

Chapitre 5

Mécanique des fluides

5.1 Rappels de cours

5.1.1 Description de l'état fluide

Approximation des milieux continus, notion de particule fluide

Le terme de « fluide » qualifie usuellement l'état liquide ou gazeux de la matière. À l'état liquide, la distance moyenne entre molécules est de l'ordre de grandeur des dimensions moléculaires, alors que dans un gaz, les distances intermoléculaires sont grandes devant les dimensions moléculaires.

On appelle particule fluide, ou élément de fluide, un ensemble de molécules petit à l'échelle macroscopique mais grand à l'échelle microscopique. Les dimensions d'une particule fluide doivent être grandes devant la distance intermoléculaire, ainsi que devant le libre parcours moyen (c'est-à-dire la distance moyenne parcourue par une molécule entre deux collisions successives). En définissant des moyennes sur une particule fluide, on peut oublier le caractère discontinu de la matière de la même manière que lorsqu'on regarde une image avec suffisamment de recul, l'œil n'est plus sensible au détail des pixels qui la composent. Ainsi, la vitesse d'un élément de fluide définie comme la vitesse du centre de masse des molécules qu'il contient, est une fonction continue de l'espace et du temps. Il en va de même pour la masse volumique. La particule fluide est la brique élémentaire de la description du fluide en tant que milieu continu.

Cette description de la matière à une échelle intermédiaire se révèle la plupart du temps satisfaisante. Toutefois, l'approximation des milieux continus doit être remise en cause dans certains cas ; par exemple si l'on s'intéresse à des phénomènes ondulatoires de longueur d'onde suffisamment petite pour devenir inférieure à la taille d'un élément de fluide. Ces cas extrêmes ne seront pas abordés ici.

Forces dans un fluide au repos

Considérons un volume \mathcal{V} de fluide délimité par une surface \mathcal{S} , de normale rentrante \vec{n}_e . Chaque élément de surface dS subit de la part du reste du fluide une force

$$d\vec{F} = P \vec{n}_e dS = P d\vec{S},$$

où P est la pression du liquide au point considéré. Dans un fluide en équilibre, la pression est indépendante de la direction de la surface sur laquelle elle s'exerce (c'est-à-dire du vecteur unitaire \vec{n}_e).

La pression est la somme de deux contributions. Tout d'abord, les chocs de molécules avec une paroi (fictive ou réelle) sont responsables de la partie cinétique P_c de la pression. Par ailleurs, dans un fluide réel, les molécules interagissent à distance. Sauf dans le cas de fluides très denses, ces forces sont attractives et varient comme $1/r^7$. Il en résulte un deuxième terme dans l'action exercée sur une paroi, appelé pression moléculaire :

$$P = P_c + P_m \quad \text{avec} \quad P_m < 0.$$

Unités de pression : l'unité U.S.I. de pression est le Pascal (symbole Pa). Un Pascal correspond à une force de 1 Newton exercée sur une surface de 1 m^2 : $1 \text{ Pa} = 1 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2}$. On définit aussi le bar ($1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$) et l'atmosphère ($1 \text{ atm} = 101\,325 \text{ Pa}$). Par ailleurs, on introduit le millimètre de mercure (symbole chimique du mercure : Hg) : $1 \text{ mm Hg} = 133.22 \text{ Pa}$. On appelle pression normale une pression de 1 bar.

Forces dans un fluide en mouvement

Pour un fluide au repos dans un référentiel galiléen, $d\vec{F}$ est normale à l'élément de surface. Dans un fluide en mouvement, la force élémentaire peut avoir des composantes tangentielles dites forces de viscosité. Suite aux chocs incessants qu'elles subissent, les molécules d'un fluide sont soumises à un mouvement erratique (mouvement brownien). Ainsi, les molécules constituant une particule fluide donnée changent au cours du temps. Dans le cas où la vitesse du fluide n'est pas uniforme, cet échange de molécules entre particules fluides peut induire un transfert de quantité de mouvement, c'est-à-dire une force. Les forces de viscosité s'annulent lorsque la vitesse du fluide est uniforme. En particulier, elles n'interviennent pas à l'équilibre. Les phénomènes de viscosité ne seront pas traités dans ce recueil. Nous nous limiterons au cas où les forces de contact se réduisent aux forces de pression. Le modèle obtenu en négligeant les forces de viscosité est le modèle du fluide parfait, appelé aussi fluide inviscide.

5.1.2 Statique des fluides

Les forces volumiques de pression

La résultante des forces de pression s'exerçant sur un volume \mathcal{V} délimité par une surface \mathcal{S} de normale sortante \vec{n} s'écrit :

$$\vec{R}_p = \oiint_{\mathcal{S}} P (-\vec{n}) dS.$$

On peut montrer que l'intégrale de surface se transforme en intégrale de volume :

$$\vec{R}_p = - \iiint_V \overrightarrow{\text{grad}} P d^3v.$$

Ainsi, un élément de fluide de volume δv subit une force de pression

$$d\vec{f}_p = -\overrightarrow{\text{grad}} P \delta v.$$

Équilibre d'un fluide

Soit \vec{f}_v le champ de forces extérieures s'exerçant par unité de volume sur un fluide au repos dans un référentiel galiléen. L'équilibre du fluide se traduit par la relation locale

$$\vec{f}_v - \overrightarrow{\text{grad}} P = \vec{0}.$$

Cas particulier d'un fluide incompressible dans le champ de pesanteur

Soit \vec{u}_z un vecteur unitaire de l'axe des z , pris dans le sens de la verticale ascendante. On a

$$\vec{f}_v = -\rho g \vec{u}_z,$$

où ρ est la masse volumique du fluide. La condition d'équilibre devient

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}} P = -\rho g \vec{u}_z}.$$

La relation précédente s'intègre pour donner

$$P(z) = -\rho g z + P(z = 0).$$

Par conséquent, la différence de pression entre deux points A et B d'un fluide incompressible ne dépend que de la différence d'altitude :

$$P_B - P_A = \rho g (z_A - z_B).$$

Si P_B croît de ΔP , P_A subit la même variation. Ce résultat est connu sous le nom de théorème de PASCAL : un fluide incompressible transmet intégralement les différences de pression.

Exemple : au niveau de la mer, la pression est généralement voisine d'une atmosphère. À quelle profondeur h la pression ressentie par un plongeur est-elle égale à 2 atm ? Prenons $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ et $\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ (masse volumique de l'eau). On cherche à avoir $\rho g h = 1 \text{ atm} = 101\,325 \text{ Pa}$, d'où $h = 10.3 \text{ m}$. Il est donc important pour les plongeurs sous-marins de respecter les paliers de décompression.

Le théorème d'Archimède

Considérons un corps totalement immergé dans un système de fluides en équilibre dans le champ de pesanteur. Le système des forces de pression agissant sur le solide est équivalent à une force unique, verticale, dirigée de bas en haut, égale en module au poids des fluides déplacés. Cette force est appliquée au centre d'inertie du système de fluides déplacés, appelé centre de poussée.

Limite de validité : lorsqu'on remplace le corps par le ou les fluides dans lequel il est immergé, il faut que le système de fluides soit en équilibre (voir exercice 5.2.4).

Exemple : un corps homogène flotte à la surface de l'eau. On mesure que 20% de son volume est immergé. On peut en déduire que sa masse volumique est 5 fois plus faible que celle de l'eau.

Remarque : lorsqu'un glaçon est mis dans un verre d'eau, le niveau d'eau monte et le glaçon flotte car la masse volumique de la glace est inférieure à celle de l'eau. La masse d'eau déplacée est égale à la masse du glaçon, de sorte que lorsque le glaçon fond, le niveau d'eau dans le verre reste inchangé. Cela signifie que la fonte d'un iceberg ne fait pas varier le niveau de la mer. Par conséquent, les seules glaces susceptibles de faire augmenter le niveau de la mer (suite au réchauffement de l'atmosphère) sont les masses présentes sur terre, par exemple les glaciers. . .

5.1.3 Cinématique des fluides

Les points de vue de Lagrange et d'Euler

La description du fluide en mouvement peut se faire de deux façons équivalentes. On peut choisir de suivre les particules fluides dans leur mouvement (point de vue de LAGRANGE) ou on peut faire un cliché à un instant donné du champ de vitesse de toutes les particules fluides (point de vue d'EULER).

- Dans le premier cas, la position d'une particule fluide \mathcal{P} est repérée par le vecteur $\vec{r}_p(t)$. Les variables de LAGRANGE sont le temps t et la position de \mathcal{P} à un instant de référence t_0 : $\vec{r}_p(t_0)$.
- Dans le second cas, au lieu de suivre les particules fluides dans leur mouvement, on se place en un point fixe P du référentiel d'étude. P est repéré par le vecteur \vec{r} et la vitesse de la particule fluide qui se trouve en P à l'instant t est $\vec{v}(\vec{r}, t)$. Les variables d'EULER sont \vec{r} , position du point d'observation et le temps t . Ces variables sont indépendantes.

La dérivée particulière

Soit $G(\vec{r}, t)$ une grandeur attachée à une particule fluide (par exemple sa masse volumique, sa vitesse, la concentration locale d'un colorant. . .). Entre t et $t + dt$, la variation de G pour une même particule est :

$$DG = G(\vec{r}(t + dt), t + dt) - G(\vec{r}(t), t) = \left[\frac{\partial G}{\partial t} \Big|_{\vec{r}} + \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) G \right] dt + o(dt)$$

au premier ordre en dt . On note $\frac{DG}{Dt}$ la dérivée particulaire ou dérivée en suivant le mouvement

$$\boxed{\frac{DG}{Dt} = \frac{\partial G}{\partial t} \Big|_{\vec{r}} + \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) G}$$

Le premier terme du membre de droite désigne la dérivée « usuelle » par rapport au temps, à position fixée, d'une fonction $G(\vec{r}, t)$. L'opérateur $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})$ s'applique aussi bien à des grandeurs scalaires que vectorielles. En coordonnées cartésiennes :

$$\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) G = v_x \frac{\partial G}{\partial x} + v_y \frac{\partial G}{\partial y} + v_z \frac{\partial G}{\partial z}.$$

Dans le cas particulier où G désigne la vitesse d'une particule fluide, on peut montrer que

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{v}}{Dt} &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \Big|_{\vec{r}} + \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v} \\ &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \Big|_{\vec{r}} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \vec{v} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}. \end{aligned}$$

L'équivalence de ces deux expressions de l'accélération d'une particule fluide est utile pour traiter certains problèmes de dynamique (relation fondamentale, bilan des forces...).

Conservation de la masse et interprétation de l'opérateur divergence

Soit $\rho(\vec{r}, t)$ la masse volumique du fluide. La conservation de la masse se traduit localement par l'équation dite de continuité :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0},$$

qui peut se réécrire

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div} \vec{v} = 0.$$

La particule fluide de masse volumique ρ renferme une quantité de masse δm dans un volume $\delta v = \delta m / \rho$. Si ρ varie au cours du mouvement, c'est que le volume δv varie (δm est par construction constant, même si la particule fluide n'est pas toujours constituée des mêmes molécules, cf. partie 5.1.1). Ainsi,

$$\text{div} \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{\delta v} \frac{D(\delta v)}{Dt}.$$

La divergence du vecteur vitesse $\vec{v}(\vec{r}, t)$ est donc le taux d'accroissement du volume de la particule fluide située en \vec{r} à l'instant t . Si cette divergence est positive, le volume en question croît, si elle est négative, le volume se contracte.

Définitions relatives au fluide en mouvement

Trajectoire : la trajectoire est le lieu des points occupés par une particule fluide donnée au cours du temps. Cette notion se rattache au point de vue de LAGRANGE. La trajectoire peut être visualisée par l'injection d'une goutte de colorant (de l'encre par exemple) dont on suit le mouvement.

