

Chapitre 7

Relativité restreinte et Mécanique quantique

7.1 Rappels de cours de mécanique quantique

7.1.1 Naissance de la mécanique quantique.

À l'aube du XX^{ème} siècle, la physique semble triomphante. À l'aide de la mécanique classique, de la théorie de l'électromagnétisme et de l'optique développée par MAXWELL ainsi que de la théorie cinétique des gaz (qui inclut l'aspect discontinu de la matière à notre description du monde), un cadre explicatif semble trouvé à l'essentiel des phénomènes naturels. La physique s'apprête pourtant à subir deux révolutions fondamentales qui verront l'avènement de la mécanique quantique et de la théorie de la relativité.

Expériences fondamentales.

La nécessité d'un nouveau cadre explicatif pour le monde microscopique va apparaître à l'étude d'un certain nombre de faits expérimentaux qui ne trouvent pas d'explication satisfaisante dans la description classique.

Parmi ces expériences, l'examen de la loi de rayonnement du corps noir par PLANCK (1900) constitue le véritable point de départ de la mécanique quantique. Il amène ce dernier à quantifier les échanges d'énergie entre la lumière et les parois du corps noir. Reprenant ces idées, EINSTEIN (1905) met en avant la nature corpusculaire de la lumière que suggèrent les expériences de HERTZ sur l'effet photoélectrique (cf. 7.3.3 et 7.3.4) ; cette idée est renforcée par les conclusions de l'expérience mettant en évidence l'effet COMPTON (cf. 7.5.1).

Dualité onde-corpuscule.

Faut-il pour autant abandonner totalement la description ondulatoire de la lumière? L'expérience des trous d'YOUNG (voir le problème III du sujet 3.5.7) montre que non. Dans cette expérience, on peut voir se manifester l'aspect

ondulatoire (apparition d'interférences) mais aussi, et de façon indissociable, l'aspect corpusculaire (on peut voir l'impact des photons isolés qui peu à peu construisent la figure d'interférence finale). Cela amène à introduire la notion de dualité onde-corpuscule, selon laquelle la lumière est à la fois une onde et un flux de particules, l'onde permettant de calculer la probabilité pour qu'un corpuscule soit observé.

Dans sa thèse, DE BROGLIE généralise cette notion à toute particule en lui associant une onde de longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

où p est la quantité de mouvement de la particule en question. Étant donnée la petitesse de h ($h = 6.62 \cdot 10^{-34}$ Joule seconde), cette longueur d'onde devient ridiculement petite dans le cas d'un objet macroscopique, ce qui explique que la nature probabiliste des phénomènes disparaît à notre échelle.

Exemple : soit un grain de poussière de masse 10^{-15} kg et de diamètre un micromètre. Même pour une vitesse faible de l'ordre du millimètre par seconde, la longueur de DE BROGLIE est

$$\lambda \simeq \frac{6.6 \cdot 10^{-34}}{10^{-15} \cdot 10^{-3}} = 6.6 \cdot 10^{-16} \text{ mètre} \ll 10^{-6} \text{ mètre.}$$

Une telle longueur est complètement négligeable à l'échelle du grain de poussière.

Fonction d'onde

Par analogie avec la lumière, une particule doit désormais obéir à des lois probabilistes. On introduit ainsi la fonction d'onde $\psi(\vec{r}, t)$ associée à une particule et telle que le module carré de cette fonction soit égal à la densité de probabilité de présence de la particule au point \vec{r} , à l'instant t . En d'autres termes, la probabilité de trouver la particule à l'instant t dans le volume élémentaire dv centré au point \vec{r} est

$$dP(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2 dv.$$

La probabilité de trouver la particule quelque part dans l'espace étant égale à un, il s'ensuit la condition de normalisation de la fonction d'onde :

$$\int_{\text{espace}} |\psi|^2 dv = 1.$$

Signalons pour les cas importants des potentiels définis par morceaux que la fonction d'onde se doit d'être continue. C'est aussi le cas de sa dérivée pour des potentiels ne subissant pas de discontinuité infinie.

7.1.2 Formulation de la mécanique quantique.

Postulats.

- L'état de la particule (du système) à un instant t est entièrement déterminé par sa fonction d'onde $\psi(\vec{r}, t)$;

- les grandeurs physiques mesurables \mathcal{G} sont décrites par un opérateur G agissant sur ψ ;
- le résultat de la mesure de la grandeur \mathcal{G} ne peut être qu'une des valeurs propres de G , $\{g\}$;
- immédiatement après une mesure de résultat g , la fonction d'onde est égale à ψ_g où ψ_g est la fonction propre de G associée à la valeur propre g ;
- l'évolution dans le temps de la fonction d'onde ψ est donnée par l'équation de SCHRÖDINGER.

Équation de Schrödinger.

Cette équation fondamentale de la mécanique quantique s'écrit :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi,$$

où $H(t)$ est l'opérateur Hamiltonien du système et $\hbar = h/(2\pi)$. Dans le cas d'une particule de masse m dans un potentiel indépendant du temps, on a par analogie avec la mécanique classique :

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2m} + V(\vec{r}).$$

Cette fois-ci cependant, \vec{P} et V sont respectivement les opérateurs associés à la quantité de mouvement et au potentiel.

Exemples d'opérateurs, relations de Heisenberg.

La coordonnée r_α (x , y ou z) est associée, dans l'espace des opérateurs, au scalaire r_α ; il en est de même pour le potentiel $V(\vec{r})$ associé au scalaire $V(\vec{r})$. Les opérateurs associés à la quantité de mouvement et à l'énergie totale sont quant à eux

$$\begin{cases} p_\alpha & \longrightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \\ E_{\text{totale}} & \longrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}. \end{cases}$$

On peut en déduire que l'énergie cinétique est associée à l'opérateur laplacien $(-\hbar^2/2m)\Delta$. L'équation de SCHRÖDINGER se lit alors

$$E_{\text{totale}} = E_{\text{cin.}} + E_{\text{pot.}}$$

En mécanique quantique, la mesure n'est pas sans action sur le système (cf. le quatrième postulat) ; il apparaît qu'il n'est pas possible de mesurer simultanément et avec une égale précision deux grandeurs associées à des opérateurs ne commutant pas. L'exemple usuel de tels opérateurs est le couple (r_α, p_α) . Cette impossibilité se traduit pour ce couple par la relation dite de HEISENBERG :

$$\Delta r_\alpha \cdot \Delta p_\alpha \geq \hbar,$$

où $\Delta\beta$ est la précision de la mesure sur l'observable β . Il existe également une relation de HEISENBERG pour le couple (E_{totale}, t) :

$$\Delta t \cdot \Delta E_{\text{totale}} \geq \hbar.$$

Valeurs moyennes.

On a vu que le résultat d'une mesure était de nature probabiliste. Il est de ce fait nécessaire de définir la valeur moyenne d'une observable \mathcal{A} , d'opérateur A . Cette valeur moyenne est la moyenne des résultats de N mesures identiques, lorsque $N \rightarrow \infty$

$$\langle \mathcal{A} \rangle = \frac{\int \psi^* A \psi dv}{\int \psi^* \psi dv}.$$

7.1.3 Potentiels indépendants du temps.

Dans le cas où le potentiel V est indépendant du temps, il est possible de séparer les variables de temps et d'espace dans l'expression de la fonction d'onde. La recherche de $\psi(\vec{r}, t)$, associée à une énergie totale constante E , se ramène à la résolution des équations de SCHRÖDINGER :

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi + V(\vec{r}) \phi = E \phi \\ \psi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}) e^{-iEt/\hbar}. \end{cases}$$

Exemple 1 : Puits infini à une dimension.

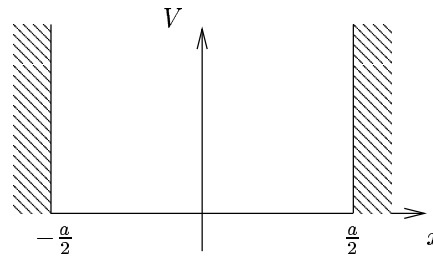


FIG. 7.1 - Schéma du puits de potentiel.

La résolution de ce problème, schématisé sur la figure 7.1 (le potentiel est nul pour $-a/2 \leq x \leq a/2$ et infini sinon) conduit aux résultats suivants (cf. 7.3.4) :

$$E = n^2 \frac{\hbar^2}{8ma^2},$$

avec n entier naturel supérieur ou égal à un. La composante spatiale de la

fonction d'onde associée à une énergie E est quant à elle donnée par

$$\begin{cases} \phi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{\pi n x}{a}\right), & \text{pour } n \text{ impair} \\ \phi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right), & \text{pour } n \text{ pair} \end{cases}$$

Il est important de noter sur cet exemple que l'énergie du système est quantifiée et qu'il existe une énergie minimale dite énergie de point zéro. Remarquons pour terminer que le nombre de noeuds de la fonction d'onde (annulation de celle-ci en dehors des extrémités) correspond au « numéro » (-1) du niveau d'énergie qu'elle représente ; cette propriété constitue d'ailleurs un résultat général pour les problèmes à une dimension.

Exemple 2 : Oscillateur harmonique à une dimension

L'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique classique est $E_{\text{pot}} = kx^2/2$. Le problème quantique stationnaire se réduit alors à la résolution de l'équation

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{kx^2}{2} \right) \phi = 0$$

en fonction de l'énergie E .

On appelle polynôme de HERMITE d'ordre n :

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n e^{-z^2}}{dz^n}.$$

Soit

$$\tilde{x} = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} x \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{pulsation propre de l'oscillateur.}$$

On peut montrer que les énergies et fonctions d'onde solutions de l'équation de SCHRÖDINGER stationnaire sont données par les formules :

$$\begin{cases} E_n &= \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) \\ \phi_n(x) &= A_n H_n(\tilde{x}) e^{-\tilde{x}^2/2}. \end{cases}$$

Dans les expressions ci-dessus, n est un entier positif ou nul, et A_n est la constante de normalisation de ϕ_n , choisie telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_n(x)|^2 dx = 1.$$

En particulier, on a pour le niveau fondamental :

$$\phi_0(x) = A_0 e^{-\tilde{x}^2/2} = \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \exp \left\{ -\frac{m\omega_0}{2\hbar} x^2 \right\}.$$

7.2 Rappels de cours de relativité restreinte

7.2.1 Émergence de la relativité restreinte.

Limitations de la description de Galilée.

Le principe de relativité de GALILÉE, qui donne les lois de transformation entre deux référentiels galiléens en translation, l'un par rapport à l'autre, à la vitesse $\vec{v} = v \vec{e}_x$ (voir la figure 7.2), se traduit par

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t. \end{cases}$$

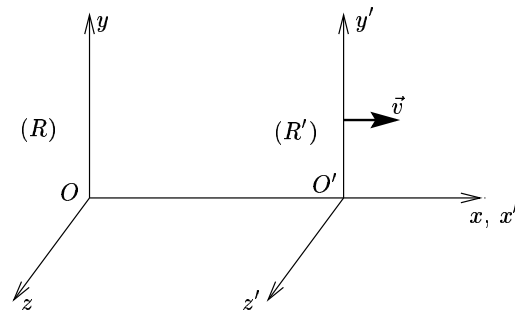


FIG. 7.2 - $\mathcal{R}' \equiv (O', x', y', z')$ est en translation à la vitesse \vec{v} par rapport à \mathcal{R} .

Cette transformation souffre de deux limitations. La première a été mise en évidence par les expériences de MICHELSON et MORLEY qui montrèrent à la fin du XIX^{ème} siècle que la vitesse de la lumière est identique dans tout repère galiléen, et donc ne se transforme pas suivant les lois précédentes.

L'autre limitation vient de la théorie de l'électromagnétisme. La relativité suppose que les lois physiques doivent être identiques dans tout repère galiléen; or, les équations de l'électromagnétisme ne sont pas invariantes par la transformation de GALILÉE.

De plus, en introduisant des énergies potentielles ne dépendant que de la position —et pas du temps t — la mécanique classique adopte une formulation qui suppose la transmission instantanée des interactions, ce qui est contraire à l'expérience. Il manque à cette formulation une vitesse limite de propagation des interactions, de l'information et de l'énergie.

Postulats de la nouvelle théorie.

Face à ces constatations, EINSTEIN (1905) pose les postulats d'une nouvelle relativité :

- l'espace est homogène et isotrope ;

- le temps est uniforme ;
- toutes les lois de la physique sont invariantes par changement de référentiel galiléen : une expérience d'électromagnétisme ou de mécanique ne permet pas de distinguer un repère galiléen d'un autre ;
- il existe une vitesse maximale de propagation des interactions ; cette vitesse est celle de la lumière et est invariante par changement de repère galiléen.

La relativité générale étend ces principes aux référentiels non galiléens.

7.2.2 Cinématique relativiste.

Intervalle espace-temps.

Soient deux événements (t_1, \vec{r}_1) et (t_2, \vec{r}_2) d'un repère \mathcal{R} . On appelle intervalle espace-temps ΔS entre ces deux événements la grandeur

$$(\Delta S)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2.$$

Considérons le cas particulier où ces deux événements sont associés à la propagation d'un photon (allant de \vec{r}_1 à \vec{r}_2). Comme celui-ci se déplace à la vitesse c , on a dans \mathcal{R}

$$\Delta S = 0.$$

Si l'on appelle (t'_1, \vec{r}'_1) , (t'_2, \vec{r}'_2) et $\Delta S'$ ces mêmes grandeurs mesurées cette fois dans un autre repère associé à un référentiel galiléen \mathcal{R}' , puisque la vitesse est toujours c

$$\Delta S' = 0.$$

Dans le cas général de deux événements quelconques, on montre aussi que *l'intervalle espace-temps ΔS est invariant par changement de référentiel galiléen.*

Transformation de Lorentz et transformation des vitesses.

L'ensemble des contraintes devant être vérifiées par la nouvelle loi de transformation, avec en premier lieu l'invariance de c ainsi que de l'intervalle espace-temps, font que l'unique loi possible est la transformation dite de LORENTZ :

$$\begin{cases} ct' = \gamma(v) [ct - \beta x] \\ x' = \gamma(v) [-\beta ct + x] \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \beta = \frac{v}{c} \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \end{cases}$$

où \mathcal{R}' est en translation par rapport à \mathcal{R} à la vitesse $\vec{v} = v \vec{e}_x$. La transformation de LORENTZ inverse s'obtient immédiatement en changeant v en $-v$ c'est-à-dire β en $-\beta$. On peut vérifier que dans la limite des faibles vitesses ($v \ll c$), la transformation de LORENTZ coïncide avec la transformation de GALILÉE.

Exemple : avec cette nouvelle loi, il est possible d'obtenir la formule relativiste de « composition des vitesses » :

$$v'_{\parallel} = \frac{v_{\parallel} - v}{1 - vv_{\parallel}/c^2}, \quad v'_{\perp} = \frac{v_{\perp}}{\gamma(1 - vv_{\parallel}/c^2)},$$

où v_{\parallel} désigne la composante de la vitesse suivant Ox et v_{\perp} la composante suivant y ou z (voir la partie III. du problème 3.5.6).

Dilatation du temps propre.

Soit un corps \mathcal{C} en mouvement, on appelle *temps propre de \mathcal{C}* , le temps mesuré par une horloge liée au corps \mathcal{C} (immobile par rapport à ce dernier).

Comment sont alors reliés l'intervalle élémentaire de temps propre dt_0 , mesuré dans le référentiel mobile \mathcal{R}' associé au corps \mathcal{C} et l'intervalle de temps impropre dt mesuré cette fois-ci dans le référentiel fixe \mathcal{R} ?

L'invariance de l'intervalle espace-temps nous donne

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \\ &= (ds')^2 \\ &= c^2(dt_0)^2. \end{aligned}$$

En remarquant que la vitesse entre les deux référentiels est précisément

$$v^2 = \frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{(dt)^2},$$

on obtient

$$dt_0 = \frac{dt}{\gamma}.$$

Il s'agit du phénomène annoncé de dilatation du temps propre ($dt > dt_0$, voir aussi exercice 7.4.3). Signalons qu'il est également possible de mettre en évidence un phénomène dit de contraction des longueurs (cf. 7.4.1 et 7.4.2).

Quadrivecteurs.

Un quadrivecteur $\tilde{A} = (A^0, A^1, A^2, A^3)$ est un ensemble de quatre composantes qui se transforment lors d'un changement de référentiel galiléen au moyen de la transformation de LORENTZ.

Le premier exemple d'une telle entité est le quadrivecteur espace-temps : $\tilde{X} = (ct, x, y, z)$.

Citons parmi les propriétés des quadrivecteurs le fait que leur « norme »

$$\|\tilde{A}\|^2 = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2$$

est invariante par transformation de LORENTZ. Il ne s'agit pas d'une norme au sens mathématique du terme puisqu'ici $\|\tilde{A}\|^2$ peut être négatif. On parle de « pseudo-norme ».

