénétrer le plasma et atteindre l'engin spatial.

Problème

On considère un milieu matériel (non vide) neutre, comprenant par mètre cube :

- a) n ions de charge $+e$ immobiles

- b) n électrons de charge $-e$ et de masse m susceptibles de se déplacer à partir de leur position d'équilibre, et ramenés vers cette position par une force $\vec{f} = -m\omega_0^2\vec{r}$ quand ils sont écartés du vecteur \vec{r} . Le milieu est caractérisé par une perméabilité magnétique égale à celle du vide μ_0 .

1. Dans le milieu existe un champ électrique $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$.
 - a) Donner l'équation du mouvement d'un électron sachant qu'il est soumis à la fois au champ électrique \vec{E} et à la force de rappel \vec{f} .
 - b) Intégrer cette équation en supposant le mouvement sinusoïdal (solutions de la forme $\vec{r} = \vec{r}_0 e^{-i\omega t}$) et en déduire la vitesse \vec{v} de l'électron, la densité de courant \vec{j} induite par le champ \vec{E} et la conductivité du milieu σ .
 - c) Dans le cas présent, le mouvement des électrons est uniquement dû à la force exercée sur eux par le champ électrique extérieur et à la force de rappel. Quelles autres forces néglige-t-on dans cette situation?
2. Une onde électromagnétique *plane* se propage dans le milieu considéré dans la direction des x croissants. Son champ électrique s'écrit

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp \{ -i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{r} \}.$$

- a) En tenant compte de la présence dans le milieu d'un courant de densité \vec{j} et en se souvenant que le milieu est électriquement *neutre*, écrire les équations satisfaites par \vec{E} et par le champ magnétique \vec{B} qui l'accompagne.
- b) À partir de ces relations, en déduire les conditions imposées à l'orientation des vecteurs \vec{E} et \vec{B} , ainsi que le rapport des modules de ces vecteurs.
- c) Écrire l'équation de propagation des champs, et en déduire la relation de dispersion de k en fonction de ω , en remplaçant σ par la valeur trouvée dans 1.b). On introduira la fréquence de plasma

$$\omega_p^2 = \left(\frac{ne^2}{m\varepsilon_0} \right).$$

- d) Montrer qu'il existe une fréquence de coupure ω_c telle que $k^2(\omega_c) = 0$. Exprimer ω_c en fonction de ω_0 et ω_p .
 - e) Montrer que l'onde ne peut se propager dans le milieu que pour $\omega_0 < \omega < \omega_c$. On fera alors apparaître la partie évanescence de l'onde dans l'expression générale de \vec{E} et de \vec{B} .
3. Le milieu étudié aux questions précédentes (plasma neutre) remplit tout le demi-espace $x \geq 0$. L'autre demi-espace est vide. Une onde électromagnétique plane, de pulsation ω , polarisée parallèlement à Oy , de vecteur

d'onde $k_0 = \omega/c$ et dont le champ électrique a pour amplitude E_0 , se propage dans le vide dans la direction Ox suivant les x croissants et tombe sur la surface de séparation des deux milieux en $x = 0$. Elle donne lieu à une onde réfléchie et à une onde transmise. On notera \vec{E} , \vec{E}' , \vec{E}'' respectivement les champs électriques des ondes incidentes, réfléchies, et transmises et on écrira :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_0 e^{i(k_0 x - \omega t)} \vec{e}_y \\ \vec{E}' &= E'_0 e^{i(-k_0 x - \omega t)} \vec{e}_y \\ \vec{E}'' &= E''_0 e^{i(kx - \omega t)} \vec{e}_y,\end{aligned}$$

où k est le vecteur d'onde de l'onde transmise dans le plasma.

- Donner les conditions de continuité satisfaites par les champs \vec{E} et \vec{B} sur la surface de séparation sachant que le plan $x = 0$ ne contient pas de courants superficiels.
- Représenter schématiquement les champs électriques et magnétiques incidents, réfléchis et transmis lors de la rencontre de l'interface vide / milieu neutre. Vous indiquerez la direction de ces champs.
- En utilisant le rapport des modules de \vec{E} et \vec{B} trouvé au 2.b), déduire des équations trouvées dans 3.a) les rapports E'_0/E_0 et E''_0/E_0 .
- Calculer le pouvoir de réflexion R du milieu, défini comme le rapport des intensités réfléchie et incidente :

$$R = \left| \frac{E'_0}{E_0} \right|^2.$$

Tracer sommairement la courbe $R(\omega)$.

PROBLÈMES

Solution

1.a) Soit \vec{r} la distance de l'électron considéré à sa position d'équilibre. On lui applique la relation fondamentale de la dynamique qui se réduit dans le cas présent à

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -e \vec{E} - m\omega_0^2 \vec{r}.$$

1.b) On cherche en suivant les indications de l'énoncé une solution sinusoïdale, c'est-à-dire une solution pour laquelle $\vec{r} = \vec{r}_0 e^{-i\omega t}$. En introduisant cette forme dans l'équation précédente, on obtient

$$-m\omega^2 \vec{r}_0 = -e \vec{E}_0 - m\omega_0^2 \vec{r}_0$$

soit en regroupant les termes :

$$\vec{r}_0 = \frac{e}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \vec{E}_0.$$

La vitesse se calcule alors en utilisant

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= -i\omega\vec{r},\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\vec{v} = \frac{-ie\omega}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \vec{E}.$$

La densité de courant s'exprimant au moyen de la formule

$$\begin{aligned}\vec{j} &= \rho\vec{v} \\ &= -ne\vec{v},\end{aligned}$$

on a sans calcul supplémentaire l'expression de \vec{j}

$$\vec{j} = \frac{ine^2\omega}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \vec{E}.$$

Enfin, en se rappelant que la loi d'OHM locale lie la densité de courant au champ \vec{E} par la relation $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, on déduit la valeur de la conductivité électrique dans le plasma :

$$\sigma = \frac{ine^2\omega}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}.$$

1.c) Parmi les forces oubliées dans cette étude, citons en premier lieu le poids $m\vec{g}$, mais rappelons par la même occasion que celui-ci est négligeable vis-à-vis des forces électromagnétiques. Nous avons pris en compte les forces électrostatiques par le biais de la force de rappel, mais nous avons oublié que les électrons ne se déplacent pas librement dans le plasma. Ils subissent notamment un certain nombre de collisions, entre eux mais surtout avec les ions immobiles. On tient compte usuellement de ces collisions en introduisant une force de frottement visqueux. Enfin, nous avons négligé la contribution du champ magnétique à la force de LORENTZ. Pour une onde électromagnétique plane progressive, on a $E = cB$, d'où

$$\frac{qE}{qvB} \propto \frac{c}{v} \gg 1,$$

ce qui justifie l'omission.

2.a) En l'absence de charges de volume (milieu électriquement neutre), les

équations de MAXWELL s'écrivent pour un milieu diélectrique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

2.b) Utilisons les deuxième et troisième équations de MAXWELL. En notation complexe, l'opérateur divergence se réduit à un produit scalaire, ce qui donne pour \vec{E} et \vec{B}

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad \vec{k} \cdot \vec{B} = 0.$$

Les champs électriques et magnétiques sont donc tous les deux perpendiculaires au vecteur d'onde, c'est-à-dire à la direction de propagation.

On utilise maintenant la première des équations de MAXWELL, en se rappelant cette fois que l'opérateur rotationnel se réduit à un produit vectoriel. On obtient alors

$$i\vec{k} \wedge \vec{E} = i\omega \vec{B}$$

ce qui, étant donné que \vec{k} et \vec{E} sont perpendiculaires, procure comme relation entre les modules des champs électriques et magnétiques

$$\|\vec{E}\| = \frac{\omega}{k} \|\vec{B}\|.$$

Enfin, le produit vectoriel liant \vec{E} à \vec{B} implique que :

$$(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B}) \text{ forment un trièdre direct.}$$

2.c) Pour trouver l'équation de propagation des champs, prenons le rotationnel de la première équation de MAXWELL, et éliminons le champ \vec{B} au moyen de la quatrième. Pour un champ à divergence nulle, comme c'est le cas ici en l'absence de charges en volume, on a la relation vectorielle

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\Delta \vec{E} + \vec{0}.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} -\Delta \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \left[\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left[\mu_0 \sigma \vec{E} + \mu_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right], \end{aligned}$$

qui donne l'équation de propagation suivante :

$$\mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \Delta \vec{E} = 0.$$

Un traitement semblable conduit à une équation de propagation identique pour le champ magnétique :

$$\mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \Delta \vec{B} = 0.$$

En utilisant l'expression complexe de \vec{E} , l'équation de propagation devient

$$-\mu_0 \varepsilon \omega^2 + \mu_0 \sigma (-i\omega) + k^2 = 0$$

qui se réarrange en utilisant l'expression de la conductivité trouvée en 1.b)

$$k^2 = \mu_0 \varepsilon \omega^2 - \frac{\mu_0 \omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \cdot \frac{ne^2}{m}.$$

En introduisant la perméabilité relative $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$ du milieu, on obtient finalement la relation de dispersion des ondes électromagnétiques dans le plasma :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(\varepsilon_r - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \right).$$

2.d) La fréquence de coupure ω_c se déduit de la formule précédente en cherchant la solution de l'équation $k^2 = 0$. On a alors

$$\varepsilon_r - \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2 - \omega_0^2} = 0,$$

d'où :

$$\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\omega_p^2}{\varepsilon_r}}.$$

2.e) Dans le cas où k^2 est négatif, la propagation spatiale cesse pour laisser place à une onde évanescence. Cette configuration se trouve satisfaite pour

$$\varepsilon_r - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2} < 0 \quad \text{c'est-à-dire pour} \quad \omega_0 < \omega < \omega_c.$$

Dans ces conditions, k a pour expression

$$k = \pm i \frac{\omega}{c} \sqrt{-\varepsilon_r + \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2}}.$$

En prenant \vec{k} suivant la direction x , le champ électrique se met sous la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp\left(\mp x \frac{\omega}{c} \sqrt{-\varepsilon_r + \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2}}\right) e^{-i\omega t}.$$

Seul le champ en $\exp(-x\dots)$ est acceptable : la solution $\exp(+x\dots)$ s'accompagne d'une divergence de l'énergie électromagnétique pour $x \rightarrow \infty$. Le champ magnétique \vec{B} s'écrit sous une forme analogue. On constate que les champs ne contiennent plus de terme propagatif. On a alors une onde évanescente, caractérisée par le terme :

$$\exp\left(-x \frac{\omega}{c} \sqrt{-\varepsilon_r + \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2}}\right).$$

3.a) En l'absence de charges et de courants de surface, les champs magnétiques et électriques sont continus à l'interface entre les deux milieux, c'est-à-dire sur le plan $x = 0$. Dans ces conditions, les équations de raccordement sont :

$$\begin{cases} \vec{E} + \vec{E}' = \vec{E}'' \\ \vec{B} + \vec{B}' = \vec{B}'' \end{cases} \text{ en } x = 0.$$

Les ondes réfléchie et transmise ont donc une pulsation identique à celle de l'onde incidente, ce qui se traduit par les expressions proposées dans l'énoncé.