Ligne de courant : les lignes de courant sont, à un instant donné, tangentes en tout point au vecteur vitesse. Cette notion se rattache au point de vue d'EULER.

Remarque : les deux notions précédentes sont bien distinctes (cf. exercice 5.2.3) mais pour des écoulements permanents, les lignes de courant coïncident avec les trajectoires.

Différents types d'écoulements

Fluides incompressibles / écoulements incompressibles : un fluide est dit incompressible si sa masse volumique est fixée et ne dépend pas de la pression. D'après l'équation de conservation de la masse :

$$\rho = C^{te} \quad \implies \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Par ailleurs,

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \iff \quad \frac{D\rho}{Dt} = 0.$$

Un tel écoulement, pour lequel la masse volumique d'une particule fluide est une constante du mouvement, est qualifié d'incompressible. Dans ce cas, ρ peut varier avec la position (les différentes particules fluides peuvent avoir des masses volumiques différentes).

En règle générale, les liquides peuvent en première approximation être considérés comme incompressibles et les écoulements gazeux peuvent être assimilés à des écoulements incompressibles dans la mesure où la vitesse \vec{v} est partout négligeable devant la vitesse du son.

Écoulements irrotationnels : ces derniers vérifient

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{v} = \vec{0}.$$

Si le domaine de l'écoulement est dénué de « trous » (simplement connexe), alors il existe une fonction Φ appelée potentiel des vitesses, vérifiant

$$\vec{v} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \Phi.$$

Écoulements incompressibles et irrotationnels : dans ce cas et sous réserve que le domaine de l'écoulement soit simplement connexe, le potentiel des vitesses vérifie la même équation que le potentiel électrostatique dans une région vide de charge

$$\Delta \Phi = \operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \Phi = 0 \quad (\text{équation de LAPLACE}).$$

Cette analogie avec l'électrostatique permet de simplifier la résolution de certains problèmes...

5.1.4 Dynamique des fluides parfaits

Équation d'Euler

Soit \vec{f}_v la densité volumique de forces extérieures agissant sur un fluide parfait, compressible ou non. L'équation du mouvement d'une particule fluide s'écrit :

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f}_v - \overrightarrow{\text{grad}} P},$$

et avec les relations énoncées dans la partie 5.1.3,

$$\rho \left\{ \left. \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right|_{\vec{r}} + \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v} \right\} = \vec{f}_v - \overrightarrow{\text{grad}} P$$

ou encore

$$\rho \left\{ \left. \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right|_{\vec{r}} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \vec{v} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \right\} = \vec{f}_v - \overrightarrow{\text{grad}} P.$$

Les deux équations précédentes sont les formes usuelles de l'équation d'EULER.

Conditions aux limites

Pour pouvoir déduire le champ de vitesse de l'équation différentielle d'EULER, il faut préciser comment se comporte \vec{v} au voisinage des parois. La condition d'imperméabilité de ces dernières donne :

$$\vec{v}_{\text{fluide}} \cdot \vec{n} = \vec{v}_{\text{paroi}} \cdot \vec{n}$$

où \vec{n} est un vecteur normal à la paroi, celle-ci se déplaçant à la vitesse \vec{v}_{paroi} . Pour mémoire, mentionnons que dans le cas d'un fluide visqueux, les conditions aux limites sont plus contraignantes :

$$\vec{v}_{\text{fluide}} = \vec{v}_{\text{paroi}}.$$

Le cas du fluide incompressible dans le champ de pesanteur : la relation de Bernoulli

Dans ce cas, les forces volumiques extérieures se réduisent à

$$\vec{f}_v = \rho \vec{g}.$$

En se plaçant en régime permanent et en supposant ρ constante, l'intégration de l'équation d'EULER suivant une ligne de courant \mathcal{L} conduit à :

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = C^{\text{te}}(\mathcal{L})} \quad \text{relation de BERNOULLI.}$$

Cette constante est caractéristique de la ligne de courant considérée, et varie d'une ligne à l'autre. Si l'on suppose en outre l'écoulement irrotationnel ($\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$) :

$$\rho \frac{v^2}{2} + P + \rho gz = C^{\text{te}},$$

où la constante est cette fois la même pour tous les points du fluide.

La relation de BERNOULLI est formellement identique au premier principe de la thermodynamique : elle traduit la conservation de l'énergie mécanique des particules fluides le long d'une ligne de courant (un élément de fluide de volume δv a une masse $\delta m = \rho \delta v$, et donc une énergie cinétique $(\rho v^2/2)\delta v$ et une énergie potentielle de pesanteur $\rho g z \delta v$; ainsi, $\rho v^2/2$ est la densité volumique d'énergie cinétique et $\rho g z$ est la densité volumique d'énergie potentielle de pesanteur). Pour une généralisation à des régimes dépendant du temps, on pourra consulter le problème 5.3.1 (partie I).

Exemple d'application : l'effet VENTURI. Considérons le tube de VENTURI représenté sur la figure 5.1.

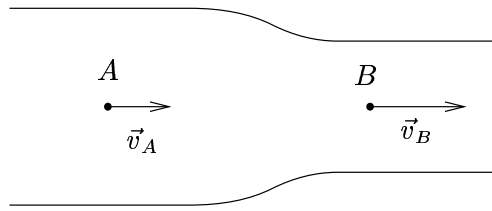


FIG. 5.1 - Tube de VENTURI

L'aire de la section droite est S_A en A et S_B en B ($S_A > S_B$). En régime permanent, la conservation du débit impose $v_A S_A = v_B S_B$, d'où $v_B > v_A$. Par ailleurs, la relation de BERNOULLI s'écrit, pour A et B de même altitude appartenant à une même ligne de courant :

$$P_A + \rho \frac{v_A^2}{2} = P_B + \rho \frac{v_B^2}{2}.$$

On en déduit $P_B < P_A$: les régions de grande vitesse sont les régions de basse pression, et réciproquement. Ce phénomène est appelé effet VENTURI.

EXERCICES

5.2 Exercices

5.2.1 Il était un petit navire...

Durée 1 min

Un soldat de plomb est embarqué sur un bateau qui flotte dans une baignoire. Le soldat tombe à l'eau. Le niveau d'eau monte-t-il ou baisse-t-il dans la baignoire ?

Solution

Considérons le bateau seul. Lorsque le soldat est mis à bord, il déplace un volume d'eau correspondant à sa masse (théorème d'ARCHIMÈDE). Comme la

masse volumique du plomb est supérieure à celle de l'eau, le soldat déplace un volume d'eau supérieur à son volume. Lorsque le soldat est mis dans l'eau, il déplace un volume d'eau égal à son volume. Par conséquent, le niveau d'eau descend dans la baignoire quand le soldat tombe à l'eau.

5.2.2 En voiture...

Durée 10 min

Le passager d'une voiture tient, à l'aide d'une ficelle, un ballon gonflé avec de l'hélium. La voiture prend un virage. Le ballon a-t-il tendance à partir vers l'intérieur ou vers l'extérieur du virage?

Solution

Nous supposons que le fluide ambiant (l'air) est au repos par rapport à la voiture (cette situation peut être réalisée en roulant vitres fermées, et en prenant un virage de courbure constante, par exemple sur une piste circulaire). Dans le référentiel non galiléen de la voiture, le ballon est soumis à quatre forces :

- son poids,
- la tension de la ficelle,
- la force d'inertie centrifuge,
- la résultante des forces de pression sur la surface.

Le théorème d'ARCHIMÈDE se généralise à la situation qui nous intéresse. Si l'on remplace le ballon par un volume \mathcal{V} d'air, la résultante des forces de pression s'exerçant sur \mathcal{V} est la même que celle s'exerçant sur le ballon. Comme le volume \mathcal{V} est supposé à l'équilibre, la somme de cette force et de la force d'inertie centrifuge est nulle. Cela signifie que la résultante des forces de pression sur le ballon est centripète, et de module supérieur à la force d'inertie centrifuge ressentie par le ballon (en effet, la masse volumique de l'air est supérieure à celle de l'hélium et la force d'inertie centrifuge est proportionnelle à la masse volumique). Par conséquent, la ficelle s'inclinera vers l'intérieur du virage et la tension du fil devra équilibrer une force globale centripète.

5.2.3 Différence entre ligne de courant et trajectoire

*D'après une épreuve de l'Université Paris VI
Durée 10 min*

On considère l'écoulement plan défini en variables eulériennes par le vecteur \vec{U} de composantes

$$u = -\omega y + \gamma t$$

$$v = \omega x.$$

Cet écoulement est-il stationnaire? Après avoir donné la définition des lignes de courant à l'instant t_0 , déterminer ces lignes à l'instant $t_0 = 0$ pour l'écoulement défini ci-dessus. Quelle est la trajectoire de la particule fluide se trouvant au point O de coordonnées $(0,0)$ à l'instant $t = 0$?

Solution

Puisque $\partial u / \partial t = \gamma \neq 0$, l'écoulement n'est pas stationnaire. Les lignes de courant à l'instant t_0 sont les lignes de champ du champ des vitesses à l'instant t_0 : elles sont partout tangentes au vecteur vitesse. Elles sont données par la relation

$$d\vec{l} \wedge \vec{v} = \vec{0},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}.$$

Dans le cas présent :

$$\omega x dx = (-\omega y + \gamma t_0) dy.$$

À l'instant $t_0 = 0$, on a

$$x dx + y dy = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad d(x^2 + y^2) = 0.$$

Les lignes de courant sont des cercles de centre O .

Pour trouver l'équation de la trajectoire de la particule se trouvant en O à $t_0 = 0$, il faut résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\omega y + \gamma t \\ \frac{dy}{dt} = \omega x, \end{cases}$$

avec la condition initiale $x(0) = 0 = y(0)$. En dérivant une fois par rapport au temps, il vient

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x &= \gamma \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y &= \omega \gamma t. \end{aligned}$$

La solution de chacune de ces équations s'exprime comme la somme de la solution du problème sans second membre et d'une solution particulière :

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) + \frac{\gamma}{\omega^2} \\ y(t) &= A' \cos(\omega t) + B' \sin(\omega t) + \frac{\gamma t}{\omega}. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$y(t=0) = 0 \implies \frac{dx}{dt}(t=0) = 0 \implies B = 0,$$

et $x(0) = 0$ impose $A = -\gamma/\omega^2$. De même, $A' = 0$ et $B' = -\gamma/\omega^2$. Paramétrée par le temps t , la trajectoire cherchée a pour équation :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\gamma}{\omega^2} [1 - \cos(\omega t)] \\ y(t) = \frac{\gamma}{\omega^2} [\omega t - \sin(\omega t)] \end{cases}.$$

Il s'agit de la composition d'un mouvement de translation à la vitesse

$$\vec{v}_0 = \begin{cases} 0 \\ \gamma/\omega, \end{cases}$$

et d'un mouvement de rotation (fréquence $\omega/(2\pi)$, rayon γ/ω^2). Comme l'écoulement n'est pas stationnaire, les lignes de courant diffèrent des trajectoires.

Remarque : pour $\gamma = 0$, l'écoulement devient stationnaire. L'équation paramétrique de la trajectoire d'une particule quelconque est :

$$\begin{cases} x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \\ y(t) = A' \cos(\omega t) + B' \sin(\omega t). \end{cases}$$

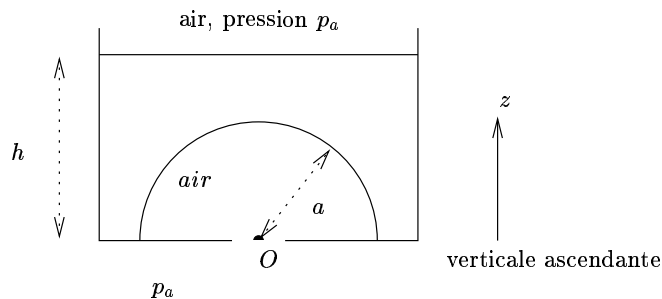
Dans ce cas,

$$\frac{dy}{dt} = \omega x \implies B' = A \text{ et } A' = -B.$$

Ainsi, les trajectoires sont des cercles de centre O et coïncident avec les lignes de courant.

