

Promotion 2007
Année 3
Période 2
PHY569A

PROGRAMMES D'APPROFONDISSEMENT
PHYSIQUE
ÉNERGIES DU XXI^E SIÈCLE

Fusion thermonucléaire

Patrick Mora, Jean-Marcel Rax

Édition 2010

Table des matières

1	Fusion thermonucléaire	5
1.1	Réactions de fusion	5
1.2	Section efficace	7
1.3	Forme de la section efficace $\sigma(E)$	7
1.4	Facteur de Gamow	8
1.5	Facteur nucléaire	10
1.6	Taux thermonucléaire	10
1.7	Comparaison des différentes réactions	13
1.8	Critères de fonctionnement d'un réacteur à fusion	14
1.9	Critère sur $n\tau T$	18
1.10	Fraction brûlée et gain	18
1.11	Les deux voies de la fusion	19
2	Physique des plasmas thermonucléaires	23
2.1	Qu'est-ce qu'un plasma ?	23
2.2	Paramètre de couplage	24
2.3	Fréquences plasmas électroniques et ioniques	25
2.4	Longueur de Debye et effet d'écran	26
2.5	Equations de propagation pour \mathbf{E} and \mathbf{B}	29
2.6	Réponse diélectrique d'un plasma	30
2.7	Ondes électromagnétiques	31
2.8	Ondes plasmas électroniques : corrections thermiques	34
2.9	Ondes acoustiques ioniques	37

3	Confinement inertiel	41
3.1	Introduction	41
3.2	Le paramètre de confinement ρR	41
3.3	Critère type Lawson	45
3.4	Nécessité d'une compression	45
3.5	Allumage par point chaud	46
3.6	La phase d'implosion	48
3.7	Attaque indirecte	50
3.8	Allumage rapide	50
4	Hydrodynamique des plasmas créés par laser	51
4.1	Introduction	51
4.2	L'effet fusée	51
4.3	Structure de l'écoulement en attaque directe	53
4.4	Hydrodynamique : l'écoulement isotherme auto-semblable	54
4.5	Flux de chaleur ; loi de Spitzer-Härm	57
4.6	Validité de la théorie linéaire ; flux limite	58
4.7	Instabilités hydrodynamiques	60
5	Interaction laser-plasma	65
5.1	Absorption des ondes électromagnétiques	65
5.2	Interaction nonlinéaire laser-plasma : pression de rayonnement	68
5.3	Force pondéromotrice : approche fluide	69
5.4	Couplage d'ondes	71
5.5	Diffusion Raman stimulée	74
5.6	Diffusion Brillouin stimulée	77
	Bibliographie	79

Chapitre 1

Fusion thermonucléaire

Au cours de la prochaine décennie, deux grandes installations partiellement ou totalement dédiées à la fusion thermonucléaire vont s'installer sur le sol français : le tokamak international ITER à Cadarache, et le laser Mégajoule à Bordeaux. Si ces deux installations diffèrent dans leurs buts principaux, clairement l'énergie dans le premier cas, également la physique des armes thermonucléaires dans le second cas, elles présentent un certain nombre de caractéristiques communes, dont celles de faire appel aux mêmes réactions nucléaires et de s'appuyer l'une comme l'autre sur les développements récents de la physique des plasmas chauds. Les deux premiers chapitres de cet enseignement porteront donc sur le socle commun, fusion thermonucléaire et physique des plasmas chauds.

1.1 Réactions de fusion

On rappelle tout d'abord (figure 1.1) le diagramme montrant l'énergie de liaison par nucléon en fonction de A , nombre de nucléons par noyau (seuls sont portés les principaux isotopes).

Ce diagramme montre l'intérêt, du point de vue énergétique, de la fusion des noyaux légers d'une part, et de la fission des noyaux lourds d'autre part, l'énergie de liaison étant maximale pour le fer.

Les principales réactions qui vont nous intéresser dans ce cours sont les réactions DT et les réactions DD entre isotopes lourds de l'hydrogène :

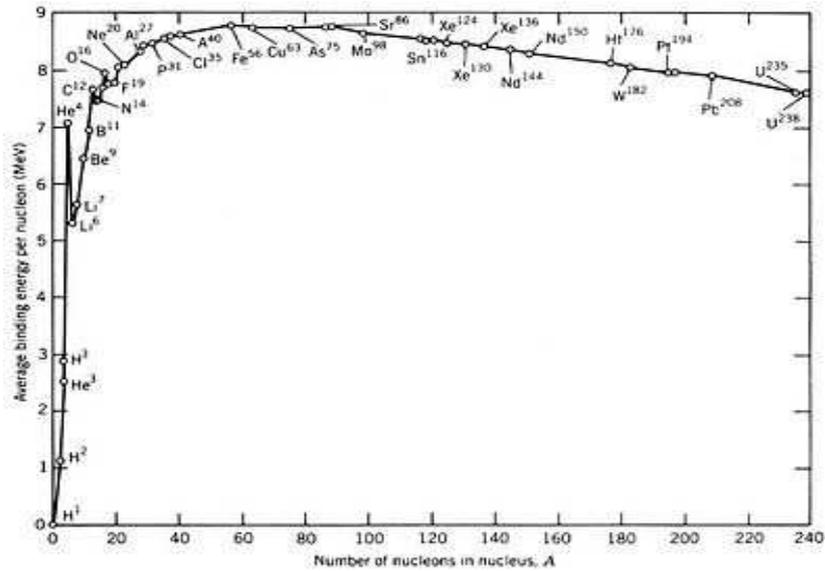
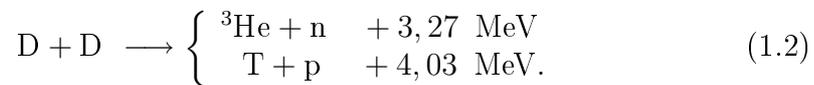
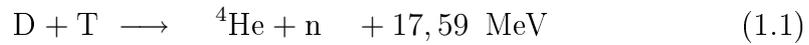


FIG. 1.1 – Energie de liaison par nucléon.



La réaction la plus importante dans notre contexte est la réaction DT, schématisée sur la figure 1.2. A l'issue de cette réaction, le neutron récupère, dans le référentiel du centre de masse, environ 80% de l'énergie, soit 14,05 MeV, tandis que la particule alpha (le noyau ${}^4\text{He}$) en récupère les 20%

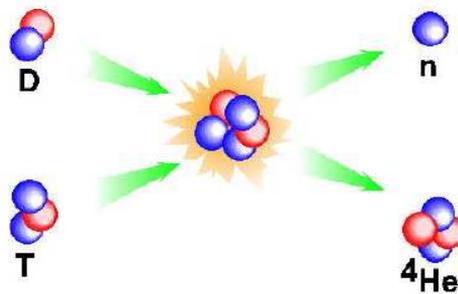


FIG. 1.2 – Schéma de la réaction DT.

restant, soit 3,54 MeV, la répartition de l'énergie étant inversement proportionnelle à la masse, de façon à conserver à la fois l'énergie et l'impulsion.

Signalons aussi les réactions de fission du lithium qui jouent un rôle dans la régénération du tritium :



1.2 Section efficace

La réaction de fusion qui a le plus fort taux de réactions aux températures qui nous intéressent (de l'ordre de la dizaine de keV) est la réaction $\text{D} + \text{T} \longrightarrow {}^4\text{He} + \text{n}$. Nous allons donc centrer la discussion sur cette réaction. Considérons dans un premier temps une situation où l'une des deux espèces — le deutérium par exemple — correspond aux projectiles, tandis que l'autre — le tritium — correspond aux cibles. Le flux de projectiles est donné par le produit $n_D v$, et le nombre de réactions par unité de temps et de volume est donné par

$$N = n_D n_T \sigma(v) v, \quad (1.5)$$

où n_D et n_T sont les nombres de particules de chaque espèce par unité de volume, v la vitesse relative (ici la vitesse des noyaux de deutérium), et $\sigma(v)$ la section efficace de la réaction. Alternativement σ peut s'exprimer en fonction de l'énergie de la particule réduite

$$E = \frac{1}{2} \mu v^2, \quad (1.6)$$

avec

$$\mu = \frac{m_D m_T}{m_D + m_T}. \quad (1.7)$$

1.3 Forme de la section efficace $\sigma(E)$

On exprime en général la section efficace $\sigma(E)$ sous la forme du produit de 3 facteurs,

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} \exp\left(-\sqrt{\frac{E_B}{E}}\right). \quad (1.8)$$

Tout d'abord le facteur $1/E$ apparaît naturellement dans la mesure où tout calcul de section efficace, en mécanique quantique, fait apparaître comme surface de référence la grandeur

$$\sigma_0 = \pi \left(\frac{\lambda_{dB}}{2\pi} \right)^2, \quad (1.9)$$

où λ_{dB} est la longueur d'onde de de Broglie,

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{(2\mu E)^{1/2}}, \quad (1.10)$$

soit

$$\sigma_0 = \frac{\pi h^2}{2\mu E}. \quad (1.11)$$

1.4 Facteur de Gamow

Le facteur de Gamow $\exp(-\sqrt{E_B/E})$ est lié à la répulsion coulombienne entre les deux noyaux, et plus précisément à la probabilité de franchir la barrière de potentiel correspondante par effet tunnel,

$$P(E) \propto P_0(E) = \exp \left(-2 \int_R^{r_0} \kappa(r) dr \right), \quad (1.12)$$

où

$$\kappa(r) = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2\mu [V(r) - E]}, \quad (1.13)$$

où $V(r)$ est le potentiel coulombien répulsif,

$$V(r) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (1.14)$$

R est le rayon en dessous duquel l'interaction forte peut lier les noyaux, ici $R \simeq 4 \cdot 10^{-15}$ m, et r_0 la plus courte distance d'approche classique des deux noyaux (voir figure 1.3),

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 E}. \quad (1.15)$$

Pour $E = 10$ keV, on trouve $r_0 = 144 \cdot 10^{-15}$ m, soit $r_0 \gg R$. On assimile alors la borne inférieure de l'intégrale apparaissant dans l'équation (1.12) à 0, et

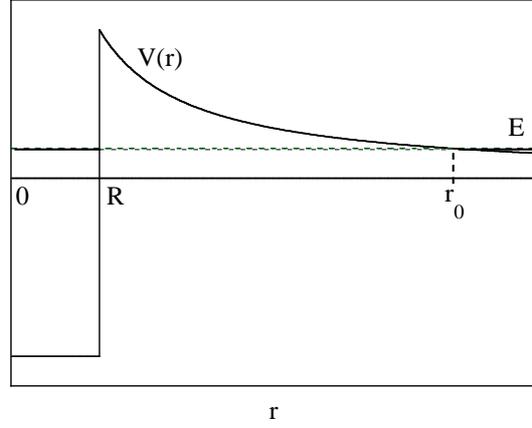


FIG. 1.3 – Schéma de l'effet tunnel.

on écrit¹

$$P_0(E) \simeq \exp \left(-2 \int_0^{r_0} \kappa(r) dr \right) \quad (1.16)$$

$$= \exp \left[-2 \int_0^{r_0} \frac{1}{\hbar} \sqrt{2\mu \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} - E \right)} dr \right] \quad (1.17)$$

$$= \exp \left(-\frac{\sqrt{8\mu E}}{\hbar} r_0 \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{x} - 1} dx \right) \quad (1.18)$$

$$= \exp \left(-\sqrt{\frac{E_B}{E}} \right), \quad (1.19)$$

avec

$$E_B = 2 \left(\frac{e^2}{4\epsilon_0 \hbar} \right)^2 \mu \quad (1.20)$$

$$= 2\pi^2 \alpha^2 \mu c^2, \quad (1.21)$$

où on a fait apparaître la constante de structure fine

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \simeq \frac{1}{137}, \quad (1.22)$$

et l'énergie $\mu c^2 = 1.125 \text{ GeV}$. D'où finalement $E_B = 1.18 \text{ MeV}$.

¹La prise en compte du rapport R/r_0 fini conduit à la multiplication de l'expression (1.19) par un facteur numérique appréciable – de l'ordre de 10 ici –, mais quasi-indépendant de E , et qui est en fait pris en compte dans le facteur nucléaire $S(E)$.

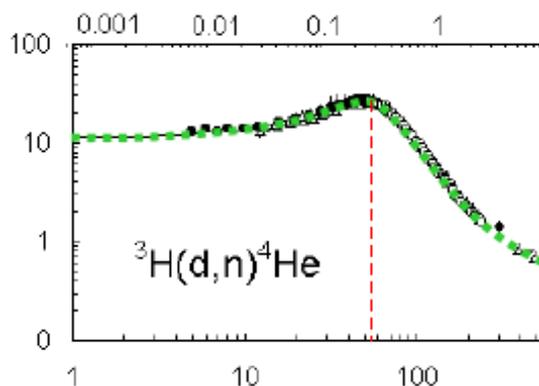


FIG. 1.4 – Facteur nucléaire pour la réaction DT

Le calcul qui précède n'a de sens qu'à basse énergie. Il montre que, même si E est inférieur au sommet de la barrière de potentiel (de l'ordre de 400 keV), le taux de réaction ne s'annule pas.

1.5 Facteur nucléaire

Le facteur nucléaire $S(E)$ correspond à ce qui reste de $\sigma(E)$ après factorisation de $1/E$ et du facteur de Gamow. Il varie ici (dans le cas du DT) relativement peu avec l'énergie, malgré la présence d'une résonance vers 50 keV liée à l'existence d'un état excité du composant intermédiaire qu'est ${}^5\text{He}$. Le facteur nucléaire est de la forme (forme de Breit-Wigner)

$$S_{DT}(E) \propto \frac{1}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4} \quad (1.23)$$

avec $E_R \simeq 50 \text{ keV}$ et $\Gamma \simeq 107 \text{ keV}$. Notons quand même que $S(E)$ varie sensiblement moins que le facteur de Gamow.

1.6 Taux thermonucléaire

On considère maintenant un système à l'équilibre thermodynamique. Le nombre de réactions par unité de temps et de volume se calcule en moyennant le résultat précédemment obtenu,

$$N = n_D n_T \langle \sigma(v)v \rangle, \quad (1.24)$$

la moyenne $\langle \dots \rangle$ devant être faite sur les deux espèces de particules. A la température T , la fonction de distribution de chacune des espèces est donnée par

$$f_i(\mathbf{v}_i) = \left(\frac{m_i}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{m_i v_i^2}{2k_B T} \right), \quad (1.25)$$

où $f_i(\mathbf{v}_i)$ est normalisée à 1, c'est-à-dire

$$\int f_i(\mathbf{v}_i) d\mathbf{v}_i = 1. \quad (1.26)$$

En introduisant le vitesse relative $\mathbf{v} = \mathbf{v}_D - \mathbf{v}_T$ et la vitesse du centre de masse $\mathbf{V} = (m_D \mathbf{v}_D + m_T \mathbf{v}_T) / (m_D + m_T)$, ainsi que la masse totale $M = m_D + m_T$, on transforme

$$\langle \sigma v \rangle = \int \sigma v f_D(\mathbf{v}_D) f_T(\mathbf{v}_T) d\mathbf{v}_D d\mathbf{v}_T \quad (1.27)$$

en

$$\langle \sigma v \rangle = \int \sigma v f(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \quad (1.28)$$

après avoir remarqué que le jacobien de la transformation des variables $(\mathbf{v}_D, \mathbf{v}_T)$ aux variables (\mathbf{v}, \mathbf{V}) était égal à l'unité et après avoir intégré sur $d\mathbf{V}$. La fonction de distribution $f(\mathbf{v})$ qui apparaît dans (1.28) est la fonction de distribution de la vitesse relative \mathbf{v} .

Les fonctions $\sigma(v)$ et $f(\mathbf{v})$ étant isotropes, on peut passer en coordonnées sphériques, intégrer sur les angles, et transformer (1.28) en une intégrale simple sur dv

$$\langle \sigma v \rangle = 4\pi \int_0^\infty \sigma v f(v) v^2 dv, \quad (1.29)$$

puis sur dE

$$\langle \sigma v \rangle = \frac{8\pi}{\mu^2} \int_0^\infty \sigma f E dE. \quad (1.30)$$

En explicitant alors la forme de $f(v)$ en fonction de E ,

$$f = \left(\frac{\mu}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{E}{k_B T} \right), \quad (1.31)$$

et la forme (1.8) de $\sigma(E)$, on aboutit à

$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{8}{\pi \mu} \right)^{1/2} \frac{1}{(k_B T)^{3/2}} \int_0^\infty S(E) \exp \left(- \sqrt{\frac{E_B}{E}} - \frac{E}{k_B T} \right) dE. \quad (1.32)$$

Tandis que $S(E)$ varie peu avec l'énergie, chacun des deux termes exponentiels varie fortement. On définit

$$g(E) = \sqrt{\frac{E_B}{E}} + \frac{E}{k_B T}. \quad (1.33)$$

Cette fonction g est minimum pour

$$E_G = \left[\frac{E_B (k_B T)^2}{4} \right]^{1/3}. \quad (1.34)$$

On a alors

$$g(E_G) = \frac{3E_G}{k_B T}. \quad (1.35)$$

On développe alors $g(E)$ au voisinage de E_G jusqu'à l'ordre 2,

$$g(E) \simeq g(E_G) + \left(\frac{E - E_G}{\Delta/2} \right)^2, \quad (1.36)$$

avec

$$\Delta = \frac{4}{\sqrt{3}} (E_G k_B T)^{1/2} \quad (1.37)$$

On approxime alors

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty S(E) \exp[-g(E)] dE \\ & \simeq S(E_G) \exp\left(-\frac{3E_G}{k_B T}\right) \int_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{E - E_G}{\Delta/2}\right)^2\right] dE \\ & \simeq \frac{\sqrt{\pi}}{2} S(E_G) \exp\left(-\frac{3E_G}{k_B T}\right) \Delta. \end{aligned} \quad (1.38)$$

La prise en compte de la variation de $S(E)$ conduit, à l'ordre le plus bas, à remplacer $S(E_G)$ par $S(E_G + \frac{5}{6}k_B T)$ dans cette expression.

Le maximum de la fonction $\exp[-g(E)]$ correspond à ce qu'on appelle le pic de Gamow, d'autant plus marqué que la température est basse, puisque Δ/E_G se comporte comme $T^{1/6}$.

Pour $k_B T = 10$ keV, compte tenu de $E_B = 1.18$ MeV, on a $E_G = 31$ keV et $\Delta = 41$ keV. Le pic de Gamow se situe alors à environ $3k_B T$, c'est-à-dire deux fois l'énergie moyenne des particules, et sa demi-largeur, $\Delta/2 \simeq 20$ keV, vaut environ $2k_B T$.

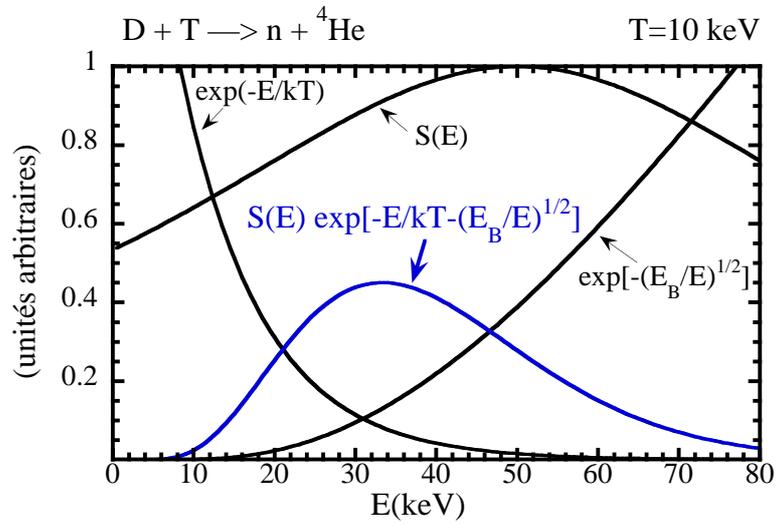


FIG. 1.5 – Pic de Gamow pour la réaction DT à 10 keV

1.7 Comparaison des différentes réactions

Si maintenant on calcule le taux de réaction à toute température et pour différentes réactions de fusion, on peut tracer $\langle \sigma v \rangle$ en fonction de la température et comparer différents couples de réactifs (voir figure 1.6). Ainsi le taux de réaction pour la réaction DT, de l'ordre de $10^{-16} \text{ cm}^3\text{s}^{-1}$ pour

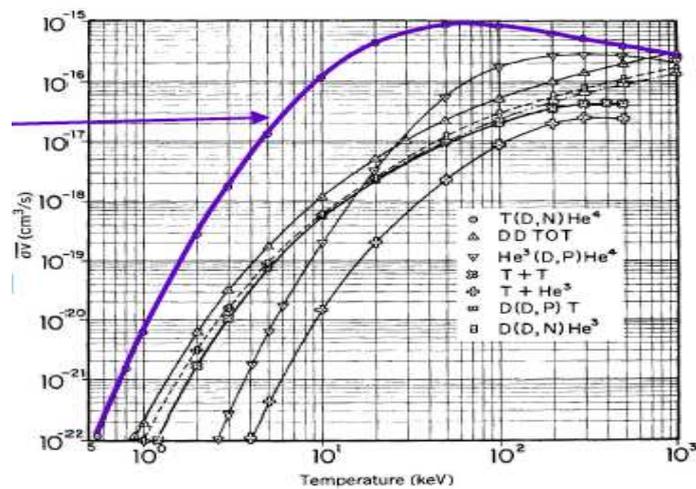


FIG. 1.6 – Taux de réaction pour différents couples.

$k_B T = 10$ keV, frôle 10^{-15} cm³s⁻¹ pour $k_B T = 60$ keV, température pour laquelle il est maximum.

On peut aussi constater sur la figure 1.6 que toutes les autres réactions de fusion ont des taux de réactions sensiblement inférieurs dans la gamme de température 10-100 keV.

1.8 Critères de fonctionnement d'un réacteur à fusion

On en vient maintenant aux critères de fonctionnement d'un réacteur à fusion. Il en existe différentes formes, plus ou moins pertinentes suivant les cas. La première personne à avoir établi un critère de ce type est John Lawson en 1957. Son nom est souvent associé à ces critères, même s'il ne s'agit pas toujours de la forme originale.

On convient d'abord de désigner par τ le temps caractéristique de confinement de l'énergie dans le réacteur considéré. On compare alors l'énergie thermique des particules par unité de volume,

$$E_{th} = 3nk_B T, \quad (1.39)$$

où on a tenu compte à la fois de l'énergie des ions et de celle des électrons ($n_e = n$, où n_e est le nombre d'électrons par unité de volume et $n = n_D + n_T$), et l'énergie de fusion produite pendant le temps τ dans le même volume unité,

$$E_{fusion} = \frac{1}{4} n^2 \langle \sigma v \rangle Q \tau. \quad (1.40)$$

Ici on a supposé un mélange équimolaire ($n_D = n_T = \frac{1}{2}n$), et $Q = 17,59$ MeV désigne l'énergie libérée par chaque réaction de fusion. Notons qu'on a négligé dans (1.40) l'appauvrissement du combustible du fait des réactions de fusion elles-mêmes. Nous reviendrons sur ce point ultérieurement.

Le critère le plus élémentaire consiste à demander que l'énergie de fusion produite dépasse l'énergie thermique initiale, soit $E_{fusion} > E_{th}$, ce qui se ramène à

$$n\tau > \frac{12k_B T}{\langle \sigma v \rangle Q}. \quad (1.41)$$

Le membre de droite de (1.41), que l'on désigne par $n\tau_{critique}$, est une fonction de la température qui est minimum pour $T \simeq 25$ keV, et qui prend alors la valeur

$$n\tau_{crit, min} \simeq 3 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}\text{s}. \quad (1.42)$$

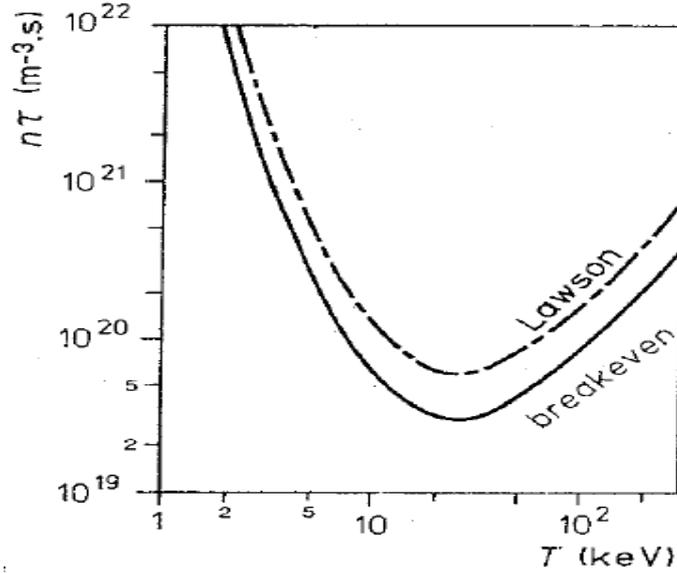


FIG. 1.7 – Breakeven et critère de Lawson pour la réaction DT.

La condition $n\tau > n\tau_{critique}$ correspond au “breakeven” (seuil de rentabilité). Le critère de Lawson correspond à

$$\eta(E_{fusion} + E_{th}) > E_{th}, \quad (1.43)$$

où $E_{fusion} + E_{th}$ représente l'énergie totale disponible après les réactions de fusion et η est un rendement de conversion. Le choix $\eta = \frac{1}{3}$ fait par Lawson conduit à

$$n\tau > \frac{24 k_B T}{\langle \sigma v \rangle Q}. \quad (1.44)$$

La figure 1.7 montre le breakeven et le critère de Lawson pour la réaction DTR en fonction de la température.

Diverses variantes du critère peuvent être obtenues

- en tenant compte de rendements de différentes natures,
- en distinguant dans l'énergie de fusion la part emportée par les particules alpha, $\frac{1}{5}Q$ par réaction, et la part emportée par les neutrons, $\frac{4}{5}Q$,
- en tenant compte de sources auxiliaires d'énergie,
- en explicitant les pertes par rayonnement du plasma.

Considérons par exemple la situation d'équilibre décrite par l'équation suivante,

$$\frac{1}{5}P_{fusion} + P_{ext} = \frac{E_{th}}{\tau}. \quad (1.45)$$

Cette équation traduit l'équilibre du plasma d'un réacteur à confinement magnétique sous l'effet du chauffage par les particules alpha (chargées, elles restent confinées dans le réacteur, tandis que les neutrons, insensibles au champ magnétique, s'échappent), du chauffage par une source extérieure fournissant une puissance P_{ext} et des pertes caractérisées par le temps τ . L'efficacité de la machine est caractérisée par un facteur q , défini comme le rapport entre l'énergie de fusion produite et l'énergie fournie par la source extérieure,

$$q = \frac{P_{fusion}}{P_{ext}}. \quad (1.46)$$

L'équilibre ainsi défini correspond à

$$n\tau = \frac{12 k_B T}{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{q}\right) \langle \sigma v \rangle Q}. \quad (1.47)$$

Une attention particulière doit être portée aux pertes par rayonnement. Elles sont principalement dues au rayonnement de freinage des électrons dans le champ coulombien des ions, de charge Z (pour le deutérium et le tritium, $Z = 1$, mais on donne ici la formule générale pour pouvoir apprécier le rôle néfaste d'éventuelles impuretés de Z élevé). La puissance rayonnée par unité de volume vaut

$$P_{ray} = C_r Z^3 n^2 (k_B T)^{1/2}, \quad (1.48)$$

avec $C_r \simeq 3,35 \cdot 10^{-21} \text{ keV}^{1/2} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, quand $k_B T$ est exprimé en keV, P_{ray} en $\text{keV}^{1/2} \text{ m}^{-3} \text{ s}^{-1}$, et n en m^{-3} . Ce résultat s'applique dans le cas de plasmas "optiquement minces", c'est-à-dire tels que les photons émis ne sont pas réabsorbés avant de s'échapper du plasma, comme dans le cas des réacteurs à confinement magnétique.

La prise en compte du rayonnement impose une limite supérieure au temps de confinement. En effet, si le rayonnement était la seule source de pertes, on aurait (toujours pour un plasma optiquement mince) un temps caractéristique de pertes donné par

$$n\tau_{ray} = \frac{3(k_B T)^{1/2}}{C_r Z^3}. \quad (1.49)$$

En prenant en compte les autres sources de pertes, on a nécessairement $\tau < \tau_{ray}$. En raisonnant sur les taux de pertes, et en séparant la partie due au rayonnement et la partie due aux autres sources de pertes, c'est-à-dire en écrivant

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_{ray}} + \frac{1}{\tau'}, \quad (1.50)$$

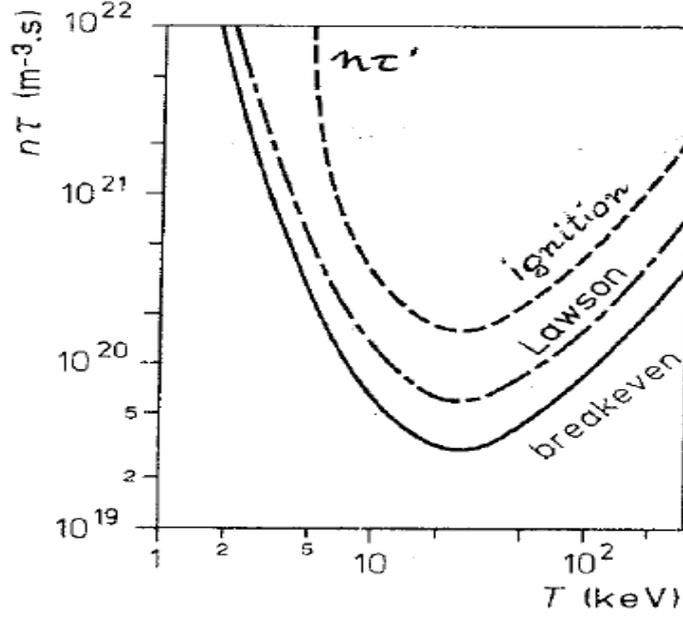


FIG. 1.8 – Breakeven, critère de Lawson et ignition.

on peut mettre la condition d'équilibre sous la forme

$$n\tau' = \frac{12 k_B T}{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{q}\right) \langle \sigma v \rangle Q - 4 C_r (k_B T)^{1/2}}. \quad (1.51)$$

La valeur correspondant à $q = \infty$ est représentée sur la figure 1.8, ainsi que deux des critères vus précédemment. La valeur $q = \infty$ correspond au critère d'ignition (c'est-à-dire d'allumage), le réacteur fonctionnant sans apport extérieur ($P_{ext} = 0$). Notons que l'ignition implique une température minimale,

$$T_{min} \simeq 4.3 \text{ keV}, \quad (1.52)$$

puisque'on doit avoir

$$\langle \sigma v \rangle > 20 C_r \frac{(k_B T)^{1/2}}{Q} \quad (1.53)$$

soit

$$\langle \sigma v \rangle > 3,8 \cdot 10^{-24} (k_B T)^{1/2}, \quad (1.54)$$

où $k_B T$ est exprimé en keV et σv en m^3s^{-1} .

1.9 Critère sur $n\tau T$

Les physiciens du confinement magnétique utilisent maintenant des critères sur le produit $n\tau T$, en fait équivalents aux critères précédents. Ainsi le dernier critère vu devient

$$n\tau'k_B T = \frac{12(k_B T)^2}{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{q}\right) \langle \sigma v \rangle Q - 4C_r(k_B T)^{1/2}}, \quad (1.55)$$

le membre de droite pouvant être approximé pour $q = \infty$ par $3.3 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3} \text{ s keV}$ dans une assez large gamme de température ($10 < k_B T < 20 \text{ keV}$).

1.10 Fraction brûlée et gain

Dans l'établissement de ces critères, on ne s'est pas préoccupé de l'appauvrissement du combustible : la fraction brûlée est en fait faible quand on est au voisinage de $n\tau_{critique}$. Estimons en effet la fraction brûlée en fonction du temps écoulé. L'appauvrissement du combustible est décrit par l'équation

$$\frac{dn_D}{dt} = \frac{dn_T}{dt} = -n_D n_T \langle \sigma v \rangle = -n_D^2 \langle \sigma v \rangle, \quad (1.56)$$

dont la solution est

$$n_D = \frac{n_0}{2 + n_0 \langle \sigma v \rangle t}, \quad (1.57)$$

où $n_0 = n_{D0} + n_{T0} = 2n_{D0}$ est la densité initiale de noyaux. D'où la fraction brûlée

$$f = 1 - \frac{n_D}{n_{D0}} = \frac{n_0 \langle \sigma v \rangle t}{2 + n_0 \langle \sigma v \rangle t}. \quad (1.58)$$

Ainsi, la moitié du combustible est brûlée au bout du temps de fusion

$$\tau_{fus} = \frac{2}{n_0 \langle \sigma v \rangle}, \quad (1.59)$$

et on peut réécrire (1.58) sous la forme

$$f = \frac{t}{\tau_{fus} + t}. \quad (1.60)$$

Si on reprend le premier critère que nous avons établi, en nous plaçant au seuil, c'est-à-dire pour $\tau = \tau_{critique}$ avec

$$n_0 \tau_{critique} = \frac{12 k_B T}{\langle \sigma v \rangle Q}, \quad (1.61)$$

on voit que la fraction brûlée au bout du temps $\tau_{critique}$ est égale à

$$f = \frac{\tau_{critique}}{\tau_{fus} + \tau_{critique}} \simeq \frac{\tau_{critique}}{\tau_{fus}} = 6 \frac{k_B T}{Q} \ll 1. \quad (1.62)$$

A $k_B T = 10 \text{ keV}$, cette fraction brûlée vaut $6 \times 10 / (17,59 \cdot 10^3) \simeq 3,4 \cdot 10^{-3}$.

Le gain G est défini comme le rapport

$$G = \frac{E_{fusion}}{E_{th}} = f \frac{Q}{6 k_B T}. \quad (1.63)$$

Il vaut 1 pour $\tau = \tau_{critique}$. A l'inverse, au bout d'un temps infini, le gain maximum est donné (pour $f=1$) par

$$G_{max} = \frac{Q}{6 k_B T}, \quad (1.64)$$

soit environ $G_{max} = 300$ pour $k_B T = 10 \text{ keV}$.

1.11 Les deux voies de la fusion

Dans tout ce qui précède on a évoqué des conditions de plasmas qui correspondent à des températures très élevées, de l'ordre de la centaine de

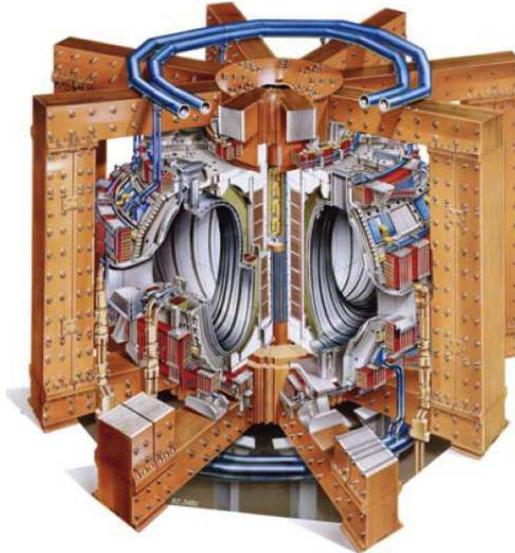


FIG. 1.9 – Vue schématique en écorché du tokamak JET.

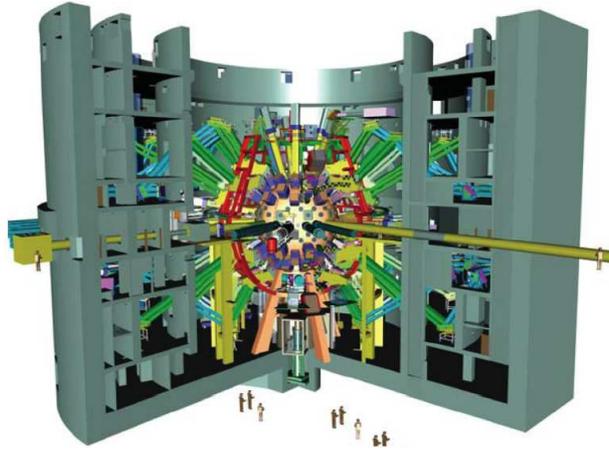


FIG. 1.10 – Vue en écorché du projet Mégajoule.

millions de kelvins. A ces températures, aucun récipient matériel ne peut contenir le plasma, et se pose donc le problème de son confinement.

Il existe principalement deux voies pour réaliser ce confinement. La première voie, dénommée confinement magnétique, fait appel au champ magnétique, et tire partie du fait que les noyaux de deutérium et de tritium sont des particules chargées dont les trajectoires peuvent être contrôlées par des champs magnétiques appropriés. La configuration la plus prisée est celle des “tokamaks”, qui présente une géométrie toroïdale. Actuellement la machine la plus performante de ce type est le JET (Joint European Torus), machine européenne installée en Angleterre près d’Oxford, et représentée sur la figure 1.9. Le grand projet international ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor) se situe dans la continuité des machines précédentes. Les plasmas de fusion par confinement magnétique sont peu denses (de l’ordre de 10^{20} m^{-3}), et le temps de confinement (temps caractéristique lié au taux de perte d’énergie) est de l’ordre de la seconde (même si la durée des décharges peut être beaucoup plus longue).

La deuxième voie porte le nom de confinement inertiel, mais en réalité cette voie se passe de confinement : on compte sur l’inertie du combustible pour lui laisser un temps suffisant pour brûler avant sa dislocation. Le combustible est initialement froid et contenu dans une bille de taille millimétrique. Il est alors à la fois chauffé et comprimé pour des raisons que l’on verra plus loin, avant le déclenchement des réactions de fusion et la dislocation de l’ensemble. Les densités atteintes au moment du déclenchement des réactions de fusion sont de l’ordre de 10^{31} m^{-3} , tandis que le temps de dislocation du

combustible est de l'ordre de la dizaine de picosecondes. Pour chauffer et comprimer la bille de combustible, on doit faire appel à une source d'énergie très puissante, et capable d'être focalisée sur une faible surface. Actuellement les lasers de puissance sont les plus à même de remplir ce cahier des charges. Deux grands projets sont en cours de construction, le projet américain NIF (National Ignition Facility) et le projet français Mégajoule, situé à Bordeaux, dont la figure 1.10 donne une vue en écorché, finalement assez semblable à celles procurées par les machines à confinement magnétique, dans son aspect et ses dimensions totales (si la cible est millimétrique, l'installation totale, hall laser compris, dépasse les 300 mètres dans sa plus grande dimension).

Chapitre 2

Physique des plasmas thermonucléaires

2.1 Qu'est-ce qu'un plasma ?

Un plasma peut être défini comme tout système physique contenant des particules chargées, électrons libres et ions, en proportion suffisante pour que le comportement du système présente un caractère collectif dû aux interactions électromagnétiques.

Le comportement collectif du plasma peut être associé au fait qu'une particule donnée est en interaction avec l'ensemble des autres particules (et pas seulement avec les particules les plus proches comme dans le cas d'un gaz ou d'un liquide). Ce comportement est essentiellement dû au caractère longue-portée des forces d'interaction coulombiennes. Soit $V(r)$ le potentiel coulombien entre deux particules de charges q_1 et q_2 ,

$$V(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (2.1)$$

où r est la distance entre les deux particules. Calculons l'énergie d'interaction dW d'un électron particulier avec les électrons situés à la distance r , à dr près,

$$dW_{ee} \simeq \frac{e^2 n_e r}{\epsilon_0} dr, \quad (2.2)$$

où n_e est la densité électronique supposée homogène. On constate que cette quantité diverge quand r tend vers l'infini, et qu'*a fortiori* l'énergie d'interaction d'un électron avec l'ensemble des autres électrons diverge. C'est l'une

des manifestations du caractère longue portée des forces d'interaction. Si cependant on tient compte également de l'énergie d'interaction de l'électron considéré avec les ions, le terme correspondant dW_{ei} compense exactement dW_{ee} si la neutralité électrique est vérifiée, c'est-à-dire si $n_e = Zn_i$, où Z est la charge électrique de chaque ion et n_i la densité ionique. Ainsi, à tout écart à la neutralité électrique correspond une énergie électrostatique qui croît rapidement avec la taille de la zone concernée. En règle générale, un plasma est quasi-neutre à l'échelle macroscopique, c'est-à-dire qu'il y a approximativement autant de charges positives que de charges négatives, tandis que la quasineutralité peut éventuellement être violée à courte échelle.

Le terme plasma recouvre en fait des systèmes physiques très variés, suivant la densité de particules et la température. Le type de physique mis en jeu dépend évidemment du type de plasma étudié. Disons simplement que jusque vers les années 1950 l'étude des plasmas de laboratoire était limitée à celle des décharges dans les gaz. On avait alors affaire à des plasmas partiellement ionisés, où une proportion importante des atomes ou molécules constituant le gaz restait à l'état de particules neutres. De nombreuses contributions à la compréhension des phénomènes de base de la physique des plasmas venaient également des astrophysiciens et des géophysiciens. L'essor de la physique des plasmas actuelle date plutôt des années 1950, et du développement des recherches sur la fusion thermonucléaire contrôlée. Les plasmas mis en jeu sont en général complètement ionisés, au sens où pratiquement tous les atomes ont perdu au moins un électron, éventuellement plusieurs (on parle alors d'ions multichargés).

2.2 Paramètre de couplage

Les solides, les liquides et les gaz neutres se distinguent par la valeur respective de l'énergie cinétique moyenne par particule, $K = 3k_B T/2$, et de l'énergie potentielle d'interaction moyenne par particule, V . Le gaz dilué correspond à $K \gg V$ ($V/K = 0$ pour un gaz parfait) tandis que le liquide et le solide correspondent à $K \lesssim V$. De la même façon, dans le cas d'un plasma complètement ionisé auquel on se restreint dans ce paragraphe, on distingue les plasmas cinétiques pour lesquels $K \gg V$ et les plasmas corrélés pour lesquels $K \lesssim V$. Pour estimer l'énergie potentielle d'interaction moyenne par particule, on considère une particule et son plus proche voisin, situé en moyenne à une distance de l'ordre de $a = n^{-1/3}$. Ainsi, entre un électron et

son plus proche voisin de même nature, on définit

$$V_e(a_e) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_e}, \quad (2.3)$$

où $a_e = n_e^{-1/3}$, et le paramètre de couplage

$$\Gamma_{ee} = \frac{V_e(a_e)}{k_B T} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_e k_B T}. \quad (2.4)$$

Numériquement on peut écrire (2.4) sous la forme suivante :

$$\Gamma_{ee} \simeq 14.4 \left[\frac{n_e(\text{m}^{-3})}{10^{30}} \right]^{1/3} \frac{1}{T(\text{eV})}. \quad (2.5)$$

De même entre un ion et son plus proche voisin de même nature

$$V_i(a_i) = \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 a_i}, \quad (2.6)$$

où $a_i = n_i^{-1/3}$, et

$$\Gamma_{ii} = \frac{V_i(a_i)}{k_B T} = \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 a_i k_B T}, \quad (2.7)$$

avec $\Gamma_{ii} = Z^{5/3} \Gamma_{ee}$. Ainsi le domaine des plasmas cinétiques correspond à $\Gamma \ll 1$ (forte température et densité modérée) et le domaine des plasmas corrélés à $\Gamma \gtrsim 1$.

Les plasmas de fusion par confinement magnétique et dans une assez large mesure les plasmas de fusion par confinement inertiel se classent dans la catégorie des plasmas cinétiques.

2.3 Fréquences plasmas électroniques et ioniques

La fréquence plasma électronique (en réalité il s'agit d'une pulsation) joue un rôle essentiel dans les perturbations de nature électrostatique aussi bien que dans les perturbations de nature électromagnétique, en particulier dans le calcul de l'indice de réfraction d'un plasma. Une façon simple de trouver son expression consiste à considérer un plasma mono-dimensionnel initialement homogène et neutre ($n_e = Z n_i$) et à le perturber de façon à ce que, à un instant $t > 0$ donné, les électrons initialement situés en x_0 se trouvent déplacés d'une quantité $\xi(x_0, t)$, tandis que les ions restent immobiles. Le champ électrique qui résulte de cette séparation de charges tend à ramener les électrons

vers leur position d'équilibre. Par ailleurs l'inertie des ions est telle que leur mouvement peut être négligé. En intégrant l'équation de Poisson entre $-\infty$ et $x = x_0 + \xi$, on obtient, en supposant que les tranches d'électrons restent ordonnées comme dans la condition initiale, c'est-à-dire que $\partial x/\partial x_0 > 0$,

$$E(x, t) = \frac{n_e e}{\epsilon_0} \xi. \quad (2.8)$$

Si on néglige la dispersion des vitesses des électrons et les forces de frottement (cette deuxième hypothèse est légitime dans le cas des plasmas cinétiques), l'équation du mouvement des électrons considérés s'écrit alors

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = -\frac{e}{m_e} E = -\omega_{pe}^2 \xi, \quad (2.9)$$

où ω_{pe} est donc la fréquence d'oscillation naturelle des électrons, appelée fréquence plasma électronique, et définie par

$$\omega_{pe}^2 = \frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0}. \quad (2.10)$$

Numériquement, on a

$$\omega_{pe} (\text{s}^{-1}) = 56.4 n_e^{1/2} (\text{m}^{-3}). \quad (2.11)$$

On verra plus loin que la fréquence plasma électronique joue également un rôle important dans la détermination de la susceptibilité diélectrique d'un plasma et dans le calcul de son indice de réfraction.

On définit de même la fréquence plasma ionique ω_{pi} par

$$\omega_{pi}^2 = \frac{n_i Z^2 e^2}{m_i \epsilon_0} = \frac{Z m_e}{m_i} \omega_{pe}^2 \ll \omega_{pe}^2. \quad (2.12)$$

La fréquence plasma ionique ne joue cependant pas un rôle équivalent à la fréquence plasma électronique, dans la mesure où il y a peu de situations où l'on peut considérer le mouvement des ions indépendamment de celui des électrons.

2.4 Longueur de Debye et effet d'écran

Introduisons tout d'abord la vitesse thermique des particules de l'espèce j ,

$$v_{tj} = \left(\frac{k_B T_j}{m_j} \right)^{1/2}. \quad (2.13)$$

Dans cette expression T_j caractérise la "température" de l'espèce j . On verra plus loin que, hors équilibre thermodynamique, on peut effectivement définir des températures différentes pour les différentes espèces de particules.

La longueur de Debye est la distance parcourue par un électron de vitesse v_{te} pendant le temps $t = \omega_{pe}^{-1}$, soit

$$\lambda_D = \frac{v_{te}}{\omega_{pe}} = \left(\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_e e^2} \right)^{1/2}, \quad (2.14)$$

ou encore, numériquement,

$$\lambda_D(\text{m}) = 7.43 \times 10^3 T_e^{1/2}(\text{eV}) n_e^{-1/2}(\text{m}^{-3}). \quad (2.15)$$

La longueur de Debye est aussi la distance caractéristique d'écrantage des phénomènes électrostatiques dans les plasmas. Pour illustrer cette affirmation, on considère le modèle suivant : soit une charge électrique q située à l'origine des coordonnées, dans un plasma où les ions constituent un fond continu homogène, tandis que les électrons sont en équilibre de Boltzmann avec le potentiel électrostatique ϕ . L'équation de Poisson prend alors la forme

$$\Delta\phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \left[q\delta(\mathbf{r}) + n_{i0}Ze - n_{e0}e \exp\left(\frac{e\phi}{k_B T_e}\right) \right]. \quad (2.16)$$

Pour des particules interagissant faiblement (c'est-à-dire dans un plasma faiblement corrélé pour lequel $\Gamma_{ei} \ll 1$), on peut développer le terme $\exp(e\phi/k_B T_e)$ à l'ordre 1 en puissance du petit paramètre $e\phi/k_B T_e$. En utilisant d'autre part l'hypothèse de neutralité électrique globale, $n_{e0} = Zn_{i0}$, on obtient

$$\Delta\phi - \frac{\phi}{\lambda_D^2} = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r}), \quad (2.17)$$

dont la solution est

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right). \quad (2.18)$$

Ce résultat montre que la charge est écrantée sur une distance λ_D (voir Fig. 2.1). Pour des distances petites devant la longueur de Debye, le potentiel est celui d'une charge nue, tandis que pour $r \gtrsim \lambda_D$ la décroissance exponentielle domine le comportement de ϕ . L'effet d'écran est dû au fait que le "fluide" électronique réagit à la présence de la charge q . Si $q > 0$ les électrons sont attirés par la charge et leur contribution au potentiel vient

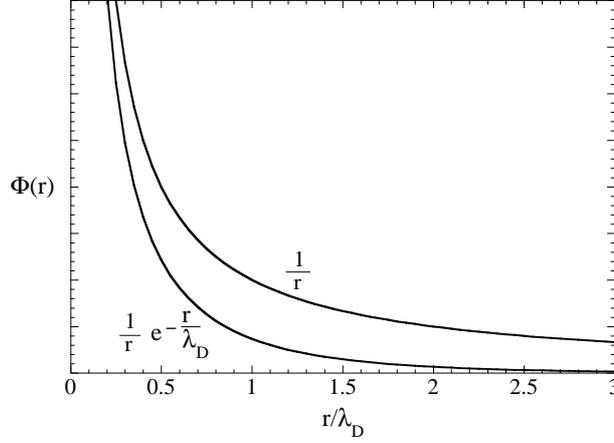


FIG. 2.1 – Potentiel coulombien nu et potentiel écranté en fonction du paramètre r/λ_D .

s'opposer à celui de la charge nue : le potentiel de l'ion est écranté par la déformation du nuage électronique qu'il induit. L'excès d'électrons au voisinage de l'ion considéré correspond à une densité

$$\delta n_e(r) \simeq n_{e0} \left[\frac{e\phi(r)}{k_B T_e} \right]. \quad (2.19)$$

On vérifie bien entendu que

$$\int_0^\infty e \delta n_e(r) 4\pi r^2 dr = q, \quad (2.20)$$

ce qui signifie que la charge totale correspondant à cet excès d'électrons compense exactement la charge q .

Notons ici que le développement du terme $\exp(e\phi/k_B T_e)$ que nous avons utilisé pour passer de (2.16) à (2.17) n'a de sens que si l'argument de l'exponentielle est petit devant 1 quand r est de l'ordre de λ_D . Pour une charge q correspondant à un ion chargé une fois, la condition peut s'écrire (à un facteur 4π près)

$$n_{e0} \lambda_D^3 \gg 1, \quad (2.21)$$

condition qui caractérise les plasmas faiblement corrélés, au même titre que la condition équivalente $\Gamma_{ee} \ll 1$, puisque

$$\Gamma_{ee} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{n_e \lambda_D^3} \right)^{2/3}. \quad (2.22)$$

2.5 Equations de propagation pour \mathbf{E} and \mathbf{B}

Pour obtenir les équations de propagation des ondes électromagnétiques dans un plasma, on part des équations de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.23)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{loi de Faraday}) \quad (2.24)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (\text{équation de Poisson}) \quad (2.25)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right), \quad (\text{loi d'Ampère}) \quad (2.26)$$

où ρ et j sont les densités de charge et de courant.

En prenant le rotationnel de l'équation de Faraday (2.24) et en utilisant la loi d'Ampère (2.26) on obtient

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}. \quad (2.27)$$

Considérons un plasma stationnaire et une onde dont le champ électrique oscille à la fréquence ω , avec

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re[\mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)], \quad (2.28)$$

tandis que le courant électrique créé dans le plasma suit la même dépendance,

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \Re[\mathbf{j}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)]. \quad (2.29)$$

La théorie de la réponse linéaire relie la densité de courant dans le plasma $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ au champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ via la susceptibilité diélectrique $\chi(\omega)$ (qui est une quantité scalaire si on se restreint à un plasma froid non magnétisé ou aux modes électromagnétiques dans un plasma non magnétisé),

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -i\omega\epsilon_0\chi(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (2.30)$$

On définit de même la fonction diélectrique

$$\epsilon(\omega) = 1 + \chi(\omega). \quad (2.31)$$

Alors l'équation (2.27) prend la forme

$$\Delta \mathbf{E} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \mathbf{E} = 0, \quad (2.32)$$

où on a utilisé l'égalité

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E}. \quad (2.33)$$

En prenant le rotationnel de l'équation d'Ampère (2.26) et en utilisant la loi de Faraday (2.24), on obtient une équation similaire pour le champ magnétique,

$$\Delta \mathbf{B} + \frac{1}{\epsilon} \nabla \epsilon \times \nabla \times \mathbf{B} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mathbf{B} = 0, \quad (2.34)$$

où on a utilisé $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

2.6 Réponse diélectrique d'un plasma "froid" non-collisionnel

Le cas le plus simple correspond à l'approximation d'un plasma froid non-collisionnel (pour lequel on peut négliger les termes de pression et les termes collisionnels) et non-magnétisé. On écrit d'abord l'équation du mouvement des particules de l'espèce j dans le cadre de cette approximation,

$$\frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial t} + (\mathbf{v}_j \cdot \nabla) \mathbf{v}_j = \frac{q_j}{m_j} (\mathbf{E} + \mathbf{v}_j \times \mathbf{B}). \quad (2.35)$$

Ici $\mathbf{v}_j(\mathbf{r}, t)$ est la vitesse moyenne des particules de l'espèce j au point \mathbf{r} et à l'instant t . Dans le membre de gauche apparaît la dérivée lagrangienne [ou dérivée "en suivant le mouvement", $\partial/\partial t + (\mathbf{v}_j \cdot \nabla)$] de la vitesse \mathbf{v}_j . Dans le cadre de la théorie de la réponse linéaire, le terme en $\mathbf{v}_j \times \mathbf{B}$ et la différence entre dérivée lagrangienne et dérivée eulérienne (c'est-à-dire la dérivée partielle $\partial \mathbf{v}_j / \partial t$) sont d'ordre deux, si bien que l'équation du mouvement se simplifie et il reste

$$\frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial t} = \frac{q_j}{m_j} \mathbf{E}. \quad (2.36)$$

La recherche d'une solution de la forme

$$\mathbf{v}_j(\mathbf{r}, t) = \Re[\mathbf{v}_j(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)], \quad (2.37)$$

conduit à

$$\mathbf{v}_j(\mathbf{r}) = -\frac{q_j \mathbf{E}(\mathbf{r})}{im_j \omega}. \quad (2.38)$$

La susceptibilité diélectrique χ_j des particules de l'espèce j est reliée à la densité de courant correspondante $\mathbf{j}_j = n_j q_j \mathbf{v}_j$ par

$$\mathbf{j}_j = -i\omega \epsilon_0 \chi_j(\omega) \mathbf{E}, \quad (2.39)$$

avec

$$\chi_j(\omega) = -\frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2}. \quad (2.40)$$

où l'on retrouve la fréquence plasma électronique ω_{pe} et la fréquence plasma ionique ω_{pi} définies au paragraphe 2.3. Comme $\omega_{pi} \ll \omega_{pe}$, la réponse diélectrique totale du plasma est essentiellement due aux électrons, avec

$$\chi = \chi_e + \chi_i \simeq \chi_e = -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}. \quad (2.41)$$

Finalement, on écrit pour la fonction diélectrique du plasma froid :

$$\epsilon(\omega) = 1 + \chi \simeq 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}. \quad (2.42)$$

2.7 Ondes électromagnétiques

On se concentre maintenant sur les ondes électromagnétiques. En plasma homogène celles-ci correspondent à $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, si bien que l'équation de propagation (2.32) devient simplement¹

$$\Delta \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \mathbf{E} = 0. \quad (2.43)$$

On cherche des solutions de la forme $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$. Les ondes électromagnétiques correspondent alors à $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$, et l'équation (2.43) conduit à la relation

$$k = \frac{\omega}{c} N(\omega), \quad (2.44)$$

où $N(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)}$ est l'indice optique du plasma. En utilisant la réponse diélectrique (2.42) établie précédemment, on a

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2. \quad (2.45)$$

Ces équations constituent différentes formes de la *relation de dispersion* des ondes électromagnétiques dans un plasma. La courbe donnant ω en fonction du nombre d'onde k est représentée sur la figure 2.2.

Le nombre d'onde k est réel si et seulement si $\epsilon(\omega) > 0$, ce qui implique $\omega > \omega_{pe}$, c'est-à-dire $n_e < n_c(\omega)$, où $n_c(\omega)$ est la *densité critique* associée à la fréquence ω ,

$$n_c(\omega) = \frac{m_e \epsilon_0 \omega^2}{e^2}. \quad (2.46)$$

¹dans un plasma homogène, \mathbf{B} satisfait la même équation (2.43) que \mathbf{E} .

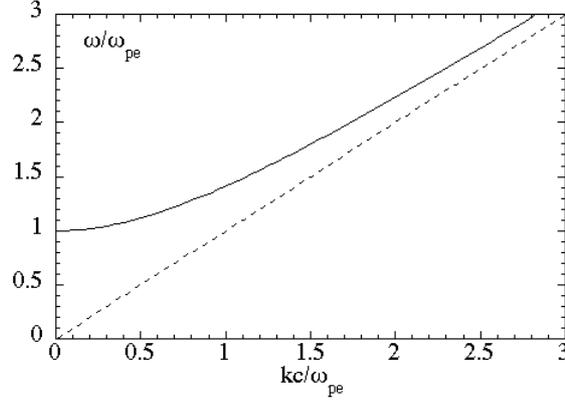


FIG. 2.2 – Relation de dispersion des ondes électromagnétiques. En pointillés, la relation de dispersion dans le vide, $\omega = kc$.

Il peut être utile d'exprimer la densité critique en fonction de la longueur d'onde du rayonnement électromagnétique dans le vide, soit

$$n_c = \frac{4\pi^2 m_e}{\mu_0 e^2 \lambda^2}, \quad (2.47)$$

ou encore, numériquement,

$$n_c(\text{m}^{-3}) = 1.1 \times 10^{27} \lambda_\mu^{-2}, \quad (2.48)$$

où λ_μ est la longueur d'onde exprimée en microns.

Notons encore que la fonction diélectrique peut également être exprimée en fonction du rapport n_e/n_c ,

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{n_e}{n_c}. \quad (2.49)$$

A partir de la relation de dispersion (2.45) on calcule la vitesse de phase de l'onde,

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = c \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right)^{-1/2}, \quad (2.50)$$

et la vitesse de groupe,

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right)^{1/2}. \quad (2.51)$$

On vérifie bien que la vitesse de groupe v_g reste inférieure à la vitesse de la lumière c . La vitesse de phase v_ϕ , quant à elle, est supérieure à la vitesse de la lumière, avec $v_g v_\phi = c^2$.

Ainsi une onde électromagnétique de fréquence ω ne peut se propager dans un plasma que si la densité électronique de celui-ci est inférieure à la densité critique $n_c(\omega)$. Dans le cas contraire, le nombre d'onde k devient imaginaire pur, ce qui correspond à une onde évanescence,

$$k = \frac{i}{c} (\omega_{pe}^2 - \omega^2)^{1/2}. \quad (2.52)$$

À la limite basse-fréquence, $\omega \ll \omega_{pe}$, et on a $k \simeq i \omega_{pe}/c$. On appelle longueur de peau ou épaisseur de peau la distance sur laquelle le champ électrique est réduit dans le facteur $1/e$, soit

$$l_{\text{peau}} = \frac{c}{\omega_{pe}}. \quad (2.53)$$

Pour terminer ce paragraphe, on peut remarquer qu'il est possible de s'affranchir de l'hypothèse plasma "froid" dans le cas des ondes électromagnétiques. Écrivons tout d'abord l'équation du mouvement des particules de l'espèce j en incluant le terme correspondant à la force de pression²,

$$\frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial t} + (\mathbf{v}_j \cdot \nabla) \mathbf{v}_j = \frac{q_j}{m_j} (\mathbf{E} + \mathbf{v}_j \times \mathbf{B}) - \frac{1}{n_j m_j} \nabla P_j \quad (2.54)$$

Écrivons ensuite le gradient de la pression des particules de l'espèce j dans le cadre de l'approximation adiabatique, $P_j \propto n_j^{\gamma_j}$, soit

$$\nabla P_j = \gamma_j k_B T_j \nabla n_j. \quad (2.55)$$

L'équation du mouvement linéarisée devient

$$\frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial t} = \frac{q_j}{m_j} \mathbf{E} - \gamma_j \frac{k_B T_j}{n_{j0} m_j} \nabla n_{j1}, \quad (2.56)$$

où n_{j0} et n_{j1} représentent respectivement la densité non perturbée et la perturbation de densité des particules de l'espèce j . La perturbation n_{j1} peut être reliée à la vitesse fluide \mathbf{v}_j grâce à l'équation de continuité,

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \nabla \cdot (n_j \mathbf{v}_j) = 0, \quad (2.57)$$

²en toute rigueur le terme de force de pression a la forme de la divergence d'un tenseur d'ordre deux, appelé tenseur de pression, et ne se réduit au gradient d'un scalaire que dans le cas où le tenseur est proportionnel au tenseur identité, ce que nous supposons implicitement ici.

qui, linéarisée, s'écrit

$$\frac{\partial n_{j1}}{\partial t} = -(\nabla \cdot n_{j0} \mathbf{v}_j). \quad (2.58)$$

Pour une onde électromagnétique en plasma homogène, $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ implique $\nabla \cdot \mathbf{v}_j = 0$ et donc $n_{j1} = 0$. L'onde électromagnétique se propage sans perturbation de la densité des espèces, et donc sans apparition de densité de charges (on a affaire à des plans de charges oscillant parallèlement à eux-mêmes), si bien que le terme correctif dû à la pression, apparaissant dans l'équation (2.56), s'annule. Ainsi, pour les ondes électromagnétiques, la prise en compte de la dispersion des vitesses des particules et donc de la pression ne modifie pas le résultat de la théorie utilisant l'approximation plasma froid.

2.8 Ondes plasmas électroniques : corrections thermiques

Les ondes électrostatiques correspondent à $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. L'équation (2.32) conduit alors simplement à $\epsilon(\omega) = 0$, ce qui, dans le cadre de l'approximation plasma froid non collisionnel du paragraphe 2.6, donne $\omega = \omega_{pe}$, résultat déjà obtenu au paragraphe 2.3 avec une approche un peu différente. Ainsi dans un plasma froid les ondes plasma électroniques ont une fréquence bien définie et ne se propagent pas, car la vitesse de groupe $\partial\omega/\partial k$ y est nulle.

Au contraire des ondes électromagnétiques, les ondes électrostatiques correspondent à des ondes de densité de charges. En utilisant l'équation de continuité linéarisée (2.58) et un champ électrique de la forme

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re[\mathbf{E} \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)], \quad (2.59)$$

on obtient la relation entre la perturbation de densité n_{j1} et la perturbation de vitesse \mathbf{v}_j de chaque espèce,

$$n_{j1} = n_{j0} \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_j}{\omega}. \quad (2.60)$$

Si on prend en compte les termes de pression dans le calcul des ondes électrostatiques, plusieurs effets apparaissent. Tout d'abord la fréquence des ondes plasmas électroniques est modifiée pour $k\lambda_D > 0$ et ces ondes deviennent dispersives (ω dépend maintenant de k) et se propagent à une vitesse finie. D'autre part un nouveau mode d'oscillations apparaît, correspondant aux modes acoustiques ioniques ou modes sonores. Enfin, aussi bien les ondes plasmas électroniques que les ondes acoustiques ioniques subissent

un amortissement d'origine non collisionnelle, découvert par Landau. Dans ce paragraphe, on s'intéresse uniquement à la correction de la relation de dispersion des ondes plasmas électroniques.

Reprenons donc l'équation du mouvement des particules de l'espèce j [Eq. (2.56)], dérivons-la par rapport au temps, et utilisons l'équation de continuité (2.58) pour éliminer la perturbation de densité au profit de la divergence de la vitesse. On obtient

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}_j}{\partial t^2} = \frac{q_j}{m_j} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \gamma_j v_{tj}^2 \frac{1}{n_{j0}} \nabla (\nabla \cdot n_{j0} \mathbf{v}_j). \quad (2.61)$$

A nouveau on se restreint à un plasma homogène et on considère un champ électrique de la forme (2.59). Pour les modes électrostatiques on a $\mathbf{k} \parallel \mathbf{E}$ et on déduit facilement de l'équation (2.61) la susceptibilité diélectrique longitudinale des particules de l'espèce j ,

$$\chi_{j\parallel}(\omega, k) = -\frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2 - \gamma_j k^2 v_{tj}^2}. \quad (2.62)$$

Pour les modes plasmas électroniques la contribution des ions peut être négligée et la relation de dispersion devient

$$\epsilon_{\parallel}(\omega, k) \simeq 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \gamma_e k^2 v_{te}^2} = 0, \quad (2.63)$$

ou

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \gamma_e k^2 v_{te}^2. \quad (2.64)$$

Reste à préciser la valeur du coefficient γ_e . En ce qui concerne les modes plasmas électroniques, les électrons suivent une loi adiabatique avec $\gamma_e = 3$, correspondant à la prise en compte du seul degré de liberté associé à la direction du vecteur d'onde \mathbf{k} , et on arrive à la relation

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + 3k^2 v_{te}^2. \quad (2.65)$$

La figure 2.3 représente la relation de dispersion des ondes plasmas électroniques.

Cette valeur $\gamma_e = 3$ peut être justifiée par la théorie cinétique des ondes plasmas (c'est-à-dire la théorie permettant de décrire les évolutions des fonctions de distributions en position et en vitesse des particules), qui de surcroît spécifie les conditions de validité de l'hypothèse adiabatique. Cette condition est

$$k\lambda_D \ll 1. \quad (2.66)$$

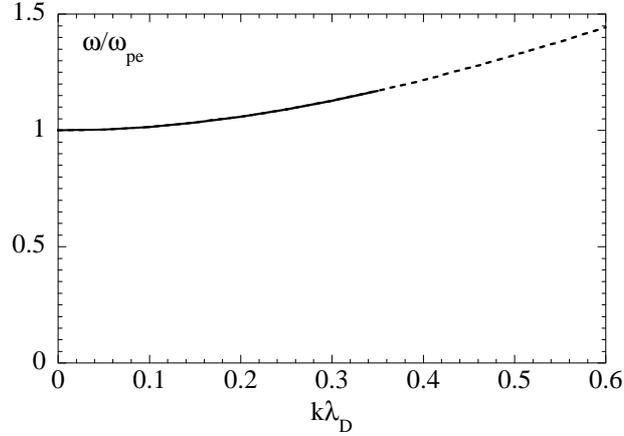


FIG. 2.3 – Relation de dispersion des ondes plasmas électroniques. La validité du calcul est cependant limitée à $k\lambda_D \lesssim 0.3 - 0.4$, ce que traduit la partie de la courbe tracée en pointillés.

D'autre part la possibilité de négliger l'amortissement de Landau évoqué plus haut correspond à la même condition. En pratique la relation de dispersion (2.64) peut être utilisée dans la plupart des cas jusqu'à $k\lambda_D \lesssim 0.3 - 0.4$. Ainsi la fréquence des ondes plasmas électroniques n'excède que de peu la fréquence plasma électronique.

La vitesse de phase vaut

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} \simeq \frac{\omega_{pe}}{k} = \frac{v_{te}}{k\lambda_D}. \quad (2.67)$$

La condition de validité de l'hypothèse adiabatique (2.66) s'écrit aussi $v_\phi \gg v_{te}$, c'est-à-dire que la vitesse de phase de l'onde doit rester plus grande que la vitesse de la plupart des particules.

La vitesse de groupe est maintenant différente de 0,

$$v_g = 3 \frac{kv_{te}^2}{\omega} \simeq 3(k\lambda_D)v_{te}. \quad (2.68)$$

Cette vitesse est plus petite que la vitesse thermique des électrons, mais peut devenir comparable.