3.b) Pour représenter les différents champs, il faut se rappeler que le vecteur \vec{k} est orienté dans la direction de propagation, et que d'après le résultat de la question 2.b), le trièdre $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ est direct, avec la convention usuelle d'orientation de l'espace. Le schéma résultant est le suivant

PROBLÈMES

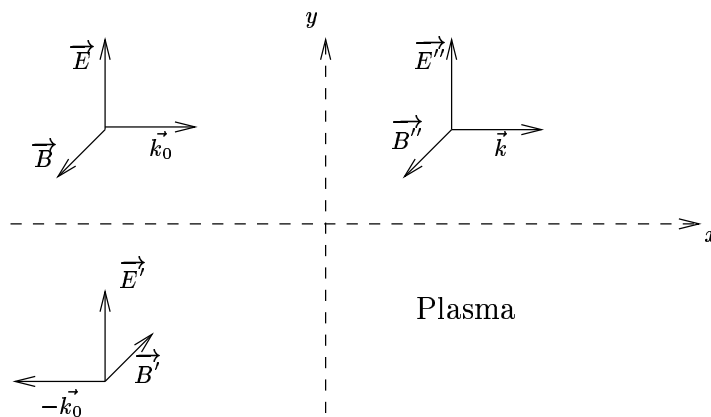


FIG. 3.27 - Orientation des champs pour les ondes incidente, transmise et réfléchie.

3.c) La relation de continuité trouvée en 3.a) permet d'écrire par projection une relation entre les modules des champs

$$\begin{cases} E_0 + E'_0 = E''_0 \\ B_0 - B'_0 = B''_0, \end{cases}$$

qui, si l'on utilise la relation du 2.b) liant les modules des champs électriques et magnétiques entre eux, conduit au système

$$\begin{cases} E''_0 = E_0 + E'_0 \\ kE''_0 = k_0(E_0 - E'_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E''_0 = E_0 + E'_0 \\ \frac{E'_0}{E_0} = \frac{k_0 - k}{k_0 + k} \end{cases}$$

soit finalement le résultat demandé

$$\boxed{\frac{E'_0}{E_0} = \frac{k_0 - k}{k_0 + k}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{E''_0}{E_0} = \frac{2k_0}{k_0 + k}}$$

3.d) Par définition, le pouvoir de réflexion R du milieu s'écrit

$$\begin{aligned} R &= \left| \frac{k_0 - k}{k_0 + k} \right|^2 \\ &= \left| \frac{1 - k/k_0}{1 + k/k_0} \right|^2. \end{aligned}$$

En utilisant pour k_0 la relation de dispersion des ondes électromagnétiques dans le vide, et pour k celle trouvée au 2.c), il vient

$$\begin{aligned} \frac{k}{k_0} &= \frac{k}{\omega/c} \\ &= \sqrt{\varepsilon_r - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2}} \end{aligned}$$

cette relation s'appliquant dans le domaine de pulsations $\omega < \omega_0$ et $\omega > \omega_c$. Il vient alors, pour ce même domaine, l'expression du pouvoir de réflexion

$$\boxed{R = \left| \frac{1 - \sqrt{\varepsilon_r - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2}}}{1 + \sqrt{\varepsilon_r - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2}}} \right|^2}$$

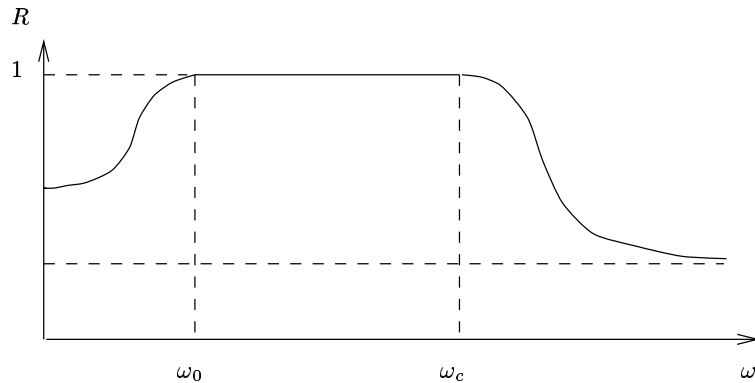


FIG. 3.28 - Allure du coefficient de réflexion R en fonction de la pulsation ω .

Dans le domaine intermédiaire (ω compris entre ω_0 et ω_c), on a déjà démontré qu'il n'y avait pas d'onde transmise dans le plasma, et donc

$$\boxed{R = 1} \quad \text{pour } \omega_0 < \omega < \omega_c.$$

On peut à titre de vérification contrôler la continuité du pouvoir de réflexion tel qu'il est donné par la première formule: il apparaît que R vaut bien 1 en $\omega = \omega_0$ et en $\omega = \omega_c$. Finissons en donnant l'allure de $R(\omega)$. Ce coefficient tend vers deux limites finies en $\omega = 0$ et en $\omega \rightarrow +\infty$, ce qui nous donne la représentation de la figure 3.28.

PROBLÈMES

3.5.5 Effet Faraday dans un plasma

Extrait d'une épreuve de l'Université de Grenoble

Durée 2 h

Ce problème étudie l'effet FARADAY dans un plasma. On appelle plasma un gaz ionisé, constitué d'ions positifs (charge $+e$, masse M) et d'électrons (charge $-e$, masse $m \ll M$). Le système est globalement neutre et il y a N ions et N électrons par unité de volume. On négligera dans la suite le mouvement des ions, beaucoup plus lourds que les électrons. Le plasma est plongé dans un champ magnétique uniforme et constant \vec{B}_c parallèle à Oz . Il est de plus traversé par une onde électromagnétique se propageant suivant la même direction et de pulsation ω . Le champ électrique de l'onde est, en notation complexe, de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}$ où l'on supposera le vecteur \vec{E}_0 transverse, c'est-à-dire perpendiculaire à Oz . On veut comprendre comment la présence du champ magnétique affecte la propagation de l'onde.

On notera dans la suite

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}} \quad \text{et} \quad \omega_c = \frac{eB_c}{m}$$

les pulsations plasma et cyclotron du milieu. On donne: $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ et $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ u.S.I.}$

1. Écrire la relation fondamentale de la dynamique pour un électron du plasma soumis au champ électrique de l'onde, en tenant compte dans la force de LORENTZ du champ magnétique \vec{B}_c (mais pas du champ magnétique de l'onde dont l'influence est négligeable). L'électron étant supposé immobile en l'absence de l'onde, montrer que son mouvement en présence de celle-ci se fait dans un plan d'abscisse $z = \text{C}^{\text{te}}$.

En cherchant en régime harmonique forcé la vitesse de l'électron sous la forme $\vec{v} = \vec{v}_0 e^{i(kz - \omega t)}$, établir les relations (valables pour $\omega \neq \omega_c$):

$$v_x = -\frac{ie}{m} \frac{\omega E_x - i\omega_c E_y}{\omega^2 - \omega_c^2} \quad (1)$$

$$v_y = -\frac{ie}{m} \frac{\omega E_y + i\omega_c E_x}{\omega^2 - \omega_c^2}. \quad (2)$$

2. Dédire du résultat précédent la relation vectorielle suivante entre le vecteur densité de courant \vec{j} et \vec{E} :

$$\vec{j} = i\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} (\omega \vec{E} - i\omega_c \vec{E} \wedge \vec{u}_z). \quad (3)$$

3. Établir par ailleurs à partir des équations de MAXWELL (en se rappelant que le champ électrique est transverse et donc de divergence nulle) que:

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

et en déduire la seconde relation entre \vec{j} et \vec{E} :

$$\vec{j} = \frac{i\epsilon_0}{\omega} (\omega^2 - c^2 k^2) \vec{E}. \quad (4)$$

4. En éliminant \vec{j} entre (3) et (4), on aboutit à un système de deux équations linéaires pour E_x et E_y dont on montrera qu'il n'admet de solution non identiquement nulle que si ω et k satisfont:

$$\frac{\omega_p^2 \omega^2}{\omega^2 - \omega_c^2} - (\omega^2 - c^2 k^2) = \pm \frac{\omega_p^2 \omega_c \omega}{\omega^2 - \omega_c^2}.$$

5. L'équation ci-dessus admet deux racines k_- et k_+ telles que:

$$c^2 k_{\pm}^2 = \omega^2 - \frac{\omega_p^2 \omega}{\omega \pm \omega_c}.$$

Montrer que k_+ et k_- deviennent réels pour respectivement $\omega \geq \omega_+$ et $\omega \geq \omega_-$ avec

$$\omega_{\pm} = \frac{1}{2}(\mp\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2})$$

Application Numérique : calculer ω_c , ω_p , ω_+ et ω_- pour $N = 10^{12} \text{ m}^{-3}$ et $B_c = 10^{-5} \text{ Tesla}$.

6. On considère une pulsation ω assez grande pour que k_+ et k_- soient tous deux réels. On les choisira de plus positifs pour décrire une propagation dans le sens des z croissants.

- a) Vérifier que les ondes planes correspondant aux solutions k_- et k_+ ont une polarisation circulaire, respectivement gauche et droite. Écrire explicitement les champs \vec{E}_- et \vec{E}_+ des deux ondes en question (on pourra conserver des notations complexes). Les deux ondes ont-elles la même vitesse de phase? Le résultat est-il surprenant?
- b) Une onde de pulsation ω arrive sur le plasma en $z = 0$ en étant polarisée rectilignement, avec un champ $\vec{E}(z = 0)$ suivant Ox . Montrer qu'on peut voir cette onde dans le plan $z = 0$ comme une superposition linéaire des deux solutions décrites dans la question 6.a). En déduire qu'après s'être propagée de la distance $z > 0$ dans le plasma, l'onde initiale est toujours polarisée rectilignement, mais que sa direction de polarisation a tourné d'un angle

$$\theta = \frac{(k_+ - k_-)z}{2};$$

c'est l'effet FARADAY. Vérifier que θ est proportionnel à B_c dans la limite de faible champ magnétique et de haute fréquence ($\omega_c \ll \omega_p \ll \omega$).

Application Numérique : calculer θ pour N et B_c inchangés, $z = 1 \text{ km}$ et $f = \omega/2\pi = 100 \text{ MHz}$.

- c) Indiquer sans calcul ce qui se passe lorsque ω est telle que seul k_+ est réel.

PROBLÈMES

Solution

1. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à un électron s'écrit si l'on néglige le champ magnétique de l'onde propagative

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - e\vec{v} \wedge \vec{B}_c.$$

Cette équation devient lorsqu'on la projette sur la direction \vec{u}_z

$$\begin{aligned} m \frac{dv_z}{dt} &= -e(\vec{E} \cdot \vec{u}_z) - e(\vec{v} \wedge \vec{B}_c) \cdot \vec{u}_z \\ &= 0 - e(\vec{B}_c \wedge \vec{u}_z) \cdot \vec{v} \quad \text{car } \vec{E} \text{ est perpendiculaire à } \vec{u}_z \\ &= 0 \quad \text{car le champ fixe } \vec{B}_c \text{ est parallèle à l'axe } \vec{u}_z. \end{aligned}$$

Il vient donc pour notre électron

$$\ddot{z}(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z(t) = v_z(0)t + z_0.$$

La vitesse initiale de l'électron étant nulle, son mouvement se déroulera dans un plan $z = C^{te}$.