5.2.4 Quand le théorème d'Archimède ne s'applique plus...

*D'après une épreuve de l'Université de Paris VI
Durée 20 min*



EXERCICES

Une demi-sphère de rayon a repose sur le fond d'un récipient rempli sur une hauteur $h > a$ d'un liquide de masse volumique ρ . Le fond du récipient est percé d'une petite ouverture de sorte qu'à l'intérieur de la demi-sphère, la pression est égale à la pression atmosphérique p_a . Calculer la résultante des forces exercées sur la demi-sphère par l'air et le liquide.

Facultatif : déterminer les éléments de réduction au point O (voir la figure) du torseur des efforts dus à l'air et au liquide agissant sur la demi-sphère.

Solution

Il peut être tentant d'appliquer le théorème d'ARCHIMÈDE pour obtenir la force qui s'exerce sur la demi-sphère. Ce serait une erreur. Il faut en effet vérifier que lorsqu'on remplace le solide par le liquide dans lequel il est immergé, on obtient un état d'équilibre pour le liquide. Ce n'est pas le cas ici puisque le récipient est percé.

Pour calculer la résultante des forces, il faut sommer les forces de pression sur chaque élément de surface de la demi-sphère. La masse volumique du liquide est supposée constante. La variation de pression sur une hauteur dz obéit à la loi fondamentale de l'hydrostatique

$$dp = -\rho g dz.$$

La pression qui règne au sein du liquide est donc :

$$p(z) = p_a + \rho g(h - z).$$

Soit M un point de la demi-sphère, et \vec{n} le vecteur normal défini par $\overrightarrow{OM} = a\vec{n}$. Un élément de surface dS centré en M subit la force

- $d\vec{F}_a = p_a \vec{n} dS$ de l'air ;
- $d\vec{F}_l = -p(z) \vec{n} dS$ de la part du liquide.

La somme de ces deux forces élémentaires a pour expression :

$$d\vec{F} = d\vec{F}_a + d\vec{F}_l = \rho g(z - h) \vec{n} dS.$$

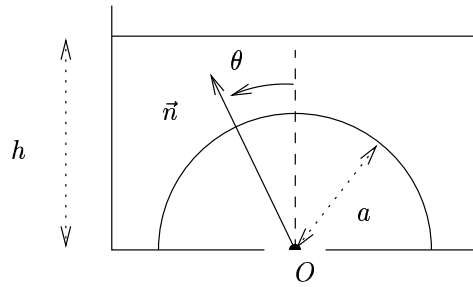
La résultante des efforts de pression s'écrit donc :

$$\vec{F} = \iint_{1/2 \text{ sphère}} \rho g(z - h) \vec{n} dS.$$

La somme des contributions de deux points situés symétriquement de part et d'autre de l'axe (O, \vec{z}) est portée par \vec{z} . Il en va de même pour la force totale.

$$\vec{F} = \left(\vec{F} \cdot \vec{z} \right) \vec{z} = \iint_{1/2 \text{ sphère}} \rho g(z - h) \cos \theta dS \vec{z}.$$

Décomposons l'intégrale précédente en somme sur des couronnes élémentaires situées entre θ et $\theta + d\theta$ (voir la figure jointe).



Ces couronnes ont un rayon $a \sin \theta$, et une surface $2\pi(a \sin \theta) a d\theta$. Ainsi,

$$\vec{F} = \int_0^{\pi/2} \rho g(z - h) \cos \theta 2\pi a^2 \sin \theta d\theta \vec{z}.$$

On a en outre $z = a \cos \theta$, d'où

$$\begin{aligned} \vec{F} &= 2\pi a^2 \rho g \int_0^{\pi/2} (a \cos \theta - h) \cos \theta \underbrace{\sin \theta d\theta}_{-d \cos \theta} \vec{z} \\ &= 2\pi a^2 \rho g \left[\frac{a}{3} - \frac{h}{2} \right] \vec{z}. \end{aligned}$$

En définitive,

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{\pi a^2}{3} \rho g [3h - 2a] \vec{z}}$$

qui est dans le sens de la verticale descendante.

Le moment en O de chaque force élémentaire est nul puisque \vec{n} et \overrightarrow{OM} sont colinéaires. Le torseur des efforts de pression est donc un glisseur de support passant par O et de résultante \vec{F} .

Remarque : quand le théorème d'ARCHIMÈDE ne s'applique plus... il peut tout de même être utile. C'est le cas ici. Remarquons que la pression atmosphérique p_a ne contribue pas à \vec{F} , dont l'expression serait inchangée si l'on prenait $p_a = 0$. La force qui s'exerce sur la demi-sphère creuse est donc la même que celle qui s'exerce sur une demi-sphère pleine \mathcal{S} , avec $p_a = 0$. Nous pouvons imaginer des situations où cette force se calcule facilement. Par exemple, considérons le cas où \mathcal{S} est totalement immergée, dans un récipient non percé. La résultante totale des efforts de pression, $\vec{\Pi}$, est la somme

- des forces de pression sur la partie supérieure de \mathcal{S} , c'est-à-dire \vec{F} puisque la pression au sein du liquide ne dépend pas de la nature du solide immergé
- de la contribution des forces de pression sur la face plane inférieure de \mathcal{S} .

La partie plane se trouve immergée à une profondeur h , d'où

$$\vec{\Pi} = \vec{F} + \underbrace{\pi a^2}_{\text{surface de la partie plane}} \rho g h \vec{z}.$$

Le théorème d'ARCHIMÈDE permet par ailleurs d'écrire :

$$\vec{\Pi} = \rho \underbrace{\left(\frac{2}{3}\pi a^3\right)}_{\text{volume de S}} g\vec{z},$$

et l'on retrouve

$$\vec{F} = \frac{\pi a^2}{3} \rho g (2a - 3h) \vec{z}.$$

5.2.5 L'arrosage du jardin.

Durée 1 h

On s'intéresse dans cet exercice à la mise en rotation d'un tourniquet hydraulique permettant l'arrosage d'un jardin. Le tourniquet est composé de deux bras identiques de longueur l reliés à une base fixe par une liaison que l'on supposera ponctuelle et parfaite (figure 5.2). Dans tout l'exercice, on négligera les frottements de l'air lors de la rotation des bras.

On utilisera le référentiel \mathcal{R} , supposé galiléen, et le repère associé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Dans ce référentiel \mathcal{R} , la position des bras est repérée par l'angle θ par rapport à la direction \vec{x} . On sera également amené à introduire le référentiel \mathcal{R}' lié aux bras du tourniquet, et le repère associé $(O, \vec{e}_x', \vec{e}_y', \vec{e}_z')$.

Le tourniquet peut être mis en rotation par le passage dans les bras de l'eau, que l'on assimilera à un fluide parfait et incompressible. On note \vec{u}_A et \vec{u}_B les vitesses d'éjection de l'eau dans \mathcal{R}' au niveau des extrémités A et B des bras, D_A et D_B les débits massiques d'éjection en A et B et α l'angle d'éjection par rapport à la normale aux bras (figure 5.2). La section de sortie de l'eau est prise égale à s en A et B .

On note enfin I le moment d'inertie du tourniquet rempli d'eau par rapport à l'axe (O, \vec{z}) .

1. Montrer que $\|\vec{u}_B\| = \|\vec{u}_A\|$. On notera u cette vitesse commune. En déduire $D_B = D_A$. On appellera D cette valeur du débit.
2. Appliquer le théorème du moment cinétique au tourniquet dans \mathcal{R} et en déduire une équation différentielle pour θ en fonction de D, I, u et des données géométriques.
3. Exprimer l'évolution de la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ du tourniquet en fonction de I, u, s, l, ρ et des données géométriques avec la condition initiale $\dot{\theta} = 0$ à $t = 0$. Représenter cette évolution en fonction du temps.
4. Appliquer le théorème du moment cinétique dans le référentiel \mathcal{R}' lié aux bras du tourniquet et retrouver l'équation de la question 2.

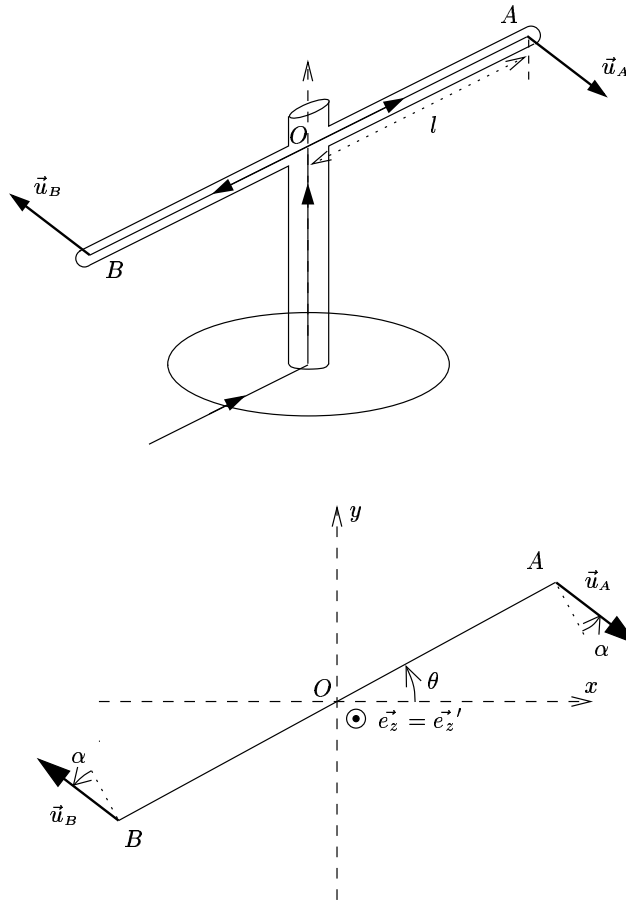


FIG. 5.2 - Description du tourniquet.

EXERCICES

Solution

1. Le fluide étant supposé parfait et incompressible, on peut lui appliquer le théorème de BERNOUILLI dans le référentiel \mathcal{R} galiléen, le long d'une ligne de courant bien choisie. De façon naturelle, on peut choisir comme ligne de courant la ligne allant soit du point O au point A , soit du point O au point B . Le long de chacune des deux lignes de courant, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\rho v_O^2 + p_O &= \frac{1}{2}\rho v_A^2 + p_A \\ &= \frac{1}{2}\rho v_B^2 + p_B \end{aligned}$$

où $\|\vec{v}_A\|$ (resp. $\|\vec{v}_B\|$) est la vitesse d'éjection du fluide en A (resp. B) dans \mathcal{R} . Or, $p_A = p_{\text{ext}} = p_B$ d'après la position des deux points A et B . Ceci permet de conclure que $\|\vec{v}_B\| = \|\vec{v}_A\|$.

La loi de composition des vitesses entre les référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' fournit les relations :

$$\begin{cases} \vec{u}_A &= \vec{v}_A - \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OA} \\ \vec{u}_B &= \vec{v}_B - \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OB}, \end{cases}$$

avec $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{e}_z$ (voir la figure 5.3).