2.9 Ondes acoustiques ioniques

Incluons maintenant la contribution ionique à la fonction diélectrique,

$$\epsilon_{\parallel}(\omega, k) = 1 + \chi_{e\parallel} + \chi_{i\parallel} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \gamma_e k^2 v_{te}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \gamma_i k^2 v_{ti}^2}. \quad (2.69)$$

L'équation $\epsilon_{\parallel}(\omega, k) = 0$ est du second ordre en ω^2 et possède donc une deuxième racine qui appartient au domaine des basses fréquences, $\omega \ll kv_{te}$, pour lequel on peut approximer (2.69) par

$$\epsilon_{\parallel}(\omega, k) \simeq 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\gamma_e k^2 v_{te}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \gamma_i k^2 v_{ti}^2} = 0. \quad (2.70)$$

Cette racine correspond aux modes acoustiques ioniques, également appelés modes sonores du plasma. La condition $\omega \ll kv_{te}$ signifie également que la vitesse de phase de l'onde est petite devant la vitesse thermique des électrons, et que donc les électrons ont tout le temps de se mettre en équilibre de Boltzmann avec le potentiel électrostatique de l'onde. Ceci correspond à l'hypothèse isotherme $\gamma_e = 1$. D'autre part, et là on anticipe sur le résultat final et sur le résultat d'une théorie cinétique, la vitesse de phase de l'onde acoustique ionique doit rester grande devant la vitesse thermique des ions, $v_{\phi} \gg v_{ti}$, ce qui justifie la valeur $\gamma_i = 3$. La résolution de (2.70) donne alors

$$\omega^2 = \frac{k^2 c_s^2}{1 + k^2 \lambda_D^2} + 3 k^2 v_{ti}^2, \quad (2.71)$$

où c_s est la vitesse acoustique ionique définie par

$$c_s = \omega_{pi} \lambda_D = \left(\frac{Z k_B T_e}{m_i} \right)^{1/2} = \left(\frac{Z T_e}{T_i} \right)^{1/2} v_{ti}. \quad (2.72)$$

La vitesse c_s joue le rôle d'une vitesse sonore. A noter qu'elle est définie à partir de la pression électronique et de la masse ionique.

Une première simplification consiste à négliger le second terme du membre de droite de l'équation (2.71), ce qui est autorisé par l'hypothèse $v_{\phi} \gg v_{ti}$ faite plus haut. Ceci implique

$$Z T_e \gg T_i. \quad (2.73)$$

La relation de dispersion se simplifie alors,

$$\omega^2 = \frac{k^2 c_s^2}{1 + k^2 \lambda_D^2}, \quad (2.74)$$

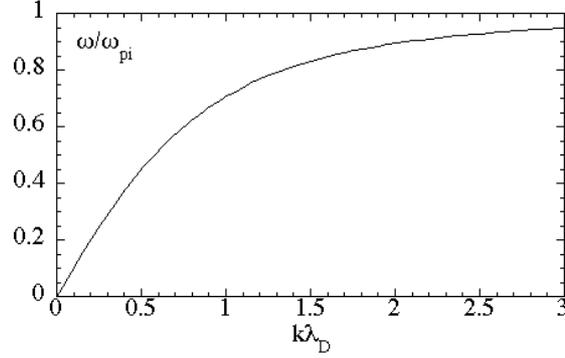


FIG. 2.4 – Relation de dispersion des ondes acoustiques ioniques pour $ZT_e \gg T_i$.

ce qui, compte tenu de la définition de c_s , implique $\omega < \omega_{pi}$.

La figure 2.4 représente la relation de dispersion des ondes acoustiques ioniques dans la limite $ZT_e \gg T_i$.

Les vitesses de phase et de groupe s'obtiennent facilement à partir de l'équation (2.74), soit

$$v_\phi = \frac{c_s}{(1 + k^2 \lambda_D^2)^{1/2}}, \quad (2.75)$$

et

$$v_g = \frac{c_s}{(1 + k^2 \lambda_D^2)^{3/2}}. \quad (2.76)$$

Une simplification supplémentaire peut être faite pour les perturbations de grande longueur d'onde, $k\lambda_D \ll 1$. Les équations (2.74)-(2.76) deviennent alors simplement

$$\omega = kc_s. \quad (2.77)$$

et

$$v_\phi = v_g = c_s. \quad (2.78)$$

Les ondes acoustiques ioniques correspondent à des oscillations simultanées des deux espèces constituant le plasma, électrons et ions. À partir de

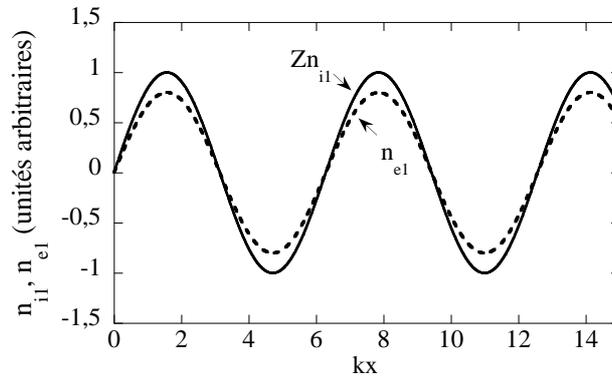


FIG. 2.5 – Comparaison des modulations de la densité ionique et de la densité électronique pour une onde acoustique ionique correspondant à $k\lambda_D = 0.5$.

l'équation de Poisson et des équations concernant les électrons, on montre que les perturbations de densité vérifient

$$Zn_{i1} = (1 + k^2\lambda_D^2)n_{e1}. \quad (2.79)$$

La figure 2.5 fournit une illustration de ce résultat pour $k\lambda_D = 0.5$.

Chapitre 3

Confinement inertiel

3.1 Introduction

Le confinement inertiel correspond à la deuxième voie pour la fusion thermonucléaire contrôlée. Chronologiquement elle est apparue au grand jour en 1972, une quinzaine d'années après la voie par confinement magnétique.

En réalité le terme de confinement est ici abusif dans la mesure où précisément il n'y a pas de confinement du combustible : c'est son inertie qui fixe la durée de son expansion et en pratique la durée de la phase de fusion.

On sait que le combustible doit être porté à une température thermonucléaire, de l'ordre de 5 à 10 keV. On verra qu'il doit également être comprimé. Une source extérieure doit donc fournir l'énergie correspondante. Il peut s'agir de lasers impulsionnels de haute intensité ou de faisceaux de particules (en général des ions).

3.2 Le paramètre de confinement ρR et le taux de combustible brûlé

On considère donc une sphère de rayon R_0 contenant le combustible, porté à très haute température. Sous l'effet de sa pression, la sphère se détend dans le vide environnant. La détente se fait par l'intermédiaire d'une onde

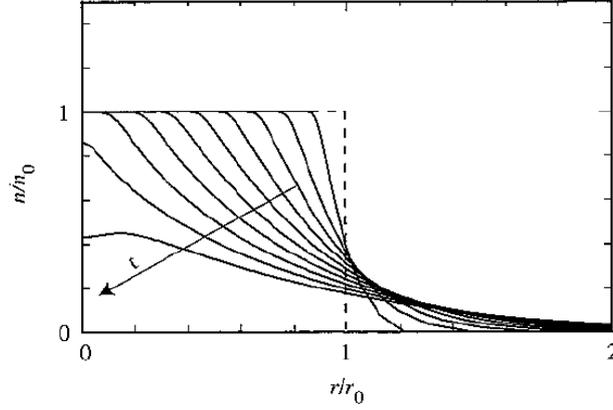


FIG. 3.1 – Schéma de la densité d'une sphère se détendant dans le vide, à des instants successifs. La courbe en pointillés correspond à la densité initiale. La température présente une évolution analogue.

de raréfaction qui part du bord de la sphère et qui se propage vers le centre de la cible à la vitesse du son c_s , en suivant l'équation

$$R(t) = R_0 - c_s t, \quad (3.1)$$

où $c_s = (\gamma P/\rho)^{1/2}$. Pour un gaz parfait monoatomique $\gamma = 5/3$, tandis que

$$\frac{P}{\rho} = 2 \frac{k_B T}{m_f}, \quad (3.2)$$

où $m_f = 2.5 m_p$ (moyenne entre la masse du deutérium et la masse du tritium), et où le facteur 2 provient de la prise en compte de la pression des électrons libres. Numériquement, on a

$$c_s(\text{m/s}) \simeq 3.6 \cdot 10^5 T_{\text{keV}}^{1/2}. \quad (3.3)$$

Le temps de [dé]-confinement est le temps que met l'onde de raréfaction pour parvenir au centre de la bille, soit

$$\tau_{\text{conf}} = R_0/c_s. \quad (3.4)$$

Il doit être comparé au temps de fusion, donné par l'équation (1.59), que l'on rappelle ici pour un mélange équimolaire DT ($n_{D0} = n_{T0} = n_0/2$),

$$\tau_{\text{fus}} = \frac{2}{n_0 \langle \sigma v \rangle}. \quad (3.5)$$

Le taux de combustible brûlé est une fonction du rapport τ_{conf}/τ_{fus} , que l'on peut écrire

$$\frac{\tau_{conf}}{\tau_{fus}} = \frac{n_0 \langle \sigma v \rangle R_0}{2 c_s} = \frac{\langle \sigma v \rangle}{2 m_f c_s} \rho R_0. \quad (3.6)$$

Un calcul élémentaire permet de déterminer approximativement le taux de combustible brûlé. La fraction brûlée est donnée par

$$f = \frac{N_{fusion}}{N_0/2}, \quad (3.7)$$

où $N_0 = n_0 V_0$ est le nombre initial total de noyaux de deutérium et de tritium contenus dans la sphère de rayon R_0 et de volume V_0 , et N_{fusion} le nombre total de réactions de fusion.

Pour estimer N_{fusion} , on va faire un certain nombre d'approximations. Tout d'abord on va considérer que seule la région centrale de la bille, celle qui n'a pas encore été atteinte par l'onde de raréfaction, est le siège de réactions de fusion. On considère que les régions qui se détendent ne contribuent pas, du fait de la chute rapide de la densité et de la température au-delà du rayon $R(t)$. Ensuite on néglige la variation temporelle de température qui pourrait résulter des réactions de fusion. Enfin on néglige l'appauvrissement du combustible, ce qui correspond à la limite $f \ll 1$.

On peut alors écrire

$$\frac{dN_{fusion}}{dt} = \frac{1}{4} n_0^2 \langle \sigma v \rangle V(t), \quad (3.8)$$

où $V(t)$ est le volume du cœur siège des réactions de fusion,

$$V(t) = V_0 \left(1 - \frac{t}{\tau_{conf}}\right)^3. \quad (3.9)$$

L'intégration sur le temps (de 0 à τ_{conf}) conduit à

$$N_{fusion} = \frac{1}{16} n_0^2 \langle \sigma v \rangle V_0 \tau_{conf}, \quad (3.10)$$

ce qui indique que le temps effectif de réaction est en fait $\tau_{conf}/4$ (temps au bout duquel on peut vérifier que 58 % de la bille s'est détendue dans le vide).

On obtient alors un taux de combustible brûlé égal à

$$f = \frac{\tau_{conf}}{4 \tau_{fus}} = \frac{\langle \sigma v \rangle}{8 m_f c_s} \rho R_0 = \frac{\rho R_0}{(\rho R_0)^*}, \quad (3.11)$$

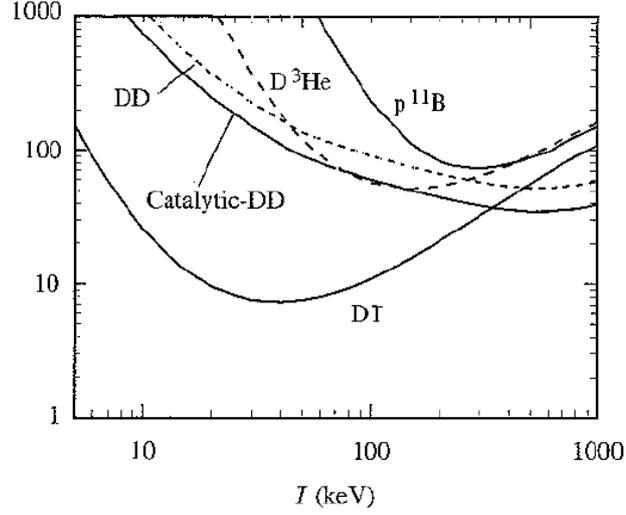


FIG. 3.2 – Valeur du paramètre $(\rho R_0)^*$, exprimé en g/cm^2 , en fonction de la température, pour la réaction DT, ainsi que pour quelques autres réactions de fusion. (Note : les auteurs de ce calcul [1] n'ont pas tenu compte du facteur $\gamma = 5/3$, ce qui induit une petite sous-estimation du résultat.)

où

$$(\rho R_0)^* = \frac{8 m_f c_s}{\langle \sigma v \rangle}. \quad (3.12)$$

Pour $k_B T = 25 \text{ keV}$, on a $\langle \sigma v \rangle \simeq 6 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^3/\text{s}$, $c_s \simeq 1.8 \cdot 10^8 \text{ cm/s}$, et

$$(\rho R_0)^* \simeq 10 \text{ g}/\text{cm}^2. \quad (3.13)$$

La prise en compte de l'appauvrissement peut se faire via une formule approchée bâtie sur le même principe que la formule (1.60), dans laquelle on remplace le temps t par le temps effectif de réaction, $\tau_{conf}/4$, ce qui donne

$$f \simeq \frac{\rho R_0}{(\rho R_0)^* + \rho R_0}. \quad (3.14)$$

Diverses approximations ont été faites dans l'établissement des équations (3.12) et (3.14), mais des calculs numériques plus précis conduisent à un résultat proche de (3.14), avec une valeur caractéristique un peu plus petite du paramètre $(\rho R_0)^*$, c'est-à-dire

$$(\rho R_0)^* \simeq 7 \text{ g}/\text{cm}^2, \quad (3.15)$$

pour des températures initiales de l'ordre 10 keV et au-delà. Ainsi, pour brûler 30 % du combustible, il faut réaliser $\rho R_0 \simeq 3 \text{ g}/\text{cm}^2$.

3.3 Critère type Lawson

On a vu dans le chapitre 1 que le critère correspondant à un gain $G = 1$ correspondait à une fraction brûlée $f = 6 k_B T / Q$, ce qui, dans le contexte de la fusion par confinement inertiel, pour laquelle on a aussi $f = \rho R_0 / (\rho R_0)^*$, conduit au critère

$$\rho R_{0,critique} = 6 \frac{k_B T}{Q} (\rho R_0)^*, \quad (3.16)$$

soit, pour $k_B T = 25 \text{ keV}$,

$$\rho R_{0,critique} \simeq \frac{1}{120} (\rho R_0)^* \simeq 6 \cdot 10^{-2} \text{ g/cm}^2. \quad (3.17)$$

3.4 Nécessité d'une compression

Pour déterminer les paramètres géométriques de la bille de combustible, on va se fixer deux critères :

- on veut un taux de combustion de 30 %, ce qui, d'après (3.14) et (3.15), correspond à $\rho R_0 \simeq 3 \text{ g/cm}^2$;
- on veut limiter l'énergie dégagée à 100 MJ (ce qui correspond à environ 25 kg d'explosif chimique : au-delà, on craint les effets mécaniques liés à l'explosion). Ceci limite la masse de la bille à 1 mg, puisque l'énergie de fusion dégagée par gramme brûlé vaut

$$E_{fusion} = \frac{17,6 \cdot 10^6 \times 1,6 \cdot 10^{-19}}{5 \times 1,67 \cdot 10^{-24}} = 3,37 \cdot 10^{11} \text{ J}. \quad (3.18)$$

Or on peut écrire la masse M de la bille sous la forme

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho R_0^3 = \frac{4\pi}{3} \frac{(\rho R_0)^3}{\rho^2}. \quad (3.19)$$

La densité du combustible qui résulte de ces conditions est donnée par

$$\rho = \left[\frac{4\pi}{3} \frac{(\rho R_0)^3}{M} \right]^{1/2}, \quad (3.20)$$

soit $\rho \simeq 340 \text{ g/cm}^3$ pour $\rho R_0 = 3 \text{ g/cm}^2$ et $M = 1 \text{ mg}$, à comparer avec la densité qui règne au centre du Soleil, environ 150 g/cm^3 . Si on compare en revanche avec la densité du DT solide (soit $0,225 \text{ g/cm}^3$), on se rend compte qu'il faut comprimer jusqu'à 1500 fois le DT solide pour parvenir aux conditions recherchées.

On en déduit le rayon R_0 ,

$$R_0 = \frac{\rho R_0}{\rho} \simeq 90 \mu\text{m}, \quad (3.21)$$

et le temps effectif de réaction,

$$\frac{\tau_{conf}}{4} = \frac{R_0}{4 c_s} \simeq 12,5 \text{ ps}. \quad (3.22)$$

De façon générale la relation $M\rho^2 = \frac{4\pi}{3}(\rho R_0)^3$ montre que, à ρR_0 donné, plus on souhaite une masse de combustible faible, plus la densité doit être élevée.

Estimons maintenant l'énergie qu'il faut apporter au combustible pour le porter à la température de fonctionnement. Pour les paramètres considérés ($T = 25 \text{ keV}$, $E_{fusion} = 100 \text{ MJ}$, $f = 0,3$) le gain G vaut environ 36, et l'énergie thermique à fournir au combustible vaut

$$E_{th} = \frac{E_{fusion}}{G} \simeq 2,8 \text{ MJ}. \quad (3.23)$$

Encore s'agit-il seulement de l'énergie à fournir au combustible. Compte tenu des rendements de conversion entre l'énergie source (laser ou autre) et l'énergie finalement transmise au combustible, on se rend compte qu'il faut disposer «à la prise» d'une énergie bien supérieure encore, et absolument irréaliste.

La situation serait donc particulièrement compromise sans le concept d'allumage par point chaud, que nous allons aborder maintenant.

3.5 Allumage par point chaud

On peut réduire considérablement l'apport initial d'énergie en utilisant le concept de «point chaud» et l'énergie des particules alpha produites par les réactions de fusion. L'idée est la suivante : au lieu de porter tout le combustible à la température thermonucléaire à l'aide d'une source d'énergie extérieure, on se contente de n'y porter qu'une faible partie, constituée par un point chaud. On utilise alors l'énergie des réactions de fusion libérée dans ce point chaud pour chauffer les couches voisines. Une onde de combustion thermonucléaire divergente peut alors envahir toute la cible.

Pour que cela soit possible, il faut que les particules alpha d'énergie 3,5 MeV déposent leur énergie au voisinage de l'endroit où elles sont apparues.

Or leur libre parcours moyen collisionnel λ (distance au bout de laquelle elles ont cédé leur énergie par collisions coulombiennes sur les particules chargées du plasma ambiant de température T et de densité ρ) est donné par

$$\lambda(\text{cm}) \simeq 2 \cdot 10^{-2} \frac{T(\text{keV})}{\rho(\text{g/cm}^3)}. \quad (3.24)$$

Pour $T = 10 \text{ keV}$ on trouve

$$\rho\lambda \simeq 0,2 \text{ g/cm}^2. \quad (3.25)$$

Par comparaison, le libre parcours moyen des neutrons est sensiblement plus élevé.

En pratique, il faut que le rayon du point chaud soit de l'ordre de λ . Ainsi on peut gagner plusieurs ordres de grandeur sur l'énergie initiale à fournir, d'autant que porter le point chaud à environ 7 keV peut suffire à déclencher l'allumage. L'énergie nécessaire pour chauffer le point chaud est alors

$$E_{\text{point chaud}} \simeq 2,8 \times \frac{7}{25} \times \left(\frac{0,2}{3}\right)^3 \text{ (MJ)} \quad (3.26)$$

$$\simeq 225 \text{ J}, \quad (3.27)$$

tandis que la masse du point chaud est

$$m_{\text{point chaud}}(\text{mg}) \simeq 1 \times \left(\frac{0,2}{3}\right)^3 \quad (3.28)$$

$$\simeq 3 \cdot 10^{-3}. \quad (3.29)$$

Le bilan énergétique doit également tenir compte de l'énergie nécessaire pour comprimer le reste du combustible. Celle-ci est au moins égale à l'énergie interne des électrons dégénérés, soit

$$E_{\text{compression}}(\text{kJ}) \simeq 0,32 \times M(\text{mg}) \times \rho^{2/3}(\text{g/cm}^2) \quad (3.30)$$

$$\simeq 15 \text{ kJ}. \quad (3.31)$$

On voit que le concept de point chaud fait gagner plusieurs ordres de grandeur sur l'énergie initiale à investir dans le combustible. Les estimations qui ont été faites dans cette section correspondent à une situation isochore (c'est-à-dire où il y a égalité des densités du point chaud et du reste du combustible). On pourrait de même se placer dans un régime isobare (égalité des pressions, avec un point chaud moins dense que le reste du combustible). Les chiffres seraient différents, mais pas la constatation portant sur l'intérêt du point chaud.

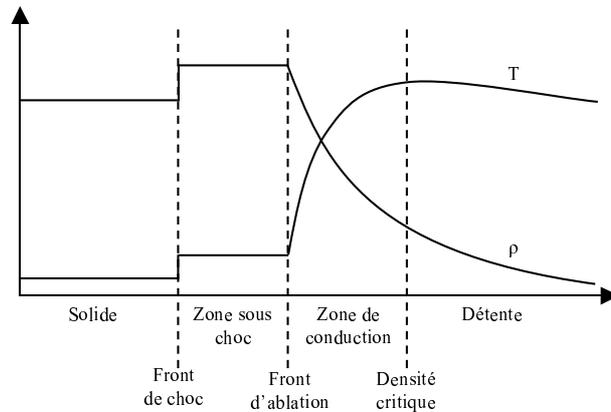


FIG. 3.3 – Schéma de la densité et de la température en fonction du rayon d'une cible solide irradiée par un laser arrivant de la droite. Le laser pénètre jusqu'à la densité critique en déposant une fraction de son énergie. L'énergie absorbée est transportée vers l'intérieur par conduction thermique. Le front d'ablation sépare la zone en détente (vers la droite) de la zone sous choc en mouvement vers la gauche. Le front de choc se propage dans le solide non encore perturbé.

3.6 La phase d'implosion

Préalablement à l'allumage, la compression du combustible doit être obtenue par implosion d'une cible de taille millimétrique. Pour arriver à une bille de combustible de $90 \mu\text{m}$ comprimée à 1500 fois la densité du DT solide, il faut par exemple partir d'une bille de DT solide d'environ 1 mm. La compression est due à une pression exercée à la périphérie de la bille. C'est donc en portant les couches externes de la bille à très haute température qu'on peut voir s'exercer cette pression. Pour porter ces couches externes à très haute température, on doit fournir une énergie importante dans un temps correspondant au temps d'implosion (typiquement de l'ordre de la dizaine de nanosecondes). Trois sources d'énergie peuvent être utilisées :

- un rayonnement laser intense ;
- des particules énergétiques (*a priori* des ions) ;
- un rayonnement X intense.

Dans le dernier cas, le rayonnement X intense peut lui même avoir été produit par l'interaction de l'une des deux premières sources avec un convertisseur (on parle alors d'attaque indirecte).

Précisons la séquence :

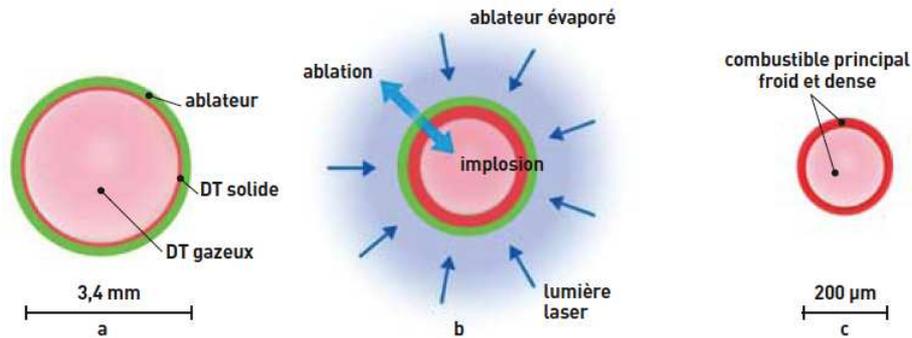


FIG. 3.4 – Schéma d'une cible en forme de coquille remplie de DT gazeux. Une couche de DT solide tapisse l'intérieur de la coquille, dont la partie extérieure, qui sera ablatée, peut être constituée de plastique. Les schémas a, b, et c correspondent respectivement à la cible dans son état initial, pendant la phase d'implosion, et à la fin de l'implosion, au moment de l'allumage (d'après Clefs CEA n°49, printemps 2004).

- l'énergie est absorbée par les couches extérieures ;
- celles-ci sont portées à très haute température et très haute pression ;
- elles se détendent dans le vide en exerçant une pression sur les couches plus internes ;
- ces couches intermédiaires se mettent elles-mêmes en mouvement dans le sens centripète (effet fusée) : c'est l'implosion. La frontière entre les couches en détente vers le vide et les couches en mouvement centripète porte le nom de front d'ablation. Ce front d'ablation progresse lui-même vers l'intérieur de la bille, c'est-à-dire qu'une même couche peut successivement être accélérée vers l'intérieur puis rattrapée par le front d'ablation et rejoindre la détente. Enfin les couches en mouvement centripète sont précédées par un choc qui les sépare de la partie non perturbée de la bille, et qui progresse également vers le centre de la bille (voir figure 3.3).

Le mécanisme est entretenu tant que de l'énergie continue à être absorbée en périphérie.

La bille peut être solide, mais des calculs ont montré que l'efficacité de l'implosion était accrue quand on utilisait des coquilles remplies de DT gazeux (voir figure 3.4). Le rapport d'aspect $R_0/\Delta R_0$, où R_0 est le rayon initial et ΔR_0 l'épaisseur initiale de la coquille est typiquement de l'ordre de 10. L'augmenter permettrait en théorie d'obtenir un meilleur rendement, mais mettrait en péril la stabilité et la symétrie de l'implosion. Pour que le DT soit sous forme liquide ou solide, déposé sur la face interne de la coquille, sa

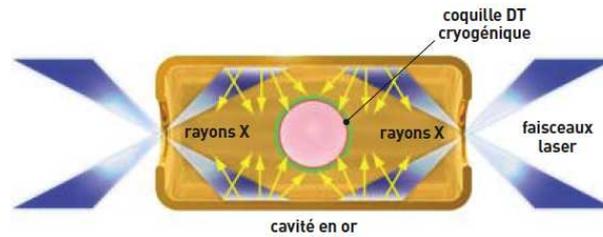


FIG. 3.5 – Schéma d’attaque indirecte (d’après Clefs CEA n°49, printemps 2004).

température initiale doit être très basse, inférieure à 20 K, d’où la nécessité d’utiliser la cryogénie pour préparer ces cibles.

3.7 Attaque indirecte

Plutôt que d’attaquer directement la cible de combustible avec les faisceaux laser, on peut choisir de convertir ce rayonnement en un rayonnement secondaire dans le domaine des rayons X. L’idée est de fabriquer une enceinte remplie de rayonnement proche de celui d’un corps noir (de température de l’ordre de 200 à 300 eV). C’est ce rayonnement x qui attaque alors la cible de combustible et déclenche l’ablation de ses couches extérieures et l’implosion des couches internes (voir figure 3.5).

3.8 Allumage rapide

Une variante du concept de fusion par confinement inertiel consiste à déclencher l’allumage thermonucléaire par un deuxième faisceau laser, de durée très courte (de l’ordre de la dizaine de picosecondes), censé apporter son énergie au cœur du combustible, au moment où la compression de la cible est maximale. l’énergie ainsi déposée sert l’allumette à l’ensemble de la cible, en créant le point chaud nécessaire au déclenchement des réactions de fusion.

Comme il s’agit de fournir une énergie de l’ordre de 100 kJ en un temps limité à environ 10 ps, on doit disposer de lasers de puissance très importante, de l’ordre de la dizaine de petawatt ($1 \text{ PW} = 10^{15} \text{ W}$). Ce type de performance est rendu possible par les développements récents de la conception et de la technologie des lasers de puissance.

Chapitre 4

Hydrodynamique des plasmas créés par laser

4.1 Introduction

Dans ce chapitre on traite certains aspects liés à l'hydrodynamique des plasmas créés par laser et des plasmas de fusion par confinement inertiel.

4.2 L'effet fusée

On s'intéresse tout d'abord à l'accélération centripète de la coquille contenant le combustible DT. Les couches extérieures de la coquille se détendent dans le vide environnant tandis que les couches internes sont accélérées en sens inverse. On parle d'effet fusée par analogie avec l'accélération d'une fusée due à l'éjection des gaz de combustion. Pour se ramener au fonctionnement d'une fusée, on doit faire un certain nombre de simplifications :

- on néglige la pression interne de la cavité englobée par la coquille ;
- on suppose que les couches internes sont accélérées de façon uniforme (c'est-à-dire qu'on suppose que le choc a traversé dans un temps très court toute la coquille et que la mise en vitesse des couches internes est uniforme) ;
- on se place en géométrie plane ;
- on suppose que le plasma ablaté se trouve propulsé dans le vide à une vitesse v_0 par rapport au reste de la cible.

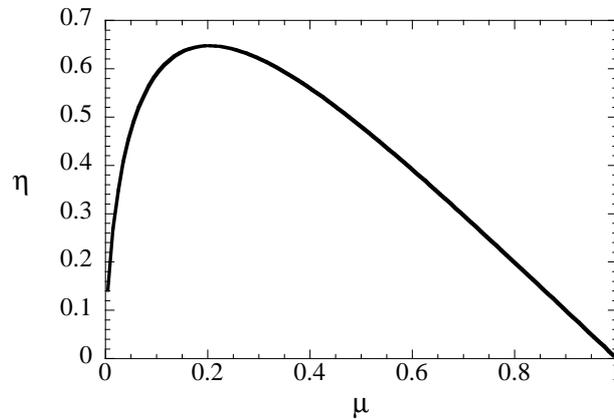


FIG. 4.1 – Rendement η de la fusée en fonction de la fraction de masse restante.

On désigne donc par M_0 la masse initiale de la fusée, par $M(t)$ sa masse instantanée, et par \dot{m} le taux de perte de masse [soit $M(t) = M_0 - \dot{m}t$, si l'instant $t = 0$ correspond à la mise en route de l'éjection de matière]. L'équation de conservation de l'impulsion nous permet d'écrire pour la variation de la vitesse v de la fusée

$$M(t) \frac{dv}{dt} = \dot{m}v_0, \quad (4.1)$$

soit

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\dot{m}}{M_0 - \dot{m}t} v_0, \quad (4.2)$$

dont la solution est

$$v(t) = v_0 \ln \left[\frac{M_0}{M(t)} \right]. \quad (4.3)$$

Le rendement énergétique η est donné par

$$\eta = \frac{\frac{1}{2}M(t)v^2(t)}{\frac{1}{2}[M_0 - M(t)]v_0^2} = \frac{\mu}{1 - \mu} (\ln \mu)^2, \quad (4.4)$$

où $\mu = M(t)/M_0$ correspond à la fraction de masse restante. Le rendement η est maximum et vaut environ 0,65 pour $\mu \simeq 0,2$, c'est-à-dire quand 80 % de la masse a été éjectée (voir figure 4.1).

Ce rendement peut être amélioré si la vitesse d'éjection est une fonction croissante du temps. Ce qui suppose, pour en revenir à notre problème d'implosion, que la puissance absorbée par les couches extérieures de la cible doit être une fonction croissante du temps. Le caractère sphérique de l'implosion

et la nécessité de lutter contre la résistance croissante de la pression interne de la cible renforce l'intérêt d'une augmentation progressive de la puissance à fournir, l'essentiel de l'énergie étant délivré en fin d'impulsion.

4.3 Structure de l'écoulement en attaque directe

On se place dans le contexte de l'attaque directe, quand l'énergie est apportée directement sur la surface de la coquille par un rayonnement laser. Les lasers utilisés sont des lasers à verre dopé au Néodyme, de longueur d'onde $\lambda = 1,06 \mu\text{m}$, éventuellement doublés ou triplés en fréquence par des cristaux non linéaires (soit $\lambda = 0,53 \mu\text{m}$ ou $\lambda = 0,35 \mu\text{m}$).

La propagation de la lumière laser dans le plasma créé en périphérie de la cible est gouvernée par l'indice de réfraction dont la partie réelle peut s'écrire

$$N_r \simeq \left(1 - \frac{n_e}{n_c}\right)^{1/2}, \quad (4.5)$$

où la densité critique n_c vaut 10^{27} m^{-3} pour un laser de longueur d'onde $\lambda = 1,06 \mu\text{m}$, ce qui est sensiblement inférieur à la densité d'une cible solide. L'impact du laser sur une cible initialement solide crée donc un écoulement hydrodynamique qui relie la zone dense interne à la zone extérieure où se propage le laser. Cet écoulement a la structure représentée sur la figure 4.2 (déjà présentée au chapitre 3). La zone la plus extérieure est également appelée zone d'interaction (c'est là que le laser interagit avec la cible) ou couronne (par analogie avec la couronne solaire).

On verra au chapitre 5 que l'absorption du rayonnement laser peut être due aux phénomènes dissipatifs dans le plasma (absorption collisionnelle). Mais elle peut également être due à des couplages linéaires ou non linéaires de l'onde laser avec des modes d'excitation du plasma. L'énergie absorbée chauffe le plasma et peut porter les couches externes à des températures de l'ordre du keV quand l'intensité laser est de l'ordre de 10^{15} W/cm^2 , tandis que la pression au niveau du front d'ablation dépasse le Mégabar ($1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$). Notons que le taux d'absorption collisionnelle est proportionnel à la fréquence de collision électron-ion ν_{ei} . On peut montrer que cette quantité varie avec la densité et la température comme $n_e/T^{3/2}$. Ainsi, plus le plasma est chaud, plus ν_{ei} est faible, et plus il devient difficile de continuer à chauffer le plasma (le problème se pose de façon similaire en fusion par confinement magnétique, où le chauffage ohmique est limitée pour les mêmes raisons).

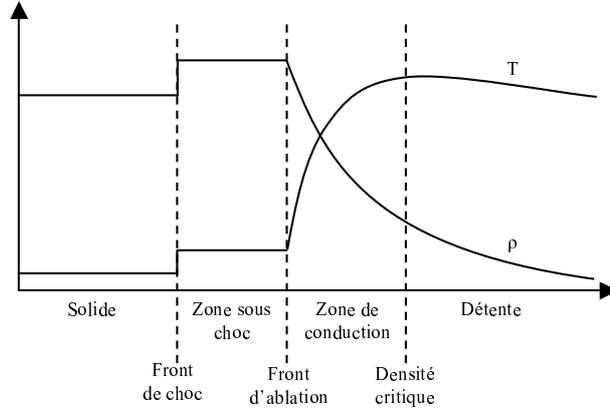


FIG. 4.2 – Schéma de la densité et de la température en fonction du rayon d'une cible solide irradiée par un laser arrivant de la droite. Le laser pénètre jusqu'à la densité critique en déposant une fraction de son énergie. L'énergie absorbée est transportée vers l'intérieur par conduction thermique. Le front d'ablation sépare la zone en détente (vers la droite) de la zone sous choc en mouvement vers la gauche. Le front de choc se propage dans le solide non encore perturbé.

4.4 Hydrodynamique : l'écoulement isotherme auto-semblable

Dans ce paragraphe, on s'intéresse plus particulièrement à la détente dans le vide du plasma. Cette détente s'apparente à celle d'un plasma semi-infini, qui est décrite par un modèle auto-semblable élémentaire.

Précisons les conditions initiales du modèle : à l'instant $t = 0$, les ions, supposés froids, occupent le demi-espace $x < 0$, avec une densité $n_i = n_{i0}$ pour $x < 0$ et $n_i = 0$ pour $x > 0$, tandis que les électrons de densité $n_e(x)$ et de température T_e sont en équilibre de Boltzmann avec le potentiel électrostatique $\Phi(x)$, soit

$$n_e = n_{e0} \exp(e\Phi/k_B T_e), \quad (4.6)$$

où n_{e0} est la densité électronique dans le plasma non perturbé (c'est-à-dire pour $x = -\infty$, où on a supposé que le potentiel s'annule), avec $n_{e0} = Z n_{i0}$, où Z est le nombre de charges par ion. Le potentiel Φ satisfait l'équation de Poisson

$$\epsilon_0 \partial^2 \Phi / \partial x^2 = e(n_e - Z n_i). \quad (4.7)$$

La densité électronique décroît brutalement au bord du plasma sur une dis-

tance caractéristique de l'ordre de la longueur de Debye, définie ici dans le plasma non perturbé, $\lambda_{D0} = (\epsilon_0 k_B T_e / n_{e0} e^2)^{1/2}$. Le champ électrique $E = -\partial\Phi/\partial x$ déclenche l'expansion des ions, suivant les équations

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial n_i}{\partial x} = -n_i \frac{\partial v_i}{\partial x}, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} = -\frac{Ze}{m_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (4.9)$$

Dans la limite quasi-neutre, on a $n_e \simeq Zn_i$, et l'équation du mouvement devient

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} = -c_s^2 \frac{1}{n_i} \frac{\partial n_i}{\partial x}. \quad (4.10)$$

La condition initiale ne comportant plus dans cette limite quasi-neutre d'échelle caractéristique, on est conduit à chercher une solution auto-semblable où les grandeurs physiques ne dépendent du temps et de l'espace qu'au travers de la variable d'auto-similarité $\xi = x/t$. Les équations de continuité (4.8) et du mouvement (4.10) deviennent

$$(v_i - \xi) \frac{dn_i}{d\xi} = -n_i \frac{dv_i}{d\xi}, \quad (4.11)$$

$$(v_i - \xi) \frac{dv_i}{d\xi} = -c_s^2 \frac{1}{n_i} \frac{dn_i}{d\xi}, \quad (4.12)$$

dont la solution vérifie $v_i - \xi = \pm c_s$. Parmi les deux possibilités de signe, seule la solution $v_i - \xi = c_s$ correspond à notre condition initiale,¹ et on a donc (pour $x + c_s t > 0$)

$$v_i = \xi + c_s, \quad (4.13)$$

$$n_i = n_{i0} \exp - \left(\frac{\xi}{c_s} + 1 \right), \quad (4.14)$$

tandis que le champ électrique vaut

$$E_{ss} = \frac{k_B T_e}{e c_s t} = \frac{E_0}{\omega_{pi} t}, \quad (4.15)$$

où on a posé $E_0 = (n_{e0} k_B T_e / \epsilon_0)^{1/2}$. Ce champ est celui d'un condensateur, où la plaque positive, située à la position où l'onde de raréfaction prend naissance, $x = -c_s t$, a une densité surfacique de charges $\sigma = \epsilon_0 E_{ss}$, tandis que la plaque négative, qui porte une charge opposée, est rejetée au bord du plasma.

¹l'autre solution correspond à un plasma occupant à $t = 0$ le demi-espace $x > 0$ et se détendant vers les $x < 0$.

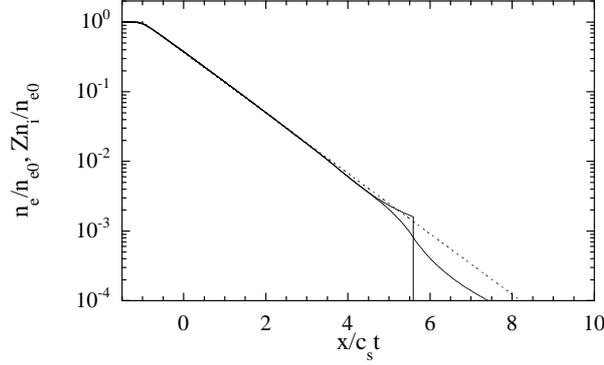


FIG. 4.3 – Densités ionique (marquée par une discontinuité en $x/c_s t \simeq 5.6$) et électronique en fonction du paramètre d’auto-similarité $\xi = x/t$, au temps $\omega_{pi}t = 50$. La courbe en pointillés correspond à la solution auto-semblable.

En fait, on ne peut totalement ignorer les effets de séparation de charges, qui, d’une part, sont dominants pendant la phase initiale de l’expansion, $\omega_{pi}t \lesssim 1$, et, d’autre part, permettent de calculer la structure des deux couches de densité de charges σ et $-\sigma$, et la position exacte de la couche négative. Celle-ci est approximativement située là où la longueur de Debye locale prédite par le modèle auto-semblable,

$$\lambda_D = \lambda_{D0} \left(\frac{n_{e0}}{n_e} \right)^{1/2} = \lambda_{D0} \exp \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{c_s t} \right) \right], \quad (4.16)$$

égale la longueur de gradient de densité $c_s t$. En ce point la solution auto-semblable prédit une vitesse $v_{i,front} = 2c_s \ln(\omega_{pi}t)$, ce qui correspond à un champ au bord du plasma égal à deux fois le champ auto-semblable,

$$E_{front} \simeq 2E_{ss} = 2E_0/\omega_{pi}t. \quad (4.17)$$

Le résultat de la résolution du système (4.8)-(4.9) couplé à l’équation de Poisson (4.7) et à l’équation de Boltzmann (4.6) est illustré sur la figure 4.3, où sont représentées les densités ionique et électronique pour $\omega_{pi}t = 50$. La courbe en pointillés correspond à la solution auto-semblable.

La densité de charges et le champ électrique sont tracés sur la figure 4.4 au même instant. On remarque que la plaque négative située au bord du plasma est en fait constituée de deux couches, situées de part et d’autre du front ionique, et de densités surfaciques de charges respectives σ et -2σ .

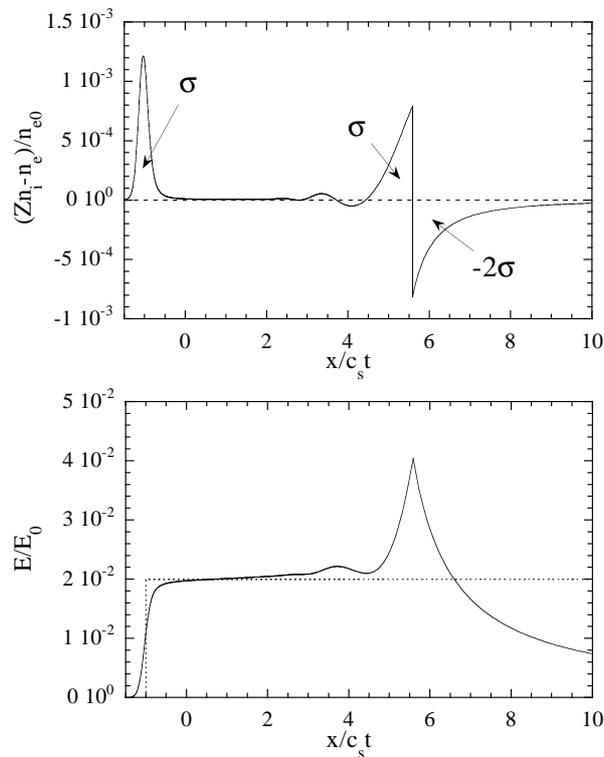


FIG. 4.4 – La figure du haut représente la densité de charges au temps $\omega_{pi}t = 50$. La figure du bas représente le champ électrique correspondant. La courbe en pointillés correspond au champ électrique de la solution auto-semblable.

4.5 Flux de chaleur ; loi de Spitzer-Härm

L'énergie laser est absorbée dans la couronne, à des densités inférieures ou égales à la densité critique. Entre le point critique correspondant et le front d'ablation, l'énergie est transportée par conduction thermique. Elle peut être de deux natures : la conduction thermique électronique ou la conduction radiative, suivant que ce sont les électrons ou les photons qui transportent l'énergie. La part respective de chaque vecteur d'énergie dépend du nombre de charge Z du matériau. Aux faibles valeurs de Z (cas du plastique) c'est le transport thermique électronique qui est dominant.

La théorie linéaire du transport nous apprend que le flux de chaleur est normalement proportionnel au gradient de température. Dans un plasma isotrope (c'est-à-dire en l'absence d'un champ magnétique significatif²), le

²Le champ magnétique ne joue un rôle important que si la fréquence cyclotronique

flux de chaleur est donné par la loi

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T, \quad (4.18)$$

où κ est le coefficient de conductivité thermique, dont on peut montrer qu'il ne dépend pas de la densité et qu'il varie comme $T^{5/2}$. Dans le cas des plasmas, cette loi porte le nom de Spitzer et Härm.

4.6 Validité de la théorie linéaire ; flux limite

L'hypothèse de base de la théorie linéaire du transport est que les paramètres de la fonction de distribution des vitesses des électrons varient lentement dans l'espace, c'est-à-dire lentement à l'échelle des libres parcours moyens collisionnels, $\lambda(v) = v\tau(v)$, des électrons responsables des phénomènes de transport. On peut dans l'étude du transport thermique définir un petit paramètre,

$$\epsilon = \lambda(v_{te})/L_t, \quad (4.19)$$

où $L_t = T_e/|\nabla T_e|$, et le résultat (4.18) résulte en fait d'un développement limité des équations en puissance de ce petit paramètre. À l'évidence, cette procédure devient incorrecte quand ϵ devient suffisamment grand. L'analyse des équations montre que la théorie linéaire devient incorrecte dès que $\lambda(v_{te})/L_t$ atteint 2×10^{-3} , ce qui peut paraître très faible. Mais il faut garder en mémoire que le libre parcours moyen collisionnel varie comme v^4 , et que les électrons responsables du transport thermique, dont la vitesse est de l'ordre de 3 à 5 fois la vitesse thermique électronique, ont en fait un libre parcours moyen collisionnel beaucoup plus grand que $\lambda(v_{te})$. Par exemple on a $\lambda(4v_{te}) = 256 \lambda(v_{te})$. On note aussi que, pour $\lambda(v_{te})/L_t = 2 \times 10^{-3}$, le flux linéaire vaut

$$|q| \simeq 0.1 n_e m_e v_{te}^3. \quad (4.20)$$

Cette valeur nous donne une estimation des effets de saturation du flux thermique électronique dans les gradients raides rencontrés dans les expériences d'interaction laser-plasma. L'expression (4.20) correspond à une forme de ce qu'on appelle communément le *flux limite*, tandis que l'expression $n_e m_e v_{te}^3$ correspond au *flux libre* (c'est à peu près le flux correspondant à une demi-Maxwellienne). Historiquement, on s'est assez vite aperçu en analysant les résultats d'expériences que le flux de chaleur devait être limité à

électronique est de l'ordre de la fréquence de collision thermique ν_{ei} . Il rend alors le transport anisotrope en introduisant un flux de chaleur perpendiculaire à la fois au gradient de température et à lui-même.

une valeur analogue à celle donnée par l'expression (4.20). Il est parfois commode de définir un *facteur de flux limite* f (en général de l'ordre de 0.1-0.3) et de décréter que le flux de chaleur ne peut dépasser $f n_e m_e v_{te}^3$.

Ainsi le flux de chaleur se trouve naturellement limité à une fraction du flux libre en cas de fort gradient. Cet aspect non-linéaire s'accompagne d'un effet non-local, précisément dû au fait que les électrons principalement responsables du transport parcourent une distance moyenne $\lambda_{ee}(v)$ avant de perdre une fraction significative de leur énergie. Les électrons responsables du transport ayant une vitesse de l'ordre de 3 à 5 v_{te} , toute inhomogénéité dans le profil de température électronique se fait nécessairement sentir jusqu'à une distance de l'ordre de $2 \times 10^2 \lambda_{ee}(v_{te})$.

Par l'analyse de la structure des équations cinétiques et des résultats de leur résolution numérique, il a été montré que le flux de chaleur pouvait être décrit de façon assez précise dans le régime non-linéaire par une formule non-locale de la forme [2, 3] :

$$q_e(x) = \int q_{SH}(x') w(x, x') dx', \quad (4.21)$$

où q_{SH} est le flux linéaire et $w(x, x')$ un noyau non-local dont différentes expressions ont été proposées, comme [3]

$$w(x, x') = \frac{1}{2\lambda(x')} \exp\left(-\frac{X}{\lambda(x')}\right), \quad (4.22)$$

où

$$X = \frac{1}{n_e(x')} \left| \int_x^{x'} n_e(x'') dx'' \right|, \quad (4.23)$$

et où $\lambda(x')$ est la portée effective des électrons issus d'une zone de température $T_e(x')$, donnée par

$$\lambda(x') \simeq 30\sqrt{Z+1} \lambda_{te}(x'). \quad (4.24)$$

Ce noyau de délocalisation est représenté sur la figure 4.5. Dans cette formulation non-locale, le flux de chaleur à une position x dépend du profil de température de la région entourant x sur une distance de l'ordre de 2λ . Le fait que cette distance est grande devant le libre parcours moyen λ_{te} est à nouveau relié au fait que les électrons responsables du flux de chaleur ont quelques vitesses thermiques, et le facteur $\sqrt{Z+1}$ est lié au fait qu'ils font en moyenne $Z+1$ collisions avec diffusion angulaire (principalement sur les ions) avant de perdre leur énergie par collisions sur les électrons.

Notons que quand $\lambda(x')$ est petit devant les échelles caractéristiques de longueur du profil de température électronique, $w(x, x')$ se comporte comme

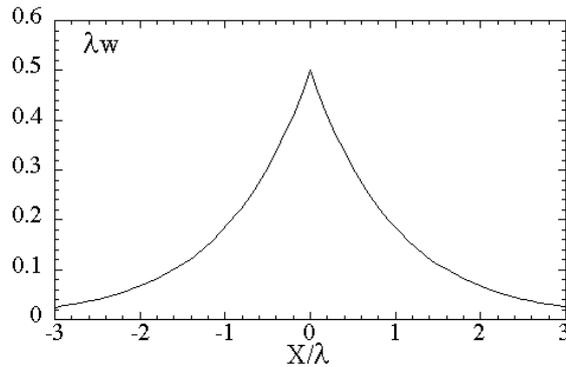


FIG. 4.5 – Noyau de délocalisation pour le transport non-local.

une fonction $\delta(x - x')$, et la formule nonlinéaire et non-locale (4.21) se ramène à la loi linéaire de Spitzer-Härm.

4.7 Instabilités hydrodynamiques

La compression de la bille de combustible est parfaitement sphérique si les conditions initiales le sont et si l'éclairement laser est uniforme. Cependant, toute irrégularité angulaire dans les conditions initiales ou les conditions d'éclairement va se traduire par un écart au caractère sphérique de l'implosion. Dans certains cas, les irrégularités sont même susceptibles de croître exponentiellement avec le temps et de dégrader de façon importante les performances de la cible. C'est ce qui se passe quand on a affaire à des instabilités hydrodynamiques, dont l'exemple type est l'instabilité de Rayleigh-Taylor que l'on rencontre quand un fluide léger pousse un fluide lourd. Ce type d'instabilités peut apparaître pendant l'implosion au niveau du front d'ablation ou de l'interface coquille-gaz interne.

Pour donner une idée de ce à quoi correspond ce type d'instabilités, on va traiter ici le cas de deux fluides non visqueux incompressibles (satisfaisant donc $\rho = \text{constante}$, où ρ est la densité du fluide, soit $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) soumis à la gravité, le fluide léger supportant le fluide lourd ($\rho_2 > \rho_1$).

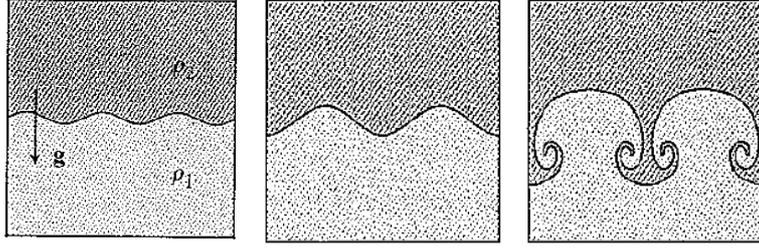


FIG. 4.6 – Schéma de l'instabilité de Rayleigh-Taylor, quand un fluide léger supporte un fluide lourd ($\rho_2 > \rho_1$).

L'équation du mouvement de chaque fluide a la forme

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla P + \rho \mathbf{g}, \quad (4.25)$$

où ρ est la densité du fluide considéré et \mathbf{g} le champ de pesanteur. Si on s'intéresse à des perturbations de faible amplitude (petite devant la longueur d'onde de ces perturbations), on peut négliger dans cette équation le terme convectif $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ et écrire

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla P + \rho \mathbf{g}, \quad (4.26)$$

A l'ordre zéro (en puissance de l'amplitude de la perturbation), on a la solution d'équilibre

$$\nabla P_0 = \rho \mathbf{g}.$$

A l'ordre 1, on a simplement

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla P_1. \quad (4.27)$$

L'hypothèse d'incompressibilité $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ impose

$$\Delta P_1 = 0. \quad (4.28)$$

Soit z l'axe parallèle à \mathbf{g} . On suppose \mathbf{g} orienté vers le bas, avec $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$, et on s'intéresse aux perturbations ayant un comportement sinusoïdal le long de la surface de séparation des deux fluides, avec

$$P_1(\mathbf{r}_\perp, z, t) = \Re \left[\tilde{P}(z) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_\perp - i\omega t) \right], \quad (4.29)$$

où \mathbf{r}_\perp correspond aux composantes x et y du vecteur \mathbf{r} , et \mathbf{k} est le vecteur d'onde (dans le plan x, y) de la perturbation. L'équation $\Delta P_1 = 0$ impose donc

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{P} = -k^2 \tilde{P}, \quad (4.30)$$

dont la solution générale est de la forme $Ae^{kz} + Be^{-kz}$. Cependant, si on impose que la perturbation ne diverge pas quand on s'éloigne de l'interface, il ne reste que la solution en e^{kz} pour $z < 0$ (dans le fluide inférieur) et e^{-kz} pour $z > 0$ (dans le fluide supérieur).

Soit maintenant \mathbf{r}_0 la position d'équilibre d'un élément fluide donné. Du fait de la perturbation, cet élément fluide se retrouve en $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\xi}$, où $\boldsymbol{\xi}$ est le déplacement. La vitesse fluide est reliée au déplacement par la relation

$$\mathbf{v} = \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt}, \quad (4.31)$$

ce qui à l'ordre 1 se réduit à

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}, \quad (4.32)$$

si bien que l'équation du mouvement peut encore s'écrire à l'ordre considéré

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = -\nabla P_1. \quad (4.33)$$

Le déplacement $\boldsymbol{\xi}$ ayant le même comportement temporel que la perturbation de pression P_1 , on en déduit

$$\rho \omega^2 \boldsymbol{\xi} = \nabla P_1, \quad (4.34)$$

et en particulier, pour le déplacement vertical noté simplement ξ

$$\rho_1 \omega^2 \xi = k P_1^{(1)} \quad \text{pour } z < 0, \quad (4.35)$$

$$\rho_2 \omega^2 \xi = -k P_1^{(2)} \quad \text{pour } z > 0, \quad (4.36)$$

où on a distingué par un indice supérieur entre parenthèses les perturbations de pression dans les milieux 1 et 2.

Pour terminer l'analyse, il nous faut trouver les conditions devant être réalisées à l'interface entre les deux fluides. La première condition concerne la partie verticale ξ du déplacement qui doit être la même de part et d'autre de l'interface, pour $z = 0$, soit

$$\xi = \frac{k}{\omega^2} \frac{P_1^{(1)}}{\rho_1} = -\frac{k}{\omega^2} \frac{P_1^{(2)}}{\rho_2}. \quad (4.37)$$

Notons que, en ce qui concerne la partie transverse, aucune contrainte ne doit être satisfaite, les fluides pouvant glisser l'un par rapport à l'autre.

La deuxième condition à réaliser est plus délicate à écrire, car elle fait appel à la distinction entre perturbation eulérienne et perturbation lagrangienne de la pression. La perturbation eulérienne P_1 correspond à la perturbation de la pression au point considéré, perçu par un observateur immobile. La perturbation lagrangienne, que l'on note ici $P_{1,L}$, correspond à la variation de pression vue par un observateur se déplaçant avec le fluide, et donc déplacé de la quantité $\boldsymbol{\xi}$ par rapport à sa position d'équilibre, avec, en ne conservant que les termes d'ordre 1,

$$P_{1,L} = P_1 + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla P_0 = P_1 + \rho \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{g} \quad (4.38)$$

$$= P_1 - \rho \xi g. \quad (4.39)$$

On peut aussi voir cette équation comme résultant de la linéarisation puis de l'intégration dans le temps de l'équation reliant la dérivée eulérienne de la pression (dérivée sur place) à la dérivée lagrangienne (dérivée en suivant le mouvement)

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla P. \quad (4.40)$$

Lors du déplacement de l'interface, la pression reste équilibrée de part et d'autre de l'interface, et on doit donc écrire l'égalité des perturbations lagrangiennes en $z = 0$, soit

$$P_1^{(1)} - \rho_1 \xi g = P_1^{(2)} - \rho_2 \xi g. \quad (4.41)$$

En utilisant l'équation (4.37), on obtient

$$\frac{\omega^2}{k} \rho_1 \xi - \rho_1 \xi g = -\frac{\omega^2}{k} \rho_2 \xi - \rho_2 \xi g, \quad (4.42)$$

d'où la relation de dispersion

$$\omega^2 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} k g. \quad (4.43)$$

Dans le cas d'un fluide léger supportant un fluide lourd ($\rho_2 > \rho_1$), les fréquences ω satisfaisant la relation de dispersion (4.43) sont imaginaires pures, et l'une des deux racines correspond à une instabilité en $e^{\gamma t}$, de taux de croissance

$$\gamma = \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} k g \right)^{1/2}. \quad (4.44)$$

La situation est évidemment plus complexe lors de l'implosion d'une coquille, car le fluide est compressible, la matière s'écoule au travers des discontinuités constituées par le front d'ablation et le front de choc, et l'histoire même de l'implosion est constituée d'une phase d'implosion proprement dite, suivie d'un rebond initié au centre de la cible. Dans ces différentes phases, différentes parties de l'implosion sont susceptibles d'être sujettes aux instabilités du type Rayleigh-Taylor.

Pour finir cette section, signalons l'existence de deux autres instabilités qui peuvent jouer un rôle important dans le contexte de la fusion par confinement inertiel :

- l'instabilité de Kelvin-Helmoltz, qui apparaît quand deux fluides glissent l'un par rapport à l'autre. Le cas de l'excitation de vagues par le vent à la surface de l'eau est le plus familier. Cette instabilité joue un rôle dans les phases nonlinéaires de l'instabilité de Rayleigh-Taylor, au cours de laquelle les fluides se mettent à glisser l'un par rapport à l'autre ;
- l'instabilité de Richtmyer-Meshkov, qui se produit quand une onde de choc traverse une interface entre deux fluides.

Chapitre 5

Interaction laser-plasma

5.1 Absorption des ondes électromagnétiques

Dans un plasma dissipatif les collisions peuvent efficacement transférer l'énergie des ondes, qu'elles soient électrostatiques ou électromagnétiques, vers les particules. Dans cette section, on étudie l'absorption collisionnelle des ondes électromagnétiques. L'absorption collisionnelle est également appelée *bremssstrahlung inverse* par référence à l'image quantique où un photon est absorbé par un électron lorsque celui-ci passe au voisinage d'un ion, qui est le processus inverse de l'émission libre-libre ou *bremssstrahlung*.

On revient en arrière sur le calcul de la réponse diélectrique du plasma du paragraphe (2.6). On restreint la discussion aux ondes électromagnétiques, ce qui permet de ne traiter que la réponse électronique, et d'oublier les effets thermiques dans les équations fluides. En revanche on inclut maintenant le terme collisionnel correspondant à la friction des électrons sur les ions (au repos), ce qui donne pour l'équation du mouvement des électrons

$$\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + (\mathbf{v}_e \cdot \nabla) \mathbf{v}_e = -\frac{e}{m_e} (\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) - \nu_{ei} \mathbf{v}_e. \quad (5.1)$$

où ν_{ei} est la fréquence de collision électron-ion. Dans les plasmas cinétiques ($n_{e0} \lambda_D^3 \gg 1$, $\Gamma \ll 1$), la fréquence de collision ν_{ei} est petite devant la fréquence plasma électronique ω_{pe} , mais elle ne doit pas être totalement négligée dès lors qu'on s'intéresse au problème de l'absorption.

En linéarisant l'équation (5.1), on obtient

$$\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E} - \nu_{ei} \mathbf{v}_e. \quad (5.2)$$

La réponse à un champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re[\mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)]$ est maintenant $\mathbf{v}_e(\mathbf{r}, t) = \Re[\mathbf{v}_e(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)]$ avec

$$\mathbf{v}_e(\mathbf{r}) = \frac{e\mathbf{E}(\mathbf{r})}{im_e(\omega + i\nu_{ei})}. \quad (5.3)$$

La susceptibilité électronique vaut

$$\chi_e(\omega) = -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + i\nu_{ei})}. \quad (5.4)$$

Finalement on obtient la fonction diélectrique

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + i\nu_{ei})} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 + \nu_{ei}^2} \left(1 - i\frac{\nu_{ei}}{\omega}\right). \quad (5.5)$$

La relation de dispersion des ondes électromagnétiques, que l'on peut toujours écrire

$$k = \frac{\omega}{c} N(\omega), \quad (5.6)$$

où $N(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)}$ est l'indice optique, implique que, pour ω réel, le nombre d'onde k possède nécessairement une partie imaginaire dès lors que l'on prend en compte un taux de collision ν_{ei} fini. Partie réelle et partie imaginaire de k sont reliées par les équations

$$\Re(k)^2 - \Im(k)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Re(\epsilon), \quad (5.7)$$

$$2\Re(k)\Im(k) = \frac{\omega^2}{c^2} \Im(\epsilon). \quad (5.8)$$

Dans la couronne des plasmas créés par laser la fréquence de collision est en général beaucoup plus petite que la fréquence plasma électronique, si bien qu'on peut faire l'approximation¹ $|\Im(k)| \ll |\Re(k)|$, ce qui donne

$$\Re(k) \simeq \frac{\omega}{c} \sqrt{\Re(\epsilon)} \simeq \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right)^{1/2}, \quad (5.9)$$

¹Cette approximation est cependant invalide au voisinage immédiat de la densité critique, pour laquelle $\Re(\epsilon)$ s'annule.

et

$$\begin{aligned}\Im(k) &\simeq \frac{1}{2} \frac{\nu_{ei}}{c} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\nu_{ei}}{c} \frac{n_e}{n_c} \left(1 - \frac{n_e}{n_c}\right)^{-1/2}.\end{aligned}\quad (5.10)$$

Si on admet en outre que la fréquence de collision est proportionnelle à la densité électronique, $\nu_{ei} = \nu_c n_e / n_c$, alors $\Im(k)$ vaut

$$\Im(k) \simeq \frac{1}{2} \frac{\nu_c}{c} \left(\frac{n_e}{n_c}\right)^2 \left(1 - \frac{n_e}{n_c}\right)^{-1/2}.\quad (5.11)$$

La partie imaginaire de k correspond à l'atténuation spatiale de l'onde, avec

$$|\mathbf{E}| \propto \exp[-\Im(k)x] \quad (5.12)$$

et

$$\langle \mathbf{E}^2 \rangle \propto \exp[-2\Im(k)x] \quad (5.13)$$

pour une onde se propageant vers les $x > 0$. Dans la dernière expression, le signe $\langle \dots \rangle$ correspond à une moyenne sur la période de l'onde électromagnétique. Ainsi la longueur d'absorption de l'onde, c'est-à-dire la longueur au bout de laquelle l'intensité de l'onde a été réduite par le facteur $1/e$, est donnée par

$$L_{abs} = \frac{c}{\nu_c} \left(\frac{n_c}{n_e}\right)^2 \left(1 - \frac{n_e}{n_c}\right)^{1/2}.\quad (5.14)$$

Cette atténuation spatiale se retrouve également en calculant la puissance dissipée par unité de volume dans le plasma par effet Joule,

$$P_a = \langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \rangle = \frac{1}{2} \Re(\mathbf{j}^* \cdot \mathbf{E}), \quad (5.15)$$

où \mathbf{j}^* désigne le complexe conjugué de \mathbf{j} , et où on rappelle que $\mathbf{j} = -i\omega\epsilon_0\chi_e\mathbf{E}$. Ainsi on obtient

$$P_a = \frac{1}{2} \omega\epsilon_0 \Im(\chi_e) |\mathbf{E}|^2 = \omega\epsilon_0 \Im(\chi_e) \langle \mathbf{E}^2 \rangle.\quad (5.16)$$

Utilisant alors (5.4) on trouve

$$P_a = \nu_{ei} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 + \nu_{ei}^2} \epsilon_0 \langle \mathbf{E}^2 \rangle \simeq \nu_{ei} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \epsilon_0 \langle \mathbf{E}^2 \rangle.\quad (5.17)$$

Le vecteur de Poynting moyenné est donné par

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{\mu_0} \langle \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rangle, \quad (5.18)$$

ou, en utilisant la loi de Faraday (2.24) et en désignant par \mathbf{n} le vecteur unitaire dans la direction de \mathbf{k} ,

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{\Re(k)c^2}{\omega} \epsilon_0 \langle \mathbf{E}^2 \rangle \mathbf{n}. \quad (5.19)$$

On vérifie alors aisément l'équation de conservation de l'énergie à partir de (5.8), (5.13), (5.16), et (5.19) :

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{S} \rangle = -P_a. \quad (5.20)$$

5.2 Interaction nonlinéaire laser-plasma : pression de rayonnement

L'interaction laser matière fait appel à des ondes électromagnétiques qui peuvent être de haute intensité. De même les ondes excitées dans le plasma peuvent elles aussi atteindre des intensités élevées. Les effets non-linéaires dus à ces hautes intensités jouent un rôle essentiel dans beaucoup d'expériences. Le but de cette section et des suivantes est de donner quelques notions de base sur ces effets non-linéaires.

Adoptons dans un premier temps une description particulière de la lumière. On rappelle que dans le vide chaque photon possède une énergie $\hbar\omega$ et une impulsion $\hbar\mathbf{k} = (\hbar\omega/c)\mathbf{n}$, où \mathbf{k} est le vecteur d'onde et \mathbf{n} le vecteur unitaire associé. Si N photons par unité de temps et de surface viennent se réfléchir sur un miroir parfait, il y a transfert d'impulsion entre le rayonnement et le miroir, avec une pression exercée sur le miroir donnée par

$$P = 2 \frac{N\hbar\omega}{c}. \quad (5.21)$$

La quantité $I = N\hbar\omega$ représente l'intensité du rayonnement (définie ici comme le flux d'énergie de rayonnement par unité de surface), et donc

$$P = 2 \frac{I}{c}. \quad (5.22)$$

Si R est le taux de réflexion du miroir, la formule devient

$$P = (1 + R) \frac{I}{c}. \quad (5.23)$$

Dans le cas où le miroir est constitué par un plasma, cette pression ou plus exactement la force exercée par le rayonnement se répartit tout au long du gradient de densité parcouru par la lumière. On qualifie cette force de *force pondéromotrice*, et la détermination de sa répartition spatiale fait l'objet des paragraphes qui suivent.