On cherche désormais une solution en oscillation forcée, c'est-à-dire telle que la réponse de l'électron à la sollicitation extérieure que constitue l'onde est de la même forme que cette dernière à savoir

$$\vec{v} = \vec{v}_0 e^{i(kz - \omega t)}.$$

En projetant l'équation de la dynamique précédemment obtenue sur les deux axes restant (\vec{u}_x et \vec{u}_y), il vient

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = -e(E_x + v_y B_c) \\ m \frac{dv_y}{dt} = -e(E_y - v_x B_c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -mi\omega v_x = -eE_x - ev_y B_c \\ -mi\omega v_y = -eE_y + ev_x B_c. \end{cases}$$

On en déduit

$$\begin{cases} v_x = -\frac{ie}{m\omega} E_x - \frac{ie}{m\omega} B_c v_y \\ v_y = -\frac{ie}{m\omega} E_y + \frac{ie}{m\omega} B_c \left(-\frac{ie}{m\omega} E_x - \frac{ie}{m\omega} B_c v_y \right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_x = -\frac{ie}{m} \frac{E_x}{\omega} - i \frac{\omega_c}{\omega} v_y \\ v_y = -\frac{ie}{m} \frac{E_y}{\omega} + i \frac{\omega_c}{\omega} \left(-\frac{ie}{m} \frac{E_x}{\omega} - i \frac{\omega_c}{\omega} v_y \right) \end{cases}$$

soit en regroupant les termes en v_y dans la deuxième équation du système :

$$\boxed{\begin{cases} v_x = -\frac{ie}{m} \frac{\omega E_x - i\omega_c E_y}{\omega^2 - \omega_c^2} & (1) \\ v_y = -\frac{ie}{m} \frac{\omega E_y + i\omega_c E_x}{\omega^2 - \omega_c^2} & (2) \end{cases}}$$

2. La densité de courant \vec{j} se définit en fonction de la vitesse des porteurs de charge (les électrons) au moyen de la relation

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \rho \vec{v} \\ &= -Ne\vec{v} \quad \text{les ions, plus lourds, sont quasiment immobiles.} \end{aligned}$$

Utilisant (1) et (2) pour l'expression des composantes du vecteur vitesse, il

vient

$$\begin{aligned} \vec{j} &= i \frac{Ne^2}{m} \begin{vmatrix} \frac{\omega E_x - i\omega_c E_y}{\omega^2 - \omega_c^2} \\ \frac{\omega E_y + i\omega_c E_x}{\omega^2 - \omega_c^2} \\ 0 \end{vmatrix} \\ &= i\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} \begin{vmatrix} \omega E_x - i\omega_c E_y \\ \omega E_y + i\omega_c E_x \\ 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Finalement comme le produit vectoriel du champ électrique avec le vecteur \vec{u}_z s'écrit

$$\begin{vmatrix} E_x & 0 & E_y \\ E_y & 0 & -E_x \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_y \\ -E_x \\ 0 \end{vmatrix}$$

on obtient l'expression annoncée

$$\boxed{\vec{j} = i\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} (\omega \vec{E} - i\omega_c \vec{E} \wedge \vec{u}_z)}. \quad (3)$$

3. On dispose des deux équations de MAXWELL suivantes

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

En utilisant la formule d'analyse vectorielle donnant l'expression du rotationnel d'un rotationnel, et en se rappelant que le champ électrique de l'onde est à divergence nulle, on a

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = \text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E},$$

soit en combinant les deux équations de MAXWELL

$$-\Delta \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

On en déduit la relation (4) donnée dans l'énoncé :

$$\boxed{\vec{j} = \frac{i\varepsilon_0}{\omega} (\omega^2 - c^2 k^2) \vec{E}}.$$

4. En éliminant le vecteur densité de courant \vec{j} dans (3) et (4), il vient l'équation vectorielle

$$\frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} (\omega \vec{E} - i\omega_c \vec{E} \wedge \vec{u}_z) = \frac{\omega^2 - k^2 c^2}{\omega} \vec{E}.$$

En projetant cette relation sur les deux directions \vec{u}_x et \vec{u}_y , on obtient le système

$$\begin{cases} \left[\frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} \omega - \frac{\omega^2 - k^2 c^2}{\omega} \right] E_x - i \omega_c \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} E_y = 0 \\ i \omega_c \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} E_x + \left[\frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} \omega - \frac{\omega^2 - k^2 c^2}{\omega} \right] E_y = 0 \end{cases}$$

On est donc confronté à un système linéaire en les variables E_x et E_y , de deux équations et sans second membre. Un tel système admet au moins pour solution la solution triviale $(E_x, E_y) = (0, 0)$ qui signifie qu'il n'y a pas d'onde dans le plasma. Pour qu'il existe une autre solution, il faut que le système soit dégénéré ce qui nous fournit comme condition que son déterminant doit être nul

$$\left[\frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} \omega - \frac{\omega^2 - k^2 c^2}{\omega} \right]^2 - \left[\omega_c \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} \right]^2 = 0.$$

En répartissant les deux carrés dans chacun des deux membres de l'équation et en en prenant la racine, on obtient ainsi la condition que doivent vérifier k et ω pour que puisse se propager une onde dans le plasma :

$$\boxed{\frac{\omega_p^2 \omega^2}{\omega^2 - \omega_c^2} - (\omega^2 - c^2 k^2) = \pm \frac{\omega_p^2 \omega_c \omega}{\omega^2 - \omega_c^2}}.$$

5. L'énoncé nous épargne le réarrangement de l'équation précédente en fournissant ses solutions

$$c^2 k_{\pm}^2 = \omega^2 - \frac{\omega_p^2 \omega}{\omega \pm \omega_c}.$$

Pour que les vecteurs d'ondes k_+ et k_- soient réels, il faut que le second membre soit positif ce qui donne dans chacun des cas la condition suivante

$$\begin{cases} \omega^2(\omega + \omega_c) - \omega \omega_p^2 > 0 & \text{pour } k_+ \\ \omega^2(\omega - \omega_c) - \omega \omega_p^2 > 0 & \text{pour } k_- \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \omega^2 + \omega_c \omega - \omega_p^2 > 0 \\ \omega^2 - \omega_c \omega - \omega_p^2 > 0. \end{cases}$$

La résolution de chacune de ces inéquations du second degré ne pose pas de difficultés à condition de se rappeler que la pulsation ω est positive par convention. Lorsque ω est supérieure à la plus grande des deux racines d'un des trinômes précédents, celui-ci est du signe de son terme de plus haut degré, positif dans le cas qui nous intéresse. Il s'ensuit que :

$$\boxed{\begin{cases} k_+ \text{ réel} & \Leftrightarrow \omega > \omega_+, \quad \omega_+ = \frac{-\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2}}{2} \\ k_- \text{ réel} & \Leftrightarrow \omega > \omega_-, \quad \omega_- = \frac{+\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2}}{2}. \end{cases}}$$

Application Numérique :

$$\begin{aligned}\omega_p &= 5,64 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1} \\ \omega_c &= 1,76 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1} \\ \omega_+ &= 5,55 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1} \\ \omega_- &= 5,73 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}.\end{aligned}$$

6.a) Repartons du système trouvé à la question 4.. La condition de dégénérescence signifie que les deux équations sont liées. Autrement dit, elles sont équivalentes et il n'en subsiste qu'une :

$$\left[\frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} \omega^2 - (\omega^2 - k^2 c^2) \right] E_x - i \frac{\omega_c \omega \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} E_y = 0.$$

Or la condition de liaison assure que

$$\omega^2 - c^2 k_{\pm}^2 = \frac{\omega_p^2 \omega^2}{\omega^2 - \omega_c^2} \mp \frac{\omega_c \omega \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2}.$$

L'équation liant les deux composantes du champ électrique de l'onde se transforme alors suivant que le vecteur d'onde est k_+ ou k_- en

$$C^{\text{te}} E_x - i C^{\text{te}} E_y = 0 \quad \text{ou} \quad -C^{\text{te}} E_x - i C^{\text{te}} E_y = 0$$

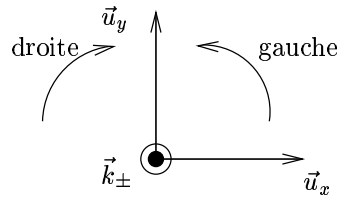
où on a défini $C^{\text{te}} = (\omega_c \omega \omega_p^2) / (\omega^2 - \omega_c^2)$. Finalement on obtient les relations

$$\begin{cases} E_x^+ = i E_y^+ \\ E_x^- = -i E_y^- \end{cases}$$

Pourquoi peut-on dire alors que ces ondes ont des polarisations circulaires, et que la première est droite et la seconde gauche? Repassons pour le voir en notation réelle. On a

$$\begin{cases} E_x^+ = E^+ \cos \omega t \\ E_y^+ = E^+ \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \\ \quad = -E^+ \sin \omega t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} E_x^- = E^- \cos \omega t \\ E_y^- = E^- \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \\ \quad = E^- \sin \omega t. \end{cases}$$

On voit que le champ électrique associé à l'onde électromagnétique décrit un cercle dans le plan xy . Le sens est quant à lui obtenu en se rappelant la convention qui consiste à regarder la rotation avec le vecteur d'onde pointant vers l'observateur. Avec cette convention, le sens de rotation trigonométrique dans le plan (Oxy) est qualifié de gauche. Le repère xyz étant un repère direct, les axes sont orientés comme sur le schéma suivant.



À $\omega t = 0$, $\vec{E}_+ = E^+ \vec{u}_x$ et $\vec{E}_- = E^- \vec{u}_x$, alors que pour l'instant ultérieur tel que $\omega t = \pi/2$ on a $\vec{E}_+ = -E^+ \vec{u}_y$ et $\vec{E}_- = E^- \vec{u}_y$. On a bien

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Onde associée à } k_+ \text{ circulaire droite.} \\ \text{Onde associée à } k_- \text{ circulaire gauche.} \end{array} \right.$$

Pour ce qui est de l'écriture explicite des deux ondes, il suffit juste de reprendre les éléments précédents pour obtenir

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_+ = E^+ \begin{vmatrix} i & e^{i(k_+z - \omega t)} \\ 1 & \end{vmatrix} \\ \vec{E}_- = E^- \begin{vmatrix} -i & e^{i(k_-z - \omega t)} \\ 1 & \end{vmatrix} \end{array} \right.$$

La relation de dispersion que l'on a obtenue au début de la question 5. donne

$$k_{\pm}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\omega \omega_p^2}{\omega \pm \omega_c}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{v_{\varphi}^{\pm}} \right)^2 = \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 \pm \omega \omega_c} \right)$$

où l'on rappelle que la vitesse de phase est définie par $v_{\varphi} = \omega/k$. On a ainsi l'expression

$$v_{\varphi}^{\pm} = c \sqrt{\frac{\omega^2 \pm \omega \omega_c}{\omega^2 \pm \omega \omega_c - \omega_p^2}}$$

Les deux vitesses de phase sont différentes, ce qui n'a en soi rien de choquant : comme la plupart des milieux matériels, le plasma est un milieu dispersif pour lequel la vitesse de phase et la vitesse de groupe d'une onde dépendent de sa longueur d'onde.