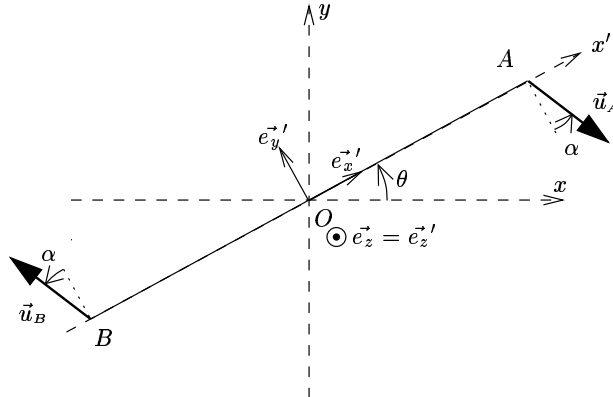


FIG. 5.3 - Notations utilisées.

Par conséquent :

$$\begin{cases} \vec{v}_A &= \vec{u}_A + l\dot{\theta}\vec{e}_y' \\ \vec{v}_B &= \vec{u}_B - l\dot{\theta}\vec{e}_y'. \end{cases}$$

L'égalité des normes des vitesses dans le référentiel \mathcal{R} , déduite de la relation de BERNOUILLI, permet alors d'écrire :

$$(\vec{u}_A)^2 + 2l\dot{\theta}\vec{u}_A \cdot \vec{e}_y' = (\vec{u}_B)^2 - 2l\dot{\theta}\vec{u}_B \cdot \vec{e}_y'.$$

Par hypothèse (voir la figure 5.2), on a

$$\vec{e}_y' \cdot \vec{u}_A = -\vec{e}_y' \cdot \vec{u}_B,$$

en vertu de quoi

$$\boxed{u_B = u = u_A}.$$

À l'extrémité A des bras, le débit massique du fluide est $D_A = \rho s u_A$, tandis que le débit massique en B est $D_B = \rho s u_B$. D'après ce qui précède, $u_B = u = u_A$, d'où

$$\boxed{D_B = D = D_A}.$$

2. Le tourniquet est un système ouvert (il reçoit et éjecte une certaine quantité d'eau). Pour appliquer les théorèmes généraux de la mécanique, on doit se ramener à un système fermé (\mathcal{S}) pour lequel le théorème du moment cinétique, exprimé en un point C dans \mathcal{R} , s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{L}_{\mathcal{S}}(C, \mathcal{R}) \right)_{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{M}}_{ext}(C),$$

où $\vec{L}_{\mathcal{S}}(C, \mathcal{R})$ est le moment cinétique en C du système (\mathcal{S}) dans \mathcal{R} , et $\vec{\mathcal{M}}_{ext}(C)$ est le moment en C des forces extérieures à (\mathcal{S}). Le système fermé le plus simple que l'on puisse envisager est l'ensemble (\mathcal{S}) = {tourniquet \oplus eau éjectée pendant dt }, auquel on appliquera le théorème du moment cinétique sous la forme de la variation de moment cinétique durant dt .

On peut choisir différents points d'application du théorème. Cependant, le point O est le plus commode. En effet, le système (\mathcal{S}) est soumis à son poids ainsi qu'à la réaction de la base sur le tourniquet au point O . Or,

- O est le centre d'inertie du tourniquet, ce qui signifie que $\vec{\mathcal{M}}_{poids}(O) = \vec{0}$
- la liaison en O entre le tourniquet et la base est supposée parfaite. Cela signifie qu'il y a pivotement sans frottements, ce qui se traduit par

$$\vec{\mathcal{M}}_{base \rightarrow \text{tourniquet}}(O) = \vec{0}.$$

Le théorème du moment cinétique, appliqué au point O dans \mathcal{R} galiléen, pour le système (\mathcal{S}) fermé, s'écrit donc :

$$d\vec{L}_{\mathcal{S}}(O, \mathcal{R}) = \underbrace{\vec{\mathcal{M}}_{poids}(O)}_{=\vec{0}} dt + \underbrace{\vec{\mathcal{M}}_{base \rightarrow \text{tourniquet}}(O)}_{=\vec{0}} dt = \vec{0}.$$

Ainsi, le moment cinétique en O pour le système (\mathcal{S}) se conserve.

La variation de moment cinétique du système (\mathcal{S}) considéré pendant dt a pour expression :

$$\begin{aligned} d\vec{L}_{\mathcal{S}}(O, \mathcal{R}) &= d\vec{L}_{bras}(O, \mathcal{R}) + d\vec{L}_{fluide}(O, \mathcal{R}) \\ &= d(I\dot{\theta}\vec{e}_z) + \left(D_A \vec{O}\vec{A} \wedge \vec{v}_A + D_B \vec{O}\vec{B} \wedge \vec{v}_B \right) dt, \end{aligned}$$

car pour les bras, le mouvement est une rotation à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ autour de l'axe (O, \vec{e}_z) fixe dans \mathcal{R} . Nous avons précisé à la question 1. la relation entre les vitesses du fluide dans les référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' :

$$\begin{cases} \vec{v}_A &= \vec{u}_A + l\dot{\theta}\vec{e}_y' \\ \vec{v}_B &= \vec{u}_B - l\dot{\theta}\vec{e}_y' \end{cases}.$$

Ces deux expressions permettent d'écrire la variation du moment cinétique sous la forme :

$$d\vec{L}_S(O, \mathcal{R}) = \left(I\ddot{\theta} + 2lD \left[l\dot{\theta} - u \cos \alpha \right] \right) dt \vec{e}_z.$$

De la conservation du moment cinétique se déduit l'équation différentielle régissant l'évolution de la vitesse angulaire du tourniquet :

$$\boxed{I\ddot{\theta} + 2lD \left[l\dot{\theta} - u \cos \alpha \right] = 0}.$$

3. Le débit massique D du fluide a pour expression $D = \rho su$, et l'équation différentielle précédente s'écrit aussi :

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{2l^2\rho su}{I}\omega = \frac{2l\rho su^2 \cos \alpha}{I},$$

avec $\omega = \dot{\theta}$. On peut alors poser :

$$\begin{cases} \tau &= \frac{I}{2l^2\rho su} \\ \omega_0 &= \frac{u \cos \alpha}{l} \end{cases}$$

où τ est homogène à un temps et ω_0 à une pulsation, ce qui permet de réécrire l'équation précédente sous la forme :

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega}{\tau} = \frac{\omega_0}{\tau}.$$

La résolution de cette équation différentielle donne :

$$\omega = \omega_0 + A \exp(-t/\tau),$$

où A est une constante d'intégration que l'on détermine par la condition initiale $\dot{\theta}(t=0) = 0$. En effet la vitesse angulaire de rotation est continue en $t = 0$ (sinon, cela conduirait à des moments de force « infinis » à $t = 0$, ce qui n'est pas physiquement acceptable). On peut aussi s'en convaincre de la façon suivante : intégrons l'équation différentielle précédente entre les instants 0 et ε , où ε est une quantité infinitésimale positive :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\varepsilon \dot{\omega} dt + \int_0^\varepsilon \frac{\dot{\theta} - \omega_0}{\tau} dt \\ &= \omega(\varepsilon) - \omega(0) + \left[\underbrace{\theta(\varepsilon) - \theta(0)}_{\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0} - \underbrace{\varepsilon \omega_0}_{\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0} \right] \frac{1}{\tau} \end{aligned}$$

car l'angle θ est continu à l'instant $t = 0$. Ceci permet de conclure que : $\omega(t = 0^+) = \omega(t = 0)$ qui prouve la continuité de la vitesse angulaire de rotation en $t = 0$.

En définitive, la condition initiale impose $A = -\omega_0$, soit :

$$\omega = \omega_0 [1 - \exp(-t/\tau)].$$

Après une durée de quelques τ , la vitesse de rotation atteint une valeur limite constante ω_0 , indépendante du moment d'inertie du tourniquet (I n'influe que sur le temps de montée τ).

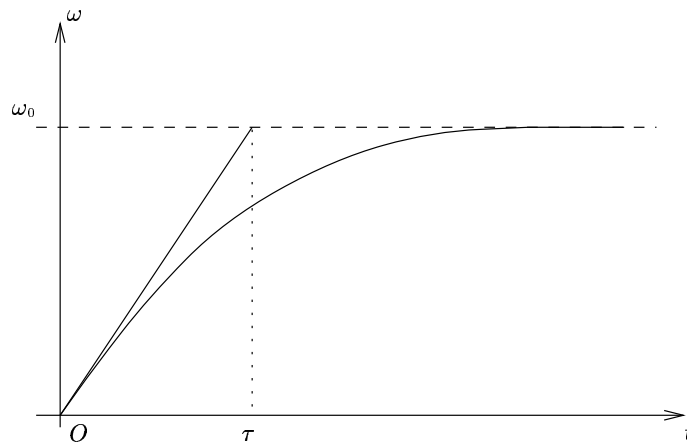


FIG. 5.4 - Évolution temporelle de la vitesse angulaire du tourniquet

4. Le référentiel \mathcal{R}' , lié au tourniquet, est en rotation par rapport à \mathcal{R} , et n'est donc pas galiléen. L'application du théorème du moment cinétique implique de prendre en compte les moments des forces d'inertie. Comme à la question 2., on va appliquer le théorème du moment cinétique au système fermé (\mathcal{S}) au point O :

$$\begin{aligned} d\vec{L}_{\mathcal{S}}(O, \mathcal{R}') &= \vec{\mathcal{M}}_{ext}(O)dt \\ &= \underbrace{\vec{\mathcal{M}}_{poids}(O)}_{=\vec{0}} dt + \underbrace{\vec{\mathcal{M}}_{base \rightarrow \text{tourniquet}}(O)}_{=\vec{0}} dt + \vec{\mathcal{M}}_{inertie}(O)dt \\ &= \vec{\mathcal{M}}_{ent}(O)dt + \vec{\mathcal{M}}_{cor}(O)dt \end{aligned}$$

où $\vec{\mathcal{M}}_{ent}(O)$ est le moment au point O de la force d'inertie d'entraînement et $\vec{\mathcal{M}}_{cor}(O)$ est le moment au point O de la force d'inertie de CORIOLIS. Ces deux moments se calculent en exprimant les forces d'entraînement et de CORIOLIS

pour des éléments infinitésimaux du système :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_{ent}(O) &= \int_{\text{tourniquet}} -dm \overrightarrow{OM} \wedge \left[\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} \right] \\ &= \int_{\text{tourniquet}} -dm \overrightarrow{OM} \wedge \left[\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} \right] \\ \vec{\mathcal{M}}_{cor}(O) &= \int_{\text{tourniquet}} -2dm \overrightarrow{OM} \wedge \left[\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M, \mathcal{R}') \right]\end{aligned}$$

où dm est la masse d'un volume élémentaire du tourniquet rempli d'eau. Or, on a $\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{e}_z$ et $\overrightarrow{OM} = x' \vec{e}_{x'}$. De plus, le tourniquet est immobile dans \mathcal{R}' : seul le mouvement du fluide contribue à la force d'inertie de CORIOLIS et à son moment. On peut donc écrire $dm' = \rho S(x') dx'$ et $\vec{v}(M, \mathcal{R}') = \vec{U}(x')$ où on a posé $S(x')$ la section des bras du tourniquet au point $M(x')$ et $\vec{U}(x') = U(x') \vec{e}_{x'}$ la vitesse du fluide au point M par rapport au référentiel \mathcal{R}' . Ceci permet de simplifier les expressions des moments selon :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_{ent}(O) &= \int_{-l}^l -x'^2 \ddot{\theta} \vec{e}_z dm = - \underbrace{\left(\int_{-l}^l -x'^2 dm \right)}_{= I} \ddot{\theta} \vec{e}_z = -I \ddot{\theta} \vec{e}_z \\ \vec{\mathcal{M}}_{cor}(O) &= \int_{-l}^l -2\rho S(x') U(x') \dot{\theta} x' \vec{e}_z dx'.\end{aligned}$$

Par ailleurs, l'écoulement de l'eau a lieu en régime permanent : le débit dans les bras du tourniquet se conserve, ce qui signifie que l'on peut écrire $\rho S(x') U(x') = \rho s u = D$ pour tout x' le long des bras. On arrive ainsi à :

$$\vec{\mathcal{M}}_{cor}(O) = -2 \left(\int_{-l}^l x' dx' \right) D \dot{\theta} \vec{e}_z = -2l^2 D \dot{\theta} \vec{e}_z.$$

Remarquons que dans le référentiel tournant \mathcal{R}' , le moment cinétique en O pour le système (S) ne se conserve plus.