5.3 Force pondéromotrice : approche fluide

On adopte ici le point de vue du fluide électronique. L'équation du mouvement pour le fluide électronique s'écrit

$$m_e \left[\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + (\mathbf{v}_e \cdot \nabla) \mathbf{v}_e \right] = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) - \frac{1}{n_e} \nabla \cdot \vec{P}_e. \quad (5.24)$$

Rappelons tout d'abord l'équation permettant de calculer la réponse linéaire en l'absence du terme de pression,

$$m_e \frac{\partial \mathbf{v}_{e1}}{\partial t} = -e\mathbf{E}_1, \quad (5.25)$$

où \mathbf{E}_1 est le champ haute-fréquence. Si on prend le rotationnel de cette équation, on obtient

$$m_e \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{v}_{e1} = e \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}, \quad (5.26)$$

qui peut être intégré en remarquant que $\mathbf{v}_{e1} = 0$ en l'absence du champ haute-fréquence, soit

$$m_e \nabla \times \mathbf{v}_{e1} = e\mathbf{B}_1. \quad (5.27)$$

Intéressons nous maintenant à la force non-linéaire exercée par l'onde sur les électrons. On définit $\mathbf{u}_e = \mathbf{v}_e - \mathbf{v}_{e1}$, qui représente la vitesse électronique après soustraction de la composante linéaire, et on réécrit (5.24),

$$m_e \left[\frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} + (\mathbf{u}_e \cdot \nabla) \mathbf{u}_e \right] = -e\mathbf{E}_2 - \frac{1}{n_e} \nabla \cdot \vec{P}_e - [m_e(\mathbf{v}_{e1} \cdot \nabla) \mathbf{v}_{e1} + e\mathbf{v}_{e1} \times \mathbf{B}_1], \quad (5.28)$$

où $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E} - \mathbf{E}_1$ est le champ résiduel, et où on a supposé que le seul champ magnétique à prendre en considération était le champ \mathbf{B}_1 de l'onde. Enfin on a négligé $(\mathbf{u}_e \cdot \nabla) \mathbf{v}_{e1}$ et $(\mathbf{v}_{e1} \cdot \nabla) \mathbf{u}_e$ qui sont d'ordre supérieur. Les derniers

termes dans le membre de droite de l'équation (5.28) correspondent à la force non-linéaire

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{nl} &= - [m_e(\mathbf{v}_{e1} \cdot \nabla)\mathbf{v}_{e1} + m_e\mathbf{v}_{e1} \times \nabla \times \mathbf{v}_{e1}] \\ &= -\frac{1}{2}m_e\nabla v_{e1}^2,\end{aligned}\quad (5.29)$$

où on a utilisé la relation (5.27). Cette force correspond à la force pondéromotrice.²

Notons que le même calcul effectué pour un ion fait ressortir une force beaucoup plus petite (dans le rapport des masses), que l'on peut négliger.

Pour une onde monochromatique de fréquence ω , la force pondéromotrice moyennée sur la haute fréquence peut également s'exprimer à partir du champ électrique,

$$\langle \mathbf{f}_{nl} \rangle = -\frac{1}{2}m_e\nabla \langle v_{e1}^2 \rangle = -\frac{e^2}{2m_e\omega^2}\nabla \langle E_1^2 \rangle. \quad (5.30)$$

La densité de force par unité de volume s'obtient en multipliant la force exercée sur un électron par la densité électronique n_e ,

$$\langle \mathbf{F} \rangle = -\frac{1}{2}\frac{n_e e^2}{m_e \omega^2}\nabla \langle E_1^2 \rangle, \quad (5.31)$$

résultat qu'on peut aussi mettre sous la forme

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{F} \rangle &= -\frac{\epsilon_0}{2}\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\nabla \langle E_1^2 \rangle \\ &= -\frac{\epsilon_0}{2}(1 - \epsilon)\nabla \langle E_1^2 \rangle,\end{aligned}\quad (5.32)$$

où ϵ est la fonction diélectrique du plasma.

Pour faire le lien avec le paragraphe précédent, prenons le cas d'une onde électromagnétique monochromatique en incidence normale sur un plasma non collisionnel. Soit x la direction de propagation. On pose naturellement $\mathbf{E}_1(x, t) = \Re[\mathbf{E}_1(x) \exp(-i\omega t)]$. L'équation d'onde (2.43) s'écrit

$$\frac{d^2\mathbf{E}_1}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon\mathbf{E}_1 = 0. \quad (5.33)$$

²Certains auteurs réservent toutefois le terme de force pondéromotrice à la partie basse-fréquence (moyenne sur la période de l'onde haute fréquence considérée, quand elle peut être considérée comme monochromatique) de la force non-linéaire (5.29)

On fait le produit scalaire par $2d\mathbf{E}_1/dx$ pour obtenir

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dE_1}{dx} \right)^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \frac{d}{dx} E_1^2 = 0. \quad (5.34)$$

L'équation de Faraday nous permet par ailleurs d'écrire

$$\left\langle \left(\frac{dE_1}{dx} \right)^2 \right\rangle = \omega^2 \langle B_1^2 \rangle. \quad (5.35)$$

L'équation (5.34) peut alors s'écrire, après moyenne sur la haute fréquence et division par ω^2 ,

$$\frac{d}{dx} \langle B_1^2 \rangle + \frac{1}{c^2} \epsilon \frac{d}{dx} \langle E_1^2 \rangle = 0. \quad (5.36)$$

On peut enfin utiliser cette relation pour transformer l'équation (5.32) en

$$\langle \mathbf{F} \rangle = -\frac{d}{dx} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \langle E_1^2 \rangle + \frac{1}{2\mu_0} \langle B_1^2 \rangle \right). \quad (5.37)$$

On vérifie aisément, en intégrant cette expression depuis le vide jusqu'à l'intérieur du plasma, que la force totale exercée par unité de surface de la cible s'identifie bien à $2I/c$, où I est l'intensité de l'onde incidente.

La force pondéromotrice peut aussi s'exprimer sous la forme du gradient d'un *potentiel pondéromoteur* $\Phi_{nl} = \frac{1}{2} m_e v_{e1}^2$, et conduit à des perturbations de nature électrostatique dans le plasma. Elle tend en particulier à expulser les électrons des régions où l'onde haute-fréquence a une intensité élevée. Notons que les ions sont sensibles à la force pondéromotrice de façon indirecte, dans la mesure où, sur les échelles de temps hydrodynamiques, la force pondéromotrice exercée sur les électrons conduit à une séparation de charges partielle ou totale, à laquelle est associé un champ électrique, qui, lui, s'exerce aussi bien sur les électrons que sur les ions.

5.4 Couplage d'ondes

Si maintenant on considère deux ondes haute-fréquence se propageant dans le plasma, avec

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = \Re [\mathbf{E}_1 \exp i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t) + \mathbf{E}_2 \exp i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega_2 t)]. \quad (5.38)$$

La force pondéromotrice correspondante s'écrit

$$\mathbf{f}_{nl} = -\frac{1}{2} m_e \nabla (v_1^2 + v_2^2 + 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2), \quad (5.39)$$

où \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 sont les réponses linéaires aux deux composantes du champ électrique (5.38). La force non-linéaire contient des termes oscillant aux fréquences $2\omega_1$, $2\omega_2$, et $\omega_1 \pm \omega_2$. Les vecteurs d'onde correspondants sont $2\mathbf{k}_1$, $2\mathbf{k}_2$, et $\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2$. Le couplage d'onde proprement dit correspond au dernier terme du membre de droite de l'équation (5.39). Il peut s'écrire plus explicitement en utilisant le développement

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \frac{1}{2} \Re \{ & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \exp i [(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} - (\omega_1 + \omega_2)t] \\ & + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2^* \exp i [(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} - (\omega_1 - \omega_2)t] \}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Cette force peut exciter des oscillations aux fréquences et nombres d'onde

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_1 \pm \omega_2, \\ \mathbf{k} &= \mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Si (ω, \mathbf{k}) satisfait la relation de dispersion de modes électrostatiques dans le plasma (ondes acoustiques ioniques ou ondes plasma électroniques), cette excitation peut être résonnante et conduire à un transfert d'énergie significatif des ondes 1 et 2 vers l'onde considérée. Comme indiqué précédemment, cette onde est nécessairement de nature électrostatique. Notons aussi que ce couplage n'est possible que si $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ ou $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2^*$ sont différents de zéros, ce qui exclut les cas où les polarisations des deux ondes sont perpendiculaires l'une à l'autre.

Nous venons de voir que deux ondes haute-fréquence peuvent se coupler via la force pondéromotrice pour exciter des perturbations électrostatiques. Ce n'est pas le seul mécanisme non-linéaire susceptible de coupler des ondes dans les plasmas. Le courant électronique lui-même, $j_e = -en_e \mathbf{v}_e$, peut contenir des contributions nonlinéaires quand au moins une onde électrostatique de fréquence ω_1 et de nombre d'onde \mathbf{k}_1 est présente dans le plasma. En présence d'une seconde onde de fréquence ω_2 et de nombre d'onde \mathbf{k}_2 apparaît un courant électrique nonlinéaire aux fréquences et nombres d'onde également donnés par les relations (5.41). Ce courant non-linéaire peut exciter des perturbations électrostatiques via l'équation de conservation de la charge

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (5.42)$$

ou des perturbations électromagnétiques via la loi d'Ampère. Ici encore l'excitation peut prendre un caractère résonnant et le transfert d'énergie correspondant peut être efficace si (ω, \mathbf{k}) satisfait la relation de dispersion appropriée.

Un exemple important du type de couplage que nous venons de voir est la diffusion Thomson d'une onde électromagnétique par des perturbations de la densité électronique associées à des ondes plasmas électroniques ou des ondes acoustiques ioniques. Le produit du couplage est une onde électromagnétique qui peut s'échapper du plasma et être détectée, donnant ainsi de précieuses informations sur les propriétés du plasma, comme la densité ou la température des différentes espèces, les conditions (5.41) permettant la détermination de la fréquence et du nombre d'onde des perturbations du plasma à partir de la géométrie des ondes incidente et diffusées et du spectre de la lumière diffusée.

Les couplages non-linéaires peuvent donner lieu à des instabilités dans le cas où une onde de grande amplitude se propage dans le plasma. La situation générique est la suivante : une onde de grande amplitude, caractérisée par (ω_0, \mathbf{k}_0) , se couple à une onde de faible amplitude (qui à l'origine peut simplement provenir du bruit thermodynamique), caractérisée par (ω_1, \mathbf{k}_1) , pour alimenter une deuxième onde de faible amplitude, caractérisée par (ω_2, \mathbf{k}_2) , avec

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \omega_1 + \omega_2, \\ \mathbf{k}_0 &= \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2.\end{aligned}\tag{5.43}$$

En retour la deuxième onde (ω_2, \mathbf{k}_2) se couple à son tour avec l'onde de grande amplitude pour renforcer l'onde (ω_1, \mathbf{k}_1) . Moyennant certaines conditions (en général au-dessus d'une intensité seuil pour l'onde de grande amplitude, déterminée par les taux d'amortissement respectifs des ondes 1 et 2), cette rétroaction est instable, et conduit à la croissance exponentielle des deux ondes 1 et 2 (qualifiées d'*ondes filles*) au détriment de l'onde 0 (qualifiée d'*onde mère* ou d'*onde de pompe*). L'amplitude des ondes filles croît jusqu'à ce que des mécanismes de saturation limitent leur amplitude. La perte d'énergie de l'onde mère peut bien sûr constituer un tel mécanisme. Mais les ondes filles, une fois qu'elles ont atteint une amplitude suffisante, peuvent elles-mêmes être instables et engendrer de nouvelles ondes, et ainsi de suite, suivant un processus en cascade.

La diffusion Raman stimulée et la diffusion Brillouin stimulée sont deux exemples de telles instabilités. Dans les deux cas l'onde mère et l'une des ondes filles sont des ondes électromagnétiques, tandis que la deuxième onde fille est soit une onde plasma électronique (cas de la diffusion Raman), soit une onde acoustique ionique (cas de la diffusion Brillouin stimulée).

5.5 Diffusion Raman stimulée

Dans le cas de la diffusion Raman stimulée, l'onde électromagnétique de grande amplitude de paramètres (ω_0, \mathbf{k}_0) est instable vis-à-vis de l'excitation d'une onde électromagnétique diffusée et d'une onde plasma électronique de paramètres respectifs (ω_1, \mathbf{k}_1) et (ω_2, \mathbf{k}_2) .

L'équation (5.43) permet de déterminer le domaine de densité où une telle instabilité peut se produire. Comme ω_1 et ω_2 satisfont les relations de dispersion respectivement des ondes électromagnétiques et des ondes électrostatiques, on a

$$\omega_1, \omega_2 > \omega_{pe} \quad (5.44)$$

et donc $\omega_0 > 2\omega_{pe}$. Ainsi l'instabilité ne peut se produire que pour des densités inférieures à $\frac{1}{4}n_c$.

Etudions cette instabilité dans le régime le plus simple. On désigne par n_{e0} la densité électronique d'ordre zéro du plasma dans lequel se propage l'onde électromagnétique de grande amplitude. On peut caractériser cette onde par la vitesse d'oscillation des électrons dans son champ électrique,

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t) = \Re [\mathbf{v}_0 \exp i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t)] . \quad (5.45)$$

De même on caractérise l'onde diffusée par la réponse électronique,

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t) = \Re [\mathbf{v}_1 \exp i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t)] . \quad (5.46)$$

L'onde plasma électronique est décrite par la perturbation de densité associée,

$$n_e(\mathbf{r}, t) = \Re [n_e \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] . \quad (5.47)$$

où on a omis l'indice 2 pour alléger la notation. Comme on s'intéresse à une évolution potentiellement instable, les quantités ω_1 et ω peuvent comporter une partie imaginaire différente de zéro. Dans cette hypothèse les conditions de couplage deviennent

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \omega_1 + \omega^*, \\ \mathbf{k}_0 &= \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

L'équation de propagation de l'onde plasma électronique incluant le terme de force pondéromotrice dû au couplage des deux ondes électromagnétiques peut s'obtenir en dérivant l'équation de continuité linéarisée (2.57) par rapport au temps, en utilisant l'équation du mouvement (5.28)-(5.29), où l'hypothèse adiabatique usuelle (2.55) est utilisée pour exprimer le gradient de

pression en fonction du gradient de densité, et en éliminant le champ électrique par l'équation de Poisson (2.25). On obtient

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{pe}^2 - 3v_{te}^2 \Delta \right) n_e(\mathbf{r}, t) = n_{e0} \Delta(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1). \quad (5.49)$$

L'équation de propagation de l'onde électromagnétique diffusée peut s'obtenir en ajoutant le courant nonlinéaire $j_{nl} = -en_e \mathbf{v}_0$ comme terme source dans l'équation d'onde écrite pour la vitesse \mathbf{v}_1 :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{pe}^2 - c^2 \Delta \right) \mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t) = -\omega_{pe}^2 \frac{n_e}{n_{e0}} \mathbf{v}_0. \quad (5.50)$$

En utilisant alors les formes (5.45–5.47) et les conditions (5.48), les équations (5.49) et (5.50) donnent le système d'équations couplées

$$D_p(\omega, \mathbf{k}) n_e = \frac{1}{2} n_{e0} k^2 \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1^*, \quad (5.51)$$

$$D(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}_1^* = \frac{1}{2} \omega_{pe}^2 \frac{n_e}{n_{e0}} \mathbf{v}_0^*, \quad (5.52)$$

où $D_p(\omega, \mathbf{k})$ et $D(\omega, \mathbf{k})$ sont donnés par

$$D_p(\omega, \mathbf{k}) = \omega^2 - \omega_{pe}^2 - 3k^2 v_{te}^2, \quad (5.53)$$

$$D(\omega, \mathbf{k}) = \omega^2 - \omega_{pe}^2 - k^2 c^2. \quad (5.54)$$

Pour arriver à ce résultat, on n'a gardé dans les membres de droite des équations du système (5.51–5.52) que les termes résonnants. La résolution de ce système d'équations conduit alors à la relation de dispersion nonlinéaire de l'instabilité,

$$D_p(\omega, \mathbf{k}) D(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0) = \frac{1}{4} \omega_{pe}^2 k^2 |v_0|^2. \quad (5.55)$$

Dans la limite $|v_0| \rightarrow 0$, les deux ondes filles se découplent, et la relation (5.55) correspond simplement au produit des relations de dispersion de chacune des deux ondes. Pour une valeur finie de $|v_0|$, on cherche une solution proche des modes normaux du plasma, c'est-à-dire vérifiant

$$\omega = \omega_k + \delta\omega, \quad (5.56)$$

avec $|\delta\omega| \ll \omega_k$ et

$$D_p(\omega_k, \mathbf{k}) = 0, \quad (5.57)$$

$$D(\omega_k - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0) = 0. \quad (5.58)$$

Alors l'équation (5.55) donne

$$\delta\omega^2 = -\frac{\omega_{pe}^2 k^2 |v_0|^2}{16 \omega_k (\omega_0 - \omega_k)}, \quad (5.59)$$

qui a une racine instable $\delta\omega = i\gamma_0$, où γ_0 est le taux de croissance de l'instabilité,

$$\gamma_0 = \frac{1}{4} k |v_0| \left[\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_k (\omega_0 - \omega_k)} \right]^{1/2}. \quad (5.60)$$

Le taux de croissance γ_0 est une fonction croissante de k , lequel dépend de la géométrie respective des vecteurs \mathbf{k}_0 et \mathbf{k}_1 , l'ensemble étant contraint par les conditions (5.57) et (5.58), par la condition $D(\omega_0, \mathbf{k}_0) = 0$, et par la relation $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}$. Le taux de croissance est maximum pour la rétrodiffusion, pour laquelle k est évidemment le plus grand.

Un certain nombre d'approximations ont été faites dans cette approche simplifiée. Tout d'abord, on a négligé les termes non-résonnants qui peuvent toutefois réduire le taux d'instabilité dans certains cas limites, comme celui d'un plasma de faible densité et de la diffusion Raman vers l'avant, pour lequel il faut tenir compte de la composante électromagnétique "anti-Stokes" dont les fréquence et nombre d'onde sont donnés par

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= \omega_0 + \omega, \\ \mathbf{k}'_1 &= \mathbf{k}_0 + \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (5.61)$$

On a aussi supposé $|\delta\omega| \ll \omega_k$, ce qui devient incorrect à suffisamment haute intensité, dans le régime "fortement couplé" où $|\delta\omega| \gtrsim \omega_k$, particulièrement important dans les plasmas de faible densité [4, 5, 6]. On a aussi négligé les effets relativistes.

Un effet important qui peut aisément être incorporé dans le modèle est l'amortissement des ondes filles, qui conduit à un seuil en intensité pour l'instabilité et à une réduction de son taux de croissance. La prise en compte des amortissements modifie les expressions des fonctions $D_p(\omega, \mathbf{k})$ et $D(\omega, \mathbf{k})$ qui deviennent respectivement

$$D_p(\omega, \mathbf{k}) = \omega(\omega + i\nu_p) - \omega_{pe}^2 - 3k^2 v_{te}^2, \quad (5.62)$$

$$D(\omega, \mathbf{k}) = (\omega^2 - k^2 c^2)(1 + i\nu_{ei}/\omega) - \omega_{pe}^2, \quad (5.63)$$

où $\nu_p = \nu_{ei} + 2\gamma_L$, en incluant l'amortissement Landau (de taux γ_L) de l'onde plasma électronique. Le taux de croissance γ de l'instabilité est réduit par les amortissements et maintenant donné par

$$(\gamma + \gamma_p)(\gamma + \gamma_1) = \gamma_0^2, \quad (5.64)$$

où γ_0 est le taux de croissance calculé sans amortissement et donné par l'équation (5.60), et où $\gamma_p = \frac{1}{2}\nu_p$ et $\gamma_1 = \frac{1}{2}\nu_{ei}\omega_{pe}^2/(\omega_0 - \omega_k)^2$.

L'équation (5.64) permet de calculer le seuil de l'instabilité, qui correspond à

$$\gamma_0^2 = \gamma_p \gamma_1. \quad (5.65)$$

5.6 Diffusion Brillouin stimulée

Dans le cas de la diffusion Brillouin stimulée, que nous allons étudier de façon plus succincte, l'onde électromagnétique de grande amplitude de paramètres (ω_0, \mathbf{k}_0) est instable vis-à-vis de l'excitation d'une onde électromagnétique diffusée et d'une onde acoustique ionique de paramètres respectifs (ω_1, \mathbf{k}_1) et (ω_2, \mathbf{k}_2) . Le mécanisme est le même que celui de l'instabilité Raman, à la différence près que la perturbation de densité électronique est ici due à l'existence de l'onde acoustique ionique et non plus à celle d'une onde plasma électronique.

Les conditions de couplage sont ici encore

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \omega_1 + \omega_2, \\ \mathbf{k}_0 &= \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Comme ω_2 est une basse fréquence ($\omega_2 < \omega_{pi}$), les fréquences des deux ondes électromagnétiques diffèrent peu,

$$\omega_1 \simeq \omega_0. \quad (5.67)$$

Ainsi l'instabilité peut se produire à toute densité, avec pour seule restriction $n_e < n_c$. Comme les fréquences des deux ondes électromagnétiques satisfont la relation de dispersion (2.45), on a

$$|\mathbf{k}_1| \simeq |\mathbf{k}_0|, \quad (5.68)$$

ce qui signifie que \mathbf{k}_0 et \mathbf{k}_1 forment un triangle isocèle et que

$$|\mathbf{k}_2| \simeq 2|\mathbf{k}_0| \sin(\theta/2), \quad (5.69)$$

où θ est l'angle entre l'onde diffusée et l'onde incidente.

Bibliographie

- [1] S. Atzeni and J. Meyer-ter-Vehn, *The physics of inertial fusion* (Clarendon Press, Oxford, 2004).
- [2] P. Mora and J. F. Luciani, *Laser and Particles Beams* **12**, 387 (1994).
- [3] J. F. Luciani, P. Mora, and J. Virmont, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1664 (1983).
- [4] W. L. Kruer, *The physics of laser plasma interactions* (Addison-Wesley, New-York, 1988).
- [5] T. M. Antonsen, Jr. and P. Mora, *Phys. Fluids B* **5**, 1440 (1993).
- [6] D. Pesme, in *La fusion thermonucléaire inertielle par laser*, edited by R. Dautray and J. P. Watteau (Eyrolles–Commissariat à l'Énergie Atomique, Paris, 1993), Chap. II.

Table des matières

1 Confinement Magnétique : Orbites et Invariants	4
1.1 Les configurations magnétiques de type Tokamak	4
1.2 Mouvement Cyclotronique et Diamagnétisme	7
1.2.1 Fréquence cyclotron, rayon de Larmor	7
1.2.2 Moment magnétique et diamagnétisme	9
1.3 Invariance Adiabatique et Dérives	10
1.3.1 Moment magnétique et force diamagnétique	10
1.3.2 Dérives électriques et magnétiques	14
1.4 Orbites Circulantes et Piégées	19
1.4.1 Topologie magnétique	19
1.4.2 Orbites circulantes	22
1.4.3 Orbites piégées	24
2 Relaxations et Transport : Collisions et Diffusion	31
2.1 Equation de Landau	32
2.1.1 Equations de Fokker-Planck et Kolmogorov	32
2.1.2 Diffusion Rutherford	35
2.2 Relaxations ionique et électronique	40
2.2.1 Ralentissement des ions rapides	40
2.2.2 Electrons runaway	43
2.2.3 Isotropisation électronique	45
2.3 Transport	48
2.3.1 Transport le long des lignes de Champ	48
2.3.2 Transport perpendiculairement aux lignes de champ	52
2.4 Transport du champ magnétique	55
2.4.1 Paramètre Bêta	55
2.4.2 Diffusion et convection magnétique	58
2.4.3 Nombre de Reynolds	61
3 Ondes : Dispersion et Résonances	63
3.1 Dispersion	65
3.1.1 Modes électroniques	65
3.1.2 Modes ioniques	69
3.1.3 Coupures et Résonances	71
3.2 Absorptions Landau et Cyclotron	74
3.2.1 Equation quasi-linéaire	74
3.2.2 Résonance Landau	74
3.2.3 Resonance cyclotron	76

3.3	Instabilités de Dérive	78
3.3.1	Instabilités dissipative et réactive	78
3.3.2	Instabilités de Dérive	82
4	Contrôles : Injection et Extraction	87
4.1	Echange de charge	88
4.1.1	Injection de neutres	90
4.1.2	Plasma de bord	92
4.2	Génération de Courant	93
4.2.1	Injection d'ondes	94
4.2.2	Réponse non locale	96
4.2.3	Injection de particules	97
4.3	Extraction de particules	99
4.3.1	Régime de Knudsen	99
4.3.2	Système d'extraction	101

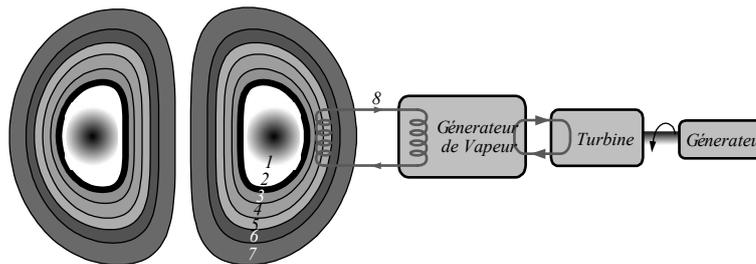
Chapitre 1

Confinement Magnétique : Orbites et Invariants

1.1 Les configurations magnétiques de type Tokamak

Un système de conversion d'énergie thermonucléaire nécessite l'assemblage et l'intégration des éléments suivants :

- Un plasma en régime de combustion thermonucléaire (1) satisfaisant au critère de Lawson.
- Une première paroi (2) de l'enceinte de confinement supportant les contraintes thermiques du plasma.



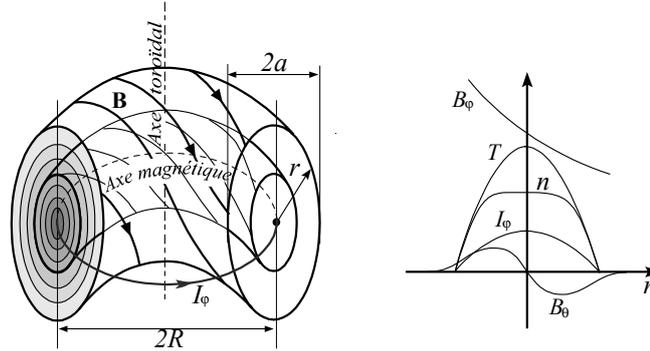
- Un système multiplicateur de neutrons (3) pour assurer efficacement la régénération du tritium.
- Un modérateur (4) pour thermaliser les neutrons utilisés pour la régénération.
- Une couverture tritigène (5).
- Un écran (6) pour protéger les systèmes cryogéniques assurant le refroidissement des supraconducteurs constituant les bobines, et les systèmes de contrôle et diagnostic.
- Un ensemble de bobines toroïdales (7) générant le champ principal assurant le confinement.
- Enfin, un échangeur de chaleur (8), étape ultime de l'extraction de puissance.

L'échangeur de chaleur extrait la chaleur à l'aide d'un fluide caloporteur afin de générer de la vapeur d'eau au sein d'un générateur de vapeur ; vapeur d'eau, qui par détente dans une turbine, entraîne un générateur électrique.

La technologie de la plupart de ces éléments (2-8) ne pose pas de problème scientifique majeur mais nécessite la mise en place de vastes programmes de recherche et développement. Par contre, les réactions de fusion deutérium/tritium ne pouvant s'auto-entretenir en régime de combustion exothermique qu'à partir d'une température de l'ordre de 100 millions de degrés, la problématique de la production d'énergie par fusion nucléaire pose le problème scientifique complexe du chauffage et du confinement d'un plasma chaud (1).

Différentes configurations magnétiques ont été étudiées pour comprendre et contrôler les plasmas chauds et, en l'état actuel des connaissances scientifiques et réalisations techniques, les plasmas confinés et contrôlés au sein des configurations Tokamak sont les plus proches des conditions définies par le critère de Lawson.

Un plasma de Tokamak est un tore d'hydrogène totalement ionisé et magnétisé de grand rayon R et de petit rayon a . Les lignes du champ magnétique sont des hélices tangentes à un ensemble de tores emboîtés appelés surfaces magnétiques.



Les deux axes communs à cet ensemble de tores sont appelés *axe magnétique* et *axe toroïdal*. En première approximation les électrons et les ions suivent les lignes de champ et sont donc confinés sur les surfaces magnétiques. Le champ magnétique principal B_φ , dit toroïdal, est dirigé suivant la direction de l'axe magnétique, ce champ est généré par des bobines supraconductrices extérieures au plasma et décroît comme l'inverse du grand rayon à partir de l'axe toroïdal. Un deuxième champ magnétique B_θ , dit poloïdal, est généré au sein du plasma par un courant toroïdal I_φ . Les paramètres typiques des plasmas de Tokamak sont présentés dans le tableau ci-dessous.

Volume $2\pi^2 Ra^2$	10 – 1000 [m ³]
Densité de particules n	10^{18} – 10^{20} [m ⁻³]
Température T	1 – 20 [keV]
Courant I_φ	0.1 – 20 [MA]
Champ magnétique B_φ	1 – 10 [T]

Les profils radiaux de densité $n(r)$ et de température $T(r)$ du plasma résultent des processus de confinement, transport et chauffage et sont en général monotones décroissants du centre vers le bord. La compréhension et la maîtrise de ces

processus de confinement, transport et chauffage constituent l'enjeu principal des programmes de recherche en physique des tokamaks. Les performances des grands tokamaks les placent loin devant tous les autres types de machines et de procédés qui ont été proposés jusqu'à présent pour amorcer et entretenir une combustion thermonucléaire. Ce succès fait des Tokamaks un sujet de recherches particulièrement actif et de grands Tokamaks, dédiés aux études de physique des plasmas thermonucléaires, ont été construits. La convergence des performances obtenues dans ces grands Tokamaks définit ainsi le prochain objectif du programme de recherches sur la fusion contrôlée : l'ignition d'un mélange DT. Cet objectif a trouvé sa concrétisation à travers le projet international ITER (Europe, USA, Chine, Russie, Inde, Japon, Corée du Sud) qui devrait permettre l'accès à une combustion thermonucléaire ($5 < Q < 10$) quasi-continue pour la prochaine décennie, ouvrant ainsi un vaste champ de recherches sur ce régime encore inexploré. En effet, l'ignition atteinte, la vaste problématique de l'extraction de puissance et de matière en régime quasi-continu, déjà abordée par quelques machines, devra être maîtrisée pour des niveaux de puissance extraits de l'ordre de quelques centaines de mégawatts et des quantités d'énergie stockées de l'ordre de quelques dizaines de gigajoules.

L'objectif principal des programmes de recherches en physique des Tokamaks est :

- d'identifier et d'étudier les différents mécanismes (instabilités, chaos, turbulence, auto-organisation...) qui déterminent la valeur du temps de confinement de l'énergie τ_E
- de mettre en oeuvre les moyens (génération de courant, barrière de transport, divertor...) de l'améliorer à un niveau satisfaisant le critère de Lawson.

Les programmes de recherches en physique et technologie des Tokamaks se heurtent actuellement à quatre grands problèmes qui conditionnent la mise au point d'un réacteur techniquement fiable et économiquement viable ; ces quatre questions-clés sont :

- le contrôle de l'interaction plasma-paroi,
- la compréhension et le contrôle de la turbulence,
- la génération et le contrôle du courant en régime continu et
- la maîtrise de la dynamique des populations suprathermiques en régime thermonucléaire.

En effet, dans un réacteur Tokamak en régime de combustion continue :

- l'injection/extraction de puissance à la périphérie du plasma doit s'effectuer en respectant de sévères contraintes technologiques de tenue des matériaux aux flux intenses de rayonnements et particules,
- la turbulence et le transport doivent être diagnostiqués et contrôlés en temps réel et maintenus à un niveau compatible avec l'entretien de la combustion thermonucléaire,
- quelques dizaines de millions d'ampères doivent être entretenus en régime continu afin d'assurer le confinement orbital et l'accès à des profils de courants optimaux et
- la population de particules alpha d'origine thermonucléaire et les ions suprathermiques doivent être confinés, diagnostiqués et contrôlés afin d'assurer une combustion et un pilotage efficaces.

La conception d'un réacteur thermonucléaire, techniquement fiable et économiquement viable, passe donc par l'étude approfondie des processus d'interaction plasma-paroi et des mécanismes d'instabilités et de turbulence, ainsi que

par l'identification de nouveaux procédés de diagnostic et de contrôle du courant et des populations suprathermiques à l'origine de la réactivité thermonucléaire. C'est l'achèvement de ce vaste programme qui constitue l'objectif du projet international (Europe, USA, Chine, Russie, Inde, Japon, Corée du Sud) ITER.

L'objectif d'ITER est de démontrer la faisabilité scientifique et technique d'un réacteur thermonucléaire basé sur la fusion des isotopes de l'hydrogène. L'objectif quantitatif est la production d'une puissance de 500 MW thermonucléaire et l'entretien d'un régime d'amplification présentant un facteur Q de l'ordre de 10 sur une durée de l'ordre de 300 à 500 secondes. Un deuxième objectif, moins ambitieux en terme de puissance mais plus contraignant en terme de contrôle, est l'obtention d'un facteur Q de l'ordre de 5 en régime quasi stationnaire.

Puissance Thermonucléaire	W_α	500 MW
Facteur Q (400s)	Q	≥ 10
Facteur Q (stationnaire)	Q	≥ 5
Grand rayon	R_0	6.2 m
Petit Rayon	a	2.0 m
Courant toroïdal	I_φ	15 – 17 MA
Facteur q aux bords	q_a	3
Champ toroïdal sur l'axe	B_φ	5.3 T
Chauffages additionels	W_{aux}	73 – 110 MW
Volume du plasma	V_p	830 m ³
Surface du plasma	S_p	680 m ²
Surface de section	S	22 m ²

Des études technologiques de composants, centrées sur leurs performance et leurs intégration, en particulier au niveau de la régénération du tritium et de l'extraction de puissance, constituent aussi des objectifs majeurs du programme ITER. L'ensemble des interrogations quant à la faisabilité scientifique et technique d'un réacteur thermonucléaire, seront étudiés durant les vingt années d'exploitation et une réponse devra être apportée à ces questions clés pour envisager la construction d'un prototype préindustriel de démonstration DEMO.

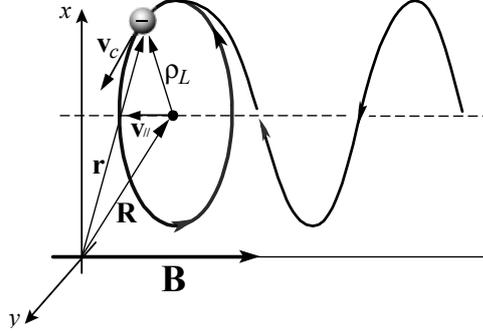
1.2 Mouvement Cyclotronique et Diamagnétisme

1.2.1 Fréquence cyclotron, rayon de Larmor

Le confinement des plasmas thermonucléaires par un champ magnétique repose en première instance, au niveau microscopique, sur la spécificité des orbites des particules chargées dans un champ magnétique. Soit une particule, de masse m et de charge q , plongée dans un champ magnétique statique uniforme $\mathbf{B} = B\mathbf{b}$, où \mathbf{b} est un vecteur unitaire. L'écriture de l'équation du mouvement de la particule se réduit à la prise en compte de la force de Laplace.

$$\frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = \frac{q}{m}\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}, \quad \frac{d\mathbf{v}_\parallel}{dt} = \mathbf{0}$$

où la vitesse \mathbf{v} a été décomposée en une composante parallèle au champ magnétique, $\mathbf{v}_\parallel = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}$, plus une composante perpendiculaire au champ magnétique, $\mathbf{v}_\perp = \mathbf{b} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{b})$.



Le mouvement le long des lignes de champ est donc une translation uniforme. Afin d'étudier l'orbite décrite par cette particule dans le plan perpendiculaire au champ magnétique, introduisons la variable complexe : $\mathcal{Z} = v_x + jv_y$ où x et y constituent un système de coordonnées cartésiennes dans le plan perpendiculaire à \mathbf{b} : $\mathbf{v}_\perp = v_x \mathbf{u}_x + v_y \mathbf{u}_y$; système de coordonnées associé à la base orthonormée directe $[\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{b}]$. Introduisons la pulsation cyclotron ω_c :

$$\text{Pulsation cyclotron} : \omega_c \equiv \frac{qB}{m}$$

La variable \mathcal{Z} vérifie l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$\frac{d\mathcal{Z}}{dt} + j\omega_c \mathcal{Z} = 0 \rightarrow \mathcal{Z}(t) = \mathcal{Z}_0 \exp(-j\omega_c t)$$

dont la solution décrit un mouvement de rotation uniforme. Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique, uniforme et statique, est donc composé d'une translation uniforme le long des lignes de champ et d'une rotation uniforme autour des lignes de champ; cette rotation est caractérisée par la pulsation cyclotronique (ou Larmor) ω_c . Le mouvement de rotation uniforme autour des lignes de champ est appelé mouvement cyclotronique, la vitesse le long de l'orbite cyclotronique est appelée vitesse cyclotronique $\mathbf{v}_c(t) = v_c \cos[\omega_c t] \mathbf{u}_x - v_c \sin[\omega_c t] \mathbf{u}_y$.

$$\mathbf{v}(t) = \underbrace{v_\parallel \mathbf{b}}_{\text{Centre guide}} + \underbrace{\mathbf{v}_c(t)}_{\text{Rotation cyclotronique}}$$

Pour les électrons et les protons ces deux pulsations cyclotrons (par abus de langage *fréquences cyclotrons* ou *fréquences de Larmor*) sont respectivement dans les domaines micro-onde et radio-fréquence. Le sens des rotations cyclotroniques est tel que le courant créé par la charge génère un champ opposé à celui appliqué, des charges libres présentent donc un comportement diamagnétique. On retrouve ici la tendance qu'ont les effets à s'opposer aux causes qui leur donnent naissance, tendance à l'oeuvre dans les processus d'écrantage. Une intégration par rapport au temps permet d'exprimer la position $\mathbf{r}(t)$ de la particule

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}_L(t) = \underbrace{\mathbf{R}_\perp + v_\parallel t \mathbf{b}}_{\text{Centre guide}} + \underbrace{\boldsymbol{\rho}_L(t)}_{\text{Rayon de Larmor}}$$

où la position a été décomposée en la somme de la position du centre de rotation, le *centre guide* \mathbf{R} , et du rayon tournant de l'orbite cyclotronique qui définit le

rayon de Larmor de la particule : $\boldsymbol{\rho}_L(t) = \rho_L \sin(\omega_c t) \mathbf{u}_x + \rho_L \cos(\omega_c t) \mathbf{u}_y$.

$$\text{Rayon de Larmor : } \overline{\overline{\rho_L \equiv \frac{v_c}{\omega_c}}} \rightarrow \begin{array}{l} \rho_{Le} = 2,75 \times 10^{-3} [\text{mm}] \times \sqrt{T_e [\text{eV}]} B^{-1} [\text{T}] \\ \rho_{Lp} = 0,11 [\text{mm}] \times \sqrt{T_i [\text{eV}]} B^{-1} [\text{T}] \end{array}$$

1.2.2 Moment magnétique et diamagnétisme

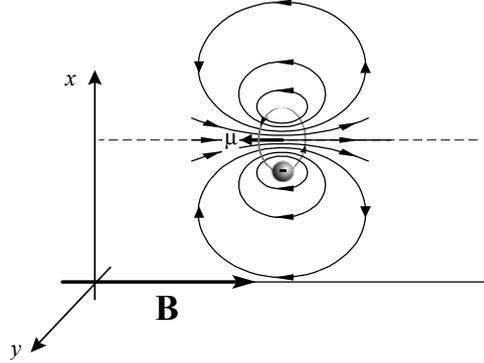
Il est d'usage, et cet usage est particulièrement pertinent pour analyser et résoudre de nombreux problèmes en physique des tokamaks, d'introduire le moment magnétique orbital de la particule $\boldsymbol{\mu} = -\mu \mathbf{b}$.

$$\boldsymbol{\mu} \equiv \int \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r})}{2} d^3\mathbf{r} \rightarrow \boldsymbol{\mu} = q \frac{\boldsymbol{\rho}_L(t) \times \mathbf{v}_c(t)}{2} = -\mu \mathbf{b}$$

Le moment magnétique est donc le rapport du contenu énergétique cyclotronique $mv_c^2/2$ divisé par la valeur du champ B .

$$\text{Moment magnétique : } \overline{\overline{\mu \equiv \frac{|q| \rho_L v_c}{2} = \frac{|q \omega_c| \rho_L^2}{2} = \frac{m v_c^2 \rho_L}{2B}}}$$

Ce concept est particulièrement important pour l'étude des plasmas thermonucléaires magnétisés, le moment magnétique d'une particule chargée plongée dans un champ magnétique permet d'analyser le comportement des plasmas de tokamak dans le cadre d'une description fluide ainsi que dans le cadre d'une analyse du mouvement des particules.



En effet, nous démontrerons que le moment magnétique est un invariant adiabatique, simplifiant ainsi l'analyse des orbites des particules chargées; et, au niveau fluide, l'introduction du moment magnétique orbital permet de définir la densité volumique de moments magnétiques ou vecteur magnétisation \mathbf{M}

$$\text{Vecteur Magnétisation : } \overline{\overline{\mathbf{M} \equiv -\langle n_e \mu_e \rangle \mathbf{b} - \langle n_i \mu_i \rangle \mathbf{b}}}$$

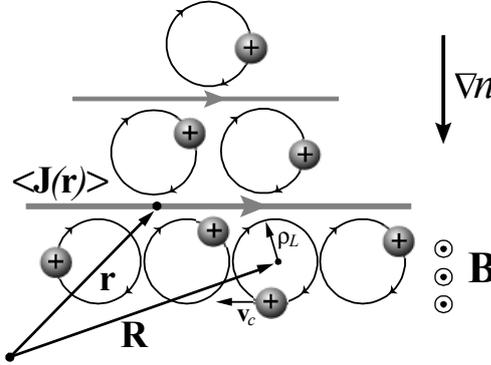
où la densité ionique est notée n_i et de densité électronique $n_e = Zn_i$, les crochets $\langle \rangle$ exprimant une moyenne sur la distribution des vitesses cyclotroniques v_c , le signe moins étant une conséquence du caractère diamagnétique des mouvements cyclotroniques.

Soit $\mathbf{J}(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{R}_\perp, t)$ la densité volumique de courant, à l'instant t , générée en \mathbf{r} par une particule de centre guide \mathbf{R}_\perp , de vitesse cyclotronique $\mathbf{v}_c(t)$ et de

rayon de larmor $\rho_L(t)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{R}_\perp, t) &= q\mathbf{v}_c(t) \delta[\mathbf{r} - (\mathbf{R}_\perp + \boldsymbol{\rho}_L(t))] \\ &\approx q\mathbf{v}_c(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_\perp) - q\mathbf{v}_c(t) \boldsymbol{\rho}_L(t) \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_\perp) \end{aligned}$$

où nous avons pris en compte l'ordering $\rho_L \ll |\mathbf{r} - \mathbf{R}_\perp|$. Dans le contexte d'un modèle fluide, tel que la magnétohydrodynamique, la composante haute fréquence (ω_c) de ce courant doit être filtrée aussi nous considérerons la moyenne temporelle $\langle \mathbf{J}(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{R}_\perp) \rangle$, $\langle \mathbf{v}_c(t) \rangle = \mathbf{0}$ mais $\langle \mathbf{v}_c(t) \boldsymbol{\rho}_L(t) \rangle \neq \mathbf{0}$, ainsi $\langle \mathbf{J}(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{R}_\perp) \rangle = -q \langle \mathbf{v}_c(t) \boldsymbol{\rho}_L(t) \rangle \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_\perp)$.



Pour obtenir le courant de magnétisation $\mathbf{J}_M(\mathbf{r})$ associé à une distribution de densité $n(\mathbf{R})$ nous devons sommer $\langle \mathbf{J}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_\perp) \rangle$ pondéré par les différentes contributions $n(\mathbf{R}_\perp) d\mathbf{R}_\perp$; ainsi, compte tenu de l'identité $\nabla_{\mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_\perp) = -\nabla_{\mathbf{R}_\perp} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_\perp)$ et après intégration par partie, nous obtenons le résultat classique $\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}$.

$$\mathbf{J}_M(\mathbf{r}) = -q \int \langle \mathbf{v}_c(t) \boldsymbol{\rho}_L(t) \rangle \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_\perp) n(\mathbf{R}_\perp) d\mathbf{R}_\perp = -\mu \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{b} n(\mathbf{r})$$

Ce résultat sera mis à profit lors de l'analyse des courants diamagnétiques au sein d'un plasma thermonucléaire.

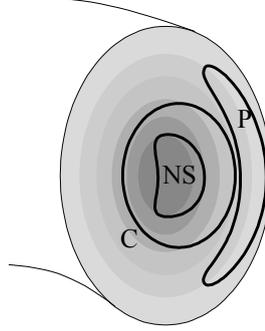
$$\text{Courant de Magnétisation: } \underline{\underline{\mathbf{J}_M \equiv \nabla \times \mathbf{M}}}$$

1.3 Invariance Adiabatique et Dérives

1.3.1 Moment magnétique et force diamagnétique

Deux stratégies sont mises en œuvre pour étudier la dynamique des particules chargées interagissant avec un champ électromagnétique :

- la résolution des équations de Newton permettant d'exprimer, à chaque instant, la position et la vitesse de chaque particule,
- la construction d'invariants, c'est-à-dire de combinaisons algébriques de la position et de la vitesse telles que les variations temporelles de l'une et de l'autre se compensent pour assurer l'indépendance de cette combinaison par rapport au temps.



La théorie des orbites dans les tokamaks fait usage de ces deux stratégies, la deuxième étant justifiée par l'existence d'un ordering entre (i) le rayon de Larmor et la période cyclotronique, qui constituent des échelles de longueur et de temps caractéristiques du mouvement autour des lignes de champ, et (ii) les échelles caractéristiques de longueur et temps associées au champ; ainsi des méthodes d'approximation remarquablement efficaces peuvent être construites.

Comme dans le cadre de l'analyse du transport, la variable d'intérêt est ici aussi la position du centre guide autour duquel s'effectue la rotation cyclotronique. Dans une configuration tokamak trois types d'orbites du centre guide coexistent : les orbites circulantes (C), les orbites piégées (P) et les orbites non standard (NS). Nous allons les identifier et les analyser dans ce chapitre.

Lorsqu'un champ magnétique homogène est fonction du temps la prise en compte du champ électrique d'induction s'avère nécessaire pour étudier la dynamique d'une particule chargée. Soit donc un champ magnétique homogène instationnaire $\mathbf{B}(t)$; la solution de l'équation de Maxwell-Faraday permet d'exprimer le champ d'induction $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ en chaque point \mathbf{r} à chaque instant t :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{r}}{2} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

L'équation du mouvement de la particule prenant en compte la force de Coulomb et la force de Laplace est donc donnée par :

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \underbrace{\frac{q}{2m} \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right)}_{\text{Coulomb}} + \underbrace{\frac{q}{m} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B}}_{\text{Laplace}}$$

Définissons $\Omega(t) \equiv qB(t)/m$ et considérons un système orthonormé direct cartésien (x, y, z) , tel que l'axe des z soit orienté suivant la direction du champ magnétique \mathbf{B} . Afin de simplifier la discussion nous supposons $dz/dt = 0$. Considérons le changement de variable complexe $(x, y) \rightarrow \mathcal{Z}$; la variable complexe $\mathcal{Z}(t)$ ainsi définie permet de réécrire l'équation du mouvement :

$$\mathcal{Z}(t) \equiv [x(t) + jy(t)] \exp \frac{j}{2} \int_0^t \Omega(s) ds \rightarrow \frac{d^2 \mathcal{Z}}{dt^2} + \frac{\Omega^2}{4} \mathcal{Z} = 0$$

Nous reconnaissons l'équation d'un oscillateur linéaire de fréquence variable. Nous allons résoudre cette équation et décrire le mouvement de la particule chargée sous l'hypothèse d'une variation temporelle du champ magnétique lente à l'échelle d'une rotation cyclotronique. Pour ce faire considérons la fonction

complexe $\mathcal{Z}_{WKB}(t)$.

$$\mathcal{Z}_{WKB}(t) = \mathcal{Z}_0 \sqrt{\frac{2}{\Omega(t)}} \exp \pm \left[\frac{i}{2} \int_0^t \Omega(s) ds \right]$$

Cette fonction $\mathcal{Z}_{WKB}(t)$ est solution de l'équation différentielle linéaire :

$$\frac{d^2 \mathcal{Z}_{WKB}}{dt^2} + \frac{\Omega^2}{4} \mathcal{Z}_{WKB} + \left[\frac{1}{2} \frac{\Omega''}{\Omega} - \frac{3}{4} \left(\frac{\Omega'}{\Omega} \right)^2 \right] \mathcal{Z}_{WKB} = 0$$

Si l'échelle caractéristique de la variation temporelle du champ magnétique est beaucoup plus longue que la période cyclotron, c'est-à-dire si $\Omega' \ll \Omega^2$ et $\Omega'' \ll \Omega^3$, alors $\Omega^2 \gg \Omega''/2\Omega - 3\Omega'^2/4\Omega^2$ et l'équation vérifiée par $\mathcal{Z}_{WKB}(t)$ peut être approchée par l'équation vérifiée par $\mathcal{Z}(t)$; ainsi $\mathcal{Z}_{WKB}(t)$ constitue une solution approchée des équations du mouvement : $d \ln \Omega / dt \ll \Omega \rightarrow \mathcal{Z} \approx \mathcal{Z}_{WKB}$. Sous cette hypothèse de variations dites adiabatique, la solution de l'équation du mouvement peut être analysée en terme d'*invariance adiabatique*. En effet, d'une part :

$$\frac{d}{dt} (\Omega \mathcal{Z}_{WKB} \mathcal{Z}_{WKB}^*) = 0, \quad \mathcal{Z}_{WKB} \approx \mathcal{Z} \rightarrow \frac{d}{dt} (\Omega \mathcal{Z} \mathcal{Z}^*) \approx 0$$

et d'autre part : $\Omega \mathcal{Z} \mathcal{Z}^* = qB\rho_L^2/m$. Ainsi, $\mu = qB\rho_L^2/2m$ est un invariant adiabatique, c'est-à-dire une constante du mouvement dont l'invariance est garantie par un ordering de temps caractéristiques : $d \ln \Omega / dt \ll \Omega$.

$$\text{Invariance adiabatique du moment magnétique : } \frac{d\mu}{dt} = 0$$

La variation temporelle du champ magnétique est compensée par un ajustement du mouvement cyclotronique, à travers une accélération, ou une décélération, produite par le champ électrique d'induction, tel que μ reste à peu près constant.

Considérons à présent le cas d'un champ inhomogène, stationnaire, possédant une symétrie de rotation autour de l'axe des z , $\mathbf{B}(r, z) = B_r(r, z) \mathbf{e}_r + B_z(r, z) \mathbf{e}_z$, et étudions le mouvement d'une particule, de masse m et de charge q , au voisinage de cet axe de symétrie. Afin de simplifier l'étude de ce mouvement, introduisons $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ une base de repérage cylindrique orthonormée directe d'axe \mathbf{e}_z et effectuons un développement de Taylor du champ, à partir d'un point de référence sur l'axe des z . L'équation de Maxwell :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_r + \frac{\partial}{\partial z} B_z = 0$$

permet d'exprimer les dérivées du champ suivant z en fonction des dérivées suivant r : $\partial r B_r / r \partial r = - \partial B_z / \partial z |_{r=0}$. Ainsi, la forme générale, au voisinage de l'axe des z , d'un champ possédant une symétrie de révolution, est donnée par :

$$\mathbf{B}(r, z) \approx -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} \Big|_{r=0} \mathbf{e}_r + B_z(0, z) \mathbf{e}_z$$

Les expressions de la vitesse et de l'accélération d'une particule sur une base cylindrique sont respectivement :

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\theta + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_z \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right] \mathbf{e}_r + \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} \right] \mathbf{e}_\theta + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{e}_z\end{aligned}$$

et permettent d'établir la projection cylindrique de l'équation de Newton prenant en compte la force de Laplace.

$$\begin{aligned}\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &= \frac{q}{m}r\frac{d\theta}{dt}B_z(z) \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{q}{m}r\frac{d\theta}{dt}\frac{1}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z} \\ 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} &= -\frac{q}{m}\frac{dr}{dt}B_z(z) - \frac{q}{m}\frac{dz}{dt}\frac{1}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}\end{aligned}$$

La troisième équation de ce système peut être réécrite afin de faire apparaître l'invariance du moment angulaire canonique :

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = -\frac{q}{2m}\frac{d}{dt}(r^2B_z) \rightarrow r^2\frac{d\theta}{dt} = -\frac{q}{2m}r^2B_z$$

où le choix d'une constante d'intégration nulle correspond à la classe d'orbite passant par le point $r = 0$. La prise en compte de cette relation, qui traduit l'invariance par rotation autour de l'axe des z , conduit à l'identification d'une accélération (décélération) le long de l'axe des z :

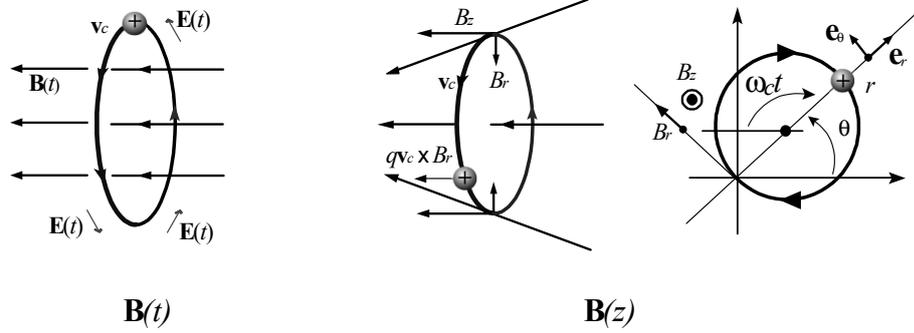
$$\begin{aligned}\frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{q^2}{4m^2}r^2B_z\frac{\partial B_z}{\partial z} \\ \frac{d^2r}{dt^2} &= -r\frac{q^2B_z^2}{2m^2} \\ \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{qB_z}{2m}\end{aligned}$$

où le coefficient de proportionnalité entre l'accélération et le gradient du champ n'est autre que le moment magnétique μ que multiplie la masse m ; cette force est appelée force diamagnétique ou force $\mu\text{grad}B$.

$$\text{Force diamagnétique : } \underline{\underline{m\frac{d^2z}{dt^2} = m\frac{dv_{\parallel}}{dt} = \frac{q}{2}\frac{d\theta}{dt}r^2\frac{\partial B_z}{\partial z} = -\mu\frac{\partial B_z}{\partial z} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla B}}$$

où l'angle θ est égal à deux fois l'angle cyclotronique qui doit être repéré autour du centre de l'orbite et non autour du point $r = 0$.

La présence d'une convergence, ou d'une divergence, des lignes de champ induit donc une force le long de la direction du champ, force proportionnelle au moment magnétique μ et au gradient de l'amplitude du champ. Son origine physique peut être discutée comme suit. Considérons un champ inhomogène présentant un faisceau de lignes de champ convergentes. Ce champ inhomogène peut être décomposé en la somme d'un champ homogène \mathbf{B} et d'un champ perturbateur \mathbf{b} . A l'ordre zéro une particule effectue un mouvement de rotation cyclotronique \mathbf{v}_c autour de la direction de \mathbf{B} .



Ce faisant cette particule intercepte le champ \mathbf{b} et la force de Laplace engendrée par ce champ perturbateur : $q\mathbf{v}_c \times \mathbf{b}$, est dirigée suivant \mathbf{B} et garde un signe constant sur une rotation. Cette force n'est autre que la force diamagnétique. L'existence de cette force diamagnétique garantit aussi l'invariance adiabatique du moment magnétique μ dans un champ magnétique inhomogène. En effet, la conservation de l'énergie cinétique d'une particule chargée interagissant avec un champ magnétique statique, et l'accélération diamagnétique le long des lignes de champ permettent d'établir une relation entre la variation de l'énergie cyclotronique et la translation le long des lignes de champ.

$$\begin{aligned} \text{Invariance de l'énergie : } \frac{dv_c^2}{dt} &= -\frac{dv_{\parallel}^2}{dt} \rightarrow \frac{dv_c^2}{dt} = \frac{v_c^2}{B} v_{\parallel} \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{v_c^2}{B} \frac{dB}{dt} \\ \text{Force diamagnétique : } \frac{dv_{\parallel}}{dt} &= -\frac{\mu}{m} \frac{\partial B}{\partial z} \end{aligned}$$

où z est l'abscisse curviligne le long de la ligne de champ considérée comme axe de la rotation cyclotronique et $v_{\parallel} = dz/dt$. Le moment magnétique est donc un invariant adiabatique quel que soit la nature de la variation du champ, spatiale ou temporelle, si les hypothèses d'adiabaticité sont vérifiées : $B(\mathbf{r}, t)$ lentement variable à l'échelle d'une rotation cyclotronique et faiblement inhomogène à l'échelle d'un rayon de Larmor.

1.3.2 Dérives électriques et magnétiques

Afin de développer la théorie du mouvement des particules chargées dans les champs électromagnétiques inhomogènes et instationnaires, considérons d'abord la configuration de champs la plus simple : un champ électrique, homogène et dépendant du temps, $\mathbf{E}(t)$, plus un champ magnétique homogène et stationnaire. $\mathbf{B} = B\mathbf{u}_z$. $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$ est une base cartésienne orthonormée directe et x et y constituent un système de coordonnées cartésiennes dans le plan perpendiculaire au champ magnétique. Une telle configuration de champs est appelée configuration de champs croisés. L'équation du mouvement est donnée par :

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{q}{m}\mathbf{E}(t) + \frac{q}{m}\mathbf{V} \times \mathbf{B}$$

où \mathbf{V} est la vitesse de la particule. La vitesse \mathbf{V} et le champ électrique \mathbf{E} peuvent être décomposés en la somme d'une composante parallèle au champ magnétique plus une composante perpendiculaire au champ magnétique : $\mathbf{E}_{\parallel} = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_z) \mathbf{u}_z$, $\mathbf{v}_{\parallel} = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{u}_z) \mathbf{u}_z$. Dans la direction du champ magnétique, la particule subit une accélération semblable à celle qu'elle subirait en l'absence de champ magnétique

et le mouvement est une translation non uniforme. La solution de la projection de l'équation de Lorentz suivant \mathbf{u}_z se ramène donc à une quadrature.

$$m \frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt} = q\mathbf{E}_{\parallel}(t) \rightarrow \mathbf{v}_{\parallel}(t) = \mathbf{v}_{\parallel}(t_0) + \frac{q}{m} \int_{t_0}^t \mathbf{E}_{\parallel}(u) du$$

Dans le plan perpendiculaire au champ magnétique, la force électrique n'induit pas une accélération mais une vitesse de dérive qui se superpose au mouvement cyclotronique. Afin d'étudier ce type d'orbite introduisons les deux variables complexes \mathcal{Z} et \mathcal{E} .

$$V_x \mathbf{u}_x + V_y \mathbf{u}_y \rightarrow \mathcal{Z} = V_x + jV_y, \quad E_x \mathbf{u}_x + E_y \mathbf{u}_y \rightarrow \mathcal{E} = \frac{q}{m} E_x + j \frac{q}{m} E_y$$

Ce changement de variables conduit à l'équation :

$$\frac{d\mathcal{Z}(t)}{dt} + j\omega_c \mathcal{Z}(t) = \mathcal{E}(t)$$

où ω_c est la fréquence cyclotron de la particule. La solution de cette équation peut être exprimée comme la somme d'une solution de l'équation sans second membre plus une solution particulière de l'équation avec second membre $\mathcal{E}(t)$.

$$\mathcal{Z}(t) = \underbrace{\mathcal{Z}(t_0) \exp[-j\omega_c(t-t_0)]}_{\mathbf{v}_c(t)} + \int_{t_0}^t \exp[-j\omega_c(t-u)] \mathcal{E}(u) du$$

Le premier terme du second membre de cette relation décrit le mouvement cyclotronique autour des lignes de champ magnétique en l'absence de champ électrique. Le deuxième terme décrit l'effet du champ électrique. Considérons une situation où le champ électrique ne varie de manière significative que sur une échelle de temps beaucoup plus longue que la période cyclotron, et telle que $\mathcal{E}(t = -\infty) = 0$ et $d\mathcal{E}(t = -\infty)/dt = 0$. L'intégrale décrivant l'effet du champ électrique peut être sommée par partie afin de faire apparaître un développement en $d^n \mathcal{E}/dt^n \mathcal{E} \omega_c^n$, qui, compte tenu de la lenteur de l'évolution du champ $\mathcal{E}(t)$ à l'échelle de la fréquence cyclotron, est un petit paramètre approprié pour un développement perturbatif. L'hypothèse d'évolution lente en regard de l'échelle cyclotronique est une hypothèse d'adiabaticité. Sous cette hypothèse d'adiabaticité, nous obtenons donc le développement :

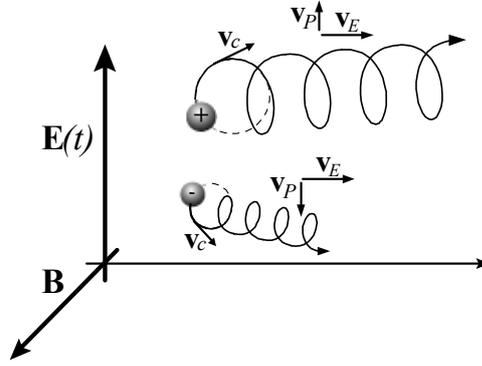
$$\int_{-\infty}^t \exp[-j\omega_c(t-u)] \mathcal{E}(u) du \approx \underbrace{\frac{\mathcal{E}(t)}{j\omega_c}}_{\mathbf{v}_E} + \underbrace{\frac{1}{\omega_c^2} \frac{d\mathcal{E}(t)}{dt}}_{\mathbf{v}_P}$$

Le premier terme de ce développement est appelé dérive électrique de champs croisés, \mathbf{v}_E . Le deuxième terme est appelé dérive de polarisation, \mathbf{v}_P , car, contrairement au premier terme, des espèces de charges différentes présentent des vitesses différentes, ce qui induit une polarisation du plasma.

Le premier terme de ce développement est appelé dérive électrique de champs croisés, \mathbf{v}_E . Le deuxième terme est appelé dérive de polarisation, \mathbf{v}_P , car, contrairement au premier terme, des espèces de charges différentes présentent des vitesses différentes, ce qui induit une polarisation du plasma.

$$\mathbf{v}_E \equiv \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}, \quad \mathbf{v}_P \equiv \frac{1}{B\omega_c} \frac{d\mathbf{E}}{dt} \rightarrow \underline{\underline{\mathbf{V} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_E + \mathbf{v}_P + \dots}}$$

Ces deux dérivées électriques, champs croisés et polarisation, se superposent au mouvement cyclotronique décrit précédemment. La dérive de polarisation est à l'origine de la valeur élevée de la constante diélectrique d'un plasma magnétisé soumis à un champ électrique basse fréquence. Lorsque l'hypothèse d'adiabaticité n'est plus vérifiée, l'échelle de temps du champ devenant de l'ordre de grandeur de l'inverse de la période cyclotronique, les formules précédentes ne sont plus valables ; l'analyse du mouvement révèle alors des résonances. On remarquera que la dérive de polarisation est proportionnelle à la masse, les courants qui en résultent sont donc principalement ioniques.



Intéressons nous maintenant au cas d'une variation spatiale du champ magnétique.

- décomposons la vitesse perpendiculaire au champ en la somme d'une rotation cyclotronique $\mathbf{v}_c(t)$ et d'une vitesse de dérive inconnue \mathbf{v}_D : $\mathbf{V}_{\perp} = \mathbf{v}_c(t) + \mathbf{v}_D$, puis

- analysons la position comme la somme de la position du centre guide et du rayon de Larmor tournant : $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}_L$.

Cette décomposition correspond à un ordering de la dynamique ainsi séparée en mouvements lent et rapide, $\mathbf{v}_c = d\boldsymbol{\rho}_L/dt$ et $\boldsymbol{\rho}_L$ constituent la partie cyclotronique rapide, $\mathbf{v}_D = d\mathbf{R}_{\perp}/dt$ le mouvement lent induit par les inhomogénéités du champ. Le caractère lent, à l'échelle cyclotronique, de ces composantes permet de définir \mathbf{v}_D comme la moyenne $\mathbf{v}_D = \langle \mathbf{V}_{\perp} \rangle$, la moyenne étant ici une moyenne temporelle sur une période cyclotronique.

Afin de résoudre ce problème, nous supposons que les échelles de variations spatiales du champ vérifient un ordering adiabatique : le rayon de Larmor sera supposé plus petit que les longueurs de gradient dans le plan perpendiculaire au champ, et le rapport de la vitesse parallèle au champ sur la fréquence cyclotron plus petit que la longueur de gradient parallèle. Le champ sera représenté par $\mathbf{B}(x, y, z) = B(x, y, z)\mathbf{b}(x, y, z)$, dans un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) associé à une base orthonormée directe $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$, où \mathbf{b} est un vecteur unitaire. L'axe des z est choisi tangent à la ligne de champ à l'origine : $\mathbf{b}(x = 0, y = 0, z = 0) = \mathbf{u}_z$. Les hypothèses d'adiabaticité se traduisent donc par $\rho_L \partial B / \partial x \ll B$, $\rho_L \partial B / \partial y \ll B$, $V_{\parallel} \partial B / \partial z \ll \omega_c B$ où la fréquence cyclotron et le rayon de Larmor sont calculés au point de référence $(0, 0, 0)$.