Exemple : on peut donner comme autres exemples de quadrivecteurs, les quadrivecteurs vitesse et accélération

$$\tilde{V} = (\gamma c, \gamma \vec{v}) \quad , \quad \tilde{\Gamma} = \left(\gamma c \frac{d\gamma}{dt}, \gamma \frac{d\gamma \vec{v}}{dt} \right)$$

et enfin le quadrivecteur d'onde $\tilde{K} = (\omega/c, \vec{k})$. La transformation de ce dernier quadrivecteur nous fournit le changement de fréquence associé au changement de référentiel — effet DOPPLER — ainsi que le changement de vecteur d'onde — aberration de la lumière (cf. 7.4.6).

7.2.3 Dynamique relativiste.

Principe fondamental de la dynamique du point.

Il s'énonce sous la forme usuelle

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f},$$

mais avec pour la quantité de mouvement $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$. Par ailleurs, on postule que la masse d'une particule est invariante par changement de référentiel galiléen.

Équivalence masse-énergie.

La généralisation relativiste de l'énergie a pour expression

$$E = \gamma m c^2.$$

En utilisant l'expression du facteur relativiste γ , ce résultat peut encore se mettre sous la forme

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4.$$

Signalons qu'il est possible de construire à partir de cela un quadrivecteur dit énergie-impulsion $\tilde{P} = (E/c, \vec{p})$.

L'énergie totale d'une particule est la somme de son énergie cinétique et d'une énergie appelée énergie de masse ; c'est cette énergie de masse d'expression $E_0 = mc^2$ qui donne l'équivalence masse-énergie. En utilisant ce qui précède, l'énergie cinétique s'écrit

$$E_{\text{cin.}} = mc^2(\gamma - 1).$$

Dans la limite $v \ll c$, on retrouve $E_{\text{cin.}} = mv^2/2$ (énergie cinétique en mécanique classique). Pour $v = 0$, on a $\gamma = 1$ d'où $E = E_0 = mc^2$: l'énergie de la particule se réduit à son énergie de masse.

Exemple : l'équivalence masse-énergie permet d'exprimer des masses en unité d'énergie $/c^2$. Ainsi, pour un électron

$$m_{\text{électron}} = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} = 5.1 \cdot 10^5 \text{ eV}/c^2 = 0.51 \text{ MeV}/c^2.$$

Chocs relativistes.

Lors d'un choc relativiste, mettant en jeu des interactions intenses, le nombre de particules et leur nature ne sont pas nécessairement conservés. Il convient de faire la distinction entre

- les chocs élastiques pour lesquels les particules sont identiques avant et après collision ;
- les chocs inélastiques pour lesquels elles ne le sont pas.

Comme en physique classique, les lois régissant les chocs sont des lois de conservation, de la quantité de mouvement et de l'énergie du système. Ces dernières peuvent être résumées sous forme condensée grâce au quadrivecteur énergie-impulsion :

$$\tilde{P} = \sum_{\text{particules } i} \tilde{P}_i \quad \text{est conservé lors du choc.}$$

Comme $E = E_{\text{cin.}} + mc^2$, la conservation de l'énergie implique, dans le cas particulier d'un choc élastique, la conservation de l'énergie cinétique. En revanche, $E_{\text{cin.}}$ ne se conserve pas lors d'un choc inélastique. On pourra se reporter à l'étude de l'effet COMPTON (cf. 7.5.1) pour un exemple de choc élastique et à l'exercice 7.4.4 pour un exemple de choc inélastique.

7.3 Exercices de mécanique quantique

7.3.1 États quasi-classiques de l'oscillateur harmonique

Université d'Angers

Extrait d'un problème constitué de quatre exercices totalement indépendants et qui se trouvent dans ce chapitre : il s'agit des exercices 7.3.2 (réflexion quantique et effet tunnel), 7.3.3 (effet photoélectrique) et 7.4.1 (phénomène de contraction des longueurs en relativité restreinte). La partie relative à la physique quantique (exercices 7.3.1, 7.3.2, 7.3.3) était notée sur 16 points et celle concernant la relativité sur 4. Le problème était à faire en 2h30.

Un système quantique a pour fonction d'onde :

$$\psi(x, t) = e^{-\alpha x^2/2} e^{-i\omega t}.$$

1. Calculer $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$.
2. Écrire l'équation de SCHRÖDINGER à une dimension. En écrivant que ψ en est une solution pour un potentiel $V(x)$, déterminer ce potentiel à une constante additive près.
Déterminer cette constante en choisissant $V(x) = 0$ en $x = 0$.

3. Donner l'expression de l'opérateur associé à la quantité de mouvement. On rappelle l'expression des valeurs moyennes d'un opérateur et de son carré :

$$\langle A \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x) A \psi(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x) \psi(x) dx} \quad \langle A^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} [A \psi(x)]^* A \psi(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x) \psi(x) dx}.$$

À partir de ce rappel, donner, dans le cas général d'une fonction d'onde quelconque, l'expression des valeurs moyennes suivantes : $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle p \rangle$ et $\langle p^2 \rangle$.

4. Dans le cas particulier envisagé ici, justifier que $\langle x \rangle = 0$ et $\langle p \rangle = 0$. Calculer $\langle x^2 \rangle$ et $\langle p^2 \rangle$. On donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{3/2}}.$$

5. Quelle est la valeur moyenne de l'énergie cinétique? (On se placera pour le calcul dans un cas non relativiste). Quelle est la valeur moyenne de l'énergie potentielle $\langle V(x) \rangle$?
6. L'expression de l'énergie potentielle obtenue au 2. et la comparaison entre les valeurs moyennes de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle vous rappellent-elles un système étudié en mécanique classique? Lequel?

Solution

$$\psi(x, t) = e^{-\alpha x^2/2} e^{-i\omega t}.$$

1. Les deux dérivées partielles demandées s'obtiennent directement à partir de l'expression ci-dessus de la fonction d'onde ψ

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\alpha x e^{-\alpha x^2/2} e^{-i\omega t}$$

et

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = (\alpha^2 x^2 - \alpha) e^{-\alpha x^2/2} e^{-i\omega t}.$$

2. L'équation de SCHRÖDINGER dépendant du temps s'écrit à une dimension

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V \psi = i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

La dérivation temporelle est immédiate, et on utilise le résultat de la question précédente pour la dérivée spatiale. On a alors

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}(\alpha^2 x^2 - \alpha) + V \right] e^{-\alpha x^2/2} e^{-i\omega t} = (i\hbar)(-i\omega) e^{-\alpha x^2/2} e^{-i\omega t}$$

qui nous permet finalement d'exprimer le potentiel V à une constante près sur la référence d'énergie (il suffit de changer ω , c'est-à-dire l'énergie de la particule pour l'absorber)

$$V(x) = \hbar\omega + \frac{\hbar^2}{2m}(\alpha^2 x^2 - \alpha) + C^{\text{te}}$$

Si l'on prend, comme le propose l'énoncé, une référence telle que $V = 0$ pour $x = 0$, on est amené à choisir la constante telle qu'elle compense les autres termes indépendants de x de l'expression précédente, et le potentiel s'écrit

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2 x^2.$$

3. L'opérateur de quantité de mouvement est défini à une dimension par

$$P = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}.$$

L'expression des valeurs moyennes de X et de X^2 ne pose pas de problème puisque l'action de ces deux grandeurs sur ψ se réduit à la multiplication par un scalaire. Il suffit donc de faire sans précaution particulière $A = X$ dans les formules rappelées par l'énoncé. Rappelons par contre les expressions générales pour l'opérateur quantité de mouvement :

$$\langle P \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x) \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} (\psi(x)) \right] dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x) \psi(x) dx},$$

et

$$\langle P^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x) \left[-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\psi(x)) \right] dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x) \psi(x) dx}.$$

4. Calculons en premier lieu la norme de la fonction d'onde ψ :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi \psi^* dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Pour les opérateurs X et P , la nullité de la valeur moyenne s'obtient sans calcul au moyen de considérations de symétrie. En effet, ils sont tous deux des opérateurs impairs en la variable d'espace x , c'est-à-dire qu'ils sont transformés en leurs opposés par le changement $x \rightarrow -x$. Sans aller plus loin dans les raisonnements de symétrie remarquons alors que pour prendre la valeur moyenne de ces opérateurs, on est amené à calculer l'intégrale sur un domaine symétrique par rapport à 0, d'une fonction impaire ; cette intégrale est donc nulle.

$$\boxed{\langle X \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle P \rangle = 0} \quad \text{au vu de considérations de symétrie.}$$

Pour les deux autres, en revanche, il faut calculer explicitement les intégrales en se servant des formules données par le texte. Cela conduit à

$$\begin{aligned} \langle X^2 \rangle &= \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx \\ &= \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

qui nous donne donc :

$$\boxed{\langle X^2 \rangle = \frac{1}{2\alpha}}$$

Pour l'opérateur P^2 , on procède de la même manière en partant de l'expression générale de la question précédente, et en utilisant pour la dérivée spatiale la réponse à la toute première question

$$\begin{aligned} \langle P^2 \rangle &= \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} -\hbar^2 e^{-\alpha x^2/2} \cdot (\alpha^2 x^2 - \alpha) e^{-\alpha x^2/2} dx \\ &= -\hbar^2 \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \left(-\alpha \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} + \alpha^2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot \frac{1}{\alpha} \right), \end{aligned}$$

qui en regroupant les différents termes donne :

$$\boxed{\langle P^2 \rangle = \frac{\alpha \hbar^2}{2}}$$

5. La moyenne de l'énergie cinétique se définit dans le cas non relativiste par :

$$\langle E_c \rangle = \frac{\langle P^2 \rangle}{2m},$$

ce qui conduit, grâce aux résultats de la question précédente, à

$$\boxed{\langle E_c \rangle = \frac{\alpha \hbar^2}{4m}}$$

La moyenne de l'énergie potentielle quant à elle s'écrit

$$\langle V(x) \rangle = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \alpha^2 \cdot \langle X^2 \rangle$$

soit encore

$$\boxed{\langle V(x) \rangle = \frac{\alpha \hbar^2}{4m}}$$

6. Remarquons que $\langle E_C \rangle = \langle V \rangle$. Un système dans lequel il y a équipartition entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique fait penser à l'oscillateur harmonique de la mécanique classique. Considérons en effet une particule ponctuelle de masse m accrochée à un ressort de raideur k , et astreinte à se déplacer sur une ligne. L'équation qui régit l'évolution de l'étirement du ressort c'est-à-dire la position x de la particule sur la ligne est :

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

où $\omega_0^2 = k/m$ est la pulsation propre des oscillations. On peut alors montrer que :

$$\langle \dot{x}^2 \rangle = \omega_0^2 \langle x^2 \rangle$$

(cela constitue un bon exercice ; indication : intégrer une fois par parties). En d'autres termes :

$$\langle E_C \rangle = \left\langle \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} k x^2 \right\rangle = \langle V \rangle.$$

Les valeurs moyennes trouvées précédemment sont donc identiques en tout point à celles que l'on aurait obtenues avec une particule classique dans un potentiel V harmonique, de pulsation propre $\omega_0 = \alpha \hbar/m$.

Les états quantiques que nous avons considérés dans cet exercice sont, pour cette raison, appelés les états quasi-classiques de l'oscillateur harmonique.

Intermède calculatoire : l'énoncé donne les valeurs des deux intégrales :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{3/2}}.$$

Toutefois, une seule suffit. Voici un moyen pour retrouver le lien entre ces deux grandeurs. On peut montrer que la dérivation sous le signe intégrale est dans ce cas licite, soit

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} e^{-\alpha x^2} dx \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx. \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{3/2}}.$$

Il vient alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{3/2}}.$$

De même, on aurait :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{3}{4} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{5/2}}, \quad \text{etc.} \dots$$

On peut vérifier « l'homogénéité » de ces formules. Prenons l'exemple de la dernière. Si x est homogène à une longueur, α est homogène à l'inverse d'une longueur au carré. Les membres de droite et de gauche sont tous deux homogènes à une longueur à la puissance 5...

7.3.2 Réflexion quantique et effet tunnel

Université d'Angers

Extrait d'un problème constitué de quatre exercices totalement indépendants et qui se trouvent dans ce chapitre: il s'agit des exercices 7.3.1, 7.3.3 et 7.4.1. Le problème était à faire en 2h30.

Nous nous proposons d'étudier le comportement de particules d'énergie E soumises au potentiel défini comme suit :

$$\begin{cases} V(x) = 0 & \text{pour } x < 0, \text{ Région I} \\ V(x) = V_0 & \text{pour } x \geq 0, \text{ Région II} \end{cases} \quad (V_0 > 0).$$

Nous étudierons successivement les deux cas d'énergie: $E > V_0$ et $E < V_0$.

1. Cas $E > V_0$

- a) Écrire l'équation aux valeurs propres dont sont solutions les fonctions d'onde correspondant aux états stationnaires des particules. On donnera son expression pour chacune des régions définies ci-dessus. En déduire les expressions de ϕ_I et ϕ_{II} , fonctions d'onde dans chacune des régions.
- b) Nous nous intéressons à des particules provenant initialement exclusivement des x négatifs. Afin de tenir compte de cette condition, laquelle des deux fonctions ϕ_I ou ϕ_{II} peut se simplifier et de quelle manière? On justifiera cette simplification en donnant la signification physique de chacun des termes intervenant dans l'expression des deux fonctions d'onde.

- c) Écrire les conditions de raccordement des fonctions en $x = 0$. Donner l'expression du rapport du nombre de particules présentes dans la région II sur le nombre de particules initiales. Que sont devenues les particules initiales non présentes dans la région II?
 Quel phénomène physique traduit-il en $x = 0$, où le potentiel est discontinu, qui n'a pas d'équivalent en mécanique classique?

2. Cas $E < V_0$

- a) Écrire l'équation aux valeurs propres dont sont solutions les fonctions d'onde correspondant aux états stationnaires des particules. On donnera son expression pour chacune des régions définies ci-dessus.
 En déduire les expressions de ϕ_I et ϕ_{II} , fonctions d'onde dans chacune des régions.
- b) Nous nous intéressons à des particules provenant initialement exclusivement des x négatifs.
 Laquelle des fonctions d'onde peut se simplifier et de quelle manière? On justifiera cette simplification en donnant la signification physique de chacun des termes intervenant dans l'expression des deux fonctions d'onde.
 Quel phénomène apparaît en $x = 0$, où le potentiel est discontinu, qui n'a pas d'équivalent pour des particules en mécanique classique?
- c) En restant dans le cas $E < V_0$, expliquer qualitativement ce qui se passerait si le potentiel était le suivant :

$$\begin{cases} V(x) = 0 & \text{pour } x < 0, \text{ Région I} \\ V(x) = V_0 & \text{pour } 0 \leq x \leq L, \text{ Région II} \\ V(x) = 0 & \text{pour } x > L, \text{ Région III.} \end{cases} \quad (V_0 > 0)$$

EXERCICES

Solution

Cas $E > V_0$

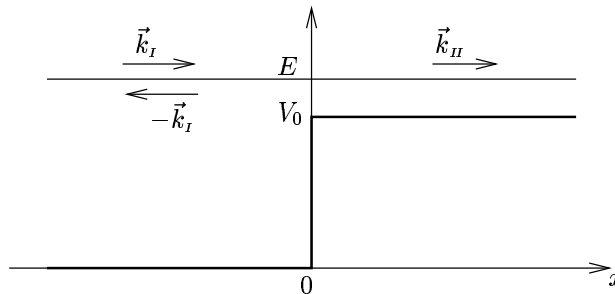


FIG. 7.3 - Schéma de la marche et des particules pour $E > V_0$

1.a) Dans les régions I et II, l'équation aux valeurs propres vérifiée par la fonction d'onde stationnaire est :

$$\begin{cases} \frac{d^2 \phi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \phi & x < 0 \\ \frac{d^2 \phi}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0) \phi & x \geq 0. \end{cases}$$

On pose alors les grandeurs suivantes :

$$k_I = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad \text{et} \quad k_{II} = \sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}}.$$

Les deux équations pour ϕ_I et ϕ_{II} se résolvent immédiatement en utilisant ces nouvelles variables, et nous conduisent aux solutions

$$\begin{cases} \phi_I(x) = Ae^{ik_I x} + Be^{-ik_I x} \\ \phi_{II}(x) = Ce^{ik_{II} x} + De^{-ik_{II} x} \end{cases}.$$

1.b) Pour chacune des fonctions d'onde, le premier des deux termes correspond à une onde se propageant dans le sens des $x > 0$, alors que le second correspond à une propagation dans la direction opposée.

Toutes les particules provenant initialement de la région I, celles présentes dans la région II ne peuvent s'y propager que dans le sens des $x > 0$. En effet une propagation en sens opposé supposerait que les particules ont été réfléchies sur un obstacle quelconque ; obstacle qui n'existe pas dans la région II.