6.b) Dans le plan $z = 0$, et si l'on omet le terme d'oscillation temporelle, l'onde incidente a pour expression

$$\vec{E}(z=0) = \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \end{vmatrix}$$

Si l'on cherche à décomposer ce vecteur en une composante circulaire gauche —de vecteur d'onde k_- — et en une composante circulaire droite associée au vecteur d'onde k_+ , il faut vérifier le système

$$\begin{cases} iE^+ - iE^- = E_x \\ E^+ + E^- = E_y \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} E^+ = \frac{E_y - iE_x}{2} \\ E^- = \frac{E_y + iE_x}{2} \end{cases}}$$

Compte tenu des résultats de la question 6.a), le champ électrique en un point $z > 0$ s'écrit

$$\vec{E}(z, t) = e^{-i\omega t} \begin{vmatrix} \left(\frac{E_y - iE_x}{2}\right) i e^{ik_+z} - i \left(\frac{E_y + iE_x}{2}\right) e^{ik_-z} \\ \left(\frac{E_y - iE_x}{2}\right) e^{ik_+z} + \left(\frac{E_y + iE_x}{2}\right) e^{ik_-z} \end{vmatrix}$$

Factorisons l'exponentielle de la demi-somme $i(k_+ + k_-)z/2$:

$$\begin{aligned} \vec{E}(z, t) &= \exp\{-i\omega t\} \exp\left\{i \frac{(k_+ + k_-)}{2} z\right\} \\ &\times \begin{vmatrix} \frac{E_x}{2} \left(e^{i \frac{(k_+ - k_-)}{2} z} + e^{-i \frac{(k_+ - k_-)}{2} z}\right) + i \frac{E_y}{2} \left(e^{i \frac{(k_+ - k_-)}{2} z} - e^{-i \frac{(k_+ - k_-)}{2} z}\right) \\ -i \frac{E_x}{2} \left(e^{i \frac{(k_+ - k_-)}{2} z} - e^{-i \frac{(k_+ - k_-)}{2} z}\right) + \frac{E_y}{2} \left(e^{i \frac{(k_+ - k_-)}{2} z} + e^{-i \frac{(k_+ - k_-)}{2} z}\right) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Si l'on pose comme le suggère l'énoncé,

$$\theta = \frac{(k_+ - k_-)}{2} z \quad \text{ainsi que} \quad \varphi = \frac{(k_+ + k_-)}{2} z,$$

le champ électrique se met sous la forme

$$\vec{E}(z, t) = e^{-i(\omega t - \varphi)} \begin{vmatrix} E_x \cos \theta - E_y \sin \theta \\ E_x \sin \theta + E_y \cos \theta \end{vmatrix}$$

À une distance z fixée, on reconnaît là les coordonnées du vecteur $\vec{E}(z=0)$ après une rotation d'angle $\theta(z)$. **Après avoir parcouru une distance z dans le plasma, la direction de polarisation de l'onde a tourné d'un angle $\theta(z)$.**

Dans la limite $\omega_c \ll \omega_p \ll \omega$, on extrait de la relation de dispersion

$$\begin{aligned} k_{\pm} &= \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \frac{\omega \omega_p^2}{\omega \pm \omega_c}} \\ &= \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 \pm \omega \omega_c}} \\ &\simeq \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 \mp \frac{\omega_c}{\omega}\right)\right). \end{aligned}$$

Il vient alors pour la différence des deux nombres d'onde

$$k_+ - k_- \simeq \frac{\omega}{c} \left(\frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega_c}{\omega} + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega_c}{\omega} \right)$$

soit pour θ , dans la limite considérée,

$$\theta \simeq \omega_c \left(\frac{\omega_p^2 z}{\omega^2 2c} \right).$$

On a bien une dépendance linéaire en B_C puisque $\omega_c = eB_C/m$.

Application Numérique : $\theta = 2,35 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 1,35^\circ$

6.c) Lorsque ω est tel que seul k_+ est réel, on a toujours une décomposition de l'onde incidente suivant les deux composantes polarisées circulairement, mais cette fois-ci la composante gauche associée à k_- n'est plus une onde propagative, mais une onde évanescente. Il y a en effet extinction de la composante de nombre d'onde k_- : **après avoir parcouru une distance de l'ordre de $\delta = 1/|k_-|$, l'onde est pratiquement circulaire droite.**

Complément : certaines substances comme le saccharose, l'acide tartrique $(CH-OH-CO_2H)_2$ ou le quartz SiO_2 peuvent naturellement faire tourner la polarisation d'une onde polarisée rectilignement qui les traverse. Cette propriété est appelée polarisation rotatoire ou activité optique. Dans d'autres composés, la polarisation rotatoire peut être induite par l'application d'un champ magnétique. C'est l'effet FARADAY que l'on peut mettre en évidence avec du sulfure de zinc ou de l'eau. Celui-ci présente une différence essentielle avec l'activité optique naturelle : l'angle de rotation est inversé quand on inverse le sens du champ magnétique (ou, ce qui revient au même, le sens de propagation de l'onde).

D'un point de vue expérimental, l'effet FARADAY prouve la nature vectorielle des ondes électromagnétiques. En ce qui concerne ses applications, on peut citer la détermination du champ magnétique interstellaire : les étoiles émettent des ondes polarisées qui traversent le plasma interstellaire. En connaissant la densité de ce dernier et la distance parcourue, on peut estimer la composante du champ magnétique parallèle à la direction de propagation...

3.5.6 Ondes dans un milieu ionisé ; expérience de Fizeau.

Université Paris VI

Durée 3 h.

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée.

I. Question de Cours

Dipôle électrostatique, sa définition et son moment dipolaire \vec{p} . Dimension et unité de \vec{p} . Calculer le potentiel électrostatique $\varphi(\vec{r})$ d'un dipôle ainsi que son champ $\vec{E}(\vec{r})$ au point \vec{r} , à grande distance du dipôle placé à l'origine d'un repère $Oxyz$.

II. Problème

On considère un milieu ionisé illimité. Ce milieu est supposé homogène, globalement neutre et comporte N_+ ions positifs et N_- électrons par unité de volume. Ce milieu est suffisamment dilué pour que l'on puisse admettre qu'il est constitué de charges libres placées dans le vide sans interactions entre elles. Une onde monochromatique plane progresse dans ce milieu. Elle imprime aux particules chargées du milieu un mouvement oscillatoire.

En présence de ce mouvement, le nombre de particules chargées dans un volume donné n'est plus entièrement constant. Le nombre d'électrons par unité de volume devient une fonction du temps, $N_- = N_-(t)$. Toutefois, les effets du mouvement sont faibles et on écrira $N_-(t) = N_- + n(t)$ où N_- est le nombre d'électrons par unité de volume en l'absence du mouvement et $n(t) \ll N_-$; $n(t)$ est une petite correction dont la moyenne temporelle est nulle. Cet effet existe également pour les ions positifs mais on le négligera étant donnée leur grande masse. On posera $N_+(t) = N_+$. On emploiera partout la notation complexe et on écrira

$$\tilde{\vec{E}} = \vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t}, \quad \tilde{\vec{B}} = \vec{B}(\vec{r}) e^{-i\omega t}$$

où $\vec{E}(\vec{r})$ et $\vec{B}(\vec{r})$ sont des champs complexes. En outre, on posera $N_+ = N = N_-$.

1. Calculer la densité volumique de charge totale $\rho(t)$.

2. En écrivant

$$\tilde{\vec{v}} = \vec{v}(\vec{r}) e^{-i\omega t},$$

calculer la vitesse \vec{v} d'un électron soumis au champ électrique oscillant. On utilisera la relation fondamentale de la mécanique classique en négligeant les forces magnétiques. Quelle est la relation entre \vec{E} et \vec{v} ?

3. Établir l'expression de la densité de courant $\tilde{\vec{J}}(t) = \vec{J}(\vec{r}) e^{-i\omega t}$. On tiendra compte du mouvement des électrons mais on négligera celui des ions. On admettra que le produit $n\vec{v}$ peut être négligé lui aussi.

4. Connaissant ρ et \vec{J} , trouver à partir des équations de MAXWELL les relations vérifiées par $\vec{E}(\vec{r})$ et $\vec{B}(\vec{r})$.

5. Démontrer l'équation de continuité $\text{div}(N\vec{v}) = i\omega n$.

6. Transformer les équations de MAXWELL établies au 4. en éliminant n et \vec{v} . Montrer que :

a) $\text{rot } \vec{B} = -i\omega\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}$

b) $\text{div}(\varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}) = 0$

- c) $\text{div}(\vec{B}) = 0$
 d) $\text{rot} \vec{E} = i\omega \vec{B}$ où $\varepsilon = 1 - \frac{Ne^2}{\omega^2 m \varepsilon_0}$.

Le milieu ionisé est donc assimilable à un milieu diélectrique caractérisé par la permittivité

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad \text{où} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}} \text{ est la « fréquence de plasma ».}$$

7. En tenant compte de ce résultat, montrer que dans le milieu ionisé les champs \vec{E} et \vec{B} vérifient les équations de propagation :

$$\Delta \vec{E} + \omega^2 \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} = \vec{0} \quad \Delta \vec{B} + \omega^2 \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \vec{B} = \vec{0}.$$

Quel est le vecteur d'onde \vec{k} de l'onde plane correspondante ?

Montrer cependant que la propagation des ondes n'est possible que si ω est supérieure à une valeur limite ω_0 . Déterminer cette valeur limite.

III. Problème

A. Première Partie

- En utilisant les formules de transformation de LORENTZ, retrouver les formules relativistes de composition des vitesses. On définira avec précision tous les termes utilisés.
- Soit un milieu (M) transparent dont l'indice de réfraction n est uniforme et indépendant de la fréquence. Le référentiel R_M qui lui est lié est supposé galiléen. On rappelle que par rapport à R_M la vitesse de propagation d'un signal lumineux dans ce milieu est c/n où c est la célérité de la lumière dans le vide. Soit $R_L(x, y, z, t)$ un autre référentiel galiléen que l'on désignera par référentiel du laboratoire. Par rapport à R_L , le référentiel R_M est animé d'un mouvement uniforme de vitesse \vec{V}_i .
 - En utilisant les formules de la question 1., trouver quelles sont, par rapport à R_L , les vitesses \vec{u}_1 et \vec{u}_2 d'un signal lumineux se propageant dans le milieu (M) le long de l'axe des x correspondant respectivement à chacun des deux cas suivants :

- $\vec{V}_1 = -V \vec{e}_x$
- $\vec{V}_2 = +V \vec{e}_x$.

- Que deviennent ces vitesses si $n = 1$? Pouvait-on prévoir le résultat ?

B. Deuxième Partie

On établit dans un tube en U (voir la figure 3.29) un courant permanent d'un liquide transparent non dispersif d'indice $n = 4/3$.

Le tube comporte deux branches parallèles B_1 et B_2 de longueur D délimitées par des fenêtres transparentes A_1 et A'_1 pour B_1 , A_2 et A'_2 pour B_2 .

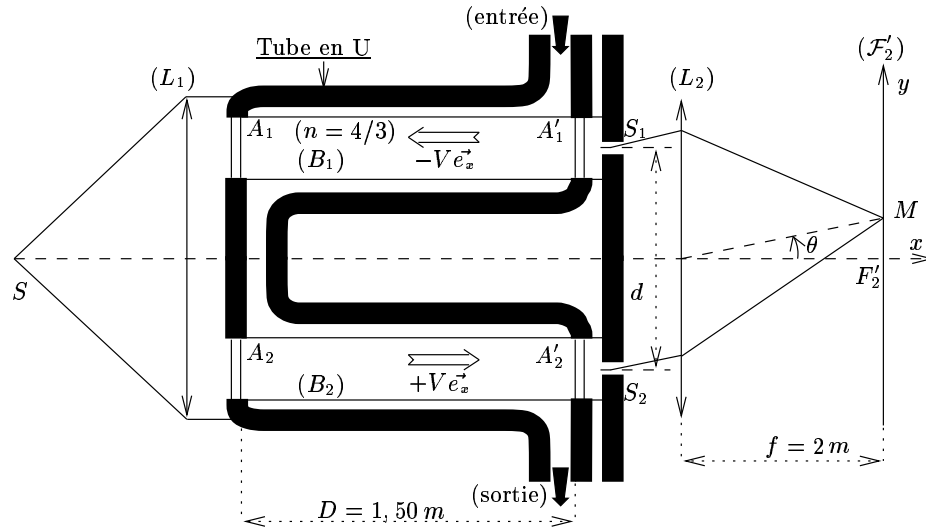


FIG. 3.29 - Le dispositif de l'expérience étudiée dans le problème III.