La variation de moment cinétique dans \mathcal{R}' est uniquement due à l'éjection du fluide pour les extrémités A et B des bras du tourniquet :

$$\begin{aligned}d\vec{L}_S(O, \mathcal{R}') &= d\vec{L}_{\text{fluide}}(O, \mathcal{R}') \\ &= \left(D_A \overrightarrow{OA} \wedge \vec{u}_A + D_B \overrightarrow{OB} \wedge \vec{u}_B \right) dt \\ &= -2l D u dt \cos \alpha \vec{e}_z,\end{aligned}$$

d'après les résultats de la question 1.. En regroupant les différents termes, on retrouve finalement l'équation différentielle en θ de la question 2. :

$$\boxed{I \ddot{\theta} + 2lD [l\dot{\theta} - u \cos \alpha] = 0.}$$

5.3 Problèmes

5.3.1 Clepsydre et stabilité d'un navire.

Université Paris VI

Durée 3 h.

Aucun document n'est autorisé, les « calculettes » sont interdites. Les problèmes I et II sont chacun notés sur 10 points.

PROBLÈME I

Un réservoir cylindrique vertical de grande section alimente une canalisation cylindrique horizontale, de section intérieure faible et uniforme.

La canalisation horizontale est de grande longueur l . Elle est fermée, à son extrémité $x = l$, par une vanne V. La hauteur d'eau dans le réservoir au dessus de la conduite est h . On ouvre complètement la vanne à $t = 0$. On admet que, pendant la durée du régime transitoire dans la conduite, h ne varie pratiquement pas. L'écoulement de l'eau dans la conduite est supposé unidimensionnel (vitesse uniforme $v(x, t) \vec{e}_x$ sur chaque section droite). L'eau sera assimilée à un fluide parfait, homogène et incompressible, de masse volumique ρ .

On admettra que l'équation d'EULER peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} \right) + (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v} = -\vec{\nabla} \left(\frac{p}{\rho} + gz \right). \quad (5.1)$$

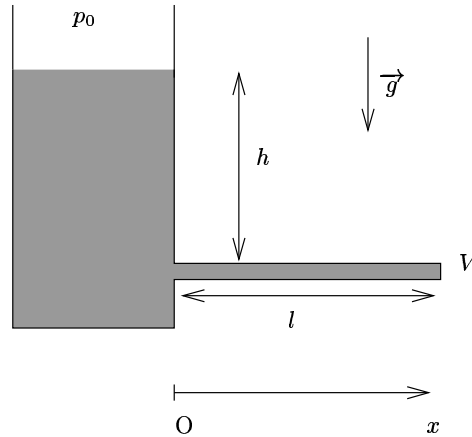


FIG. 5.5 - Schéma du réservoir et de la canalisation

1. Soient deux points A et B d'une ligne de courant \mathcal{C} à un instant t donné. Multiplier scalairement l'équation (1) par un petit déplacement $\vec{\delta l}$ le long de \mathcal{C} et intégrer. Établir que :

$$p_B(t) + \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g z_B = p_A(t) + \frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g z_A - \rho \int_A^B \text{sur } \mathcal{C} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{\delta l} \quad (5.2)$$

2. Que dire de la vitesse de l'eau le long de la conduite, à un instant donné? Établir l'expression de la pression p de l'eau à l'instant t , sur une section droite d'abscisse x , en fonction de la pression atmosphérique p_0 et de ρ , l , x et dv/dt dans la conduite.
3. On fera l'approximation que l'on est en régime stationnaire dans tout le réservoir. Justifier brièvement cette approximation et établir l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$. La résoudre en posant :

$$v_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t), \quad \text{et} \quad \tau = 2l/v_\infty.$$

4. Le régime permanent atteint, on ferme rapidement la vanne V à partir de l'instant $t' = 0$; la vitesse de l'écoulement en $x = l$ variant selon la loi :

$$v(t') = v_\infty \left(1 - \frac{t'}{T} \right),$$

où T est la durée de fermeture. Déterminer la pression $p(x, t')$ dans la conduite pour $0 \leq t' \leq T$. Déterminer en quel point et à quel instant cette pression est maximale.

Les questions 3. et 4. sont indépendantes.

PROBLÈME II

On considère un navire dont la coque très allongée a une section triangulaire. On se propose d'étudier le problème de la stabilité de cette coque par rapport au roulis dans un plan perpendiculaire à l'axe du navire.

La coque est constituée de deux plaques minces homogènes de largeur $QB = QA$ formant un dièdre droit, et de masse volumique uniforme. Ces plaques sont les seules parties pesantes du navire dont la masse totale par unité de longueur est M . La profondeur de la coque est $QH = h$. La masse volumique de l'eau est ρ .

Le vent exerce un couple sous l'effet duquel le navire penche vers la gauche d'un angle $\alpha = (\vec{y}, \vec{QH})$ mesuré autour de \vec{z} . On pose $\beta = \pi/4 + \alpha$. On considère que le pont AB est toujours hors de l'eau. La partie immergée du bateau a pour section droite le triangle CQD . On prend pour origine le point O situé au niveau de la surface de l'eau à la verticale de Q . L'eau est au repos. Une coupe du navire dans son plan de symétrie est représentée sur la figure 5.6.

1. Exprimer CQ et DQ en fonction de y_Q et de l'angle β où $y_Q = \vec{y} \cdot \vec{OQ}$.
2. Calculer de deux manières différentes la résultante des efforts extérieurs sur le navire.
3. En déduire :

$$\frac{y_Q^2}{\sin(2\beta)} = \frac{M}{\rho}.$$

4. Calculer les coordonnées du centre de gravité G du navire dans le repère xOy .
5. Calculer les coordonnées du centre de poussée P du navire dans le repère xOy .
6. À quelle condition la somme de la pesanteur et de la poussée d'ARCHIMÈDE tend-elle à redresser le navire? Comment s'exprime cette condition lorsque $\alpha \rightarrow 0$?

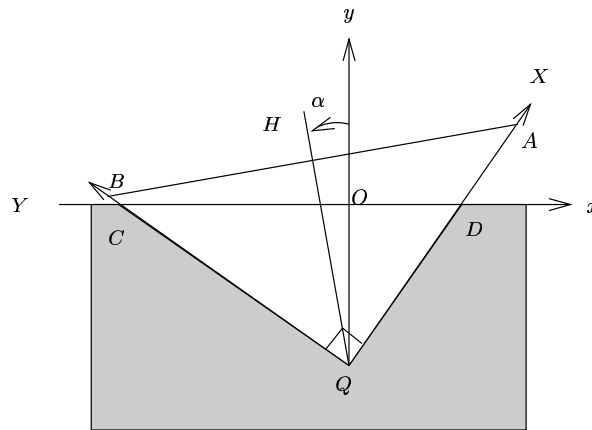


FIG. 5.6 - Coupe du navire

Solution du problème I

I.1. Une ligne de courant est par définition une ligne en tout point tangente au champ de vitesse. Elle ne correspond en général pas au trajet suivi par une particule fluide au cours du temps. On peut toutefois montrer qu'il y a coïncidence en régime permanent. En intégrant la relation (5.1) le long d'un chemin quelconque allant d'un point A à un point B, on obtient :

$$\int_A^B \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{\delta l} + \int_A^B \left[\vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} \right) + (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v} + \vec{\nabla} \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) \right] \cdot \vec{\delta l} = 0$$

soit,

$$\int_A^B \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{\delta l} + \left[\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right]_A^B + \int_A^B \left((\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v} \right) \cdot \vec{\delta l} = 0.$$

Si maintenant on impose au trajet $A \rightarrow B$ d'être une ligne de courant \mathcal{C} , $(\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v}$ est orthogonal à la vitesse et donc au vecteur déplacement élémentaire $\delta\vec{l}$. Il s'ensuit que :

$$p_B(t) + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B = p_A(t) + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A - \rho \int_A^B \text{sur } \mathcal{C} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{\delta l},$$

qui généralise la relation de BERNOUILLI à un régime dépendant du temps.

I.2. Le fluide étant incompressible, le débit massique à travers la conduite se conserve et ce, même lors du régime transitoire. Comme la conduite est de section constante, on en déduit que $v(x, t) = v(t)$. On peut en donner une preuve plus formelle mais équivalente: la relation de conservation de la masse (ou relation de continuité) s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0.$$

Comme ρ est constante, on a $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ avec $\vec{v} = v(x, t) \vec{e}_x$. D'où $\partial v / \partial x = 0$. Ainsi, la vitesse le long de la conduite ne dépend que du temps.

Considérons une ligne de courant joignant deux points de la conduite A et B . On peut écrire, d'après ce qui précède: $p_B = p_A - \rho (x_B - x_A) dv/dt$. Si l'on prend A au niveau de la vanne où règne une pression p_0 , on a

$$p(x, t) = p_0 + \rho (l - x) \frac{dv(t)}{dt}.$$

I.3. Prenons une ligne de courant allant d'un point C de la surface libre jusqu'au point D d'abscisse $x = 0$ situé à l'entrée de la conduite (voir figure 5.7).

PROBLÈMES

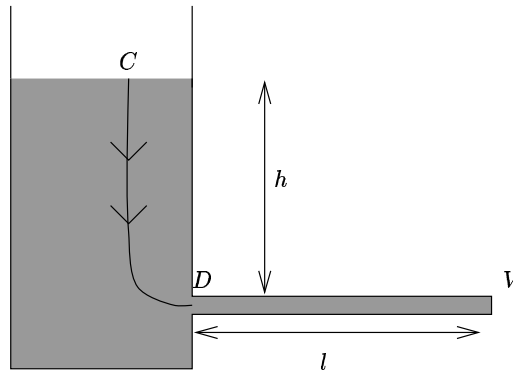


FIG. 5.7 - Ligne de courant $C \rightarrow D$

On aura alors,

$$p(x = 0, t) + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_0 + \rho g h + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 - \rho \int_C^D \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{\delta l}.$$

Compte tenu de l'expression établie à la question précédente, il vient :

$$l \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{2} v^2 = g h + \frac{1}{2} \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 - \int_C^D \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{\delta l}.$$

Nous allons montrer que l'on peut approximer cette égalité par $l dv/dt + v^2/2 = gh$. Supposons pour cela que les sections du réservoir et de la conduite soient respectivement S et s avec $s \ll S$. La conservation du débit impose $S dh/dt = s v$ d'où $dh/dt \ll v$. On pourra donc négliger $(dh/dt)^2$ devant v^2 . De même, on a : $d^2h/dt^2 \ll dv/dt$, ce qui permet de négliger $\int_C^D \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{\delta l}$ devant $l dv/dt$ tant que l n'est pas trop petit (*i.e.* tant que l'on n'a pas $l \ll h$). L'approximation du régime stationnaire dans le réservoir revient à négliger les variations de hauteur d'eau ainsi que les variations de vitesse d'écoulement dans le réservoir. On obtient alors l'équation différentielle vérifiée par v dans la conduite :

$$l \frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{2} = g h.$$

Dans la limite $t \rightarrow \infty$, la vitesse tend vers une constante $v_\infty = \sqrt{2gh}$ (régime permanent). Il s'agit donc de résoudre :

$$\tau \frac{d}{dt} \left(\frac{v}{v_\infty} \right) = 1 - \left(\frac{v}{v_\infty} \right)^2,$$

qui est à variables séparées. Puisque

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{argth} x,$$

la vitesse a pour expression :

$$v = v_\infty \tanh \frac{t}{\tau}.$$

I.4. Si la vanne est fermée, la pression en V n'est plus connue *a priori* et ne peut plus servir de référence. On a toujours :

$$p(x, t) = p(x = 0, t) - \rho x \frac{dv}{dt} = p(x = 0, t) + \rho x \frac{v_\infty}{T}.$$

La pression au point D peut se calculer comme à la question précédente en considérant la ligne de courant $C \rightarrow D$. L'hypothèse du régime stationnaire dans le réservoir tient toujours. Elle permet d'écrire : $p(x = 0, t) = p_0 + \rho g h - \rho v^2/2$, d'où

$$p(x, t) = p_0 + \rho g h - \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 \left(1 - \frac{t'}{T} \right)^2 + \rho x \frac{v_\infty}{T}.$$

Calculons les dérivées partielles de la pression :

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho \frac{v_\infty}{T} > 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t'} &= \frac{2\rho g h}{T} \left(1 - \frac{t'}{T}\right) > 0.\end{aligned}$$

La pression est maximale en $x = l$ à l'instant $t' = T$.