Sous ces hypothèses, le champ apparaît localement homogène à la particule qui effectue plusieurs rotations cyclotroniques avant d'explorer les variations spatiales transverses et longitudinales. La position de la particule peut donc être décomposée en la somme de la position du centre guide $\mathbf{R}(t)$ qui repère le centre de l'orbite cyclotronique, et du rayon vecteur de cette orbite circulaire $\boldsymbol{\rho}(t)$:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) + \boldsymbol{\rho}_L(t) = \mathbf{R}(t) + \rho_L [\cos(\omega_c t) \mathbf{u}_x - \sin(\omega_c t) \mathbf{u}_y]$$

Cette décomposition de la position entraîne une décomposition de la vitesse en la somme de la vitesse cyclotronique, de la vitesse le long de la ligne de champ, et d'une dérive lente perpendiculairement aux lignes de champ :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_D = v_{\parallel} \mathbf{b} + \omega_c [\boldsymbol{\rho}_L(t) \times \mathbf{b}] + \mathbf{v}_D$$

Les deux inconnues de cette décomposition, en mouvements lents et rapides, sont les mouvements lents : la variation temporelle de la vitesse parallèle $dv_{\parallel}(t)/dt$ et la valeur de la vitesse de dérive \mathbf{v}_D . A l'ordre zéro en les petits paramètres $\rho_L \partial \ln B / \partial x \approx O(\varepsilon)$, $\rho_L \partial \ln B / \partial y \approx O(\varepsilon)$ et $v_{\parallel} \partial \ln B / \partial z \omega_c \approx O(\varepsilon)$ l'orbite est donnée par

$$\mathbf{v}_{\parallel} = v_{\parallel} \mathbf{b}, \quad \mathbf{v}_c = \omega_c [\boldsymbol{\rho}_L \times \mathbf{b}], \quad \boldsymbol{\rho}_L = \rho_L [\cos(\omega_c t) \mathbf{u}_x - \sin(\omega_c t) \mathbf{u}_y], \quad \mathbf{v}_D = \mathbf{0}$$

Afin de calculer l'ordre suivant, nous effectuons un développement limité du champ, au voisinage de l'origine, au premier ordre en ρ_L :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r} = \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}_L) = \mathbf{B}(\mathbf{R}) + (\boldsymbol{\rho}_L \cdot \nabla) \mathbf{B}|_{\mathbf{R}}$$

Compte tenu de la décomposition de la vitesse, du développement du champ, et de la valeur de la trajectoire à l'ordre zéro, l'équation du mouvement peut être réécrite :

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_D) = \frac{q}{m} (\mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_D) \times [\mathbf{B}(\mathbf{R}) + (\boldsymbol{\rho}_L \cdot \nabla) \mathbf{B}|_{\mathbf{R}}]$$

Afin d'extraire la partie lente de la trajectoire nous prenons la moyenne, $\langle \rangle$, de cette équation sur une période cyclotronique. Seuls persistent alors les termes lents et les carrés de termes rapides.

$$\frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt} = \frac{q}{m} \mathbf{v}_D \times \mathbf{B}(\mathbf{R}) + \frac{q}{m} \omega_c \langle (\boldsymbol{\rho}_L \times \mathbf{b}) \times (\boldsymbol{\rho}_L \cdot \nabla) \rangle \mathbf{B}|_{\mathbf{R}} + O(\varepsilon^2)$$

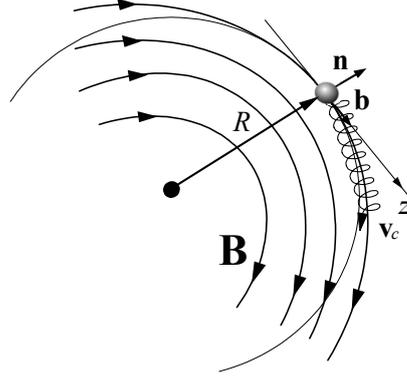
Le double produit vectoriel $\langle (\boldsymbol{\rho}_L \times \mathbf{b}) \times (\boldsymbol{\rho}_L \cdot \nabla) \rangle \mathbf{B}$ peut être évalué par projection sur la base cartésienne locale :

$$\begin{aligned} \langle (\boldsymbol{\rho}_L \times \mathbf{b}) \times (\boldsymbol{\rho}_L \cdot \nabla) \rangle \mathbf{B} &= -\langle \rho_{Lx} (\boldsymbol{\rho}_L \cdot \nabla) \rangle B_z \mathbf{u}_x - \langle \rho_{Ly} (\boldsymbol{\rho}_L \cdot \nabla) \rangle B_z \mathbf{u}_y \\ &\quad + \langle \rho_{Ly} (\boldsymbol{\rho}_L \cdot \nabla) \rangle B_y \mathbf{u}_z + \langle \rho_{Lx} (\boldsymbol{\rho}_L \cdot \nabla) \rangle B_x \mathbf{u}_z \end{aligned}$$

Compte tenu de l'identité $2\langle \rho_{Li} \rho_{Lj} \rangle = \delta_{ij}$, de l'équation de la divergence du champ : $\partial B_x / \partial x + \partial B_y / \partial y + \partial B_z / \partial z = 0$ et de l'expression $(\boldsymbol{\rho}_L \cdot \nabla) = \rho_{Lx} \partial / \partial x + \rho_{Ly} \partial / \partial y$, l'équation de la force de Laplace moyennée sur une période cyclotron s'écrit finalement :

$$m \frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt} = q \mathbf{v}_D \times \mathbf{B} - \mu \nabla B$$

Afin d'identifier les différentes dérives perpendiculaires et le terme d'accélération parallèle, cette équation doit être ensuite projetée parallèlement à \mathbf{b} et perpendiculairement à \mathbf{b} . Introduisons \mathbf{n} le vecteur normal à une ligne de champ magnétique, R son rayon de courbure et s l'abscisse curviligne le long de cette ligne.



La théorie de la courbure fournit la relation classique : $d\mathbf{b}/ds = \mathbf{n}/R$. La dérivée de la vitesse parallèle peut s'exprimer comme :

$$\frac{d(v_{\parallel}\mathbf{b})}{dt} = \frac{dv_{\parallel}}{dt}\mathbf{b} + v_{\parallel}^2(\mathbf{b} \cdot \nabla\mathbf{b}) = \frac{dv_{\parallel}}{dt}\mathbf{b} + \frac{v_{\parallel}^2}{R}\mathbf{n}$$

Le produit scalaire de cette équation avec \mathbf{b} permet d'exprimer le terme de force diamagnétique : $mdv_{\parallel}/dt = -\mu\mathbf{b} \cdot \nabla B(\mathbf{r})$; et le produit vectoriel avec \mathbf{b} permet d'exprimer les termes de vitesse de dérive de gradient et de courbure :

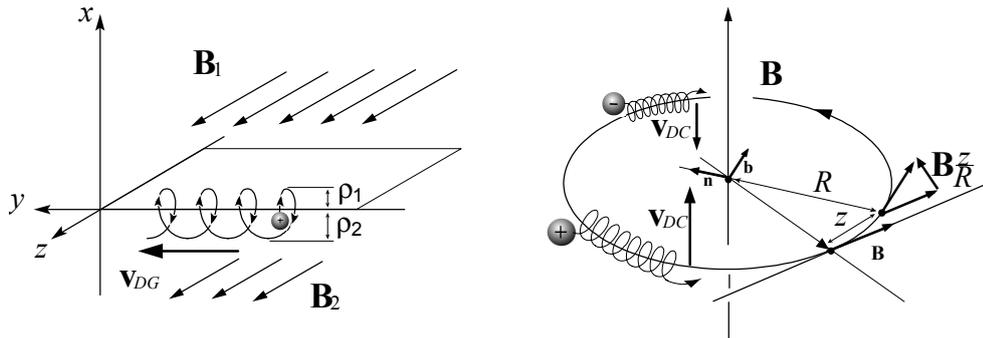
$$\mathbf{b} \times v_{\parallel}^2(\mathbf{b} \cdot \nabla\mathbf{b}) = \frac{q}{m}\mathbf{b} \times (\mathbf{v}_D \times \mathbf{B}) - \frac{\mu}{m}\mathbf{b} \times \nabla B$$

La solution de cette équation algébrique, d'inconnue \mathbf{v}_D , est :

$$\mathbf{v}_D = \frac{\mu}{qB}\mathbf{b} \times \nabla B + \frac{mv_{\parallel}^2}{qB}\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{b} \equiv \mathbf{v}_{DG} + \mathbf{v}_{DC}$$

L'origine physique de la dérive de gradient est une lente accumulation de faibles déviations, non compensées, du rayon de Larmor entre les zones de champ fort et de champ faible.

$$\mathbf{v}_{DG} \equiv \frac{v_c^2}{2\omega_c} \frac{\mathbf{b} \times \nabla B}{B}, \quad \mathbf{v}_{DC} \equiv \frac{v_{\parallel}^2}{\omega_c} \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{n}}{R} \rightarrow \underline{\underline{\mathbf{V} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_{DG} + \mathbf{v}_{DC} + \dots}}$$



L'identification de l'origine physique de la dérive de courbure ne présente aucune difficulté ; une particule qui suit, à l'ordre zéro, une ligne de champ courbe subit une force centrifuge \mathbf{F}_c et la dérive de champs croisés, $\mathbf{F}_c \times \mathbf{B}/qB^2$ générée par cette force centrifuge, n'est autre que la dérive de courbure \mathbf{v}_{DC} .

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique statique, présentant une courbure et un gradient, est donc la superposition du mouvement cyclotronique et du mouvement parallèle et de deux mouvements de dérive, les dérives de gradient et de courbure.

Champs croisé	$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}$
Polarisation	$\mathbf{v}_P = \frac{1}{B\omega_c} \frac{d\mathbf{E}}{dt}$
Gradient	$\mathbf{v}_{DG} = \frac{V_c^2}{2\omega_c^2} \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2}$
Courbure	$\mathbf{v}_{DC} = \frac{V_{\parallel}^2}{\omega_c} \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{n}}{R}$

Le sens de ces deux dérives est fonction du signe de la charge de la particule. Ces dérives créent donc des courants et des séparations de charges, donc des champs électriques et magnétiques. Ces courants de dérive s'écoulent dans la direction perpendiculaire au champ. L'essentiel de l'énergie cinétique est contenue dans le mouvement cyclotronique et le mouvement parallèle, le mouvement de dérive ne contenant qu'une faible fraction de l'énergie totale. Si le mouvement de la particule a lieu dans une zone éloignée des sources du champ, ou si, comme dans les tokamaks, la pression du plasma est beaucoup plus faible que la pression magnétique, alors, il est possible de considérer le champ \mathbf{B} comme irrotationnel, c'est-à-dire : $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \rightarrow \nabla \times (B\mathbf{b}) = \mathbf{0} = B\nabla \times \mathbf{b} - \mathbf{b} \times \nabla B$, l'équation : $\nabla \mathbf{b}^2 = 0 = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{b})$ permet d'établir l'identité : $\mathbf{b} \times \nabla B/B = \mathbf{b} \times (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{n}/R$; la somme de la dérive de gradient et de la dérive de courbure dans le vide est donc égale à :

$$\text{Dérive magnétique : } \mathbf{v}_D = \mathbf{v}_{DG} + \mathbf{v}_{DC} = \frac{v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2}}{R\omega_c} \mathbf{b} \times \mathbf{n} \rightarrow \frac{v_D}{v_T} \sim \frac{\rho_L}{R}$$

C'est cette dernière relation que nous utiliserons pour analyser la nature des orbites dans un tokamak.

1.4 Orbites Circulantes et Piégées

1.4.1 Topologie magnétique

Sur la base de la décomposition de la vitesse d'une particule chargée e en la somme d'une translation le long des lignes de champ plus une rotation cyclotronique autour des lignes de champ, plus une dérive lente perpendiculairement aux lignes de champ, analysons les propriétés de confinement d'un champ purement toroïdal. Décrivons ce champ toroïdal sur une base cylindrique $[\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_{\varphi}, \mathbf{e}_z]$, la position d'un point étant repérée par $[R, \varphi, z]$ les coordonnées radiales, angulaire et axiale.

$$\text{Champ toroïdal : } \mathbf{B} = B_t(R) \mathbf{e}_{\varphi} = B_0 \frac{R_0}{R} \mathbf{e}_{\varphi}$$

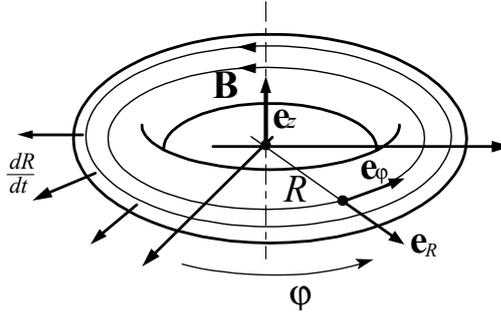
Le mouvement d'une particule chargée est la combinaison d'une translation le long des lignes de champ et d'une rotation autour des lignes de champ, plus un mouvement de dérive perpendiculairement au champ : $\mathbf{V} = v_{\parallel} \mathbf{e}_z + \frac{\mathbf{B}}{B} \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_D$ où la vitesse de dérive \mathbf{v}_D a pour expression :

$$\mathbf{v}_D = \frac{v_{\parallel}^2 + \frac{v_c^2}{2}}{R_0 \omega_{c0}} \mathbf{e}_z \sim v_T \frac{\rho_L}{R} \mathbf{e}_z$$

Compte tenu du signe de leur charge respective les électrons dérivent vers le bas et les ions vers le haut ($B_t > 0$) ; ce mouvement lent de séparation des charges engendre un champ électrique \mathbf{E} solution de l'équation de Maxwell-Ampère en régime quasi-électrostatique : $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$.

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{n}{\varepsilon_0} (q_i \langle \mathbf{v}_{Di} \rangle + q_e \langle \mathbf{v}_{De} \rangle)$$

Les populations électronique et ionique étant à l'équilibre thermodynamique à la température T , la valeur moyenne des vitesses parallèle et cyclotronique sont données par $\langle m v_{\parallel}^2 \rangle = \langle m v_c^2 / 2 \rangle = kT$.



Le champ électrique axial résultant de la polarisation du plasma croît donc linéairement avec le temps et engendre une dérive de champ croisé radiale,

$$q\mathbf{E} = -\frac{4kT}{R_0} \frac{\omega_{p0}^2}{\omega_{c0}} t \mathbf{e}_z \rightarrow \mathbf{V}_{out} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}$$

la vitesse d'éjection radiale du plasma est donc une fonction linéaire du temps :

$$\text{Vitesse d'éjection radiale : } \frac{dR}{dt} = R \frac{4kT}{qB_0 R_0^2} \frac{\omega_{p0}^2}{\omega_{c0}} t \sim v_T \frac{v_T t}{R_0}$$

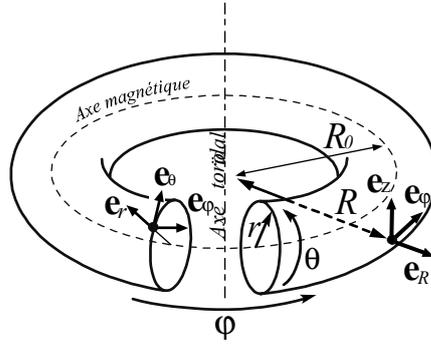
Dans un plasma de tokamak la fréquence cyclotronique électronique est de l'ordre de grandeur de la fréquence de Langmuir, $\omega_{c0} \sim \omega_{p0}$, le temps caractéristique d'éjection radiale est donc de l'ordre de R_0 que divise la vitesse thermique des électrons. Ce temps est bien en deçà du temps de confinement nécessaire pour satisfaire le critère de Lawson.

Bien que les lignes de champ soient fermées et que les particules présentent une tendance à suivre les lignes de champ, un champ purement toroïdal ne permet pas de confiner un plasma car la vitesse de dérive axiale engendre un champ électrique axial qui génère une dérive radiale. Il est donc nécessaire de compléter ce champ par une composante supplémentaire inhibant la séparation de charge.

Un tel mécanisme de court-circuit, permettant d'annuler le courant de polarisation $nq \langle \mathbf{v}_D \rangle$, peut être mis en œuvre en complétant le champ toroïdal $B_t \mathbf{e}_\varphi$ par un champ poloïdal $B_p \mathbf{e}_\varphi$. Les lignes de champ seront des hélices s'enroulant sur des tores emboîtés et le courant de polarisation sera court-circuité à travers la connexion haut-bas ainsi réalisée. Ce principe de confinement des orbites des particules chargées dans un tokamak doit être validé par une analyse détaillée de la nature des trajectoires dans une configuration du type :

$$\text{Champs toroïdal et poloïdal : } \mathbf{B} = B_p(R, r) \mathbf{e}_\theta + B_t(R) \mathbf{e}_\varphi$$

Pour mener à bien cette analyse les coordonnées cylindriques précédentes $[R, \varphi, z]$ associées à la base orthonormée directe $[\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z]$ ne sont pas adaptées ; nous utiliserons les coordonnées toroïdales cartésiennes $[r = \sqrt{(R - R_0)^2 + z^2}, \theta = \arctan \frac{z}{R - R_0}, \varphi]$ où R_0 est le grand rayon du tore.



Afin de simplifier l'analyse nous supposons que les surfaces magnétiques sur lesquelles s'appuient les lignes de champ sont des tores concentriques de sections circulaires. Considérons un modèle simple où la composante poloïdale et la composante toroïdale sont données par :

$$B_t(R) \equiv B_0 \frac{R_0}{R} \approx B_0 \left(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta \right), \quad B_p(R, r) \equiv \frac{r}{q(r) R} B_t(R)$$

où nous avons introduit le facteur de sécurité q qui mesure le rapport du nombre de tours autour de l'axe magnétique au nombre de tours autour de l'axe toroïdal pour une ligne de champ donnée.

$$\text{Facteur de sécurité : } q \equiv \frac{r B_t}{R B_p}$$

L'équation des lignes de champ :

$$\text{Lignes de champ : } \frac{B_p}{r d\theta} = \frac{B_t}{R d\varphi} \rightarrow \varphi = q\theta$$

décrit un ensemble d'hélices dessinées sur ces tores emboîtés. Le mouvement le long d'une ligne de champ s'effectue à la vitesse $v_{\parallel} = ds/dt$ où s représente l'abscisse curviligne le long de la ligne considérée. Pour les configurations tokamak le petit rayon d'une surface magnétique et le grand rayon de l'axe magnétique suivent l'ordering dit du *petit rapport d'aspect* $R_0 \gg r$. Ainsi, comme le facteur q

est de l'ordre de un à quelques unités, l'élément de longueur peut être approché suivant :

$$ds = \sqrt{R^2 d\varphi^2 + r^2 d\theta^2} \approx R d\varphi \approx R q d\theta \approx R_0 q d\theta \left(1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta \right)$$

Sur une surface magnétique $r = \text{constante}$ l'amplitude du champ magnétique varie en fonction de l'angle θ et il est d'usage de distinguer, le coté dit *fort champ* du coté de l'axe toroïdal et le coté dit *faible champ* vers l'extérieur. Cette variation de l'amplitude du champ engendre une force diamagnétique qui peut arrêter certaines particules à travers l'existence de points miroirs. La variation du champ le long des lignes de champ est donnée par :

$$\left. \frac{\partial B}{\partial s} \right|_r \approx \left. \frac{\partial B_t}{\partial \theta} \right|_r \frac{d\theta}{ds} \approx B_0 \frac{r}{q R_0^2} \sin \theta$$

où nous avons négligé les termes d'ordre supérieur en le *petit rapport d'aspect*. Nous utiliserons systématiquement ce type de développement perturbatif dans la suite de l'analyse des orbites. La vitesse le long des lignes de champ peut être projetée sur les directions toroïdale et poloïdale ; compte tenu de la relation $v_{\parallel} \approx R d\varphi/dt \approx R q d\theta/dt$ nous obtenons l'expression :

$$\text{Vitesse du centre guide} \quad : \quad v_{\parallel} \frac{\mathbf{B}}{B} + v_D \mathbf{e}_z \approx v_{\parallel} \mathbf{e}_{\varphi} + \frac{r}{qR} v_{\parallel} \mathbf{e}_{\theta} + \left(\frac{v_{\parallel}^2 + \frac{v_c^2}{2}}{R_0 \omega_{c_0}} \right) \mathbf{e}_z$$

$$\text{Accélération du centre guide} \quad : \quad m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\mu \frac{\mathbf{B}}{B} \cdot \nabla B = -\mu \left. \frac{\partial B}{\partial s} \right|_r$$

La trajectoire du centre guide d'une particule chargée est décrite par trois variables : l'angle toroïdal φ , l'angle poloïdal θ et le petit rayon r . La vitesse cyclotronique v_c est déterminée par l'invariance du moment magnétique $\mu = m v_c^2 / 2B(r, \theta) \rightarrow v_c(\mu, r, \theta)$ et la vitesse parallèle v_{\parallel} par l'invariance de l'énergie cinétique, enfin, l'angle cyclotronique effectue une rotation à la pulsation cyclotronique correspondant à la position du centre guide. La vitesse parallèle v_{\parallel} est soumise à la force diamagnétique, la particule est donc accélérée du côté bas champ et décélérée du côté fort champ. La projection de la vitesse de dérive $v_D \mathbf{e}_z$ suivant les directions poloïdale et toroïdale permet d'établir les équations du centre guide pour une configuration tokamak.

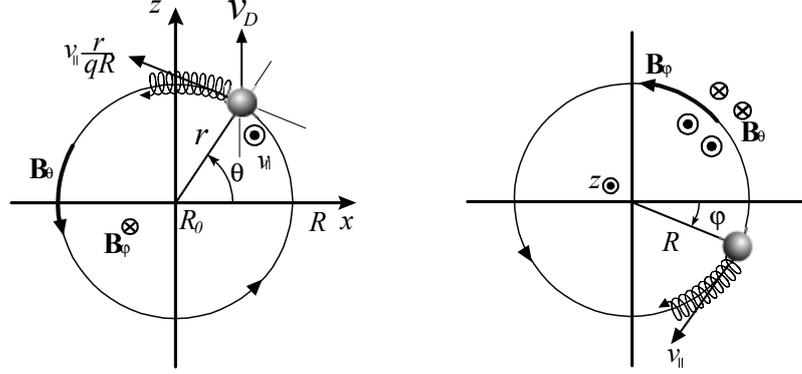
$$\begin{aligned} \text{Petit rayon} \quad & : \quad \frac{dr}{dt} = v_D \sin \theta \\ \text{Angle poloïdal} \quad & : \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_{\parallel}}{qR_0} + v_D \frac{\cos \theta}{r} \\ \text{Vitesse parallèle} \quad & : \quad \frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\frac{\mu B_0}{mqR_0^2} r \sin \theta \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la relation $\mathbf{e}_z = \sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_{\theta}$.

1.4.2 Orbites circulantes

La solution générale de ce système d'équations conduit à distinguer deux classes de trajectoires : (i) les trajectoires circulantes où l'énergie cinétique le long des

lignes de champs domine l'énergie cinétique cyclotronique $v_{\parallel}^2 \gg v_c^2$, (ii) les trajectoires piégées correspondant à l'ordering inverse $v_c^2 \gg v_{\parallel}^2$.



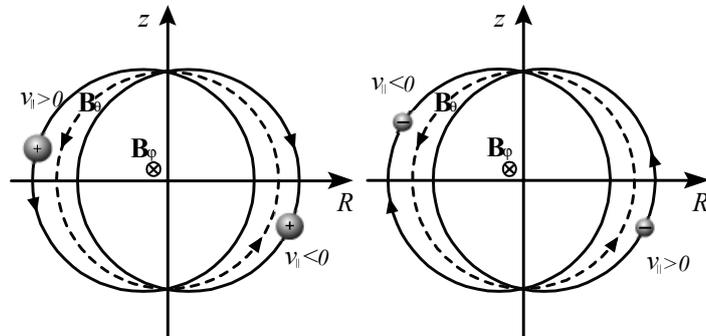
Dans le premier cas la force diamagnétique, décrite par le deuxième membre de la troisième équation, est faible et l'on peut considérer que v_{\parallel} reste à peu près constant, l'énergie cinétique totale étant conservée v_c reste donc aussi approximativement constant ainsi que v_D . Considérons le repérage cartésien du plan poloïdal : $x = R - R_0 = r \cos \theta$, $z = r \sin \theta$; les deux premières équations décrivant le mouvement du centre guide dans ce plan sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{v_{\parallel}}{qR_0}z \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{v_{\parallel}}{qR_0}x + v_D \end{aligned}$$

Introduisons la variable complexe : $\mathcal{Z}(t) \equiv (x(t) + qv_D R_0/v_{\parallel}) + jz(t)$, le système précédent de deux équations réelles est équivalent à l'équation sur la variable complexe :

$$\frac{d\mathcal{Z}}{dt} = j \frac{v_{\parallel}}{qR_0} \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0 \exp\left(j \frac{v_{\parallel}}{qR_0} t\right)$$

Les orbites des particules passantes sont donc des hélices dont les projections poloïdales sont des cercles excentrés.



Le décentrement de ces cercles, δ_c , a pour valeur :

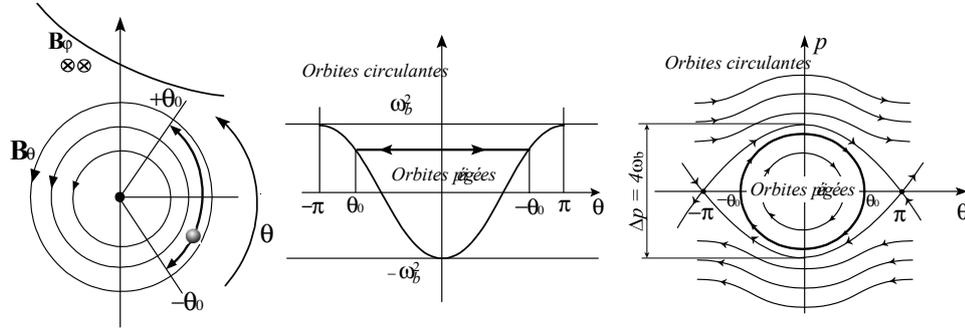
$$\delta_c = -\frac{qv_D R_0}{v_{\parallel}} \approx -\frac{qv_{\parallel}}{\omega_c} \approx -q\rho_L \times \text{signe}[\omega_c v_{\parallel}]$$

Les surfaces de dérive sont donc décalées par rapport aux surfaces magnétiques d'une longueur de l'ordre de grandeur de quelques rayons de Larmor. Ce décentrement peut être vers le côté fort champ pour les ions co-passants ($v_{\parallel} > 0$) et les électrons contre-passants ($v_{\parallel} < 0$) ou vers le côté faible champ pour les ions contre-passants ($v_{\parallel} < 0$) et les électrons co-passants ($v_{\parallel} > 0$). Sous l'hypothèse $v_{\parallel} \gg v_c$ les trajectoires sont donc confinées et le champ poloïdal joue bien le rôle qui lui a été imparti, à savoir, induire une rotation poloïdale pour inhiber la séparation de charge verticale induite par la vitesse de dérive v_D . Les orbites circulantes sont donc des hélices s'appuyant sur des tores emboîtés et décalés par rapport à l'axe magnétique : $\varphi \approx \frac{v_{\parallel} t}{R_0}$, $\theta \approx \frac{v_{\parallel} t}{qR_0}$, $r \approx r_0 - \frac{qv_{\parallel}}{\omega_{c0}} \cos\left(\frac{v_{\parallel} t}{qR_0}\right)$.

Caractéristiques	Valeurs
Pulsation cyclotron	$\omega_c = \frac{eB}{m}$
Pulsation toroïdale	$\omega_{\varphi} = \frac{v_{\parallel}}{R_0} \sim \omega_c \frac{\rho_L}{R_0}$
Pulsation poloïdale	$\omega_{\theta} = \frac{v_{\parallel}}{qR_0} \sim \omega_c \frac{\rho_L}{qR_0}$

1.4.3 Orbites piégées

Considérons maintenant l'hypothèse opposée, $v_c \gg v_{\parallel}$, et négligeons, dans un premier temps, la vitesse de dérive v_D , en effet $v_D/v_c \sim \rho_L/R_0 \ll 1$; nous compléterons cette première analyse en considérant l'effet du mouvement de dérive à la fin de cette étude.



Sous cette hypothèse les équations de la trajectoire du centre guide s'établissent ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{v_{\parallel}}{qR_0} \\ \frac{dv_{\parallel}}{dt} &= -\frac{\mu B_0 r}{mqR_0^2} \sin \theta \end{aligned}$$

Éliminons la vitesse parallèle v_{\parallel} entre ces deux équations pour obtenir l'équation vérifiée par l'angle θ qui est similaire à celle d'un pendule non linéaire.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\mu B_0 r}{mq^2 R_0^3} \sin \theta = 0$$

Introduisons la fréquence de bounce ω_b qui caractérise cette oscillation non linéaire.

$$\text{Fréquence de Bounce : } \omega_b \equiv \sqrt{\frac{\mu B_0 r}{mq^2 R_0^3}} \approx \omega_c \frac{\rho_L}{qR_0} \sqrt{\frac{r}{2R_0}}$$

Cette oscillation entre deux valeurs extrêmes $\pm\theta_0$ résulte de l'existence de deux points miroirs dans la zone de champ fort où la particule rebrousse chemin le long de la ligne de champ. Partant de l'angle $\theta = 0$, coté champ faible, le gradient de champ convertit la vitesse parallèle en vitesse cyclotronique à travers la force diamagnétique, cette conversion est achevée aux points miroirs en $\pm\theta_0$ et la particule repart vers la zone de champ faible ; sur le trajet retour la conversion inverse, du mouvement cyclotronique vers le mouvement parallèle prend place etc... L'équation du pendule non linéaire peut être résolue et la solution, qui s'exprime en termes de fonctions elliptiques, développée en série de Fourier pour faire apparaître les composantes harmoniques. Il est plus instructif de présenter une analyse qualitative du mouvement en considérant la forme hamiltonienne de cette équation et en introduisant le hamiltonien, dit du pendule non-linéaire, H :

$$p = \frac{v_{\parallel}}{qR_0} \rightarrow H(p, \theta) = \frac{1}{2}p^2 - \omega_b^2 \cos \theta$$

où p est le moment canoniquement conjugué à l'angle θ . Nous allons analyser les caractéristiques du mouvement du pendule non-linéaire en identifiant d'abord les deux classes topologiques de trajectoires, puis en étudiant séparément les caractéristiques de chacune de ces deux classes.

Le carré p^2 étant toujours positif la quantité $H + \omega_b^2 \cos \theta$ est aussi toujours positive, mais deux cas doivent être distingués :

- Si l'énergie H est plus grande que le carré de la pulsation ω_b^2 , alors l'angle θ peut prendre toutes les valeurs sans que le signe de $H + \omega_b^2 \cos \theta$ varie : $H > \omega_b^2 \rightarrow -\infty \leq \theta \leq +\infty$. Ces orbites sont circulantes et le mouvement est une rotation.

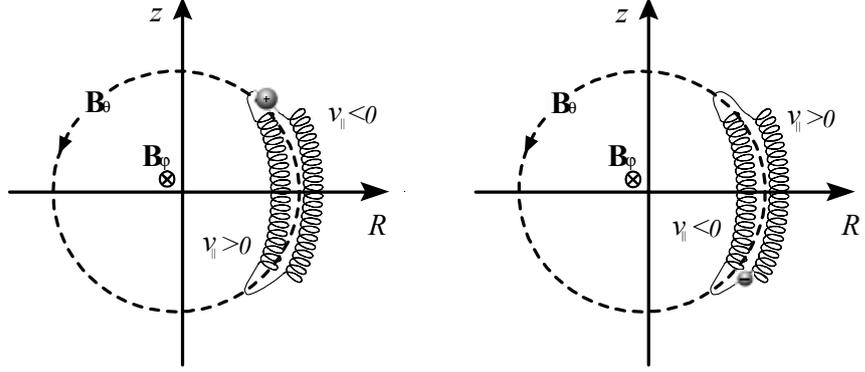
- Si l'énergie H est plus petite que le carré de la pulsation ω_b^2 : $-\omega_b^2 < H < +\omega_b^2$, les valeurs admissibles pour l'angle θ sont restreintes afin de préserver la valeur positive de $H + \omega_b^2 \cos \theta$: $-\omega_b^2 < H < +\omega_b^2 \rightarrow (2n - 1)\pi < \theta < (2n + 1)\pi$. Ces orbites sont piégées coté bas champ, la particule effectue un mouvement d'oscillation entre deux points miroirs.

Dans l'espace des phases (p, θ) ces deux classes d'orbites sont séparées par deux orbites critiques d'énergie $H = +\omega_b^2$, les séparatrices S . La définition de ces séparatrices, $p^2/2 - \omega_b^2 \cos \theta = \omega_b^2$, permet d'exprimer leur équation cartésienne $p_S(\theta)$ et de calculer l'extension en moment Δp_S de la zone piégée : $p_S(\theta) = \pm 2\omega_b \cos(\theta/2) \rightarrow \Delta p_S = 4\omega_b$. Une analyse asymptotique de la période, T , du mouvement, dans la zone piégée, au voisinage cette séparatrice, révèle une divergence logarithmique à l'approche de la séparatrice : $T(H) \rightarrow |\log |H - \omega_b^2|| / \omega_b$ quand $H \rightarrow \omega_b^2$. La lenteur du mouvement au voisinage de la séparatrice rend cet ensemble d'orbites extrêmement sensible aux perturbations et donc structurellement fragile. Dans un scénario de transition vers le chaos par croissance d'une perturbation appropriée cet ensemble d'orbites est le premier à présenter un comportement chaotique.

Les équations de Hamilton permettent aussi d'identifier les points O et X du portrait de phase : $p_X = 0$, $\theta_X = (2n + 1)\pi$, $p_O = 0$, $\theta_O = 2n\pi$. L'agencement des séparatrices, des orbites circulantes et des orbites piégées est représenté sur la figure ci-dessus. Le point O correspond à la position de plus basse énergie du système : $H = -\omega_b^2$, c'est une orbite dite stagnante ; au voisinage de ce point O le hamiltonien peut être développé, $2H = p^2 - \omega_b^2 \theta^2 + \dots$; lorsque ce développement est restreint à sa partie quadratique, le potentiel est celui d'un

oscillateur linéaire et les orbites au voisinage du point O sont donc des oscillations harmoniques ; cette sous classe d'orbites est dite *profondément piégée*.

Orbites profondément piégées : $v_{\parallel} \approx v_{\parallel 0} \cos [\omega_b (t - t_0)]$, $\theta \approx \theta_0 \sin [\omega_b (t - t_0)]$



La condition $|p| \leq 2\omega_b$ où $p = v_{\parallel}/qR_0$ permet d'établir le critère de piégeage. Définissons $v_{\parallel 0}$ comme la vitesse parallèle en $\theta = 0$ et v_{c0} comme la vitesse cyclotronique en $\theta = 0$:

$$\text{Condition de piégeage : } \frac{v_{\parallel 0}}{v_{c0}} < \sqrt{\frac{2r}{R_0}}$$

Sur une surface magnétique donnée la fraction de particule piégée est obtenue en sommant la fonction de distribution des vitesse à l'intérieur du domaine piégé.

$$f_p \equiv \int_0^{+\infty} 2\pi v_c dv_c \int_{-v_c \sqrt{\frac{2r}{R_0}}}^{v_c \sqrt{\frac{2r}{R_0}}} \frac{\exp\left(-mv_{\parallel}^2 + mv_c^2/2k_B T\right)}{(2\pi m k_B T)^{\frac{3}{2}}} dv_{\parallel}$$

Ainsi la fraction de particules piégées sur une surface magnétique de rayon r vaut $\sqrt{2r/R_0}$,

$$\text{Fraction de particules piégées : } f_p \xrightarrow{r/R_0 \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2r}{R_0}}$$

les effets de la population piégée seront donc significatifs vers l'extérieur du tore de plasma, côté bas champ. Pour évaluer l'effet de la vitesse de dérive sur les résultats qui viennent d'être établis considérons l'équation du centre guide pour le rayon r et la vitesse parallèle v_{\parallel} :

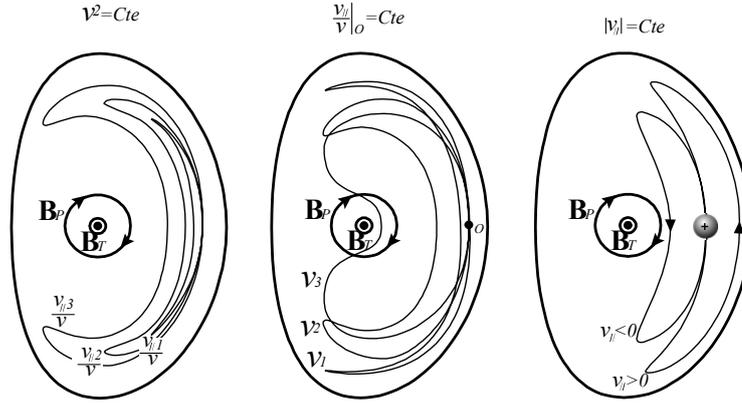
$$\frac{dr}{dt} = \frac{v_c^2}{2R_0\omega_{c0}} \sin \theta, \quad \frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\frac{v_c^2 r}{2qR_0^2} \sin \theta$$

où nous avons pris en compte l'ordering $v_{c0} > v_{\parallel 0} \sqrt{R_0/2r}$. Les orbites piégées, aussi appelées trajectoires *bananes*, ne se réduisent pas à de simples arc de cercles mais présentent une largeur δr , induite par les effets de dérive. L'élimination du temps entre les deux équations du centre guide précédentes permet d'exprimer la variation du rayon en fonction de la variation de la vitesse parallèle, cette

dernière évoluant entre zéro aux points miroirs $\pm\theta_0$ et $v_{\parallel 0}$ en $\theta = 0$ l'estimation de la largeur dite *banane* conduit à une valeur de l'ordre de $q\rho_L\sqrt{R_0/r}$.

$$\text{Largeur de banane : } \frac{dr^2}{dv_{\parallel}} = -2\frac{qR_0}{\omega_{c0}} \rightarrow \delta_b = \underline{\underline{2q\frac{R_0}{r}\frac{v_{\parallel 0}}{\omega_{c0}}}} \approx 2q\rho_L\sqrt{\frac{2R_0}{r}}$$

Pour établir l'expression de l'ordre de grandeur de cette largeur nous avons pris en compte l'ordering de définition de la population piégée $v_{\parallel 0} \leq v_{c0}\sqrt{2r/R_0} \rightarrow v_{\parallel 0}/\omega_{c0} \sim \rho_L\sqrt{2r/R_0}$. A énergie cinétique donnée $E = mv^2/2$, sur une surface magnétique de référence, les particules exploreront plus profondément la zone de champ fort si l'énergie cinétique $mv^2/2$ est contenue principalement dans le mouvement le long des lignes de champ ; la figure ci-dessous présente trois orbites de même énergie, de même point de départ, pour trois paramètres $\frac{v_{\parallel 1}}{v} < \frac{v_{\parallel 2}}{v} < \frac{v_{\parallel 3}}{v}$.



Si plusieurs particules, initialisées au même point, possèdent le même paramètre v_{\parallel}/v leurs orbites présentent le même point miroir, par contre leur largeur est une fonction croissante de l'énergie cinétique : $mv^2/2 = mv_c^2/2 + mv_{\parallel}^2/2$. La figure ci-dessus illustre ce comportement pour trois orbites telles que $v_1 < v_2 < v_3$. La partition entre particules circulantes et piégées n'est pas de nature statique mais dynamique, un flux constant de particules circulantes est piégé à chaque instant et un flux égal est dépiégé à chaque instant, les collisions sont le principal mécanisme alimentant ces deux flux dans l'espace des vitesses associées à une surface magnétique. Nous allons calculer la fréquence caractéristique de dépiégeage ν_d .

Considérons le dépiégeage des particules piégées dans la zone de champ faible du tokamak sur une surface magnétique de rayon r : une particule de vitesses v_{\parallel} et v_c telles que $v_{\parallel}^2/v_c^2 < 2r/R_0$, dont la vitesse est principalement cyclotronique reste piégée sur des orbites localisées dans la zone bas champ du tokamak ; les collisions induisent une redistribution de l'énergie cinétique entre la vitesse le long des lignes de champ v_{\parallel} et la vitesse cyclotronique v_c suivant la loi d'évolution $P(v, \alpha \leftarrow v', \alpha', t)$ exprimant la probabilité qu'une particule initialement en v', α' à $t = 0$ soit en v, α à l'instant t où $v^2 = v_{\parallel}^2 + v_c^2$ et $\cos \alpha = v_{\parallel}/v$:

$$P(v, \alpha \leftarrow v', \alpha', t) = \frac{\delta(v - v')}{2\pi v_0^2} \sum_{l=0}^{l=+\infty} \frac{2l+1}{2} \exp\left(-\frac{l(l+1)}{2}\nu t\right) P_l(\cos \alpha) P_l(\cos \alpha')$$

où $\nu = nZ^2e^4\Lambda/4\pi\epsilon_0^2m^2v^3$ est la fréquence de collisions électrons/ions et P_l est le polynôme de Legendre de degré l ; nous démontrerons cette relation dans le chapitre suivant. Ainsi, une particule piégée ne le reste que momentanément et participe à une dynamique aléatoire de

Piégeage / Dépiégeage / Piégeage / Dépiégeage ...

dont nous allons calculer la fréquence caractéristique. La quantité v_{\parallel}^2/v_c^2 est égale au rapport $\cos^2\alpha/\sin^2\alpha$ dont les arguments peuvent être exprimés sur la base des polynômes de Legendre en utilisant la représentation: $3\cos^2\alpha = P_0(\cos\alpha) + 2P_2(\cos\alpha)$; compte tenu des relations d'orthogonalité et de complétude, les valeurs moyennes $\langle\cos^2\alpha\rangle$ et $\langle\sin^2\alpha\rangle$ évoluent suivant des processus de relaxations exponentielles:

$$\frac{\langle v_{\parallel}^2(t) \rangle}{\langle v_c^2(t) \rangle} = \frac{\int P(\alpha \leftarrow \frac{\pi}{2}, t) \cos^2\alpha d\mathbf{v}}{\int P(\alpha \leftarrow \frac{\pi}{2}, t) \sin^2\alpha d\mathbf{v}} = \frac{1 - \exp(-3\nu t)}{2 + \exp(-3\nu t)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \nu t$$

Ce résultat peut être interprété en considérant la condition de piégeage initial à l'instant $t = 0$: $v_{\parallel}^2/v_c^2 = 0 < 2r/R_0$, puis l'évolution du rapport v_{\parallel}^2/v_c^2 au bout d'un temps $\tau = 2\nu^{-1}r/R_0$ où la particule initialement piégée est dépiégée, $\langle v_{\parallel}^2(\tau) \rangle / \langle v_c^2(\tau) \rangle \approx 2r/R_0$, sous l'effet cumulatif des collisions; l'usage est de définir la fréquence de dépiégeage ν_d comme l'inverse du temps caractéristique de dépiégeage τ .

$$\text{Fréquence de dépiégeage: } \nu_d \approx \nu \frac{R_0}{2r}$$

Les particules piégées constituent donc une population dont la modélisation dynamique nécessite un cadre cinétique; les trois caractéristiques principales associées à la population piégée sont résumées dans le tableau ci-dessous

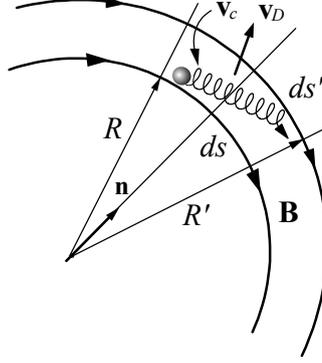
Caractéristiques	Ordres de grandeurs
Condition de piégeage	$\frac{v_{\parallel}}{v_c} \Big _{\theta=0} < \sqrt{\frac{2r}{R_0}}$
Fraction de particules piégées	$f_p = \sqrt{\frac{2r}{R_0}}$
Fréquence de dépiégeage	$\nu_d = \nu \frac{R_0}{2r}$
Largeur radiale	$\delta_b = 2q\rho_L \sqrt{\frac{2R_0}{r}}$

Le résultat du piégeage entre les points miroirs est une oscillation le long des lignes de champ où μB joue le rôle d'un potentiel confinant. On peut alors se poser la question de l'existence d'un invariant adiabatique associé à cette oscillation. La réponse est obtenue en appliquant la formule générale exprimant l'action de cet oscillateur; cette formule permet de définir l'invariant longitudinal J_b d'une particule piégée:

$$\text{Invariant et Pulsation de Bounce: } \frac{J_b}{m} \equiv \oint v_{\parallel} ds, \quad \frac{2\pi}{\omega_b} \equiv \oint \frac{ds}{v_{\parallel}}$$

où s est l'abscisse curviligne le long de la ligne de champ. Afin de démontrer l'invariance de J_b nous allons considérer un champ magnétique inhomogène statique $\mathbf{B}(s, \mathbf{r}_{\perp})$ et deux éléments de lignes de champ voisins de longueur ds et

ds' , de rayon de courbure respectif R et R' ; cette configuration est illustrée par la figure ci-dessous.



Les deux éléments de longueur ds et ds' sont vus sous un angle commun et possèdent un vecteur normal unitaire commun \mathbf{n} . Par ailleurs, les deux éléments de longueur et leurs rayons de courbure respectifs sont reliés par les relations :

$$\frac{ds'}{R'} = \frac{ds}{R} \rightarrow \frac{ds - ds'}{ds} = \frac{R - R'}{R}$$

Une particule chargée suit les lignes de champ et dérive à travers ces lignes. Il est donc nécessaire d'évaluer la variation de la quantité $v_{\parallel} ds$ résultant des dérives magnétiques $\mathbf{v}_D = d\mathbf{r}_{\perp}/dt$ pendant une durée δt : $\delta(v_{\parallel} ds) = ds\delta v_{\parallel} + v_{\parallel}\delta(ds)$. La variation du rayon de courbure est due à la dérive perpendiculaire aux lignes de champ. Pendant un temps δt on peut donc calculer la variation de l'élément de longueur :

$$\frac{\delta(ds)}{ds} = \frac{ds - ds'}{ds} = \frac{R - R'}{R} = \frac{\mathbf{v}_D \cdot \mathbf{n} \delta t}{R}$$

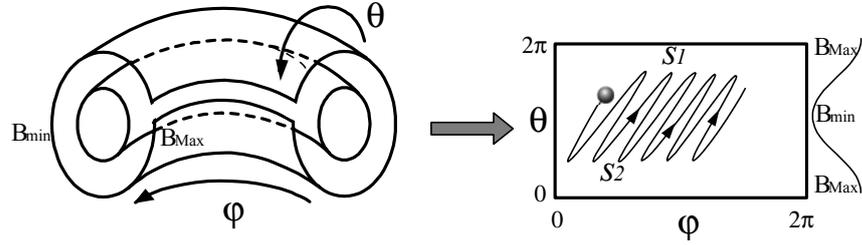
Pendant la même durée δt la vitesse parallèle aux lignes de champ a varié de la quantité δv_{\parallel} qui peut être calculée à l'aide de la conservation de l'énergie $\delta\mu B + mv_{\parallel}^2/2$.

$$\delta \left(m \frac{v_{\parallel}^2}{2} + \mu B \right) = 0 \rightarrow m v_{\parallel} \delta v_{\parallel} = -\mu \mathbf{v}_D \delta t \cdot \nabla B$$

Le moment magnétique μ étant constant, la variation de champ magnétique possède ici un caractère essentiellement convectif et résulte du mouvement de la particule. La somme des deux variations précédentes s'exprime en fonction des vitesses de dérive de gradient et de courbure et le résultat final est une variation $\delta(v_{\parallel} ds)$ nulle.

$$\frac{\delta(ds)}{ds} + \frac{\delta v_{\parallel}}{v_{\parallel}} = \frac{v_c^2 \delta t}{2\omega_c} \frac{\mathbf{b} \times \nabla B}{B} \cdot \frac{\mathbf{n}}{R} - \frac{\mu \delta t}{m\omega_c} \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{b}}{R} \cdot \nabla B = 0$$

Ainsi l'invariant de Bounce J_b ou invariant de rebond est bien une constante du mouvement pour les particules piégées. L'invariance du moment magnétique est associée au mouvement de rotation cyclotronique, celle de l'invariant J_b au mouvement le long des lignes de champ.



Malgré l'existence de l'invariant J_b les orbites piégées, ou trajectoires bananes, ne se referment pas sur elles mêmes et présentent, dans la direction toroïdale, une lente dérive de précession dont la pulsation est donnée dans le tableau suivant :

Caractéristiques	Valeurs
Pulsation cyclotron	$\omega_c = \frac{eB}{m}$
Pulsation de rebond	$\omega_b = \omega_c \frac{\rho_L}{qR_0} \sqrt{\frac{r}{2R_0}}$
Pulsation de précession	$\omega_d = 2\omega_c q \frac{\rho_L^2}{R_0^2}$

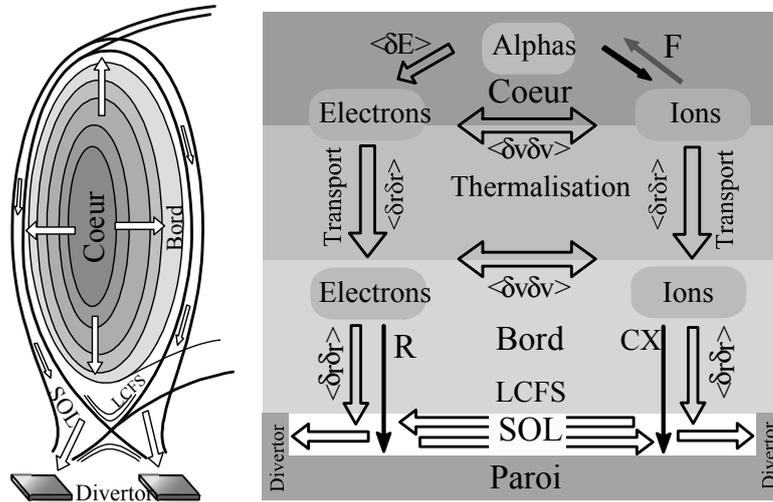
où, conformément à l'ordering adiabatique: $\omega_c \gg \omega_b \gg \omega_d$ qui constituait l'hypothèse de départ de l'analyse des orbites.

Chapitre 2

Relaxations et Transport : Collisions et Diffusion

La description de la dynamique d'un plasma thermonucléaire s'articule autour de l'analyse de deux classes de processus :

- les phénomènes collectifs, en particulier dans le cadre de l'étude des ondes, des instabilités et de la turbulence,
- les processus collisionnels ou interactions particules-particules, en particulier dans le cadre de l'analyse du transport et de l'étude de la réactivité et du chauffage thermonucléaire.



Trois types d'interactions particules-particules sont à l'oeuvre dans les plasmas thermonucléaires :

- l'interaction coulombienne, ou diffusion Rutherford, à l'origine d'une perte de confinement à travers le transport de particules et de chaleur perpendiculairement aux lignes de champ,
- les réactions de fusion entre ions rapides, source du chauffage thermonucléaire.
- les réactions entre espèces chargées, électrons et ions, et les espèces neutres à la périphérie du plasma, en particulier les réactions d'ionisation par impact électronique et d'échange de charge.

Dans ce paragraphe nous allons étudier les principales caractéristiques des processus associés aux collisions coulombiennes. La nécessité de cette analyse est illustrée par la figure ci-dessous. Au sein d'un plasma de tokamak il est d'usage de distinguer plusieurs régions :

- le cœur, zone de faibles gradients de température et de densité et siège des réactions de fusion,
- le bord, qui termine les zones de gradients de température et de densité et qui est délimité par la dernière surface magnétique fermée (LCFS, Last Closed Flux Surface),
- au-delà de cette surface s'étend un ensemble de lignes de champs qui intercepte les cibles du divertor : la SOL (Scrape-Off Layer). Ainsi la chaleur et la matière transportées par diffusion du cœur vers le bord, puis du bord vers la SOL, s'écoulent vers le divertor.

Les particules alpha déposent leur énergie principalement sur la population électronique ; les populations électronique et ionique sont le siège :

- de processus de transport dans l'espace réel à travers la diffusion radiale de matière et de chaleur du cœur vers le bord,
- de processus de relaxation dans l'espace des vitesses à travers la thermalisation électrons-ions et le chauffage thermonucléaire des électrons et des ions par les particules alpha.

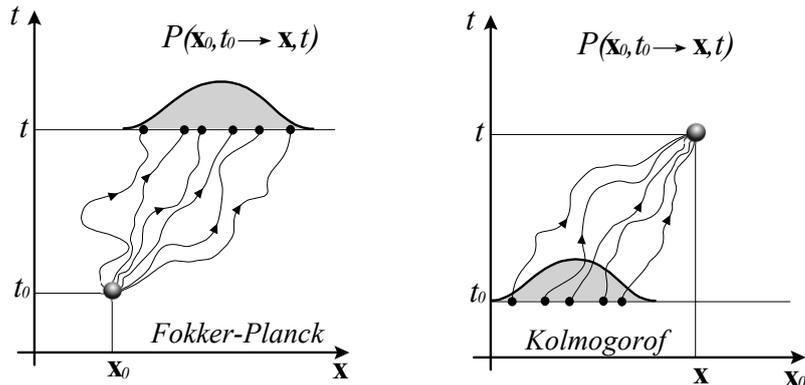
Le rayonnement (R) et l'échange de charges (CX) complètent cet inventaire des processus de relaxation et de transport.

Dans ce chapitre nous allons construire les outils pour étudier ces différents processus dissipatifs à l'œuvre au sein d'un plasma de tokamak. Les collisions coulombiennes sont à l'origine de plusieurs phénomènes de diffusion (vitesses et positions des particules et position du champ magnétique) ; ces processus peuvent être modélisés dans le cadre d'une équation de type Fokker Planck présentée dans ce paragraphe.

2.1 Equation de Landau

2.1.1 Equations de Fokker-Planck et Kolmogorov

Soit $P(\mathbf{x}_0, t_0 \rightarrow \mathbf{x}, t)$ une densité de probabilité de présence de particules dans un espace d'états $[\mathbf{x}]$ quelconques (vitesse, position, énergie, moment cinétique...); $P(\mathbf{x}_0, t_0 \rightarrow \mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$ mesure la probabilité d'observer une particule au voisinage du point \mathbf{x} dans l'élément de volume $d\mathbf{x}$ à un instant $t > t_0$, sachant qu'elle a été observée en \mathbf{x}_0 à l'instant $t_0 < t$.

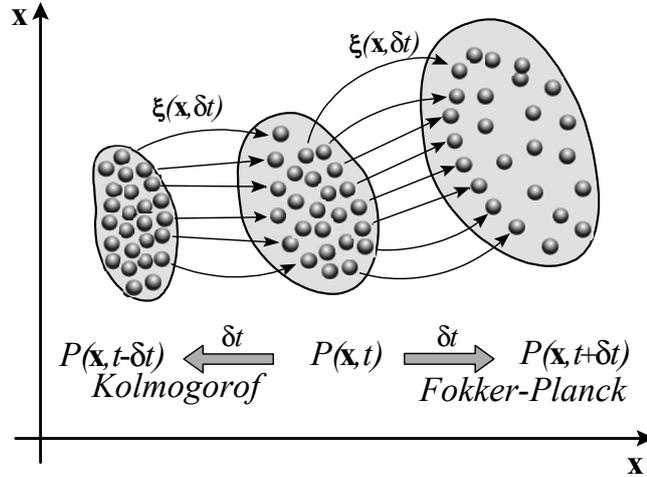


Certains problèmes nécessitent de considérer la distribution $P(\mathbf{x}_0, t_0 \rightarrow \mathbf{x}, t)$ où $P(\mathbf{x}_0, t_0 \rightarrow \mathbf{x}, t) d\mathbf{x}_0$ mesure la probabilité que la particule, observée en \mathbf{x} à l'instant $t > t_0$, provienne du point \mathbf{x}_0 dans l'élément de volume $d\mathbf{x}_0$ à un instant $t_0 < t$. La même fonction $P(\mathbf{x}_0, t_0 \rightarrow \mathbf{x}, t)$, appelée propagateur, répond aux problématiques de ces deux situations. Deux types d'espaces d'états seront considérés lors de l'étude des plasmas thermonucléaires :

- L'espace des états de vitesse (ou d'impulsion) des électrons et ions ; $P(\mathbf{p}, t)$ est alors la fonction de distribution des vitesses : $f(\mathbf{v}, t)$ et son évolution dynamique décrit les processus cinétiques de relaxation vers l'équilibre.
- L'espace des états de position des électrons et ions ; $P(\mathbf{r}, t)$ est alors la densité volumique de particules au point \mathbf{r} à un instant t : $n(\mathbf{r}, t)$.

Considérons l'un de ces deux espaces d'états, ou leur réunion, l'espace dit des phases, notons $[\mathbf{x}]$ la variable d'état et construisons l'équation décrivant l'évolution dynamique de la densité de probabilité de présence d'une particule $P(\mathbf{x}_0, t_0 \rightarrow \mathbf{x}, t)$; au niveau microscopique, la particule qui est en \mathbf{x} à l'instant t est déplacée en $\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \delta t)$ à l'instant $t + \delta t$ et la particule qui est en \mathbf{x} à l'instant t provient de la position $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(\mathbf{y}, \delta t)$ à l'instant $t - \delta t$.

Les déplacements microscopiques $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \delta t)$ sont des variables aléatoires dont nous supposons les deux premiers moments connus : $\langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \delta t) \rangle$ et $\langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \delta t) \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \delta t) \rangle$; les moyennes $\langle \rangle$ sont associées au caractère stochastique des processus de collisions ou d'interactions avec les champs électriques et magnétiques fluctuants.



Le problème de la construction d'un formalisme de description de l'évolution de P est le suivant : connaissant la densité de probabilité de présence $P(\mathbf{x}, t)$, à l'instant t en tout point de l'espace des \mathbf{x} , comment calculer la nouvelle densité $P(\mathbf{x}, t \pm \delta t)$, en tout point de l'espace des \mathbf{x} à l'instant $t \pm \delta t$, résultant des déplacements microscopiques $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \delta t)$ de chaque particule durant la durée δt ?

La probabilité qu'une particule initialement en \mathbf{s} à l'instant t soit en \mathbf{x} à l'instant $t + \delta t$ est donnée par : $\langle \delta[\mathbf{x} - (\mathbf{s} + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{s}, \delta t))] \rangle$, la probabilité qu'une particule en \mathbf{s} à l'instant t provienne du point \mathbf{x} à l'instant $t - \delta t$ est donnée par : $\langle \delta[\mathbf{s} - (\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \delta t))] \rangle$ où δ représente la distribution de Dirac ; ainsi $P(\mathbf{x}, t + \delta t)$ est obtenu en sommant sur toutes les positions initiales \mathbf{s} .

$$P(\mathbf{x}, t) \xrightarrow{\delta t} P(\mathbf{x}, t + \delta t) = \int \langle \delta[(\mathbf{s} + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{s}, \delta t)) - \mathbf{x}] \rangle P(\mathbf{s}, t) d\mathbf{s}$$

$$P(\mathbf{x}, t) \stackrel{\leftarrow}{\frac{\partial}{\partial t}} P(\mathbf{x}, t - \delta t) = \int \langle \delta [\mathbf{s} - (\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \delta t))] \rangle P(\mathbf{s}, t) ds$$

La variation $P(\mathbf{x}, t \pm \delta t) - P(\mathbf{x}, t)$ est supposée suffisamment petite pour permettre un développement de Taylor des *propagateurs* directs $\langle \delta [\mathbf{x} - (\mathbf{s} + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{s}, \delta t))] \rangle$ et inverses $\langle \delta [\mathbf{s} - (\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \delta t))] \rangle$.

$$\begin{aligned} \langle \delta [(\mathbf{s} + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{s})) - \mathbf{x}] \rangle &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) \\ &\quad - \langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{s}) \rangle \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) + \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{s}) \boldsymbol{\xi}(\mathbf{s}) \rangle \cdot \frac{\partial \partial}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) \\ \langle \delta [\mathbf{s} - (\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}))] \rangle &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) \\ &\quad + \langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \rangle \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) + \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \rangle \cdot \frac{\partial \partial}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) \end{aligned}$$

Compte tenu de la parité de la distribution de Dirac, $\delta(a) = \delta(-a)$, les dérivées par rapport à la position \mathbf{x} peuvent être prises par rapport à la position générique \mathbf{s} .

$$\begin{aligned} \langle \delta [\mathbf{x} - (\mathbf{s} + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{s}))] \rangle &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) \\ &\quad + \langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{s}) \rangle \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) + \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{s}) \boldsymbol{\xi}(\mathbf{s}) \rangle \cdot \frac{\partial \partial}{\partial \mathbf{s} \partial \mathbf{s}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) \\ \langle \delta [\mathbf{s} - (\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}))] \rangle &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) \\ &\quad - \langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \rangle \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) + \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \rangle \cdot \frac{\partial \partial}{\partial \mathbf{s} \partial \mathbf{s}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) \end{aligned}$$

La fonction de distribution $P(\mathbf{x}, t \pm \delta t)$, à l'issue la déformation décrite par le champ de déplacements aléatoires $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \delta t)$, est donc donnée par :

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}, t + \delta t) &= \int \left[\delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) + \langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{s}) \rangle \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) + \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{s}) \boldsymbol{\xi}(\mathbf{s}) \rangle \dots \right] P(\mathbf{s}, t) ds \\ P(\mathbf{x}, t - \delta t) &= \int \left[\delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) - \langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \rangle \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) + \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \rangle \dots \right] P(\mathbf{s}, t) ds \end{aligned}$$

Le théorème d'intégration par partie est ensuite utilisé sur chaque terme pour éliminer toutes les dérivées de distributions de Dirac, permettant ainsi d'intégrer les sommes et d'obtenir le résultat final, le taux de variation temporelle de la distribution $[P(\mathbf{x}, t \pm \delta t) - P(\mathbf{x}, t)] / \delta t$ donné par l'équation de Fokker Planck pour prédire l'avenir et l'équation de Kolmogorov pour reconstruire le passé :

$$\text{Fokker-Planck: } \frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}_0, t_0 \rightarrow \mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \rangle}{\delta t} P + \frac{\partial \partial}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \rangle}{2 \delta t} P$$

où les conditions initiales communes aux deux équations expriment le fait que la particule est en $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ lorsque $t = t_0$: $P(\mathbf{x}_0, t_0 \rightarrow \mathbf{x}, t = t_0) = P(\mathbf{x}_0, t_0 = t \rightarrow \mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$.

$$\text{Kolmogorov: } \frac{\partial}{\partial t_0} P(\mathbf{x}_0, t_0 \rightarrow \mathbf{x}, t) = - \frac{\langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}_0) \rangle}{\delta t} \cdot \frac{\partial P}{\partial \mathbf{x}_0} - \frac{\langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}_0) \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}_0) \rangle}{2 \delta t} \cdot \frac{\partial \partial}{\partial \mathbf{x}_0 \partial \mathbf{x}_0} P$$

La situation la plus répandue dans le domaine de l'étude de la dynamique des plasmas thermonucléaires est celle de l'étude de l'évolution future à partir de conditions données, ainsi, nous ferons un usage récurrent de l'équation de Fokker-Planck décrivant cette évolution comme la divergence d'un flux local $(\langle \xi(\mathbf{x}) \rangle / \delta t) P + \partial / \partial \mathbf{x} \cdot (\langle \xi(\mathbf{x}) \xi(\mathbf{x}) \rangle / 2\delta t) P$ présentant deux termes, un terme de convection et un terme de dérive.

Dans ce chapitre, nous étudierons successivement les deux équations de Fokker-Planck associées à l'évolution des densités de probabilité $f(\mathbf{p}, t)$ et $n(\mathbf{r}, t)$ dans les espaces des impulsions (vitesses) et positions et nous exprimerons :

- les coefficients de friction et de diffusion coulombiennes dans l'espace des impulsions, appelés coefficients de Chandrasekhar. Ces coefficients permettent de construire l'équation cinétique, décrivant la dynamique de la fonction de distribution des impulsions $f(\mathbf{p}, t)$

$$\text{Chauffage} \rightarrow \text{Equation cinétique} : \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{p} \rangle}{\delta t} f + \frac{\partial \partial}{\partial \mathbf{p} \partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{p} \delta \mathbf{p} \rangle}{2\delta t} f$$

- les coefficients de mobilité et de diffusion dans l'espace des positions. Ces coefficients permettent de construire l'équation de transport décrivant l'évolution de la densité $n(\mathbf{r}, t)$ en fonction de la position et du temps.

$$\text{Confinement} \rightarrow \text{Equation de transport} : \frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{r} \rangle}{\delta t} n + \frac{\partial \partial}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{r} \delta \mathbf{r} \rangle}{2\delta t} n$$

Les deux problématiques centrales du problème de la combustion thermonucléaire étant le confinement et le chauffage, on comprend aisément que l'évolution dans l'espace des impulsions (vitesses), c'est-à-dire le chauffage ou le refroidissement d'une population, et son évolution dans l'espace des positions, constituent les formulations dynamiques adéquates pour aborder ces problématiques.

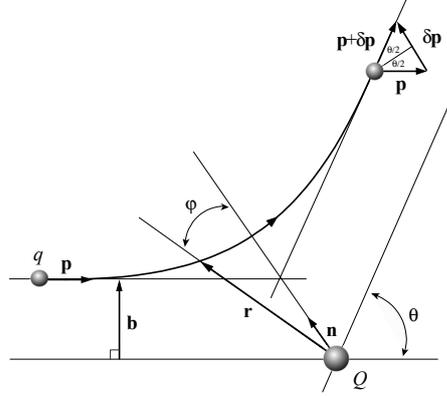
Nous allons évaluer, dans un premier temps, les coefficients de friction et de diffusion dans l'espace des impulsions. Pour ce faire, considérons le problème de la diffusion Rutherford.

2.1.2 Diffusion Rutherford

Considérons une particule chargée, de masse m et de charge q , interagissant avec un centre diffuseur constitué par une charge fixe Q . Initialement ($t = -\infty$), bien avant l'interaction ($t \approx 0$), cette particule possède une impulsion (quantité de mouvement) \mathbf{p} , puis, bien après ($t = +\infty$) l'interaction coulombienne avec la charge Q , une impulsion $\mathbf{p} + \delta \mathbf{p}$. Entre ces deux états asymptotiques la particule décrit une trajectoire hyperbolique. Notons \mathbf{n} le vecteur unitaire dirigeant l'axe de symétrie de cette hyperbole, \mathbf{b} le vecteur paramètre d'impact et θ l'angle de déflexion entre les états asymptotiques \mathbf{p} et $\mathbf{p} + \delta \mathbf{p}$. Le vecteur position de la charge mobile par rapport à la charge fixe est noté $\mathbf{r}(t)$ et l'angle entre \mathbf{r} et \mathbf{n} est repéré par $\varphi(t)$. L'incrément total d'impulsion $\delta \mathbf{p}$ est égal à la somme des incréments infinitésimaux entre $t = +\infty$ et $t = -\infty$.

$$\delta \mathbf{p} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathbf{p}}{dt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{qQ\mathbf{r}(t)}{4\pi\epsilon_0 r^3(t)} dt \equiv \delta p \mathbf{n}$$

La trajectoire hyperbolique étant symétrique par rapport à \mathbf{n} le transfert total d'impulsion perpendiculairement à \mathbf{n} est nul.



En effet, la projection de la force de Coulomb perpendiculairement à \mathbf{n} est alternativement positive (négative) puis négative (positive) sur les deux demi-hyperboles. Ainsi le transfert total est dirigé suivant \mathbf{n} . La valeur de cette variation d'impulsion δp peut être exprimée en fonction de l'angle de déflexion θ en considérant la relation $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = r \cos \varphi$.

$$\delta p = 2 \int_{-\infty}^0 \frac{qQ \cos \varphi(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2(t)} dt = \frac{qQ}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{\frac{\pi-\theta}{2}} \frac{\cos \varphi}{r^2 \left| \frac{d\varphi}{dt} \right|} d\varphi$$

L'interaction coulombienne étant une force centrale, le moment cinétique est conservé : $|m\mathbf{v}(t) \times \mathbf{r}(t)| = mr^2 |d\varphi/dt| = |\mathbf{p} \times \mathbf{b}| = pb$ où $b = |\mathbf{b}|$. Substituons la valeur de $r^2 |d\varphi/dt|$ ainsi obtenue dans l'identité précédente, la variation totale d'impulsion s'exprime alors comme :

$$\delta p = \frac{qQm}{2\pi\epsilon_0 pb} \cos \frac{\theta}{2} \rightarrow \frac{\delta p}{p} = \frac{\lambda_L}{b} \cos \frac{\theta}{2}$$

où, pour une impulsion incidente p donnée, nous avons défini la distance minimum d'approche, correspondant au choc frontal $\theta = \pi$ ($b = 0$), aussi appelée longueur de Landau λ_L .

$$\text{Longueur de Landau : } \lambda_L(p) \equiv \frac{qQm}{2\pi\epsilon_0 p^2}$$

Le problème que nous étudions est conservatif car le potentiel coulombien est indépendant du temps ; l'énergie cinétique initiale à $t = -\infty$ est donc égale à l'énergie cinétique finale à $t = +\infty$; en effet, l'énergie potentielle est nulle pour ces deux états asymptotiques ($r = \pm\infty$) : $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p} + \delta\mathbf{p}|$. Le triangle $[\mathbf{p}, \mathbf{p} + \delta\mathbf{p}, \delta\mathbf{p}]$ est donc isocèle ; la hauteur et la médiane abaissées sur $\delta\mathbf{p}$ sont confondues et δp s'exprime simplement en fonction de l'angle de déflexion θ .

$$\frac{\delta p}{p} = 2 \sin \frac{\theta}{2}$$

Éliminons l'angle de déflexion θ entre les identités $\delta p = p\lambda_L \cos \frac{\theta}{2}/b$ et $\delta p = 2p \sin \frac{\theta}{2}$ et exprimons la variation d'impulsion δp , résultant de la diffusion Rutherford sur un centre coulombien fixe, en fonction de l'impulsion initiale p et du paramètre d'impact b .