La vitesse du liquide par rapport au référentiel du laboratoire R_L est $\vec{V}_1 = -V\vec{e}_x$ dans la branche B_1 et $\vec{V}_2 = +V\vec{e}_x$ dans la branche B_2 .

Le tube est éclairé par une source ponctuelle S émettant une lumière monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0 . Cette source S est placée au foyer objet d'une lentille convergente (L_1) dont l'axe optique \vec{Sx} est parallèle aux branches du tube. (L_1) est située devant les fenêtres A_1 et A_2 .

1.

- Calculer dans R_L les durées respectives Δt_1 et Δt_2 de propagation d'un signal lumineux dans B_1 et B_2 .
- En déduire la valeur $\delta t = \Delta t_1 - \Delta t_2$ du retard pris par un signal traversant B_1 sur un signal traversant B_2 , tous les deux issus d'un même signal émis par S .
- En donner une valeur approchée au premier ordre en V/c .

2. Les fenêtres A'_1 et A'_2 éclairent respectivement deux trous identiques S_1 et S_2 (trous d'YOUNG) pratiqués dans un écran opaque (E) (voir la figure 3.29). La distance entre S_1 et S_2 est notée d .

On observe dans le plan focal image (\mathcal{F}'_2) d'une lentille convergente (L_2) , placée derrière (E) et de même axe optique que (L_1) , la figure d'interférence résultant de la superposition des ondes issues de (S_1) et de (S_2) . Tout se passe alors comme si on observait les interférences de ces ondes à l'infini.

- Exprimer en fonction de d et de θ la différence de marche δ au delà de l'écran (E) entre les ondes issues de (S_1) et de (S_2) qui interfèrent en M (voir figure 3.29).

En déduire l'avance de phase $\Delta\varphi_s$ correspondante de l'onde issue de (S_1) sur celle issue de (S_2).

b) F'_2 étant le foyer image de (L_2), donner en fonction de $y = \overline{F'_2 M}$ que l'on supposera petit devant la distance focale f de (L_2) une expression approchée de $\Delta\varphi_s$ au premier ordre en y/f .

3. Calculer et décrire en fonction de y ce qu'est la répartition de l'éclairement dans le plan focal (\mathcal{F}'_2) en l'absence de courant dans le tube en U ($V = 0$).

4. Le retard δt calculé en B.1.b) induit un retard de phase $\Delta\varphi_t = \omega\delta t$ de l'onde traversant B_1 par rapport à celle traversant B_2 .

À quelle distance y_0 et dans quel sens s'est déplacée la frange centrale observée au 3. lorsque le courant du liquide de vitesse V est établi dans le tube en U.

5. Application numérique: calculer y_0 .

On donne : $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$; $D = 1,5 \text{ m}$; $d = 6 \text{ mm}$; $f = 2 \text{ m}$; $V = 7 \text{ m/s}$.

Solution

I. Question de cours :

Un dipôle électrostatique est une distribution de charges de densité volumique ρ , contenue dans un volume (V), telle que :

$$\begin{aligned} Q_+ &= \iiint_{(V)} \rho_+ d\tau && \neq 0 \\ Q_{tot} &= Q_+ + Q_- = \iiint_{(V)} \rho d\tau && = 0 \\ \vec{p} &= \iiint_{(V)} \rho(P) \overrightarrow{OP} d\tau_{(P)} && \neq \vec{0} \end{aligned}$$

où ρ_+ est la densité volumique de charges positives de la distribution. \vec{p} est appelé le moment dipolaire de la distribution de charges. Le moment dipolaire est indépendant du point O utilisé pour le calculer. En effet,

$$\begin{aligned} \vec{p}(O') &= \iiint_{(V)} \rho(P) \overrightarrow{O'P} d\tau_{(P)} \\ &= \underbrace{\iiint_{(V)} \rho(P) \overrightarrow{O'O} d\tau_{(P)}}_{Q_{tot} \cdot \overrightarrow{O'O} = \vec{0}} + \iiint_{(V)} \rho(P) \overrightarrow{OP} d\tau_{(P)} = \vec{p}(O). \end{aligned}$$

Soit G_+ (resp. G_-) le barycentre des charges positives (resp. négatives) de la distribution. On montre que l'on peut écrire :

$$\vec{p} = Q_+ \overrightarrow{G_- G_+}.$$

Cette dernière relation permet de déterminer la dimension du moment dipolaire \vec{p} : $[p] = C.m$.

$$\text{L'unité de mesure de } p \text{ est le DEBYE avec } 1 D = 10^{-29} C m.$$

Cette unité est particulièrement bien adaptée aux mesures atomiques puisque la charge de l'électron est $10^{-19} C$ et les distances atomiques sont de l'ordre de $10^{-10} m$.

Pour une distribution de charges de densité volumique ρ contenue dans un volume (V) , l'expression générale du potentiel électrostatique est :

$$\varphi(\overrightarrow{OM}) = \iiint_{(V)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(P)}{PM} d\tau_{(P)} \quad \text{où } \overrightarrow{OM} = \vec{r}.$$

Plaçons-nous à grande distance du dipôle :

$$\|\overrightarrow{OP}\| \ll \|\overrightarrow{OM}\|,$$

ce qui permet de faire un développement limité de $1/PM$ au premier ordre en (OP/OM) :

$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{\sqrt{(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM})^2}} \simeq \frac{1}{r} \left[1 + \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM}}{r^2} + o\left(\frac{OP^2}{OM^2}\right) \right].$$

On arrive, en utilisant l'expression générale du potentiel, à :

$$\varphi(\vec{r}) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \underbrace{\iiint_{(V)} \rho(P) d\tau_{(P)}}_{=0} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \iiint_{(V)} \rho(P) \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM} d\tau_{(P)}$$

ou, en introduisant le moment dipolaire \vec{p} , à :

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}.$$

En utilisant les coordonnées sphériques, l'axe (O, \vec{e}_z) étant défini par $\vec{p} = p\vec{e}_z$, on obtient :

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}.$$

Le champ électrique créé par le dipôle est défini, en régime permanent, par $\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad}_{\vec{r}} \varphi$, ce qui conduit à :

$$\begin{cases} E_r &= \frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\theta &= \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\varphi &= 0. \end{cases}$$

Complément : les lignes de champ du champ électrique sont définies par $\vec{E} \wedge d\vec{l} = \vec{0}$ tandis que les lignes équipotentielles sont définies par $\varphi(\vec{r}) = C^{te}$. De plus, d'après la définition même du potentiel électrostatique, les équipotentielles sont en tout point perpendiculaires aux lignes de champ.

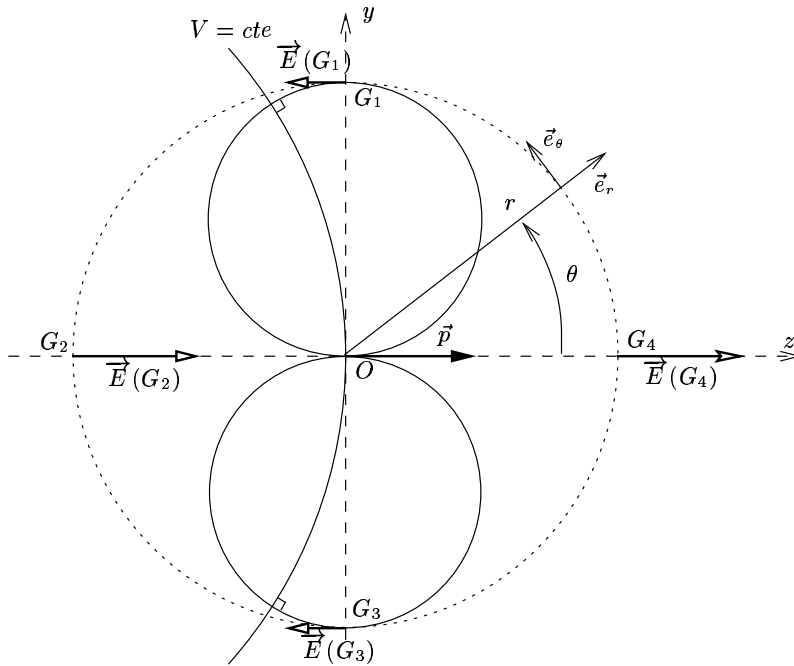


FIG. 3.30 - Les lignes de champ, les équipotentiellles et les positions de GAUSS d'un dipôle électrostatique

Les lignes de champ et les équipotentiellles ne dépendent pas de la variable φ car le système est invariant par toute rotation autour de l'axe (O, \vec{e}_z) . En coordonnées polaires, les lignes de champ ont pour équation $r = r_0 \sin \theta$, et les équipotentiellles sont définies par $r^2 = K \cos \theta$, K et r_0 étant deux constantes. Leur allure est donnée sur la figure 3.30. On peut définir les quatre positions de GAUSS, notées G_1, G_2, G_3 et G_4 sur la figure 3.30, pour lesquelles le module du champ électrique est extrémal, pour r donné. Les champs électriques en ces quatre points sont reliés par :

$$\vec{E}(G_2) = \vec{E}(G_4) = -2\vec{E}(G_1) = -2\vec{E}(G_3).$$

PROBLÈMES

II. Problème :

II.1. Par définition,

$$\rho(t) = N_+(t) e + N_-(t) (-e)$$

ce qui, compte tenu des notations adoptées, s'écrit :

$$\boxed{\rho(t) = -e n(t)}.$$

II.2. Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à l'électron dans un référentiel supposé galiléen, s'écrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \left[\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right].$$

Dans le cas où la force de LORENTZ est due à l'action d'une onde électromagnétique plane progressive, on a $c \|\vec{B}\| = \|\vec{E}\|$, ce qui implique, pour des particules non relativistes :

$$\frac{\|\vec{F}_{el}\|}{\|\vec{F}_{mag}\|} \geq \frac{\|\vec{E}\|}{\|\vec{v}\| \|\vec{B}\|} \sim \frac{c}{\|\vec{v}\|} \gg 1.$$

On peut donc négliger la force magnétique devant la force électrique :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E}.$$

L'utilisation de la notation complexe conduit à la relation :

$$\boxed{\tilde{v} = \frac{-ie}{m\omega} \tilde{E}}.$$

En séparant la partie spatiale et la partie temporelle, on arrive à :

$$\boxed{\vec{v}(\vec{r}) = \frac{-ie}{m\omega} \vec{E}}.$$

II.3. On ne prend en compte, dans l'expression de la densité de courant, que le mouvement des électrons car les ions, pour des champs faibles, peuvent être considérés comme immobiles : leur masse est beaucoup plus grande que celle des électrons. Ainsi,

$$\vec{J} = \rho_- \vec{v}_- = -e(N + n)\vec{v}.$$

En utilisant la notation complexe et en négligeant $(n\vec{v})$, il vient :

$$\boxed{\tilde{J}(t) \simeq -eN\tilde{v}(t) = \frac{iNe^2}{m\omega} \tilde{E}(t)}.$$

II.4. Les équations de MAXWELL s'écrivent :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \text{Équation de MAXWELL-GAUSS} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{Équation de MAXWELL-FARADAY} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left[\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] & \text{Équation de MAXWELL-AMPÈRE.} \end{cases}$$

En utilisant tout d'abord l'équation de MAXWELL-GAUSS, on obtient :

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{-ne}{\varepsilon_0}.$$

L'équation de MAXWELL-FARADAY fournit la relation :

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}) = i\omega \vec{B}.$$

L'équation de MAXWELL-AMPÈRE permet quant à elle d'écrire :

$$\operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 i \left[\frac{Ne^2}{m\omega} - \varepsilon_0 \omega \right] \vec{E}(\vec{r}),$$

la dernière équation de MAXWELL donnant :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