Complément : la « relation fondamentale » régissant la dynamique d'une particule fluide s'écrit :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \sum \vec{F} \text{ volumiques appliquées à la particule fluide,}$$

où D/Dt est un opérateur désignant la dérivée particulière (ou convective ou encore advective) : $DG/Dt = \partial G/\partial t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(G)$, qui permet d'obtenir l'évolution de la quantité G (scalaire ou vectorielle) tout en suivant le mouvement du fluide dont la vitesse est \vec{v} (voir les rappels de cours). Cette « relation fondamentale » est valable même si le fluide est compressible. En particulier, le terme de gauche s'écrit bien $\rho D\vec{v}/Dt$ et non $D(\rho\vec{v})/Dt$ comme pourrait le suggérer une analogie trop rapide avec la mécanique du point. Le terme de droite fait intervenir, outre des forces volumiques comme la pesanteur ou la pression, des forces de viscosité ainsi que des forces liées à la compressibilité du liquide. Ici, le fluide est supposé incompressible et non visqueux, ce qui permet d'écrire $\sum \vec{F} = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g}$. En tenant compte de

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} \right) + (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v},$$

on obtient la relation (5.1) donnée dans l'énoncé.

Solution du problème II

II.1. Notons que $y_Q = -OQ$. Puisque β est l'angle que fait la verticale avec la droite (QC) , on a simplement :

$$\boxed{CQ = -\frac{y_Q}{\cos \beta}} \quad \text{et} \quad \boxed{DQ = -\frac{y_Q}{\sin \beta}}.$$

II.2. Recensons les efforts extérieurs agissant sur l'unité de longueur du navire. Il y a tout d'abord son poids $M\vec{g}$. Il y a ensuite la poussée d'ARCHIMÈDE que l'on peut calculer de deux manières. Nous considérerons dans tout ce qui suivra que la masse volumique de l'air est négligeable devant celle de l'eau (ρ), de telle sorte que la seule force de poussée provient de l'eau.

Première méthode : application du théorème d'ARCHIMÈDE. Il s'applique bien ici puisque si l'on remplace la section CDQ du navire par de l'eau, on

obtient un état d'équilibre pour le fluide. Le navire reçoit du fluide porteur une poussée dont l'intensité est égale au poids du volume d'eau déplacé et de sens contraire. Par unité de longueur du bateau, le volume en question se réduit à la surface du triangle rectangle CDQ , et la force vaut :

$$-\frac{1}{2}\rho \vec{g} \cdot CQ \cdot DQ = -\rho \frac{y_Q^2}{\sin 2\beta} \vec{g}.$$

Deuxième méthode : calcul direct en intégrant les forces élémentaires de pression. Sur un élément de longueur dl de la coque, s'applique une force $\rho g y dl$ normale à la paroi (la pression atmosphérique ne contribue pas car elle est isotrope). La composante de cette force suivant (O, \vec{y}) est $\rho g y dl \sin \beta = \rho g y dy \sin \beta / \cos \beta$ sur la partie (CQ) et $\rho g y dy \cos \beta / \sin \beta$ sur la partie (DQ) . En projetant la force de poussée sur l'axe (O, \vec{y}) (à l'équilibre, la composante de la force de poussée selon l'axe (O, \vec{x}) est nulle), il vient :

$$\int_0^{y_Q} \rho g \vec{y} y \left(\frac{dy \sin \beta}{\cos \beta} + \frac{dy \cos \beta}{\sin \beta} \right) = -\rho \frac{y_Q^2}{\sin 2\beta} \vec{g}.$$

Les deux méthodes sont bien entendu équivalentes mais la seconde est plus générale car elle reste valable même lorsque le théorème d'ARCHIMÈDE ne s'applique plus (voir l'exercice 5.2.4).

La résultante \vec{R} des efforts extérieurs est :

$$\vec{R} = \left(M - \frac{\rho y_Q^2}{\sin 2\beta} \right) \vec{g}.$$

II.3. On suppose que le centre de gravité du navire n'est soumis à aucune accélération : la résultante des forces agissant sur le navire est nulle, ce qui permet d'écrire :

$$M \vec{g} - \rho \frac{y_Q^2}{\sin 2\beta} \vec{g} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y_Q^2}{\sin 2\beta} = \frac{M}{\rho}.$$

En d'autres termes le volume immergé reste constant : de tels mouvements sont appelés *isocarènes*.

II.4. Le centre de gravité G se trouve sur l'axe de symétrie (QH) puisque la coque est homogène. Considérons les points milieux de $[QA]$ et $[QB]$. G se trouve au milieu du segment formé par les deux points précédents (le barycentre est associatif). Ces deux points sont distants de d où $d^2 = 2(l/2)^2$ (on a posé $l = QA = QB$). Avec le théorème de PYTHAGORE, il vient :

$$QG^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad QG^2 = \frac{l^2}{8},$$

soit encore : $QG = l\sqrt{2}/4$. On aurait pu retrouver ce résultat en revenant à la définition du centre de gravité et en écrivant :

$$M \vec{QG} = \int_O^A \vec{QM} m \frac{dL}{l} + \int_O^B \vec{QM} m \frac{dL}{l} = \frac{M}{2l} \frac{l^2}{2} (\vec{X} + \vec{Y})$$

d'où $\overrightarrow{QG} = l(\vec{X} + \vec{Y})/4$.

Enfin, un vecteur unitaire de l'axe (QH) est $-\sin \alpha \vec{x} + \cos \alpha \vec{y}$. On a donc :

$$\overrightarrow{QG} = \frac{l\sqrt{2}}{4} (\cos \alpha \vec{y} - \sin \alpha \vec{x}) \quad \text{ou} \quad \boxed{\overrightarrow{OG} = y_Q \vec{y} + \frac{l\sqrt{2}}{4} (-\sin \alpha \vec{x} + \cos \alpha \vec{y})}$$

II.5. Le centre de poussée est par définition le centre de masse du fluide déplacé. Il ne s'agit en général pas d'un point fixe du solide immergé. P est donc le centre de gravité du triangle (CQD) : il se trouve au point de concours des médianes. Soit Z le milieu du segment $[CD]$; on a $\overrightarrow{QP} = 2\overrightarrow{QZ}/3$, puis

$$\overrightarrow{QZ} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD}) = \frac{-y_Q}{2} (\vec{y} - \tan \beta \vec{x} + \vec{y} + \frac{1}{\tan \beta} \vec{x})$$

et

$$\overrightarrow{QP} = -\frac{y_Q}{3} \left[2\vec{y} + \left(\frac{1}{\tan \beta} - \tan \beta \right) \vec{x} \right].$$

En conclusion :

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = \frac{y_Q}{3} \vec{y} + \frac{y_Q}{3} \left(\tan \beta - \frac{1}{\tan \beta} \right) \vec{x}}$$

II.6. Remarquons pour commencer que la poussée d'ARCHIMÈDE, qui s'oppose au poids d'après la question II.3., s'applique au centre de poussée P , alors que le poids s'applique au centre de gravité G . Ces deux forces exercent un couple qui peut redresser ou faire chavirer l'embarcation.

Considérons que le bateau penche « vers la gauche », comme sur la figure 5.8.

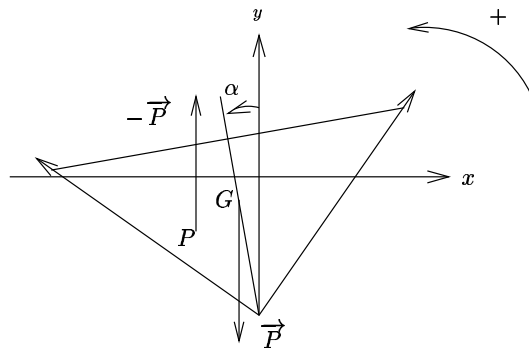


FIG. 5.8 - Positions schématiques de P et G ; convention d'orientation.

Pour que la somme de la pesanteur et des efforts de poussée d'ARCHIMÈDE tende à redresser le navire, il faut se trouver dans la situation de la figure où le

moment des forces tend à induire une rotation « vers la droite ». Il faut donc avoir P « à gauche de G ». En effet, le moment en O des forces exercées sur le navire est :

$$\vec{M}(O) = \vec{OG} \wedge \vec{P} + \vec{OP} \wedge \underbrace{\vec{P}_{\text{Archimède}}}_{-\vec{P}} = \vec{PG} \wedge \vec{P}.$$

La projection de ce moment sur la direction z doit être, dans la situation de la figure 5.8, négatif afin de redresser le navire, ce qui se traduit par

$$\vec{PG} \cdot \vec{x} > 0$$

avec les conventions d'orientation de la figure 5.8. De façon plus générale, α étant positif suivant nos conventions d'orientation, la condition de stabilité s'écrit :

$$\text{signe}(\vec{PG} \cdot \vec{x}) = \text{signe}(\alpha) \quad \text{ou encore} \quad \alpha \vec{PG} \cdot \vec{x} > 0$$

avec

$$\vec{PG} \cdot \vec{x} = -\frac{l\sqrt{2}}{4} \sin \alpha + \left(\frac{1}{\tan \beta} - \tan \beta \right) \frac{y_Q}{3}.$$

Que devient cette expression lorsque $\alpha \rightarrow 0$? Effectuons des développements limités au premier ordre en α des différentes quantités qui nous intéressent :

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \alpha + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ \cos \beta &= \sqrt{2}/2(1 - \alpha) + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ \sin \beta &= \sqrt{2}/2(1 + \alpha) + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ \tan \beta &= 1 + 2\alpha + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ \cotan \beta &= 1 - 2\alpha + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ y_Q &= -\sqrt{M/\rho} + \mathcal{O}(\alpha^2). \end{aligned}$$

On en déduit la condition de stabilité des petits déplacements :

$$\boxed{\sqrt{\frac{M}{\rho}} > \frac{3\sqrt{2}l}{16}}.$$

Si elle est satisfaite, le navire peut osciller autour de sa position d'équilibre $\alpha = 0$ et ne pas chavirer. À ρ et l fixés, le bateau est d'autant plus stable qu'il est lourd. Bien entendu, s'il est trop lourd, il coule! La condition de flottaison s'écrit

$$|y_Q| < \frac{l\sqrt{2}}{2},$$

soit encore, puisque l'on s'intéresse à la position d'équilibre $\alpha = 0$:

$$\sqrt{\frac{M}{\rho}} < \frac{\sqrt{2}l}{2}.$$

Complément : les problèmes de stabilité de bateaux se formalisent en introduisant la notion de *métacentre*. Par définition, le métacentre M est l'intersection de la verticale passant par le centre de poussée P et de l'axe de symétrie passant par G (voir la figure 5.9).