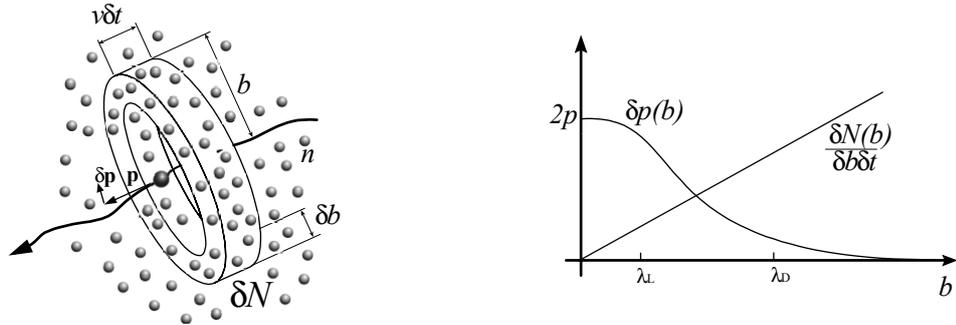
$$\frac{\delta p}{p} = \frac{2\lambda_L/b}{\sqrt{4 + (\lambda_L/b)^2}}$$

Compte tenu de la relation $\mathbf{n} = \cos \frac{\theta}{2} \frac{\mathbf{b}}{b} - \sin \frac{\theta}{2} \frac{\mathbf{p}}{p}$ la variation totale d'impulsion $\delta p \mathbf{n}$ peut aussi s'exprimer comme :

$$\text{Diffusion Rutherford: } \frac{\delta \mathbf{p}}{p} = \left(\frac{\delta p}{p} \right)^2 \frac{\mathbf{b}}{\lambda_L} - \left(\frac{\delta p}{p} \right)^2 \frac{\mathbf{p}}{2p}$$

La force de Coulomb décroissant comme le carré de la distance entre les charges, l'essentiel de la variation d'impulsion s'effectue dans la partie courbe de la trajectoire hyperbolique, les deux branches asymptotiques pouvant être assimilées à des mouvements de translation uniforme. Dans un plasma, une particule n'interagit pas avec une autre particule unique, mais avec un ensemble de centres diffuseurs.

Pendant une durée infinitésimale δt il faut donc sommer les effets de l'ensemble des collisions avec ces centres diffuseurs sur le trajet $v \delta t$ où $v = p/m$. La densité volumique de centres diffuseurs n est supposée uniforme ; pendant une durée infinitésimale δt le nombre d'interactions δN avec les centres situés entre une distance b et une distance $b + \delta b$ est donné par : $\delta N = n v \delta t 2\pi b \delta b$. Le taux de variation temporelle de l'impulsion est proportionnel à la somme suivant b du produit du transfert par un centre unique $\delta p(b)$ par le nombre de centres diffuseurs $\delta N(b)$ dans la couronne cylindrique de rayons b et $b + \delta b$ et d'épaisseur $v \delta t$. La fonction $\delta p(b)$ est une fonction décroissante avec b qui présente un maximum, $\delta p = 2p$, pour $b = 0$. Par contre, la fonction $\delta N(b) / \delta b \delta t$ est une fonction croissante qui est nulle en $b = 0$ et devient infinie lorsque b tend vers l'infini. Ce comportement à l'infini ne présente pas de signification physique car nous savons que l'interaction coulombienne dans un plasma est exponentiellement faible au-delà de la longueur de Debye λ_D .



Il est donc inutile de sommer le produit $\delta p(b) \delta N(b) / \delta b \delta t$ au-delà de $b = \lambda_D$; il est tout aussi inutile de prendre en compte les petites valeurs de b entre 0 et λ_L car le facteur $\delta N(b) / \delta b \delta t$ est négligeable pour cette gamme de paramètres d'impacts. Physiquement cette dernière approximation traduit le fait suivant : les collisions présentant un petit paramètre d'impact ($b \approx 0$) sont certes violentes ($\delta p \approx p$), mais elles sont extrêmement rares ($\delta N(b) / \delta b \delta t \approx 0$). Le facteur géométrique $\delta N(b) / \delta b \delta t$ étant dominant par rapport au facteur dynamique $\delta p(b)$, il est donc légitime de négliger les collisions aux petits paramètres d'impacts ($b < \lambda_L$) et de considérer l'approximation des petits transferts d'impulsion : $\lambda_L / b < 1 \rightarrow \delta p / p < 1$.

$$\frac{\delta \mathbf{p}}{p} = \frac{\lambda_L}{b} \frac{\mathbf{b}}{b} - \frac{\lambda_L^2}{b^2} \frac{\mathbf{p}}{2p} + 0 \left(\frac{\lambda_L^3}{b^3} \right)$$

Pour certaines conditions de température, la description classique tombe en défaut pour les petits paramètres d'impacts, lorsque la longueur de de Broglie de la particule, $\lambda_B = \hbar/p$, est plus grande que la longueur de Landau ; les collisions aux petits paramètres d'impacts doivent alors être décrites dans un cadre quantique. Mais l'argument justifiant la dominance des collisions aux grands b reste valable, et la somme sur b doit alors être restreinte à l'intervalle $\lambda_B < b < \lambda_D$. Définissons la longueur de coupure λ_C :

$$\lambda_C = \max \left[\lambda_L = \frac{qQm}{2\pi\epsilon_0 p^2} \approx \frac{10^{-9} [\text{m}]}{T [\text{eV}]}, \lambda_B = \frac{\hbar}{p} \approx \frac{10^{-10} [\text{m}]}{\sqrt{T [\text{eV}]}} \right]$$

où T désigne la température. Dans la suite de cette étude nous considérerons uniquement les collisions aux grands paramètres d'impact : $\lambda_C < b < \lambda_D$, indépendamment de la nature classique ou quantique de la longueur de coupure λ_C .

Afin d'évaluer la friction coulombienne $\langle \delta \mathbf{p} \rangle / \delta t$ et le tenseur de diffusion coulombienne $\langle \delta \mathbf{p} \delta \mathbf{p} \rangle / 2\delta t$, il est nécessaire de sommer, pendant une durée infinitésimale δt , l'effet total de l'ensemble des collisions se déroulant sur le trajet $v\delta t$. Il faut donc intégrer les effets de tous les centres diffuseurs se trouvant dans une couronne cylindrique d'épaisseur $v\delta t$, de rayon maximum égal à la longueur de Debye λ_D et de rayon minimum égal à la longueur de coupure λ_C ; cette somme est notée $\langle \rangle$.

Une telle intégrale sur le vecteur $p\lambda_L \mathbf{b}/b^2$ donne un résultat nul car les probabilités de déflexion vers le haut, vers le bas, vers la gauche et vers la droite sont égales : considérons la représentation polaire $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ du vecteur unitaire \mathbf{b}/b dans le plan perpendiculaire au vecteur \mathbf{p} . La moyenne sur l'angle α donne $\langle \mathbf{b}/b \rangle = \mathbf{0}$. Ainsi le terme de friction coulombienne $\langle \delta \mathbf{p} \rangle / \delta t$ se réduit à une composante unique suivant \mathbf{p}

$$\frac{\langle \delta \mathbf{p} \rangle}{\delta t} = - \int_{\lambda_C}^{\lambda_D} \frac{\delta N}{\delta b \delta t} \frac{\lambda_L^2}{2b^2} \mathbf{p} db = - \mathbf{p} \frac{\pi n p \lambda_L^2}{m} \int_{\lambda_C}^{\lambda_D} \frac{db}{b} = - \frac{nmq^2 Q^2 \Lambda}{4\pi\epsilon_0^2 p^3} \mathbf{p}$$

où nous avons introduit le logarithme coulombien $\Lambda = \log [\lambda_D/\lambda_C]$, typiquement $10 < \Lambda < 20$. Pour le calcul du tenseur de diffusion $\langle \delta \mathbf{p} \delta \mathbf{p} \rangle / 2\delta t$, à l'ordre le plus bas en $\lambda_L/b < 1$, nous considérons uniquement les termes suivant $\mathbf{b}\mathbf{b}/b^2$, les termes en $\mathbf{b}\mathbf{p}$ et $\mathbf{p}\mathbf{p}$ étant d'ordres supérieurs en λ_L/b . La représentation polaire du vecteur unitaire \mathbf{b}/b dans le plan perpendiculaire au vecteur \mathbf{p} permet d'établir :

$$\frac{\mathbf{b}}{b} = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0) \rightarrow \left\langle \frac{\mathbf{b}\mathbf{b}}{b^2} \right\rangle = \frac{\mathbf{I}p^2 - \mathbf{p}\mathbf{p}}{2p^2}$$

où \mathbf{I} est l'opérateur identité. L'expression du coefficient de diffusion se réduit donc à :

$$\frac{\langle \delta \mathbf{p} \delta \mathbf{p} \rangle}{2\delta t} = \int_{\lambda_C}^{\lambda_D} \frac{\delta N}{2\delta b \delta t} \left(p \frac{\lambda_L}{b} \right)^2 \left\langle \frac{\mathbf{b}\mathbf{b}}{b^2} \right\rangle db = \frac{nmq^2 Q^2 \Lambda}{8\pi\epsilon_0^2 p^3} (\mathbf{I}p^2 - \mathbf{p}\mathbf{p})$$

La forme fonctionnelle des coefficients de friction et de diffusion nous amène à définir la fréquence de collision ν .

$$\text{Fréquence de collision : } \nu(v) \equiv \frac{nq^2 Q^2 \Lambda}{4\pi\epsilon_0^2 m^2 v^3} \rightarrow \nu \approx \left[\frac{10^{-5}}{\text{Hz}} \right] \left[\frac{n}{\text{cm}^{-3}} \right] \left[\frac{2 \text{ eV}}{mv^2} \right]^{\frac{3}{2}}$$

Ainsi les deux coefficients, appelés coefficients de Chandrasekhar, s'expriment comme une simple friction et un tenseur isotrope dans le plan perpendiculaire à \mathbf{p} .

$$\text{Friction} : \frac{\langle \delta \mathbf{p} \rangle}{\delta t} = -\nu(p) \mathbf{p} \quad \text{Diffusion} : \frac{\langle \delta \mathbf{p} \delta \mathbf{p} \rangle}{2\delta t} = \nu(p) \frac{\mathbf{I}p^2 - \mathbf{p}\mathbf{p}}{2}$$

Ce résultat appelle plusieurs remarques.

- Notons d'abord une relation remarquable entre le coefficient de diffusion et le coefficient de friction :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \left[\frac{\mathbf{I}p^2 - \mathbf{p}\mathbf{p}}{2p^3} \right] = -\frac{\mathbf{p}}{p^3} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{p} \delta \mathbf{p} \rangle}{2\delta t} = \frac{\langle \delta \mathbf{p} \rangle}{\delta t}$$

cette relation sera mise à profit lors de la construction et de l'étude de l'équation cinétique de Landau.

- Nous venons de traiter le cas de la diffusion Rutherford sur un centre fixe, or, dans un plasma thermonucléaire, toutes les particules sont en mouvement, aussi le modèle précédent doit être complété pour décrire la dynamique des populations chargées cibles. Une telle étude complète est présentée dans le chapitre consacré à la relaxation cinétique. Néanmoins, compte tenu de la différence de masse entre électrons et ions et de la différence de vitesse moyenne résultante, les résultats précédents sont pertinents pour décrire la cinétique des électrons dans les tokamaks.

- Le logarithme coulombien pour les transferts d'impulsion électron-ion, dans la gamme des températures caractéristiques du bord et du centre d'un plasma de tokamak est donné par $T \lesssim 50\text{eV} : \Lambda \approx 23.4 - 1,15 \times \ln n [\text{cm}^{-3}] + 3.45 \times \ln T [\text{eV}]$ et $T \gtrsim 50\text{eV} : \Lambda \approx 25.3 - 1,15 \times \ln n [\text{cm}^{-3}] + 2.30 \times \ln T [\text{eV}]$.

- Au-delà de la longueur de Debye, les interactions collisionnelles sont négligeables mais les interactions collectives doivent être prises en compte. Ces interactions se manifestent, entre autres, par l'émission spontanée d'ondes plasmas. Pour une particule se déplaçant à vitesse constante cette émission Cerenkov induit un ralentissement supplémentaire dont la dépendance fonctionnelle en les différents paramètres est similaire au cas collisionnel. Ce terme supplémentaire se traduit donc uniquement par une faible modification du logarithme coulombien Λ .

- Il existe, non pas une fréquence de collision coulombienne dans un plasma thermonucléaire, mais un ensemble de fréquences de collisions correspondant aux interactions : ion-ion, électron-électron, électron-ion et aux processus tels que : le ralentissement, l'isotropisation et la thermalisation. La fréquence ν identifiée dans ce paragraphe est la fréquence d'isotropisation électrons-ions pour une vitesse donnée. La moyenne de cette fréquence sur une distribution de Maxwell,

$$\nu_{e \rightarrow i} \equiv \frac{Zn_e e^4 \Lambda}{3\varepsilon_0^2 m_e^2} \left(\frac{2\pi k_B T_e}{m_e} \right)^{-\frac{3}{2}} \rightarrow \nu_{e \rightarrow i} \approx \left[\frac{1.6 \times 10^{-15}}{\text{Hz}} \right] \left[\frac{n}{\text{m}^{-3}} \right] \left[\frac{\text{keV}}{T} \right]^{\frac{3}{2}}$$

et son adaptation au cas ionique permet de définir les fréquences de collisions électroniques et ioniques standards :

$$\nu_{e \rightarrow e} \approx \nu_{e \rightarrow i}, \sqrt{m_i} \nu_{i \rightarrow i} \approx \sqrt{m_e} \nu_{e \rightarrow i}, m_i \nu_{i \rightarrow e} = m_e \nu_{e \rightarrow i}$$

où le facteur $\sqrt{m_e/m_i}$ résulte du rapport des vitesses thermiques qui déterminent le flux incident donc le taux de collisions. La fréquence ν_{ei} est extrêmement importante en physique des plasmas thermonucléaires car elle détermine les conductivités électriques et thermiques électroniques (en l'absence de turbulence). Le fait que cette fréquence diminue avec T peut paraître contre-intuitif en première analyse, mais une réflexion sur la nature des transferts lors d'une collision permet de préciser ce point : le transfert d'impulsion dans une collision est proportionnel au temps d'interaction, or, plus un électron est rapide, plus ce temps est court, donc la quantité de mouvement échangée diminue avec la vitesse.

2.2 Relaxations ionique et électronique

2.2.1 Ralentissement des ions rapides

Le ralentissement des ions rapides au sein d'un plasma thermonucléaire constitue un problème important dans le contexte du chauffage ; que ce soit (i) les ions hydrogène présentant une énergie de l'ordre de la centaine de KeV, injectés dans les tokamaks pour déposer leur énergie afin d'atteindre la température d'allumage, ou, après allumage, (ii) les particules alpha, présentant une énergie de 3.5 MeV résultant des réactions de fusion, le ralentissement de ces ions suprathermiques et l'étude du transfert d'énergie cinétique vers le plasma relève de la théorie du ralentissement que nous allons développer dans ce paragraphe.

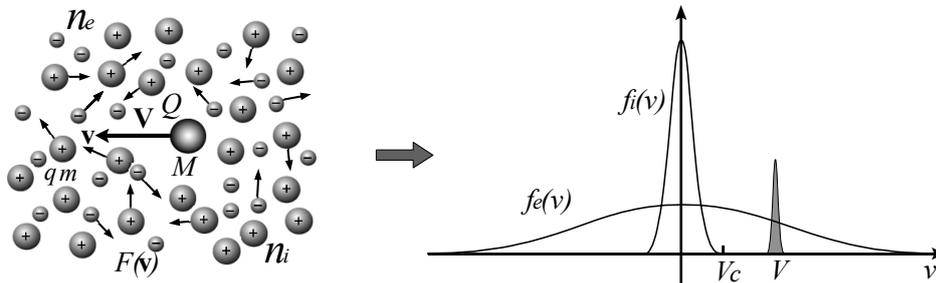
L'équation du ralentissement d'un ion rapide, interagissant avec une population ionique et une population électronique, peut être établie à partir des coefficients de friction et de diffusion comme suit :

$$\frac{dV^2}{dt} = \frac{\langle [\mathbf{V} + \delta\mathbf{V}(\delta t)]^2 - V^2 \rangle}{\delta t \rightarrow 0} = 2\mathbf{V} \cdot \frac{\langle \delta\mathbf{V} \rangle}{\delta t} + \frac{\langle \delta\mathbf{V} \cdot \delta\mathbf{V} \rangle}{\delta t}$$

La décélération collisionnelle est donc décrite par l'équation :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\mathbf{V}}{V} \cdot \frac{\langle \delta\mathbf{V} \rangle}{\delta t} + \frac{1}{V} \text{Tr} \frac{\langle \delta\mathbf{V} \delta\mathbf{V} \rangle}{2\delta t}$$

où Tr désigne la trace de la matrice $\langle \delta\mathbf{V} \delta\mathbf{V} \rangle / 2\delta t$. Nous avons étudié l'expression du taux de destruction de l'impulsion d'une particule de vitesse \mathbf{V} , de masse M et de charge q par une population au repos de charge Q et de densité n , $\langle \delta\mathbf{V} \rangle / \delta t = -nq^2Q^2\Lambda\mathbf{V}/4\pi\epsilon_0^2M^2V^3$. Au sein d'un plasma thermonucléaire les vitesses des électrons et des ions sont réparties suivant une distribution de Maxwell et il est donc nécessaire d'adapter la relation $\langle \delta\mathbf{V} \rangle / \delta t = -nq^2Q^2\Lambda\mathbf{V}/4\pi\epsilon_0^2M^2V^3$ au cas d'une collision sur une cible mobile de vitesse \mathbf{v} pour évaluer le ralentissement des ions rapides sur un plasma thermonucléaire chaud.



Le problème de l'interaction entre deux particules, couplées par un potentiel $U(\mathbf{r})$, de masses respectives M et m et de vitesses respectives \mathbf{V} et \mathbf{v} , peut être résolu en considérant la vitesse du centre de masse \mathbf{v}_B et la vitesse relative \mathbf{v}_R .

$$\mathbf{v}_B \equiv \frac{M\mathbf{V} + m\mathbf{v}}{M + m}, \quad \mathbf{v}_R \equiv \mathbf{V} - \mathbf{v}, \quad \mu \equiv \frac{mM}{M + m}$$

Suivant cette décomposition classique le centre de masse effectue un mouvement de translation uniforme et la vitesse relative effectue un mouvement varié suivant le potentiel d'interaction $U(\mathbf{r})$, la masse associée à ce mouvement relatif étant la masse effective ou fictive μ . Ainsi, considérant les deux états asymptotiques, bien avant la collision (interaction) et bien après la collision, les variations de vitesses associées à la collision peuvent être déduites des variations de vitesses du problème décomposé : $\delta\mathbf{v}_B = \mathbf{0}$ et $\delta\mathbf{v}_R \neq \mathbf{0}$.

$$\mathbf{V} = \mathbf{v}_B + \frac{\mu}{M}\mathbf{v}_R \rightarrow \delta\mathbf{V} = \frac{\mu}{M}\delta\mathbf{v}_R$$

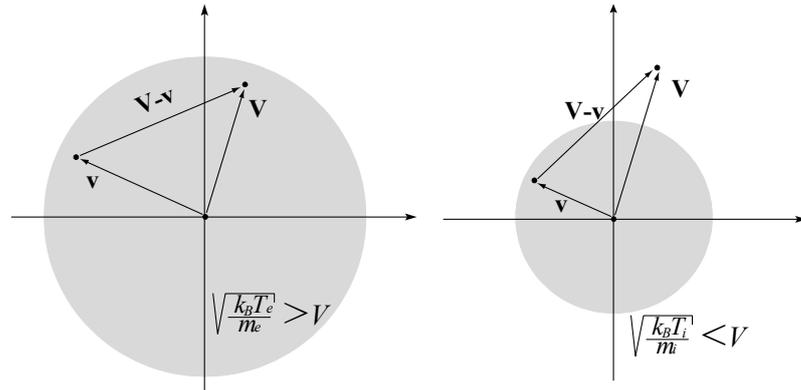
Les relations explicitant la friction et la diffusion sont donc aisément adaptables au problème de la collision coulombienne de deux particules en mouvement, un ion rapide de vitesse \mathbf{V} et une particule thermique de vitesse \mathbf{v} .

$$\begin{aligned} \frac{\langle \delta\mathbf{v}_R \rangle}{\delta t} &= -\frac{nq^2Q^2\Lambda}{4\pi\epsilon_0^2\mu^2} \frac{\mathbf{v}_R}{v_R^3} \rightarrow \frac{\langle \delta\mathbf{V} \rangle}{\delta t} = -\frac{nq^2Q^2\Lambda}{4\pi\epsilon_0^2\mu M} \frac{\mathbf{V} - \mathbf{v}}{|\mathbf{V} - \mathbf{v}|^3} \\ \frac{\langle \delta\mathbf{v}_R\delta\mathbf{v}_R \rangle}{2\delta t} &= \frac{nq^2Q^2\Lambda}{4\pi\epsilon_0^2\mu^2} \frac{\mathbf{I}v_R^2 - \mathbf{v}_R\mathbf{v}_R}{2v_R^3} \rightarrow \text{Tr} \frac{\langle \delta\mathbf{V}\delta\mathbf{V} \rangle}{2\delta t} = \frac{nq^2Q^2\Lambda}{4\pi\epsilon_0^2M^2} \frac{1}{|\mathbf{V} - \mathbf{v}|} \end{aligned}$$

Ces deux relations sont ensuite sommées sur la fonction de distribution des vitesses des particules thermiques : $F(\mathbf{v}) = (\pi v_T^2)^{-\frac{3}{2}} \exp(-v^2/v_T^2)$.

$$\begin{aligned} \frac{\langle \delta\mathbf{V} \rangle}{\delta t} &= -\left(\frac{nq^2Q^2\Lambda}{4\pi\epsilon_0^2\mu M} \right) (\pi v_T^2)^{-\frac{3}{2}} \int \exp\left(-\frac{v^2}{v_T^2}\right) \frac{\mathbf{V} - \mathbf{v}}{|\mathbf{V} - \mathbf{v}|^3} d\mathbf{v} \\ \text{Tr} \frac{\langle \delta\mathbf{V}\delta\mathbf{V} \rangle}{2\delta t} &= \left(\frac{nq^2Q^2\Lambda}{4\pi\epsilon_0^2M^2} \right) (\pi v_T^2)^{-\frac{3}{2}} \int \frac{\exp\left(-\frac{v^2}{v_T^2}\right)}{|\mathbf{V} - \mathbf{v}|} d\mathbf{v} \end{aligned}$$

L'intégrale sur les vitesses électroniques apparaissant dans l'évaluation de la friction peut être interprétée dans un cadre électrostatique. En effet, considérons les vitesses comme des positions, alors l'intégrand décrit une force centrale proportionnelle au carré de l'inverse de la distance, et l'intégrale la somme de telles forces pour une distribution isotrope. Nous pouvons donc appliquer le théorème de Gauss avec, comme surface de Gauss, une sphère centrée à l'origine $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.



Ainsi, le calcul du coefficient de friction est simplifié pour les cas des ions suprathermiques et subthermiques.

$$\begin{aligned}
 V > v_T &\rightarrow \int \exp\left(-\frac{v^2}{v_T^2}\right) \frac{\mathbf{V} - \mathbf{v}}{|\mathbf{V} - \mathbf{v}|^3} d\mathbf{v} \approx \frac{\mathbf{V}}{V^3} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{v^2}{v_T^2}\right) 4\pi v^2 dv = \pi^{\frac{3}{2}} \frac{v_T^3}{V^3} \mathbf{V} \\
 V < v_T &\rightarrow \int \exp\left(-\frac{v^2}{v_T^2}\right) \frac{\mathbf{V} - \mathbf{v}}{|\mathbf{V} - \mathbf{v}|^3} d\mathbf{v} \approx \frac{\mathbf{V}}{V^3} \int_0^V 4\pi v^2 dv = \frac{4}{3}\pi \mathbf{V}
 \end{aligned}$$

Le cas de la diffusion peut être traité en remarquant que l'analogie électrostatique est aussi recevable, mais en considérant une intégrale de potentiel électrostatique, le coefficient de friction étant analogue à une intégrale de champ en vertu de la relation : $-\partial|\mathbf{V} - \mathbf{v}|^{-1}/\partial\mathbf{V} = \mathbf{V} - \mathbf{v}/|\mathbf{V} - \mathbf{v}|^3$; les deux asymptotiques haute et basse vitesse sont donc données par :

$$\begin{aligned}
 V > v_T &\rightarrow \int \frac{\exp\left(-\frac{v^2}{v_T^2}\right)}{|\mathbf{V} - \mathbf{v}|} d\mathbf{v} \approx \pi^{\frac{3}{2}} \frac{v_T^3}{V} \\
 V < v_T &\rightarrow \int \frac{\exp\left(-\frac{v^2}{v_T^2}\right)}{|\mathbf{V} - \mathbf{v}|} d\mathbf{v} \approx 2\pi \left(v_T^2 - \frac{V^2}{3}\right)
 \end{aligned}$$

Ces deux asymptotiques peuvent être raccordées par une simple représentation sous forme de fraction rationnelle :

$$\begin{aligned}
 \int \exp\left(-\frac{v^2}{v_T^2}\right) \frac{\mathbf{V} - \mathbf{v}}{|\mathbf{V} - \mathbf{v}|^3} d\mathbf{v} &\approx \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\frac{V^3}{v_T^3} + \frac{3\sqrt{\pi}}{4}} \mathbf{V} \\
 \int \frac{\exp\left(-\frac{v^2}{v_T^2}\right)}{|\mathbf{V} - \mathbf{v}|} d\mathbf{v} &\approx \frac{\pi^{\frac{3}{2}} v_T^2}{\frac{V}{v_T} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}}
 \end{aligned}$$

Le cas des ions rapides dans les tokamaks est particulièrement simple car la vitesse caractéristique de ces ions est intermédiaire entre les vitesses thermique ionique et électronique : $\sqrt{2k_B T_e/m_e} > V > \sqrt{2k_B T_i/m_i}$, aussi, il est d'usage de considérer les deux limites haute et basse vitesse pour étudier le ralentissement et le dépôt d'énergie.

$$\begin{aligned}
 \text{Ions thermiques} & : \quad V > \sqrt{\frac{2k_B T_i}{m_i}} \rightarrow \left. \frac{\langle \delta \mathbf{V} \rangle}{\delta t} \right|_{i/i} = -\frac{n_i Q^2 Z^2 e^2 \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2 \mu_i M} \frac{\mathbf{V}}{V^3} \\
 \text{Electrons thermiques} & : \quad V < \sqrt{\frac{2k_B T_e}{m_e}} \rightarrow \left. \frac{\langle \delta \mathbf{V} \rangle}{\delta t} \right|_{i/e} = -\frac{n_e Q^2 e^2 \Lambda}{3\varepsilon_0^2 \mu_e M} \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \mathbf{V}
 \end{aligned}$$

où les masses effectives électronique et ionique sont notées $\mu_i = Mm_i/(M + m_i)$ et $\mu_e = Mm_e/(M + m_e) \sim m_e$. L'ordering des masses : $M \sim m_i \gg m_e$ et les hypothèses : $\sqrt{2k_B T_e/m_e} > V > \sqrt{2k_B T_i/m_i}$ impliquent $MV^2 \sim m_i V^2 \gg k_B T \sim m_e v_T^2$, ainsi, le terme de diffusion électronique est donc négligeable devant le terme de friction électronique et la loi de ralentissement, prenant en compte les populations ionique et électronique, est donnée par :

$$\frac{dV}{dt} = - \underbrace{\frac{n_i Z^2 e^2 Q^2 \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2 m_i M}}_{\text{Ions}} V^{-2} - \underbrace{\frac{n_e e^2 Q^2 \Lambda}{3\varepsilon_0^2 m_e M} \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}}}_{\text{Electrons}} V$$

L'équation différentielle décrivant le ralentissement présente deux termes, le terme électronique, dominant à haute vitesse, et le terme ionique dominant à basse vitesse. La transition entre ces deux régimes définit la vitesse critique V_c et le temps caractéristique de décélération définit le temps de ralentissement τ_S .

$$\begin{aligned} \text{Vitesse critique} & : \quad V_c^3 \equiv \frac{3Z\sqrt{\pi} 2k_B T}{4 m_i} \sqrt{\frac{2k_B T}{m_e}} \\ \text{Temps de ralentissement} & : \quad \tau_S \equiv \frac{3\pi^{\frac{3}{2}} \varepsilon_0^2 m_i M 2k_B T}{n_e e^2 Q^2 \Lambda m_i} \sqrt{\frac{2k_B T}{m_e}} \end{aligned}$$

Sur la base de ces deux définitions, l'équation du ralentissement prend la forme simple :

$$\frac{dV}{dt} = - \left(\frac{V_c^3 + V^3}{V^3} \right) \frac{V}{\tau_S}$$

et peut être intégrée à partir d'une vitesse initiale $V(t=0) = V_0$.

$$V(t) = \left[V_0^3 \exp -\frac{3t}{\tau_S} + V_c^3 \left(\exp -\frac{3t}{\tau_S} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{3}}$$

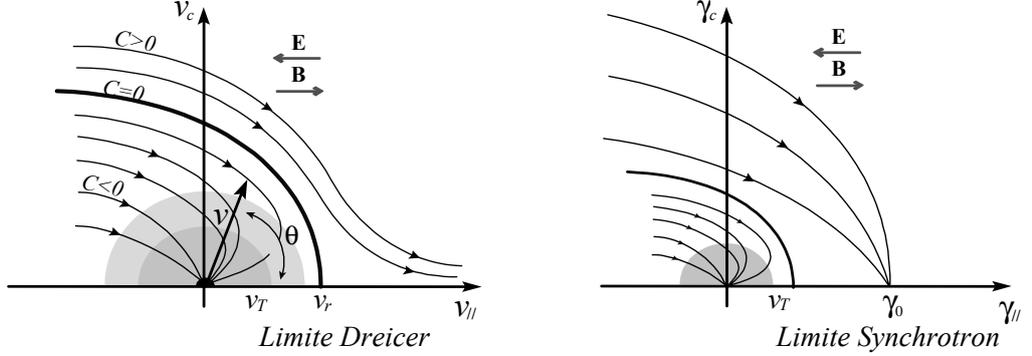
Les ions suprathermiques piégés à travers l'échange de charges des neutres rapides injectés au sein du plasma, ainsi que les particules alpha, suivent cette loi de ralentissement, dans le dernier paragraphe nous analyserons, sur la base de ce résultat, la nature du dépôt d'énergie sur les différentes populations thermiques.

2.2.2 Electrons runaway

La décroissance du terme de friction collisionnelle avec la vitesse est à l'origine du phénomène de production d'électrons dit *runaway* car l'accélération électrique peut, à partir d'une certaine vitesse critique être plus importante que la décélération collisionnelle. Ces particules apparaissent dans les décharges basse densité lorsque le champ électrique inductif toroïdal \mathbf{E} engendre une force de Coulomb supérieure à la force de friction collisionnelle $-\nu \mathbf{v}$ (les disruptions majeures du plasma génèrent aussi des *runaway*).

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = - \underbrace{\frac{n_i Z^2 e^4 \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2 m^2} \frac{\mathbf{v}}{v^3}}_{\text{Friction}} - \underbrace{\frac{e\mathbf{E}}{m}}_{\text{Accélération}}$$

La force de friction $-\nu(v) \mathbf{v}$ décroissant avec la vitesse, il existe, pour un champ électrique \mathbf{E} donné, un seuil de vitesse tel que l'accélération coulombienne $e\mathbf{E}/m$ domine la friction, au-delà de ce seuil, l'électron étant accéléré, sa vitesse augmente et la friction diminue comme le cube de cette vitesse. On est donc en présence d'une instabilité où les effets amplifient les causes qui leur donnent naissance.



L'équation de Newton traduisant la dynamique associée à ces deux forces permet d'identifier le seuil de vitesse critique au-delà duquel les électrons énergétiques se découplent ainsi de la population thermique basse énergie.

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{n_i Z^2 e^4 \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m^2 v^2} + \frac{eE}{m} \cos \theta, \quad \frac{d \cos \theta}{dt} = \frac{eE \sin^2 \theta}{m v}$$

Ce système de deux équations à deux inconnues admet un invariant du mouvement $C(\theta, v)$ permettant de distinguer deux régimes dynamiques : (i) l'ensemble d'orbites *runaway* $C > 0$ où le découplage et l'accélération par le champ électrique entraînent les particules vers $v_{\parallel} \rightarrow +\infty$ et (ii) les orbites couplées $C < 0$ où la friction maintient les électrons dans la zone thermique. La transition entre ces deux classes d'orbites est constituée par une séparatrice d'équation $C = 0$.

$$C = v^2 \sin^2 \theta - 2 \frac{n_i Z^2 e^3 \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 E m} (1 - \cos \theta) = v_c^2 \sqrt{v_{\parallel}^2 + v_c^2} - \frac{n_i Z^2 e^3 \Lambda}{2\pi \epsilon_0^2 E m} \left(\sqrt{v_{\parallel}^2 + v_c^2} - v_{\parallel} \right)$$

Plutôt qu'un seuil de vitesse v_r pour un champ donné, il est d'usage de définir un seuil de champ ou champ critique pour une vitesse donnée prise égale à la vitesse thermique. L'intersection de la séparatrice avec l'axe des vitesses parallèles $C(\theta = 0, v_r) = 0$ définit ce champ critique E_D aussi appelé champ critique de Dreicer.

$$\text{Champ de Dreicer} : v_r^2 = \frac{n_i Z^2 e^3 \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 E m} \rightarrow \underline{\underline{E_D \equiv \frac{n_i Z^2 e^3 \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 k_B T_e}}}$$

Les conclusions de cette analyse pourraient laisser croire qu'une fraction significative des électrons dans un tokamak peut atteindre de très hautes énergies sans qu'aucun processus ne vienne limiter la croissance de cette énergie au cours du temps. Cette conclusion est erronée car nous avons négligé les processus de rayonnement, en particulier le rayonnement synchrotron résultant de la courbure de la trajectoire le long des lignes de champ, qui présente une dépendance en la puissance quatre de l'énergie, offre un mécanisme de freinage haute vitesse suffisamment efficace pour arrêter les *runaway*.

Introduisons l'énergie relativiste $mc^2 \gamma$ d'un électron *runaway* et négligeons la friction. L'évolution de l'énergie est alors contrainte par deux tendances antagonistes, l'accélération inductive et le ralentissement radiatif.

$$mc \frac{d\gamma}{dt} = \underbrace{\frac{eE}{m}}_{\text{Accélération}} - \underbrace{\frac{e^2}{6\pi \epsilon_0 R_0^2} \gamma^4}_{\text{Pertes radiatives}}$$

Cette équation différentielle ordinaire décrivant l'évolution de l'énergie des *runaway* haute énergie peut être intégrée; pour ce faire introduisons le temps caractéristique $\tau_0 \equiv mc/eE$ ainsi que la limite synchrotron γ_0 qui détermine l'énergie maximum $mc^2\gamma_0$ d'un électron dans un tokamak ($d\gamma/dt = 0$).

$$\text{Limite synchrotron : } \gamma_0 \equiv \left(\frac{6\pi\epsilon_0 R_0^2 E}{e} \right)^{\frac{1}{4}}$$

Cette limite est de l'ordre de quelques dizaines à quelques centaines de MeV. La séparation des variables d'énergie et de temps, puis une quadrature sur l'énergie, conduisent à la loi implicite d'évolution de l'énergie $t(\gamma)$:

$$\frac{t}{\tau_0} = \frac{\gamma_0}{2} \left[\tanh^{-1} \left(\frac{\gamma}{\gamma_0} \right) + \arctan \left(\frac{\gamma}{\gamma_0} \right) - \tanh^{-1} \left(\frac{1}{\gamma_0} \right) - \arctan \left(\frac{1}{\gamma_0} \right) \right]$$

2.2.3 Isotropisation électronique

Nous allons maintenant étudier le processus d'isotropisation de la vitesse d'un électron résultant des collisions avec une population ionique au repos. Soit une population d'ions, supposés infiniment lourds donc au repos, de charge Ze et de densité n . Ces ions au repos interagissent avec un électron, de masse m et de vitesse initiale \mathbf{v}_0 , décrit par la fonction de distribution $f(\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v}_0, t)$; à l'instant initial $t = 0$ cette fonction est représentée par une distribution de Dirac dirigée, et, à l'issue du processus d'isotropisation, par une distribution de Dirac isotrope :

$$f(\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v}_0, t = 0) = \frac{\delta(v - v_0) \delta(\cos \theta_0 - \cos \theta)}{2\pi v_0^2} \rightarrow f(\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v}_0, t = +\infty) = \frac{\delta(v - v_0)}{4\pi v_0^2}$$

où $v = |\mathbf{v}|$, $\theta = \arccos(\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{v}/v)$ constituent, avec φ , un système de coordonnées sphériques d'axe \mathbf{u}_z dans l'espace des vitesses \mathbf{v} ; et $\theta_0 = \arccos(\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{v}_0/v_0)$ est l'angle initial par rapport à l'axe des z . Nous ne prenons pas en compte le deuxième angle sphérique φ car l'axe de référence \mathbf{u}_z du système sphérique est pris parallèle au champ magnétique. Ainsi, la rotation cyclotronique rend la distribution suivant cet angle φ homogène. Notons que l'inclusion du deuxième angle sphérique φ ne pose aucun problème supplémentaire si nous voulons étendre les résultats dérivés ici. Les ions étant supposés infiniment lourds, il ne peut y avoir de transfert d'énergie et la norme de la vitesse électronique $|\mathbf{v}|$ reste invariante. Par contre, l'effet cumulatif des collisions induit un élargissement de la distribution angulaire c'est-à-dire une isotropisation. La fonction de distribution $f(\mathbf{v}, t > 0)$ est donnée par la solution de l'équation de Fokker-Planck aussi appelée équation de Landau dans ce contexte,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left[\nu \mathbf{v} f + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \nu \frac{\mathbf{I}v^2 - \mathbf{v}\mathbf{v}}{2} f \right] = \nu \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\mathbf{I}v^2 - \mathbf{v}\mathbf{v}}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f$$

où $\nu(v) = nZ^2q^4\Lambda/4\pi\epsilon_0^2m^2v^3$ est la fréquence de collision définie précédemment et où nous avons utilisé l'identité $\nabla_{\mathbf{v}} \cdot (\mathbf{I}v^2 - \mathbf{v}\mathbf{v}/v^3) = -2\mathbf{v}/v^3$. Ainsi apparaît un opérateur différentiel décrivant l'isotropisation, c'est-à-dire une marche aléatoire sur une sphère, dont l'expression en coordonnées sphériques est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot [\mathbf{I}v^2 - \mathbf{v}\mathbf{v}] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Cet opérateur n'est autre que ν fois la partie angulaire du Laplacien égale au carré de l'opérateur moment cinétique orbital en mécanique quantique. Le processus d'isotropisation, dans ce modèle dit de Lorentz, conserve la norme de l'impulsion $|\mathbf{v}_0| = |\mathbf{v}|$ ce qui était un résultat attendu.

Dans un système de coordonnées sphériques, l'équation cinétique de Landau décrivant l'isotropisation de la population électronique est donc donnée par :

$$\text{Modèle de Lorentz: } \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\nu}{2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] f$$

Les fonctions propres de l'opérateur moment cinétique en mécanique quantique sont les harmoniques sphériques, qui en l'absence de dépendance en l'angle φ se réduisent aux polynômes de Legendre $P_l(\cos \theta)$.

$$\frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] P_l(\cos \theta) = -l(l+1) P_l(\cos \theta)$$

La famille des polynômes de Legendre $P_l(x)$ tels que $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$, constitue une base orthogonale complète de l'ensemble des fonctions sur le cercle :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{2l+1}{2} P_l(x) P_m(x) dx = \delta_l^m, \quad \sum_{l=0}^{l=+\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(x) P_l(x') = \delta(x-x')$$

Cette dernière relation, dite de complétude, permet de représenter les conditions initiales du problème, $\delta(v-v_0) \delta(\cos \theta_0 - \cos \theta)$, sur la base des polynômes de Legendre suivant une somme pondérée par les coefficients $(2l+1)/2$. Recherchons la solution de l'équation d'évolution sous la forme d'une décomposition sur la base ainsi identifiée des polynômes de Legendre :

$$f(\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v}_0, t) = \frac{\delta(v-v_0)}{2\pi v_0^2} \sum_l a_l(v, t) P_l(\cos \theta_0) P_l(\cos \theta) \rightarrow \frac{da_l}{dt} = -\frac{l(l+1)}{2} \nu a_l$$

chaque coefficient a_l de ce développement vérifie une équation de relaxation linéaire et peut être exprimé en fonction du temps. La solution est une somme pondérée de polynômes de Legendre, les coefficients de pondération décroissant exponentiellement avec le temps et l'ordre du polynôme.

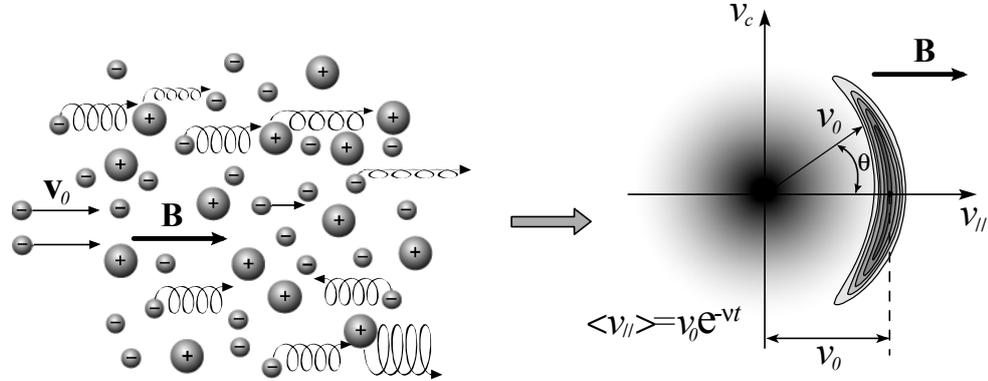
$$f(\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v}_0, t) = \frac{\delta(v-v_0)}{2\pi v_0^2} \sum_{l=0}^{l=+\infty} \frac{2l+1}{2} \exp\left(-\frac{l(l+1)}{2} \nu t\right) P_l(\cos \theta_0) P_l(\cos \theta)$$

Cette expression offre un cadre adéquat pour étudier la relaxation de la vitesse moyenne le long du champ magnétique v_{\parallel} et de la vitesse cyclotronique moyenne v_c ainsi que l'évolution des différents moments de ces variables, évolution qui participe à des phénomènes tels que le piégeage ou la production d'électrons découplés.

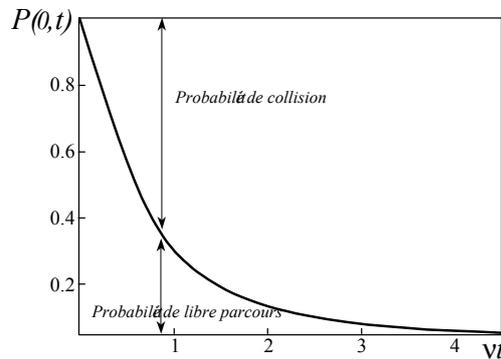
Afin de construire un modèle statistique plus simple que l'évolution des vitesses suivant une base de polynômes de Legendre, revenons à la relaxation exponentielle de la vitesse v_{\parallel} , la représentation $\cos \theta = P_1(\cos \theta)$ permet de construire la loi de décroissance exponentielle de la vitesse parallèle moyenne.

$$\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{u}_z \rightarrow \langle v_{\parallel}(t) \rangle = \int v_0 \cos \theta f(\mathbf{v}, \mathbf{v}_0, t) d\mathbf{v} = v_0 \exp -\nu t$$

Cette loi de décroissance peut aussi être obtenue dans le cadre d'une modélisation de marche aléatoire Markovienne.



Introduisons la loi temporelle $P(0, t)$ mesurant la probabilité pour qu'un électron effectue un libre parcours de durée t , sans modification significative de sa vitesse. Sur une durée infinitésimale dt la probabilité de collision est proportionnelle à dt et la probabilité de libre parcours (pas de collision) correspondant à l'événement complémentaire est donc donnée par 1 moins cette probabilité de collision sur une durée infinitésimale dt . En effet, il n'y a que deux possibilités, collision ou libre parcours. $P(0, t)$ possède donc les deux propriétés suivantes : $P(0, 0) = 1$ et $P(0, dt) = [1 - \nu dt]$ où ν sera identifiée ultérieurement. Nous pouvons élargir la perspective et considérer la loi $P(N, t)$ décrivant la probabilité pour qu'un électron subisse N collisions durant l'intervalle de temps t . Plusieurs propriétés de cette distribution peuvent être établies : $P(0, 0) = 1$, $P(1, \delta t) = \nu \delta t$, $P(0, \delta t) = 1 - \nu \delta t$, $P(N, \delta t) = 0$ pour $N > 1$; en effet, sur une durée infinitésimale il ne peut pas se produire plus d'une collision. Supposons que la probabilité de collision durant un intervalle de temps donné soit indépendante de l'histoire de la particule, c'est-à-dire indépendante du fait que la particule ait ou n'ait pas subi de collisions dans un passé récent, une telle hypothèse est dite Markovienne et permet d'établir : $P(0, t + \delta t) = P(0, t) P(0, \delta t)$.



Le développement de Taylor du premier membre conduit à l'équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{dP(0, t)}{dt} = -\nu P(0, t) \rightarrow P(0, t) = \exp(-\nu t)$$

Nous obtenons ainsi une loi de décroissance exponentielle similaire à la loi de décroissance de la vitesse associée aux collisions coulombiennes décrites dans le

cadre du modèle de Lorentz ; nous identifions donc $\nu = \nu_{e \rightarrow i}$ pour les électrons.

$$\text{Probabilité de libre parcours de durée } t : \underline{\underline{P(0, t) = \exp(-\nu t)}}$$

Considérons ensuite la loi $P(N, t)$, un électron subit N collisions durant une période $t + \delta t$ si il en subit $N - 1$ durant la période t et une durant δt ou N durant t et 0 durant δt ; ainsi : $P(N, t + \delta t) = P(N - 1, t) P(1, \delta t) + P(N, t) P(0, \delta t)$.

$$\frac{dP(N, t)}{dt} + \nu P(N, t) = \nu P(N - 1, t) \rightarrow P(N, t) = \nu \exp(-\nu t) \int_0^t \exp(\nu \tau) P(N - 1, \tau) d\tau$$

Nous avons établi la loi de Poisson décrivant la probabilité d'observer N collisions sur un électron donné durant un intervalle de durée t .

$$\text{Loi de Poisson : } \underline{\underline{P(N, t) = \frac{(\nu t)^N}{N!} \exp(-\nu t)}}$$

Le temps moyen entre deux collisions s'exprime à partir de la loi de la probabilité $P(0, t)$ comme la moyenne des temps de libre parcours, et la dispersion est donnée par la valeur moyenne du carré du temps de libre parcours :

$$\langle t \rangle \equiv \frac{\int_0^{+\infty} t P(0, t) dt}{\int_0^{+\infty} P(0, t) dt} = \nu^{-1}, \quad \langle t^2 \rangle \equiv \frac{\int_0^{+\infty} t^2 P(0, t) dt}{\int_0^{+\infty} P(0, t) dt} = 2\nu^{-2}$$

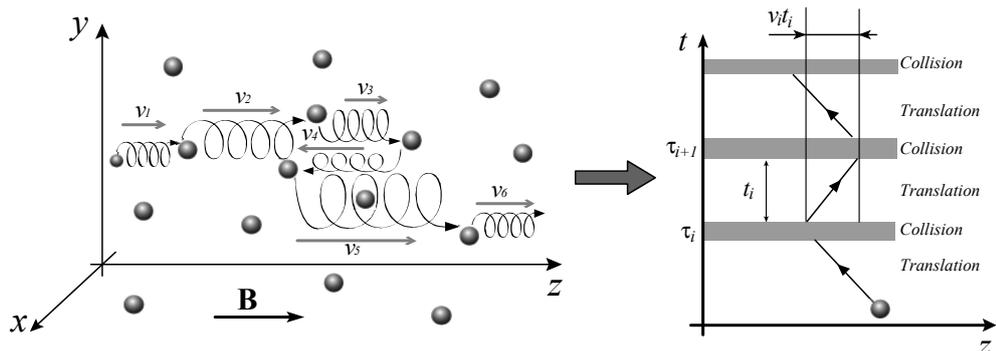
ainsi : $\nu^{-1} = \langle t \rangle$, $\langle t^2 \rangle = 2\nu^{-2}$.

2.3 Transport

2.3.1 Transport le long des lignes de Champ

Dans ce paragraphe, poursuivant l'analyse de l'impact des interactions coulombiennes sur la dynamique d'un plasma thermonucléaire, nous allons étudier la nature des flux électroniques et ioniques le long des lignes de champ magnétique et perpendiculairement au champ magnétique dans un plasma magnétisé.

En régime collisionnel la dynamique le long des lignes de champ est de nature aléatoire et peut être modélisée par une marche aléatoire. Sur la base de la loi de probabilité décrivant la probabilité pour qu'une particule effectue un libre parcours de durée t , sans modification significative du module de sa vitesse, $P(0, t) = \exp[-\nu t]$, il est aisé d'établir le comportement macroscopique d'une population d'électrons ou d'ions.



Nous allons ainsi démontrer que ce comportement peut être décrit par un courant macroscopique obéissant aux lois d'Ohm et de Fick. Considérons pour cela l'histoire d'une particule chargée, de masse m et de charge q , comme une succession de libres parcours et de collisions ; entre deux collisions le mouvement est de nature inertielle, ainsi la loi de Newton décrivant l'évolution de la vitesse est donnée par :

$$\frac{dv}{dt} = \sum_n \delta(t - \tau_n) \delta v_n$$

où τ_n repère les instants successifs des différentes collisions assurant un transfert d'impulsion $m\delta v_n$. L'histoire d'une particule est ainsi décrite par une série de temps aléatoires, $t_1/t_2/t_3/t_4/\dots/t_i/\dots$, correspondant à la durée de chaque libre parcours n : $t_n = \tau_{n+1} - \tau_n$, chaque libre parcours n étant constitué par une translation uniforme de vitesse $v_n = v_{n-1} + \delta v_n$; les collisions à l'origine des transferts d'impulsion $m\delta v_n$ étant considérées comme des événements beaucoup plus courts que les libres parcours. Ces différents temps de libres parcours $t_1/t_2/t_3/t_4/\dots/t_i/\dots$ sont des variables aléatoires dont nous avons établi la loi de probabilité précédemment. En particulier, la moyenne $\langle t_i \rangle$ et la dispersion quadratique $\langle t_i^2 \rangle$ de ces temps sont données par : $\langle t_i \rangle = \nu^{-1}$, $\langle t_i^2 \rangle = 2\nu^{-2}$.

Chaque libre parcours le long des lignes de champ magnétique, entre deux collisions, est décrit par une vitesse, elle aussi aléatoire. La série des vitesses correspondant à l'histoire d'une particule est donc une série aléatoire : $v_1/v_2/v_3 \dots/v_i \dots$ dont nous connaissons la loi de probabilité : une distribution d'équilibre Maxwellienne. Compte tenu du caractère isotrope du problème, la valeur moyenne de la vitesse entre deux collisions est nécessairement nulle $\langle v_i \rangle = 0$, et, si la population de particules est décrite par une température T , la valeur quadratique moyenne de la vitesse vaut $\langle v_i \cdot v_i \rangle = k_B T/m$. L'hypothèse de décorrélation se traduit par la relation $\langle v_i \cdot v_j \rangle_{i \neq j} = 0$. Chaque libre parcours est décrit par un vecteur déplacement le long de la ligne de champ z_i tel que :

$$z_i = v_i t_i$$

L'ensemble des libres parcours est donc une série aléatoire : $z_1/z_2/z_3/z_4/\dots/z_i \dots$. La loi de probabilité de ces déplacements aléatoires est inconnue *à priori*, mais, compte tenu des résultats précédents, nous pouvons construire cette loi. En effet, les temps $t_1/t_2/t_3/t_4/\dots/t_i/\dots$ sont distribués suivant la loi de Poisson simple $P(0, t)$ et les vitesses $v_1/v_2/v_3 \dots/v_i \dots$ suivant une loi de Maxwell, ces deux lois étant sans corrélation mutuelle, la valeur moyenne d'un produit est égale au produit des valeurs moyennes. Ainsi, le coefficient de friction $\langle \delta z(\delta t) \rangle / \langle \delta t \rangle$ est nul,

$$z_i = v_i t_i \rightarrow \frac{\langle \delta z(\delta t) \rangle}{\langle \delta t \rangle} = \langle v \rangle \frac{\int_0^{+\infty} t P(0, t) dt}{\int_0^{+\infty} t P(0, t) dt} = 0$$

car $\langle v \rangle = 0$; mais le coefficient de diffusion le long des lignes de champ $\langle \delta z^2(\delta t) \rangle / 2 \langle \delta t \rangle$ présente une valeur finie :

$$z_i = v_i t_i \rightarrow \frac{\langle \delta z^2(\delta t) \rangle}{2 \langle \delta t \rangle} = \langle v^2 \rangle \frac{\int_0^{+\infty} t^2 P(0, t) dt}{2 \int_0^{+\infty} t P(0, t) dt} = \frac{k_B T}{m\nu}$$

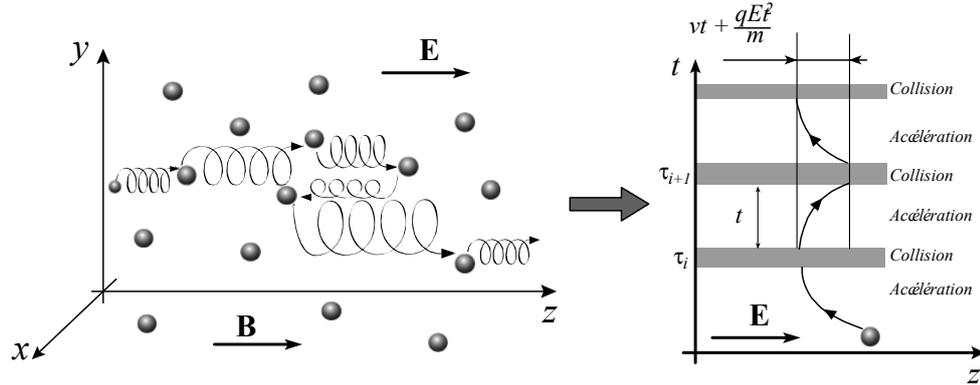
cette expression définit le coefficient de diffusion D_{\parallel} le long des lignes de champ magnétique.

$$\text{Coefficient de diffusion parallèle : } D_{\parallel} \equiv \frac{\langle \delta z^2 \rangle}{2 \langle \delta t \rangle} = \frac{k_B T}{m \nu}$$

En présence d'un champ électrique quasi-statique, E , cette analyse, en terme de translations uniformes interrompue par des collisions, doit être modifiée, car, entre deux collisions, le mouvement n'est pas uniforme, mais uniformément accéléré sous l'action de la force de coulomb qE . Considérons donc l'histoire d'une particule comme une suite de phases accélérées interrompues par des collisions de durées nulles.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{q}{m} E + \sum_n \delta(t - \tau_n) \delta v_n$$

La série des temps, $t_1/t_2/t_3/t_4/\dots/t_i/\dots$, décrivant la durée de ces phases d'accélération est donc de nature aléatoire, mais ses propriétés statistiques sont connues.



La série des déplacements le long des lignes de champ entre deux collisions : $z_1/z_2/z_3/z_4/\dots/z_i/\dots$ est modifiée par le champ électrique, le mouvement entre deux collisions est uniformément accéléré

$$z_i = v_i t_i + \frac{qE t_i^2}{2m}$$

et cette modification de la nature du mouvement se traduit par un déplacement moyen non nul.

$$z_i = v_i t_i + \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t_i^2 \rightarrow \frac{\langle \delta z(\delta t) \rangle}{\langle \delta t \rangle} = \frac{qE}{m} \frac{\int_0^{+\infty} t^2 P(0, t) dt}{2 \int_0^{+\infty} t P(0, t) dt} = \frac{qE}{m \nu}$$

Ce dernier résultat permet ainsi d'exprimer la vitesse moyenne des électrons dont le rapport au champ électrique définit la mobilité électrique μ_{\parallel} le long des lignes de champ magnétique.

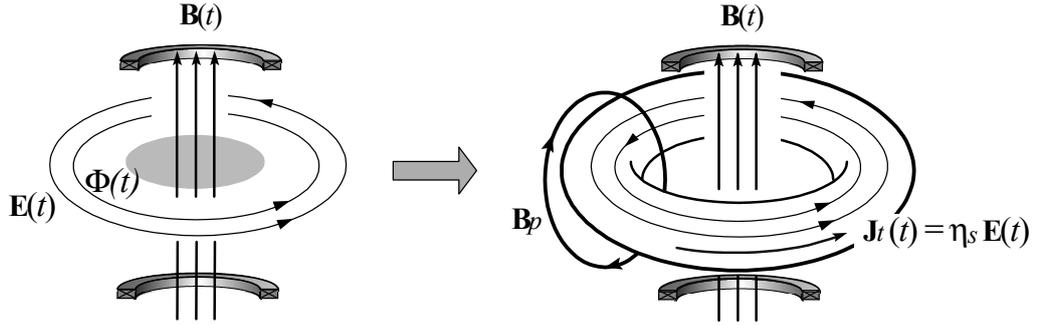
$$\text{Coefficient de mobilité parallèle : } \mu_{\parallel} \equiv \frac{1}{E} \frac{\langle \delta z \rangle}{\langle \delta t \rangle} = \frac{q}{m \nu}$$

Ainsi, en régime collisionnel, la succession de phases d'accélération et de collisions engendre un mouvement de translation de vitesse moyenne $\mu_{\parallel} E$. Ce mouvement électronique est la source d'une densité volumique de courant électrique $J = nq\mu_{\parallel} E$; introduisons la conductivité η , dite de Spitzer, définie par la relation: $J = \eta E$.

$$\text{Conductivité de Spitzer: } \underline{\underline{\eta_S \equiv \frac{J}{E} = \frac{nq^2}{m\nu_e}}} \rightarrow \eta \text{ [S/m]} \approx 10^4 \times \left[\frac{T}{\text{eV}} \right]^{\frac{3}{2}}$$

Pour un plasma d'hydrogène à 100 eV cette conductivité est de l'ordre de grandeur de celle de l'acier, pour une température de 1 keV elle devient comparable à la conductivité du cuivre. Ainsi les plasmas thermonucléaires sont de très bons conducteurs.

$$\mathbf{J} = \eta \mathbf{E}, \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow I \text{ [MA]} \approx 10^{-2} \times \frac{a^2 \text{ [m]} T^{\frac{3}{2}} \text{ [eV]} d\Phi}{2R \text{ [m]} dt} \text{ [V]}$$



Cette formule de Spitzer peut sembler contraire à l'intuition physique. En effet, la conductivité η est indépendante de la densité de porteurs de charge et croît avec la température. Ce comportement s'explique aisément: (i) d'une part, dans un gaz totalement ionisé la probabilité de collision décroît avec la vitesse donc avec la température et (ii) d'autre part, la fréquence de collisions est proportionnelle à la densité, le terme de densité au dénominateur dans la fréquence de collision ν élimine donc celui présent au numérateur dans la formule $\eta = nq^2/m\nu$.

Le long des lignes de champ le flux électronique Γ_{\parallel} est la somme d'un flux convectif et d'un flux diffusif $\Gamma_{\parallel} = n\mu_{\parallel} E - D_{\parallel} dn/dz$. Deux relations classiques peuvent être établies: la relation d'Einstein qui prédit l'universalité du rapport du coefficient de diffusion sur le coefficient de mobilité et la relation de Boltzmann qui décrit la condition d'équilibre d'une population de particules chargées interagissant avec un potentiel électrostatique ϕ lorsque le flux Γ_{\parallel} s'annule.

$$\text{Relation d'Einstein} \quad : \quad \frac{D_{\parallel}}{\mu_{\parallel}} = \frac{k_B T}{q} \leftarrow \mu_{\parallel} = \frac{q}{m\nu}, D_{\parallel} = \frac{k_B T}{m\nu}$$

$$\text{Relation de Boltzmann} \quad : \quad n = n_0 \exp\left(-\frac{q\phi}{k_B T}\right) \leftarrow \Gamma_{\parallel} = -n\mu_{\parallel} \frac{d\phi}{dz} - D_{\parallel} \frac{dn}{dz} = 0$$

Les définitions qui viennent d'être données et les relations qui viennent d'être établies concernent l'étude du flux de matière le long de la direction du champ

magnétique. Perpendiculairement à ce champ, il nous faut considérer le couplage entre le terme de Laplace $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ et les collisions et évaluer le coefficient de diffusion du centre guide \mathbf{R}_\perp des orbites cyclotroniques.

2.3.2 Transport perpendiculairement aux lignes de champ

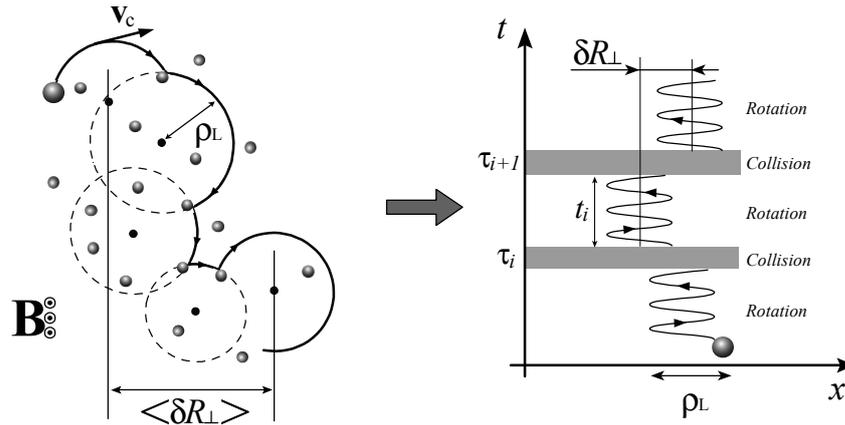
Considérons une particule chargée, de masse m et de charge q , plongée dans un champ magnétique statique uniforme $\mathbf{B} = B\mathbf{b}$. L'écriture de l'équation du mouvement de cette particule se réduit à la prise en compte : (i) de la force de Laplace et (ii) des transferts d'impulsion $m\delta\mathbf{v}_n$ induits par les collisions coulombiennes:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m}\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \sum_n \delta(t - \tau_n) \delta\mathbf{v}_n$$

où τ_n sont les instants de collisions. La vitesse \mathbf{v} peut être décomposée en une composante parallèle au champ magnétique déjà étudiée au début de ce paragraphe, $\mathbf{v}_\parallel = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}$, et en une composante perpendiculaire au champ magnétique, la vitesse cyclotronique, $\mathbf{v}_c = \mathbf{b} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{b})$. Afin d'étudier l'orbite dans le plan perpendiculaire au champ magnétique introduisons la variable complexe : $\mathcal{Z} = v_x + jv_y$ où x et y constituent un système de coordonnées cartésiennes dans le plan perpendiculaire à \mathbf{b} , $\mathbf{v}_c = v_x\mathbf{u}_x + v_y\mathbf{u}_y$; système de coordonnées associé à la base orthonormée directe $[\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{b}]$. La variable \mathcal{Z} vérifie l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$\frac{d\mathcal{Z}}{dt} + j\omega_c\mathcal{Z} = + \sum_n \delta(t - \tau_n) \delta\mathcal{Z}_n$$

où les $m\delta\mathcal{Z}_n$ décrivent les transferts aléatoires de vitesse perpendiculaire dus aux collisions.