On traduit cette condition en annulant le terme propagatif dans la mauvaise direction, ce qui nous fournit comme condition

$$\boxed{D = 0}.$$

1.c) Les conditions de raccordement de la fonction d'onde en $x = 0$, où le potentiel subit une discontinuité finie, imposent que la fonction d'onde et sa dérivée première soient continues en ce point

$$\begin{cases} \phi_I|_{x=0} = \phi_{II}|_{x=0} \\ \phi'_I|_{x=0} = \phi'_{II}|_{x=0}. \end{cases}$$

Utilisant les équations de a), et la condition de b), ces deux conditions se traduisent mathématiquement par le système

$$\begin{aligned} \begin{cases} A + B = C \\ Ak_I - Bk_I = Ck_{II} \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = C \\ Ak_I - Bk_I = (A + B)k_{II} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} C = A + B \\ B = \frac{k_I - k_{II}}{k_I + k_{II}} A \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} C = \frac{2k_I}{k_I + k_{II}} A \\ B = \frac{k_I - k_{II}}{k_I + k_{II}} A \end{cases} \end{aligned}$$

On définit alors le coefficient de réflexion R au moyen de la formule

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2$$

ce qui nous donne en utilisant les résultats précédents que

$$R = \left(\frac{k_I - k_{II}}{k_I + k_{II}} \right)^2.$$

Ce coefficient R est le quotient du nombre de particules réfléchies par la barrière sur le nombre de particules initiales. Le coefficient de transmission T se déduit par la conservation du nombre de particules, qui s'exprime au moyen de

$$T + R = 1 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{4k_I k_{II}}{(k_I + k_{II})^2}.$$

T est le rapport entre le nombre de particules transmises (*i.e.* présentes dans la région II), sur le nombre de particules incidentes. On voit que comme $T \neq 1$ (ou ce qui est équivalent $R \neq 0$), l'ensemble des particules ne franchit pas la marche de potentiel, et ce bien que leur énergie soit supérieure à celle-ci. Il y a réflexion d'une partie des particules incidentes au niveau de la discontinuité. Ce phénomène de réflexion n'a pas d'analogue en mécanique classique.

Remarque : les ondes planes considérées précédemment ont, comme toutes les ondes planes, des normes infinies (l'intégrale de leur norme au carré diverge). Cela n'a rien de physique et rend leur maniement parfois délicat. Pour retrouver des fonctions d'onde de carré sommable (*i.e.* dont la norme n'est pas infinie), il faudrait considérer des paquets d'ondes, c'est-à-dire la superposition d'un grand nombre d'ondes planes de vecteurs d'onde différents. En revanche, la densité locale de particules associée à une onde plane est bien définie (dans le cas de ϕ_{II} , cette densité vaut $|C|^2$, ce qui explique que R et T font intervenir des rapports de carrés).

Dans ce qui précède, pour calculer le coefficient de transmission, il serait tentant d'écrire :

$$T = \left| \frac{C}{A} \right|^2,$$

ce qui serait faux puisque les ondes ne se propagent pas à la même vitesse dans I et dans II) (on retrouve le même type de problème en électromagnétisme, voir les rappels de cours 3.2). Il faut passer par $R = B^2/A^2$ et calculer ensuite T par la relation de conservation de la matière $R + T = 1$.

Cas $E < V_0$

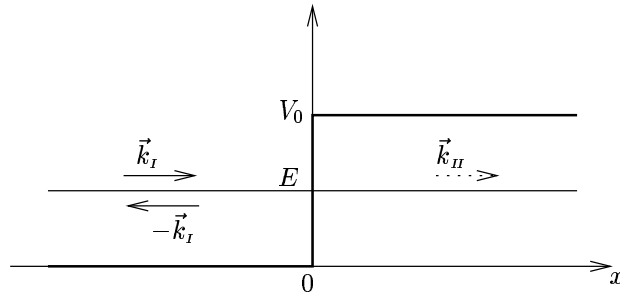


FIG. 7.4 - Schéma de la marche et des particules pour $E < V_0$

2.a) Les équations aux valeurs propres vérifiées par la fonction d'onde dans chacune des régions sont identiques, mais du fait que $(E - V_0) < 0$, on est cette fois amené à définir les deux grandeurs

$$k_I = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad \text{et} \quad k_{II} = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}.$$

La résolution se fait alors sans difficulté, à la différence près que maintenant, on voit apparaître des exponentielles réelles dans la région II. Tout ceci se traduit au niveau de l'expression analytique des fonctions d'onde par les formules

$$\begin{cases} \phi_I(x) = Ae^{ik_I x} + Be^{-ik_I x} \\ \phi_{II}(x) = Ce^{k_{II} x} + De^{-k_{II} x} \end{cases}.$$

2.b) Les particules provenant initialement de la région I, et faisant progressivement leur apparition dans la région II, la fonction d'onde dans cette seconde région doit nécessairement s'annuler en $x \rightarrow +\infty$. En effet, on rappelle que le module carré de cette dernière représente la densité de probabilité de trouver une particule au point considéré, et pour les raisons énoncées ci-avant, cette probabilité est nulle en l'infini. Cela se traduit au niveau des coefficients introduits auparavant par la simplification

$$\boxed{C = 0}.$$

Si le coefficient C est nul, D ne l'est pas, ce qui signifie que la région II est le siège d'une fonction d'onde évanescente, c'est-à-dire dont l'amplitude diminue exponentiellement avec la coordonnée spatiale x . Si l'on poursuit l'analogie avec l'électromagnétisme, on voit que l'on a une profondeur de pénétration $\delta = 1/k_{II}$, ou autrement dit, bien que l'énergie des particules incidentes soit inférieure à la hauteur du potentiel, il existe une probabilité non nulle de les trouver dans la région II, et ce principalement sur une distance δ . Ce phénomène est sans équivalent en mécanique classique.

2.c) Appliquons ces dernières considérations à la nouvelle configuration schématisée par la figure suivante, et dans laquelle on a remplacé la marche infinie de potentiel par une simple barrière de largeur L .

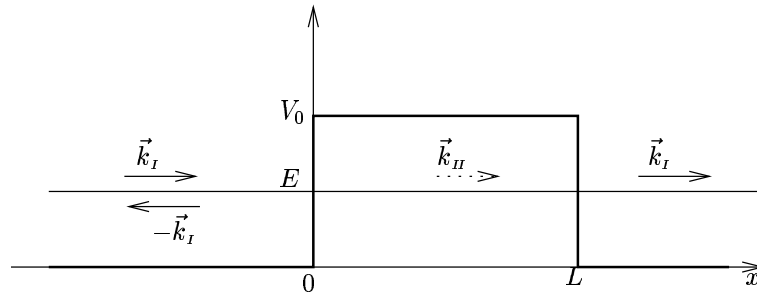


FIG. 7.5 - Schéma de la marche et des particules pour $E < V_0$

Si l'on utilise les éléments mis à jour lors de la question précédente on peut faire une description du phénomène de la manière suivante : un flux de particules arrive de la région I et se heurte à la barrière de potentiel en $x = 0$. Contrairement à la mécanique classique, bien que cette barrière soit supérieure à l'énergie des particules, seule une partie de ces dernières est réfléchié alors que l'autre pénètre dans la région II, cette intrusion se faisant sur une distance de l'ordre de δ . Si la largeur de la barrière L est elle même du même ordre de grandeur, il existe une probabilité finie (non nulle) pour qu'un certain nombre de ces particules atteignent la région III où elles pourront de nouveau se propager librement : *c'est l'effet tunnel*. Si l'on envoie des particules quantiques sur un mur, et si celui-ci est suffisamment fin, certaines d'entre elles seront à même de le traverser. Ce phénomène est effectivement observé et utilisé notamment en électronique à l'intérieur de certains diodes ou dans le microscope à effet tunnel.

EXERCICES

7.3.3 Effet photoélectrique

Université d'Angers

Extrait d'un problème constitué de quatre exercices totalement indépendants et qui se trouvent dans ce chapitre : il s'agit des exercices 7.3.1, 7.3.2 et 7.4.1. Le problème était à faire en 2h30.

L'étude de l'effet photoélectrique du Tungstène et du Baryum a conduit aux valeurs suivantes pour le travail d'extraction :

$$W_T = 4,52 \text{ eV} \quad W_{Ba} = 2,50 \text{ eV}.$$

1. Quelles sont les longueurs d'onde maximales donnant une émission électronique avec chacun de ces matériaux? (Justifier physiquement les formules employées).
2. À quel potentiel (justifier le signe) par rapport à l'anode doivent être les photocathodes de Tungstène et de Baryum pour supprimer le photocourant? (Justifier physiquement les formules employées).

Solution

1. L'énergie incidente minimale pour extraire des électrons est par définition le travail d'extraction du matériau. Une émission électronique ne peut avoir lieu que si l'énergie des photons incidents est supérieure à ce travail ce qui nous donne l'inégalité

$$h\nu > W \quad \Leftrightarrow \quad \frac{hc}{\lambda} > W.$$

On obtient ainsi la longueur d'onde maximale des photons incidents en fonction du travail d'extraction associé au métal

$$\lambda_{max} = \frac{hc}{W}.$$

Application Numérique :

$$\lambda_{max}(\text{Baryum}) = 496 \text{ nm} \quad \text{et} \quad \lambda_{max}(\text{Tungstène}) = 274 \text{ nm}.$$

2. Au niveau de la photocathode, des électrons sont éjectés grâce à l'énergie communiquée par les photons incidents.

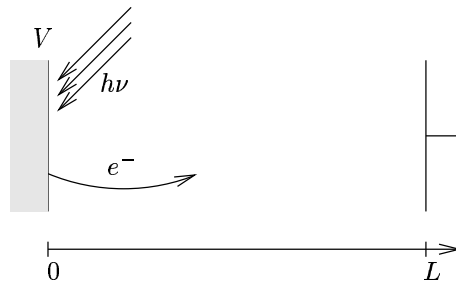


FIG. 7.6 - Schéma du système anode-photocathode

L'énergie cinétique animant les électrons à la sortie du métal est égale à l'énergie que leur a apporté le photon, diminuée de ce qui a déjà été utilisé pour sortir du métal soit

$$E_c = h\nu - W.$$

Si l'on veut éviter que ces électrons atteignent alors l'anode, il faut faire en sorte que le champ électrique régnant entre l'anode et la cathode les ramène vers la photocathode. Ceci implique que la photocathode soit portée à un potentiel V positif.

Pour déterminer la valeur limite du potentiel au delà de laquelle plus aucun électron n'atteint l'anode (et pour laquelle le photocourant est nul), appliquons le théorème de l'énergie cinétique à un électron

$$\Delta_{0 \rightarrow L} Ec = -eV.$$

Le photocourant s'annulant lorsque l'énergie cinétique des électrons en L devient nulle, on a, en utilisant l'expression de l'énergie cinétique des électrons à leur sortie du métal :

$$V \geq \frac{h\nu - W}{e}.$$

7.3.4 Puits de potentiel constant

*Université Paul SABATIER, Toulouse
Durée 1 h*

Question de cours :

1. Effet photoélectrique : faits expérimentaux et explication après EINSTEIN.
2. Hamiltonien et spectre d'énergie: oscillateur harmonique.

Problème :

Dans la direction Ox l'énergie potentielle $U(x)$ des électrons de conduction peut être modélisée par la fonction suivante :

$$\begin{cases} U(x) = +\infty & \text{pour } x \leq 0 & \text{(région I)} \\ U(x) = 0 & \text{pour } 0 < x < L & \text{(région II)} \\ U(x) = U_0 > 0 & \text{pour } x > L & \text{(région III)} \end{cases}$$

1. Exprimer le Hamiltonien à partir de l'énergie en mécanique classique.
2. Supposons que l'énergie E vérifie $E > U_0$, le flux de particules venant de $x \rightarrow +\infty$.
 - a) Trouver la nature des solutions dans les régions I, II et III.
 - b) Établir l'expression pour l'amplitude r de réflexion.
 - c) Établir le facteur R de réflexion en intensité.
 - d) Calculer R explicitement.

3. Supposons désormais que l'énergie soit telle que $E < U_0$.
- Trouver la nature des solutions dans les régions I, II et III.
 - Établir la relation qui détermine la quantification de l'énergie.
 - Calculer le spectre $\{E_n\}$ pour $U_0 = +\infty$ en utilisant le résultat obtenu en 3.b).

Solution

Question de cours :

1. C'est l'une des expériences fondamentales qui est à l'origine de l'émergence de la mécanique quantique. Elle a contribué à attribuer une nature corpusculaire à la lumière, dans laquelle chaque grain de lumière appelé photon est porteur d'un quantum $h\nu$ d'énergie.

Description de l'expérience : celle-ci est due à HERTZ dans les années 1886 – 1887, mais c'est EINSTEIN qui en la réexaminant quelques années plus tard proposera de l'interpréter en termes corpusculaires. Comment se manifeste cet effet photoélectrique ?

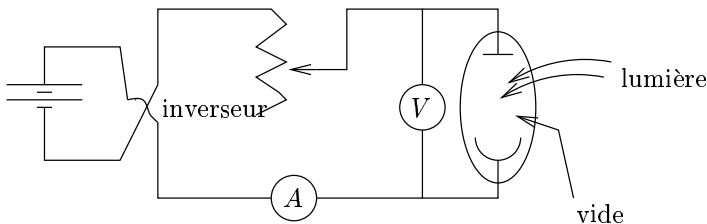


FIG. 7.7 - *Dispositif expérimental.*

On observe dans les conditions de la figure 7.7 que :

- en l'absence de lumière, aucun courant ne passe dans le circuit (qui est ouvert au niveau de l'électrode) ;
- en présence de lumière, on peut voir passer un courant qui cesse lorsque l'éclairage cesse ;
- il existe une fréquence seuil pour la lumière incidente, en deçà de laquelle aucun courant ne passe et ce quelle que soit l'intensité lumineuse, et au delà de laquelle il faut mettre une tension négative à la plaque pour stopper le courant ;
- enfin, plus la fréquence de la lumière augmente (au dessus du seuil), plus la contre tension qui annule le courant doit être forte.

Interprétation : elle est due à EINSTEIN en 1905 qui introduisit alors la notion de photon, chaque photon transportant une énergie $E = h\nu$.

Pour arracher un électron, il faut que le photon fournisse un travail W correspondant à l'énergie potentielle d'extraction, caractéristique du métal constitutif de la cathode ; W est nommé travail d'extraction. L'électron est alors émis dans le vide avec une énergie cinétique donnée par la conservation de l'énergie :

$$h\nu = W + \frac{1}{2}mv^2,$$

d'où l'existence d'une fréquence seuil donnée par $h\nu_0 = W$. En deçà de cette fréquence, le photon n'a pas assez d'énergie pour extraire un électron du métal. On peut alors réécrire l'énergie cinétique comme

$$\frac{1}{2}mv^2 = h(\nu - \nu_0),$$

ce qui donne un courant I ainsi qu'une contre tension U proportionnels à $\nu - \nu_0$.

Remarques : ici les photons « travaillent » individuellement. L'extraction d'un électron est le fait d'un seul photon. Cela n'est plus vrai dès que l'intensité lumineuse dépasse un certain seuil et dans le cas de lasers de forte puissance, on observe le couplage de plusieurs photons pour extraire l'électron du métal ce qui donne comme loi

$$Nh\nu = W + \frac{1}{2}mv^2,$$

où N est le nombre de photons couplés.

Si cette expérience introduit la notion de photon, elle porte la trace de la dualité onde corpuscule pour la lumière, puisque les effets ondulatoires restent visibles au travers de la polarisation : l'effet photoélectrique disparaît si le champ électrique est polarisé perpendiculairement au plan d'incidence.

2. Le Hamiltonien d'un oscillateur harmonique s'exprime sous la forme

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2,$$

où P est l'opérateur quantité de mouvement, X l'opérateur position, m la masse de la particule et ω la pulsation propre de l'oscillateur.

Le spectre d'énergie associé à un tel Hamiltonien est discret ; l'énergie est quantifiée et les niveaux équidistants. Leur énergie est donnée par la formule

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

On peut remarquer que le système ne peut avoir une énergie nulle : contrairement à la limite classique, il existe ici une énergie minimale $\hbar\omega/2$.

Problème :

1. Par analogie avec l'expression de l'énergie en mécanique classique, qui vaut $E = E_{\text{cin.}} + E_{\text{pot.}}$, on écrit le Hamiltonien de l'électron dans le potentiel U :

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + U(x),$$

où p_x désigne l'opérateur quantité de mouvement sur l'axe x et a pour expression $p_x = -i\hbar\partial/\partial x$.

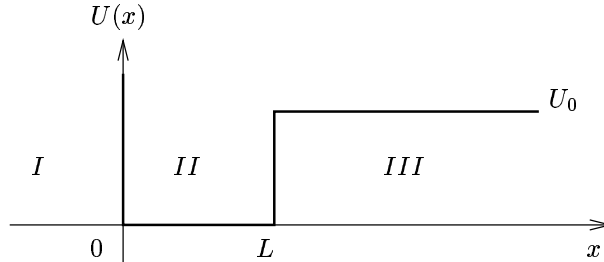


FIG. 7.8 - Représentation de l'énergie potentielle.