II.5. Considérons une distribution volumique de charges de densité volumique ρ contenue dans un volume \mathcal{V} de l'espace, limité par une surface fermée \mathcal{S} . Soit Q la charge totale de la distribution :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \, d\tau = \frac{dQ}{dt} = - \iint_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot \vec{n} \, dS$$

où \vec{n} est un vecteur unitaire normal à la surface \mathcal{S} , orienté vers l'extérieur du volume \mathcal{V} . Le théorème d'OSTROGRADSKY, appliqué à l'intégrale de surface précédente, conduit à :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} \right] d\tau = 0$$

cette égalité devant être vraie pour tout volume \mathcal{V} . On en déduit l'équation de continuité de la charge électrique :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

ou, en utilisant la notation complexe et les résultats des questions II.1. et II.3. :

$$\operatorname{div} (N\vec{v}) = i\omega n.$$

II.6. Posons, comme cela est suggéré par l'énoncé,

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}} \quad \text{et} \quad \varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.$$

II.6.a) D'après la relation déduite de l'équation de MAXWELL-AMPÈRE, on a :

$$\boxed{\text{rot } \vec{B} = -i\mu_0\varepsilon_0\varepsilon\omega \vec{E}}.$$

II.6.b) La relation entre n et \vec{v} obtenue à la question II.5. ainsi que le résultat de II.2. permettent d'écrire :

$$\text{div } \vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{-e}{i\omega\varepsilon_0} \right) \text{div} (N\vec{v}) = \left(\frac{e^2}{m\omega^2\varepsilon_0} \right) \text{div} (N\vec{E}),$$

et en regroupant les deux termes sous un même opérateur divergence :

$$\boxed{\text{div} (\varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}) = 0}.$$

II.6.c) La dernière équation de MAXWELL donne :

$$\boxed{\text{div } \vec{B} = 0}.$$

II.6.d) L'équation de MAXWELL-FARADAY est elle aussi inchangée :

$$\boxed{\text{rot } \vec{E} = i\omega \vec{B}},$$

On remarque que l'on obtient des équations formellement identiques à celles d'un milieu diélectrique de permittivité relative ε . La démarche que nous avons suivie ici est analogue à celle qui est adoptée lors de la description classique des milieux diélectriques en régime variable par le modèle de l'électron élastiquement lié. La seule différence se situe dans l'expression finale de la permittivité relative ε : dans le cas d'un milieu diélectrique en régime variable, l'électron est soumis, en plus de la force électrique, à une force de rappel de pulsation propre ω_0 et à une force de frottement visqueux de constante de temps τ . L'expression de la permittivité relative ε est alors :

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega/\tau}.$$

On constate que la relation que nous avons obtenue pour le milieu ionisé correspond à la limite des hautes fréquences $\omega \gg \omega_0 \gg 1/\tau$.

II.7. Le champ électromagnétique se propage dans le milieu ionisé et vérifie une équation d'onde analogue à celle obtenue dans un milieu diélectrique de permittivité relative ε :

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta \vec{E} + \omega^2 \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} &= \vec{0} \\ \Delta \vec{B} + \omega^2 \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \vec{B} &= \vec{0} \end{aligned}}$$

On peut retrouver ce résultat de façon directe à partir des équations de MAXWELL écrites à la question précédente :

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = -i\omega\mu_0\varepsilon_0\varepsilon \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \mu_0\varepsilon_0\varepsilon\omega^2 \vec{B}.$$

En utilisant la relation entre opérateurs :

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \overrightarrow{\text{grad}} [\text{div} \vec{B}] - \Delta \vec{B}$$

ainsi que l'équation $\text{div} \vec{B} = 0$, on arrive à :

$$\Delta \vec{B} + \omega^2\mu_0\varepsilon_0\varepsilon \vec{B} = \vec{0},$$

l'équation de propagation pour le champ électrique \vec{E} s'obtenant de manière analogue.

On suppose que l'onde qui se propage dans le milieu est plane. Sa partie spatiale a pour expression, en notations complexes

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}.$$

L'équation d'onde devient alors :

$$k^2 = \mu_0\varepsilon_0\varepsilon\omega^2.$$

Il s'agit de la relation de dispersion du milieu considéré. Le vecteur d'onde est :

$$|k| = \sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon}\omega = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}.$$

La propagation d'une onde plane dans le milieu n'est possible que si le vecteur d'onde possède une partie réelle non nulle, ce qui signifie dans le cas présent qu'il doit être réel puisque ε est réel. Il faut donc que l'inégalité $\varepsilon > 0$ soit vérifiée, ce qui se traduit par :

$$1 - \omega_p^2/\omega^2 > 0,$$

ou encore :

$$\omega > \omega_0 = \omega_p.$$

Remarque 1 : le modèle classique de DRUDE de la conductivité σ d'un matériau conduit, dans le cas du régime harmonique à la pulsation ω , à :

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau_c},$$

où $\sigma_0 = Ne^2\tau_c/m$ est la conductivité au repos et τ_c le temps caractéristique de relaxation du matériau considéré (lié au temps de vol moyen des électrons entre deux collisions avec les ions ou les défauts). La conductivité que nous avons obtenue à la question II.3., a pour expression :

$$\sigma' = \frac{iNe^2}{m\omega},$$

et correspond à la limite $\omega\tau_c \gg 1$. La pulsation de l'onde se propageant dans le milieu doit donc être telle que $\omega \gg 1/\tau_c$.

Remarque 2 : la fréquence plasma ω_p joue un rôle fondamental dans l'étude des milieux ionisés. Par exemple, l'ionosphère, qui est composée des hautes couches de l'atmosphère, peut être considérée comme un milieu ionisé en raison de l'action des rayons UV provenant du soleil. À titre d'ordre de grandeur, $N \simeq 5.10^{10}$ électrons par m^3 , ce qui donne $\omega_p \simeq 10^7 s^{-1}$. Ainsi, les ondes de basse fréquence peuvent être réfléchies par l'ionosphère, permettant la transmission entre des points très éloignés. La communication avec des satellites n'est possible que pour des fréquences telles que $\omega > \omega_p$.

III. Problème :

Il s'agit de l'étude de l'expérience de FIZEAU (1851) dont le but était de déterminer la vitesse de la lumière dans un liquide d'indice n en mouvement par rapport à un référentiel galiléen. Cette expérience a notamment mis en défaut la loi de composition des vitesses de GALILÉE dans le cas de la lumière.

III.A.1. Soit (R) un référentiel galiléen et (R') un second référentiel galiléen en translation rectiligne uniforme par rapport à (R) à la vitesse \vec{V} .

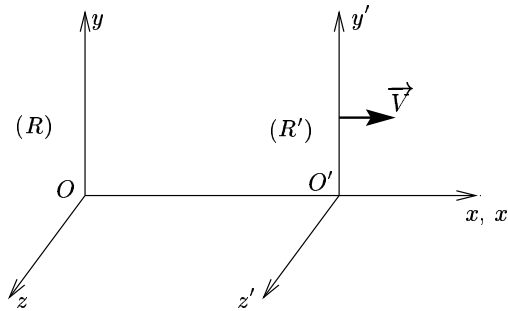


FIG. 3.31 - Définition des différents termes employés

Avec les notations précédentes, la transformation de LORENTZ entre les référentiels (R) et (R') s'écrit :

$$\begin{cases} x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{cases}$$

avec les expressions habituelles

$$\beta = \frac{V}{c} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

On en déduit les composantes de la vitesse :

$$\begin{cases} v_{x'} = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - \beta c dt}{dt - \beta dx/c} \\ v_{y'} = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - \beta dx/c)} \\ v_{z'} = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma(dt - \beta dx/c)}. \end{cases}$$

En utilisant alors la définition des composantes de la vitesse dans le référentiel (R) : $v_x = dx/dt \dots$, il vient :

$$\begin{cases} v_{x'} = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2} \\ v_{y'} = \frac{v_y}{\gamma(1 - v_x V/c^2)} \\ v_{z'} = \frac{v_z}{\gamma(1 - v_x V/c^2)} \end{cases}$$

III.A.2.a) Choisissons la direction x des deux référentiels R_L et R_M de telle façon que la vitesse \vec{V}_i soit orientée selon l'axe (O, \vec{x}) (cf. figure 3.31). Dans le référentiel R_M , la vitesse du signal est $v'_x = c/n$, tandis que l'on a $v'_y = 0 = v'_z$. Avec les résultats de la question précédente, on arrive à :

$$\begin{cases} U_{i_x} = \left(\frac{c + nV_i}{cn + V_i} \right) c \\ U_{i_y} = 0 \\ U_{i_z} = 0. \end{cases}$$

On en déduit, dans les deux cas proposés :

$$\begin{cases} u_1 = \left(\frac{c - nV}{cn - V} \right) c \\ u_2 = \left(\frac{c + nV}{cn + V} \right) c \end{cases}$$

III.A.2.b) Si $n = 1$, on obtient

$$u_1 = c = u_2$$

On pouvait prévoir ce résultat en utilisant le postulat d'EINSTEIN de la relativité restreinte : la vitesse c de la lumière dans le vide est invariante par changement de référentiel galiléen.

III.B.1.a) Dans R_L , on a :

$$\Delta t_i = \frac{D}{u_i}$$

où u_i est la vitesse du signal lumineux dans le milieu B_i par rapport au référentiel R_L . En utilisant le résultat de la question III.A.2.a), on obtient :

$$\begin{cases} \Delta t_1 = \left(\frac{cn - V}{c - nV} \right) \frac{D}{c} \\ \Delta t_2 = \left(\frac{cn + V}{c + nV} \right) \frac{D}{c} \end{cases}$$

III.B.1.b) La différence des deux termes précédents donne :

$$\delta t = \Delta t_1 - \Delta t_2 = 2D(n^2 - 1) \frac{V}{c^2 - n^2 V^2}.$$

III.B.1.c) En développant la fraction rationnelle au premier ordre en nV/c ($n \simeq 1$), on a :

$$\frac{1}{1 - n^2 V^2 / c^2} \simeq 1 + \frac{n^2 V^2}{c^2}$$

ce qui permet d'établir :

$$\delta t \simeq \frac{2D(n^2 - 1)}{c} \left(\frac{V}{c} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{V^3}{c^3} \right).$$

III.B.2. Il s'agit du montage des trous d'YOUNG, qui est un dispositif d'interférence à deux ondes par division du front d'onde. Les deux sources secondaires S_1 et S_2 entrant en jeu dans la modélisation du phénomène d'interférence sont situées au niveau des deux trous. Les franges d'interférence seront donc des droites parallèles à l'axe (F'_2, \vec{z}) , puisque l'écran est parallèle au vecteur $\vec{S}_1 \vec{S}_2$, comme nous allons le montrer par la suite.

III.B.2.a) La différence de marche entre les ondes issues de S , passant respectivement par S_1 et S_2 et interférant en M est :

$$\delta = (SM)_{voie\ 1} - (SM)_{voie\ 2} = (SS_1) - (SS_2) + (S_1M) - (S_2M)$$

où la notation (AB) représente le chemin optique entre les points A et B .