Entre deux collisions la solution est donnée par $\mathcal{Z}(t) = \mathcal{Z}_0 \exp(-j\omega_c t)$. La position instantanée de la particule est définie comme la somme de la position du centre guide et du rayon de Larmor : $\mathbf{r} = \mathbf{R}_\perp + \boldsymbol{\rho}_L$. Le rayon de Larmor $\boldsymbol{\rho}_L(t)$ et la vitesse cyclotronique $\mathbf{v}_c(t)$ vérifient la relation : $\mathbf{v}_c = \omega_c \boldsymbol{\rho}_L \times \mathbf{b}$. La probabilité que la particule ne subisse aucune collision durant un temps τ puis subisse une collision à l'issue de ce temps τ durant l'intervalle $d\tau$ est donnée par : $dP(\tau) = \nu \exp(-\nu\tau) d\tau$ où ν est la fréquence de transfert d'impulsion. A l'issue d'une collision, non seulement une variation de la vitesse cyclotronique est

observée, mais aussi un changement de position du centre guide $\delta\mathbf{R}_\perp$. En effet, dans un champ magnétique, statique et homogène, la position \mathbf{r} d'une particule peut être décomposée en la somme de la position du centre guide et de la position du rayon de Larmor tournant qui est reliée à la vitesse cyclotronique par : $\omega_c \boldsymbol{\rho}_L = \mathbf{b} \times \mathbf{v}_c$, ainsi, $\mathbf{R}_\perp = \mathbf{r} - \mathbf{b} \times \mathbf{v}_c / \omega_c$. Lors d'une collision la variation de la position instantanée de la particule est nulle $\delta\mathbf{r} = \mathbf{0}$, il en résulte un couplage entre la variation de vitesse $\delta\mathbf{v}_c$ et la variation de la position du centre guide $\delta\mathbf{R}_\perp$.

$$\delta\mathbf{R}_\perp = \frac{\delta\mathbf{v}_c \times \mathbf{b}}{\omega_c} \rightarrow \langle \delta\mathbf{R}_\perp^2 \rangle = \frac{\langle \delta v_x^2 \rangle + \langle \delta v_y^2 \rangle}{\omega_c^2}$$

Afin de calculer le coefficient $\langle \delta\mathbf{v}_c \cdot \delta\mathbf{v}_c \rangle$ considérons la dynamique en l'absence de collision ; on suppose que la particule chargée vient juste de subir une collision à l'instant t_0 et possède, après cette collision, la vitesse $v_{c0} \exp(-j\omega_c t_0)$. En l'absence de collision, la vitesse à un instant ultérieur t est donc donnée par $\mathcal{Z}(t) = v_{c0} \exp(-j\omega_c t)$ et la variation de vitesse est égale à : $\delta\mathcal{Z} = v_{c0} \exp(-j\omega_c t) - v_{c0} \exp(-j\omega_c t_0)$. Introduisons $\tau = t - t_0$ la durée du libre parcours, qui est ici une libre rotation, et exprimons le carré de l'incrément de vitesse cyclotronique et de l'incrément de position du centre guide à l'issue d'une libre rotation de durée τ .

$$\delta v_x \delta v_x + \delta v_y \delta v_y \equiv \delta\mathcal{Z} \delta\mathcal{Z}^* = 4v_{c0}^2 \sin^2 \left(\omega_c \frac{t - t_0}{2} \right) \rightarrow \delta\mathbf{R}_\perp \cdot \delta\mathbf{R}_\perp = 4 \frac{v_{c0}^2}{\omega_c^2} \sin^2 \left(\omega_c \frac{\tau}{2} \right)$$

Le résultat ainsi obtenu est fonction uniquement de la variable aléatoire τ et cette variable est distribuée suivant la loi $dP/d\tau$, il est donc nécessaire de moyenner ce résultat pour exprimer le coefficient de diffusion.

$$\frac{\langle \delta\mathbf{R}_\perp^2 \rangle}{\langle \delta t \rangle} = 4 \frac{v_{c0}^2}{\omega_c^2} \frac{\int_0^{+\infty} P(0, \tau) \sin^2 \left(\omega_c \frac{\tau}{2} \right) d\tau}{\int_0^{+\infty} \tau P(0, \tau) d\tau} = 2v_c^2 \frac{\nu}{\nu^2 + \omega_c^2}$$

Compte tenu de l'isotropie du problème autour des lignes de champ $\langle \delta\mathbf{R}_\perp^2 \rangle = 2 \langle \delta R_x^2 \rangle = 2 \langle \delta R_y^2 \rangle$. La distribution des vitesses étant maxwellienne nous considérerons $\langle v_{c0}^2 \rangle = 2k_B T/m$. Le résultat final est donné par :

$$\text{Coefficient de diffusion transverse : } D_\perp \equiv \frac{\langle \delta R_x^2 \rangle}{2 \langle \delta t \rangle} = \frac{\langle \delta R_y^2 \rangle}{2 \delta t} = \frac{D_\parallel}{1 + \frac{\omega_c^2}{\nu^2}}$$

Le modèle qui vient d'être développé permet aussi d'identifier l'existence d'un flux dit de Hall : en présence d'un champ magnétique et d'un gradient de densité, un flux perpendiculaire à ce champ et au gradient se développe. En effet, le coefficient de diffusion est de nature tensorielle et il n'est pas diagonal.

$$\delta\mathbf{R}_\perp = \frac{\delta\mathbf{v}_c \times \mathbf{b}}{\omega_c} \rightarrow \begin{pmatrix} \delta R_x \delta R_x & \delta R_x \delta R_y \\ \delta R_x \delta R_y & \delta R_y \delta R_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega_c^2} \begin{pmatrix} \delta v_y \delta v_y & -\delta v_x \delta v_y \\ -\delta v_x \delta v_y & \delta v_x \delta v_x \end{pmatrix}$$

L'analyse précédente restreinte aux flux croisés conduit à la valeur suivante du coefficient de diffusion de Hall :

$$\text{Coefficient de diffusion croisée Hall : } D_\times \equiv \frac{\langle \delta R_x \delta R_y \rangle}{2 \langle \delta t \rangle} = \frac{D_\parallel}{\frac{\nu}{\omega_c} + \frac{\omega_c}{\nu}}$$

Ainsi, le flux diffusif $\mathbf{\Gamma}$ résultant d'un gradient de densité au sein d'un plasma magnétisé présente trois composantes.

$$\mathbf{\Gamma} = -D_{\parallel} \nabla_{\parallel} n - D_{\perp} \nabla_{\perp} n - D_{\times} \nabla_{\perp} n \times \mathbf{b}$$

De façon similaire, en présence d'un champ électrique \mathbf{E} , les coefficients de mobilité transverse et croisée (de Hall) peuvent aussi être évalués et le résultat final est donné par :

$$\text{Mobilités transverse et Hall: } \mu_{\perp} \equiv \frac{\langle \delta R_x \rangle}{\langle \delta t \rangle E_x} = \frac{\mu_{\parallel}}{1 + \frac{\omega_c^2}{\nu^2}}, \mu_{\times} \equiv \frac{\langle \delta R_x \rangle}{\langle \delta t \rangle E_y} = \frac{\mu_{\parallel}}{\frac{\nu}{\omega_c} + \frac{\omega_c}{\nu}}$$

Ainsi, la vitesse d'entraînement \mathbf{V} résultant d'un gradient de potentiel au sein d'un plasma magnétisé présente trois composantes.

$$\mathbf{\Gamma} = n\mu_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel} + n\mu_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} + n\mu_{\times} \mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{b}$$

Direction	Mobilité	Diffusion
Parallèle	$\mu_{\parallel} = \frac{q}{m\nu}$	$D_{\parallel} = \frac{k_B T}{m\nu}$
Hall	$\mu_{\times} = \mu_{\parallel} \frac{\nu}{\omega_c} = \frac{q}{m\omega_c}$	$D_{\times} = D_{\parallel} \frac{\nu}{\omega_c} = \frac{k_B T}{m\omega_c}$
Transverse	$\mu_{\perp} = \mu_{\parallel} \frac{\nu^2}{\omega_c^2} = \frac{q\nu}{m\omega_c^2}$	$D_{\perp} = D_{\parallel} \frac{\nu^2}{\omega_c^2} = \frac{k_B T \nu}{m\omega_c^2}$

Nous allons dériver ces résultats dans le contexte d'un modèle fluide plus simple que le formalisme des processus stochastiques, nous retrouverons ainsi l'ensemble des résultats précédents, l'unicité des résultats issus de ces deux modèles différents, Markovien et fluide, constituant une garantie d'universalité. L'équation d'Euler dans un plasma doit prendre en compte : (i) les forces de pression, (ii) la densité volumique de force de Coulomb et (iii) la densité volumique de force de Laplace, (iv) plus un terme de friction traduisant les transferts d'impulsion collisionnelle entre électrons et ions. Au voisinage de l'équilibre, les termes inertiels décrivant l'accélération sont faibles et la dynamique du plasma se réduit au bilan de force :

$$\underbrace{-\nabla P}_{\text{Pression}} + \underbrace{nq\mathbf{E}}_{\text{Coulomb}} + \underbrace{nq\mathbf{V} \times \mathbf{B}}_{\text{Laplace}} - \underbrace{nm\nu\mathbf{V}}_{\text{Friction}} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{V} = \mu_{\parallel} \mathbf{E} + \mu_{\parallel} \mathbf{V} \times \mathbf{B} - D_{\parallel} \frac{\nabla n}{n}$$

où nous avons considéré $P = nk_B T$. Ce bilan des forces auquel est soumis un fluide électronique, ou ionique, permet d'étudier les phénomènes de mobilité et diffusion magnétisés et d'établir ainsi l'équation de transport de la matière en présence d'un champ magnétique statique. Formons pour cela les produits scalaire et vectoriel de la vitesse fluide \mathbf{V} avec le champ magnétique \mathbf{B} .

$$\mathbf{V} \times \mathbf{B} = \mu_{\parallel} \mathbf{E} \times \mathbf{B} + \mu_{\parallel} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} - \mu_{\parallel} B^2 \mathbf{V} - D_{\parallel} \frac{\nabla n}{n} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{V} \cdot \mathbf{B} = \mu_{\parallel} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} - D_{\parallel} \frac{\nabla n}{n} \cdot \mathbf{B}$$

Ces deux équations permettent d'exprimer le produit vectoriel du deuxième membre de l'équation et, ainsi, d'obtenir la vitesse fluide \mathbf{V} en fonction des champs électrique et magnétique et du gradient de densité. Il est d'usage d'exprimer \mathbf{V} en fonction des composantes parallèles et perpendiculaires du champ électrique : $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp}$ et du gradient de densité : $\nabla = \nabla_{\parallel} + \nabla_{\perp}$, la direction

du champ magnétique \mathbf{b} étant prise comme axe de référence : $\mathbf{E}_{\parallel} = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b}$, $\mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{b} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{b})$, $\nabla_{\parallel} = \mathbf{b} (\mathbf{b} \cdot \nabla)$, $\nabla_{\perp} = -\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \times \nabla)$ où $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$.

$$\mathbf{V} = \mu_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel} - D_{\parallel} \frac{\nabla_{\parallel} n}{n} + \mu_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} - D_{\perp} \frac{\nabla_{\perp} n}{n} + \mu_{\times} \mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{b} - D_{\times} \frac{\nabla_{\perp} n}{n} \times \mathbf{b}$$

La vitesse d'écoulement \mathbf{V} d'un plasma magnétisé résulte donc de la combinaison de six processus de transport dans trois directions de référence : (i) la mobilité et la diffusion le long des lignes de champ magnétique (\parallel) qui ne sont pas altérées par la force de Laplace, (ii) la mobilité et la diffusion dans la direction du champ électrique et perpendiculairement au champ magnétique (\perp) et (iii) la mobilité et la diffusion dans la direction mutuellement perpendiculaire aux champs électrique et magnétique (\times), ce dernier terme n'est autre que l'effet Hall.

Le transport de matière dans un plasma magnétisé peut apparaître complexe, aussi, une analyse de l'origine physique des différents termes est nécessaire. L'origine des termes de Hall est à rechercher dans la théorie des orbites développée aux chapitres suivants. Dans ce chapitre nous avons identifié la vitesse de dérive de champ croisé $\mathbf{V}_E \equiv \frac{\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{B}}{B^2}$ et la vitesse diamagnétique $\mathbf{V}^* \equiv -\frac{k_B T}{n} \frac{\nabla_{\perp} n \times \mathbf{B}}{q B^2}$. La vitesse diamagnétique résulte de la non compensation des courants cyclotroniques en présence d'un gradient de densité ou d'un gradient de température. Les termes croisés de mobilité et de diffusion peuvent être exprimés en fonction de ces effets de dérive et de magnétisation suivant la représentation :

$$\mathbf{V}_{\perp} = \frac{\mu_{\parallel}}{1 + \frac{\omega_c^2}{\nu^2}} \mathbf{E}_{\perp} - \frac{D_{\parallel}}{1 + \frac{\omega_c^2}{\nu^2}} \frac{\nabla_{\perp} n}{n} + \frac{\mathbf{V}_E}{1 + \frac{\omega_c^2}{\nu^2}} + \frac{\mathbf{V}^*}{1 + \frac{\omega_c^2}{\nu^2}}$$

Cette forme met en lumière l'origine physique des termes de Hall. Ces termes de Hall ne représentent pas un nouvel effet, mais simplement la modification par les collisions d'effets orbitaux et diamagnétiques étudiés précédemment. Il est instructif de considérer les deux limites de forte et faible collisionnalité, $\omega_c \ll \nu$ et $\omega_c \gg \nu$. A champ magnétique donné, c'est-à-dire à fréquence cyclotronique fixée, ces deux limites : $\nu \rightarrow +\infty$ et $\nu \rightarrow 0$, conduisent à des comportements isotropes et quasi orbitaux :

- Lorsque $\nu \rightarrow +\infty$: $\mu_{\times} \rightarrow 0$, $\mu_{\perp} \rightarrow \mu_{\parallel}$, $D_{\times} \rightarrow 0$ et $D_{\perp} \rightarrow D_{\parallel}$, la réponse du plasma redevient isotrope et l'effet des collisions domine l'effet du champ magnétique ; le plasma se comporte comme un fluide isotrope et l'effet du champ magnétique est négligeable.

- Lorsque $\nu \rightarrow 0$: $\mu_{\perp} \rightarrow 0$ et $D_{\perp} \rightarrow 0$, la valeur du flux de Hall se rapproche de la valeur de la vitesse de dérive de champ croisé et de la vitesse diamagnétique : $\mathbf{V}_{\perp} \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} \mathbf{V}_E + \mathbf{V}^*$; ce régime de faible collisionnalité est donc conforme aux résultats établis dans le cadre de l'étude des orbites en régime adiabatique.

2.4 Transport du champ magnétique

2.4.1 Paramètre Bêta

La génération d'un champ magnétique \mathbf{B} par un courant nécessite un apport d'énergie sous forme de travail car, bien que la force de Laplace ne produise aucun travail ($\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$) le champ électro-moteur d'induction, engendré

par la variation temporelle du champ \mathbf{B} , s'oppose au passage du courant. On démontre aisément que ce travail ne dépend que des valeurs initiale et finale du champ et est indépendant de la nature du développement temporel des courants; ainsi, introduit-on la densité volumique d'énergie magnétique $B^2/2\mu_0$ qui possède aussi la dimension d'une pression et peut être considérée comme telle au regard de ses effets mécaniques.

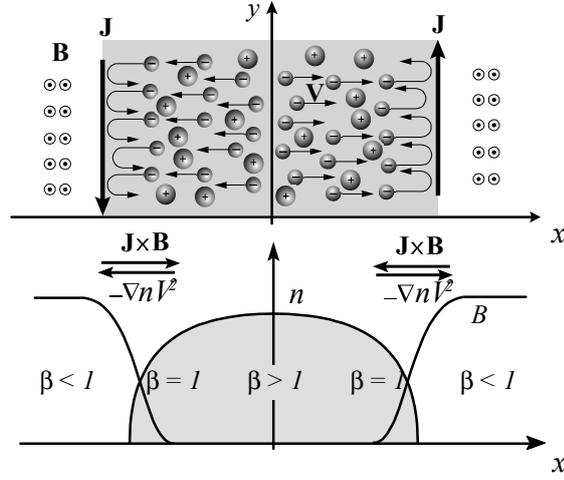
$$\text{Pression magnétique: } P_M \equiv \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Afin de comprendre comment cette pression magnétique peut équilibrer une pression cinétique, c'est-à-dire présenter un caractère diamagnétique, considérons l'interaction entre un flux de plasma et un champ magnétique. Soit un flux de particules chargées, de charge q et de masse m , interagissant avec un champ magnétique. Les orbites des particules chargées génèrent un champ (dia)magnétique et la force de Laplace associée au champ modifie ces orbites. Cette population mobile est neutralisée par un fond continu de particules infiniment massives de charge opposée et de densité identique en tout point. Considérons un système de coordonnées cartésiennes $[x, y, z]$ associé à une base ortho-normée directe $[\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z]$.

Le plasma est situé dans la région des x négatifs où le champ magnétique $b(x) \mathbf{u}_z$ est nul; ce champ magnétique a une valeur constante dans la zone des x positifs grands où la densité devient nulle. On note $n(x)$ et $v_x(x)$ la densité et la vitesse suivant x des particules se dirigeant vers l'interface champ-particules, $x \approx 0$, à partir de $x = -\infty$. En $x = -\infty$ l'écoulement vers l'interface possède une vitesse $v_0 \mathbf{u}_x$: $v_x(x = -\infty) = v_0$ (il existe également un écoulement de retour possédant une densité égale et une vitesse opposée). On note $v_y(x)$ la vitesse suivant l'axe des y ; en $x = -\infty$: $v_y(x = -\infty) = 0$, la densité $n(x = -\infty) = n_0$ et le champ magnétique est nul: $b(x = -\infty) = 0$. En $x = +\infty$ la densité de particules est nulle $n(x = +\infty) = 0$ et le champ magnétique atteint la valeur constante $b(x = +\infty) = B_0$. Le champ magnétique $b(x)\mathbf{u}_z$ dérive d'un potentiel vecteur $a(x) \mathbf{u}_y$: $b(x) = da/dx$ tel que $a(x = -\infty) = 0$.

$$\text{Paramètre } \beta \equiv \frac{[\text{Pression cinétique du plasma}]}{[\text{Pression magnétique du champ}]} = \frac{n_0 m v_0^2}{\frac{B_0^2}{2\mu_0}}$$

Au voisinage de l'interface champ-particules, $x \approx 0$, la force de Laplace incurve les trajectoires des particules et génère une composante de vitesse suivant l'axe des y . Cette composante est à l'origine d'un courant (J_y sur la figure) et ce courant est la source d'un champ magnétique qui permet d'annuler le champ dans la zone occupée par le plasma. La force de Laplace induit un retour des particules et empêche le plasma de pénétrer dans la zone occupée par le champ.



Il s'établit ainsi un équilibre dynamique entre le champ et la matière de part et d'autre de l'interface. Nous allons calculer les caractéristiques de cette interface et la condition de l'équilibre champ-fluide. En régime stationnaire la dynamique des quatre inconnues décrivant le fluide et le champ, $[n(x), v_x(x), v_y(x), b(x)]$, est déterminée par l'équation d'Euler relative aux deux composantes de la vitesse, l'équation de continuité décrivant la conservation de la charge (masse) et l'équation de Maxwell-Ampère décrivant la génération de champ magnétique par les courants diamagnétiques au niveau de l'interface plasma-champ :

$$mv_x \frac{dv_x}{dx} = qv_y b, \quad mv_x \frac{dv_y}{dx} = -qv_x b, \quad \frac{dnv_x}{dx} = 0, \quad \frac{db}{dx} = -q\mu_0 n v_y$$

Pour résoudre ce système de quatre équations à quatre inconnues, introduisons un système de variables et d'inconnues normalisées : $N(X)$, $V(X)$, $W(X)$, $B(X)$ et $A(X)$, où la variable de position normalisée X et les densités, vitesses et champs normalisés sont définis par : $N = n(x)/n_0$, $V = v_x(x)/v_0$, $W = v_y(x)/v_0$, $B = b(x)/B_0$, $A = qa(x)/mv_0$ et $X = qB_0 x / mv_0 = x/\rho_{L0}$, ρ_{L0} est le rayon de Larmor associé à la vitesse v_0 dans le champ de référence B_0 .

Le système des quatre équations différentielles vérifiées par $N(X)$, $V(X)$, $W(X)$, $B(X)$ et $A(X)$, complété par la relation entre induction magnétique et potentiel vecteur ($\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$) est donc donné par :

$$V \frac{dV}{dX} = WB, \quad V \frac{dW}{dX} = -VB, \quad \frac{dNV}{dX} = 0, \quad \frac{dB}{dX} = -\frac{\beta}{2} NW, \quad \frac{dA}{dX} = B$$

Ce système d'équations permet de construire trois invariants traduisant : (i) la conservation de l'énergie, (ii) la conservation du nombre de particules et (iii) la conservation du moment canonique suivant la direction des y :

$$V^2 + A^2 = 1, \quad NV = 1, \quad W + A = 0$$

L'équation de Maxwell-Ampère peut alors être exprimée en fonction du potentiel normalisé A .

$$\frac{d^2 A}{dX^2} = \frac{\beta}{2} \frac{A}{\sqrt{1-A^2}} \rightarrow \frac{dA}{dX} = \sqrt{\beta} \sqrt{1 - \sqrt{1-A^2}} = B$$

Dans la zone d'écoulement, posons : $A = \sin 2\phi \rightarrow B = \sqrt{2\beta} \sin \phi$ où $0 \leq \phi \leq \pi/4$. La relation de Maxwell-Ampère peut être intégrée pour exprimer X

en fonction de ϕ et le profil du champ normalisé B établi en fonction de X :

$$\sqrt{\frac{\beta}{2}} X(\phi) = \log \left| \tan \frac{\phi}{2} \right| + 2 \cos \phi \rightarrow B(X) = \sqrt{2\beta} \sin \phi$$

où nous avons utilisé $\int^x du/\sin u = \ln(\tan|x/2|)$. Le point d'arrêt du plasma est défini par $V = 0$ et $B = 1$.

$$V = 0 \rightarrow A = 1 \rightarrow \phi = \pi/4 \rightarrow B = \sqrt{\beta} \rightarrow \underline{\underline{\beta = 1}}$$

La relation $\beta = 1$ exprime la condition d'équilibre mécanique entre la pression cinétique et la pression magnétique. L'échelle de longueur caractérisant la dimension de l'interface est quant à elle donnée par le rayon de Larmor de référence $\rho_{L0} = mv_0/qb_0$.

2.4.2 Diffusion et convection magnétique

Considérons un plasma homogène, occupant le demi-espace $x > 0$, constitué d'électrons de densité n et d'un fond neutralisant d'ions, supposés infiniment lourds, donc immobiles. Le demi espace $x < 0$ est vide et soumis à un champ magnétique homogène, dépendant du temps, dirigé suivant l'axe des z : $\mathbf{B}(t) = B_0(t) \mathbf{u}_z$. Les variations temporelles de ce champ induisent un champ électrique d'induction \mathbf{E} , dirigé suivant l'axe des y : $\mathbf{E} = E \mathbf{u}_y$ et ce champ est la source d'un courant $\mathbf{J} = \eta \mathbf{E}$. Ce courant crée un champ magnétique de direction opposée à celui appliqué et sa valeur détermine le processus de pénétration magnétique dans le plasma pour $x > 0$. Cet ensemble de processus est décrit par le système :

$$\text{Equations de Maxwell} \quad : \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

$$\text{Loi d'Ohm pour un milieu au repos} \quad : \quad \mathbf{J} = \eta \mathbf{E}$$

où η est la conductivité du plasma résultant des collisions électrons-ions : $\eta = nq^2/mv$. L'élimination du courant dans ce système de trois équations à trois inconnues conduit au système réduit : $\partial E/\partial x = -\partial B/\partial t(x, t)$, $\partial B/\partial x = -\mu_0 \eta E$, puis l'élimination du champ électrique entre ces deux équations conduit à une équation de diffusion sur le champ magnétique.

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mu_0 \eta \frac{\partial B}{\partial t}$$

La dynamique du champ magnétique est donc caractérisée par D_M le coefficient de diffusion magnétique.

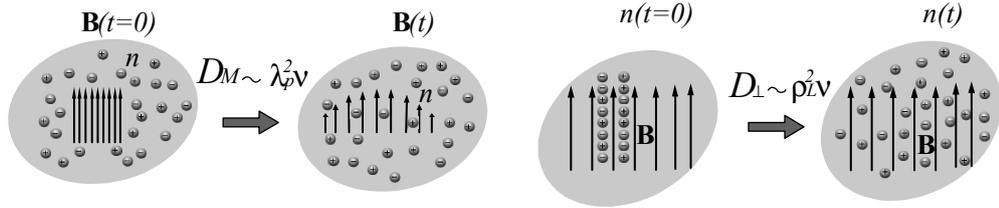
$$\text{Coefficient de diffusion magnétique} : \quad \underline{\underline{D_M \equiv \frac{1}{\mu_0 \eta} = \lambda_p^2 \nu_{ei}}}$$

Une question intéressante peut maintenant être tranchée : dans un mélange champ-plasma, la matière diffuse-t-elle plus vite dans le champ que le champ dans la matière ? La réponse est donnée par la valeur du rapport des coefficients

de diffusion c'est-à-dire par la valeur du rayon de Larmor sur la longueur de London.

$$\frac{D_{\perp}}{D_M} \approx \frac{\rho_L^2}{\lambda_p^2} \approx \frac{v_T^2 \omega_p^2}{c^2 \omega_c^2} \approx \beta$$

Ainsi, dans un tokamak ($\beta < 1$) le champ diffuse plus vite dans le plasma que le plasma dans le champ.



La dynamique du champ magnétique ne se restreint pas à un processus de diffusion ; lorsque le plasma est en mouvement, le couplage champ-matière, à travers les courants d'induction et la force de Laplace, autorise un entraînement du champ par le plasma et du plasma par le champ. Pour étudier ce phénomène considérons le modèle précédent en présence d'un écoulement fluide de vitesse \mathbf{V} où la loi d'Ohm est modifiée pour prendre en compte le fait qu'elle s'applique dans le repère au repos du plasma où le champ électrique doit être complété par le terme électromoteur de Lorentz $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$.

$$\text{Equations de Maxwell} : \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

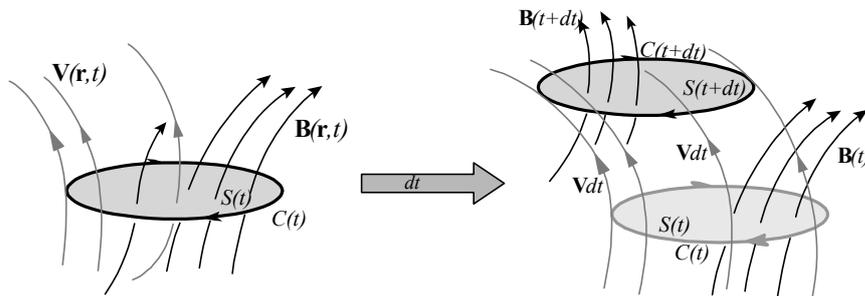
$$\text{Loi d'Ohm pour un milieu en mouvement} : \mathbf{J} = \eta (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})$$

Éliminons le courant et le champ électrique entre ces trois équations pour obtenir l'équation dite de convection-diffusion du champ magnétique.

$$\text{Equation de convection-diffusion : } \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = D_M \Delta \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B})$$

Le transport du champ apparaît comme la combinaison d'un terme convectif, $\nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B})$, que nous analyserons plus en détail à l'aide du théorème d'Alfvén, et du terme de diffusion magnétique $D_M \Delta \mathbf{B}$, identifié précédemment dans le cadre de l'étude de la relaxation électronique.

L'hypothèse d'écrantage dynamique du champ électrique dans le repère du plasma : $\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$, dans le cadre de laquelle nous avons identifié la vitesse d'Alfvén, conduit à un comportement remarquable du plasma où les particules et le champ évoluent de concert, ce résultat constitue le théorème d'Alfvén que nous allons démontrer et commenter.



Soit un fluide MHD idéal de vitesse \mathbf{V} , la dynamique des champs électrique \mathbf{E} et magnétique \mathbf{B} est contrainte par l'équation de Maxwell-Faraday et l'hypothèse d'idéalité.

$$\begin{aligned} \text{MHD idéale} & : \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \\ \text{Maxwell-Faraday} & : \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

Considérons une courbe fermée, $\mathcal{C}(t)$, plongée dans ce fluide et attachée à ce fluide, c'est-à-dire une courbe convectée et déformée par l'écoulement. Soit $\mathcal{S}(t)$ une surface orientée s'appuyant sur $\mathcal{C}(t)$. Cette courbe est entraînée par l'écoulement du fluide et se déforme sous l'effet de l'inhomogénéité de l'écoulement. De même cet écoulement modifie la valeur du champ magnétique. Malgré ces variations de champ et l'évolution de la surface $\mathcal{S}(t)$, le flux du champ magnétique $\Phi(t)$ à travers la courbe $\mathcal{C}(t)$ reste constant. Pour démontrer ce théorème, dit du flux, considérons la variation temporelle du flux $\Phi(t)$ durant un temps dt .

$$\begin{aligned} d\Phi &= \iint_{\mathcal{S}(t+dt)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t+dt) \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\mathcal{S}(t)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iint_{\mathcal{S}(t+dt)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\mathcal{S}(t)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\mathcal{S}(t+dt)} dt \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

Le flux du champ magnétique à travers toute surface fermée étant nul, la somme des deux premiers termes du deuxième membre est égale aux flux de \mathbf{B} à travers la surface balayée par la courbe pendant la durée infinitésimale dt . Le flux à travers cette surface latérale infinitésimale peut être exprimé comme la circulation le long de la courbe de l'élément de surface latérale engendrée par le mouvement de la courbe : $d\mathbf{l} \times \mathbf{V} dt$. La variation de flux précédente se réécrit donc :

$$d\Phi = - \oint_{\mathcal{C}(t)} \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{V}) dt + \iint_{\mathcal{S}(t)} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} dt + O(dt^2)$$

Le produit mixte du premier terme du deuxième membre peut être réarrangé pour faire apparaître la circulation du champ $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ le long de la courbe \mathcal{C} ; quant au deuxième terme il peut être exprimé en fonction du champ électrique à travers l'équation de Maxwell-Faraday. Nous obtenons ainsi la différence entre deux termes que le théorème de Stokes rend égaux. La variation de flux est donc nulle.

$$\frac{d\Phi}{dt} = - \oint (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} + \iint \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \iint \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Ce résultat constitue le premier théorème d'Alfvén ou théorème du flux.

$$\text{Théorème d'Alfvén : } \frac{d\Phi[\mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \mathcal{C}[\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)]]}{dt} = 0$$

Cette propriété étant vraie pour un circuit quelconque, elle implique un très fort couplage entre le fluide et le champ et permet de dégager une image physique

où le fluide et le champ sont attachés dans une évolution commune. Un plasma initialement non magnétisé le restera au cours de son évolution et, en particulier, s'il rencontre un champ magnétique il le déformera afin de maintenir un champ nul en son sein. De même un plasma initialement magnétisé le restera et, si il est entraîné par une force il entraînera avec lui le champ magnétique en le déformant. En effet, une force \mathbf{F} appliquée perpendiculairement à un champ magnétique engendre une vitesse de dérive $\mathbf{F} \times \mathbf{B}/qB^2$ dont le sens est fonction de la charge q de l'espèce considérée, ainsi un courant \mathbf{J} est généré et ce courant est la source d'un champ magnétique qui est à l'origine de la déformation, en apparence mécanique, du champ.

2.4.3 Nombre de Reynolds

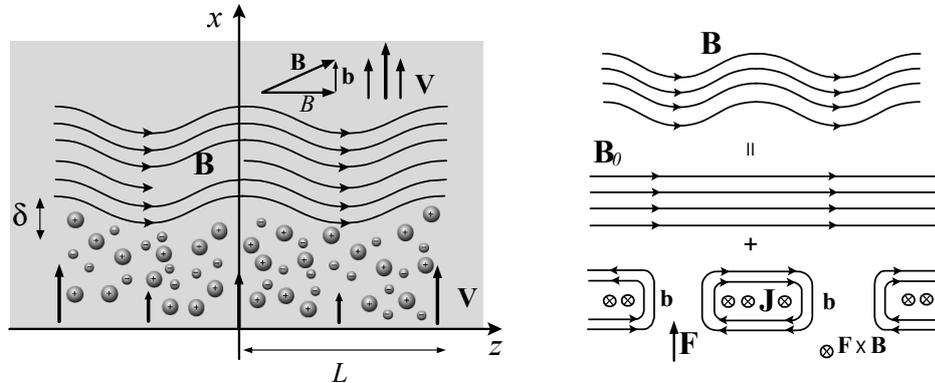
L'ordre de grandeur du rapport du terme de convection magnétique sur le terme de diffusion magnétique permet d'introduire le nombre de Reynolds magnétique. Normalisons les vitesses à une vitesse caractéristique V et les longueurs à une longueur caractéristique L : $\mathbf{v} = \mathbf{V}/V$ et $\mathbf{X} = \mathbf{x}/L$, l'équation de transport magnétique en régime stationnaire se réécrit sous forme normalisée :

$$\text{Convection-diffusion: } D_M \Delta \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{0} \rightarrow \Delta \mathbf{B} + \mathcal{R} \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{0}$$

où nous faisons apparaître le nombre de Reynolds magnétique $\mathcal{R}_M = \mu_0 \eta V L$ comme paramètre de contrôle de l'équation du transport magnétique stationnaire.

$$\text{Nombre de Reynolds magnétique: } \mathcal{R} \equiv \frac{[\text{Convection du champ}]}{[\text{Diffusion du champ}]} \approx \frac{VL}{D_M} \approx \frac{VL}{\lambda_p^2 \nu_{ei}}$$

- Si $\mathcal{R}_M \rightarrow +\infty$ ($\eta \rightarrow +\infty$) le mélange diffusif champ-plasma est extrêmement lent car $D_M \rightarrow 0$; le terme de convection est alors dominant et la dynamique du fluide MHD est dite idéale.
- Si $\mathcal{R}_M \rightarrow 0$, la dynamique du plasma est contrôlée par sa résistivité et la diffusion devient dominante.



Il est instructif d'étudier le phénomène de pénétration en présence d'un écoulement et de calculer la longueur de pénétration dynamique δ qui avec λ_p et λ_K constituent les trois longueurs caractéristiques d'interaction entre un champ magnétique et un plasma, selon la situation. Considérons, en régime stationnaire,

un écoulement $\mathbf{V} = V \cos(z/L) \mathbf{u}_x$ interagissant avec un champ magnétique $\mathbf{B} = b(z)\mathbf{u}_x + B\mathbf{u}_z$. Le champ obéit à l'équation du transport magnétique: .

$$\Delta \mathbf{B} + \mu_0 \eta \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) = \mathbf{0} \rightarrow \frac{d^2 b}{dz^2} = \mathcal{R} \frac{B}{L^2} \sin\left(\frac{z}{L}\right)$$

où $\mathcal{R} = \mu_0 \eta V L$. L'équation des lignes de champ, $x(z)$, est donc donnée par $dx/dz = b(z)/B$ et l'amplitude de la déformation des lignes de champ définit la longueur de pénétration δ .

$$\frac{dx}{dz} = -\mathcal{R} \sin \frac{z}{L} \rightarrow x(z) = L\mathcal{R} \cos\left(\frac{z}{L}\right) \rightarrow \delta = \mathcal{R}L$$

- Ainsi, si $\mathcal{R} \gg 1$, c'est-à-dire pour les faibles dissipations et les grandes vitesses, nous retrouvons le théorème du gel et l'écoulement enfonce le champ mais ne diffuse pas à l'intérieur de la zone magnétisée

- et, si $\mathcal{R} \ll 1$, il n'y a pas de déformation des lignes de champ et le champ diffuse dans la zone magnétisée.

	$\mathcal{R} < 1$	$\mathcal{R} = 0$	$\mathcal{R} > 1$
$\beta < 1$	Diffusion du champ	Plasma confiné par le champ	Convection par le champ
$\beta > 1$	Diffusion du plasma	Champ expulsé par le plasma	Convection par le plasma

Le tableau ci-dessus résume l'ensemble des régimes d'interactions champ magnétique-plasma en fonction du paramètre β et du nombre de Reynolds magnétique \mathcal{R} .

Chapitre 3

Ondes : Dispersion et Résonances

Le problème du chauffage des plasmas thermonucléaires peut sembler, en première analyse, insoluble. En effet, pour allumer un plasma thermonucléaire il est nécessaire de le porter à une température de l'ordre de cent millions de degrés. Or, l'usage, pour chauffer un milieu, est de le mettre en contact avec une source d'enthalpie plus chaude, ce qui est impossible pour les plasmas thermonucléaires car les meilleures sources d'enthalpie ne dépassent pas quelques dizaines de milliers de degrés. On peut alors se tourner vers la conversion de travail en chaleur (transformation de Joule-Rumford), mais un plasma thermonucléaire est très faiblement dissipatif, et à une température de l'ordre de cent millions de degrés, les collisions sont inopérantes pour assurer une production d'entropie significative associée à la dégradation d'un travail par friction collisionnelle entre le mouvement d'oscillation d'une population au sein d'une autre population au repos. Néanmoins, il est possible de transférer irréversiblement l'énergie d'un champ électromagnétique vers un plasma thermonucléaire en utilisant l'existence du régime chaotique de l'interaction onde-particule. En effet, dans ce régime d'interaction, la complexité de la réponse du plasma à un champ électrique induit une décorrélation temporelle qui assure l'irréversibilité du transfert d'énergie, c'est-à-dire une production d'entropie significative associée à un chauffage efficace. Dans le cas d'un plasma thermonucléaires, à haute fréquence, ces courants sont essentiellement des courants de polarisation.

	Fréquence	Sources	Circuit
ICRH	50 – 100 [MHz]	Tétrodes	Lignes
LH	1 – 10 [GHz]	Klystrons	Guides
ECRH	100 [GHz]	Gyrotrons	Guides

Lorsque un plasma est excité par une onde électromagnétique, il est utile de définir le vecteur polarisation : $\mathbf{P} \equiv \sum_V q \delta \mathbf{r} / V$, le courant de polarisation : $\mathbf{J} \equiv \sum_V q \mathbf{v} / V$ et le déplacement électrique \mathcal{D} , où V est un élément de volume infinitésimal contenant les charges q de positions et vitesses \mathbf{r} et $\mathbf{v} \equiv \delta \mathbf{r} / \delta t$:

$$\text{Polarisation électrique} \quad : \quad \mathbf{P} \left[\frac{\text{C}}{\text{m}^2} \right] \equiv \langle q n \delta \mathbf{r} \rangle$$

$$\begin{aligned}
 \text{Densité de courant} & : \quad \mathbf{J} \left[\frac{\text{A}}{\text{m}^2} \right] \equiv q \langle n\mathbf{v} \rangle = q \frac{\langle n\delta\mathbf{r} \rangle}{\delta t} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \\
 \text{Déplacement électrique} & : \quad \mathcal{D} \left[\frac{\text{C}}{\text{m}^2} \right] \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \rightarrow \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}
 \end{aligned}$$

\mathcal{D} ainsi défini ne doit pas être confondu avec le tenseur de dispersion \mathbf{D} associé à l'onde.

$$\begin{aligned}
 \text{Conductivité } \boldsymbol{\sigma} \left[\frac{\text{S}}{\text{m}} \right] & : \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \equiv \int d\mathbf{r}' dt' \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, t \leftarrow \mathbf{r}', t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') \\
 \text{Permittivité } \boldsymbol{\varepsilon} \left[\frac{\text{F}}{\text{m}} \right] & : \quad \mathcal{D}(\mathbf{r}, t) \equiv \varepsilon_0 \int d\mathbf{r}' dt' \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}, t \leftarrow \mathbf{r}', t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t')
 \end{aligned}$$

Considérons un champ électrique harmonique du type $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E} \cos(\omega t + \varphi_E)$. La représentation complexe de ce champ est définie par la convention :

$$\text{Re} \left[\tilde{\mathbf{E}} \exp j\omega t \right] \equiv \text{Re} \left[\mathbf{E} \cos(\omega t + \varphi_E) + j\mathbf{E} \sin(\omega t + \varphi_E) \right]$$

Le champ complexe ainsi défini, $\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E} \exp(j\varphi_E)$, est d'un usage plus aisé. En général, lorsque un champ du type $\mathbf{E} \cos(\omega t + \varphi_E)$ est appliqué à un plasma, le courant \mathbf{J} et le déplacement électrique \mathcal{D} présentent deux composantes, une composante en phase avec l'excitation et une composante en quadrature de phase :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} \cos(\omega t) & \rightarrow \mathbf{J} = \boldsymbol{\sigma}''(\omega) \cdot \mathbf{E} \cos(\omega t) + \boldsymbol{\sigma}'(\omega) \cdot \mathbf{E} \sin(\omega t) \\
 \mathbf{E} \cos(\omega t) & \rightarrow \mathcal{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon}'(\omega) \cdot \mathbf{E} \cos(\omega t) + \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon}''(\omega) \cdot \mathbf{E} \sin(\omega t)
 \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{\sigma}'(\omega)$, $\boldsymbol{\varepsilon}'(\omega)$ et $\boldsymbol{\sigma}''(\omega)$, $\boldsymbol{\varepsilon}''(\omega)$ sont des coefficients réels. Introduisons la permittivité complexe $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\omega)$ et la conductivité complexe $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\omega)$; l'intérêt d'une telle définition réside dans la possibilité de relier les représentations complexes du champ, du courant et du déplacement à travers la relation : $\mathbf{E} \cos(\omega t + \varphi_E) \rightarrow \mathcal{D} = \text{Re } \tilde{\mathcal{D}} = \text{Re} \left[\varepsilon_0 \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\omega) \cdot \tilde{\mathbf{E}} \exp j\omega t \right]$, le courant de polarisation $\mathbf{J} = \partial \mathbf{P} / \partial t$ admet aussi une représentation complexe et la conductivité complexe $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\omega)$ peut être définie à partir de la permittivité complexe $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\omega)$: $\tilde{\mathbf{J}} \equiv \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\omega) \cdot \tilde{\mathbf{E}}$.

$$\begin{aligned}
 \text{Conductivité} & : \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\omega) \equiv j\omega\varepsilon_0 [\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\omega) - 1] \rightarrow \tilde{\mathbf{J}} \equiv \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\omega) \cdot \tilde{\mathbf{E}} \\
 \text{Permittivité} & : \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\omega) \equiv \boldsymbol{\varepsilon}'(\omega) - j\boldsymbol{\varepsilon}''(\omega) \rightarrow \tilde{\mathcal{D}} \equiv \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\omega) \cdot \tilde{\mathbf{E}}
 \end{aligned}$$

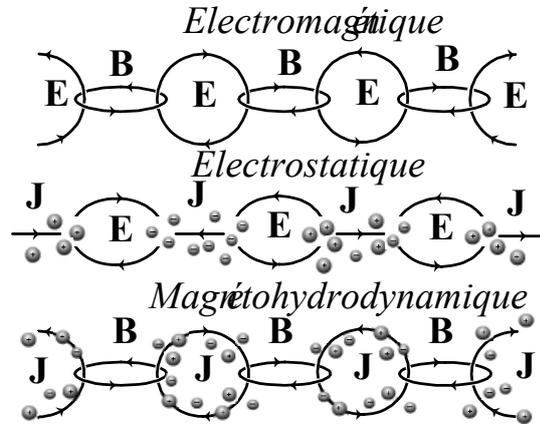
Associés à cet ensemble de fonctions complexes de la pulsation l'ensemble des signaux temporels dont elles constituent le spectre : $A(t) \equiv \int \tilde{A}(\omega) \exp(j\omega t) d\omega / 2\pi$, la relation courant-champ est un produit dans l'espace de Fourier $\tilde{\mathbf{J}}(\omega) = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\omega)$ et devient une convolution en représentation temporelle.

$$\begin{aligned}
 \text{Conductivité} & : \quad \tilde{\mathbf{J}}(\omega) = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\omega) \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\omega) \rightarrow \mathbf{J}(t) = \int dt' \boldsymbol{\sigma}(t-t') \cdot \mathbf{E}(t') \\
 \text{Permittivité} & : \quad \tilde{\mathcal{D}}(\omega) = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\omega) \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\omega) \rightarrow \mathcal{D}(t) = \int dt' \boldsymbol{\varepsilon}(t-t') \cdot \mathbf{E}(t')
 \end{aligned}$$

Les parties réelles de ces coefficients décrivent les phénomènes de réfraction, si l'on parle le langage de l'opticien, ou de puissance réactive, si l'on parle le

langage de l'électronicien ; les parties imaginaires, quant à elles, décrivent les phénomènes d'absorption ou de puissance active.

Ainsi, les ondes électromagnétiques constituent un moyen de chauffage des plasmas de tokamaks. Au sein d'un plasma magnétisé la relation de dispersion des ondes $\omega(\mathbf{k})$, entre pulsation ω et nombre d'onde \mathbf{k} , est radicalement différente de la relation de dispersion dans le vide $\omega = \pm kc$ car des courants de polarisation sont générés par les mouvements électronique et ionique. Différentes branches de dispersion, ou modes, apparaissent et l'étude de ces modes électromagnétiques s'établit branche par branche en considérant des directions particulières de propagation et des cas particuliers de polarisation.



Les ondes (ou modes) électromagnétiques se propageant (ou stationnaires) dans un tokamak sont des perturbations électromagnétiques couplées aux mouvements électroniques et ioniques. Dans le paragraphe suivant nous analyserons les modes dits fluides.

3.1 Dispersion

3.1.1 Modes électroniques

Ce paragraphe est consacré au développement de la théorie des ondes électromagnétiques hautes fréquences (10MHz-100GHz) dans les plasmas magnétisés tels que ceux utilisés dans les tokamaks. Compte tenu de l'anisotropie engendrée par le champ magnétique, une attention particulière devra être apportée à la spécification de la polarisation du champ électrique et de la direction de propagation.

Les quatre équations de base du modèle fluide sont les équations de (i) Maxwell-Ampère et (ii) Maxwell-Faraday qui permettent d'exprimer les champs en fonction des courants ; ainsi que (iii) l'équation de Newton linéarisée si nous négligeons les effets de compressibilité et de résonance :

$$\text{Equation de Maxwell-Faraday} : \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$$

$$\text{Equation de Maxwell-Ampère} : \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{J}_e - \mathbf{J}_i$$

$$\text{Equation de Newton} : m_{e,i} \frac{d\mathbf{v}_{e,i}}{dt} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v}_{e,i} \times \mathbf{B}_0$$

où \mathbf{B}_0 est le champ magnétique statique et $\mathbf{J} \equiv nq\mathbf{v}$ le courant associé à l'onde. Ce système, une fois linéarisé, admet des solutions somme d'une solution d'équilibre statique (N est la densité au repos, les champs électrique et magnétique oscillants sont nuls à l'équilibre) plus une perturbation harmonique dans le temps et l'espace : $\exp j[\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}]$, le mode plasma recherché.

$$\begin{aligned} \text{Champs} & : \quad \mathbf{E} \exp j[\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}], \quad \mathbf{H} \exp j[\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] \\ \text{Vitesses et courants} & : \quad \mathbf{v} \exp j[\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}], \quad \mathbf{J} \exp j[\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des équations régissant les comportements du champ et des populations ionique et électronique se réduit à un système algébrique linéaire homogène. Ce système possède des solutions non triviales si et seulement si son déterminant caractéristique est nul.

$$\begin{aligned} \text{Equation de Maxwell-Faraday} & : \quad \omega\mu_0\mathbf{H} = \mathbf{k} \times \mathbf{E} \\ \text{Equation de Maxwell-Ampère} & : \quad \omega\varepsilon_0\mathbf{E} = -\mathbf{k} \times \mathbf{H} + j\mathbf{J}_e + j\mathbf{J}_i \\ \text{Equation de Newton} & : \quad j\omega\mathbf{J}_{e,i} = \omega_{pe,i}^2\varepsilon_0\mathbf{E} + \omega_{ce,i}\mathbf{J}_{e,i} \times \mathbf{b} \end{aligned}$$

où $\mathbf{b} = \mathbf{B}_0/B_0$. L'équation linéaire d'inconnue $\mathbf{J}_{e,i}$ peut être résolue en formant les produits scalaire et vectoriel du courant avec \mathbf{b} : $j\omega\mathbf{J}_{e,i} \cdot \mathbf{b} = \omega_{pe,i}^2\varepsilon_0\mathbf{E} \cdot \mathbf{b}$ et $j\omega\mathbf{J}_{e,i} \times \mathbf{b} = \omega_{pe,i}^2\varepsilon_0\mathbf{E} \times \mathbf{b} + \omega_{ce,i}\mathbf{J}_{e,i} - \omega_{ce,i}(\mathbf{J}_{e,i} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}$, afin de substituer dans l'équation originale l'expression du produit vectoriel $\mathbf{J}_e \times \mathbf{b}$ en fonction du champ électrique \mathbf{E} . Ainsi les courants électronique \mathbf{J}_e et ionique \mathbf{J}_i sont donnés par :

$$\mathbf{J} = -j\omega \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} \varepsilon_0 \left[\mathbf{E} - j\frac{\omega_c}{\omega} \mathbf{E} \times \mathbf{b} - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b} \right]$$

La permittivité diélectrique $\boldsymbol{\varepsilon}$ reliant le champ électrique \mathbf{E} à la somme des courants particuliers et du courant de déplacement $j\omega\varepsilon_0\mathbf{E}$: $\varepsilon_0\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} \equiv \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{J}/j\omega$ est de nature tensorielle.

$$\text{Permittivité : } \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & -j\varepsilon_{\times} & 0 \\ j\varepsilon_{\times} & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix}$$

Restreignons l'analyse, dans un premier temps aux modes hautes fréquences où seule la population ionique est mise en mouvement ; les ions, de par leur inertie, seront supposés rester au repos. L'axe des z étant aligné suivant la direction du champ magnétique, l'expression de \mathbf{J}_e permet d'exprimer les éléments du tenseur diélectrique $\boldsymbol{\varepsilon}(\omega)$:

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \varepsilon_{\perp} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2}, \quad \varepsilon_{\times} = -\frac{\omega_c}{\omega} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_c^2}$$

La relation de dispersion, $\omega(\mathbf{k})$, ou diagramme de Brillouin, des différents modes est obtenue en considérant plusieurs modèles approchés pour les courants électronique et ionique $\mathbf{J}_i(\omega, \mathbf{k})$ et $\mathbf{J}_e(\omega, \mathbf{k})$. Le diagramme de Brillouin est particulièrement utile pour discuter les couplages de modes qui doivent vérifier la conservation de l'énergie et de l'impulsion. Cette remarque plaide pour une étude détaillée de la dispersion $\omega(\mathbf{k})$ et du diagramme de Brillouin, nous allons

donc nous attacher à établir et analyser la relation de dispersion pour les perturbations électromagnétiques électronique et ionique dans un plasma. Dans un tokamak, l'usage est de définir et d'utiliser l'indice de l'onde \mathbf{N} :

$$\text{Indice : } \mathbf{N} \equiv \frac{\mathbf{k}c}{\omega}$$

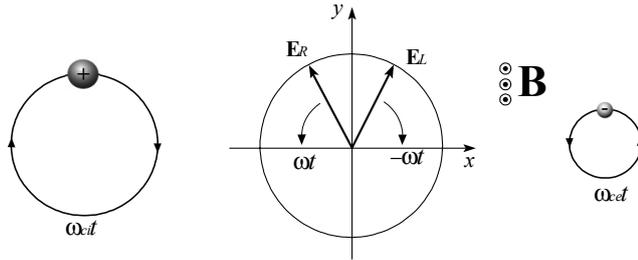
L'élimination du champ magnétique et du courant (de la vitesse) entre les équations de Maxwell-Faraday, Maxwell-Ampère et Euler permet d'exprimer le champ électrique comme la solution de l'équation linéaire homogène :

$$\text{Dispersion : } \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \equiv \frac{\omega^2}{c^2} [\mathbf{N} \times (\mathbf{N} \times \mathbf{E}) + \boldsymbol{\varepsilon}(\omega) \cdot \mathbf{E}] = \mathbf{0} \rightarrow \det \mathbf{D} \equiv D = 0$$

où nous avons défini le tenseur de dispersion $\mathbf{D}(\mathbf{N}, \omega)$ et l'équation de dispersion $D(\mathbf{N}, \omega) = 0$. Distinguons la propagation parallèle au champ statique et la propagation perpendiculaire à ce champ et commençons par l'étude du premier cas. Considérons la relation précédente sur une base orthonormée directe $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ associée à un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) tel que : $\mathbf{b} = (0, 0, 1)$ et $\mathbf{N} = (0, 0, N_{\parallel})$.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} - N_{\parallel}^2 & -j\varepsilon_{\times} & 0 \\ j\varepsilon_{\times} & \varepsilon_{\perp} - N_{\parallel}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons déjà étudié les modes de Böhm-Gross qui dans la limite froide ne sont autres que les modes plasmons et peuvent se propager le long des lignes de champ.



Nous les retrouvons ici comme la troisième racine de l'équation de dispersion : $\varepsilon_{\parallel}(\omega) = 0 \rightarrow \omega = \omega_p$ et $E_x = 0$, $E_y = 0$, $E_z \neq 0$. Deux modes transverses peuvent aussi se propager le long des lignes de champ. Ils sont solutions du système linéaire homogène réduit :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} - N_{\parallel}^2 & -j\varepsilon_{\times} \\ j\varepsilon_{\times} & \varepsilon_{\perp} - N_{\parallel}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \varepsilon_{\perp} - N_{\parallel}^2 = \pm \varepsilon_{\times}$$

Le mode gauche ou L (pour left) et le mode droit ou R (pour right), présentent tous deux une polarisation circulaire et leurs relations de dispersion sont obtenues en annulant le déterminant du système linéaire : $N_{\parallel}^2 = (\varepsilon_{\perp} \pm \varepsilon_{\times})$. Les

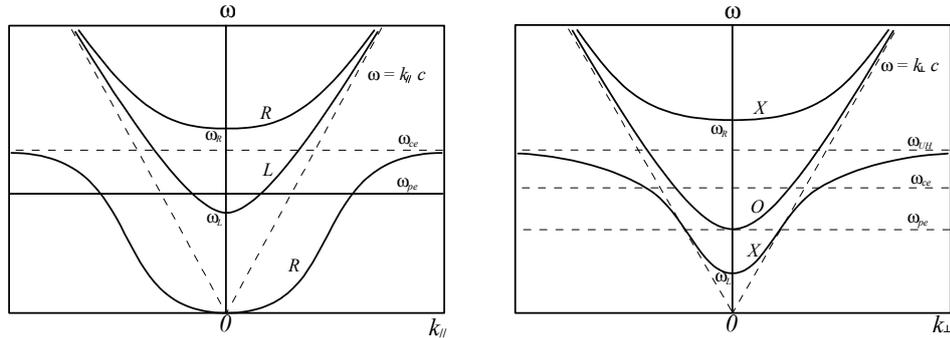
modes R et L présentent deux coupures en dessous desquelles ils sont évanescents, la coupure droite ω_R et la coupure gauche ω_L .

Coupures	Valeur
Gauche : $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{\times}$	$\omega_L = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \frac{\omega_{ce}^2}{4} - \frac{\omega_{ce}}{2}}$
Droite : $\varepsilon_{\perp} = -\varepsilon_{\times}$	$\omega_R = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \frac{\omega_{ce}^2}{4} + \frac{\omega_{ce}}{2}}$

Le mode R présente une résonance. On notera, en rétablissant la dépendance temporelle réelle, que le mode R tourne dans le sens direct (trigonométrique) : $E_x/E_y = j$ et que le mode L tourne dans le sens indirect (des aiguilles d'une montre) : $E_x/E_y = -j$. La polarisation peut être décomposée comme la somme d'une polarisation gauche $E_L = E_x + jE_y$ plus une polarisation droite $E_R = E_x - jE_y$

$$\text{Modes L : } N_{\parallel} = \sqrt{\frac{(\omega - \omega_L)(\omega + \omega_R)}{\omega(\omega + \omega_{ce})}}, \text{ R : } N_{\parallel} = \sqrt{\frac{(\omega + \omega_L)(\omega - \omega_R)}{\omega(\omega - \omega_{ce})}}$$

Le mouvement de rotation cyclotronique des électrons étant aussi dans le sens direct, le couplage onde R-électrons devient résonant lorsque $\omega \approx \omega_{ce}$. C'est effectivement le cas et le vecteur d'onde k_{\parallel} présente une résonance pour $\omega = \omega_{ce}$, cette valeur n'est atteinte que pour un vecteur d'onde infini. Lorsqu'une onde transverse, polarisée linéairement, se propageant dans le vide, pénètre dans un plasma de tokamak en se propageant dans la direction du champ magnétique, alors, comme les seuls modes propres du plasma sont les modes L et R, nous devons décomposer la polarisation linéaire en une superposition des polarisations circulaires R et L. Les ondes R et L possédant des vitesses de phase différentes, à la sortie du plasma le plan de polarisation linéaire de l'onde aura tourné par accumulation de déphasages entre les composantes R et L, c'est l'*effet Faraday*.



De façon similaire, les conditions de propagation dans la direction perpendiculaire au champ, $\mathbf{b} = (0, 0, 1)$, $\mathbf{N} = (N_{\perp}, 0, 0)$, s'établissent ainsi :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & -j\varepsilon_{\times} & 0 \\ j\varepsilon_{\times} & \varepsilon_{\perp} - N_{\perp}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} - N_{\perp}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'analyse de ces conditions de propagation conduit à distinguer deux modes : le mode ordinaire (O) et le mode extraordinaire (X). Le mode ordinaire possède

une polarisation droite parallèle au champ magnétique statique \mathbf{B}_0 , il est obtenu comme la solution de l'équation réduite : $\varepsilon_{\parallel} - N_{\perp}^2 = 0$ et $E_x = 0, E_y = 0, E_z \neq 0$, du système linéaire homogène précédent.

$$\text{Mode O : } N_{\perp} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_{pe}^2}}{\omega}$$

Lorsque le champ électrique est parallèle au champ magnétique statique, la dispersion des photons est peu modifiée. En effet, l'oscillation électronique étant suivant la direction du champ statique, elle n'est pas couplée au mouvement cyclotronique. Le mode extraordinaire possède une polarisation elliptique et n'est pas purement transverse : $E_x \neq 0, E_y \neq 0, E_z = 0$. Il est solution du système réduit :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & -j\varepsilon_{\times} \\ j\varepsilon_{\times} & \varepsilon_{\perp} - N_{\perp}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow N_{\perp}^2 = \frac{\varepsilon_{\perp}^2 - \varepsilon_{\times}^2}{\varepsilon_{\perp}}$$

L'introduction des pulsations de coupure droite et gauche permet d'exprimer cette relation de dispersion en faisant apparaître la résonance hybride haute.

$$\text{Mode X : } N_{\perp} = \sqrt{\frac{(\omega^2 - \omega_R^2)(\omega^2 - \omega_L^2)}{\omega^2(\omega^2 - \omega_{uh}^2)}}$$

3.1.2 Modes ioniques

A haute fréquence l'impact du mouvement des ions est négligeable compte tenu de leur inertie. Par contre, à basse fréquence l'étude des dérives électriques nous a appris que, malgré leur masse élevée, les ions pouvaient être la source de courants dominants dans un plasma. Nous allons donc aborder la question de l'impact de la dynamique ionique sur la partie basse fréquence des différents modes. La permittivité diélectrique $\boldsymbol{\varepsilon}$ reliant le champ électrique \mathbf{E} à la somme des courants de déplacement, électronique et ioniques est défini suivant : $\varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{J}_e / j\omega + \mathbf{J}_i / j\omega$ ainsi les éléments du tenseur diélectrique sont modifiés pour prendre en compte la polarisation ionique, nous utiliserons la convention $\omega_{ci} > 0$ et $\omega_{ce} > 0$.

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}, \varepsilon_{\perp} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2}, \varepsilon_{\times} = -\frac{\omega_{ce}}{\omega} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} + \frac{\omega_{ci}}{\omega} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2}$$

En propagation parallèle aux lignes de champ ($\mathbf{b} = (0, 0, 1)$, $\mathbf{N} = (0, 0, N_{\parallel})$), les relations de dispersion des modes L et R sont obtenues en annulant le déterminant du système linéaire : $N_{\parallel}^2 = (\varepsilon_{\perp} \pm \varepsilon_{\times})$, ainsi, les fréquences de coupures droite et gauche sont faiblement modifiées :

$$\frac{\omega_R}{\omega_L} = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \frac{\omega_{ce}^2}{4} + \omega_{ce}\omega_{ci} \pm \frac{\omega_{ce}}{2}}$$

par contre, les relations de dispersion présentent une nouvelle résonance ionique pour le mode L ; en effet, le sens de rotation cyclotronique des ions est indirect

(sens des aiguilles d'une montre).

$$\text{Modes L : } \overline{\overline{N_{\parallel}^2}} = \frac{(\omega - \omega_L)(\omega + \omega_R)}{(\omega + \omega_{ce})(\omega - \omega_{ci})}, \quad \text{R : } \overline{\overline{N_{\parallel}^2}} = \frac{(\omega + \omega_L)(\omega - \omega_R)}{(\omega - \omega_{ce})(\omega + \omega_{ci})}$$

Considérons la limite asymptotique $\omega \rightarrow 0$. Suivant cette limite, nous observons que les éléments du tenseur diélectrique approchent les valeurs suivantes :

$$\varepsilon_{\parallel} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}, \quad \varepsilon_{\perp} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \frac{c^2}{V_A^2}, \quad \varepsilon_{\times} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} -\frac{c^2}{V_A^2} \frac{\omega}{\omega_{ci}}$$

où nous avons introduit la vitesse d'Alfvén, $V_A/c = \omega_{ci}/\omega_{pi}$, identifiée au chapitre deux. A très basse fréquence, la relation de dispersion des modes R et L se simplifie et présente une dégénérescence car les deux solutions se confondent pour donner l'onde d'Alfvén.

$$\text{R, L} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \text{Onde d'Alfvén torsionnelle : } N_{\parallel} = \frac{c}{V_A}$$

Les effets d'inertie ionique finie permettent de lever cette dégénérescence et de séparer deux branches ioniques basses fréquences correspondant aux modes L et R hautes fréquences.

$$\text{Modes L : } \frac{c}{V_A} = N_{\parallel} \sqrt{1 - \frac{\omega}{\omega_{ci}}}, \quad \text{R : } \frac{c}{V_A} = N_{\parallel} \sqrt{1 + \frac{\omega}{\omega_{ci}}}$$

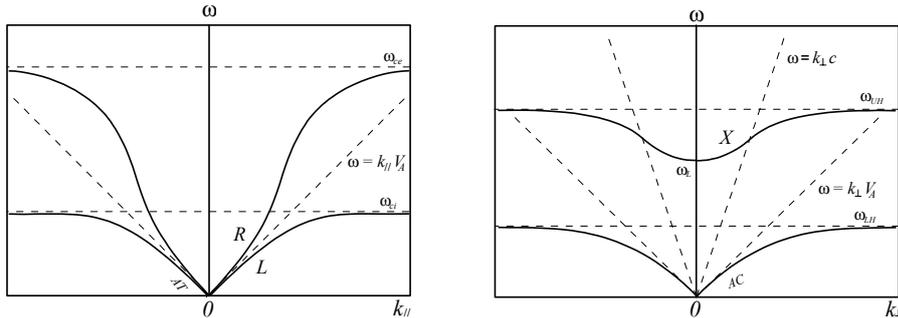
Pour ce qui concerne l'impact de la dynamique ionique sur le régime basse fréquence des modes se propageant perpendiculairement au champ magnétique, ($\mathbf{b} = (0, 0, 1)$, $\mathbf{N} = (N_{\perp}, 0, 0)$) la relation de dispersion $N_{\perp}^2 = \varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\times}^2/\varepsilon_{\perp}$ est modifiée et présente une nouvelle résonance, la résonance hybride basse ω_{lh} identifiée au chapitre deux.

$$\text{Mode Extraordinaire X : } \overline{\overline{N_{\perp}^2}} = \frac{(\omega^2 - \omega_R^2)(\omega^2 - \omega_L^2)}{(\omega^2 - \omega_{lh}^2)(\omega^2 - \omega_{uh}^2)}$$

La limite très basse fréquence pour le mode extraordinaire : $N_{\perp}^2 = \varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\times}^2/\varepsilon_{\perp} \rightarrow \omega^2 \varepsilon_{\perp}$ conduit à l'identification du mode d'Alfvén compressionnel.

$$\text{X} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \text{Onde d'Alfvén compressionnelle AC : } N_{\perp} = \frac{V_A}{c} \left(1 + \frac{V_A^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Les ondes d'Alfvén (A et AC) sont aussi appelées ondes magnétohydrodynamiques.



En effet leur propagation modifie la structure du champ magnétique statique à travers des ondulations et compressions de lignes de champ et une partie significative de l'énergie est sous forme magnétique.

Dispersion		Modes d'Alfvén	Dispersion
X	$N_{\perp}^2 = \frac{(\omega^2 - \omega_R^2)(\omega^2 - \omega_L^2)}{(\omega^2 - \omega_{lh}^2)(\omega^2 - \omega_{uh}^2)}$	Compressionnel X	$N_{\perp} \approx \frac{c}{V_A} \left(1 + \frac{V_A^2}{2c^2} \dots\right)$
R	$N_{\parallel}^2 = \frac{(\omega - \omega_L)(\omega + \omega_R)}{(\omega + \omega_{ce})(\omega - \omega_{ci})}$	Torsionnel R	$N_{\parallel} \approx \frac{c}{V_A} \left(1 - \frac{\omega}{2\omega_{ci}} \dots\right)$
L	$N_{\parallel}^2 = \frac{(\omega + \omega_L)(\omega - \omega_R)}{(\omega - \omega_{ce})(\omega + \omega_{ci})}$	Torsionnel L	$N_{\parallel} \approx \frac{c}{V_A} \left(1 + \frac{\omega}{2\omega_{ci}} \dots\right)$

Le tableau ci-dessus résume l'impact de la dynamique ionique sur les modes électroniques R, L et X ; le mode O n'est pas altéré par les mouvements ioniques.

3.1.3 Coupures et Résonances

Jusqu'à présent, nous avons étudié et analysé les modes électroniques et ioniques se propageant le long et perpendiculairement au champ magnétique statique \mathbf{B}_0 . L'étude des ondes dans les plasmas magnétisés sous incidence quelconque par rapport à la direction de référence du champ magnétique se conduit de façon similaire à travers l'identification des différentes branches solutions de l'équation de dispersion $D(N_{\perp}, N_{\parallel}, \omega) = 0$.

Dans ce paragraphe, nous nous contenterons d'analyser les phénomènes de coupure et de résonance pour le cas de l'incidence quelconque sans présenter le détail de l'étude, branche par branche, de la relation de dispersion. Pour une onde d'indice $(N_{\perp}, 0, N_{\parallel}) = (N \sin \theta, 0, N \cos \theta)$, la recherche de solutions non triviales du système linéarisé décrivant la dynamique des champs et des particules se ramène à la recherche des conditions d'annulation du déterminant D .

$$Dispersion : D \equiv \det \left(\frac{c^2}{\omega^2} \mathbf{D} \right) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} \varepsilon_{\perp} - N_{\parallel}^2 & -j\varepsilon_{\times} & N_{\perp}N_{\parallel} \\ j\varepsilon_{\times} & \varepsilon_{\perp} - N_{\parallel}^2 - N_{\perp}^2 & 0 \\ N_{\perp}N_{\parallel} & 0 & \varepsilon_{\parallel} - N_{\perp}^2 \end{vmatrix} = 0$$

Le problème de la dispersion présente trois inconnues N_{\perp} , N_{\parallel} et ω et l'équation de dispersion $D(N_{\perp}, N_{\parallel}, \omega) = 0$ est de nature scalaire, aussi il est seulement possible d'exprimer l'une des trois inconnues en fonction des deux autres et des paramètres du plasma. Dans le contexte de l'étude des ondes dans les plasmas thermonucléaires la pulsation ω constitue une donnée fixée par le générateur radiofréquence ou micro-onde et l'équation de dispersion est de nature quadratique quelque soit le choix de l'inconnue associée à l'indice N_{\perp} , N_{\parallel} ou N . Introduisons les coefficients a , b et c ; alors, la relation de dispersion $D = 0$ conduit à l'étude de trois équations bicarrées :

$$\begin{aligned} D(N_{\perp}, N_{\parallel}, \omega) &= 0 \rightarrow aN^4 - bN^2 + c = 0 \rightarrow N(\theta, \omega) \\ D(N_{\perp}, N_{\parallel}, \omega) &= 0 \rightarrow a'N_{\parallel}^4 - b'N_{\parallel}^2 + c' = 0 \rightarrow N_{\parallel}(N_{\perp}, \omega) \\ D(N_{\perp}, N_{\parallel}, \omega) &= 0 \rightarrow a''N_{\perp}^4 - b''N_{\perp}^2 + c'' = 0 \rightarrow N_{\perp}(N_{\parallel}, \omega) \end{aligned}$$

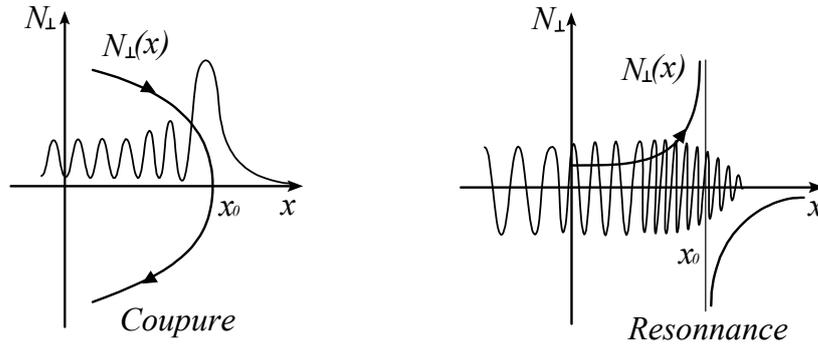
Pour les deux premiers cas les coefficients sont donnés dans le tableau ci-dessous.

D	$aN^4 - bN^2 + c = 0$	$aN_{\parallel}^4 - bN_{\parallel}^2 + c = 0$
a	$\varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \varepsilon_{\parallel} \cos^2 \theta$	ε_{\parallel}
b	$\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel} (1 + \cos^2 \theta) + (\varepsilon_{\perp}^2 - \varepsilon_{\times}^2) \sin^2 \theta$	$2\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} - N_{\perp}^2 (\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_{\parallel})$
c	$\varepsilon_{\parallel} (\varepsilon_{\perp}^2 - \varepsilon_{\times}^2)$	$(\varepsilon_{\perp} N_{\perp}^2 - \varepsilon_{\perp}^2 + \varepsilon_{\times}^2) (N_{\perp}^2 - \varepsilon_{\parallel})$

Dans un tokamak, les ondes destinées au chauffage sont lancées depuis la périphérie du plasma à une fréquence $\omega/2\pi$ fixée par le générateur et suivant un vecteur d'onde dans la direction toroïdale, sensiblement égale à la direction parallèle au champ, fixée par la structure de couplage. La composante N_{\parallel} évolue donc peu au cours de la propagation vers le centre du plasma car les variations de densités et de champs, qui déterminent les variations d'indice, sont principalement radiales et poloïdales (ε_{\parallel} , ε_{\perp} et ε_{\times} sont fonction de r et θ mais ne dépendent pas de φ). Suivant la direction toroïdale le plasma ne présente pas de gradient de densité ou de champ magnétique ; ainsi la loi de Descartes implique la constance de N_{\parallel} . Nous établirons ce résultat dans le chapitre consacré aux chauffages. L'analyse de la propagation des ondes électromagnétiques dans un tokamak nécessite donc l'étude de la relation de dispersion :

D	$aN_{\perp}^4 - bN_{\perp}^2 + c = 0$
a	ε_{\perp}
b	$(\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_{\parallel}) (\varepsilon_{\perp} - N_{\parallel}^2) - \varepsilon_{\times}^2$
c	$\varepsilon_{\parallel} (\varepsilon_{\perp} - N_{\parallel}^2)^2 - \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\times}^2$

Suivons la trajectoire d'un paquet d'ondes dans le plan de section poloïdale, le vecteur d'onde perpendiculaire, c'est-à-dire l'indice perpendiculaire N_{\perp} , évolue car la densité et le champ magnétique ne sont pas uniforme.