Le potentiel est défini sur trois domaines, domaines qu'il convient de distinguer pour obtenir la valeur finale du Hamiltonien. On se réfère à la figure 7.8 pour écrire :

$$\left\{ \begin{array}{ll} H = +\infty & \text{pour } x \leq 0 \quad (\text{région I}) \\ H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \text{pour } 0 < x < L \quad (\text{région II}) \\ H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U_0 & \text{pour } x > L \quad (\text{région III}). \end{array} \right.$$

Si l'on appelle φ la fonction d'onde stationnaire associée à une énergie E , φ vérifie l'équation de SCHRÖDINGER des états stationnaires :

$$H\varphi = E\varphi.$$

2.a) On se place dans l'hypothèse où $E > U_0$. Dans ce cas, on définit les grandeurs suivantes :

$$k_{II}^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad \text{et} \quad k_{III}^2 = \frac{2m(E - U_0)}{\hbar^2}.$$

Si l'on appelle φ_α la restriction à la région α de la fonction d'onde totale φ , on aboutit au système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_I = 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi_{II}}{\partial x^2} = -k_{II}^2 \varphi_{II} \\ \frac{\partial^2 \varphi_{III}}{\partial x^2} = -k_{III}^2 \varphi_{III}. \end{array} \right.$$

En raison de la valeur infinie prise par le potentiel dans la région I, l'électron possède une probabilité nulle de s'y trouver, ce qui a été traduit dans le système précédent par

$$\boxed{\varphi_I(x) = 0}.$$

Les solutions des équations pour les régions II et III sont de la forme

$$\begin{cases} \varphi_{II}(x) = A e^{ik_{II}x} + B e^{-ik_{II}x} \\ \varphi_{III}(x) = C e^{ik_{III}x} + D e^{-ik_{III}x}. \end{cases}$$

2.b) À la question précédente, on a trouvé indépendamment les expressions des restrictions de la fonction d'onde aux différents domaines ; les conditions de raccordement vont lier entre-elles les différentes constantes introduites.

Ainsi à l'origine, φ doit être continue, alors qu'en L , puisque la discontinuité est finie, elle doit être continûment dérivable (de classe \mathcal{C}_1). Ces contraintes se traduisent par

$$\begin{cases} \varphi_{II}(0) = \varphi_I(0) & (a) \\ \varphi_{II}(L) = \varphi_{III}(L) & (b) \\ \varphi'_{II}(L) = \varphi'_{III}(L) & (c) \end{cases}$$

De l'équation (a), on déduit pour la région II que

$$\varphi_{II}(x) = K \sin(k_{II}x),$$

où K est une constante proportionnelle à A ($K = 2iA$). Les relations (b) et (c) deviennent alors

$$\begin{cases} K \sin(k_{II}L) = C e^{ik_{III}L} + D e^{-ik_{III}L} \\ k_{II}K \cos(k_{II}L) = ik_{III}(C e^{ik_{III}L} - D e^{-ik_{III}L}). \end{cases}$$

Si l'on remarque de plus que le terme d'amplitude D correspond à une propagation dans le sens des x négatifs et que le terme d'amplitude C , lui, est associé à une propagation en sens opposé, on déduit que le coefficient de réflexion en amplitude (r) est défini par :

$$r = \frac{C}{D}.$$

En faisant le quotient des conditions de raccordement en L

$$i\alpha = \frac{r e^{ik_{III}L} + e^{-ik_{III}L}}{r e^{ik_{III}L} - e^{-ik_{III}L}},$$

avec

$$\alpha = \frac{k_{III}}{k_{II}} \tan(k_{II}L).$$

En définitive :

$$r = -\frac{1 + i\alpha}{1 - i\alpha} e^{-2ik_{III}L}.$$

2.c) Ce que l'on appelle coefficient de réflexion en intensité, par analogie avec l'optique ondulatoire, correspond ici au coefficient de réflexion en nombre de particules. Le carré de la fonction d'onde étant associé à la probabilité de présence d'une particule, on obtient pour R (voir aussi l'exercice 7.3.2) :

$$R = |r|^2.$$

2.d) En utilisant l'expression de 2.c), conjointement à celle trouvée au 2.b), on obtient

$$R = rr^* \\ = \frac{1 + i\alpha}{1 - i\alpha} \frac{1 - i\alpha}{1 + i\alpha},$$

soit finalement

$$\boxed{R = 1}.$$

Comme le mur situé en $x = 0$ est infranchissable, toutes les particules sont réfléchies.

3.a) L'énergie E des particules est maintenant prise inférieure à la hauteur du potentiel U_0 . On pose

$$\alpha_{III}^2 = \frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}.$$

Dans ces conditions, les équations régissant les régions I et II restent inchangées tandis que celle qui est relative à la région III s'écrit

$$\frac{\partial^2 \varphi_{III}}{\partial x^2} = \alpha_{III}^2 \varphi_{III}.$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \varphi_I = 0 \\ \varphi_{II} = A e^{ik_{II}x} + B e^{-ik_{II}x} \\ \varphi_{III} = C e^{\alpha_{III}x} + D e^{-\alpha_{III}x}. \end{cases}$$

3.b) Comme à la question 2.b), la condition de raccord à l'origine donne

$$\varphi_{II}(x) = K \sin(k_{II}x).$$

Si C est non nul, le module carré de la fonction d'onde diverge pour $x \rightarrow \infty$. Cette divergence de la densité volumique de particules est inacceptable, d'où :

$$C = 0.$$

Ainsi, les équations (b) et (c) énoncées en 2.b) et traduisant les conditions de raccord en L s'écrivent

$$\begin{cases} K \sin(k_{II}L) = D e^{-\alpha_{III}L} \\ k_{II}K \cos(k_{II}L) = -\alpha_{III}D e^{-\alpha_{III}L}. \end{cases}$$

Pour que ce système homogène de deux équations à deux inconnues (K, D) admette une autre solution que la solution triviale $(0, 0)$, qui correspond à une fonction d'onde partout nulle, il faut que ces deux équations soient liées. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que le déterminant du système soit nul :

$$\boxed{\tan(k_{II}L) = -\frac{k_{II}}{\alpha_{III}}}.$$

Si l'on se reporte aux relations définissant k_H et α_{III} , les grandeurs L , m et \hbar étant des constantes fixées, cette dernière formule constitue une équation qui quantifie E ; l'énergie de la particule ne peut prendre que des valeurs discrètes, solutions de cette équation.

3.c) On se place dans le cas où la marche de potentiel U_0 est infinie, ce qui revient à considérer un puits infini de largeur L .

D'après son expression, α_{III} devient lui aussi infini dans cette limite et l'équation de quantification de l'énergie s'écrit maintenant :

$$\tan(k_H L) = 0.$$

Les solutions vérifient

$$k_H L = n\pi \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} L = n\pi$$

On retrouve bien l'expression des niveaux d'énergie du puits infini unidimensionnel :

$$E_n = n^2 \frac{\hbar^2}{8mL^2}.$$

Outre la discrétisation des niveaux qui apparaît explicitement au travers de la dépendance en l'entier n , on peut remarquer que l'écart entre les niveaux ainsi que l'énergie de point 0 —l'énergie du fondamental, associée à $n = 1$ — croissent lorsque L diminue; c'est l'illustration de ce que le caractère quantique d'un phénomène est d'autant plus marqué que les tailles mises en jeu sont petites.

7.4 Exercices de relativité restreinte

7.4.1 Contraction des longueurs en relativité restreinte

Université d'Angers

Extrait d'un problème constitué de quatre exercices totalement indépendants et qui se trouvent dans ce chapitre: il s'agit des exercices 7.3.1, 7.3.2 et 7.3.3. Le problème était à faire en 2h30.

Un camion de longueur L est arrêté sur une route plane, inclinée de l'angle θ par rapport à l'horizontale Ox . Pour un observateur animé d'un mouvement de translation uniforme parallèlement à Ox , de vitesse u par rapport à la terre, le camion a une longueur apparente L' et la route semble inclinée de l'angle θ' par rapport à l'horizontale. On posera $\beta = u/c$, où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

1. Exprimer $\frac{L'}{L}$:

a) en fonction de $\sin \theta$ et $\sin \theta'$

b) en fonction de β , $\cos \theta$ et $\cos \theta'$.

2. À partir de ces relations :

a) exprimer $\frac{\tan \theta'}{\tan \theta}$ en fonction de β .

b) En déduire vers quelle limite tend θ' lorsque u se rapproche de la vitesse de la lumière c .

On rappelle la transformation de LORENTZ pour un changement de référentiel Galiléen de vitesse relative βc selon Ox .

$$(R) \rightarrow (R') \begin{cases} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \text{où } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Solution

1.a) Au vu de la transformation de LORENTZ rappelée dans l'énoncé, seul le couple $x-x'$ est affecté par le changement de repère. Les distances suivant l'axe vertical ne sont elles pas affectées. De ce fait, la taille verticale du camion est inchangée suivant le repère considéré, ce qui s'exprime, si l'on se réfère au schéma descriptif, par

$$L' \sin \theta' = L \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{L'}{L} = \frac{\sin \theta}{\sin \theta'}}$$

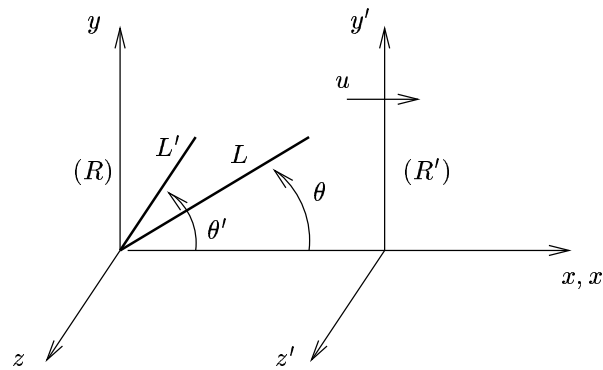


FIG. 7.9 - Schéma des repères en translation

1.b) Il n'en va en revanche pas de même suivant la direction x puisque l'on est sujet à ce qu'on appelle : *le phénomène de contraction des longueurs*. En effet, une longueur est définie comme la différence des positions de deux

EXERCICES

extrémités, ces positions étant mesurées au même instant. La nécessité de la simultanéité des instants de mesure se comprend aisément puisque si la règle bouge, mesurer la position d'une extrémité puis celle de l'autre à un temps ultérieur reviendrait à ajouter le déplacement à la longueur propre de la règle. L'observateur se trouvant dans le repère (R'), la simultanéité des temps de mesure sera vérifiée dans ce même repère. On utilise alors la transformation inverse de LORENTZ nous permettant de passer de (R') à (R), dont l'expression s'obtient en remplaçant β par $-\beta$ dans la formule de l'énoncé. On a ainsi

$$x = \gamma(x' + \beta ct'),$$

en vertu de quoi :

$$\begin{aligned} L|_{\text{suivant } x} = x_B - x_A &= \gamma(x'_B - x'_A + \beta c(t'_B - t'_A)) \\ &= \gamma L'|_{\text{suivant } x} + \gamma \beta c(t'_B - t'_A). \end{aligned}$$

Les considérations précédentes nous donnent $t'_B = t'_A$, soit la relation :

$$L|_{\text{suivant } x} = \gamma L'|_{\text{suivant } x}.$$

Puisque γ est supérieur à 1, on obtient bien que la longueur mesurée par un observateur en mouvement (ici dans le référentiel (R')) est inférieure à la longueur propre (c'est-à-dire la longueur mesurée par un observateur immobile par rapport à l'objet).

Remarque : si l'énoncé avait donné la transformation de LORENTZ concernant les temps t et t' , nous aurions pu répondre à la question sans avoir recours à la transformation de LORENTZ inverse. En effet, on a :

$$t' = \gamma \left(t - \frac{\beta}{c} x \right).$$

Par conséquent,

$$t'_B - t'_A = \gamma(t_B - t_A) - \frac{\gamma\beta}{c}(x_B - x_A).$$

Lorsqu'on effectue la mesure de longueur dans le référentiel (R'), on a $t'_B = t'_A$ d'où

$$t_B - t_A = \frac{\beta}{c}(x_B - x_A).$$

La simultanéité des mesures dans (R') n'implique pas simultanéité dans (R). De plus,

$$x'_B - x'_A = \gamma(x_B - x_A) - \beta c \gamma(t_B - t_A).$$

En reportant l'expression de $t_B - t_A$, il vient :

$$x'_B - x'_A = \gamma(x_B - x_A) - \beta^2 \gamma(x_B - x_A).$$

Par ailleurs, $\gamma^2(1 - \beta^2) = 1$ et nous retrouvons bien :

$$x'_B - x'_A = \frac{1}{\gamma}(x_B - x_A).$$

En s'aidant du schéma, on exprime sans peine les composantes suivant x du segment représentant le camion, ce qui donne

$$\gamma L' \cos \theta' = L \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{L'}{L} = \frac{1 \cos \theta}{\gamma \cos \theta'}}$$

2.a) En combinant les deux expressions de L'/L , il vient la relation demandée sur les tangentes :

$$\boxed{\tan \theta' = \gamma \tan \theta}$$

2.b) Lorsque l'on se rapproche de la vitesse de la lumière c , le coefficient γ tend vers l'infini. Comme θ est fixe, $\tan \theta'$ tend vers l'infini et donc :

$$\boxed{\theta' \longrightarrow \frac{\pi}{2}} \quad \text{pour } u \rightarrow +\infty.$$

Plus nous nous déplaçons vite, et plus le camion nous apparaît incliné sur l'axe des y !

Le phénomène de contraction des longueurs en relativité restreinte est d'autant plus prononcé que la vitesse de l'observateur est proche de la vitesse limite de la lumière. Il ne s'agit pas d'un paradoxe mais d'un « simple » effet de perspective dans l'espace-temps, qui présente bien des analogies avec la parallaxe de l'espace ordinaire.

7.4.2 Mesure de longueur en relativité

*Université Paul SABATIER, Toulouse
Durée 45 min*

Une tige AB , de longueur propre $L_0 = 1 \text{ m}$, se déplace, à la vitesse $\vec{u} = u \vec{e}_x$, par rapport au référentiel du laboratoire $\mathcal{R} = Oxyz$, le long de l'axe horizontal Ox .

On désigne par P le point de l'axe Ox situé à l'abscisse L_0 dans \mathcal{R} et on introduit le facteur relativiste γ_e associé à $\beta_e = u/c$.

1. Comparaison de longueurs.

- Rappeler l'écriture de la transformation de LORENTZ entre \mathcal{R} et le référentiel $\mathcal{R}' = Ax'y'z'$ invariablement lié à la tige. Calculer γ_e sachant que $\beta_e = 0,5$.
- Qu'appelle-t-on longueur propre de la tige? Quelle est, en mètres, la longueur de la règle mesurée par un observateur de \mathcal{R} ?
- Quelle est, en mètres, la longueur OP mesurée par un observateur de \mathcal{R}' ?

2. L'extrémité A coïncide avec O à l'instant $t = 0$ pour les horloges de \mathcal{R} . Écrire, successivement dans \mathcal{R}' et dans \mathcal{R} , les coordonnées spatio-temporelles de l'extrémité B , à $t = 0$ pour \mathcal{R} .

3. L'autre extrémité B de la tige coïncide avec P à un instant τ pour \mathcal{R} .
- Écrire, en fonction de L_0 et $c\tau$, les coordonnées spatio-temporelles de cet événement dans \mathcal{R} et dans \mathcal{R}' .
 - Exprimer ces coordonnées en fonction de L_0 et γ_e .
Application numérique.
 - Quelle est, à l'instant τ de \mathcal{R} , la coordonnée spatiale de l'extrémité A dans \mathcal{R} ?
Application numérique.

Solution

1.a) Soit un événement ayant pour coordonnées spatio-temporelles

$$\left. \begin{array}{l} ct \\ x \\ y \\ z \end{array} \right\} \text{ dans } \mathcal{R} \text{ et } \left. \begin{array}{l} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{array} \right\} \text{ dans } \mathcal{R}'.$$

Dans le cas où le repère \mathcal{R}' est en mouvement de translation parallèlement à Ox , à la vitesse \vec{u} , par rapport au référentiel \mathcal{R} , la transformation de LORENTZ s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} ct' = \gamma_e(ct - \beta_e x) \quad (1) \\ x' = \gamma_e(x - \beta_e ct) \quad (2) \\ y' = y \quad (3) \\ z' = z. \quad (4) \end{array} \right.$$

Conformément à l'usage, on a adopté les notations

$$\beta_e = \frac{u}{c} \quad \text{et} \quad \gamma_e = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_e^2}}.$$

Application Numérique : pour une valeur de $\beta_e = 0,5$, le facteur relativiste vaut :

$$\gamma_e = 1,15.$$

1.b) La longueur propre d'un objet est par définition *la longueur de cet objet mesurée dans le référentiel qui lui est attaché*. Ici la longueur propre de la tige est sa longueur mesurée dans \mathcal{R}' .

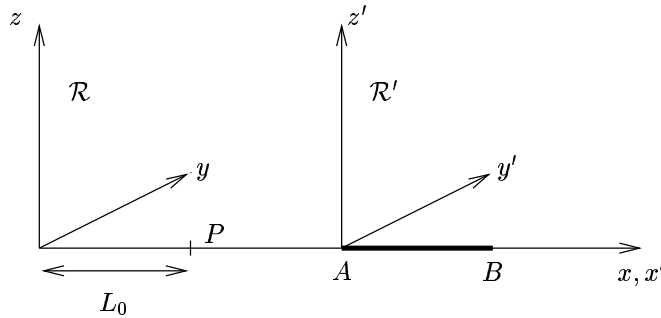


FIG. 7.10 - Schéma des deux référentiels en translation.

