pourlascience.fr

Fluidifier le trafic… en coupant une route !

Édouard Kierlik, Jean-Michel Courty

9-11 minutes

En 1990, pour le jour de la Terre, le responsable de la circulation de New York décida de fermer la 42e rue qui était congestionnée en permanence. De nombreuses voix s'élevèrent contre cette initiative et prédisaient un cauchemar pour la circulation dans les rues alentour. Pourtant, le jour venu, le trafic était plus fluide qu'à l'accoutumée. Et cet exemple n'est pas isolé ! On a identifié de nombreuses situations où fermer une route à la circulation améliore l'état général du trafic. Ce phénomène est connu sous le nom de « paradoxe de Braess », d'après le mathématicien allemand Dieter Braess qui l'a étudié vers 1968 dans le cadre de la théorie des réseaux.

Afin de comprendre comment cela est possible, on peut analyser un système mécanique analogue : une masse suspendue par des ficelles et des ressorts peut remonter lorsqu'on coupe l'une des ficelles qui la retiennent.

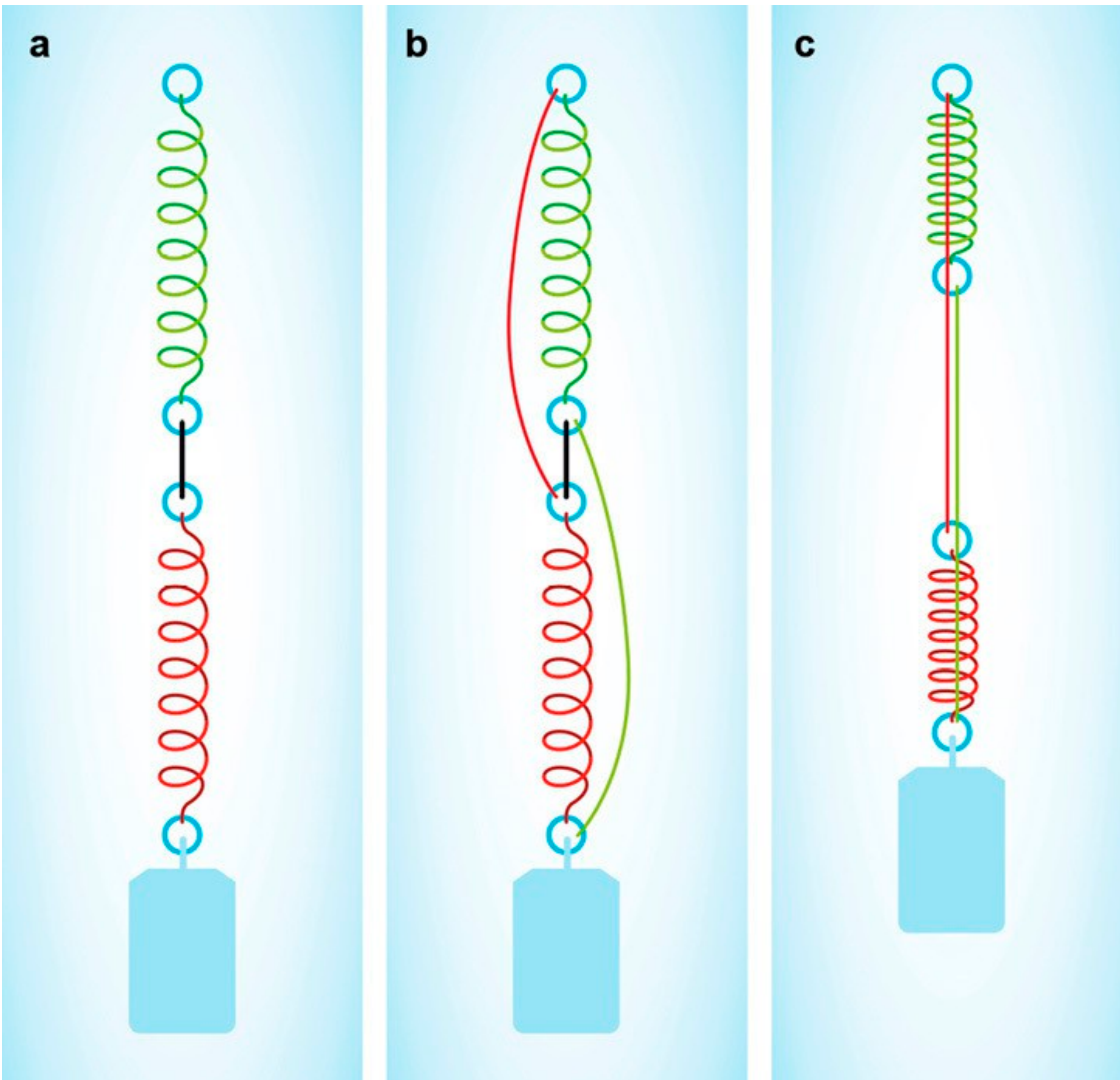
Un dispositif de suspension qui paraît paradoxal