Soit (r, θ) un paramétrage de la trajectoire de ce paquet d'ondes dans le plan poloïdal, pour un couple (ω, N_{\parallel}) fixé par le générateur et l'antenne d'indice perpendiculaire est donc fonction de la position : $N_{\perp}(\omega, N_{\parallel}, r, \theta)$; les points où l'indice $N_{\perp}(r, \theta)$ s'annule, sont les *coupures* et des points où il devient infini, ce sont les *résonances*. Au voisinage d'une coupure l'onde devient évanescente et est réfléchiée ; au voisinage d'une résonance l'onde est quasi-électrostatique et est absorbée.

	Résonances	Coupures
Condition	$a = \varepsilon_{\perp} = 0$	$c = \varepsilon_{\parallel} \left(\varepsilon_{\perp} - N_{\parallel}^2 \right)^2 - \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\times}^2 = 0$
Phénomènes	Absorption, Conversion	Evanescence, Réflexion
Puissance	Transfert de puissance active	Localisation de puissance réactive

Ainsi, tout l'art du chauffage des plasmas thermonucléaires, pour une fréquence fixée par le générateur et un indice parallèle imposé par la structure de couplage, consiste à identifier les résonances $N_{\perp} = \infty$ et les coupures $N_{\perp} = 0$ pour évaluer la possibilité d'atteindre une zone centrale où une forte absorption est attendue. On qualifie cette analyse d'étude de *l'accessibilité* de l'onde. Le modèle le plus simple permettant d'évaluer l'accessibilité d'une onde consiste à négliger les variations poloïdales de l'amplitude du champ et à considérer un profil parabolique des densités électronique et ionique.

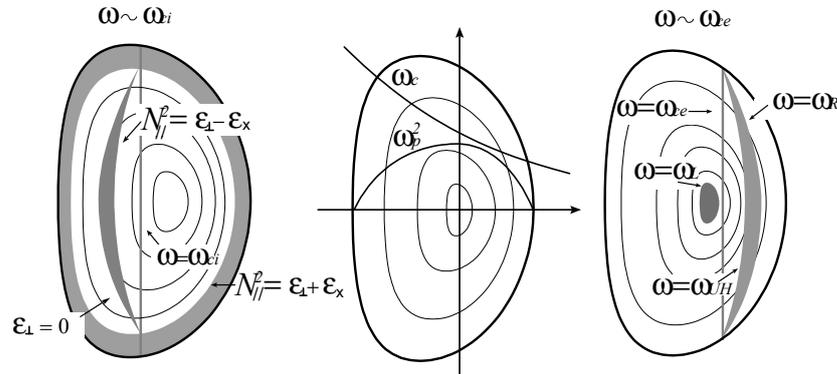
$$\omega_p^2 \approx \omega_{p0}^2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right), \quad \omega_c \approx \omega_{c0} \left(\frac{R_0}{R} \right)$$

A haute fréquence, au voisinage de la fréquence cyclotronique électronique évaluée sur l'axe magnétique, les lieux géométriques associés aux coupures droites et gauche, ainsi qu'aux résonances cyclotronique électronique et hybride haute sont représentées sur la figure ci-dessous.

$$\text{Coupure gauche} : \omega = \sqrt{\omega_{pe}^2(r) + \frac{\omega_{ce}^2(R)}{4}} - \frac{\omega_{ce}(R)}{2}$$

$$\text{Coupure droite} : \omega = \sqrt{\omega_{pe}^2(r) + \frac{\omega_{ce}^2(R)}{4}} + \frac{\omega_{ce}(R)}{2}$$

$$\text{Résonance hybride haute} : \omega = \sqrt{\omega_{pe}^2(r) + \omega_{ce}^2(R)}$$



$$\text{Coupure basse densité} : N_{\parallel}^2 = \varepsilon_{\perp} + \varepsilon_{\times} \approx \frac{\omega_{pi}^2(r)}{\omega_{ci}(R) [\omega + \omega_{ci}(R)]}$$

$$\text{Coupure haute densité} : N_{\parallel}^2 = \varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\times} \approx -\frac{\omega_{pi}^2(r)}{\omega_{ci}(R) [\omega - \omega_{ci}(R)]}$$

$$\text{Résonance hybride basse} : \varepsilon_{\perp} = 0$$

A basse fréquence, au voisinage de la fréquence cyclotronique ionique évaluée sur l'axe magnétique, les lieux géométriques associés aux coupures dites basse et haute densités pour un indice N_{\parallel} , ainsi qu'aux résonances cyclotronique ionique et hybride basse sont représentées sur la figure ci-dessous.

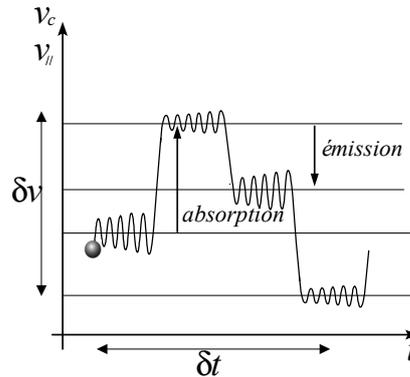
3.2 Absorptions Landau et Cyclotron

3.2.1 Equation quasi-linéaire

Dans ce chapitre nous allons développer la théorie de la dissipation de l'énergie électromagnétique dans les plasmas en régime de d'absorption résonante linéaire ; par régime linéaire nous exprimons le fait que l'analyse du bilan énergétique dans sa forme la plus achevée sera restreinte au cas d'une réponse linéaire du plasma. Sous cette hypothèse, l'interaction onde-particules peut être vue comme une suite d'événement aléatoires :

Emission / Absorption / Emission / Emission / Absorption / Emission...

Cette série de processus peut être considérée comme une marche aléatoire dans l'espace des vitesses.



Dans le deuxième chapitre nous avons présenté l'équation de Fokker-Planck comme l'outil d'analyse des marches aléatoires et dans ce paragraphe nous allons utiliser ce formalisme pour étudier les deux mécanismes d'absorption à l'oeuvre dans les plasmas thermonucléaires : (i) la résonance Landau et (ii) les résonances cyclotron.

3.2.2 Résonance Landau

Considérons une onde électrostatique longitudinale $E_{\parallel} \sin(k_{\parallel}z - \omega t)$, décrite par le potentiel électrostatique $\phi \cos(k_{\parallel}z - \omega t)$, en interaction avec une particule chargée de masse m et de charge e . L'équation de Newton pour chaque particule est non-linéaire.

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\frac{q}{m} \frac{d}{dz} \phi \cos(k_{\parallel}z - \omega t), \quad \frac{dz}{dt} = v_{\parallel}$$

La phase relative initiale entre l'onde et la particule ($k_{\parallel}z_0 - \omega t_0$) n'est pas un paramètre de contrôle du problème : à un instant donné, dans un plasma,

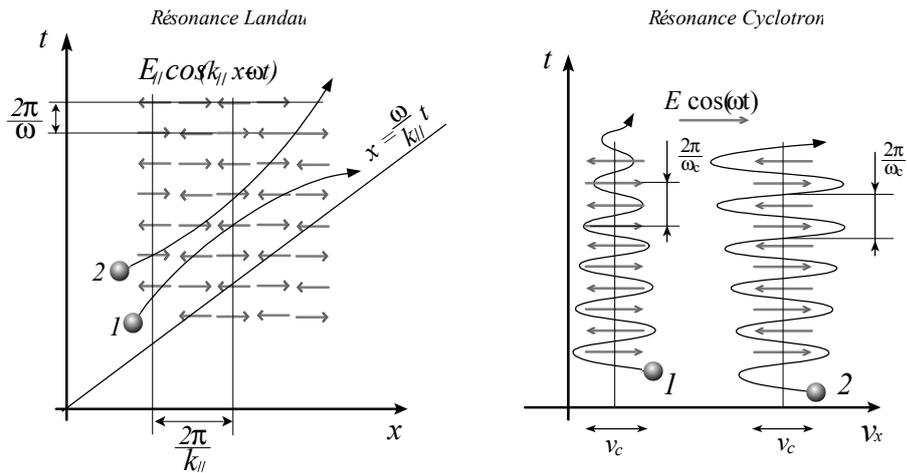
certaines particules se trouvent dans les zones de champ fort, d'autres, dans les zones de champ faible. Une description statistique de l'interaction onde-particules s'impose. Nous étudierons donc la fonction de distribution des vitesses $f(v_{\parallel}, t)$ et nous supposons que la phase relative initiale entre l'onde et la particule est uniformément distribuée. C'est l'hypothèse des phases aléatoires (RPA). Ainsi, nous prendrons la moyenne des quantités physiques sur toutes les positions initiales accessibles z_0 . , nous allons nous attacher à calculer le coefficient de diffusion de la vitesse $\langle \delta v_{\parallel} \delta v_{\parallel} \rangle$ qui permet de décrire l'interaction de l'onde et des particules à travers l'équation de Fokker-Planck dans l'espace des vitesses vérifié par la fonction de distribution $f(v_{\parallel}, t)$ telle que $\int f(v_{\parallel}, t) dv_{\parallel} = 1$.

$$\frac{\partial f(v_{\parallel}, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \frac{\langle \delta v_{\parallel} \delta v_{\parallel} \rangle}{2\delta t} \frac{\partial f(v_{\parallel}, t)}{\partial v_{\parallel}}$$

La puissance transférée de l'onde vers la particule, par unité de volume, est donnée par :

$$w_L = n \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m}{2} v_{\parallel}^2 f dv_{\parallel} \rightarrow w_L = -nm \int_{-\infty}^{+\infty} v_{\parallel} \frac{\langle \delta v_{\parallel} \delta v_{\parallel} \rangle}{2\delta t} \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} dv_{\parallel}$$

où nous avons intégré par partie pour faire apparaître le coefficient de diffusion et introduit n la densité volumique de particules. Le coefficient de diffusion de la vitesse permet donc d'établir l'équation d'évolution de la population de particules et de calculer le transfert irréversible de puissance de l'onde vers le plasma. Pour calculer ce coefficient de diffusion effectuons un changement de repère vers le repère se déplaçant à la vitesse de phase de l'onde : $v_{\parallel} = v' + \omega/k_{\parallel} = v' + 1$ et considérons une particule de conditions initiales à $t = 0$: $v'_0 = v_{\parallel 0} - \omega/k_{\parallel}$, $z'_0 = z_0$.



A un instant ultérieur δt , sa vitesse et sa position deviennent : $v' = v_{\parallel} - \omega/k_{\parallel}$ et $z' \approx z'_0 + v'_0 \delta t$. L'énergie mécanique totale est conservée :

$$mv'^2 + 2e\phi \cos k_{\parallel} z' = mv_0'^2 + 2e\phi \cos k_{\parallel} z'_0 \rightarrow m(v' - v'_0)(v' + v'_0) = -2e\phi (\cos k_{\parallel} z' - \cos k_{\parallel} z'_0)$$

Compte tenu de l'identité $\cos a - \cos b = -2 \sin(a+b/2) \sin(a-b/2)$, l'incrément de vitesse $\delta v' = v' - v'_0$ peut être exprimé comme :

$$\delta v' = \frac{2e\phi}{mv'_0} \sin\left(k_{\parallel} \frac{v'_0 \delta t}{2} + k_{\parallel} z'_0\right) \sin\left(k_{\parallel} \frac{v'_0 \delta t}{2}\right)$$

Dans le repère du laboratoire nous obtenons donc l'expression :

$$\delta v_{\parallel}(v_{\parallel 0}, \delta t) = -\frac{2e\phi}{m(v_{\parallel 0} - \omega/k_{\parallel})} \sin\left[\frac{k_{\parallel}(v_{\parallel 0} - \omega/k_{\parallel})\delta t}{2} + k_{\parallel} z_0\right] \sin\left[\frac{k_{\parallel}(v_{\parallel 0} - \omega/k_{\parallel})\delta t}{2}\right]$$

Toutes les positions initiales z_0 étant équiprobables, la valeur moyenne : $2\pi \langle \delta v_{\parallel}(v_{\parallel 0}) \rangle_{z_0} = \int_0^{2\pi} \delta v_{\parallel} dz_0 = 0$ est donc nulle. Par contre, la valeur moyenne du carré de l'incrément de vitesse est non nulle.

$$\langle \delta v_{\parallel}^2(v_{\parallel 0}) \rangle_{z_0} = \frac{2e^2 \phi^2}{m^2 (v_{\parallel 0} - \omega/k_{\parallel})^2} \sin^2\left[k_{\parallel} \frac{(v_{\parallel 0} - \omega/k_{\parallel})\delta t}{2}\right] \rightarrow \pi \frac{e^2 k_{\parallel}^2 \phi^2}{m^2} \delta(k_{\parallel} v_{\parallel 0} - \omega) \delta t$$

Pour les temps longs devant l'échelle caractéristique de l'onde (ω^{-1}) la limite $\varepsilon \sin^2(x/\varepsilon)/x^2|_{\varepsilon \rightarrow 0} \rightarrow \pi \delta(x)$ est légitime. Remarquons que, ici aussi, nous supposons l'existence d'une échelle de temps mésoscopique grande à l'échelle microscopique mais petite à l'échelle de l'évolution de $f(v_{\parallel}, t)$, comme ce fut le cas lors de la construction de l'équation de mobilité diffusion dans le chapitre deux. Le résultat final est donc donné par la formule classique due à Landau. Cependant, une question demeure : comment se fait-il qu'en l'absence de processus dissipatif ce mécanisme d'absorption soit opérationnel ?

La réponse est illustrée par la figure ci-dessus. Dans un diagramme d'espace-temps nous avons tracé les trajectoires de deux particules de même vitesse initiale, mais de positions initiales différentes. Les zones du maximum du champ sont représentées par les bandes grises où le sens du champ est aussi indiqué. Deux types de trajectoires peuvent être considérées.

- Si $k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega \ll 0$ ou $k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega \gg 0$, on voit que la particule rencontrera sur son trajet des zones d'accélération et de décélération avec une probabilité égale, il n'y a donc pas de transfert résonant, ces particules interagissent avec l'onde en régime adiabatique et elles ne participent pas au processus d'absorption (d'émission).

- Si $k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega \approx 0$, alors, comme le montre la figure ci-dessus, les particules et l'onde sont en synchronisme : chaque particule voyage avec une zone d'accélération ou une zone de décélération du champ. Ainsi, pour ces particules, dites résonantes, le transfert de puissance est significatif, mais il peut être positif ou négatif lorsque l'on moyenne sur z_0 .

$$\text{Absorption Landau : } w_L = -\pi\omega \frac{\omega_p^2}{k_{\parallel}^2} \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} \Big|_{v_{\parallel} = \frac{\omega}{k_{\parallel}}} \frac{\varepsilon_0 E_{\parallel}^2}{2}$$

Une fonction de distribution des vitesses monotone décroissante constitue donc un milieu dissipatif en l'absence de collision.

3.2.3 Résonance cyclotron

Considérons maintenant le processus d'absorption cyclotron. Soit une population, électronique ou ionique, décrite par sa fonction de distribution du module

de la vitesse cyclotronique $f(v_c, t)$, cette distribution étant normalisée à l'unité : $\int f(v_c, t) 2\pi v_c dv_c = 1$. Cette population interagit avec un champ électrique de fréquence de l'ordre de grandeur de la fréquence cyclotronique, l'interaction onde-particules peut être vue comme une série : émission / absorption / émission / absorption / émission / ... Cette série de processus peut être considérée comme une marche aléatoire dans l'espace des vitesses cyclotroniques et nous modéliserons donc l'évolution de la distribution par une équation de Fokker-Planck.

$$\frac{\partial f(v_c, t)}{\partial t} = \frac{1}{v_c} \frac{\partial}{\partial v_c} v_c \frac{\langle \delta v_c \delta v_c \rangle}{2\delta t} \frac{\partial f(v_c, t)}{\partial v_c}$$

Introduisons n la densité surfacique de particules sur une surface magnétique donnée. La densité surfacique de puissance déposée sur cette surface est donnée par :

$$w_c = n \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{+\infty} 2\pi v_c \frac{mv_c^2}{2} f dv_c \rightarrow w_c = -n \int_0^{+\infty} 2\pi m v_c^2 \frac{\langle \delta v_c \delta v_c \rangle}{2\delta t} \frac{\partial f}{\partial v_c} dv_c$$

L'évaluation du bilan de puissance se ramène donc au calcul du coefficient de diffusion $\langle \delta v_c \delta v_c \rangle / 2\delta t$. Soit une particule, de masse m et de charge e , plongée dans un champ magnétique statique uniforme $\mathbf{B} = B\mathbf{b}$, où \mathbf{b} est un vecteur unitaire, et interagissant avec un champ électrique $E \cos(\omega t) \mathbf{e}_x - E \sin(\omega t) \mathbf{e}_y$ où x et y constituent un système de coordonnées cartésiennes dans le plan perpendiculaire à \mathbf{b} , système de coordonnées associé à la base orthonormée directe $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{b}]$. L'écriture de l'équation du mouvement de la particule se réduit à la prise en compte des forces électrique et magnétique. Afin d'étudier le phénomène de résonance cyclotronique introduisons la variable complexe \mathcal{Z} : $\mathbf{v}_c = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y \rightarrow \mathcal{Z} = v_x + jv_y$; la variable \mathcal{Z} vérifie l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$\text{Equation de Newton : } \frac{d\mathcal{Z}}{dt} + j\omega_c \mathcal{Z} = \frac{eE}{m} \exp -j\omega t$$

La solution de cette équation différentielle linéaire avec second membre est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

$$\mathcal{Z}(t) = v_c \exp(-j\omega_c t) + \frac{eE}{m} \exp(-j\omega_c t) \int_0^t \exp(j\omega_c u) \exp(-j\omega u) du$$

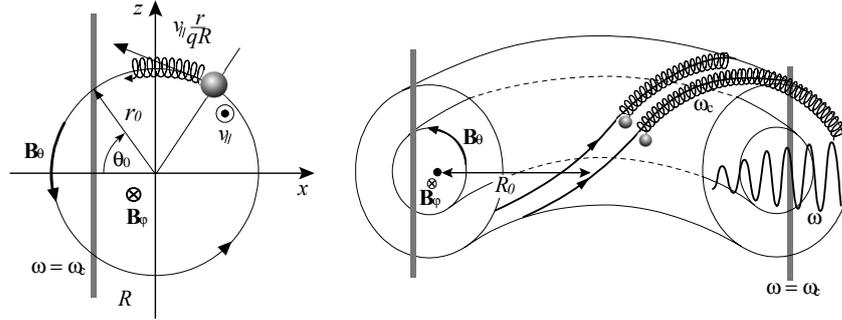
L'incrément de vitesse cyclotronique $\delta v_c(\delta t)$ durant un temps δt peut être calculé comme la variation du carré du module de la variable \mathcal{Z} : $\delta v_c^2(v_c, \delta t) = \text{Re}[\mathcal{Z}(\delta t) \mathcal{Z}^*(\delta t) - \mathcal{Z}(0) \mathcal{Z}^*(0)] / 2$.

$$\delta v_c = \frac{eE \sin[(\omega_c - \omega) \delta t]}{2m(\omega_c - \omega)} \rightarrow \langle \delta v_c \delta v_c \rangle = \frac{e^2 E^2 \sin^2[(\omega_c - \omega) \delta t]}{4m^2(\omega_c - \omega)^2} \rightarrow \frac{\pi e^2 E^2}{4m^2} \delta(\omega_c - \omega) \delta t$$

Nous avons négligé les termes quadratiques en E^2 puis considéré, pour les temps longs devant l'échelle caractéristique de l'onde (ω^{-1}), la limite $\varepsilon \sin^2(x/\varepsilon) / x^2 \Big|_{\varepsilon \rightarrow 0} \rightarrow \pi \delta(x)$. Remarquons que, ici aussi, nous supposons l'existence d'une échelle de temps mésoscopique grande à l'échelle microscopique mais petite à l'échelle de l'évolution de $f(v_c, t)$.

$$w_c = -n \int_0^{+\infty} 2\pi m v_c^2 \frac{\pi e^2 E^2}{4m^2} \delta(\omega_c - \omega) \frac{\partial f}{\partial v_c} dv_c = -n \frac{\pi e^2 E^2}{2m} \delta(\omega_c - \omega)$$

Dans un tokamak, le champ magnétique B n'est pas homogène et la résonance cyclotronique $\omega = \omega_c$ apparaît de façon transitoire lorsque le mouvement du centre guide traverse la surface résonante en $\pm\theta_0$ et r_0 (voir figure). Ainsi nous devons moyenner le coefficient de diffusion précédent sur le mouvement périodique du centre guide.



Nous sommes donc amenés à calculer $\langle \delta(\omega - \omega_c) \rangle \equiv \oint \delta[\omega_c(\theta) - \omega] d\theta \Big|_{r_0} / \oint d\theta$ où la moyenne doit être prise sur une rotation poloïdale, rotation suivant laquelle la fréquence cyclotronique présente la variation périodique : $\omega_c(\theta) = \omega_{c0} / \left(1 + \frac{r_0}{R_0} \cos \theta\right)$.

$$\delta \left[\frac{\omega_{c0}}{1 + \frac{r_0}{R_0} \cos \pm \theta_0} - \frac{\omega_{c0}}{1 + \frac{r_0}{R_0} \cos \theta} \right] \Big|_{\frac{r_0}{R_0} \rightarrow 0} = \frac{R_0}{2\pi\omega_{c0}r_0} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{2^m T_m(\cos \theta_0)}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta_0}} \cos m\theta$$

où T_m sont les polynômes de Tchebichev. Ainsi nous pouvons calculer la puissance déposée, à travers la résonance cyclotron, sur chaque surface magnétique. :

$$\text{Absorption cyclotron : } w_c = \frac{\omega_p^2}{\omega_c} \frac{R_0}{r_0} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2 |\sin \theta_0|}$$

La fréquence plasma étant calculée à l'aide de la densité surfacique de particules pour évaluer un dépôt de puissance par unité de surface sur chaque surface magnétique.

3.3 Instabilités de Dérive

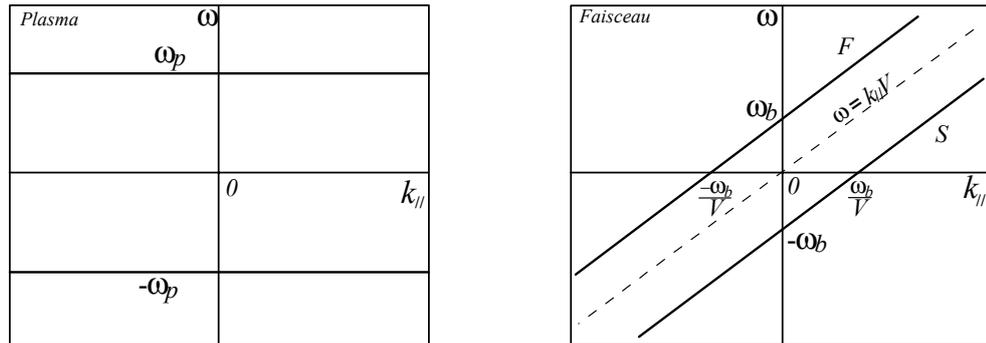
3.3.1 Instabilités dissipative et réactive

Nous avons vu, dans le chapitre consacré au transport, qu'un plasma thermonucléaire confiné est un système s'écartant significativement de l'équilibre thermodynamique de part l'existence de gradients de température et de densité, mais aussi, de part l'existence de queues de fonctions de distributions d'ions et d'électrons rapides notablement non Maxwelliennes. En présence de collisions ces écarts à l'équilibre thermodynamique tendent à relaxer à travers les processus de transport, friction et thermalisation. Un deuxième type de processus tend à relaxer l'énergie libre ainsi disponible au niveau fluide ou au niveau cinétique : les instabilités.

Les instabilités dans les plasmas thermonucléaires, au même titre que les ondes, constituent un sujet vaste et d'une diversité phénoménologique dont l'exploration nécessiterait une monographie dédiée. Plusieurs schémas de classification peuvent être construits pour offrir une présentation synthétique. La source d'énergie libre, c'est-à-dire l'identification de l'écart à l'équilibre thermodynamique et sa nature, fluide ou cinétique, est un paramètre important pour classer les instabilités. La nature du mécanisme de déstabilisation, réactif ou dissipatif, constitue un deuxième paramètre de classification.

Dans ce paragraphe, nous allons étudier les différentes instabilités associées à la configuration d'un plasma de tokamak, nous ne proposerons pas de classification exhaustive et définitive, il n'en existe d'ailleurs à ce jour aucune ; mais le choix de présentation suivra la différenciation en les différents termes de source d'énergie libre : gradient de densité, gradient de température, gradient de champ magnétique et gradient de courant. Au delà de cet identification de la forme de déséquilibre, nous préciserons la nature dissipative ou réactive de l'instabilité. Aussi, pour établir cette dernière distinction nous allons l'illustrer sur le cas le plus simple, celui de l'instabilité au sein d'un plasma portant un courant, que ce courant soit porté par un faisceau ou de nature Ohmique.

Considérons la dynamique d'un plasma thermonucléaire le long des lignes de champ paramétrées par l'abscisse curviligne z ; un faisceau, de vitesse V , beaucoup moins dense que le plasma est aussi présent. Le plasma présente une pulsation plasma ω_p et le faisceau une pulsation plasma ω_b ; les perturbations électrostatiques de densité, champ et vitesse peuvent être analysées en linéarisant l'équation de conservation de la charge et l'équation d'Euler pour des dépendances fonctionnelles périodiques dans le temps et l'espace de la forme : $\exp(jk_{\parallel}z - j\omega t)$. La densité volumique de courant linéarisé est notée $J = qn_0v + qnV$ où n_0 est la densité du plasma.



Commençons par identifier séparément les modes propres électrostatiques d'un plasma et d'un faisceau en annulant la somme du courant électronique J_p (ou J_b) plus le courant de déplacement J_d : $J_p + J_d = 0$ et $J_b + J_d = 0$. En effet, compte tenu de l'absence de champs magnétique perturbateur : $\nabla \times H|_z = 0 = J_p + J_d$ et $\nabla \times H|_z = 0 = J_b + J_d$.

$$\text{Déplacement} \quad : \quad J_d = -j\omega\varepsilon_0 E$$

$$\text{Plasma réactif} \quad : \quad J_p = j\frac{\omega_p^2}{\omega}\varepsilon_0 E \rightarrow \omega_p^2 = \omega^2$$

$$\text{Faisceau} \quad : \quad J_b = j\frac{\omega_b^2\omega}{(\omega - k_{\parallel}V)^2}\varepsilon_0 E \rightarrow \omega_b^2 = (\omega - k_{\parallel}V)^2$$

Nous venons ainsi d'établir les relations de dispersion des ondes de Langmuir au sein d'un plasma et des modes rapide (F) et lent (S) au sein d'un faisceau, ces deux relations de dispersion se ramènent l'une à l'autre par un simple changement de référentiel de vitesse V . Considérons à présent un système faisceau-plasma, les modes précédents sont alors couplés.

$$J_b + J_p + J_d = 0 \rightarrow \frac{\omega_b^2}{(\omega - k_{\parallel}V)^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 1$$

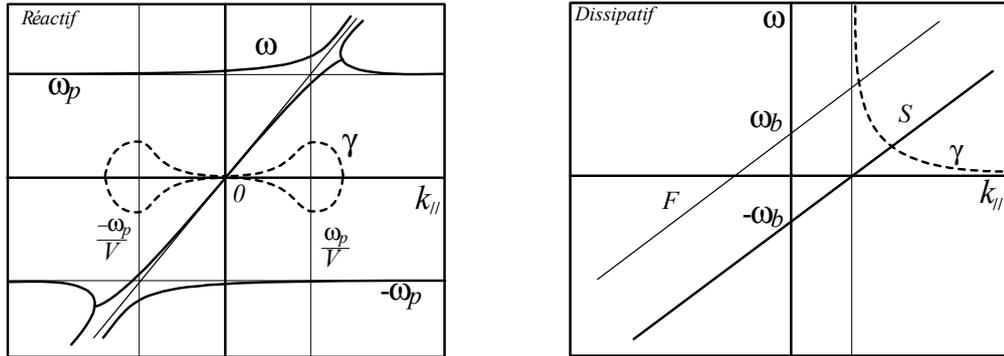
La relation de dispersion du milieu faisceau-plasma est donnée par l'équation du quatrième degré :

$$\text{Couplage réactif} : (\omega^2 - \omega_p^2) (\omega - k_{\parallel}V)^2 - \omega^2 \omega_b^2 = 0$$

Sous cette forme il est aisé de distinguer la nature des asymptotiques :

- à haute fréquence $\omega^2 \gg \omega_p^2$ nous retrouvons la dispersion des modes S et F du faisceau : $(\omega - k_{\parallel}V)^2 - \omega_b^2 \approx 0$,
- à basse fréquence $\omega^2 < \omega_p^2$ la dispersion $\omega_p^2 (\omega - k_{\parallel}V)^2 + \omega^2 \omega_b^2 = 0$ révèle l'existence d'une partie imaginaire $\gamma(k_{\parallel})$ pour la pulsation $\omega = \omega(k_{\parallel}) - j\gamma(k_{\parallel})$ lorsque le vecteur d'onde k_{\parallel} est réel.

Ainsi ces modes présentent une croissance exponentielle $\exp \gamma(k_{\parallel}) t$ pour certaines valeurs des paramètres. Ce type de déstabilisation est qualifié de *réactive* car le déphasage qui permet au champ et à la densité d'être amplifiés, en mettant en phase vitesse et force, est de nature réactive, par opposition aux mécanismes de déphasage trouvant leur origine dans un processus dissipatif de nature collisionnelle ou collective. Les parties réelles et imaginaires $\omega + j\gamma$ sont représentées sur le diagramme ci-dessous sous l'hypothèse $\omega_b \ll \omega_p$.



Une déstabilisation réactive modifie en général significativement la structure du mode. Le deuxième mécanisme de déstabilisation des modes propres longitudinaux le long des lignes de champ dans un plasma thermonucléaire est caractérisé par la présence d'un couplage dissipatif. Considérons les modes F et S d'un faisceau et plongeons ce faisceau dans un plasma résistif de résistivité $\omega^* \varepsilon_0$. Deux courants sont alors présents les courants dus à l'inertie et à la séparation de charge J_b et le courant résistif J_r .

$$\begin{aligned} \text{Plasma dissipatif} & : J_r = \omega^* \varepsilon_0 E \\ \text{Faisceau} & : J_b = j \frac{\omega_b^2 \omega}{(\omega - k_{\parallel}V)^2} \varepsilon_0 E \end{aligned}$$

La relation de dispersion des modes électrostatiques est obtenue en égalant la somme de ces courants plus le courant de déplacement à zéro.

$$J_b + J_r + J_d = 0 \rightarrow \frac{\omega_b^2 \omega}{(\omega - k_{\parallel} V)^2} - j\omega^* = \omega$$

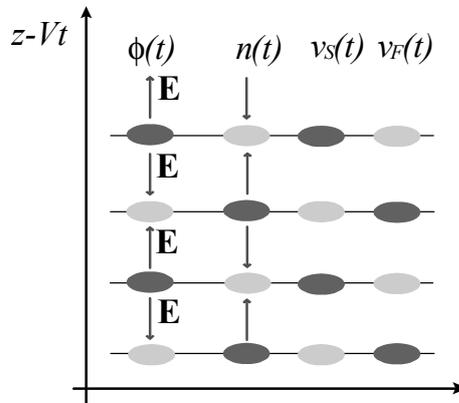
La relation de dispersion est une équation algébrique du troisième degré en la pulsation si nous fixons le vecteur d'onde k_{\parallel} .

$$\text{Couplage dissipatif: } (\omega + j\omega^*) (\omega - k_{\parallel} V)^2 - \omega \omega_b^2 = 0$$

Sous l'hypothèse d'un faible couplage ($\omega^* \ll \omega_b$) la partie imaginaire peut être évaluée et est représentée sur la figure ci-dessus. La discussion sur les différences et analogies entre déstabilisation réactive et dissipative mériterait d'être développée en détail, mais nous nous contenterons d'explorer la nature dynamique de la déstabilisation du mode lent S. L'onde rapide passive est une onde d'énergie positive tandis que l'onde lente active est une onde d'énergie négative ; cette différence fondamentale peut être illustrée si nous considérons les phase relatives des perturbations de densité et de vitesse sur un diagramme d'espace temps. Le champ électrique est relié au potentiel par la relation classique : $E = -jk_{\parallel}\phi$, la perturbation de densité à la perturbation de potentiel par la relation de Poisson : $qn = \varepsilon_0 k_{\parallel}^2 \phi$ et le courant $n_0 qv$ au champ E par : $n_0 qv = j\omega \varepsilon_0 E$. L'élimination du champ E et du potentiel ϕ entre ces trois relations permet d'exprimer la perturbation relative de densité n/n_0 en fonction de la perturbation de vitesse v .

$$F: \frac{n}{n_0} = \frac{k_{\parallel}}{\omega_p} v, \quad S: \frac{n}{n_0} = -\frac{k_{\parallel}}{\omega_p} v$$

- Pour le mode rapide la densité et la vitesse sont en phase, ainsi une accumulation de charges est accompagnée d'une augmentation de vitesse, une déplétion de densité d'un ralentissement ; l'état perturbé présente une énergie supérieure à l'état d'équilibre, il faut donc fournir de l'énergie pour exciter le mode rapide.

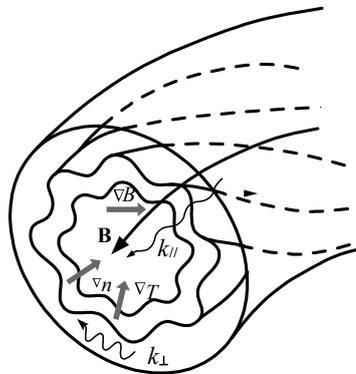


- Au contraire, pour le mode lent, une déplétion de densité est accompagnée par une augmentation de vitesse car densité et vitesse sont en opposition de phase, l'état perturbé, représenté par le mode lent, présente donc une énergie inférieure à l'état d'équilibre et l'on parle d'onde d'énergie négative ; ce mode se développe en fournissant de l'énergie au milieu qui le supporte, il n'est donc

pas étonnant qu'il soit déstabilisé par un déphasage, soit de nature dissipative car les frictions induisent des déphasages, soit de nature réactive qui correspond au cas d'un couplage avec un autre oscillateur et nous savons que les couplages entre oscillateurs induisent des déphasages. Cette analyse de l'origine dynamique de l'instabilité du mode lent est illustrée sur le diagramme d'espace temps ci-dessus. L'exemple classique des instabilités faisceau-plasma, qui vient d'être brièvement étudié, offre le schéma de la structure d'analyse des instabilités dans les tokamaks. Dans un premier temps nous devons identifier une source d'énergie libre ; en l'occurrence, dans ce contexte ce seront les gradients de champ magnétique $\nabla\mathbf{B}$, de densité ∇n , de température ∇T , de courant $\nabla\mathbf{J}$. Puis nous devons établir les équations d'évolution et de couplage des variables dynamiques et linéariser ces équations pour ramener l'étude à la recherche des solutions d'une équation algébrique dont la partie imaginaire des racines fournira le taux de croissance γ de l'instabilité. Cette analyse doit être complétée par une compréhension des mécanismes de couplage des variables dynamiques conduisant à une évolution exponentielle en fonction du temps, les diagrammes d'espace-temps, tels que celui proposé ci-dessus, offrent à cet égard le cadre de représentation adéquat pour l'étude des mécanismes d'instabilité.

3.3.2 Instabilités de Dérive

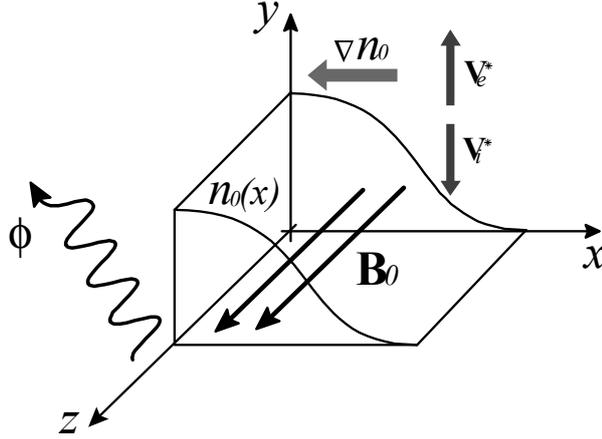
Les modes les plus communs sont les modes de dérive résultant de la présence simultanée d'un gradient de densité $n(r)$ et d'un champ magnétique homogène, les modes dit de gradient de température où le gradient relatif de la densité $n(r)$ et de la température $T(r)$ doit être considéré, les modes dit d'échange ou d'interchange où gradients de pression $P(r)$ et de champ magnétique $B(r)$ constituent la source d'énergie libre, les effets toroïdaux couplant dérive et interchange ; enfin, les modes de torsion et de déchirement où le gradient de courant $J(r)$ doit être pris en considération. Les modes de dérive sont des perturbations de densité et de potentiel se propageant perpendiculairement aux lignes de champ, mais pouvant aussi présenter une périodicité le long de ces lignes de champ. Dans leur version la plus simple ces modes seront supposés électrostatiques et de nature fluide.



Considérons un champ magnétique homogène $\mathbf{B} = B_0\mathbf{e}_z$, et un plasma de densité d'équilibre $n_0(x)$ et de température électronique et ionique T_e et T_i telles que $T_e = T_i$. La présence simultanée d'un champ magnétique et d'un gradient de pression permet de définir les vitesses diamagnétiques électronique \mathbf{V}_e^* et

ionique \mathbf{V}_i^* .

$$\text{Vitesses Diamagnétiques} : \mathbf{V}_e^* \equiv \frac{k_B T_e}{|e| B_0} \left| \frac{d \ln n_0}{dx} \right| \mathbf{e}_y, \mathbf{V}_i^* \equiv -\frac{k_B T_i}{|e| B_0} \left| \frac{d \ln n_0}{dx} \right| \mathbf{e}_y$$



Recherchons les perturbations harmoniques de potentiel susceptibles de se propager dans un tel milieu. Ces perturbations de potentiel seront nécessairement accompagnées par des perturbations de vitesses et de densités.

$$\begin{aligned} \text{potentiel} & : \phi \exp j [\omega t - k_{\parallel} z - k_{\perp} y] \\ \text{Vitesse} & : (v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z) \exp j [\omega t - k_{\parallel} z - k_{\perp} y] \\ \text{Densité} & : n_0(x) + n \exp j [\omega t - k_{\parallel} z - k_{\perp} y], \end{aligned}$$

Les vitesses sont ici les vitesses ioniques, car, à basse fréquence, la réponse électronique est de nature adiabatique, les électrons se distribuent au sein des perturbations de potentiel suivant une distribution de Boltzmann. Considérons les équations de la dynamique basse fréquence d'un plasma et construisons une analyse suivant le schéma :

$$\phi \xrightarrow{\text{dérives}} \mathbf{v}_i \xrightarrow{\text{continuité}} n_i \xrightarrow{\text{quasineutralité}} n_i = n_e \xleftarrow{\text{quasineutralité}} n_e \xleftarrow{\text{adiabaticité}} \phi$$

La première étape est donc d'exprimer les composantes de la vitesse ionique en fonction du potentiel ϕ . Le long des lignes de champ la réponse ionique est de nature inertielle et s'établit en considérant l'équation de Newton et la force de Coulomb. Perpendiculairement aux lignes de champ l'analyse de la réponse ionique relève de la théorie des dérives à basse fréquence ($\omega \ll \omega_{ci}$). Ainsi, suivant x la dérive de champs croisés doit être prise en compte et suivant y la dérive de polarisation, car le champ électrique est dirigé suivant l'axe des y .

$$\begin{aligned} \text{Dérive de champs croisés} & : v_{ix} = j \frac{k_{\perp}}{\omega_{ci}} \frac{e\phi}{m_i} \\ \text{Dérive de polarisation} & : v_{iy} = -\frac{k_{\perp} \omega}{\omega_{ci}^2} \frac{e\phi}{m_i} \\ \text{Forces de Coulomb} & : v_{iz} = \frac{k_{\parallel}}{\omega} \frac{e\phi}{m_i} \end{aligned}$$

Linéarisons à présent l'équation de conservation de la charge ionique, $\partial n_i / \partial t + \nabla \cdot n_0 \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, afin d'exprimer la perturbation de densité ionique n_i en fonction des perturbations de vitesse \mathbf{v}_i .

$$j\omega \frac{n_i}{n_0} = -\frac{d \ln n_0}{dx} v_{ix} + jk_{\perp} v_{iy} + jk_{\parallel} v_{iz}$$

Par élimination de la vitesse nous obtenons une relation entre densité ionique perturbée n_i et potentiel électrostatique ϕ ; la densité électronique perturbée n_e étant quant à elle obtenue en linéarisant la relation d'adiabaticité de Boltzmann : $n_e = n_0 \exp e\phi / k_B T_e - n_0$. Définissons les fréquences diamagnétiques ω^* :

$$\text{Fréquences diamagnétiques : } \omega_e^* \equiv k_{\perp} V_e^* , \omega_i^* \equiv k_{\perp} V_i^*$$

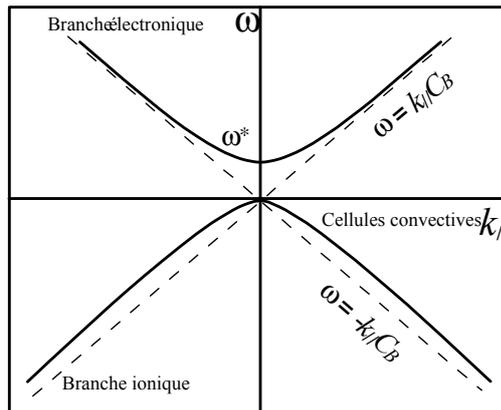
Le modèle que nous venons de développer permet donc d'établir les expressions suivantes des perturbations de densités électronique et ionique associées à une perturbation de potentiel au sein d'un plasma magnétisé présentant un gradient de densité.

$$\begin{aligned} \text{Réponse ionique} : \quad \frac{n_i}{n_0} &= \underbrace{\frac{\omega_e^*}{\omega} \frac{e\phi}{k_B T_e}}_{\text{Champs croisés } \perp} - \underbrace{k_{\perp}^2 \rho_i^2 \frac{e\phi}{k_B T_e}}_{\text{Polarisation } \perp} + \underbrace{\frac{k_{\parallel}^2 C_B^2}{\omega^2} \frac{e\phi}{k_B T_e}}_{\text{Coulomb } \parallel} \\ \text{Réponse électronique} : \quad \frac{n_e}{n_0} &= \underbrace{\frac{e\phi}{k_B T_e}}_{\text{Équilibre de Boltzmann}} \end{aligned}$$

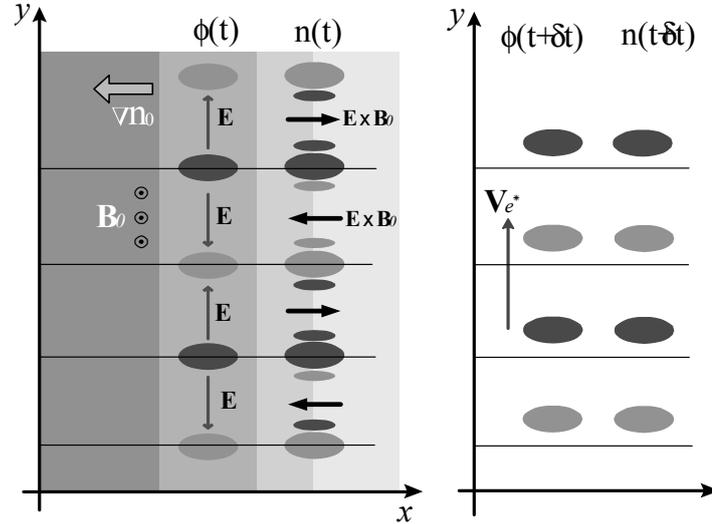
Le problème, à ce stade, nous offre deux équations pour trois inconnues n_e , n_i , ϕ , aussi l'équation de Poisson doit être considérée, mais, à basse fréquence le plasma reste quasi-neutre, nous pouvons donc établir l'expression de la relation de dispersion en égalant les deux perturbations de densité : $n_i = n_e$ et en éliminant ainsi le potentiel.

$$\text{Ondes de dérive : } \overline{\overline{\omega^2 (1 + k_{\perp}^2 \rho_i^2) - \omega \omega_e^* - k_{\parallel}^2 C_B^2 = 0}}$$

Les modes de dérive présentent donc deux branches, la branche électronique et la branche ionique. L'usage est de considérer deux asymptotiques, le *mode de dérive* : $k_{\parallel}^2 C_B^2 \ll \omega^2 \rightarrow \omega = k_{\perp} V_e^*$ et le *son ionique* : $k_{\parallel}^2 C_B^2 \gg \omega^2 \rightarrow \omega = k_{\parallel} C_B$, le terme $k_{\perp}^2 \rho_i^2$ étant en général petit et représente une correction en rayon de Larmor fini.



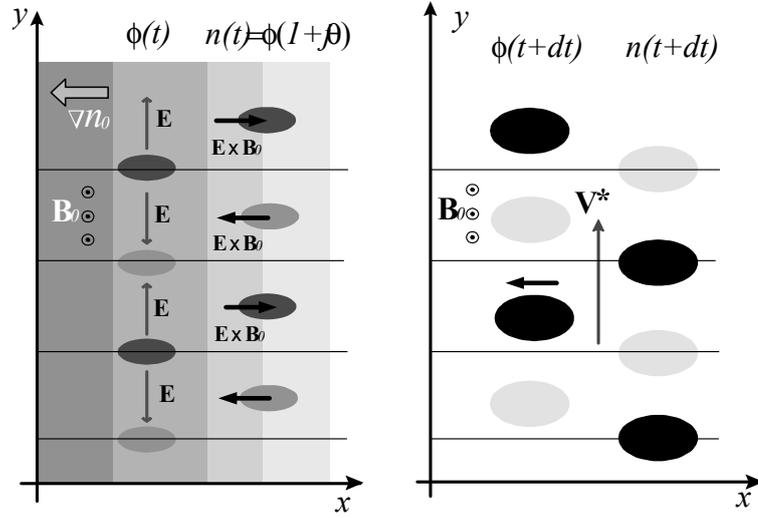
Pour conclure cette identification des modes de dérive fluide, analysons à présent l'origine dynamique de ce mode. Supposons l'existence, à un instant t , au sein d'un plasma magnétisé, d'une perturbation de potentiel $\phi(t)$ périodique suivant y . L'équation de Poisson nous indique que les maximums de potentiel et les maximums de perturbations de densité électronique sont superposés ainsi que les minimums. Si la densité d'équilibre présente un gradient suivant x , perpendiculaire au champ magnétique et à la direction de périodicité du potentiel y , la dérive de champ croisé $-\nabla\phi \times \mathbf{B}/B^2$ propage la perturbation de densité en établissant un flux de charge des zones denses vers les zones diluées à l'avant des maximums de densité et un flux de charge des zones diluées vers les zones denses à l'arrière des maximums de densité, une telle dynamique entraîne donc la propagation de la perturbation de densité et par couplage de la perturbation de potentiel.



Le schéma ci-dessus illustre ce mécanisme de propagation. Ce même type de schéma permet de comprendre la déstabilisation du mode de dérive, c'est-à-dire les instabilités de dérive. Supposons que le potentiel et la densité électronique ne soient plus en phase et que la phase relative entre ces deux variables dynamiques soit θ .

$$\begin{aligned}
 \text{Réponse ionique} & : \frac{n_i}{n_0} = \frac{\omega_e^*}{\omega} \frac{e\phi}{k_B T_e} \\
 \text{Réponse électronique} & : \frac{n_e}{n_0} = \frac{e\phi}{k_B T_e} (1 + j\theta)
 \end{aligned}$$

Un tel déphasage étant la conséquence d'une friction collisionnelle ou d'une résonance Landau. Sur le schéma ci-dessous nous voyons que la modulation de densité sera alors en avance (ou en retard) sur la modulation de potentiel, ce positionnement déphasé permet à la dérive de champ croisé d'alimenter les zones haute densité et de dépeupler les zones basse densité de la perturbation, amplifiant ainsi la modulation.



Cette amplification se traduit par l'apparition d'une partie imaginaire dans la relation de dispersion du mode comme le confirme l'évaluation analytique :

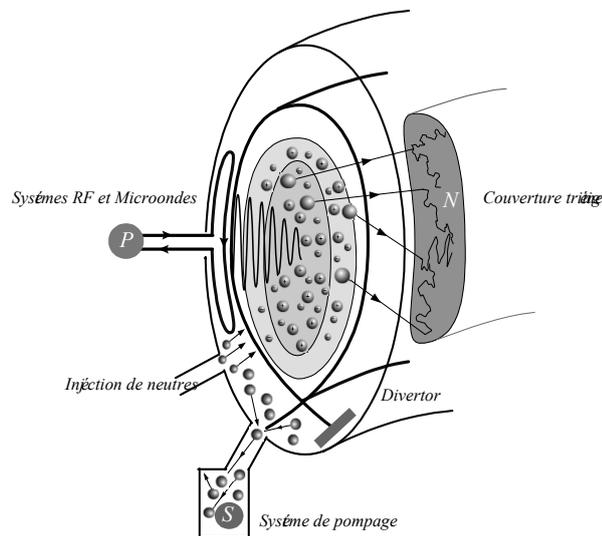
$$\text{Quasi-neutralité : } n_i = n_e \rightarrow \omega(1 + j\theta) = \omega_e^* \rightarrow \omega \approx \omega_e^*(1 - j\theta)$$

ainsi, le taux de croissance de l'instabilité de dérive est égal à $\gamma = \theta\omega_e^*$: $\exp j [\omega t - k_{\parallel} z - k_{\perp} y] \rightarrow \exp(\theta\omega_e^* t) \exp j [\omega_e^* t - k_{\parallel} z - k_{\perp} y]$, le mode se propage en s'amplifiant.

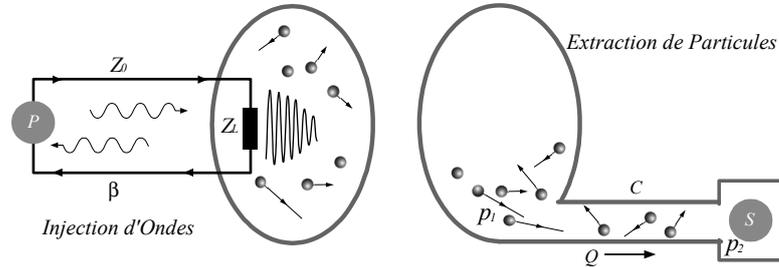
Chapitre 4

Contrôles : Injection et Extraction

Considérons un réacteur thermonucléaire présentant un volume de l'ordre d'un millier de mètre cube et développant une puissance de l'ordre du gigawatt. Un cinquième de cette puissance est produite sous la forme d'une population de particules alpha énergétiques (3.5 MeV), les quatre cinquièmes restants consistant en un flux de neutrons rapides (14 MeV). La densité volumique de puissance disponible pour entretenir la combustion thermonucléaire au sein du plasma est donc de l'ordre de quelques centaines de kilowatt par mètre cube.



Cette puissance, ainsi que les particules alpha résultant de la combustion, doit être évacuée en régime continu. Une puissance de un gigawatt correspond à une réactivité de 4×10^{20} réactions par secondes, en régime continu il faut donc pomper 4×10^{20} particules alpha par seconde pour maintenir la fraction de particules alpha dans le mélange à un niveau inférieur à 10% compatible avec la combustion malgré la dilution des réactifs par les cendres.



Compte tenu de ce niveau de dilution, c'est donc 4×10^{21} particules (D,T, α) par secondes qu'il est nécessaire de pomper en continu car le système de pompage n'est pas sélectif entre deutérium, tritium et alpha. Le nombre total de particules dans la décharge étant de l'ordre de $N \sim 10^3 [\text{m}^3] \times 10^{20} [\text{m}^{-3}]$ le temps de renouvellement du plasma se situe donc dans la gamme des centaines de secondes bien au dessus du temps de confinement des particules τ qui est de l'ordre du petit rayon que divise le coefficient de diffusion perpendiculaire $\tau \sim a^2/D_{\perp}$, c'est-à-dire de l'ordre de la seconde jusqu'à quelques secondes. Le nombre total de particules sortant du plasma par unité de temps vaut donc $ND_{\perp}/a^2 \sim 4 \times 10^{22}$; ainsi le système de pompage doit évacuer en continu de l'ordre de 10% du flux de matière sortant du plasma et les 90% restant sont impliqués dans le processus de recyclage : les ions et électrons sortent du plasma, sont neutralisés et sont à nouveau ionisés pour participer à la dynamique du plasma.

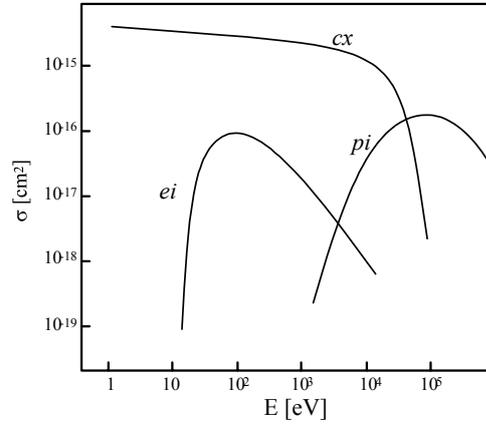
De façon similaire nous pouvons analyser les nécessités inhérentes à la génération de courant poloïdal, en effet l'efficacité des processus de transfert d'impulsion conduit un coût de quelques Watts pour une fraction d'Ampère, aussi sera-t-il nécessaire d'injecter en continu une puissance de l'ordre de quelques dizaines de Mégawatts pour entretenir le champ poloïdal et l'injection d'ondes continue constitue un problème central du contrôle des plasmas de tokamak.

4.1 Echange de charge

Les collisions élastiques entre espèces chargées sont à l'origine des processus dissipatifs décrits dans les paragraphes précédents, la prise en considération d'une deuxième classe de collisions est nécessaire pour construire une image complète de la dissipation dans un plasma de tokamak : les interactions entre espèces chargées et espèces neutres non encore ionisées. Parmi la grande variété de ces processus atomiques inélastiques observés principalement dans la région périphérique du plasma, trois sont particulièrement importantes :

Processus	Réaction
Ionisation par impact électronique	$e + H \rightarrow 2e + H^+$
Excitation par impact électronique	$e + H \rightarrow e + H^*$
Echange de charge résonnant	$H + H^+ \rightarrow H^+ + H$
Ionisation par impact protonique	$H^+ + H \rightarrow H^+ + H^+ + e$

Les sections efficaces des réactions d'échange de charge (cx), d'ionisation par impact électronique (ei) et d'ionisation par impact protonique (pi) sont représentées sur le diagramme ci-dessous en fonction de l'énergie de la particule incidente mesurée en eV sur l'axe des abscisse.



Différents modèles peuvent être construits pour modéliser l'ionisation par impact électronique et offrir une relation analytique entre section efficace et énergie, la formule classique de Thomson est la plus simple mais tombe en défaut dans la partie haute énergie de la courbe expérimentale; le modèle de Gryzinski résulte de l'étude d'un modèle plus complet que le modèle de Thomson et permet d'accorder expérience et théorie, en particulier la décroissance à haute énergie.

$$\begin{aligned} \text{Ionisation} \quad : \quad & \frac{\sigma_{ei}(E)}{3.52 \times 10^{-16} [\text{cm}^2]} = \left(\frac{E/E_I - 1}{E/E_I + 1} \right)^{\frac{3}{2}} \\ & \times \left[\frac{E_I}{E} + \frac{2E/E_I - 1}{3E^2/E_I^2} \log \left(2.7 + \sqrt{E/E_I - 1} \right) \right] \end{aligned}$$

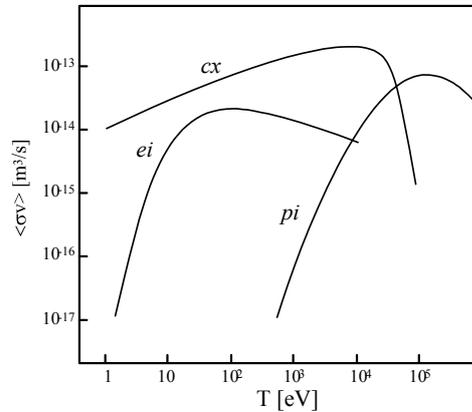
Différents modèles classiques ou quantiques décrivant le processus d'échange de charge peuvent être construits et étudiés pour établir la valeur de la section efficace de cette réaction; mais il est souvent plus direct de développer une formule d'interpolation de la section efficace expérimentale sur la base d'arguments physiques. Une telle formule pour l'hydrogène :

$$\text{Echange de charge} : \frac{\sigma_{cx}(E)}{0.69 \times 10^{-14} [\text{cm}^2]} = \frac{(1 - 0.155 \log_{10} E)^2}{1 + 0.1112 \times 10^{-14} E^{3.3}}$$

est utilisable pour des énergies E entre 1 et 10^5 eV. Comme dans le cas des réactions nucléaires, les sections efficaces sont des paramètres primaires qui permettent de construire les taux de réactions. Par exemple, pour l'échange de charge résonant au sein de la population de deutérium :

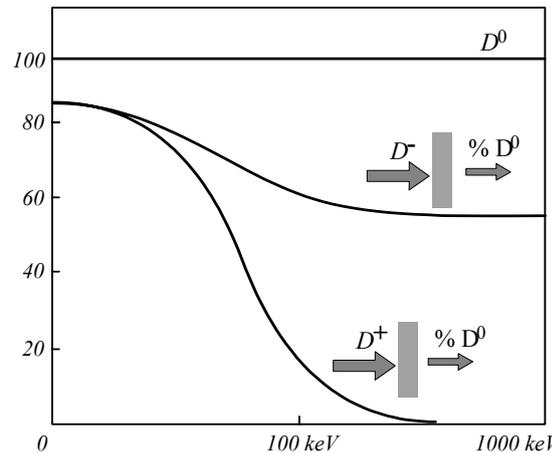
$$\text{Taux de réactions} : n_{D^0} + n_{D^+} \langle \sigma_{cx} v_i \rangle \equiv \frac{[\text{Nombre de réactions } D^0 + D^+ \rightarrow D^+ + D^0]}{[\text{Par unité de volume et unité de temps}]}$$

L'ensemble des taux de réaction $\langle \sigma v \rangle$ associés aux réactions en périphérie du plasma est bien tabulé. Par exemple, pour les trois principales réactions déterminant le bilan de matière, les données sont résumées ci-dessous en fonction de la température.



4.1.1 Injection de neutres

L'échange de charge résonnant est utilisé pour injecter des ions rapides au coeur des plasmas de tokamak, ce procédé est nommé injection de neutre. En effet, l'injection directe d'ions n'est pas envisageable car une configuration tokamak étant calculée pour que rien ne sorte, les principes de réciprocité de la mécanique impliquent que rien ne peut aussi y entrer. Cette conclusion n'est recevable que pour les particules chargées, aussi, si il est possible de générer des faisceaux d'atomes neutres d'énergie comprise entre 100 KeV et 1 MeV ils pénétreront au sein du plasma et seront ionisés créant ainsi une population d'ions rapides permettant, soit de chauffer le plasma, soit de générer un courant toroïdal source du champ poloïdal.



La possibilité de produire des faisceaux de deutérium atomique neutre d'énergie de l'ordre de 100 KeV est envisageable au regard des caractéristiques de la réaction d'échange de charge. Imaginons un dispositif constitué d'une source plasma d'où sont extraits puis accélérés des ions deutérium rapides, ces ions traversent ensuite une cible gazeuse de deutérium et la réaction d'échange de charge permet de convertir de l'ordre de 50% de cette population d'ions rapides en population de neutres rapides. L'inefficacité du procédé provient de l'existence de la réaction concurrente d'ionisation par impact de deutérium. Ce principe de production de faisceaux neutres rapides a été mis en oeuvre d'abord dans le cadre des recherches sur les configurations miroirs, puis pour le chauffage et la

génération de courant dans les tokamaks. Malheureusement, si la taille du tokamak augmente, alors l'accès à la zone centrale du plasma nécessite un faisceau de neutres plus énergétiques et le processus de neutralisation par échange de charge devient particulièrement inefficace. Il est alors nécessaire d'avoir recours aux processus d'attachement et de détachement d'un électron sur un atome de deutérium, l'attachement permet de produire des ions négatifs aptes à être accélérés dans une structure électrostatique, et le détachement permet, après accélération, de produire un faisceau neutre avec une efficacité supérieure à 50% pour des énergies de l'ordre du MeV. C'est ce principe d'accélération d'ion négatifs, puis de détachement, qui a été retenu pour le réacteur ITER compte tenu de sa taille qui nécessite des énergies d'injection de neutres de l'ordre du MeV pour un dépôt efficace dans la zone centrale du plasma.

Les neutres rapides ainsi produits par échange de charge (ou détachement) sur des ions positifs (ou négatifs), sont injectés dans le plasma où l'ionisation les transforme en ions rapides confinés. Une telle population d'ions rapides, dont les énergies se situent entre une centaine de KeV et un MeV, peut être utilisée pour chauffer le plasma à travers le transfert d'énergie par collisions coulombiennes, ou générer un courant toroïdal par transfert d'impulsion vers les électrons et ions thermiques.

Nous avons établi l'équation cinétique décrivant le couplage d'un ion rapide à un plasma thermonucléaire dans les chapitres précédents et introduit dans ce contexte la vitesse critique v_c et le temps de ralentissement τ_S . Sur la base de ces deux définitions,

$$\begin{aligned} \text{Vitesse critique} & : v_c^3 \equiv \frac{3\sqrt{\pi}}{4} Z_i v_{Te} v_{Ti}^2 \\ \text{Temps de ralentissement} & : \tau_S \equiv \frac{3\pi^{\frac{3}{2}} \varepsilon_0^2 m_b m_i}{\Lambda n_e Z_b^2 e^4} v_{Te} v_{Ti}^2 \end{aligned}$$

l'équation du ralentissement prend la forme simple :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \Big|_i + \frac{d\mathbf{v}}{dt} \Big|_e = - \underbrace{\frac{v_c^3}{v^3} \tau_S}_{\text{ions}} - \underbrace{\frac{\mathbf{v}}{\tau_S}}_{\text{électrons}}$$

le premier terme décrit le ralentissement ion rapide/ion thermique et le deuxième le ralentissement ion rapide/électron thermique, l'indice b se réfère au faisceau rapide et les indices i et e aux ions et électrons rapides. Ainsi le dépôt de puissance des ions rapides peut être séparé en un dépôt sur la population ionique $W_{b \rightarrow i}$ plus un dépôt sur la population électronique $W_{b \rightarrow e}$,

$$\begin{aligned} \text{Chauffage ionique} & : W_{b \rightarrow i} \equiv -M\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \Big|_i = \frac{Mv_c^3}{\tau_S v} \\ \text{Chauffage électronique} & : W_{b \rightarrow e} \equiv -M\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \Big|_e = \frac{Mv^2}{\tau_S} \end{aligned}$$

cette séparation permet d'évaluer la fraction de chauffage ionique $\chi_{b \rightarrow i}$ et la fraction de chauffage électronique $\chi_{b \rightarrow e}$, la somme des deux fractions étant égale à un.

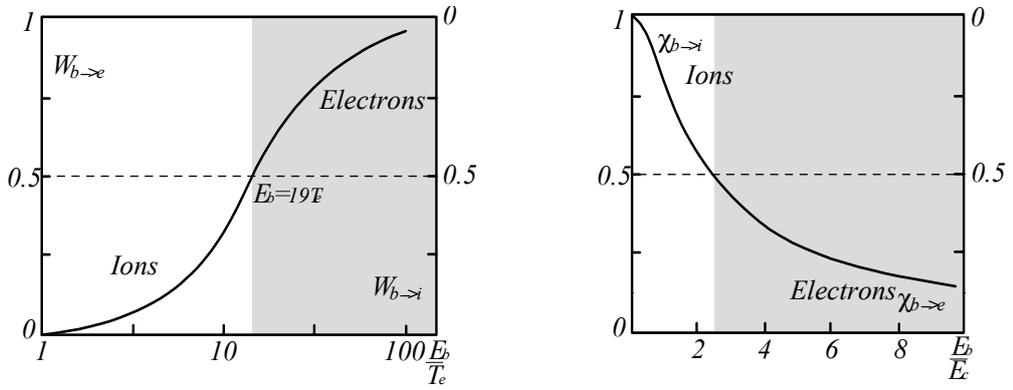
$$\chi_{b \rightarrow i} \equiv \frac{\int W_{b \rightarrow i} dt}{Mv_b^2/2} = \frac{2v_c^3}{\tau_S v_b^2} \int_0^{v_b} \frac{dv}{v \left| \frac{dv}{dt} \right|} = F \left(\frac{v_b^2}{v_c^2} \right)$$

$$\chi_{b \rightarrow e} \equiv \frac{\int W_{b \rightarrow e} dt}{M v_b^2 / 2} = \frac{2}{v_b^2 \tau_S} \int_0^{v_b} \frac{v^2 dv}{|dv/dt|} = 1 - F\left(\frac{v_b^2}{v_c^2}\right)$$

où v_b est la vitesse initiale du faisceaux et $F(x)$ la fonction :

$$F(x) = \frac{1}{x} \left[\frac{1}{3} \ln \frac{1 - \sqrt{x} + x}{(1 + \sqrt{x})^2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6} \right) \right]$$

obtenue par la prise en compte de la relation $|dv/dt| = (v_c^3 + v^3) / v^2 \tau_S$.