Mesurer la longueur d'un objet, c'est noter, à un instant t , la position de ses extrémités. Les moments où l'on repère ces positions sont simultanés dans le référentiel de mesure mais différents dans tout autre référentiel en mouvement par rapport à celui-ci. En utilisant la relation (2) de la transformation de LORENTZ, on trouve que

$$\begin{cases} x'_A = \gamma_e(x_A - \beta_e ct_A) \\ x'_B = \gamma_e(x_B - \beta_e ct_B). \end{cases}$$

Si la mesure est effectuée par un observateur immobile dans le référentiel \mathcal{R} , on a $t_A = t_B$, ce qui donne par soustraction des deux précédentes équations

$$x'_B - x'_A = \gamma_e(x_B - x_A).$$

Si l'on se réfère à la figure 7.10, la longueur propre L_0 de la tige est précisément égale à la différence $x'_B - x'_A$, alors que sa longueur L dans \mathcal{R} est donnée par $x_B - x_A$. On a donc

$$L = \frac{L_0}{\gamma_e}.$$

Étant donné que le facteur relativiste est toujours plus grand que 1, nous venons d'obtenir la relation qui met en évidence le phénomène de contraction des longueurs impropres (voir aussi l'exercice 7.4.1).

Application Numérique : $L = \frac{1}{1,15} = 0,87 \text{ m}.$

1.c) On considère cette fois-ci, dans \mathcal{R}' , la longueur OP . La simultanéité est donc maintenant assurée dans le référentiel en mouvement. Afin de pouvoir néanmoins opérer comme à la question précédente, on utilise la transformation inverse de LORENTZ

$$\begin{cases} ct = \gamma_e(ct' + \beta_e x') & (1)' \\ x = \gamma_e(x' + \beta_e ct') & (2)' \\ y = y' & (3)' \\ z = z', & (4)' \end{cases}$$

EXERCICES

que l'on peut obtenir simplement en remarquant que le référentiel \mathcal{R} est, lui, en translation à la vitesse $-\vec{u}$ par rapport à \mathcal{R}' ce qui revient à effectuer la transformation $\beta_e \rightarrow -\beta_e$.

On utilise alors (2)' pour trouver

$$\begin{cases} x_O = \gamma_e(x'_O + \beta_e ct'_O) \\ x_P = \gamma_e(x'_P + \beta_e ct'_P), \end{cases}$$

et finalement

$$L'_{OP} = \frac{OP}{\gamma_e} = \frac{L_0}{\gamma_e}.$$

Application Numérique : $L = 0,87 \text{ m}$.

On peut remarquer qu'il était possible de s'épargner le calcul. En effet, le segment OP a sa longueur propre dans \mathcal{R} . Il subit donc le phénomène de contraction des longueurs impropres lorsqu'il est mesuré dans un référentiel en mouvement par rapport à \mathcal{R} . Soit en fonction du facteur relativiste entre ces deux référentiels :

$$L'_{OP} = \frac{L_0}{\gamma_e}.$$

2. L'extrémité A coïncide avec O à $t = 0$ pour les horloges de \mathcal{R} . D'autre part, par définition de la longueur propre, on a toujours

$$x'_B = L_0.$$

Cherchons désormais le temps t'_B associé dans \mathcal{R}' à l'événement considéré. D'après l'équation (1)', on a

$$ct = \gamma_e(ct' + \beta_e x'),$$

c'est-à-dire pour le temps $t = 0$, correspondant à $x'_B = L_0$:

$$ct'_B = -\frac{u}{c} L_0.$$

Maintenant que nous disposons des coordonnées spatio-temporelles de l'événement dans \mathcal{R}' , il est aisé de déterminer leurs homologues dans \mathcal{R} . La coordonnée temporelle est connue par hypothèse, quant à la coordonnée spatiale soit elle se calcule à partir de l'équation (2)', soit plus simplement elle se déduit une nouvelle fois du phénomène de contraction des longueurs impropres. La longueur de la tige dans \mathcal{R} est L_0/γ_e et l'événement en question a pour coordonnées

$$\left(ct = 0, x_B = \frac{L_0}{\gamma_e} \right).$$

3.a) Puisqu'à l'instant τ de \mathcal{R} considéré, B est en P , on sait que $x_P = x_B$. Par construction le point P est à L_0 de l'origine d'où,

$$(ct = c\tau, x_B = L_0).$$

On utilise la relation (1) de la transformation de LORENTZ qui conduit, une fois remplacées les coordonnées dans \mathcal{R} par ce qui vient d'être trouvé, à :

$$\boxed{\left(ct'_B = \gamma_e(ct - \beta_e L_0), x'_B = L_0 \right)};$$

on a en effet déjà mentionné que l'abscisse dans \mathcal{R}' de B est invariablement L_0 .

3.b) Nous avons obtenu x'_B de façon directe, mais ce dernier est aussi donné par l'équation (2). La nécessité d'aboutir au même résultat donne la condition

$$L_0 = \gamma_e(L_0 - u\tau).$$

Il s'ensuit pour la coordonnée temporelle de l'événement dans \mathcal{R} que

$$\begin{aligned} c\tau &= L_0 \frac{c}{u} \frac{\gamma_e - 1}{\gamma_e} \\ &= L_0 \left(\frac{\gamma_e - 1}{\beta_e \gamma_e} \right), \end{aligned}$$

qui se réécrit finalement compte tenu de la relation liant γ_e à β_e :

$$\boxed{c\tau = L_0 \sqrt{\frac{\gamma_e - 1}{\gamma_e + 1}}}.$$

Il reste à remplacer l'expression ainsi trouvée pour $c\tau$ dans celle de ct'_B ce qui donne

$$\begin{aligned} ct'_B &= \gamma_e \left(L_0 \sqrt{\frac{\gamma_e - 1}{\gamma_e + 1}} - \beta_e L_0 \right) \\ &= \gamma_e \left(L_0 \sqrt{\frac{\gamma_e - 1}{\gamma_e + 1}} - \sqrt{\frac{\gamma_e^2 - 1}{\gamma_e^2}} L_0 \right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{ct'_B = -L_0 \sqrt{\frac{\gamma_e - 1}{\gamma_e + 1}}}.$$

Application Numérique : en utilisant la valeur trouvée en 1.a) pour le facteur relativiste, on obtient $c\tau = 0,27 \text{ m}$ ($\tau = 8,8 \cdot 10^{-10} \text{ s}$) et $ct'_B = -0,27 \text{ m}$.

Remarque : comme $x_B = x'_B = L_0$, en utilisant successivement les relations (1) et (1)' il vient

$$\gamma_e(L_0 + \beta_e ct'_B) = \gamma_e(L_0 - \beta_e c\tau) \Rightarrow \boxed{t'_B = -\tau}.$$

3.c) Par définition, la longueur impropre de la tige est $x_B - x_A$. Celle-ci valant L_0/γ_e on en déduit que

$$\boxed{x_A = L_0 \left(1 - \frac{1}{\gamma_e} \right)}.$$

Application Numérique : $x_A = 0,13 \text{ m}$.

On peut retrouver ce résultat comme suit : $x'_B = L_0 \Rightarrow x'_A = 0$. Par ailleurs, $x'_A = \gamma_e(x_A - \beta_e c\tau)$, d'où $x_A = \beta_e c\tau = L_0(\gamma_e - 1)/\gamma_e$.

7.4.3 Dilatation du temps propre en relativité restreinte

Université Paul SABATIER, Toulouse

Durée 30 min

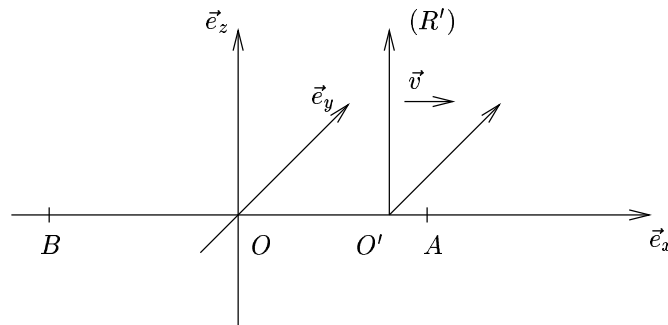
On considère deux repères galiléens (R) et (R') dont les axes Ox et $O'x'$ coïncident, (R') ayant la vitesse $\vec{v} = v\vec{e}_x$ par rapport à (R) . Les horloges de (R) et (R') sont synchronisées à $t = t' = 0$ lorsque O et O' coïncident.

On considère deux sources lumineuses situées en A et B sur l'axe Ox du repère (R) , tels que $\overline{OA} = -\overline{OB} = a > 0$. À l'instant $t = 0$ mesuré dans (R) , deux signaux lumineux sont émis respectivement par les points A et B (événements (E_1) et (E_2)), puis ils parviennent en O' (événements (E_3) et (E_4)). Un événement (E_i) sera repéré par x_i et t_i dans (R) et par x'_i et t'_i dans (R') .

1. À quel instant t_3 le signal émis par A parvient-il en O' ?
Quelle est alors la position x_3 de O' dans (R) ?
2. Calculer t'_3 . Comparer t'_3 à t_3 et justifier le résultat.
3. À quel instant t_4 le signal émis par B parvient-il en O' ?
Quelle est alors la position x_4 de O' dans (R) ?
4. Calculer t'_4 . La réception par O' des signaux émis par A et B est-elle simultanée dans (R') ?

Solution

On a le schéma suivant pour ce qui concerne la configuration de notre problème :



1. Plaçons nous pour commencer dans le référentiel fixe (R) . Dans ce référentiel (comme dans tout autre référentiel galiléen) la vitesse de la lumière vaut c . Ainsi en t_3 , le signal a parcouru dans (R) la distance

$$d_3 = ct_3 = O'A,$$

puisqu'à l'instant considéré t_3 , le signal atteint le point O' .

Toujours dans (R) , le point O' se déplace à la vitesse v d'où

$$OO' = vt_3.$$

Par conséquent

$$ct_3 = |a - vt_3|.$$

Si l'on suppose que vt_3 est supérieur à a , on déduit de la relation précédente que $a = (v - c)t_3$. Cela est impossible puisque $v - c < 0$ et que la distance a et le temps t_3 sont eux positifs. On a donc $a < vt_3$ c'est-à-dire

$$t_3 = \frac{a}{v + c}.$$

On en déduit la position du point O' par $OO' = vt_3$:

$$x_3 = \frac{va}{v + c}.$$

2. On cherche désormais l'expression du temps t'_3 , associé à l'événement précédent, mais cette fois mesuré dans (R') . Considérons la transformation de LORENTZ des temps :

$$ct'_3 = \gamma(ct_3 - \beta x_3).$$

Avec les résultats de la question 1. et les définitions $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$, $\beta = v/c$ il vient

$$ct'_3 = \gamma \left(c - \frac{v^2}{c} \right) \frac{a}{v + c} \Rightarrow t'_3 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (1 - \beta^2) \frac{a}{v + c}.$$

Finalement en utilisant l'expression de t_3 nous pouvons écrire

$$t'_3 = \frac{t_3}{\gamma}.$$

Comme $\gamma > 1$ on obtient que le temps exprimé dans le référentiel propre (t'_3) est plus court que le temps exprimé dans le référentiel (R) où O' est mobile (t_3). On parle de dilatation du temps propre : la durée d'un phénomène apparaît, pour un observateur en mouvement, supérieure à sa durée propre mesurée par un observateur immobile par rapport au phénomène. Rappelons qu'un intervalle de temps propre est l'intervalle de temps entre deux événements mesuré dans un repère où ils ont lieu *au même endroit*. Si la mesure est effectuée dans un référentiel en translation uniforme par rapport au précédent, l'intervalle est dit impropre. Dans le cas présent, le référentiel propre est bien (R') .

Remarque : on peut retrouver la relation $t_3 = \gamma t'_3$ à partir de la transformation de LORENTZ sur l'espace. À partir de

$$x = \gamma(x' + \beta ct'),$$

il vient

$$x_3 = \gamma\beta ct'_3 = \gamma vt'_3.$$

Par ailleurs, $x_3 = vt_3$ d'où $t_3 = \gamma t'_3$. La notion de dilatation du temps propre est à rapprocher de celle de contraction des longueurs (voir l'exercice 7.4.1).

3. On procède exactement de la même manière pour répondre à cette question. La distance parcourue par le signal dans (R) est $d_4 = ct_4 = BO'$. Le point O' a parcouru dans (R) la distance $OO' = vt_4$ et finalement

$$t_4 = \frac{a}{c-v}.$$

On trouve un temps supérieur au temps t_3 , ce qui est conforme à l'intuition, puisqu'initialement la distance à parcourir était identique mais que le point O' a « fui » le signal venant de B pour aller au contraire à la rencontre de celui provenant de A .

La position de O' dans (R) à t_4 est quant à elle

$$x_4 = vt_4 = \frac{va}{c-v}.$$

4. Le calcul du temps associé à l'événement E_4 dans le référentiel (R') se fait lui aussi de la même façon que pour l'événement E_3 . La transformation de LORENTZ des temps nous donne

$$\begin{aligned} ct'_4 &= \gamma \left(ct_4 - \frac{v}{c} \frac{va}{c-v} \right) \\ &= \gamma \left(c - \frac{v^2}{c} \right) t_4, \end{aligned}$$

qui conduit à l'expression escomptée

$$t'_4 = \frac{1}{\gamma} t_4.$$

Les temps t_3 et t_4 étant différents, et leurs homologues dans le référentiel (R') étant donnés par $t_i = \gamma t'_i$, il s'ensuit que

$$t'_3 \neq t'_4.$$

À l'aide des questions précédentes on obtient pour la différence de ces deux temps la valeur $2av\gamma/c^2$: la réception des signaux n'est pas simultanée dans le référentiel (R') .

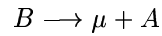
7.4.4 Désintégration d'un méson B .

Université Paris VI

Durée : 1 h 10

Dans ce problème, le terme « masse » désigne la masse au repos d'une particule, « énergie » son énergie totale et « impulsion » sa quantité de mouvement. On rappelle: $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$. On pourra travailler, si on le souhaite, avec les unités $c = 1$.

Les mésons B sont des particules de très grande masse ($M = 5,6 \text{ GeV}/c^2$), et de très courte vie moyenne. On considère la désintégration du B suivant le processus:



où μ désigne un « muon » (masse $m = 0,1 \text{ GeV}/c^2$) et A un objet que l'on traitera comme une particule de masse $m_A = 2 \text{ GeV}/c^2$.

1. Exprimer l'impulsion p^* du muon dans le référentiel R^* lié au méson B en fonction des masses, en faisant l'hypothèse $mc^2 \ll p^*c$. Calculer la valeur de cette impulsion et vérifier que l'approximation était justifiée.
2. Les mésons B ont une énergie cinétique $T = 20 \text{ GeV}$ dans le laboratoire (référentiel R). Si v est la vitesse du méson B dans R , on définit les coefficients habituels $\beta_B = v/c$ et $\gamma_B = (1 - \beta_B^2)^{-1/2}$. Calculer les valeurs numériques de γ_B et β_B .
3. On suppose les axes x et x' des référentiels R et R^* superposés et parallèles à la direction de la vitesse du méson B dans R . Dans R^* , le muon est émis normalement à l'axe des x' . Calculer l'angle θ que fait l'impulsion du muon avec l'axe des x dans R . Montrer que θ s'exprime simplement en fonction de γ_B et β_B avec les mêmes approximations que dans la question 1.. Calculer numériquement θ .

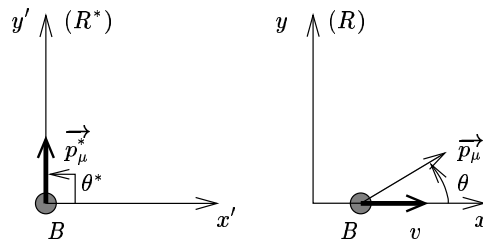


FIG. 7.11 - Définition des référentiels R et R^*

4. On appelle « durée de vie » d'une particule dans un référentiel donné le temps qui sépare sa création et sa désintégration. Soit τ_0 la durée de vie « propre » du méson B . Soit $l = OD$ la distance parcourue par le méson B

EXERCICES

dans R entre le point O où il est produit et le point D où il se désintègre. Exprimer l en fonction de τ_0, γ_B et β_B .

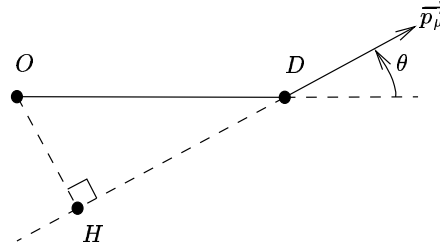


FIG. 7.12 - Définition du « paramètre d'impact » de la désintégration

5. La désintégration du méson B se fait dans R suivant la figure 7.12 où θ est l'angle calculé dans la question 3. On mesure la distance $OH = 450 \mu\text{m}$ (appelée « paramètre d'impact »). Montrer que cette distance s'exprime de manière simple en fonction de τ_0 , en remarquant que θ est petit. Dédire de la mesure du paramètre d'impact la valeur de τ_0 .