Pour construire chez soi ce système mécanique paradoxal, nous avons simplement besoin d'une masse, de deux élastiques (ou ressorts) identiques et de ficelle. La construction sera facilitée par l'utilisation d'élastiques et de ficelles colorés pour bien distinguer les divers éléments du réseau, ainsi que d'anneaux métalliques pour connecter entre eux les différentes parties. Une canette de soda de 33 centilitres fera office de masse, l'anneau de la languette d'ouverture facilitant son accroche.

Pour commencer, attachons en partant du haut un élastique vert, puis un court morceau de ficelle noire, un élastique rouge et enfin la masse. Suspendons le tout. Soumis à une tension égale au poids de la canette, les deux élastiques (identiques à part leur couleur) s'allongent alors d'une certaine longueur ΔL. Dans cette configuration, si l'on coupe la ficelle intermédiaire noire, la canette tombe puisqu'elle n'est plus retenue.

Ajoutons alors deux ficelles de sécurité pour la retenir. Nous choisissons comme longueur de chaque ficelle tout juste un peu plus que la somme de la longueur d'un élastique tendu et la longueur de la ficelle intermédiaire noire. La première ficelle, rouge, joint le point d'accroche du dispositif à l'extrémité haute de l'élastique inférieur (rouge). La seconde relie l'extrémité basse de l'élastique supérieur (vert) au point d'accroche avec la canette. La tension dans ces ficelles est nulle tant que la ficelle intermédiaire noire est présente.

Que se passe-t-il si l'on coupe cette dernière ? On s'attend à ce que la masse descende puisqu'on coupe un lien qui la soutient. Pourtant, non seulement la masse ne tombe pas, mais en plus elle remonte !



Le dispositif mécanique qui illustre le paradoxe de Braess est construit en suspendant d'abord une masse à deux ressorts (ou élastiques) identiques montés en série et reliés l'un à l'autre par un petit morceau de ficelle (a). On accroche ensuite deux ficelles de sécurité comme illustré (b), la longueur de chacune dépassant légèrement la somme de la longueur du ressort allongé et de celle de la ficelle noire. Lorsqu'on coupe la ficelle noire, la masse se retrouve suspendue à deux systèmes ressort + ficelle parallèles (c). Chacun de ces deux systèmes supporte alors la moitié du poids de la masse, et l'allongement des ressorts est donc réduit de moitié : la masse remonte.

Pour comprendre ce comportement contre-intuitif, observons le nouveau système. Le réseau de ficelles et élastiques qui soutient la masse est maintenant formé de deux branches identiques constituées d'une ficelle et d'un élastique. Comme chacune de ces deux branches soutient la moitié du poids de la canette, la tension est la moitié de ce qu'elle était qu'auparavant. Les élastiques sont donc moins tendus et la canette remonte. En termes de physiciens, on est passé d'une configuration où les ressorts étaient montés « en série » à une configuration où ils sont montés « en parallèle ».

