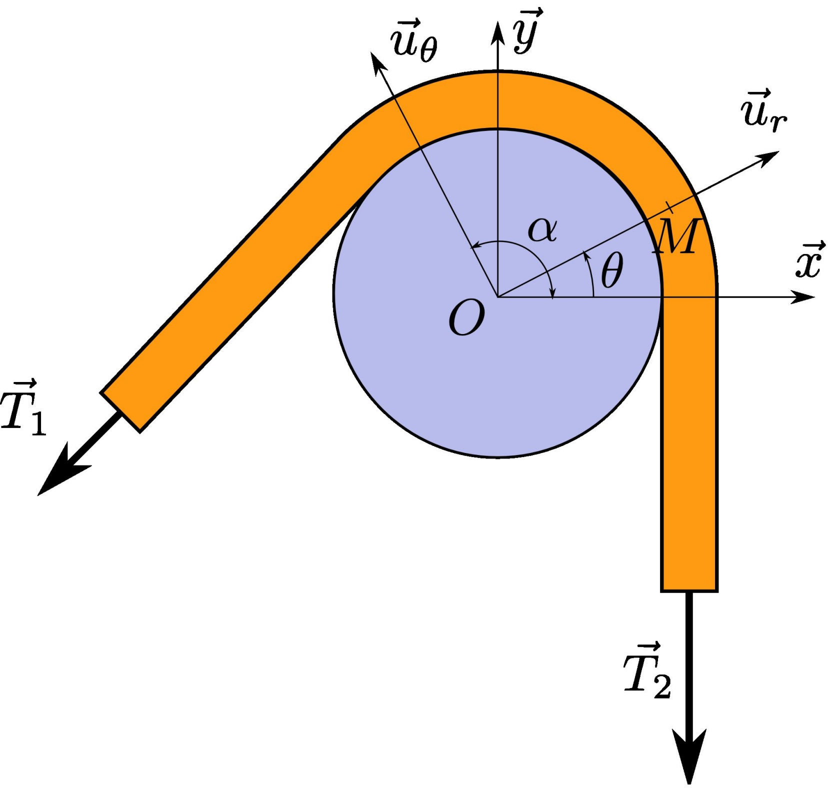
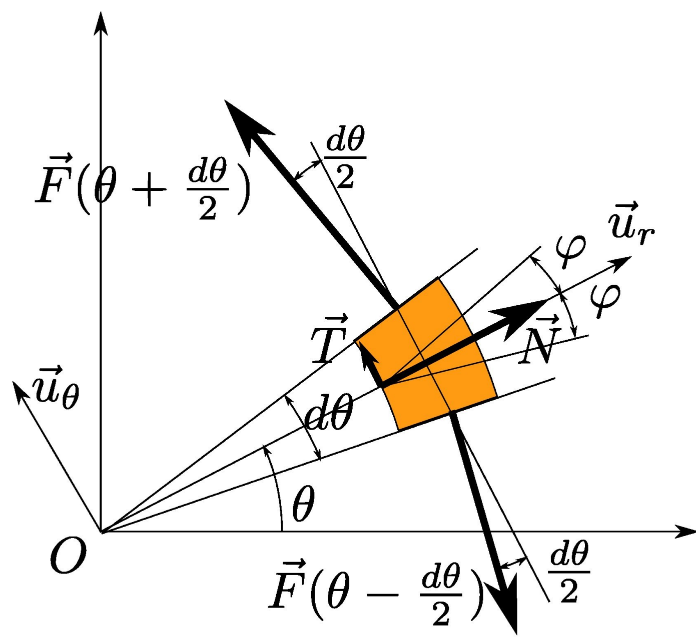
Modélisation théorique du frottement exponentiel

Le problème du frottement d'une corde, d'une sangle ou d'une courroie sur une poulie ou un tambour est un problème classique.

La modélisation proposée ci-dessous montre que la tension dans la corde évolue avec l'angle d'enroulement selon une loi exponentielle, dépendant du coefficient de frottement.





On considère une corde enroulée d'un angle α autour d'un tambour.
La corde est à la limite du glissement sous l'action des deux actions $\vec{T}_2$ et $\vec{T}_1$.
Soit $M(\theta)$ un point de l'enroulement.

On isole une tranche élémentaire de corde en $M(\theta)$ de largeur $d\theta$.
Celle-ci est soumise

– aux actions de tension de la corde de part et d'autre $\vec{F}(\theta+\frac{d\theta}{2})$ et $\vec{F}(\theta-\frac{d\theta}{2})$

– à l'action du tambour, qui peut se décomposer en une partie normale $\vec{N}=N.\vec{u}_r$ et une partie tangentielle $\vec{T}=T.\vec{u}_\theta$.

La loi du frottement de Coulomb impose, à la limite du glissement : $|T|=f.N$.

Le Principe Fondamental de la Statique s'écrit alors :

$$\vec{N}+\vec{T}+\vec{F}(\theta+\frac{d\theta}{2})+\vec{F}(\theta-\frac{d\theta}{2})=\vec{0}$$

La projection de cette équation sur la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ s'écrit :

$$\begin{cases} N+0-F(\theta+\dfrac{d\theta}{2}).\sin\dfrac{d\theta}{2}-F(\theta-\dfrac{d\theta}{2}).\sin\dfrac{d\theta}{2}=0 \\ 0+T+F(\theta+\dfrac{d\theta}{2}).\cos\dfrac{d\theta}{2}-F(\theta-\dfrac{d\theta}{2}).\cos\dfrac{d\theta}{2}=0 \end{cases}$$

L'angle $d\theta$ étant petit, il est possible de linéariser ces deux équations ($\sin\dfrac{d\theta}{2}\simeq\dfrac{d\theta}{2}$ et $\cos\dfrac{d\theta}{2}\simeq 1$), ce qui conduit au système :

$$\begin{cases} N-\left(F(\theta+\dfrac{d\theta}{2})-F(\theta-\dfrac{d\theta}{2})\right).\dfrac{d\theta}{2}=0 \\ T+F(\theta+\dfrac{d\theta}{2})-F(\theta-\dfrac{d\theta}{2})=0 \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} N-F(\theta).d\theta=0 \\ T+dF(\theta)=0 \end{cases}$$

En utilisant la loi de Coulomb $T=f.N$, on élimine N et T pour obtenir une équation différentielle en $F(\theta)$:

$$\boxed{f.F(\theta).d\theta+dF=0}$$

L'intégration de cette équation différentielle pour obtenir l'expression de $F(\theta)$ sous forme d'une exponentielle est alors triviale.