Solution

1. On considère le système composé des particules lors de la désintégration. La conservation de l'impulsion totale du système se traduit dans le référentiel R^* par :

$$\vec{p}_B^* = \vec{p}_\mu^* + \vec{p}_A^*.$$

Puisque $\vec{p}_B^* = \vec{0}$, on arrive à :

$$\|\vec{p}_\mu^*\| = \|\vec{p}_A^*\|. \quad (1)$$

L'énergie totale du système est également conservée :

$$E_B^* = E_\mu^* + E_A^*.$$

Or, $E_B^* = Mc^2$, d'où :

$$\begin{aligned} M^2 c^4 &= (E_\mu^*)^2 + (E_A^*)^2 + 2E_\mu^* E_A^* \\ &= (m^2 + m_A^2) c^4 + 2(p^*)^2 c^2 + 2\sqrt{m^2 c^4 + (p^*)^2 c^2} \sqrt{m_A^2 c^4 + (p^*)^2 c^2} \end{aligned}$$

d'après l'équation (1). Dans le cadre de l'approximation $p^* c \gg m c^2$, la relation précédente se simplifie pour donner :

$$(M^2 - m_A^2) c^4 \simeq 2(p^*)^2 c^2 + 2p^* c \sqrt{m_A^2 c^4 + (p^*)^2 c^2}.$$

En élevant au carré l'équation ci-dessus, on obtient :

$$p^*c = \frac{c^2}{2} \left(M - \frac{m_A^2}{M} \right)$$

Application Numérique : $p^*c = 2,44 \text{ GeV} \gg 0,1 \text{ GeV} = mc^2$. L'approximation effectuée lors du calcul est donc bien justifiée.

2. Par définition de l'énergie cinétique T , on a :

$$T = (\gamma - 1)Mc^2.$$

On en déduit :

$$\gamma_B = \frac{T}{Mc^2} + 1 \quad \text{et} \quad \beta_B = \sqrt{1 - \gamma_B^{-2}}.$$

Application Numérique : $\gamma_B = 4,57$; $\beta_B = 0,98$.

3. La transformation de LORENTZ du quadrivecteur impulsion entre R^* et R permet d'écrire :

$$\begin{cases} p_{x\mu} &= \gamma_B \underbrace{p_{x\mu}^*}_{=0} + \beta_B \gamma_B m \gamma^* c \\ p_{y\mu} &= p_{y\mu}^* \end{cases}$$

On en déduit l'expression de θ par $\tan \theta = p_{y\mu} / p_{x\mu}$:

$$\theta = \text{arctg} \left(\frac{p^*}{\beta_B \gamma_B m c \gamma^*} \right).$$

Si l'on fait la même approximation qu'à la question 1., on a

$$(p^*)^2 c^2 \simeq (p^*)^2 c^2 + m^2 c^4 = (E^*)^2 = (\gamma^* m c^2)^2$$

car le muon est une particule libre. Finalement, on obtient :

$$\theta \simeq \text{arctg} \left(\frac{1}{\beta_B \gamma_B} \right)$$

Application Numérique : $\theta \simeq 0,22 \text{ rad}$.

4. On a la relation $l = c\beta_B \tau$ par définition de l , où τ est la durée de vie du méson B dans R . Or, le phénomène de dilatation des durées fournit la relation $\tau = \gamma_B \tau_0$ (voir l'exercice 7.4.3). D'où :

$$l = \gamma_B \beta_B c \tau_0.$$

5. D'après les notations de la figure 7.12, on a :

$$\sin \theta = \frac{OH}{l} = \frac{OH}{\gamma_B \beta_B c \tau_0}.$$

On sait d'après la question 3. que $\theta \ll 1$, ce qui permet d'écrire $\sin \theta \simeq \theta$. OH s'exprime alors sous la forme :

$$\boxed{OH \simeq \gamma_B \beta_B c \tau_0 \theta}.$$

On en déduit l'expression de τ_0 :

$$\boxed{\tau_0 = \frac{OH}{\gamma_B \beta_B c \theta}}.$$

Application Numérique : $\tau_0 \simeq 1,52 \cdot 10^{-12} \text{ s}$.

7.4.5 Collision de particules relativistes

Université Paul SABATIER, Toulouse
Durée 1 h

1. Émission d'un photon par un atome.

Un système matériel, de masse m , initialement au repos, émet un photon. Établir la relation entre l'énergie $h\nu$ du photon émis, mc^2 et $m'c^2$; m' étant la masse du système après émission.

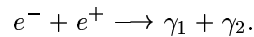
2. Relations relativistes entre m , \vec{p} , E_c et \vec{v} .

On désigne par \vec{v} , \vec{p} et E_c respectivement la vitesse, la quantité de mouvement et l'énergie cinétique de la particule de masse m dans le référentiel R du laboratoire.

- Exprimer E_c et p en fonction de m et γ .
- Exprimer E_c en fonction de p et γ .
- Exprimer \vec{v} en fonction de E_c , \vec{p} et m .
- Exprimer p en fonction de E_c et m .

3. Réaction d'annihilation électron-positron.

Dans le référentiel R du laboratoire, un électron e^- et son antiparticule le positron e^+ (même masse, charge opposée) de même énergie cinétique E_c s'annihilent en produisant deux photons gamma suivant la réaction :



On donne $m_e c^2 = 0,511 \text{ MeV}$; $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$.

- L'électron et le positron se déplacent dans la même direction en sens opposé. Déterminer la longueur d'onde des photons produits.

Application Numérique : $E_c = 1 \text{ MeV}$.

- b) Les directions du positron et de l'électron font entre elles un angle 2α au moment de leur rencontre. Exprimer en fonction de α , E_c et $m_e c^2$, les longueurs d'onde λ_1 et λ_2 des photons produits dans l'hypothèse où ils sont émis dans des directions opposées.

Application Numérique : $E_c = 1 \text{ MeV}$; $\alpha = \pi/3$.

Solution

Émission d'un photon par un atome.

1. Le système matériel considéré est initialement au repos. Son énergie est à ce moment là l'énergie de masse, et sa quantité de mouvement est nulle soit

$$E_i = mc^2 \quad \text{et} \quad \vec{p} = \vec{0}.$$

Pour relier les masses avant et après l'émission photonique, on doit utiliser les relations de conservation. La première est la conservation de la quantité de mouvement. Elle s'écrit

$$\vec{p}' + \vec{p}_{\text{photon}} = \vec{p} = \vec{0}.$$

Or, le module de la quantité de mouvement d'un photon est donné par la formule

$$|\vec{p}_{\text{photon}}| = \frac{h\nu}{c}.$$

On en déduit que

$$|\vec{p}'| = \frac{h\nu}{c}.$$

La deuxième relation de conservation à appliquer est la conservation de l'énergie. Elle donne

$$\begin{aligned} E_i &= E_f + E_{\text{photon}} \\ mc^2 &= \sqrt{p'^2 c^2 + m'^2 c^4} + h\nu \end{aligned}$$

En utilisant la valeur trouvée pour le module de la quantité de mouvement après émission, on trouve

$$mc^2 - h\nu = \sqrt{h^2 \nu^2 + m'^2 c^4} \quad \Rightarrow \quad m^2 c^4 - 2h\nu mc^2 = m'^2 c^4,$$

qui donne finalement comme relation entre $h\nu$, m et m'

$$\boxed{h\nu = \frac{m^2 c^2 - m'^2 c^2}{2m}}$$

Relations relativistes entre m , \vec{p} , E_c et \vec{v}

2.a) L'énergie totale relativiste s'écrit

$$E = E_c + mc^2 \quad \text{avec} \quad E = \gamma mc^2.$$

Il s'ensuit que

$$E_c = (\gamma - 1)mc^2.$$

Pour la quantité de mouvement, la formule de base est $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$. Or $\beta = v/c$ est relié à γ par

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma}.$$

En reprenant la première formule liant p et v , on aboutit à

$$p = \sqrt{\gamma^2 - 1} mc.$$

2.b) De la dernière formule on obtient que

$$mc = \frac{p}{\sqrt{(\gamma - 1)(\gamma + 1)}},$$

qui donne dans la relation trouvée en 2.a) pour E_c

$$E_c = pc \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}}.$$

2.c) On sait déjà que $\vec{v} = \vec{p}/\gamma m$ et que $\gamma = 1 + E_c/mc^2$. Par conséquent

$$\vec{v} = \frac{c^2}{E_c + mc^2} \vec{p}.$$

2.d) L'énergie totale d'une particule relativiste s'exprime de deux manières

$$E = E_c + mc^2 = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4},$$

ce qui nous permet d'obtenir la relation demandée après élévation au carré et réarrangements

$$p = \frac{E_c}{c} \sqrt{1 + \frac{2mc^2}{E_c}}.$$

Réaction d'annihilation électron-positron

3.a) Comme l'électron et le positron ont même masse ($m = m_e = m_p$) et même énergie cinétique, ils ont même énergie totale. En effet cette dernière peut s'exprimer sous la forme $E = E_c + mc^2$.

De plus l'énergie totale d'une particule en mouvement est donnée par $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$. Combinant ces deux informations, on obtient

$$\sqrt{p_e^2 c^2 + m^2 c^4} = \sqrt{p_p^2 c^2 + m^2 c^4} \quad \Rightarrow \quad |\vec{p}_e| = |\vec{p}_p|,$$

où les indices p et e désignent respectivement des grandeurs associées au positron et à l'électron.

On sait qu'avant le choc, les deux particules se déplacent dans la même direction mais en sens opposés. En utilisant l'égalité des modules des deux quantités de mouvement, on en déduit la relation vectorielle

$$\vec{p}_e + \vec{p}_p = \vec{0}.$$

On applique la conservation de la quantité de mouvement au cours de la désintégration pour obtenir

$$\vec{0} = \vec{p}_{\gamma_1} + \vec{p}_{\gamma_2} \Rightarrow |\vec{p}_{\gamma_1}| = |\vec{p}_{\gamma_2}|.$$

Comme la quantité de mouvement du photon s'écrit $p = h\nu/c$, nous pouvons affirmer que les fréquences des deux photons émis sont identiques et égales à ν . On utilise alors la deuxième relation de conservation, sur l'énergie totale cette fois-ci, pour exprimer cette fréquence ν en fonction des paramètres :

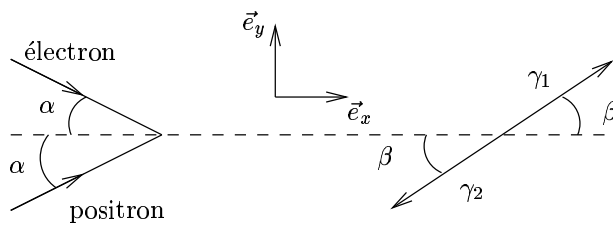
$$2(E_c + mc^2) = 2h\nu.$$

Finalement comme la longueur d'onde s'exprime $\lambda = c/\nu$, les deux longueurs d'onde sont égales et valent

$$\lambda = \frac{ch}{E_c + mc^2}.$$

Application Numérique : $\lambda = 0,82 \text{ pm}$.

3.b) Les directions des photons résultant de la désintégration sont supposées opposées, ce qui nous donne le schéma suivant dans lequel on a posé β l'angle de la direction commune aux deux photons.



Avec le même raisonnement que pour la question précédente, on trouve de nouveau que les modules des quantités de mouvement de l'électron et du positron sont identiques :

$$|\vec{p}_e| = |\vec{p}_p| = p.$$

On a donc pour la quantité de mouvement totale du système électron-positron des composantes qui sont (se référer au schéma) :

$$\vec{p}_{\text{tot}} = \begin{cases} 2p \cos \alpha \\ p \sin \alpha - p \sin \alpha = 0 \end{cases}.$$

La composante suivant \vec{e}_y de la quantité de mouvement initiale du système est nulle.

On applique la relation de conservation de cette même quantité de mouvement, qui s'écrit ici

$$\vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}_e + \vec{p}_p = \vec{p}_{\gamma_1} + \vec{p}_{\gamma_2},$$

et on la projette sur la direction \vec{e}_x pour obtenir

$$2p \cos \alpha = (p_{\gamma_1} - p_{\gamma_2}) \cos \beta.$$

Le membre de gauche de cette égalité est non nul (la situation $\alpha = \pi/2$ a été étudiée à la question précédente). Par conséquent les quantités de mouvement des deux photons sont différentes, c'est-à-dire

$$\nu_1 \neq \nu_2$$

puisque $p_\gamma = h\nu/c$. On projette la même relation de conservation sur la direction \vec{e}_y pour obtenir que

$$0 = (p_{\gamma_1} - p_{\gamma_2}) \sin \beta.$$

Or, les deux quantités de mouvement sont nécessairement différentes, ce qui détermine l'angle β :

$$\beta = 0 \text{ [}\pi\text{]}.$$

Remarquons qu'on a dénommé arbitrairement un et deux chacun des photons, et la possibilité d'un angle 0 ou π correspond juste au fait que les deux photons sont interchangeables; on gardera la valeur 0 par la suite.

Reprenons maintenant l'équation obtenue après projection sur \vec{e}_x qui nous donne une première relation

$$2p \cos \alpha = \frac{h}{c}(\nu_1 - \nu_2). \quad (1)$$

On utilise ensuite la relation de conservation de l'énergie totale du système au cours de l'annihilation, qui comme l'électron et le positron ont même masse et même énergie cinétique initiale s'écrit

$$2E = h\nu_1 + h\nu_2. \quad (2)$$

On somme alors $c \times (1)$ avec (2) pour trouver

$$h\nu_1 = pc \cos \alpha + E.$$

Enfin on reprend la relation obtenue en 2.d) pour la quantité de mouvement, à savoir

$$p = \frac{E_c}{c} \sqrt{1 + \frac{2mc^2}{E_c}},$$

et en se rappelant que $\nu_1 = c/\lambda_1$ et que $E = E_c + mc^2$ on aboutit au résultat recherché:

$$\lambda_1 = \frac{hc}{E_c \cos \alpha \sqrt{1 + \frac{2mc^2}{E_c}} + E_c + mc^2}.$$

Pour λ_2 on combine cette fois (2) moins $c \times (1)$ pour trouver

$$\lambda_2 = \frac{hc}{-E_c \cos \alpha \sqrt{1 + \frac{2mc^2}{E_c}} + E_c + mc^2}$$

Application Numérique : $\lambda_1 = 0,56 \text{ pm}$ et $\lambda_2 = 1,6 \text{ pm}$.

7.4.6 Aberration de la lumière

Université Paris VI

Durée 50 min

But de l'exercice : l'aberration de la lumière est un phénomène par lequel la direction de propagation d'un photon émis par une source mobile est mesurée différemment selon que l'on se place dans le référentiel de la source (que nous appellerons R' dans la suite) ou dans celui (appelé R) de l'observateur par rapport auquel la source est mobile. Nous allons voir, dans cet exercice, que si les photons sont émis de façon isotrope dans R' , leur distribution n'est plus isotrope dans R . Une conséquence particulière est que l'intensité de la source (nombre de photons par unité d'angle solide) paraît plus grande à un observateur placé à l'avant de celle-ci et plus faible à l'arrière; et ce d'autant plus que la vitesse de la source est élevée par rapport à l'observateur.

Préliminaires : la source lumineuse se déplace avec une vitesse \vec{v} par rapport à l'observateur (dont le référentiel est R) suivant l'axe Ox de ce référentiel. Le référentiel R' est celui lié à la source et l'axe $O'x'$ de ce référentiel est confondu avec Ox (transformations spéciales). On pose $\beta = v/c$ où c est la vitesse de la lumière dans le vide, et $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$. Enfin on rappelle que, si une particule est en mouvement par rapport aux deux référentiels, avec une vitesse \vec{u} , (\vec{u}'), la loi de composition des vitesses pour les composantes respectivement parallèles et perpendiculaires à la direction de la vitesse relative, est :

$$u'_{\parallel} = \frac{u_{\parallel} - v}{1 - (u_{\parallel}v/c^2)} \quad (1)$$

$$u'_{\perp} = \frac{u_{\perp}}{\gamma[1 - (u_{\parallel}v/c^2)]} \quad (2)$$

1. La direction d'émission d'un photon (ou d'un rayon lumineux) fait un angle θ (resp. θ') avec l'axe Ox (resp. $O'x'$). Écrire les composantes de la vitesse du photon suivant les deux directions parallèle et perpendiculaire à \vec{v} , dans les deux référentiels, en fonction des angles et de c . On fait le changement de variables :

$$\lambda = \cos \theta \quad ; \quad \lambda' = \cos \theta'$$

Déduire de l'équation (1) une expression de λ' en fonction de λ .

2. Soit Ω l'angle solide défini par un cône de révolution de demi-angle au sommet θ . Établir, à partir de la définition d'un angle solide élémentaire

$d\Omega$, la relation :

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \theta).$$

Notion de distribution angulaire : l'émission des photons dans R' est isotrope. Cela signifie que le nombre de photons émis par unité d'angle solide est constant, quelle que soit la direction d'émission, ce que l'on peut écrire :

$$\frac{dN}{d\Omega'} = K.$$

Notre but est de calculer, dans ces conditions, la distribution angulaire $dN/d\Omega$ dans R en fonction, par exemple, de l'angle d'émission θ de ces photons dans ce référentiel.