De combien la masse remonte-t-elle ? Considérons la situation idéale où la longueur de la ficelle noire ainsi que celles des anneaux de connexion sont négligeables. Pour qu'elles ne soient pas tendues, la longueur des ficelles de sécurité doit alors tout juste dépasser la longueur des élastiques tendus.

Sous ces hypothèses, la longueur totale du dispositif initial est égale à deux fois la longueur d'un élastique soutenant toute la canette. Lorsqu'on a coupé la ficelle intermédiaire, la longueur totale est la somme de la longueur d'une ficelle (presque égale à celle de l'élastique tendu) et d'un élastique soutenant la moitié du poids. Autrement dit, la masse remonte d'une hauteur égale à la moitié de l'allongement initial, soit $\Delta L/2$. Quel est le maximum que l'on puisse obtenir ? D'après un théorème général sur ce type de réseau, le raccourcissement ne peut dépasser le quart de la longueur totale : ce maximum serait atteint ici si la longueur à vide (sans tension) des élastiques était nulle.

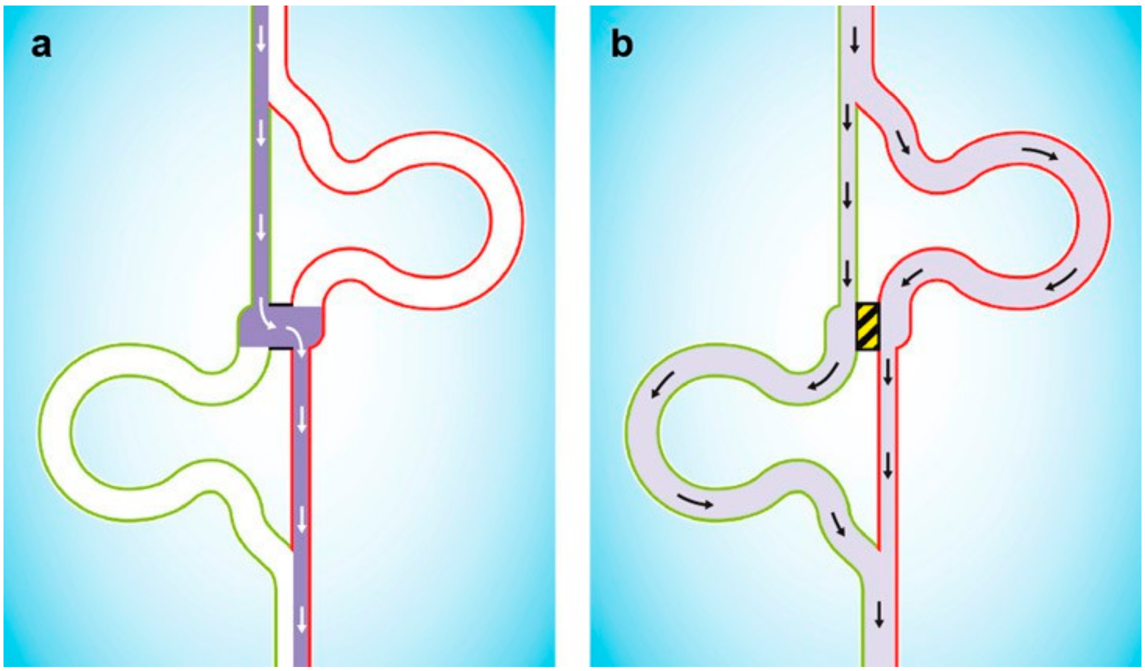
Remontée sous conditions

Remarquons, en outre, que la canette ne remonte pas systématiquement dans la configuration que nous avons considérée. Pour qu'elle remonte, il faut en effet que la longueur des ficelles de sécurité soit plus longue que celle de l'élastique soutenant la moitié de la charge (sinon, on est en régime parallèle dès la première situation), et plus courte qu'une fois et demie la longueur de l'élastique tendu (sinon, le raccourcissement des élastiques ne compense pas l'allongement qui se produit lorsque la ficelle se tend).