La source S étant située au foyer objet de la lentille (L_1), les rayons émergeant de la lentille (L_1) sont parallèles à la direction \vec{e}_x . Les plans d'onde correspondants sont donc des plans perpendiculaires à \vec{e}_x , ce qui implique que S_1 et S_2 appartiennent à un même plan d'onde. On a donc $(SS_1) = (SS_2)$. La différence de marche δ se réduit à la différence de marche entre les ondes issues de S_1 et de S_2 interférant en M :

$$\delta = (S_1M) - (S_2M).$$

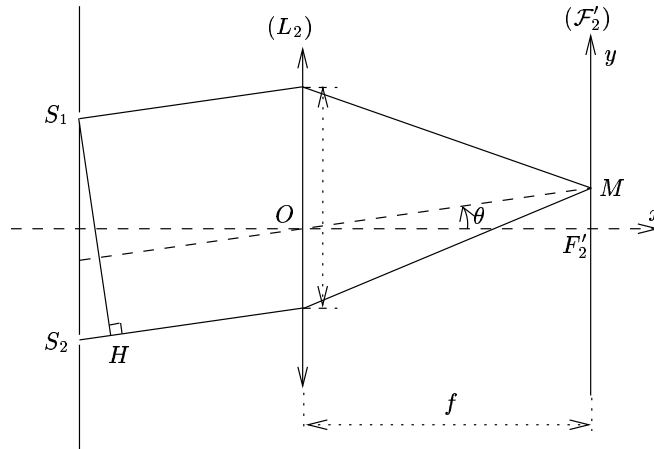


FIG. 3.32 - Définition des points H et O .

De même, M étant un foyer image secondaire de (L_2) , les plans d'onde des rayons convergeant en M sont des plans orthogonaux à la direction \overrightarrow{OM} . Ainsi, les points H et S_1 appartiennent à un même plan d'onde. La différence de marche se réduit à :

$$\delta = (S_1M) - (S_2M) = -(S_2H)$$

qui s'écrit, en fonction de d et de θ :

$$\delta = -d \sin(\theta)$$

car le chemin optique (S_2H) est calculé dans le vide.

Le déphasage $\Delta\varphi_\theta$ est relié à la différence de marche par $\Delta\varphi_\theta = 2\pi\delta/\lambda_0 = \omega\delta/c$, ce qui donne :

$$\Delta\varphi_\theta = -\frac{\omega d}{c} \sin \theta.$$

III.B.2.b) En utilisant les notations de la figure 3.29, on obtient, au premier ordre en y/f la relation :

$$\sin \theta \simeq \theta \simeq \tan \theta \simeq \frac{F_2' M}{f} = \frac{y}{f},$$

d'où :

$$\Delta\varphi_\theta \simeq -\frac{\omega d}{c} \frac{y}{f}.$$

III.B.3. En l'absence d'écoulement dans le tube, on se trouve dans la situation traditionnelle des interférences par les trous d'YOUNG : le seul déphasage entre les deux ondes issues de S_1 et de S_2 est $\Delta\varphi_\theta$. L'intensité lumineuse I sur l'écran est, en notant \vec{E}_1 (resp. \vec{E}_2) le champ électrique de l'onde passant par S_1 (resp. S_2) :

$$\begin{aligned} I &= \left\| \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \right\|^2 = \left\| \vec{E}_0 e^{i[\omega t - (S_1M)\omega/c]} + \vec{E}_0 e^{i[\omega t - (S_2M)\omega/c]} \right\|^2 \\ &= \left\| \vec{E}_0 e^{i(\omega t - (S_1M)\omega/c)} \left(1 + e^{i\omega\delta/c} \right) \right\|^2 \\ &= 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{\omega\delta}{c} \right) \right] = 2I_0 [1 + \cos(\Delta\varphi_\theta)], \end{aligned}$$

ce qui conduit à l'expression de l'éclairement :

$$I = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi y d}{\lambda_0 f} \right) \right].$$

La figure d'interférence est composée de droites d'équation $y = C^{\text{te}}$ régulièrement espacées d'un interfrange $i = \lambda_0 f / d$

III.B.4. Lorsque le fluide circule dans le dispositif, le retard δt introduit un déphasage supplémentaire $\Delta\varphi$, entre les deux ondes : l'expression de la répartition de l'éclairement devient :

$$I' = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi y d}{\lambda_0 f} - \omega \delta t \right) \right].$$

Les franges seront décalées vers le haut.

La frange centrale est repérée par $\delta' = 0$. En l'absence de courant dans le tube, $\delta' = \delta$ et la frange centrale est située en $y = 0$. En présence du courant, la frange centrale est repérée par :

$$\frac{2\pi y d}{\lambda_0 f} - \omega \delta t = 0$$

ce qui donne, en remplaçant δt par son expression du III.B.1.c) :

$$y_0 = 2D(n^2 - 1) \left(\frac{V}{c} \right) \frac{f}{d}.$$

III.B.5. Application Numérique : $y_0 = 0,018 \text{ mm}$.

3.5.7 Étude de quelques phénomènes liés aux interférences en optique.

*Université Paris VI
Examen Partiel d'Optique ; Durée : 3 h*

Problème I

Soient trois sources ponctuelles de coordonnées $S_1(a, 0, 0)$, $S_2(0, 0, 0)$ et $S_3(-a, 0, 0)$.

1. À quelles conditions les ondes issues de ces sources produiront-elles des franges d'interférence observables?

On suppose les conditions précédentes remplies. De plus, les amplitudes de chaque onde sont égales et leurs phases initiales à l'émission identiquement nulles. On aura donc pour les ondes émises en S_1 , S_2 et S_3 l'équation s_1 , s_2 et $s_3 = Ae^{-i\omega t}$.

2. Déterminer l'équation des trois ondes qui arrivent en un point $M(x, y, D)$ d'un plan de coordonnée $z = D$, en fonction des distances $r_1 = S_1M$, $r_2 = S_2M$ et $r_3 = S_3M$. La propagation s'effectue dans un milieu d'indice $n = 1$.
3. Déterminer l'équation de l'onde résultante $s = s_1 + s_2 + s_3$. Faire apparaître les différences de marche $\delta_1 = (S_2M) - (S_1M)$, $\delta_2 = (S_3M) - (S_2M)$ dans l'expression de s .

4. On admettra que $D \gg (x, y) \gg a$. Déterminer les différences de marche en faisant les approximations nécessaires que l'on justifiera.
5. En déduire l'expression de l'éclairement $E(x)$. Donner l'allure de la fonction $E(x)$ en précisant en particulier les positions des maxima et des minima.

Problème II

On considère une lame à faces parallèles d'indice n et d'épaisseur e placée dans l'air.

1. Faire une figure de la marche des rayons lumineux pour l'observation des interférences par réflexion.
2. Démontrer l'expression de la différence de marche entre deux rayons réfléchis sur chacune des faces de la lame, provenant d'un même rayon incident incliné d'un angle i_0 . On appellera R_1 et R_2 les deux rayons qui interfèrent.
3. Décrire la figure d'interférence obtenue par réflexion.
4. Le facteur de réflexion pour chaque face vaut :

$$\rho = \frac{I_{\text{réfléchié}}}{I_{\text{incidente}}} = \frac{1}{2}.$$

Si l'intensité du rayon incident vaut 1, quelle est l'intensité des rayons R_1 et R_2 ? Quelles sont leurs amplitudes a_1 et a_2 ?

5. Exprimer l'intensité lumineuse en un point d'observation en fonction de a_1 , a_2 et φ le déphasage entre les deux rayons. En déduire le facteur de visibilité V des franges. On rappelle que

$$V = \frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}} + I_{\text{min}}}.$$

Problème III

On considère deux fentes d'YOUNG F_1 et F_2 éclairées par une source S , éloignée, placée sur l'axe des fentes.

1. S est monochromatique. Les fentes sont distantes de 3 mm . L'écran d'observation est à 4 mètres . La troisième frange sombre est à $1,875 \text{ mm}$ de la frange centrale. Calculer en μm la longueur d'onde λ_0 de la lumière utilisée. On appellera par la suite f_0 la frange pour laquelle $\delta = 0$ (les expressions utilisées dans le calcul devront être justifiées).
2. On interpose derrière la fente F_1 une lame de verre d'épaisseur $e = 0,04 \text{ mm}$ et dont l'indice est donné en fonction de la longueur d'onde par la relation $n = a - b\lambda$ où $a = 1,46$ et $b = 0,05$ si λ est exprimée en μm . De combien et dans quel sens la frange f_0 se déplace-t-elle lorsque S émet la radiation λ_0 ?

3. S émet maintenant de la lumière blanche. Donner l'expression de l'ordre d'interférence p en fonction de λ . Montrer qu'il existe une région du champ d'interférence où l'ordre d'interférence ne dépend pas de la longueur d'onde. La frange correspondante est appelée frange achromatique. Sa position diffère-t-elle de la frange f_0 trouvée ci-dessus et de combien?

Solution

Problème I

I.1. Les trois sources S_1, S_2, S_3 sont supposées ponctuelles. Il n'y aura donc pas de problèmes liés à la cohérence spatiale des sources.

Du point de vue de la cohérence de polarisation, on suppose que les trois ondes ont une direction de polarisation identique, ce qui permet de travailler avec les amplitudes des champs (approximation scalaire de l'optique). Dans ce cas, la polarisation ne joue aucun rôle dans le phénomène d'interférence.

Pour obtenir des interférences, il faudra donc que les trois sources émettent à une longueur d'onde moyenne λ_m commune et soient temporellement cohérentes. Cela signifie, en pratique, que l'on doit réaliser la condition :

$$\delta_{i,j} \ll l = \frac{1}{\Delta\sigma} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m^2}$$

où $\delta_{i,j}$ est la différence de marche entre les sources S_i et S_j et $\Delta\sigma$ est la plus grande largeur spectrale, en nombre d'onde, des trois sources.

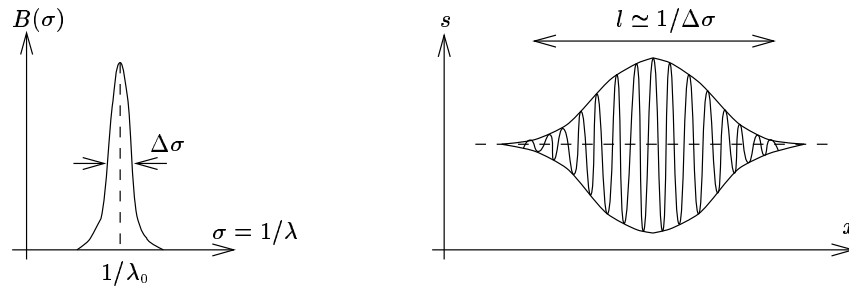


FIG. 3.33 - Le spectre $B(\sigma)$ de la source en fonction du nombre d'onde et l'amplitude s du signal émis par la source, à t donné, en fonction de la position : une largeur spectrale $\Delta\sigma$ de la source entraîne une longueur $l = 1/\Delta\sigma$ du train d'onde émis par celle-ci.

Dans la suite du problème, on supposera que les trois sources ponctuelles sont parfaitement monochromatiques à la longueur d'onde λ .