3. Supposons que le nombre total de photons émis dans toutes les directions soit N . Exprimer K en fonction de N . Exprimer $d\Omega$ et $d\Omega'$ en fonction de λ et λ' .
4. Dédurre de ce qui précède $dN/d\Omega$ en fonction de $K, d\lambda$ et $d\lambda'$ tout d'abord, puis finalement, en fonction de N, β et $\cos \theta$.

Application :

5. Quel est dans R' l'angle θ'_0 tel que la moitié des photons se trouve dans le cône de révolution de demi-angle au sommet θ'_0 ? Même question pour l'angle θ_0 dans R . La source se déplace dans R avec une vitesse $v = c/2$.

Solution

1. Démontrons tout d'abord les deux relations (1) et (2). La transformation de LORENTZ, dans la configuration étudiée, s'écrit :

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \gamma(ct - \beta x). \end{cases}$$

On peut alors trouver l'expression de la vitesse u'_\parallel en l'exprimant sous la forme :

$$u'_\parallel = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - \beta cdt)}{\gamma(dt - \beta dx/c)}$$

ce qui conduit après simplifications à l'expression proposée :

$$u'_\parallel = \frac{u_\parallel - v}{1 - (u_\parallel v/c^2)}. \quad (1)$$

Un raisonnement analogue pour la vitesse u'_\perp , dont on peut écrire la composante selon y sous la forme $u'_{\perp y} = dy'/dt'$, conduit à :

$$u'_\perp = \frac{u_\perp}{\gamma[1 - (u_\parallel v/c^2)]}. \quad (2)$$

Dans le référentiel (R') de la source, ainsi que dans le référentiel (R), les photons sont émis à la vitesse c . En effet, d'après les postulats de la relativité restreinte d'EINSTEIN, la vitesse de la lumière dans le vide est indépendante du référentiel galiléen dans lequel elle est exprimée. On en déduit :

$$\boxed{\begin{array}{l} u'_{\parallel} = c \cos \theta' \quad u_{\parallel} = c \cos \theta \\ u'_{\perp} = c \sin \theta' \quad u_{\perp} = c \sin \theta \end{array}}$$

En effectuant le changement de variables proposé, et en utilisant la relation (1) reliant les composantes de la vitesse parallèle et perpendiculaire à la direction de la vitesse relative, on arrive à :

$$\boxed{\lambda' = \frac{c\lambda - v}{c - \lambda v}}$$

On pourra aussi se référer à la question III.A.1. du problème 3.5.6. On constate que la direction d'émission des photons dans le référentiel (R) de l'observateur est différente de la direction d'émission dans le référentiel de la source. On peut remarquer à titre de vérification, que dans la limite classique, où $v \ll c$, on retrouve bien des directions qui coïncident, puisque $\lambda = \lambda'$.

2. L'angle solide élémentaire $d\Omega$ est l'aire de la surface élémentaire résultant de l'intersection d'un cône de révolution (autour d'une direction définie par les angles θ' et ϕ' en coordonnées sphériques), de sommet O , d'angle au sommet $d\theta'$ et d'une sphère de centre O et de rayon R , divisée par R^2 :

$$\boxed{d\Omega = R^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' / R^2}$$

En intégrant l'angle solide élémentaire sur l'ensemble du cône de demi-angle au sommet θ , il vient :

$$\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{\theta} d\theta' \sin \theta',$$

soit

$$\boxed{\Omega = 2\pi(1 - \cos \theta)}$$

3. Le nombre dN de photons émis par unité d'angle solide est noté K . Le nombre total de photons émis étant N , on a $\boxed{K = N/4\pi}$ puisque les photons sont émis dans toutes les directions, ce qui revient à considérer l'angle solide d'un cône de demi-angle au sommet $\theta = \pi$ pour le calcul de l'ensemble des photons émis en fonction de dN .

D'après la question précédente, en utilisant le changement de variables proposé à la question 1., on a $\Omega = 2\pi(1 - \lambda)$, ce qui conduit, en différentiant membre à membre, à :

$$\boxed{d\Omega = -2\pi d\lambda \quad d\Omega' = -2\pi d\lambda'}$$

4. En utilisant la relation

$$\frac{dN}{d\Omega} = \frac{dN}{d\Omega'} \frac{d\Omega'}{d\Omega}$$

et la question précédente, on arrive à :

$$\boxed{\frac{dN}{d\Omega} = K \frac{d\lambda'}{d\lambda}}$$

Or, d'après la question 1., on a la relation $\lambda' = (\lambda - \beta)/(1 - \lambda\beta)$. En différenciant cette expression membre à membre, il vient :

$$\frac{d\lambda'}{d\lambda} = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \lambda\beta)^2}$$

ce qui conduit finalement à l'expression demandée :

$$\boxed{\frac{dN}{d\Omega} = \frac{N}{4\pi} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \theta)^2}}$$

5. On cherche, dans (R') , l'angle θ'_0 du cône de révolution tel que $N/2 = 2\pi K (1 - \cos \theta'_0)$. En remplaçant K par l'expression de la question 3., on arrive à $\boxed{\theta'_0 = \pi/2}$, ce qui est normal puisque l'émission de la source est isotrope.

L'angle θ_0 correspondant dans (R) se calcule à partir de la relation entre λ' et λ établie à la question 1 :

$$\cos \theta'_0 = \frac{\cos \theta_0 - \beta}{1 - \beta \cos \theta_0}$$

avec $\beta = \pi/2$ et $\theta'_0 = \pi/2$. On en déduit $\boxed{\theta_0 = \pi/3}$.

7.5 Problèmes

7.5.1 Oscillateur harmonique à deux dimensions

Université Paul SABATIER, Toulouse

Durée 1 h

Question de cours :

L'effet COMPTON :

- a) description de l'expérience ;
- b) interprétation ;
- c) ordre de grandeur.

Problème :

Dans un espace à deux dimensions, de base orthonormée (\vec{e}_x, \vec{e}_y) , on considère une particule dont le Hamiltonien s'écrit :

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{K_1 x^2}{2} + \frac{K_2 y^2}{2}$$

et où p_x et p_y sont les opérateurs quantité de mouvement suivant respectivement x et y , m est la masse de la particule, K_1 et K_2 sont des constantes, x et y sont les coordonnées d'espace. On admet qu'il existe des solutions stationnaires pour la fonction d'onde $\phi(x, y)$ de la forme $\phi(x, y) = \phi_1(x)\phi_2(y)$.

1. Expliciter chaque terme du Hamiltonien par analogie avec la physique classique. Définir les pulsations ω_1 et ω_2 en fonction de m , K_1 et K_2 .
2. Calculer le spectre de l'oscillateur. Le résultat à une dimension est supposé connu.
3. On réduit le problème au cas $K_1 = K_2 = K = 7,3 \text{ J/m}^2$.
 - a) Donner la nouvelle expression du spectre de l'oscillateur. Calculer numériquement l'énergie de l'oscillateur dans l'état fondamental, puis les deux premiers niveaux excités. On prendra $h = 2\pi \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, $m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ et on donnera les énergies en eV .
 - b) Indiquer le degré de dégénérescence des trois premiers niveaux considérés en a).
 - c) On admet que le système peut passer de l'état fondamental au premier état excité par simple absorption de photon. Quelle doit être la longueur d'onde λ de la lumière monochromatique utilisée pour réaliser cette transition? Calculer numériquement λ .
 - d) La particule est maintenant dans l'état fondamental. Quelle est la probabilité pour qu'elle se trouve dans le domaine

$$-\infty < x \leq 0 \quad \text{et} \quad -\infty < y \leq 0.$$

Solution de la question de cours

La mécanique quantique est née de l'examen de quelques expériences fondamentales remettant en cause notre vision classique du monde : effet photoélectrique, rayonnement du corps noir, effet COMPTON.

L'effet COMPTON a permis d'introduire la notion de quantité de mouvement \vec{p} associée au photon.

a) Description de l'expérience.

Le schéma décrivant l'expérience est donné par la figure 7.13.

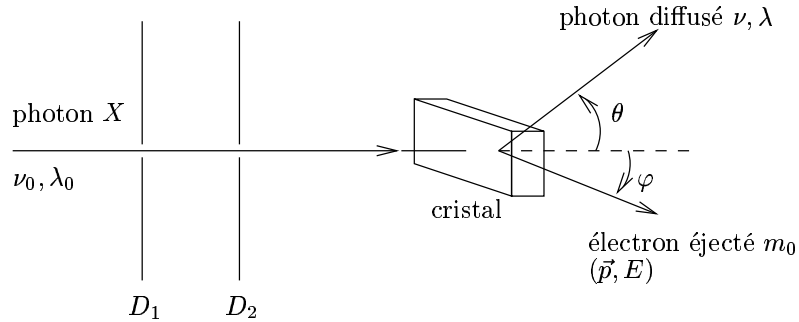


FIG. 7.13 - Mise en évidence l'effet COMPTON.

Dans cette expérience, un faisceau de rayons X collimaté va frapper un échantillon de cristal ; par exemple du graphite. On se place de l'autre côté de ce cristal de manière à détecter les photons diffusés.

Le résultat de l'expérience est que pour un angle d'observation θ donné, on détecte des photons X de même longueur d'onde λ_0 que le faisceau incident, ainsi que des photons de longueur d'onde $\lambda > \lambda_0$. Parallèlement, des électrons d'énergie E et de quantité de mouvement \vec{p} sont détectés.

On appelle déplacement COMPTON la grandeur, fonction de l'angle θ d'observation :

$$\delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = f(\theta).$$

b) Interprétation.

Les résultats expérimentaux peuvent s'interpréter comme le choc d'un photon d'énergie $h\nu_0$ et de quantité de mouvement $h\nu_0/c$ ($E = pc$ puisque le photon est de masse nulle) avec un électron du cristal.

Pour interpréter quantitativement les résultats, il faut se donner des hypothèses sur l'état de l'électron avant le choc. On suppose que celui-ci est initialement au repos, ce qui fixe sa quantité de mouvement initiale à $\vec{0}$, et qu'il est non lié. Cette deuxième hypothèse va nous permettre d'attribuer la perte d'énergie photonique à un pur gain d'énergie électronique, et non pas comme pour l'effet photoélectrique à une énergie d'extraction plus une énergie communiquée à l'électron.

Considérons les relations de conservation de ce choc électron-photon. Tout d'abord la conservation de l'énergie nous fournit, en n'oubliant pas l'énergie de repos de l'électron :

$$\begin{aligned} h\nu_0 + E_0 &= h\nu + E_e \\ \Leftrightarrow h\nu_0 + m_0c^2 &= h\nu + \sqrt{p_e^2c^2 + m_0^2c^4}. \end{aligned} \quad (1)$$

On applique maintenant la deuxième relation de conservation, concernant la quantité de mouvement :

$$\vec{p}(\nu_0) + \vec{0} = \vec{p}_e + \vec{p}(\nu).$$

Comme on s'intéresse au photon émis, il est préférable de considérer l'égalité

$$\vec{p}_e = \vec{p}(\nu_0) - \vec{p}(\nu) \quad (2)$$

On élève cette expression au carré, et l'on multiplie par c^2 de manière à obtenir le terme inconnu dans l'expression de l'énergie totale de l'électron. En remplaçant dans (1) il vient

$$h(\nu_0 - \nu) + m_0 c^2 = \sqrt{[\vec{p}(\nu_0) - \vec{p}(\nu)]^2 c^2 + m_0^2 c^4}.$$

Là encore, prenons le carré de cette expression. Avec nos notations,

$$\vec{p}(\nu_0) \cdot \vec{p}(\nu) = p(\nu_0)p(\nu) \cos \theta,$$

d'où

$$h^2(\nu_0 - \nu)^2 + 2h(\nu_0 - \nu)m_0 c^2 = p(\nu_0)^2 c^2 + p(\nu)^2 c^2 - 2p(\nu_0)p(\nu)c^2 \cos \theta.$$

Or le photon, s'il se comporte en tout point comme une particule sans masse, doit vérifier $E = h\nu = pc$. Cela permet de simplifier et d'aboutir à

$$\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu_0}\right) = \frac{h}{m_0 c^2} (1 - \cos \theta).$$

Pour terminer, utilisons la relation $\lambda = c/\nu$ pour obtenir l'expression du déplacement COMPTON en fonction de l'angle θ

$$\boxed{\delta\lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta)}.$$

Comme le déplacement COMPTON est positif, la différence entre les fréquences est négative: le photon émis est moins énergétique que le photon incident.

Le calcul a mis en évidence une grandeur homogène à une longueur, et appelée longueur d'onde COMPTON

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c},$$

qui correspond à la longueur d'onde associée à la transformation en énergie lumineuse d'un électron au repos: $m_0 c^2 = h\nu$.

c) Ordre de grandeur.

D'après la formule précédente, on trouve comme valeur numérique pour la longueur d'onde de COMPTON:

$$\lambda_c = 0,024 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

Pour terminer, mentionnons qu'ici nous avons considéré l'électron libre et au repos. S'il est, en réalité, fortement lié à l'atome, la formule du déplacement est différente: on se trouve dans un cas qui revient à affecter à l'électron une

masse effective élevée, et donc un déplacement quasiment nul ; on a alors une diffusion de RAYLEIGH.

Solution de l'exercice

1. Par analogie avec la physique classique, les deux premiers termes du Hamiltonien, à savoir ceux comportant les opérateurs quantités de mouvement, représentent l'énergie cinétique totale d'une particule de masse m .

Les deux suivants représentent l'énergie potentielle de cette même particule : il s'agit d'une énergie élastique. L'expression donnée est en effet identique à celle obtenue pour un ressort de constantes de raideur K_1 et K_2 suivant respectivement les directions définies par \vec{e}_x et \vec{e}_y .

Pour de tels oscillateurs classiques, la pulsation propre d'oscillation est donnée par la formule $\omega = (K/m)^{1/2}$. En poursuivant l'analogie, on définit pour le système quantique les pulsations :

$$\boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{K_1}{m}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{K_2}{m}}}.$$

2. Pour un oscillateur harmonique quantique à une dimension, c'est-à-dire possédant un Hamiltonien de la forme

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{Kx^2}{2},$$

le spectre d'énergie des états propres est discret (voir les rappels de cours).

Soit ϕ_n la fonction stationnaire associée à un état propre, elle vérifie $H\phi_n = E_n\phi_n$, avec

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu \quad \text{où} \quad \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}.$$

On va s'aider de ce résultat pour trouver le spectre de l'oscillateur bidimensionnel.

On constate que le Hamiltonien de notre problème peut s'écrire sous forme séparée

$$H = H_x + H_y, \quad \left\{ \begin{array}{l} H_x = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{K_1 x^2}{2} \\ H_y = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{K_2 y^2}{2} \end{array} \right.$$

où chaque terme H_α ne dépend que de la variable d'espace α , à l'exclusion de toute autre.

Sans aborder le formalisme algébrique qui permet de mener plus avant la mécanique quantique, précisons que celle-ci trouve une expression adéquate dans ce que les mathématiciens appellent les espaces hermitiens. Ainsi, trouver les fonctions d'onde stationnaires d'un Hamiltonien revient dans ce formalisme à trouver les fonctions propres de l'opérateur Hamiltonien ; on se ramène à

des problèmes de diagonalisation. Il est alors utile de se servir des nombreuses propriétés mathématiques établies dans ce domaine, et ce sont elles qui nous permettent d'affirmer que lorsque le Hamiltonien est scindable, comme dans l'exemple précédent, alors on peut se restreindre à la recherche de fonctions propres à variables séparées :

$$\phi(x, y) = \phi_1(x) \phi_2(y).$$

Le problème se factorise en deux sous problèmes suivant les lois (on rappelle que $H = H_x + H_y$) :

$$H\phi = E\phi \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \phi & = \phi_1(x) \phi_2(y) \\ E & = E_1 + E_2 \\ H_\alpha \phi_\alpha & = E_\alpha \phi_\alpha \quad \text{où } (\alpha = x \text{ ou } y). \end{cases}$$

On est ramené pour chaque sous problème à un oscillateur harmonique monodimensionnel avec pour chacun, des fréquences propres ν_1 et ν_2 données par $\nu_i = \omega_i/2\pi$. On obtient comme spectre total

$$E = h\nu_1 \left(n_1 + \frac{1}{2} \right) + h\nu_2 \left(n_2 + \frac{1}{2} \right).$$

3.a) Lorsque $K = K_1 = K_2$, les deux fréquences deviennent identiques et

$$E = h\nu(n_1 + n_2 + 1).$$

Application Numérique : $\nu = 1,05 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$.

État fondamental: $n_1 + n_2 = 0, E_0 = 4,1 \cdot 10^{-2} \text{ eV}$.

Premier état excité: $n_1 + n_2 = 1, E_1 = 8,3 \cdot 10^{-2} \text{ eV}$.

Deuxième état excité: $n_1 + n_2 = 2, E_2 = 1,24 \cdot 10^{-1} \text{ eV}$.