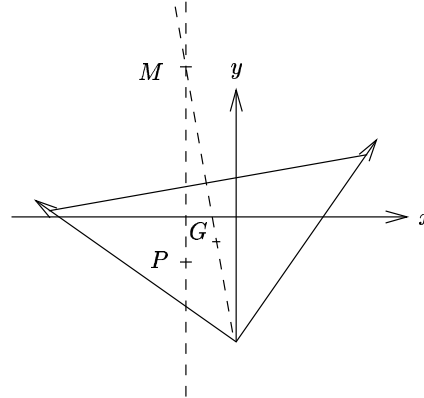


FIG. 5.9 - Position du métacentre M .

Définissons une mesure algébrique sur (O, \vec{y}) : $\overline{XY} = \overline{XY} \cdot \vec{y}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que l'équilibre soit stable est que M soit au dessus de G ($\overline{GM} > 0$). On peut montrer que \overline{PM} est toujours positif. Or $\overline{GM} = \overline{GP} + \overline{PM}$. Ainsi, une condition suffisante de stabilité de l'équilibre est : P au dessus de G ($\overline{GP} > 0$). Cette dernière condition est assez intuitive mais relativement restrictive. En effet, dans l'exercice que nous venons de traiter :

$$\overline{GP} = \overline{GP} \cdot \vec{y} = -\frac{2}{3}y_Q - \frac{l\sqrt{2}}{4} \cos \alpha,$$

et pour les petits déplacements :

$$\overline{GP} > 0 \iff \sqrt{\frac{M}{\rho}} > \frac{3\sqrt{2}l}{8}.$$

Nous pouvons conclure que pour

$$\frac{3\sqrt{2}l}{16} < \sqrt{\frac{M}{\rho}} < \frac{3\sqrt{2}l}{8},$$

le navire est stable mais le centre de poussée P est en dessous du barycentre G .

5.3.2 Ondes acoustiques dans un gaz

Université Joseph FOURIER, Grenoble
Durée : 2 h

On considère un gaz contenu dans un tuyau de symétrie axiale mais de section variable $S(x)$. Le gaz a une densité de masse locale ρ , une pression p et un champ de vitesse locale \vec{u} . On supposera que ces trois grandeurs ne sont dépendantes que de la coordonnée x et du temps t et que le champ de vitesse est principalement dans la direction de l'axe Ox : $\vec{u} \simeq u(x, t) \vec{e}_x$ (voir la figure 5.10).

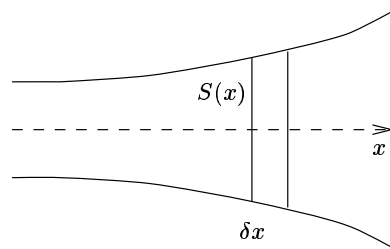


FIG. 5.10 - Coupe du tuyau

1. Équation de continuité

- a) Expliquer pourquoi les deux hypothèses précédentes sont fausses près de la paroi du tuyau.
- b) Par un raisonnement direct, il est proposé d'établir l'équation de continuité exprimant la conservation de la masse sous la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{S} \frac{\partial (S \rho u)}{\partial x} = 0. \tag{1}$$

Pour ce faire, il est demandé de procéder comme suit. Considérer une couche de masse δm comprise entre x et $x + \delta x$. Exprimer en fonction de ρ la variation de cette masse pendant dt .

Calculer le flux de masse entrant et celui sortant de la couche pendant dt .

Postulant la conservation de la masse, déduire l'équation de continuité (1).

- c) Retrouver l'équation (1) en utilisant l'équation de continuité générale établie dans le cours, à savoir :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0. \tag{2}$$

Pour cela, on se servira du théorème de la divergence appliqué à une couche d'épaisseur δx , en tenant compte du fait que la composante du champ de vitesse normale à la paroi s'annule sur cette paroi.

- d) Conformément à la remarque de la question 1.a), montrer que l'équation (1) n'est effectivement compatible avec l'équation (2) que si l'on tient compte d'une petite contribution transverse du champ de vitesse.

2. Dynamique du gaz

- a) Montrer que l'équation d'EULER établie dans le cours (relation fondamentale de la mécanique pour un fluide inviscide) se réduit à :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

où la force de gravitation a été négligée. Expliquer ce que représente l'ensemble des deux premiers termes et le troisième terme de cette équation.

- b) On suppose que le gaz est homogène et stationnaire à l'équilibre et que le mouvement décrit par u correspond à une petite perturbation. Ainsi on pose $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ et $p = p_0 + \delta p$, où ρ_0 et p_0 sont les valeurs d'équilibre constantes, avec $\delta p \ll p_0$ et $\delta\rho \ll \rho_0$. Écrire l'approximation linéarisée des équations de continuité et d'EULER portant sur $\delta\rho$, u , δp .

On suppose que la compression suit une loi de type adiabatique, à savoir que p est proportionnel à ρ^γ . Écrire alors l'équation d'EULER en fonction de u et $\delta\rho$.

- c) Montrer que la perturbation de densité évolue selon l'équation :

$$\frac{\partial^2(\delta\rho)}{\partial t^2} - \frac{C_s^2}{S} \frac{\partial}{\partial x} \left[S \frac{\partial(\delta\rho)}{\partial x} \right] = 0,$$

où C_s désigne la vitesse du son ($C_s^2 = \gamma p_0 / \rho_0$).

Montrer que la vitesse est gouvernée par une équation légèrement différente :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C_s^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{S} \frac{\partial(Su)}{\partial x} \right] = 0.$$

3. Ondes dans un pavillon exponentiel

- a) On considère un pavillon tel que $S(x) = S_0 e^{\alpha x}$. Une vibration de pulsation ω est imposée à l'entrée du pavillon et l'on cherche donc les solutions de l'équation de la vitesse sous la forme complexe :

$$\tilde{u}(x, t) = \phi(x) e^{-i\omega t}.$$

Montrer que la fonction complexe ϕ est solution de l'équation différentielle linéaire du second ordre :

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \alpha \frac{d\phi}{dx} + \frac{\omega^2}{C_s^2} \phi = 0.$$

- b) Quelles sont les solutions du problème dans le cas d'un tuyau cylindrique, c'est-à-dire $\alpha = 0$? On note $k_0 \equiv \omega/C_s$. Que représente k_0 ?
- c) Dans le cas d'un tuyau exponentiel ($\alpha \neq 0$), discuter de la nature des solutions et montrer notamment que les ondes sonores ne se propagent que pour $\omega > (\alpha C_s)/2$.
Montrer que les ondes ont une amplitude décroissant exponentiellement avec x et calculer le nouveau nombre d'onde k en fonction de k_0 et α . Donner l'expression générale de $u(x, t)$ et l'expression de l'onde progressive.
- d) Écrire la relation de dispersion sous la forme d'une équation reliant ω^2 et k^2 .
Quelle est l'expression de la vitesse de phase v_φ en fonction de C_s , ω et α ?
Calculer la vitesse de groupe $v_g \equiv d\omega/dk$ et vérifier que $v_\varphi v_g = C_s^2$.
- e) Calculer la densité d'énergie cinétique moyenne : $E_c = \frac{1}{2} \rho_0 \overline{(u^2)}$.
Comment varie alors SE_c ? Commenter.

Solution

1.a) Il est légitime de supposer que la forme de la vitesse loin des parois du tuyau est de la forme $\vec{u} \simeq u(x, t) \vec{e}_x$. Cependant, le tuyau étant immobile dans le référentiel d'étude, la vitesse du fluide normale à la paroi du tuyau doit être nulle. Près de la paroi, \vec{u} n'est donc plus parallèle à \vec{e}_x , afin de satisfaire la condition aux limites précédente. La composante transverse de la vitesse dépend alors fortement de la distance r à l'axe de symétrie du tuyau, puisqu'elle n'entre en jeu que dans une zone proche de la paroi du tuyau.

L'apparition de cette composante transverse de la vitesse implique également que les champs de pression, de densité de masse et de vitesse dépendent de x , t et r près de la paroi.

Cependant, on peut estimer que les approximations faites dans le problème vis-à-vis de la dépendance des champs sont correctes, à partir du moment où l'on pourra négliger les effets de bords dus à la paroi, ce qui signifie que la section du tube est grande devant la zone proche de la paroi où les hypothèses de départ sont manifestement fausses.

Remarque : deux types de conditions aux limites peuvent être envisagés. Dans le cas d'un fluide visqueux, la vitesse s'annule au fur et à mesure que l'on se rapproche d'une paroi immobile. Dans un référentiel où la paroi est en mouvement, cette condition se traduit par :

$$\vec{v}_{\text{fluide}} = \vec{v}_{\text{paroi}}$$

Dans la situation idéale d'un fluide non visqueux, c'est la composante normale à la paroi qui s'annule au voisinage de celle-ci :

$$\vec{v}_{\text{fluide}} \cdot \vec{n} = \vec{v}_{\text{paroi}} \cdot \vec{n},$$

où \vec{n} est un vecteur normal à la paroi au point considéré. Cette condition traduit l'imperméabilité de la paroi au fluide. C'est cette condition qui a été adoptée ici, avec $\vec{v}_{\text{paroi}} = \vec{0}$, conformément à l'hypothèse de viscosité nulle qui sera faite par la suite. Bien entendu, la viscosité d'un écoulement n'est jamais strictement nulle, mais elle peut être suffisamment petite pour que ses effets ne jouent que dans une *couche limite* confinée au voisinage immédiat de la paroi.

1.b) Soit une tranche δm de fluide analogue à celle de la figure de l'énoncé. La variation de la masse du fluide contenue dans cette tranche est :

$$\frac{d(\delta m)}{dt} = \frac{d}{dt} [S(x) \delta x \rho(x, t)]$$

On en déduit :

$$\boxed{\frac{d(\delta m)}{dt} = S(x) \delta x \frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

Le flux de masse entrant dans la couche par unité de temps est, par définition :

$$\boxed{\Phi_{\text{entrant}} = S(x) \rho(x, t) \vec{u}(x, t) \cdot \vec{e}_x = S(x) \rho(x, t) u(x, t)}$$

puisque la normale à la tranche de fluide est colinéaire à \vec{e}_x . De même, le flux de masse sortant par unité de temps est :

$$\boxed{\Phi_{\text{sortant}} = S(x + \delta x) \rho(x + \delta x, t) u(x + \delta x, t)}$$

La variation de la masse de fluide contenue dans la tranche d'épaisseur δx s'écrit de manière générale sous la forme :

$$\frac{d(\delta m)}{dt} = \Phi_{\text{entrant}} - \Phi_{\text{sortant}}$$

Dans le problème qui nous intéresse, l'égalité précédente se traduit par :

$$S(x) \delta x \frac{\partial \rho}{\partial t} = S(x) \rho(x, t) u(x, t) - \left[S(x) \rho(x, t) u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} (S(x) \rho(x, t) u(x, t)) \delta x \right]$$

pour la tranche de fluide infinitésimale considérée. On obtient ainsi l'équation (1) recherchée :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{S} \frac{\partial (S \rho u)}{\partial x} = 0}$$

1.c) Établissons tout d'abord l'équation de continuité (2) proposée : soit un volume (\mathcal{V}) de fluide entouré par une surface fermée (S). Pour ce volume de fluide, la conservation de la masse s'écrit sous la forme :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{(\mathcal{V})} \rho d\tau = \iiint_{(\mathcal{V})} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$$

$$= - \oint_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{n} dS = - \oint_{(S)} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS$$

avec la normale à la surface (S) orientée vers l'extérieur, $\vec{j} = \rho \vec{u}$ étant le vecteur densité de courant de masse. En appliquant le théorème d'OSTROGRADSKY (ou de la divergence), on arrive à :

$$\iiint_{(\mathcal{V})} \left[\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \text{div}(\rho \vec{u}) \right] d\tau = 0$$

ce qui conduit, la démonstration précédente étant valable pour tout volume (\mathcal{V}) de fluide, à l'équation de continuité (2) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0.$$

Dans le cas de la tranche de fluide comprise entre x et $x + \delta x$, l'application de l'équation de continuité conduit à :

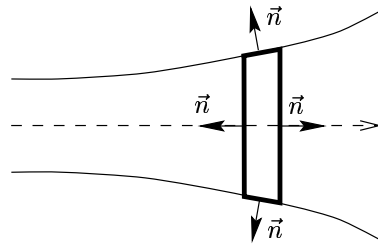
$$\iiint_{\text{tranche } \delta x} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \iiint_{\text{tranche } \delta x} \text{div}(\rho \vec{u}) d\tau = 0.$$

En appliquant le théorème de la divergence, on arrive, après intégration sur la tranche de fluide, à :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho(x, t) S(x) \delta x] + \oint_{(S)} \rho \vec{u} \cdot d\vec{S} = 0.$$

En développant cette dernière intégrale, on retrouve bien l'équation (1) puisque:

- la normale à la surface est $-\vec{e}_x$ pour le plan x
- la normale à la surface est $+\vec{e}_x$ pour le plan $x + \delta x$
- d'après les conditions aux limites dont nous avons parlé à la question 1.a), la vitesse normale à la paroi est nulle, donc $\vec{u} \cdot d\vec{S}$ est nul pour les surfaces confondues avec la paroi.