I.2. On pose $s_j(S_j) = Ae^{-i\omega t}$ pour chacune des trois sources S_j . Au point M , les ondes émises auront la forme :

$$s_j(M) = A e^{(-i\omega t + ik_j \cdot r_j)} \quad (r_j = |\vec{S}_j \vec{M}|)$$

que l'on peut réécrire, la propagation ayant lieu dans le vide :

$$s_j(M) = A e^{-i\omega t} \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} S_j M \right].$$

D'où :

$$\begin{cases} s_1(M) = A e^{-i\omega t} \exp \left(i \frac{2\pi}{\lambda} r_1 \right) \\ s_2(M) = A e^{-i\omega t} \exp \left(i \frac{2\pi}{\lambda} r_2 \right) \\ s_3(M) = A e^{-i\omega t} \exp \left(i \frac{2\pi}{\lambda} r_3 \right). \end{cases}$$

I.3. L'onde résultante au point M est la superposition des trois ondes incidentes émises par les sources S_1 , S_2 , et S_3 . La relation $s(M) = s_1(M) + s_2(M) + s_3(M)$ peut se mettre sous la forme :

$$s = A e^{-i\omega t} e^{i2\pi r_2/\lambda} \left[\exp \left(-i \frac{2\pi\delta_1}{\lambda_1} \right) + 1 + \exp \left(i \frac{2\pi\delta_2}{\lambda_1} \right) \right].$$

I.4. On suppose désormais que le point d'observation $M(x, y, D)$ est situé à grande distance des sources, avec de plus $(x, y) \gg a$. On peut alors écrire :

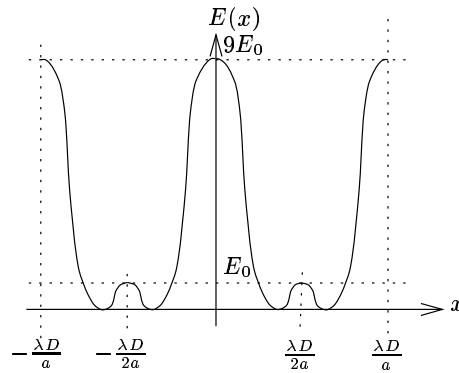
$$r_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2 + D^2} \simeq D \left(1 + \frac{(x-a)^2 + y^2}{2D^2} \right) \simeq D + \frac{1}{2D} (x^2 + y^2 - 2ax).$$

Un développement limité analogue pour r_2 et pour r_3 conduit à :

$$\delta_1 \simeq \frac{ax}{D} \quad ; \quad \delta_2 \simeq \frac{ax}{D}.$$

I.5. L'éclairement $E(M)$ en un point M de la figure d'interférence s'exprime par $E(M) = |s(M)|^2$, ce qui d'après les résultats des questions I.2 et I.4, s'écrit sous la forme :

$$E(x) = E_0 \left[1 + 2 \cos \left(\frac{2\pi a}{\lambda D} x \right) \right]^2 \quad \text{avec} \quad E_0 = |A|^2.$$



Les franges d'interférence seront des droites d'équation $x = Cte$ et d'interfrange $i = \lambda D/a$.

Les maxima d'intensité, qui correspondent aux franges d'interférence brillantes, sont repérés par :

$$\frac{2\pi a}{\lambda D} x = 2\pi p \quad \text{avec } p \text{ un entier relatif,}$$

ce qui conduit à la position des maxima :

$$x_M = p \frac{\lambda D}{a} \quad \text{avec } E(x_M) = 9E_0.$$

Les minima d'intensité, qui correspondent aux franges d'interférences sombres, sont repérés par :

$$\cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda D} x\right) = -\frac{1}{2},$$

soit

$$\frac{2\pi a}{\lambda D} x = 2\pi(p \pm 1/3) \quad \text{avec } p \text{ un entier relatif,}$$

ce qui conduit à la position des minima :

$$x_m = (p \pm 1/3) \frac{\lambda D}{a} \quad \text{avec } E(x_m) = 0.$$

Problème II

II.1.

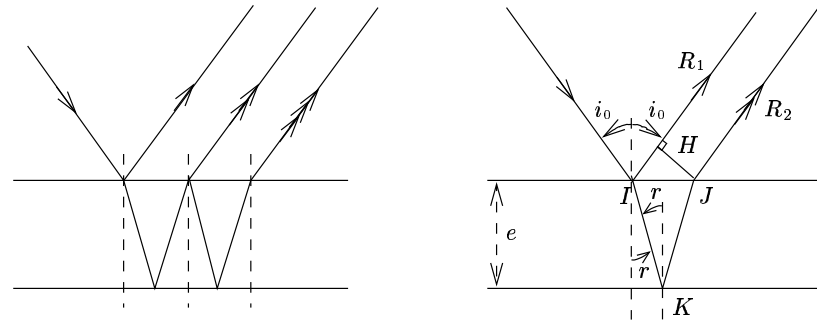


FIG. 3.34 - Rayons lumineux donnant des interférences par réflexion; les notations pour le calcul de la différence de marche entre les rayons R_1 et R_2 (question II.2)

II.2. Appelons δ la différence de marche entre les deux rayons réfléchis R_1 et R_2 . D'après les notations de la figure, la différence de marche δ s'exprime sous la forme :

$$\delta = (IKJ) - (IH) = n[IK + KJ] - IH.$$

On a de plus les trois relations :

$$\cos r = \frac{e}{IK} = \frac{e}{KJ} \quad ; \quad \sin i_0 = \frac{IH}{IJ} \quad \text{et} \quad \tan r = \frac{IJ}{2e}.$$

La loi de DESCARTES relative à la réfraction donne

$$n \sin r = \sin i_0.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \delta &= 2n \frac{e}{\cos r} - IJ n \sin r \\ &= 2ne \left[\frac{1}{\cos r} - \tan r \sin r \right], \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\delta = 2ne \cos r}.$$

II.3. La figure d'interférence obtenue est composée d'anneaux concentriques dont les rayons se resserrent lorsque l'on s'éloigne du centre de la figure. On obtient des interférences localisées à l'infini.

II.4. Le facteur de réflexion de chaque face est $\rho = 1/2$. Le rayon R_1 subit une réflexion sur la lame, tandis que le rayon R_2 subit deux réflexions et une transmission par la lame. La lame étant un milieu non absorbant, le coefficient de transmission est $1 - \rho = 1/2$. Les intensités des rayons R_1 et R_2 sont donc :

$$\boxed{I_{R_1} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad I_{R_2} = \frac{1}{8}}$$

pour une intensité du rayon incident égale à 1.

Les intensités sont reliées aux amplitudes par la relation $I = |a|^2$, ce qui donne :

$$\boxed{a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad a_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

II.5. L'intensité I au point $M(\vec{r})$ d'observation (situé dans le plan focal image d'une lentille convergente placée sur le trajet du faisceau issu de la lame) a pour expression :

$$I = \left| a_1 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} + a_2 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)} \right|^2$$

ce qui conduit à :

$$\boxed{I = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos \varphi}$$

Le facteur de visibilité des franges, que l'on appelle aussi le contraste des franges, a pour expression :

$$\boxed{V = \frac{2a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2}}$$

Application Numérique : $V = 4/5$ dans l'expérience étudiée.

Problème III

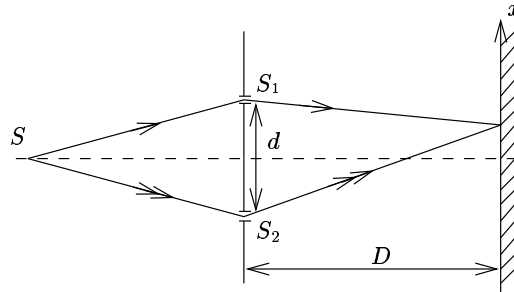


FIG. 3.35 - Le système interférométrique des fentes d'YOUNG.

III.1. Il s'agit, avec les fentes d'YOUNG, d'interférences à deux ondes. La source étant ponctuelle, il n'y a pas de problèmes de cohérence spatiale.

Soit δ la différence de marche entre deux rayons issus de la source S et passant par chacune des deux fentes. L'intensité résultante au point M a pour expression :

$$I = \left| ae^{-i\omega t} + ae^{-i(\omega t + \varphi)} \right|^2 = I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \right) \right] \quad \text{avec} \quad \varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0}.$$

Or, la différence de marche δ s'exprime par :

$$\delta = (SM)_{voie\ 2} - (SM)_{voie\ 1} = (SS_2) - (SS_1) + (S_2M) - (S_1M).$$

La source étant située sur l'axe du système optique, on a $(SS_2) - (SS_1) = 0$. D'après la configuration proposée, on peut, pour exprimer la différence de marche, faire l'approximation $D \gg x, d$, ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} S_1M &\simeq D + \frac{(x - d/2)^2}{2D} \\ S_2M &\simeq D + \frac{(x + d/2)^2}{2D} \end{aligned}$$

dont on déduit l'expression de la différence de marche $\delta = xd/D$. L'intensité lumineuse s'exprime sous la forme :

$$I = I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi xd}{\lambda_0 D} \right) \right].$$

Les franges d'interférence sont des droites d'équation $x = Cte$ et d'interfrange $i = \lambda_0 D/d$. La frange centrale est située sur l'axe du système et il s'agit d'une frange brillante puisque $\delta = 0$ pour un point de l'axe. La troisième frange

sombre sera repérée par $x_{3s} = i/2 + 2i = 5i/2$. La longueur d'onde de la lumière utilisée sera alors :

$$\lambda_0 = \frac{2dx_{3s}}{5D}.$$

Application Numérique : $\lambda_0 = 562,5 \text{ nm}$.

III.2. L'introduction de la lame de verre va modifier la différence de marche entre les rayons, ce qui aura pour effet de déplacer la figure d'interférence : la frange centrale ne sera plus sur l'axe du système. La nouvelle différence de marche a pour expression :

$$\delta' = \delta - ne = \frac{xd}{D} - ne.$$

La répartition d'intensité aura la forme :

$$I = I_0 \left[1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{xd}{D} - ne \right) \right].$$

La frange f_0 , qui se trouvait en $x = 0$ avant l'introduction de la lame, se sera déplacée de Δx selon les $x > 0$. Cette frange correspond à une différence de marche nulle, ce qui signifie que $\Delta x = Den/d$.

La frange centrale f_0 s'est déplacée dans le sens des x croissants, de la quantité $\Delta x = De(a - b\lambda_0)/d$.

Application Numérique : $\Delta x = 7,63 \text{ cm}$.

III.3. On travaille désormais en lumière blanche. Chaque longueur d'onde λ va alors produire sa propre figure d'interférence, liée à la différence de marche

$$\delta'(\lambda) = \frac{xd}{D} - n(\lambda)e.$$

La figure d'interférence sera composée de franges rectilignes et colorées, les couleurs dépendant de la différence de marche. La frange centrale f_0 ne sera plus blanche, car la différence de marche entre les deux voies dépend maintenant de la longueur d'onde λ , le système interférométrique étant dispersif.

L'ordre d'interférence p , défini par la relation $p(\lambda) = \delta'/\lambda$ s'exprime sous la forme :

$$p(\lambda) = \left(\frac{xd}{D} - ae \right) \frac{1}{\lambda} + be.$$

L'ordre d'interférence sera indépendant de λ si la condition

$$\frac{xd}{D} = ae$$

est réalisée. La région où l'ordre d'interférence est indépendant de la longueur d'onde est donc située en :

$$x_a = \frac{aeD}{d}.$$

En $x = x_a$, on observe une frange dite frange achromatique. La couleur de cette frange achromatique varie entre la couleur de la source (blanc) et le noir selon l'ordre d'interférence (qui dépend de b et de l'épaisseur de la lame). Dans le cas présent, l'ordre de la frange achromatique est

$$p(x = x_a) = be = 2,$$

et les interférences sont constructives. Toutes les ondes de longueurs d'onde différentes émises par la source produisent alors des interférences constructives ; la frange en question est blanche. Il ne faut pas confondre cette frange achromatique avec la frange centrale blanche ou noire résultant des couleurs de NEWTON dans le cas d'un interféromètre non dispersif éclairé en lumière blanche.

La frange achromatique ne correspondra pas à la frange centrale f_0 , l'écart entre les deux franges étant :

$$\alpha = x_a - \Delta x = \frac{b\lambda_0 e D}{d}.$$

Application Numérique : $\alpha = 1,50 \text{ mm}$.