3.b) Le degré de dégénérescence d'un état d'énergie E est donné par le nombre d'états quantiques distincts possédant cette énergie.

– État fondamental :

$$n_1 + n_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad n_1 = 0, n_2 = 0.$$

On a donc une seule possibilité ce qui correspond à un état non dégénéré.

– Premier état excité :

$$n_1 + n_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad (n_1, n_2) = (1, 0) \text{ ou } (0, 1).$$

Cet état d'énergie est deux fois dégénéré.

– Deuxième état excité :

$$n_1 + n_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad (n_1, n_2) = (2, 0) \text{ ou } (1, 1) \text{ ou } (0, 2).$$

Cet état d'énergie possède un degré de dégénérescence égal à trois.

3.c) Si l'on peut transiter du fondamental jusqu'au premier état excité par absorption photonique, alors l'énergie associée au photon incident doit vérifier

$$\boxed{h \frac{c}{\lambda} = E_1 - E_0.}$$

Application Numérique : $\lambda = 28 \mu m.$

3.d) Étant donnée la symétrie du problème, on peut dire que la probabilité de trouver notre particule sur un quart particulier de l'espace est justement un quart. En effet, la densité de probabilité de présence de la particule en (x, y) est invariante par les changements $x \rightarrow -x$ et $y \rightarrow -y$:

$$\begin{aligned} P_{1/4} \text{ d'espace} &= \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 dx dy |\phi(x, y)|^2 \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy |\phi(x, y)|^2 \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Un calcul direct à partir de la fonction d'onde est aussi possible. Des résultats sur l'oscillateur harmonique à une dimension, on a pour la fonction d'onde normalisée de l'état fondamental (voir les rappels de cours)

$$\phi_\alpha = \frac{2^{1/4} (Km)^{1/8}}{h^{1/4}} e^{-m\omega\alpha^2/(2\hbar)}.$$

La densité de probabilité de présence en un point (x, y) étant donnée par la norme au carré de la fonction d'onde totale (le produit des fonctions d'onde à une dimension), il vient

$$\begin{aligned} P_{1/4} \text{ d'espace} &= \int_{-\infty}^0 dx \int_{-\infty}^0 dy \frac{2}{h} \sqrt{Km} e^{-m\omega(x^2+y^2)/\hbar} \\ &= \frac{2}{h} \sqrt{Km} \left(\int_{-\infty}^0 e^{-m\omega x^2/\hbar} dx \right) \left(\int_{-\infty}^0 e^{-m\omega y^2/\hbar} dy \right) \\ &= \frac{2}{h} \sqrt{Km} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}}. \end{aligned}$$

Finalement, en reprenant pour ω l'expression trouvée au 1., on aboutit au résultat escompté

$$\boxed{P_{1/4} \text{ d'espace} = \frac{1}{4}.}$$

7.5.2 Attention à la marche (de potentiel) !

Université Paul Sabatier, Toulouse

Durée 1h30

Les quatre exercices sont indépendants.

1. Franchissement d'une marche d'énergie potentielle.

Un faisceau de particules d'énergie $E > 0$, tombe sur un puits d'énergie potentielle, infiniment large, de profondeur $-U_0$ ($U_0 > 0$). L'énergie potentielle peut donc s'écrire: $U(x) = -U_0$ pour $x \geq 0$ et $U(x) = 0$ ailleurs.

- Représenter graphiquement $U(x)$. Écrire l'équation de SCHRÖDINGER à laquelle satisfait l'amplitude complexe $\psi(x)$ des états stationnaires dans les différentes régions. En déduire la forme de la solution dans tout l'espace en précisant la signification physique des différents termes.
- Établir les expressions des facteurs de réflexion et de transmission en amplitude complexe. Calculer ces facteurs lorsque $U_0/E = 3$.
- Quels sont les facteurs de réflexion et de transmission en intensité R et T ? Calculer R et T pour $U_0/E = 3$.

2. Probabilité d'observer un atome.

L'amplitude de la fonction d'onde $\Psi(x, t)$, associée à des états stationnaires d'un atome d'énergie E , dans un puits d'énergie potentielle, infiniment profond, de largeur $L = 2 \text{ nm}$, a pour expression :

$$\psi(x) = A \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \quad \text{pour } 0 < x < L$$

$$\psi(x) = 0 \quad \text{ailleurs.}$$

- Représenter graphiquement $\psi(x)$ et $|\psi(x)|^2$. Calculer numériquement la constante A en précisant son unité. Donner l'expression de la fonction d'onde $\Psi(x, t)$.
- Trouver la probabilité de détecter l'atome entre $x = 0$ et $x = L/3$.

3. Taille de l'atome d'hydrogène.

Dans le spectre de l'atome d'hydrogène, la radiation α de la série de LYMAN, qui correspond à la transition du niveau $n = 2$ au niveau $n = 1$, a pour longueur d'onde $\lambda = 121,60 \text{ nm}$.

- Rappeler l'expression de l'énergie des états stationnaires dans un puits d'énergie potentielle, infiniment profond, unidimensionnel, de largeur L , pour une particule de masse m .
- À l'aide du modèle précédent, trouver un ordre de grandeur du diamètre de l'atome d'hydrogène. Comparer à la valeur connue du diamètre de l'atome de BOHR.

4. Proton et hélium dans un noyau.

Une particule dans un noyau peut être considérée comme une particule dans un puits d'énergie potentielle infiniment profond, unidimensionnel, de largeur $L = 10 F$ (le Fermi F vaut $10^{-15} m$).

Quelle est, en MeV , l'énergie cinétique minimale que peut avoir un proton dans le noyau? Même question pour un hélium (noyau d'hélium).

Donnée de constantes fondamentales

Vitesse de la lumière dans le vide: $c \simeq 3 \cdot 10^8 m/s$

Masse de l'électron: $m_e \simeq 0,9 \cdot 10^{-30} kg$

Masse du proton: $m_p \simeq 1836 m_e$

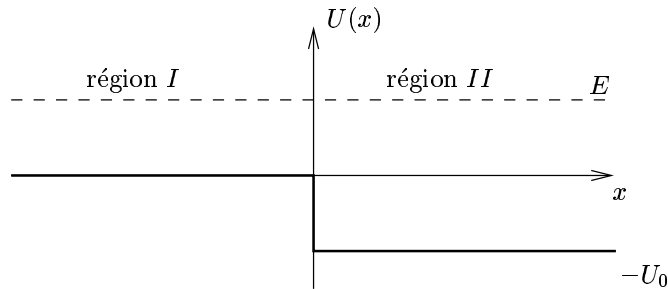
Charge élémentaire: $q_e = 1,602 \cdot 10^{-19} C$

Constante de PLANCK: $h = 6,626 \cdot 10^{-34} J \cdot s$

Solution

Franchissement d'une marche de potentiel

1.a) D'après la description faite dans l'énoncé, la figure du potentiel $U(x)$ est



Il y a autant d'équations de SCHRÖDINGER à écrire que de régions séparées par des discontinuités. Les Hamiltoniens à considérer sont respectivement

$$H_I = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad H_{II} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - U_0,$$

où les régions I et II sont définies sur le schéma du potentiel.

Nous ne considérons que les états stationnaires; les équations de SCHRÖDINGER pour une fonction d'onde stationnaire ψ d'énergie E sont alors simplement

$$\begin{cases} \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = E\psi & \text{région } I \\ \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - U_0 \psi = E\psi & \text{région } II. \end{cases}$$

En introduisant les grandeurs

$$k_I^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad \text{et} \quad k_{II}^2 = \frac{2m(E + U_0)}{\hbar^2}$$

le système se réécrit

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \psi_I}{\partial x^2} + k_I^2 \psi_I = 0 \\ \frac{\partial^2 \psi_{II}}{\partial x^2} + k_{II}^2 \psi_{II} = 0. \end{cases}$$

Les fonctions d'onde indicées I et II sont les restrictions de la fonction d'onde totale ψ aux régions de même nom. Il faudra en fin de calcul reconstruire la fonction totale en tenant compte des conditions de raccordement.

Les équations auxquelles nous sommes maintenant confrontés sont linéaires, du second ordre, et admettent pour solutions

$$\begin{cases} \psi_I = A e^{ik_I x} + B e^{-ik_I x} \\ \psi_{II} = C e^{ik_{II} x} + D e^{-ik_{II} x} \end{cases}.$$

Il n'est pas restrictif de prendre k_I et k_{II} positifs. La fonction d'onde se présente sous une forme commune en électromagnétisme : l'onde plane. On peut par analogie donner la signification de chacun des termes : les termes de coefficients A ou C correspondent à des particules se déplaçant dans le sens des $x > 0$, et les deux autres termes sont par opposition associés à des propagations dans l'autre sens.

Nous savons que l'ensemble des particules provient initialement de la région I , et comme le seul obstacle est situé en $x = 0$, il ne peut y avoir de propagation vers les $x < 0$ dans la région II . Il s'ensuit que :

$$\boxed{D = 0}.$$

Pour terminer la recherche de la fonction d'onde, il nous reste à donner les conditions de raccordement en $x = 0$. La discontinuité du potentiel étant d'amplitude finie U_0 , la fonction d'onde et sa dérivée doivent être toutes les deux continues soit

$$\begin{cases} \psi_I(x=0) = \psi_{II}(x=0) \\ \psi'_I(x=0) = \psi'_{II}(x=0) \end{cases}.$$

Une fois reporté dans les formes génériques trouvées pour nos fonctions d'onde, il vient

$$\begin{cases} A + B = C \\ (A - B)k_I = C k_{II} \end{cases}.$$

1.b) Les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude, r et t , se définissent en gardant en mémoire la signification physique de chacun des termes en présence : A est associé aux particules incidentes, B aux particules réfléchies et C aux particules transmises. Cela nous permet de poser

$$r = \frac{B}{A}, \quad t = \frac{C}{A}.$$

Du système d'équations traduisant les conditions de raccordement on extrait les valeurs de nos deux grandeurs

$$\boxed{r = \frac{k_I - k_{II}}{k_I + k_{II}}} \quad , \quad \boxed{t = \frac{2k_I}{k_I + k_{II}}}$$

Application Numérique : avec $U_0 = 3E$, on obtient $r = -1/3$ et $t = 2/3$.

1.c) Pour les coefficients de réflexion-transmission en intensité qui sont eux directement liés à la proportion de particules incidentes, réfléchies ou transmises, on part de $R = |r|^2$. Utilisant la question précédente, on obtient l'expression

$$\boxed{R = \left(\frac{k_I - k_{II}}{k_I + k_{II}} \right)^2}$$

Pour le coefficient de transmission se pose le même type de problème qu'en optique (les indices des deux milieux jouent alors le rôle tenu ici par les deux nombres d'onde) : la relation qui lie T et t n'est pas aussi évidente que pour le coefficient de réflexion, et le plus simple est d'utiliser une propriété de conservation. En optique la quantité conservée est l'énergie lumineuse, mais ici c'est le nombre total de particules. De ce fait la somme du nombre des particules transmises et réfléchies se doit d'être égale au nombre de particules incidentes soit

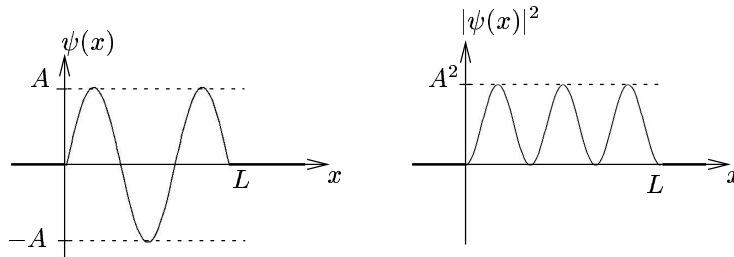
$$R + T = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{4k_I k_{II}}{(k_I + k_{II})^2}}$$

Application Numérique : de la question 1.b) on déduit $R = 1/9$ et $T = 8/9$.

PROBLÈMES

Probabilité d'observer un atome

2.a) Une fois précisée la formule explicite de la fonction d'onde stationnaire à considérer, nous pouvons en donner l'allure



Le module carré de la fonction d'onde, $|\psi(x)|^2$, représente la densité de probabilité de présence de la particule au point x . Autrement formulé, la probabilité de trouver la particule dans un intervalle $x, x + dx$ a pour expression

$$dP(x) = |\psi(x)|^2 dx.$$

Comme la particule se trouve de façon certaine sur l'axe des x , la probabilité de l'y trouver vaut 1. Traduit mathématiquement cela s'énonce

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

On utilise l'expression de ψ pour poursuivre :

$$1 = A^2 \int_0^L \sin^2 \left(\frac{3\pi x}{L} \right) dx.$$

On pose le changement de variable $u = 3\pi x/L$ et l'on aboutit après l'intégration de $\sin^2 u$ entre 0 et 3π à

$$\boxed{A = \sqrt{\frac{2}{L}}}.$$

La constante de normalisation A est donc homogène à l'inverse de la racine carrée d'une longueur : $[A] = m^{-1/2}$.

Application Numérique : $A = 1 \text{ (nm)}^{-1/2}$.

La fonction d'onde complète (partie spatiale et partie temporelle) d'un état stationnaire s'écrit

$$\Psi(x, t) = \psi(x)\varphi(t),$$

où φ vérifie l'équation différentielle

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = E\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = e^{-iEt/\hbar}.$$

En recombinant les deux parties de la fonction d'onde $\Psi(x, t)$ à variables séparées, on trouve

$$\boxed{\Psi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \left(\frac{3\pi x}{L} \right) e^{-iEt/\hbar}}.$$

Remarque : on sait que $k = 3\pi/L$ est relié à l'énergie par

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

(voir par exemple l'exercice précédent). De plus dans un puits d'énergie potentielle, infiniment profond, les états stationnaires ont une énergie quantifiée par la formule

$$E_n = \frac{n^2 \hbar^2}{8mL^2}.$$

Rappelons que pour un tel puits, le potentiel est nul entre 0 et L , et infini ailleurs. En combinant ces expressions, on trouve $n = 3$. On aurait pu obtenir

immédiatement de la représentation graphique de ψ que celle-ci représentait le 3^e niveau d'énergie ; pour cela il suffit en effet de compter le nombre de noeuds, c'est-à-dire d'annulations de la fonction en dehors des extrémités : aucun noeud pour le fondamental ($n=1$) et un noeud ajouté par niveau.

2.b) Remarquons que sur l'intervalle $[0, L]$, le module carré de la fonction d'onde est de périodicité $L/3$. Ce module est nul ailleurs. Il est donc équiprobable de trouver la particule sur l'un quelconque des trois tiers de L d'où

$$P([0, L/3]) = \frac{1}{3}.$$

Pour les sceptiques, il reste la solution calculatoire :

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{L/3} |\psi(x)|^2 dx \\ &= \frac{2}{3\pi} \int_0^\pi \sin^2 u du \\ &= \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

où la variable u provient du même changement de variable qu'auparavant.

Taille de l'atome d'hydrogène

3.a) L'énergie des états stationnaires dans un puits de potentiel infiniment profond, unidimensionnel, de largeur L , pour une particule de masse m , est quantifiée et ne peut prendre que les valeurs données par

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}.$$

3.b) On utilise le modèle précédent pour calculer en fonction de L l'écart d'énergie associé à une transition entre les niveaux $n = 1$ et $n = 2$:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{3}{8} \frac{h^2}{mL^2},$$

où l'inconnue est ici la taille du puits c'est-à-dire la taille de la région à l'intérieur de laquelle les électrons sont confinés ; autrement dit l'atome. Parallèlement à l'expression trouvée auparavant, on sait que cette transition est associée à une émission photonique de longueur d'onde $\lambda = 121,60 \text{ nm}$ ce qui correspond à une énergie

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda}.$$

En reliant les deux formules on obtient comme taille

$$L = \sqrt{\frac{3}{8} \frac{\lambda h}{mc}}.$$

Application Numérique : $L = 0,334 \text{ nm}$.

Le rayon de BOHR est $a_0 = 0,053 \text{ nm}$ (il faut juste retenir l'ordre de grandeur). La taille correspondante de l'atome d'hydrogène est donc $0,1 \text{ nm}$. L'estimation qualitative que nous avons obtenue est raisonnable, compte tenu de la simplicité du modèle.

Proton et hélion dans un noyau.

4. On sait pour l'avoir rappelé à maintes reprises au cours de ce problème que les énergies des états stationnaires d'un puits de potentiel infini sont données par

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}.$$

Comme n est un entier naturel à valeurs dans $[1, +\infty[$, l'énergie du niveau fondamental est

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2}.$$

De plus, dans ce puits infiniment profond, l'énergie du proton est purement cinétique puisque l'équation de SCHRÖDINGER donnant les niveaux E_n est résolue en prenant la constante associée au potentiel nulle. L'énergie cinétique minimale de notre proton est de ce fait E_1 soit

$$E_c(\min) = \frac{h^2}{8mL^2}.$$

Application Numérique : $E_c(\min) = 3,32 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 2,07 \text{ MeV}$.

Pour un hélion, il suffit de reprendre la même formule avec m valant la masse d'un noyau d'hélium (soit $2m_p$), pour trouver $E_c(\min) = 1,03 \text{ MeV}$.