1.d) Comme nous l'avons vu à la question précédente, les deux équations (1) et (2) ne sont compatibles qu'en supposant que la vitesse possède une

PROBLÈMES

composante transverse à proximité de la paroi : c'est l'hypothèse utilisée lors de l'intégration, à la question 1.c), sur la tranche de fluide, et qui implique l'orthogonalité de la vitesse et de la normale à la paroi. Cependant, cette composante n'apparaît pas dans le bilan final, car on effectue un bilan « global » sur une tranche de fluide.

Si l'on ne tient pas compte de l'existence de cette composante transverse on a alors $\vec{u} = u \vec{e}_x$. L'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0$$

devient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0.$$

Elle n'est compatible avec la relation (1) que si

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 0,$$

qui est le seul cas où l'hypothèse $\vec{u} = u \vec{e}_x$ est compatible avec les conditions aux limites.

2.a) La forme générale de l'équation d'EULER pour un fluide inviscide est :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right] = -\vec{\nabla} p + \vec{F}$$

où \vec{F} est la résultante des forces volumiques extérieures appliquées au fluide. Dans le problème, on néglige toutes les forces extérieures. De plus, tous les champs considérés ne dépendent que de x et de t , et on a fait l'hypothèse $\vec{u} \simeq u(x, t) \vec{e}_x$. Ceci conduit à la relation souhaitée :

$$\boxed{\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0.}$$

Les deux premiers termes de cette équation représentent la dérivée particulière $\rho du/dt = \rho Du/Dt$ d'un élément de fluide $d\tau$ (dérivée en suivant l'élément de fluide). Ils caractérisent l'évolution de l'élément de fluide $d\tau$ au cours du temps, le terme $u \partial u / \partial t$ représentant la dérivée convective (ou particulière) qui traduit le déplacement, par l'ensemble du fluide, de l'élément de fluide au cours du temps.

Le troisième terme représente quant à lui la résultante des forces de pression s'exerçant sur l'élément de fluide.

2.b) On s'intéresse désormais aux petits mouvements du fluide autour de l'équilibre. En remplaçant les expressions de p et de ρ dans l'équation de continuité, on arrive, en se limitant aux termes linéaires en \vec{u} , $\delta \rho$ et δp , à :

$$\boxed{\frac{\partial(\delta \rho)}{\partial t} + \frac{\rho_0}{S} \frac{\partial}{\partial x}(Su) = 0}$$

car, à l'équilibre, $\partial \rho_0 / \partial x = 0$.

Pour l'équation d'EULER, un développement analogue conduit à :

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(\delta p)}{\partial x} = 0}$$

puisque à l'équilibre, $\partial p_0 / \partial x = 0$.

Si on fait de plus l'hypothèse d'une compression adiabatique du fluide, on peut écrire la relation :

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma}.$$

Calculons la différentielle logarithmique de l'expression précédente :

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho},$$

ce qui conduit, pour de petites perturbations autour de l'équilibre, à :

$$\delta p = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \delta \rho.$$

On arrive alors à une nouvelle forme de l'équation d'EULER :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\gamma p_0}{\rho_0^2} \frac{\partial(\delta \rho)}{\partial x} = 0}.$$

2.c) En dérivant l'équation de continuité obtenue à la question précédente par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{\partial^2(\delta \rho)}{\partial t^2} + \frac{\rho_0}{S} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}(Su) = 0.$$

Or,

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}(Su) = \frac{\partial}{\partial x} \left[S \frac{\partial u}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[S \left(-\frac{\gamma p_0}{\rho_0^2} \frac{\partial}{\partial x}(\delta \rho) \right) \right]$$

en utilisant la forme de l'équation d'EULER de la question précédente. Posons $C_s^2 = \gamma p_0 / \rho_0$, quantité homogène au carré d'une vitesse ; il vient alors :

$$\boxed{\frac{\partial^2(\delta \rho)}{\partial t^2} - \frac{C_s^2}{S} \frac{\partial}{\partial x} \left[S \frac{\partial(\delta \rho)}{\partial x} \right] = 0}.$$

En appliquant la même méthode à l'équation d'EULER, on arrive à :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\gamma p_0}{\rho_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{\rho_0}{S} \frac{\partial}{\partial x}(Su) \right] = 0,$$

ce qui conduit à l'équation pour la vitesse :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C_s^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{S} \frac{\partial(Su)}{\partial x} \right] = 0}.$$

On obtient une équation de propagation pour la petite perturbation autour de l'équilibre ; comme nous allons le voir dans la suite, c'est cette équation qui régit la propagation des ondes sonores dans le fluide.

3.a) On considère un pavillon exponentiel, décrit par $S(x) = S_0 e^{\alpha x}$. On peut chercher des solutions de l'équation de la vitesse sous la forme complexe puisque les équations du problème sont linéaires, en posant $u(x, t) = \text{Re}(\tilde{u})$. En remplaçant les expressions de S et de \tilde{u} dans l'équation de la vitesse de la question 2.c), nous pouvons écrire :

$$-\omega^2 \phi - C_s^2 \frac{d}{dx} \left[e^{-\alpha x} \frac{d}{dx} (e^{\alpha x} \phi) \right] = 0,$$

soit

$$\boxed{\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \alpha \frac{d\phi}{dx} + \frac{\omega^2}{C_s^2} \phi = 0}.$$

3.b) Dans le cas d'un tuyau cylindrique, $\alpha = 0$ puisque la section est constante. Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme :

$$\phi(x) = \phi_+ e^{ik_0 x} + \phi_- e^{-ik_0 x}$$

où ϕ_+ et ϕ_- sont deux constantes réelles déterminées par les conditions aux limites. Les solutions du problème se mettent sous la forme

$$\boxed{u(x, t) = u_0 \cos(\omega t - k_0 x)}$$

car on ne s'intéresse qu'à des ondes progressives selon $x > 0$. k_0 représente le vecteur d'onde des ondes sonores planes progressives se propageant dans le gaz considéré.

3.c) L'équation caractéristique associée à la relation obtenue à la question 3.a) est :

$$X^2 + \alpha X + \frac{\omega^2}{C_s^2} = 0.$$

Suivant le signe de son discriminant, trois cas se présentent :

- si $\omega < (\alpha C_s)/2$, la solution générale de l'équation différentielle s'écrit sous la forme :

$$\phi(x) = \phi_1 e^{r_1 x} + \phi_2 e^{r_2 x}$$

où r_1 et r_2 sont les deux racines réelles de l'équation caractéristique. Dans ce cas, il n'y a pas de phénomènes propagatifs dans le pavillon, puisque la solution générale de l'équation de la vitesse est une onde stationnaire. En effet, dans une équation du second degré écrite sous la forme $X^2 - SX + P = 0$, S représente la somme des racines et P leur produit. Ici, les deux racines r_1 et r_2 sont de même signe puisque leur produit est positif et ce signe est négatif puisque leur somme est égale à $-\alpha$. L'onde est exponentiellement amortie.

- si $\omega = (\alpha C_s)/2$, la solution de l'équation de la vitesse est également une onde stationnaire. Il n'y a donc pas de propagation dans le tuyau.
- si $\omega > (\alpha C_s)/2$, l'équation caractéristique présente deux racines complexes

$$r_{1,2} = \left(-\alpha \pm i\sqrt{4\omega^2/C_s^2 - \alpha^2} \right) / 2.$$

Ceci conduit à des solutions propagatives de forme générale :

$$\tilde{u} = (\phi_+ e^{ikx} + \phi_- e^{-ikx}) e^{-\alpha x/2} e^{-i\omega t}.$$

On peut constater que les ondes sonores se propageant dans le pavillon ont une amplitude proportionnelle à $e^{-\alpha x/2}$, leur amplitude décroît donc exponentiellement avec x ($\alpha > 0$ d'après la configuration choisie). Le nouveau nombre d'onde k s'exprime sous la forme :

$$k = k_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{2k_0} \right)^2}.$$

L'expression générale de $u(x, t)$ est :

$$u(x, t) = [\phi_+ \cos(\omega t - kx) + \phi_- \cos(\omega t + kx)] e^{-\alpha x/2}.$$

Pour le problème qui nous intéresse, recherchons une solution sous la forme d'une onde progressive se propageant selon les $x > 0$:

$$u(x, t) = u_0 \cos(\omega t - kx) e^{-\alpha x/2}.$$

Puisque les ondes ne peuvent se propager que pour $\omega > (\alpha C_s)/2$, nous tenons une explication de l'effet « DONALD DUCK » : les porte-voix qui sont utilisés lors des manifestations peuvent être considérés comme étant constitués de pavillons exponentiels, et le son qui est émis est très nasillard puisqu'il est privé de ses composantes de basse fréquence !

3.d) La relation de dispersion reliant k et ω s'obtient à partir de la solution précédente, grâce à l'expression de k :

$$k = k_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{2k_0} \right)^2}.$$

En utilisant la définition de k_0 , on obtient l'équation de dispersion sous la forme :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{C_s^2} - \frac{\alpha^2}{4}.$$

Par définition de la vitesse de phase, on a $v_\varphi \equiv \omega/k$. On en déduit :

$$v_\varphi = \frac{2\omega C_s}{\sqrt{4\omega^2 - \alpha^2 C_s^2}}.$$

De même, la vitesse de groupe est définie par $v_g \equiv d\omega/dk$. En différentiant membre à membre la relation de dispersion, il vient

$$2k dk = \frac{1}{C_s^2} 2\omega d\omega$$

c'est-à-dire :

$$v_\varphi v_g = C_s^2.$$

Il s'ensuit que :

$$v_g = \frac{C_s}{2\omega} \sqrt{4\omega^2 - \alpha^2 C_s^2}.$$

3.e) D'après la question 3.c), l'expression de l'onde progressive est :

$$u(x, t) = u_0 \cos(\omega t - kx) e^{-\alpha x/2}.$$

En moyennant sur le temps, on arrive à l'expression de l'énergie cinétique moyenne :

$$Ec = \frac{\rho_0 u_0^2}{4} e^{-\alpha x}.$$

On constate que la quantité SEc est indépendante de x . Ceci n'a rien de surprenant mais traduit la conservation de l'énergie dans le pavillon.

5.3.3 Étude d'une persienne

Voir la partie II du problème 6.3.3