Ce paradoxe se retrouve dans bien des domaines de la physique, par exemple en électricité où résistances et diodes remplacent nos ressorts et ficelles. Mais il y a plus proche de notre quotidien : un réseau routier, dans des villes embouteillées ou sur le trajet des vacances.

Bien répartir le trafic

Supposons que, chaque matin, entre 7 heures et 8 heures, environ 1 000 véhicules partent d'une ville A pour se rendre à la ville B, et que de chacune de ces deux villes partent une autoroute et une route étroite qui se rejoignent au niveau d'un pont commun. L'autoroute tolère un fort trafic, mais le chemin est plus long ; on suppose que la durée du trajet est de 20 minutes, indépendamment du trafic (tout comme la longueur des ficelles ne dépend pas de la charge suspendue). La route étroite est plus courte, mais davantage sujette aux embouteillages ; imaginons que la durée du trajet en minutes est égale au flux horaire de véhicules divisé par 50 (c'est l'analogue de l'élastique, dont la longueur est proportionnelle à la tension). Le pont qui relie les deux points de jonction entre route et autoroute est l'analogue de la ficelle noire.



On considère le réseau routier illustré ici, reliant une ville (en haut) à une autre (en bas). Lorsque le pont est ouvert (a), le trajet le plus court est celui passant par les routes rectilignes (mais étroites). Tous les automobilistes seront tentés de l'emprunter, au prix d'une forte densité de trafic (en violet foncé), voire d'embouteillages ; le trafic est alors nul (en blanc) sur les autoroutes, plus longues. Si le pont est fermé (b), les deux trajets possibles deviennent équivalents : le trafic (en violet clair) se répartit alors équitablement entre les deux, ce qui évite la congestion du réseau.

Tant qu'il y a moins de 1 000 véhicules, le trajet par la petite route est plus rapide que par l'autoroute. Comme les automobilistes déterminent individuellement leur parcours, chacun d'eux choisira comme itinéraire la petite route verte puis, en passant par le pont, la petite route rouge. S'ils sont 1 000, le temps de trajet total sera de 20 + 20 = 40 minutes.

Si le pont est bloqué, le réseau présente alors deux parcours équivalents. Chaque nouvel automobiliste qui arrive a intérêt à prendre le trajet où le nombre de véhicules déjà présent est le plus petit, si bien que, statistiquement, ils se répartissent de façon égale entre les deux trajets. Il y aura donc 500 véhicules sur chaque trajet, dont la durée sera de 500/50 + 20 = 30 minutes, c'est à dire 10 minutes de moins qu'avec le pont !

L'analogie entre les deux situations n'est cependant pas parfaite : alors que la mécanique respecte scrupuleusement « les lois du monde », dans le cas du trafic routier, le résultat découle d'un choix où chacun décide ce qu'il estime le mieux pour lui. Comment se fait-il alors que le résultat global ne soit pas un temps de trajet optimal, comme l'illustre la situation avec le pont ?

C'est parce que, comme Dieter Braess l'a fait remarquer, il faut bien distinguer une situation d'équilibre d'un optimum. Dans le cas du réseau routier, seule une optimisation collective permet de minimiser le temps de trajet : ce n'est que si tous les utilisateurs se mettent ensemble pour décider du chemin de chacun qu'ils peuvent réduire leur temps de trajet. Dans le cas contraire, il faut les empêcher de prendre le pont ! Dans le monde réel, les recherches montrent que ce paradoxe est omniprésent dans des situations variées mais qu'il est difficile à identifier parce que l'optimisation des réseaux fait partie des problèmes dits « NP-complets », qui sont les plus complexes.