4.1.2 Plasma de bord

L'échange de charge présente donc une section efficace de réaction élevée au regard des autres processus. La succession des processus d'échange permet aux neutres de pénétrer en profondeur le plasma et si le libre parcours moyen d'échange de charge entre neutres et ions d'une même espèce $\langle v_n \rangle / n_i \langle \sigma_{cx} v_i \rangle$ est plus petit que les longueurs de gradient du plasma et du gaz neutre cette pénétration peut être modélisée comme une marche aléatoire, c'est-à-dire une diffusion de coefficient :

$$D_n \approx \frac{\langle v_i^2 \rangle}{\langle \sigma_{cx} v_i \rangle n_i}$$

Au bout de quelques réactions la vitesse des neutres est égale à la vitesse des ions. Cette pénétration des neutres au sein du plasma est ralentie par la réaction d'ionisation qui détruit les neutres. La dynamique des ions est aussi décrite en terme de diffusion. Ainsi le bilan de matière traduisant le couplage entre une population d'ions de densité n_i et une population de neutres de densité n_n est décrite par le système :

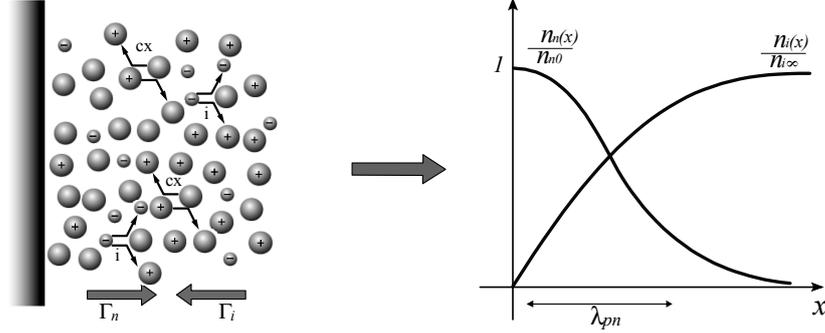
$$\begin{aligned} \text{Neutres} & : \quad \frac{d}{dx} D_n \frac{dn_n}{dx} - n_i n_n \langle \sigma_i v_e \rangle = 0 \\ \text{Ions} & : \quad D_i \frac{d^2 n_i}{dx^2} + n_i n_n \langle \sigma_i v_e \rangle = 0 \end{aligned}$$

Considérons une paroi en $x = 0$ où s'établit un recyclage parfait, $n_i(x = 0) = 0$, $n_n(x = 0) = n_{n0}$, limitant un plasma s'étendant vers les $x > 0$: $n_i(x = +\infty) = n_{i\infty}$, $n_n(x = +\infty) = 0$.

$$\text{Recyclage parfait : } \Gamma_i(x = 0) + \Gamma_n(x = 0) = 0 \rightarrow D_n \frac{dn_n}{dx} + D_i \frac{dn_i}{dx} = 0$$

Ainsi nous obtenons une relation algébrique entre la densité de neutres et la densité d'ions: $D_i (n_{i\infty}^2 - n_i^2) = 2D_{n\infty}n_{i\infty}n_n$, nous pouvons ainsi éliminer la densité de neutres dans l'équation du bilan ionique

$$\frac{d^2n_i}{dx^2} + \frac{\langle\sigma_i v_e\rangle\langle\sigma_{cx} v_i\rangle}{2\langle v_i^2\rangle} n_i (n_{i\infty}^2 - n_i^2) = 0 \rightarrow \frac{dn_i}{dx} + \sqrt{\frac{\langle\sigma_i v_e\rangle\langle\sigma_{cx} v_i\rangle}{4\langle v_i^2\rangle}} (n_{i\infty}^2 - n_i^2) = 0$$



Nous avons identifié la longueur de pénétration des neutres au sein du plasma λ_{pn} :

$$\text{Longueur de pénétration des neutres : } \lambda_{pn} = \sqrt{\frac{4\langle v_i^2\rangle}{n_{i\infty}^2\langle\sigma_i v_e\rangle\langle\sigma_{cx} v_i\rangle}} \sim \sqrt{\lambda_i\lambda_{cx}} > \lambda_i$$

Les profils de densité des neutres et des ions étant obtenus par quadrature.

$$n_i = n_{i\infty} \tanh \frac{x}{\lambda_{pn}}, \quad n_n = n_{n0} \operatorname{sech}^2 \frac{x}{\lambda_{pn}}$$

4.2 Génération de Courant

Nous avons analysé, dans le chapitre consacré à l'étude des orbites, les conditions de confinement d'une particule chargée au sein d'un piège toroïdal. La nécessité d'un champ poloïdal constituait la principale conclusion de cette analyse. La création d'un champ poloïdal implique l'entretien d'un courant toroïdal ; pour la génération actuelle de grands tokamaks ce courant est de l'ordre de quelques méga-ampères, pour la génération future, initialisée par ITER, l'ordre de grandeur de ce courant sera de quelques dizaines de méga-ampères.

L'utilisation d'un champ électrique d'induction n'est pas envisageable en régime stationnaire car un tel champ est induit par une variation temporelle de flux magnétique et les contraintes électrotechniques et énergétiques limitent la valeur maximum d'un flux magnétique.

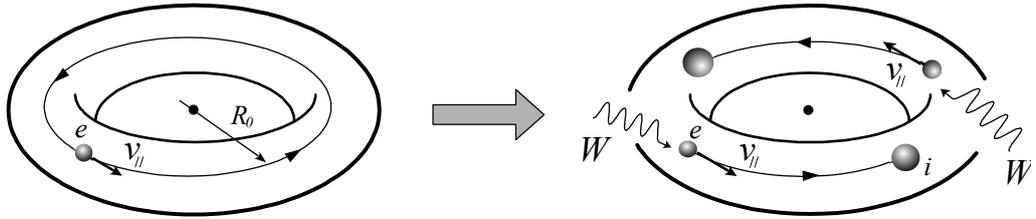
Il est donc impératif d'identifier des procédés de génération de courant dit *non-inductif* ; l'affaire peut sembler difficile en première analyse car nous sommes habitués, au quotidien, à l'usage de courants essentiellement ohmiques, issus de chutes de potentiels ou de variations de flux ; mais, en deuxième analyse, la génération de courant, en l'absence de champ électrique potentiel ou inductif, constitue un problème physique remarquablement bien posé de transfert d'impulsion-énergie. Notons d'abord qu'il n'est pas nécessaire de transférer

de l'impulsion à une population de charges pour générer un courant, il suffit d'entretenir une différence de vitesses moyennes entre électrons et ions, cette différence n'impliquant pas l'absorption d'impulsion mais simplement l'absorption de puissance pour entretenir la perte d'impulsion, dans des directions opposées, liées à la friction entre les deux populations. Bien entendu, compte tenu de l'ordering de masse entre électrons et ions, le procédé de génération le plus direct consiste à transférer de l'impulsion, unidirectionnellement, aux électrons et à considérer que les ions ne participent qu'au processus de dissipation de cette impulsion sans développer une vitesse significative.

Un électron de vitesse v_{\parallel} le long des lignes de champ porte un courant égal au taux de transfert de charges par unité de temps de part et d'autre d'une surface de section poloïdale. Le temps de transit toroïdal de cet électron étant égal à $2\pi R_0/v_{\parallel}$, le courant toroïdal porté est donné par la charge de l'électron que divise ce temps de récurrence du passage de l'électron au point de mesure considéré.

$$\text{Courant Toroïdal: } I [\text{A}] \equiv \frac{e [\text{C}] v_{\parallel} [\text{m/s}]}{2\pi R_0 [\text{m}]} \rightarrow I = \frac{e \langle v_{\parallel} \rangle}{2\pi R_0}$$

L'entretien d'une vitesse électronique moyenne non nulle, $\langle v_{\parallel} \rangle$, nécessite l'apport continu d'énergie-impulsion pour compenser les pertes dues à la friction électrons-ions, c'est-à-dire, pour compenser la destruction continue d'impulsion principalement à travers les collisions électrons-ions. L'ordering des masses entre électrons et ions garantit que l'impulsion transférée des électrons vers les ions, par les collisions, engendre un courant ionique négligeable.



L'impulsion et l'énergie peuvent être injectées dans la configuration et couplées sur la population électronique sous deux formes :

- un faisceau de particules rapides,
- une onde unidirectionnelle dont le contenu en impulsion est significatif.

4.2.1 Injection d'ondes

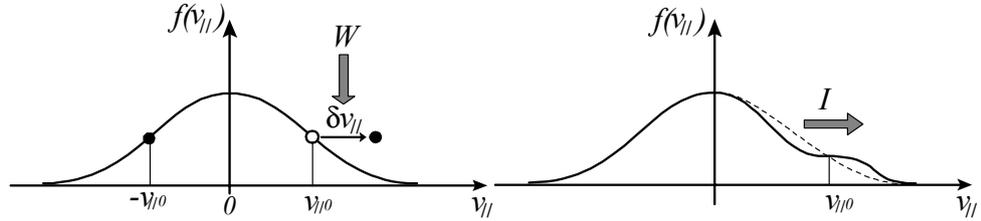
Le rapport du contenu énergétique d'une onde sur son contenu en impulsion est égal au rapport de sa pulsation sur son vecteur d'onde ; cette relation découle directement de la relation impulsion-énergie pour un photon et peut être confirmée dans un contexte classique par l'analyse du couplage onde-particule. Les ondes présentant un potentiel significatif pour la génération non inductive de courant sont donc les ondes de faible vitesse de phase le long des lignes de champ. Si la vitesse de phase d'une onde le long des lignes de champ est plus petite que la vitesse de la lumière, cette onde est susceptible d'être absorbée par

les électrons présentant une résonance Landau $k_{\parallel} v_{\parallel 0} = \omega$.

$$v_{\parallel 0} = \frac{\omega}{k_{\parallel}} \rightarrow W = -\pi\omega \frac{\omega_p^2}{k_{\parallel}^2} \left. \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} \right|_{v_{\parallel 0} = \frac{\omega}{k_{\parallel}}} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$$

Ce couplage offre un mécanisme efficace de transfert d'impulsion des ondes vers les particules et permet donc la génération d'un courant si le spectre de l'onde présente une asymétrie toroïdale. Une telle asymétrie peut être aisément contrôlée à travers un système d'antennes adéquat. Ainsi, le problème de la génération de courant se ramène donc au problème de la propagation et de l'absorption d'une onde dont la vitesse de phase le long des lignes de champ est de l'ordre de grandeur des vitesses électroniques, cette absorption conduisant à un transfert dont l'efficacité énergétique n'est pas rédhibitoire au regard de la puissance disponible pour contrôler la combustion thermonucléaire. En effet, un réacteur produisant une puissance thermique de l'ordre de 3 GW et une puissance électrique de l'ordre de 1 GW, seule une fraction faible de cette puissance (<100MW) doit être ponctionnée pour générer les ondes aptes à entretenir le courant toroïdal. Nous devons donc évaluer l'efficacité d'un tel procédé de génération de courant et construire un modèle indépendant de la nature de l'onde pour quantifier le rapport du courant généré I sur la puissance consommée W .

Soit un mécanisme d'absorption de photons par des électrons libres tel qu'un électron, de vitesse initiale $v_{\parallel 0}$, transite par absorption vers un état de vitesse $v_{\parallel 0} + \delta v_{\parallel}$, puis relaxe après cette excitation vers son état initial $v_{\parallel 0}$, cette désexcitation étant de nature collisionnelle : $v_{\parallel 0} \xrightarrow{t=0} v_{\parallel 0} + \delta v_{\parallel} \xrightarrow{t} v_{\parallel}(t) \xrightarrow{t=+\infty} v_{\parallel 0}$.



Un tel processus entraîne la création d'une vitesse moyenne de la population $\langle v_{\parallel}(t) \rangle$, transitoire et non nulle, car durant toute la durée de la désexcitation collisionnelle l'électron de vitesse $-v_{\parallel 0}$ n'a pas été affecté et une asymétrie de la fonction de distribution des vitesses le long des lignes de champs a ainsi été créée transitoirement,

$$\begin{aligned} \frac{dv_{\parallel}}{dt} &= -\nu (v_{\parallel} - v_{\parallel 0}) + \delta v_{\parallel} \delta(t) \\ v_{\parallel}(t) &= v_{\parallel 0} + \theta(t) \delta v_{\parallel} \exp(-\nu t) \\ \langle v_{\parallel}(t) \rangle &= \theta(t) \delta v_{\parallel} \exp(-\nu t) \end{aligned}$$

où $\delta(t)$ et $\theta(t)$ désignent respectivement la distribution de Dirac et la distribution de Heaviside et ν la fréquence de collision électron-ion. Les bilans de puissance et de courant de ce processus élémentaire s'établissent donc comme suit. Une puissance $\mathcal{W}(t)$ absorbée par les électrons engendre un courant $\mathcal{I}(t)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(t) [\text{W}] &= m_e v_{\parallel 0} \delta v_{\parallel} \delta(t) \\ \mathcal{I}(t) [\text{A}] &= \frac{e \langle v_{\parallel} \rangle}{2\pi R_0} = \frac{e \theta(t)}{2\pi R_0} \delta v_{\parallel} \exp(-\nu t) \end{aligned}$$

L'évaluation de l'absorption continue de la puissance d'une onde, W , est obtenue par sommation sur le temps de la puissance impulsionnelle $\mathcal{W}(t)$, et l'évaluation du courant continu, I , par sommation du courant transitoire $\mathcal{I}(t)$; l'efficacité de génération de courant est définie comme le rapport de ces deux sommes.

$$\text{Efficacité} : \frac{I}{W} \left[\frac{\text{A}}{\text{W}} \right] \equiv \frac{\int \mathcal{I}(t) dt}{\int \mathcal{W}(t) dt} = \frac{e}{2\pi R_0 m_e v_{\parallel 0} \nu}$$

Cette formule générale indique l'existence de deux régimes de génération de courant par absorption Landau asymétrique: (i) par couplage sur les électrons thermiques ou lents, alors la fréquence de collisions est fonction de la température et l'efficacité décroît avec $v_{\parallel 0}$, (ii) par couplage sur les électrons rapides, alors la fréquence de collisions est fonction de la vitesse et l'efficacité croît avec la vitesse.

$$\begin{aligned} \text{Subthermique} & : \nu = \frac{n_e Z e^4 \Lambda}{3 (2\pi)^{\frac{3}{2}} \varepsilon_0^2 m_e^{\frac{1}{2}} (k_B T_e)^{\frac{3}{2}}} \rightarrow \frac{I}{W} \left[\frac{\text{A}}{\text{W}} \right] = \frac{3\pi^{\frac{1}{2}} \varepsilon_0^2 m_e v_T^3}{2R_0 e^3 Z \Lambda n_e v_{\parallel 0}} \\ \text{Suprathermique} & : \nu = \frac{n_e Z e^4 \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2 m_e^2 v_{\parallel 0}^3} \rightarrow \frac{I}{W} \left[\frac{\text{A}}{\text{W}} \right] = \frac{2\varepsilon_0^2 m_e}{R_0 e^3 Z \Lambda n_e} v_{\parallel 0}^2 \end{aligned}$$

Ce deuxième régime présente un ordre de grandeur de l'efficacité de quelques Watts pour un Ampère, il est donc recevable comme processus potentiel de génération de courant dans un réacteur tokamak.

4.2.2 Réponse non locale

Comme il est d'usage en physique des tokamaks, toute solution à un problème engendre un problème connexe; en effet, si nous générons le courant par absorption Landau sur des électrons rapides, il est nécessaire de nous assurer que ces électrons peu collisionnels sont bien confinés, en particulier de tels électrons sont très sensibles à la turbulence magnétique et présentent des propriétés de confinement différentes des électrons thermiques. Pour étudier ce problème construisons un modèle de génération de courant décrivant (i) la dynamique dans l'espace des vitesses v_{\parallel} et (ii) la dynamique dans l'espace des positions x . Considérons un modèle simple d'excitation/relaxation d'électrons résonants de vitesses initiales $v_{\parallel 0}$ et de positions radiales initiales $x = 0$. A l'instant $t = 0$, au point $x = 0$, N_0 électrons, de charge e et de masse m , absorbent une puissance $\mathcal{W}(t) [\text{W}] = N_0 m v_{\parallel 0} \delta v_{\parallel} \delta(t)$, donc une impulsion $N_0 m \delta v_{\parallel}$, puis relaxent vers leurs vitesses initiales. La densité d'électrons résonants $n(x, t)$ au point x , à l'instant t suit une loi de diffusion de coefficient de diffusion D .

$$\begin{aligned} \text{Excitation} & : \frac{dv_{\parallel}}{dt} + \nu (v_{\parallel} - v_{\parallel 0}) = \delta v_{\parallel} \delta(t) \\ \text{Diffusion} & : \frac{\partial n}{\partial t} - D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = N_0 \delta(x) \delta(t) \end{aligned}$$

Les solutions de cette équation de relaxation temporelle et de cette équation de diffusion spatiale instationnaire sont :

$$\begin{aligned} \text{Relaxation} & : \langle v_{\parallel}(t) \rangle = \theta(t) \delta v_{\parallel} \exp(-\nu t) \\ \text{Délocalisation} & : n(x, t) = \theta(t) \frac{N_0}{2\sqrt{\pi D t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \end{aligned}$$

Le courant $J(x, t)$ en un point x à l'instant t est égal à $en(x) \langle v_{\parallel}(t) \rangle$.

$$J(x, t) = \theta(t) \delta v_{\parallel} \frac{N_0 e}{2\sqrt{\pi D t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt} - \nu t\right)$$

Le régime stationnaire du processus de génération de courant est obtenu par sommation sur le temps t .

$$\frac{J(x)}{W(x=0)} = \frac{\int J(x, t) dt}{\int \mathcal{W}(t) dt} = \frac{e}{m v_{\parallel 0} (D\nu)^{\frac{1}{4}}} \sqrt{\frac{|x|}{2\pi D}} K_{\frac{1}{2}}\left(2\sqrt{\frac{\nu}{4D}} |x|\right)$$

où $K_{\frac{1}{2}}$ est la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce d'ordre un demi. Ainsi, un dépôt de puissance continu en $x = 0$ engendre un courant qui ne reste pas localisé en $x = 0$ mais diffuse dans l'ensemble du plasma, sa demi largeur est de l'ordre de $\sqrt{D/\nu}$ et le flux sortant, qui détermine l'efficacité globale prenant en compte les collisions et le déconfinement, peut être évalué à partir de la dérivée de la solution précédente. Une analyse de l'ordre de grandeur des pertes supplémentaires liées à ce déconfinement révèle que l'ordre de grandeur de quelques Watts par Ampère est préservé en présence de diffusion radiale des électrons rapides.

4.2.3 Injection de particules

Considérons le problème de la génération de courant par injection d'ions rapides. Le modèle de ralentissement électronique à haute vitesse, et ionique à basse vitesse, peut être utilisé pour évaluer le potentiel des ions rapides pour générer un courant toroïdal. Dans ce contexte, soit une injection stationnaire de particules rapides de vitesse initiale v_b ; la distribution des vitesses ainsi initiées à haute vitesse, par un terme source $\sim \delta(v - v_b)$, s'établit suivant une fonction de distribution $f_b(v)$ solution de l'équation cinétique de Landau réduite au terme de friction $\langle \delta v \rangle / \delta t$.

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^2 \frac{\langle \delta v \rangle}{\delta t} f_b = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \frac{v_c^3 + v^3}{\tau_b} f_b = \mathcal{W} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right] \frac{2}{m_b v_b^2} \frac{\delta(v - v_b)}{4\pi v^2}$$

Le terme source des particules est exprimé en fonction de la puissance injectée sous cette forme purement cinétique \mathcal{W} que divise l'énergie cinétique initiale d'un ion rapide $m_b v_b^2 / 2$. La solution de cette équation cinétique est obtenue par quadrature directe du terme source.

$$f_b(v) = \mathcal{W} \frac{\tau_S}{2\pi m_b v_b^2} \frac{\theta(v_b - v)}{v_c^3 + v^3}$$

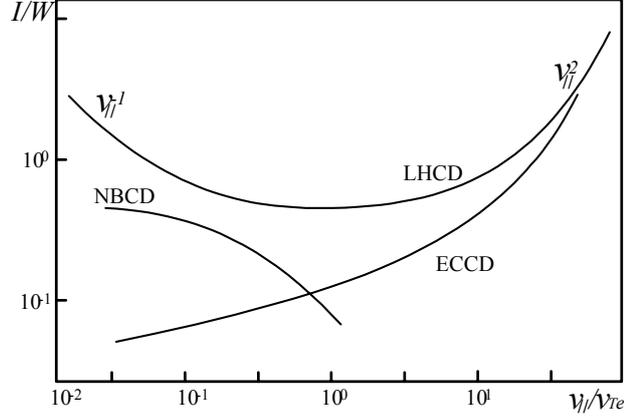
Le courant stationnaire associé à cette distribution d'ions rapides est noté $\langle nv \rangle_b$ et est obtenu comme le deuxième moment de la fonction de distribution.

$$\langle nv \rangle_b \equiv \int f_b(v) v 4\pi v^2 dv = \mathcal{W} \frac{2\tau_S}{m_b v_b^2} \int_0^{v_b} \frac{v^3 dv}{v_c^3 + v^3} = \mathcal{W} \frac{2\tau_S v_c}{m_b v_b^2} G\left(\frac{v_b}{v_c}\right) \xrightarrow{v_b \gg v_c} \mathcal{W} \frac{2\tau_S}{m_b v_b}$$

où la fonction $G(x)$ est donnée par :

$$G(x) = x + \frac{1}{6} \ln \frac{1-x+x^2}{(1+x)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6} \right)$$

Dans la suite de l'analyse nous utiliserons cette valeur approchée du courant de faisceau $\langle nv \rangle_b = 2\tau_S \mathcal{W} / m_b v_b$.



Cette distribution de vitesses suprathermiques constitue une source d'impulsion pour les électrons et les ions thermiques et le transfert d'impulsion vers ces populations peut être décrit par un terme de friction. Nous négligerons le transfert d'impulsion entre le faisceau et les ions car l'essentiel de la distribution se situe à haute vitesse ; sous cette hypothèse les deux termes de friction assurant la stationnarité du processus et la dissipation de l'impulsion énergie injectée, sont données par :

$$\begin{aligned}
 \text{Electrons /ions} & : R_{e \rightarrow i} = n_e m_e \frac{Z_i^2 e^4 n_i \Lambda}{3 \varepsilon_0^2 \sqrt{m_e} (2\pi k_B T)^{\frac{3}{2}}} (\langle v_e \rangle - \langle v_i \rangle) \\
 \text{Ions rapides /électrons} & : R_{b \rightarrow e} = n_b m_b \frac{\sqrt{m_e} Z_b^2 e^4 n_e \Lambda}{3 \varepsilon_0^2 m_b (2\pi k T)^{\frac{3}{2}}} (\langle v \rangle_b - \langle v_e \rangle)
 \end{aligned}$$

En régime stationnaire les électrons thermiques reçoivent l'essentiel de l'impulsion-énergie du faisceau et acquièrent une vitesse moyenne non nulle $\langle v_e \rangle$ telle que la friction électrons thermiques/ions thermiques compense la friction faisceau/électrons thermiques : $R_{b \rightarrow e} = R_{e \rightarrow i} \rightarrow Z_b^2 \langle nv \rangle_b + Z_i^2 n_i \langle v_i \rangle = (Z_i^2 n_i + Z_b^2 n_b) \langle v_e \rangle \approx Z_i^2 n_i \langle v_e \rangle$; cette dernière relation permet d'éliminer les vitesses ionique et électronique dans l'expression du courant.

$$\begin{aligned}
 \frac{J}{e} & \equiv Z_i n_i \langle v_i \rangle + Z_b \langle nv \rangle_b - Z_i n_i \langle v_e \rangle \\
 & = \left(1 - \frac{Z_b}{Z_i} \right) Z_b \langle nv \rangle_b
 \end{aligned}$$

L'effet d'entraînement par friction sur les populations thermiques d'ions et d'électrons est dramatique car $Z_b \sim Z_i$ et le courant d'ions rapides est pratiquement totalement neutralisé par un courant de retour d'origine thermique. Ce modèle simple rend bien compte de la relative inefficacité de la génération de courant par injection d'ions rapides (de neutres rapides). Le schéma ci-dessous présente une comparaison des différents procédés de génération de courant en terme d'efficacité ; l'efficacité de la génération non inductive de courant par injection de neutre, en Ampère par Watt, est donc la plus faible au regard des

autres procédés et est donnée par :

$$\frac{\frac{I}{W} \left[\frac{\text{A}}{\text{W}} \right]}{\leq} \left(1 - \frac{Z_b}{Z_i} \right) \frac{Z_b e \tau_S}{\pi R_0 m_b v_b}$$

Une étude plus fine de la cinétique de l'entraînement des ions et électrons thermiques par les ions rapides relève cette valeur mais l'ordre de grandeur reste néanmoins faible au regard des autres procédés.

4.3 Extraction de particules

Le volume compris entre le plasma et la paroi d'un tokamak est empli de particules neutres. Nous avons établi dans les paragraphes précédents que les atomes d'hydrogène neutres pénètrent à l'intérieur du plasma sur une faible longueur λ_{pn} , de l'ordre de $\lambda_{pn} \sim \sqrt{\lambda_i \lambda_{cx}}$, appelée longueur de pénétration des neutres, où λ_i est la longueur caractéristique d'ionisation et λ_{cx} la longueur caractéristique d'échange de charge. Le système de pompage doit évacuer en continu de l'ordre de 10% du flux de matière sortant du plasma, les 90% restant sont impliqués dans le processus de recyclage. La prise d'entrée du système de pompage évacuant ainsi en régime continu plus de 10^{21} particules par seconde est en général située au niveau du divertor, les pressions de pompage, fonctions du régime de fonctionnement du divertor, sont inférieures au millitorr et les libres parcours moyens des neutres sont supérieurs au centimètre.

4.3.1 Régime de Knudsen

Lorsque le libre parcours moyen λ_n d'une population de neutres est supérieur à la dimension caractéristique L du récipient, ou de la conduite, la dynamique du gaz est contrainte par l'interaction particule-paroi qui est dominante par rapport à l'interaction particule-particule. On définit K_n le rapport du libre parcours moyen λ_n sur la dimension caractéristique du système de stockage ou de transfert L , ce nombre est appelé nombre de Knudsen.

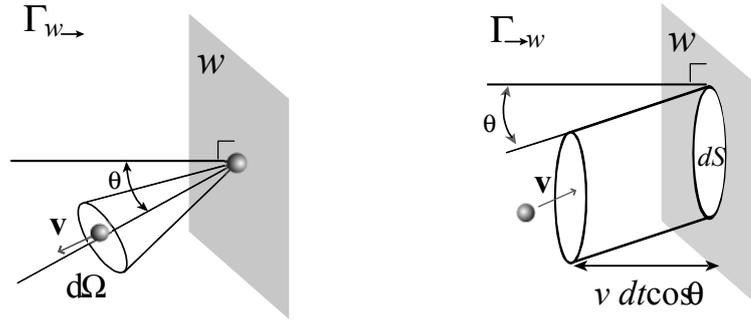
$$\text{Nombre de Knudsen : } K_n \equiv \frac{\lambda_n}{L} = \frac{[\text{Libre parcours moyen des neutres}]}{[\text{Dimension de la chambre ou du conduit}]}$$

Ce nombre sans dimension permet de distinguer trois régimes de dynamique des neutres : les écoulements continus lorsque $K_n < 10^{-1}$, le régime de transition pour $10^{-1} < K_n < 10$ et le régime moléculaire à grand nombre de Knudsen $K_n > 10$. Le système d'extraction de matière fonctionne en régime moléculaire.

Dans ce régime, caractéristique de la dynamique des neutres dans un tokamak, l'interaction particule-paroi est dominante mais ne doit pas être considérée comme une simple réflexion spéculaire de l'atome (ou de la molécule) sur la paroi, où l'angle d'incidence égale l'angle de réflexion. Le processus d'interaction neutre-paroi doit être modélisé comme une *adsorption* sur la paroi, suivi par une *désorption* du neutre par la paroi ; entre ces deux phases la particule neutre reste adsorbée au niveau des premières couches atomiques de la paroi.

Si l'énergie de liaison associée à cet état d'adsorption, E_a , est inférieure à une fraction d'eV le processus relève de la théorie des liaisons faibles et correspond au régime de la *physisorption*, si E_a est supérieure à une fraction d'eV son

ordre de grandeur est caractéristique des énergies mises en jeu dans les réactions chimiques et le processus correspond au régime de la *chimisorption*. Le temps de résidence de la particule neutre, τ , c'est-à-dire la durée de vie de l'état adsorbé neutre-paroi, est une fonction croissante de l'énergie de liaison E_a . En effet le processus de désorption nécessite une excitation à un niveau énergétique de l'ordre de E_a , les modèles théoriques prédisent des valeurs allant de $\tau \sim 10^{-10}$ s pour la *physisorption* basse énergie à $\tau \sim 10^6$ s pour la *chimisorption* par liaison forte.



Considérons une population de particules neutres de densité n présentant une distribution de vitesses $f_0(v)$ normalisée à l'unité; afin de modéliser les systèmes d'extraction de matière nous devons évaluer le flux de particules du gaz neutre vers une paroi w , soit réelle soit fictive. Notons ce flux $\Gamma_{w\leftarrow}$ et notons $\Gamma_{w\rightarrow}$ le flux de la paroi vers le gaz.

Evaluons, en premier lieu le flux incident, $\Gamma_{w\leftarrow}$, en régime moléculaire sur une paroi w . Le nombre de particules par unité de volume dont la vitesse v fait un angle θ avec la normale à la paroi, $dN_{w\leftarrow}(v, \theta)$, est donné par le produit de la densité n par la fonction de distribution des vitesses $f_0(v)$ pondérée par le rapport de l'angle solide infinitésimal $2\pi \sin \theta d\theta$ autour de θ ramené à l'angle solide total 4π .

$$dN_{w\leftarrow}(v, \theta) \equiv n \frac{2\pi \sin \theta}{4\pi} f_0(v) d\theta dv$$

Le nombre de particules traversant un élément de surface infinitésimal dS , durant un temps dt , sous un angle θ , est obtenu en multipliant $dN_{w\leftarrow}$ par le volume accessible, dV , depuis l'élément de surface dS durant un temps dt : $dV = v \cos \theta dS dt$. Le flux de particules, $d\Gamma_{w\leftarrow}(v, \theta)$ est égal à ce nombre de particules traversant un élément de surface infinitésimal dS sur la paroi, durant un temps dt divisé par $dS dt$.

$$d\Gamma_{w\leftarrow}(v, \theta) \equiv \frac{1}{2} n v \cos \theta \sin \theta f_0(v) d\theta dv$$

Le nombre total de particules traversant une surface dS , par unité de temps dt est égal à la somme des flux infinitésimaux lorsque l'angle θ varie de 0 à $\pi/2$ et le module de la vitesse v varie de 0 à $+\infty$, $\Gamma_{w\leftarrow} \equiv \int_0^{\pi/2} \int_0^{+\infty} d\Gamma_{w\leftarrow}$. L'intégrale sur le module de la vitesse n'est autre que la définition de la vitesse moyenne \bar{v} , le résultat final est donc :

$$\text{Flux de particules : } \Gamma_{w\leftarrow} \left[\frac{1}{\text{s} \cdot \text{m}^2} \right] = n \sqrt{\frac{k_B T}{2\pi m}} = \frac{n \bar{v}}{4}$$

Le calcul du flux de chaleur suit la même démarche d'évaluation du flux de particules pour une vitesse donnée v , puis de sommation sur les différentes incidences θ par rapport à la direction normale ainsi que sur la vitesse v . Mais dans ce cas, une pondération supplémentaire par le facteur $mv^2/2$ est nécessaire ; ainsi :

$$\text{Flux de chaleur: } q_{w\leftarrow} \left[\frac{\text{J}}{\text{s} \cdot \text{m}^2} \right] = 2nk_B T \sqrt{\frac{k_B T}{2\pi m}} = 2k_B T \times \Gamma_{w\leftarrow}$$

Considérons à présent le processus réciproque, le flux de la paroi vers le gaz $\Gamma_{w\rightarrow}$. A l'issue du processus d'adsorption la particule est (ré)émise par la paroi suivant une loi de probabilité proportionnelle au cosinus de l'angle θ entre la direction d'émission et la normale à la paroi ; ainsi le flux d'émission élémentaire $d\Gamma_{w\rightarrow}$, suivant la direction θ , dans l'angle solide $d\Omega$, est donné par la loi dites de Knudsen.

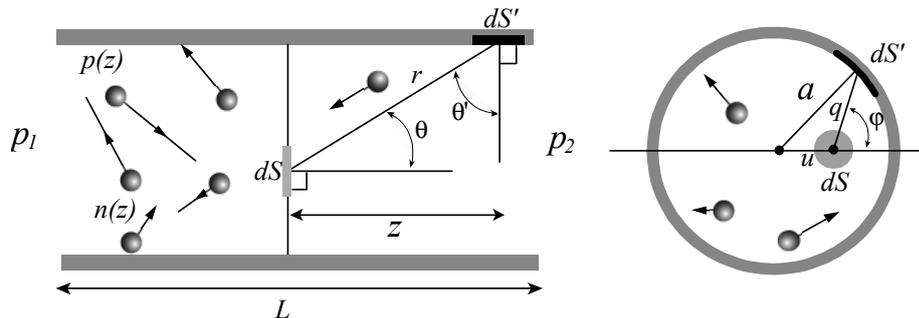
$$\text{Loi de Knudsen: } d\Gamma_{w\rightarrow} \left[\frac{1}{\text{s} \cdot \text{m}^2} \right] \equiv n \bar{v} \cos \theta \frac{d\Omega}{4\pi}$$

où n est la densité de neutres et \bar{v} la vitesse thermique associée à la température de la paroi. On notera la réciprocité à l'équilibre : $\Gamma_{w\rightarrow} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\Gamma_{w\rightarrow} = \Gamma_{w\leftarrow}$. Cette loi de réflexion diffuse peut être établie dans le cadre d'un modèle dit d'effusion où le processus d'adsorption est assimilé au flux d'une population isotrope à travers un orifice de dimension plus petite que le libre parcours moyen. Les trois principaux flux en régime moléculaire sont résumés dans le tableau suivant :

Quantité	Unité	Expression
Flux de particules incident $\Gamma_{w\leftarrow}$	$\frac{1}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}$	$n \sqrt{\frac{k_B T}{2\pi m}}$
Flux de Chaleur incident $q_{w\leftarrow}$	$\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$	$2k_B T \times \Gamma_{w\leftarrow}$
Flux de Knudsen de désorption $d\Gamma_{w\rightarrow}(\theta)$	$\frac{1}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}$	$\cos \theta \frac{d\Omega}{\pi} \times \Gamma_{w\leftarrow}$

4.3.2 Système d'extraction

La conception d'un système d'extraction de neutres nécessite l'évaluation des caractéristiques des structures de transport et des structures de pompage. Le concept de conductance d'une canalisation permet la caractérisation des performances des différents conduits. Nous introduirons la définition générale de la conductance pour une canalisation de géométrie quelconque après avoir calculé le flux, en régime moléculaire, dans un tuyau rectiligne, de section circulaire de rayon a , connecté en ses deux embouts à des réservoirs de pressions respectives p_1 et p_2 .



La génératrice de ce cylindre étant orientée suivant l'axe des z , la densité $n(z)$ et la pression $p(z)$ présentent un gradient assurant le passage continu de la pression p_1 à la pression p_2 . Sous une hypothèse isotherme, pour une distribution de densité donnée $n(z)$, calculons le flux de particules Γ suivant l'axe des z . Evaluons dans un premier temps, le flux de particules à travers une surface dS , dans le plan de section droite du cylindre, flux provenant d'une surface dS' sur la paroi du cylindre. La distance entre dS et dS' vaut r et les angles entre les normales à ces surfaces et la direction de dS vers dS' sont respectivement notés θ et θ' tels que $\pi \geq \theta \geq 0$ et $\frac{\pi}{2} \geq \theta' \geq 0$.

Soit $d\Omega$ l'angle solide sous lequel dS' est vue depuis dS et $d\Omega'$ l'angle solide sous lequel dS est vue depuis dS' . Conformément à la loi de Knudsen, le nombre dN de particules envoyées depuis la surface dS' vers la surface dS est donné par :

$$dN_{dS' \rightarrow dS} = n \bar{v} \cos \theta' \frac{d\Omega'}{4\pi} dS'$$

La définition des angles solides $d\Omega$ et $d\Omega'$ et la configuration géométrique du problème permettent d'établir les relations : $r^2 d\Omega \equiv dS' \sin \theta = dS' \cos \theta'$ et $r^2 d\Omega' \equiv dS \sin \theta' = dS |\cos \theta|$. Ainsi nous pouvons éliminer les variables associées à la paroi et exprimer :

$$dN_{dS' \rightarrow dS} = n \bar{v} |\cos \theta| \frac{d\Omega}{4\pi} dS$$

A travers l'élément de surface dS deux flux intégrés se croisent, un flux dans le sens positif Γ_{dS+} et un flux dans le sens négatif Γ_{dS-} .

$$\Gamma_{dS+} = -\frac{\bar{v}}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta n(z) \sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{dS-} = \frac{\bar{v}}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta n(z) \sin \theta \cos \theta$$

Les variables z , θ , et φ ne sont pas indépendantes; en effet, $q = r \sin \theta$ et $z = r \cos \theta \rightarrow z = q \cot \theta$ où q et φ sont reliés par :

$$a^2 = q^2 + u^2 + 2qu \cos \varphi \rightarrow q(\varphi, u) = \sqrt{a^2 - u^2 \sin^2 \varphi - u \cos \varphi}$$

où u mesure la distance entre l'élément de surface dS et l'axe du cylindre. Le flux total $\Gamma = \Gamma_{dS+} + \Gamma_{dS-}$ à travers l'élément de surface dS est égal à la somme de ces deux flux :

$$\Gamma(u) = -\frac{\bar{v}}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta n(q(\varphi, u) \cot \theta) \sin \theta \cos \theta$$

Le profil de densité $n(z)$ à l'intérieur du cylindre peut être considéré comme linéaire si nous négligeons les effets de bord au voisinage des entrées et sorties : $n(z) = n(0) + z dn/dz$.

$$\Gamma = -\frac{\bar{v} n(0)}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta - \frac{\bar{v}}{4\pi} \frac{dn}{dz} \Big|_0 \int_0^{2\pi} q(\varphi) d\varphi \int_0^{\pi} \cos^2 \theta d\theta$$

Le premier terme de cette somme est nul conformément au principe de symétrie des causes et des effets : une densité homogène au sein d'une canalisation homogène ne peut produire un flux, une cause scalaire (densité) n'engendre

pas d'effet vectoriel (flux). Le deuxième terme peut être exprimé comme une intégrale elliptique de deuxième espèce $E\left(\frac{u}{a}\right)$.

$$\Gamma = -\frac{\bar{v}}{8} \frac{dn}{dz} \Big|_0 \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - u^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = -\frac{\bar{v} a}{2} \frac{dn}{dz} \Big|_0 E\left(\frac{u}{a}\right)$$

Le flux total résultant du gradient de densité dn/dz généré par la différence de pression $p_1 - p_2$ est obtenu en sommant les flux élémentaires suivant la variable $w = u/a$; compte tenu de l'expression de l'élément d'aire en géométrie cylindrique $dS(w) = 2\pi a w dw$ nous exprimons ainsi le débit de particules dN/dt à travers la canalisation :

$$\frac{dN}{dt} = -\pi \bar{v} a^3 \frac{dn}{dz} \Big|_0 \int_0^1 E(w) w dw = -\frac{2\pi}{3} \bar{v} a^3 \frac{dn}{dz} \Big|_0$$

Le gradient de densité résultant de la différence de pression $p_1 - p_2$ est supposé constant le long du conduit, ainsi : $dn/dz = (p_2 - p_1)/Lk_B T$. Cette hypothèse considère les effets de bords, aux niveaux de l'entrée et de la sortie du conduit, comme négligeables, nous y reviendrons par la suite.

Dans le domaine des technologies du vide, afin de caractériser les propriétés d'un conduit, il est d'usage d'introduire le produit du débit volumique par la pression, Q , et d'appeler le flux gazeux ainsi mesuré en $\text{Pa.m}^3.\text{s}^{-1}$ c'est à dire en W : $Q \equiv k_B T dN/dt$. Ainsi le débit volumique $S \equiv dV/dt$, qui varie le long de la canalisation en régime permanent, est égal au flux que divise la pression $S = Q/P$. Le calcul du débit de particules, dN/dt , à travers une canalisation cylindrique longue permet d'exprimer le flux en fonction de la différence de pression entre l'entrée et la sortie :

$$Q = \frac{2\pi a^3}{3L} \bar{v} (p_1 - p_2) = \frac{4a^3}{3L} \sqrt{\frac{2\pi k_B T}{m}} (p_2 - p_1)$$

Définissons la conductance C_c d'un conduit cylindrique comme le rapport du flux sur la différence de pression :

$$\text{Conductance : } C_c \equiv \frac{Q}{p_1 - p_2} = \frac{2\pi a^3}{3L} \bar{v}$$

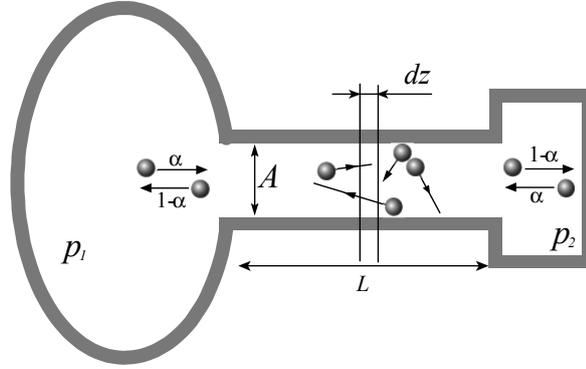
et généralisons cette définition pour la modélisation et le calcul d'un système quelconque de transport de gaz en régime moléculaire. Soit un conduit droit dont la section est une courbe de périmètre D , de surface A et de longueur L . Etablissons le bilan de forces, c'est-à-dire de transfert d'impulsions, dans une section de longueur infinitésimale dz de ce conduit. L'écoulement en régime moléculaire présentant une vitesse moyenne V , le taux de destruction de l'impulsion au sein de cette tranche infinitésimale dz résultant du flux sur les parois est égal à $mV \times D dz \times n \bar{v} / 4$. En régime stationnaire le gradient de pression, $dp/dz = (p_1 - p_2)/L$, exerce une force sur cette tranche infinitésimale dz et cette force est une source d'impulsion, le bilan d'impulsion gain-perte s'établit donc comme suit :

$$mV D dz n \frac{\bar{v}}{4} = A \frac{dp}{dz} dz \rightarrow Q = k_B T n V A = \sqrt{\frac{2\pi k_B T}{m}} \frac{A^2}{DL} (p_1 - p_2)$$

Nous obtenons ainsi une expression approchée de la conductance C_q d'un conduit de section quelconque.

$$C_q \sim \sqrt{\frac{2\pi k_B T}{m}} \frac{A^2}{DL} = \frac{\pi}{2} \bar{v} \frac{A^2}{DL}$$

Les expressions établies pour évaluer C_c , dans le cas du cylindre circulaire, et C_q , dans le cas du cylindre quelconque, ne sont valables que pour un conduit dont la longueur L est supérieure aux dimensions transverses, les effets de bord associés à la mise en mouvement du gaz aux niveaux des orifices d'entrée et de sortie induisent une différence entre la pression d'équilibre de la chambre amont p_1 (en aval p_2) et la pression au niveau de l'embouchure amont (aval).



Néanmoins, le concept de conductance est particulièrement utile pour le calcul des systèmes d'extraction de matière, car, compte tenu de la constance du flux Q dans le conduit, les associations en série et en parallèle des conductances obéissent aux règles classiques des circuits, parallèle : $C = \sum_i C_i$, série : $C^{-1} = \sum_i C_i^{-1}$. Une correction des effets de bord peut être obtenue en considérant la conductance C_d d'un diaphragme de surface A séparant deux chambres de pression p_1 et p_2 . Le flux d'effusion du premier demi-espace vers le second $n_1 \sqrt{k_B T_1 / 2\pi m} = p_1 \sqrt{k_B T_1 / 2\pi m} / k_B T_1$ est différent du flux d'effusion du second vers le premier et cette différence est proportionnelle au saut de pression ; ainsi le flux Q est égal à $\sqrt{k_B T_1 / 2\pi m} A (p_1 - p_2)$ et la conductance du diaphragme présente une valeur égale à $C_d = \sqrt{k_B T_1 / 2\pi m} A$. Les effets de bords peuvent être pris en compte en considérant un conduit court comme l'association en série d'un diaphragme de surface A et d'un conduit de surface de section A .

$$C = \frac{C_d C_q}{C_d + C_q} \sim \sqrt{\frac{2\pi k_B T}{m}} \frac{A^2}{DL + 2\pi A}$$

On notera que $C \rightarrow C_d$ lorsque $L \rightarrow 0$ et $C \rightarrow C_q$ lorsque $L \rightarrow +\infty$, le problème de la singularité de la formule exprimant C_q lorsque $L \rightarrow 0$ étant ainsi résolu.

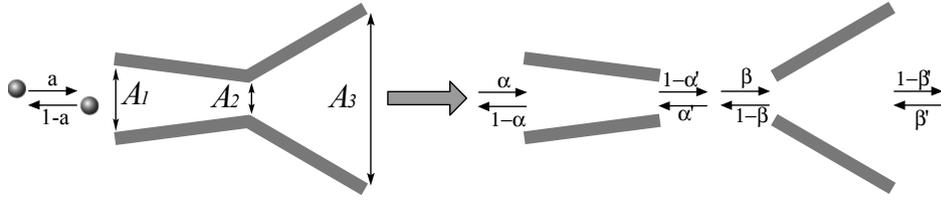
Le concept de conductance est particulièrement utile pour le calcul des installations de pompage. Considérons une pompe de débit volumétrique S^* [$\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$] opérant à la pression p^* ; cette pompe est connectée à une chambre où règne une pression p , par une canalisation de conductance C . Définissons S le débit volumique de pompage du système pompe plus conduit : $Sp = S^* p^*$, le flux dans la conduite est égal au flux pompé : $C(p - p^*) = S^* p^*$. L'élimination des pressions entre ces deux équations permet d'exprimer le débit du système : $S/S^* = 1/1 + S^*/C$. Le débit de pompage au niveau de la chambre S est donc

toujours inférieur au débit nominal de la pompe S^* et il convient donc d'adapter pompes et canalisations afin que $C > S^*$.

La modélisation, en particulier la modélisation numérique des installations complexes, fait usage du concept de conductance mais aussi du concept de probabilité de transmission par un conduit, ou facteur de Clausing.

Considérons une particule neutre au niveau de l'entrée d'un conduit, cette particule présente une probabilité α de traverser le conduit et $1 - \alpha$ de revenir au niveau de la section d'entrée. Soit un conduit droit de conductance C_q et de surface de section A entre deux chambres de caractéristiques indicées par 1 et 2 ; d'une part le flux de particules $dN/dt \sim (\alpha n_1 \bar{v}_1 A - \alpha n_2 \bar{v}_2 A) / 4$ et, d'autre part $dN/dt = Q/k_B T = C_q (p_1 - p_2) / k_B T$, ainsi $\alpha \sim C_q / C_d$.

La probabilité de transmission est une caractéristique essentiellement géométrique du conduit qui ne dépend que de sa forme et de ses dimensions. Le concept de probabilité de transmission présente un caractère plus fondamental que celui de conductance.



Les lois de combinaison des probabilités de transmission de différentes sections s'établissent comme suit. Soit un conduit pouvant être décomposé en deux éléments simples, les surfaces d'entrée et de sortie sont respectivement A_1 et A_2 pour le premier élément et A_2 et A_3 pour le deuxième. Les probabilités de transmission pour le premier élément sont notées α de la gauche vers la droite et α' de la droite vers la gauche ($\alpha A_1 = \alpha' A_2$), ainsi que β et β' pour le deuxième élément ($\beta A_2 = \beta' A_3$). Considérons N neutres, présentant une distribution de vitesse isotrope, franchissant l'entrée de section A_1 , une quantité αN arrive au niveau de la section d'entrée du deuxième élément, une fraction $\alpha \beta N$ arrive au niveau de l'ouverture de sortie et une fraction $\alpha (1 - \beta) N$ est réfléchiée vers le premier élément, ainsi une fraction $\alpha \beta (1 - \beta) (1 - \alpha') N$ parvient au niveau de la sortie du deuxième élément et une fraction $\alpha (1 - \beta) (1 - \alpha') N (1 - \beta)$ est réfléchiée.... Le nombre total de particules sortant par la section A_3 est donc donné par :

$$\alpha \beta N + \alpha \beta (1 - \beta) (1 - \alpha') N + \alpha \beta (1 - \beta) (1 - \alpha') N + \alpha \beta (1 - \beta)^2 (1 - \alpha')^2 N$$

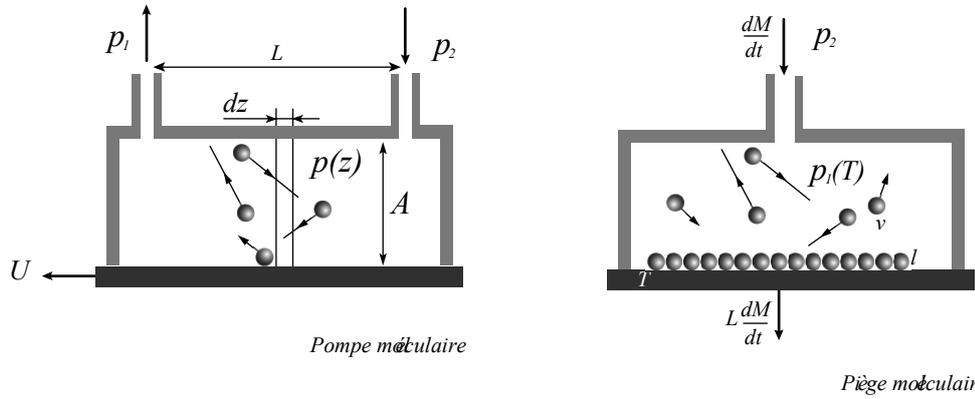
La probabilité de transmission par le système, a , est égale à la somme géométrique :

$$a = \frac{\alpha \beta}{\beta + \alpha' - \beta \alpha'} = \frac{\alpha \beta A_2}{\beta A_2 + \alpha A_1 - \beta \alpha A_1}$$

Nous venons d'exposer quelques rudiments de la théorie des écoulements en régime moléculaire permettant de modéliser le système de conduit assurant l'extraction de neutres au niveau du divertor. Différents systèmes de pompage peuvent être mis en oeuvre pour entretenir la différence de pression générant l'écoulement et nous allons exposer brièvement les principes physiques du pompage moléculaire et du piégeage moléculaire, ce deuxième procédé est celui retenu

dans le cadre du projet ITER dont le système de pompage sera constitué de pompes cryogéniques.

Considérons une pompe moléculaire, présentant la topologie d'un conduit de surface de section A , de longueur L , et dont l'une des parois de largeur H et de surface utile A' se déplace à la vitesse U suivant l'axe des z tout en préservant les propriétés d'étanchéité du système. Ces contraintes impliquent en fait une géométrie cylindrique et non droite. Etablissons le bilan des forces, c'est-à-dire le bilan de transfert d'impulsion, dans une section de longueur infinitésimale dz de la pompe représentée sur la figure ci-dessous :



L'écoulement en régime moléculaire présente un taux de production d'impulsion au sein de cette tranche infinitésimale égal à : $mU \times H dz \times n \bar{v} / 4$. En régime stationnaire le gradient de pression dp/dz exerce une force $Adzdp/dz$ sur cette tranche infinitésimale et cette force est une source d'impulsion, le bilan gain-perte d'impulsion s'établit donc comme suit :

$$mUHn\frac{\bar{v}}{4} = A\frac{dp}{dz} \rightarrow \frac{d \ln p}{dz} = \frac{UH}{A} \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}}$$

Ainsi, la différence de pression d'une pompe moléculaire mécanique est une fonction exponentielle dont l'argument est proportionnel à la surface de la paroi mobile et inversement proportionnel à la surface de section de sa chambre.

$$\text{Pompe moléculaire : } \frac{p_1}{p_2} = \exp\left(\frac{2UH}{\pi \bar{v} A}\right)$$

Le pompage cryogénique, bien que basé sur un principe totalement différent, présente aussi une dépendance exponentielle du rapport des pressions amont et aval en fonction des paramètres du système.

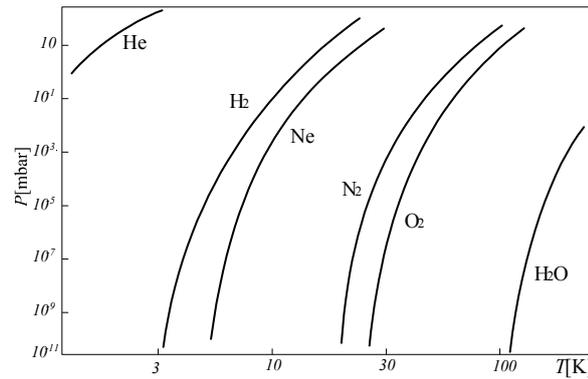
Rappelons les principes de base de ce type de système. Un fluide neutre peut se présenter sous deux formes : vapeur (v) ou liquide (l), le passage d'une unité de masse de la phase liquide vers la phase vapeur nécessite un apport de chaleur définissant la *chaleur latente massique* : $\mathcal{L} \equiv T(s_v - s_l)$, où s est l'entropie spécifique massique.

A basse température, les deux phases coexistent sous une pression de vapeur saturante $p_1(T)$ et à une température T si leur enthalpie libre massique sont égales : $g_l = g_v \rightarrow u_l dp_1 - s_l dT = u_v dp_1 - s_v dT$, où u est le volume spécifique massique. La phase gazeuse occupant un volume plus important que la phase liquide nous pouvons donc établir la relation dites de *Clapeyron* :

$\mathcal{L} = T (u_v - u_l) dp_1/dT \approx T u_v dp_1/dT$. Sous les hypothèses (i) d'un comportement de type gaz parfait pour la phase vapeur $p_1 u_v = k_B T/m \rightarrow \mathcal{L} \approx (k_B T^2/m p_1) dp_1/dT$ et (ii) d'une faible variation de la chaleur latente en fonction de la température nous obtenons la formule de *Rankine* :

$$\text{Piège moléculaire : } \frac{p_1}{p_0} = \exp - \left(\frac{m\mathcal{L}}{k_B T} \right)$$

qui constitue une approximation recevable de la pression de vapeur saturante $p_1(T)$ d'une vapeur en fonction de la température.



Le principe des pièges cryogéniques découle de ce comportement d'un équilibre diphasique ; au voisinage d'une surface à très basse température une vapeur présente une pression égale à la pression de vapeur saturante. Cette dernière étant très basse cela permet d'engendrer un gradient de pression, donc un mécanisme d'extraction de neutre depuis la chambre du tokamak. Les neutres se condensant au niveau de la surface basse température pouvant être extraits pour séparer le combustible de ses cendres, puis le combustible (90% du gaz) réinjecté par le système d'injection de matière, injecteur de neutres, de glaçons ou simple vanne de gaz.

Références

- D.J. Rose et M. Clark, *Plasmas and Controlled Fusion*, MIT Press, USA, 1961.
- K. Miyamoto, *Plasma Physics for Nuclear Fusion*, The MIT Press, USA, 1989.
- K. Nishikawa et M. Wakatani, *Plasma Physics, Basic Theory with Fusion Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- R.D. Hazeltine et J.D. Meiss, *Plasma Confinement*, Addison-Wesley, USA, 1992.
- B. Kadomtsev, *Tokamak Plasma, a Complex Physical System*, IOP, London, 1992.
- J. Wesson, *Tokamaks*, Oxford University Press, Oxford, 1997.
- R.B. White, *The Theory of Toroidally Confined Plasma*, Imperial College Press, London, 2001.
- W. M. Stacey, *Fusion Plasma Physics*, Wiley-VCH Press, Leipzig, 2005.
- J. Freidberg, *Plasmas Physics and Fusion Energy*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

PHY 569 A - Recueil d'exercices et problèmes

Formulaire :

$$\frac{dZ}{dt} = \mathcal{F}(t) \rightarrow Z(t) = a_0 + \int_{t_0}^t \mathcal{F}(u) du$$

$$\frac{dZ}{dt} \pm i\omega Z(t) = \mathcal{F}(t) \leftrightarrow Z(t) = a_0 \exp(\mp i\omega t + i\varphi_0) + \exp(\mp i\omega t) \int_{t_0}^t \exp(\pm i\omega u) \mathcal{F}(u) du$$

$Z(t)$ et $\mathcal{F}(t)$ sont des fonctions complexes de la variable réelle t ; a_0 et φ_0 sont des constantes réelles déterminées par les conditions initiales à l'instant t_0 .

$$\begin{aligned} \cos a - \cos b &= -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} \\ \sin a - \sin b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 \left[\frac{\omega}{2} t \right]}{\omega^2 t} &\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \delta[\omega] \\ \frac{\nu}{\nu^2 + x^2} &\xrightarrow{\nu \rightarrow 0} \pi \delta(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\pi \delta(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp jkx \\ \delta(x) &= \frac{d\theta(x)}{dx} \end{aligned}$$

où δ et θ sont respectivement les distributions de Dirac et Heaviside;

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-bx^2) \cos(kx) dx &= \sqrt{\frac{\pi}{b}} \exp\left(-\frac{k^2}{4b}\right) \\ \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\beta}{x} - \gamma x\right) dx &= 2 \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}} K_{\frac{1}{2}}\left(2\sqrt{\beta\gamma}\right) \\ \int_0^{+\infty} \exp(-\nu t) \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) \nu dt &= \frac{1}{2} \frac{\frac{\omega^2}{\nu^2}}{1 + \frac{\omega^2}{\nu^2}} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(V^2 t^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{2}{b^2 V} \\ \int_0^{+\infty} \cosh^{-2}(\nu t) \cos(\omega t) \nu dt &= \frac{\frac{\pi}{2} \frac{\omega}{\nu}}{\sinh\left(\frac{\pi}{2} \frac{\omega}{\nu}\right)} \end{aligned}$$

où $K_{\frac{1}{2}}$ est la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce d'ordre un demi.

En physique des plasmas thermonucléaires et astrophysique il est courant de rencontrer des plasmas de forme sphérique. Dans ce problème nous allons étudier les trois échelles de temps associées à la dynamique des sphères de plasma neutre et non-neutre. De telles sphères de plasma neutre ou non-neutre sont créées en laboratoire par irradiation laser de nanoparticules en phase diluée. Ainsi des nanoplasmas sphériques sont générés, puis se détendent, soit sous l'effet de la pression cinétique, soit par éclatement coulombien ; de tels nanoplasmas constituent des sources intéressantes de rayonnement.

Dans ce problème nous allons dans une première partie étudier l'éclatement coulombien d'une sphère d'électrons et calculer l'échelle de temps caractéristique de cette détente. Dans une deuxième partie nous considérerons l'influence des collisions et calculerons le temps de migration des charges vers la surface d'une sphère chargée. Enfin, dans la troisième partie nous établirons l'existence d'une oscillation électrique pour une sphère de plasma neutre.

On considère un plasma sphérique constitué uniquement d'électrons, de charge $-e$ et de masse m , initialement au repos. On utilise un système de coordonnées sphériques de vecteur radial unitaire \mathbf{e}_r ; la position d'un point est donc donnée par $r\mathbf{e}_r$ où r est la coordonnée radiale du vecteur position. On note $n(r, t)$ la densité d'électrons en un point de position r à un instant t ; la densité initiale à l'instant $t = 0$ étant homogène et égale à N : $n(r, t = 0) = N$ si $0 < r < R$ et $n(r, t = 0) = 0$ si $r > R$. A l'instant initial, $t = 0$, cette sphère d'électrons est donc de rayon R . Sous l'effet des forces répulsives coulombiennes cette sphère éclate suivant la direction radiale. On appelle $\xi(r, t)$ le déplacement radial, à l'instant t , des électrons situés initialement en r , à l'instant $t = 0$; au temps $t > 0$, la position d'un électron, initialement en r , est donc donnée par $r + \xi(r, t)$. A l'instant $t = 0$, le déplacement radial ainsi que la vitesse radiale sont nuls: $\xi(r, t = 0) = 0$, $\left. \frac{\partial \xi}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$.

A1 Calculer le champ électrique, $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_r$, créé à l'intérieur de la sphère, en $r + \xi(r, t)$, à l'instant t , par ce plasma électronique en expansion.

A2 En déduire l'équation différentielle du deuxième ordre vérifiée par $\frac{\partial^2 \xi(r, t)}{\partial t^2}$; on introduira $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}$; quel est le nom et quelle est la signification de cette quantité?

A3 En déduire l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par $\frac{\partial \xi(r, t)}{\partial t}$.

A4 Exprimer $\omega_p t$ en fonction de ξ et r et commenter. En particulier, quel est le temps T de doublement du rayon ($R \rightarrow 2R$) de la sphère? Le processus d'éclatement est-il exponentiel, pourquoi?



La pulsation ω_p n'est pas la seule échelle caractéristique associée à la dynamique électrique d'une sphère non-neutre; il existe une deuxième échelle de temps, appelée temps de relaxation de Maxwell, décrivant le processus de disparition des charges libres en volume et de migration vers la surface, sous l'effet de leur répulsion mutuelle. Considérons un plasma sphérique constitué de protons, supposés infiniment lourds, donc au repos, et d'électrons mobiles en interaction

magnétique stationnaire inhomogène **B**. Les lignes de champ de cette configuration magnétique sont des droites parallèles mais l'amplitude du champ varie linéairement d'une ligne à l'autre dans la direction des x : $\mathbf{B} = B \left(1 + \frac{x}{L}\right) \mathbf{e}_z$; où $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ est une base cartésienne orthonormée directe, B est la valeur du champ à l'origine $x = 0$ et L une longueur donnée. La position et la vitesse de ce proton sont repérées par les vecteurs $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ et $\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{e}_x + \frac{dy}{dt}\mathbf{e}_y + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_z$.

L1 Etablir les équations du mouvement; on introduira $\omega_c = \frac{eB}{M}$ pour exprimer ce système d'équations. Comment appelle-t-on la quantité ω_c , quelle sa valeur pour un champ de un tesla?

Dans la suite de ce problème on considère $z = \frac{dz}{dt} = 0$ et on introduit la variable complexe: $\mathcal{Z} = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}$

L2 Etablir l'équation différentielle ordinaire du premier ordre vérifiée par $\frac{d\mathcal{Z}}{dt}$, $\mathcal{Z}(t)$ et $x(t)$.

L3 Résoudre cette équation dans le cas homogène: $L = +\infty$ et en déduire les expressions de $\mathcal{Z}(t)$ et $x(t)$, les conditions initiales du problème étant $\mathcal{Z}(t = 0) = V_c \exp(i\varphi_0)$ où V_c et φ_0 désignent une amplitude et une phase réelles.

L4 Etablir l'équation intégrale vérifiée par $\mathcal{Z}(t)$ dans le cas général du champ linéaire: $L \neq +\infty$ (les conditions initiales sont $\mathcal{Z}(t = 0) = V_c \exp(i\varphi_0)$); puis, substituer $\mathcal{Z}(t)$ et $x(t)$ obtenus dans la question 6 dans le terme décrivant l'inhomogénéité du champ. Justifier cette approximation par un "ordering" entre longueurs.

L5 Moyenner le résultat ainsi obtenu sur le mouvement rapide de rotation cyclotronique et en déduire l'existence d'une dérive perpendiculaire aux lignes de champ $V_D \mathbf{e}_y$ se superposant aux mouvements de rotation autour des lignes de champ, exprimer V_D en fonction de V_c , ω_c et L . Quelle est l'origine physique de cette vitesse de dérive $V_D \mathbf{e}_y$?



Dans les expériences d'interaction laser-plasma, l'existence des oscillations plasma peut être mise à profit pour transférer, de manière irréversible, de l'impulsion et de l'énergie du champ électrique laser vers la population électronique. Ce problème propose une étude de ce mécanisme de chauffage. Soit un plasma homogène infini constitué d'électrons, de charge $-q$ et de masse m , et de protons. Ces protons sont supposés infiniment lourds et donc restent au repos. A l'équilibre les électrons sont supposés au repos (le mouvement thermique des électrons est négligeable), la densité électronique, n_0 , est homogène et égale à la densité protonique, et le champ électrique est identiquement nul en tout point de l'espace.

On considère une perturbation (unidimensionnelle le long de l'axe des x) de cet état d'équilibre, telle que tous les électrons appartenant à un plan $x = x_0$ à l'instant initial $t = 0$ sont déplacés dans le plan $x = x_0 + \xi(x_0, t)$ à l'instant t , les protons restant au repos. La densité électronique devient donc inhomogène et la séparation de charges résultante génère un champ électrique **E**. La fonction $\xi(x_0, t)$ est telle que tous les électrons situés initialement entre le plan $x = x_0$ et le plan $x = x_0 + \xi$ sont déplacés vers des coordonnées $x > x_0 + \xi$ afin de préserver l'ordre initial entre les différentes couches d'électrons. On observe donc à l'instant t un déficit de charges négatives à gauche du plan $x = x_0 + \xi$.

P1 Etablir l'expression de la vitesse ($v_{\parallel} - v_{\parallel 0}$) en fonction du temps t .

La densité d'électrons résonant n suit une loi de diffusion de coefficient de diffusion D :

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = N_0 \delta(x) \delta(t)$$

P2 Résoudre cette équation en introduisant $n(k, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(x, t) \exp(jkx) dx / 2\pi$ la transformée de Fourier de $n(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(k, t) \exp(-jkx) dk$.

P3 En déduire l'expression de la densité volumique de courant au point x à l'instant t : $J(x, t) \equiv en(x, t)(v_{\parallel} - v_{\parallel 0})$.

P4 Exprimer le rapport de la densité volumique de courant sur la puissance en régime stationnaire: $\int J(x, t) dt / \int \mathcal{W}(t) dt$ puis commenter.



On note ε_0 la permittivité diélectrique du vide, μ_0 la perméabilité magnétique du vide et c la vitesse de la lumière. On considère un écoulement ionique, unidimensionnel et stationnaire, suivant l'axe des x , entre le plan $x = 0$ et le plan $x = d$. Les ions de charge q et de masse M sont décrits par: $n(x)$ la densité (d'ions par unité de volume) et $v(x)$ la vitesse. Le champ électrique $e(x)$ créé par la charge d'espace $qn(x)$ dérive du potentiel électrostatique $\varphi(x)$. Les conditions aux limites de ce problème stationnaire unidimensionnel sont: $\varphi(x = 0) = 0$, $e(x = 0) = 0$, $v(x = 0) = 0$ et $\varphi(x = d) = u$. En régime stationnaire la densité volumique de courant électrique, $j = qn(x)v(x)$, est constante: $\frac{dj}{dx} = 0$.

Q1 Quelles sont les dimensions (unités de mesure) de ε_0 et $J_a = \frac{\varepsilon_0 M c^3}{q d^2}$?

On introduit les variables: $X = \frac{x}{d}$, $J = \frac{j}{J_a}$, $\Phi(X) = -\frac{q\varphi(x)}{Mc^2}$ et $V(X) = \frac{v(x)}{c}$ et on considère un écoulement sans collisions.

Q2 En appliquant le principe de conservation de l'énergie mécanique établir l'équation algébrique reliant $V(X)$ et $\Phi(X)$.

Q3 Etablir l'équation différentielle du deuxième ordre vérifiée par $\Phi(X)$ et J .

Q4 Intégrer cette équation différentielle et exprimer $\Phi(X)$.

Q5 Exprimer la relation $u(j)$ reliant u la différence de potentiel entre les plans $x = 0$ et $x = d$ et j la densité de courant s'écoulant entre ces plans.



On note ε_0 la permittivité diélectrique du vide, μ_0 la perméabilité magnétique du vide et c la vitesse de la lumière. On considère un écoulement ionique, unidimensionnel et stationnaire, suivant l'axe des x , entre le plan $x = 0$ et le plan $x = d$. Les ions de charge q et de masse M sont décrits par: $n(x)$ la densité (d'ions par unité de volume) et $v(x)$ la vitesse. Le champ électrique $e(x)$ créé par la charge d'espace $qn(x)$ dérive du potentiel électrostatique $\varphi(x)$. Les conditions aux limites de ce problème stationnaire unidimensionnel sont: $\varphi(x = 0) = 0$, $e(x = 0) = 0$, $v(x = 0) = 0$ et $\varphi(x = d) = u$. En régime stationnaire la densité volumique de courant électrique, $j = qn(x)v(x)$, est constante: $\frac{dj}{dx} = 0$.

On considère maintenant un écoulement collisionnel en régime haute pression tel que la vitesse soit proportionnelle au champ électrique: $v(x) = \frac{q}{M\nu} e(x)$.

R1 Quelles sont les dimensions (unités de mesure) de ν et $J_h = \frac{\varepsilon_0 M d \nu^3}{q}$?

On considère une solution telle que $x(t) = y(t) = 0$ et $z(t) = a \cos(\omega t)$, mais le piège n'est pas parfait car un électron, de charge $-q$, au repos, est aussi présent dans l'enceinte, sa position est donnée par $y = z = 0$ et $x = b$ ($b \gg a$).

U6 Calculer (en vous inspirant de la méthode de calcul du transfert d'énergie lors d'une collision coulombienne présentée en cours) le transfert d'impulsion (quantité de mouvement), suivant \mathbf{e}_x , de l'ion vers l'électron durant une période d'oscillation de l'ion, à l'ordre deux en $\frac{a}{b}$.

U7 Quelle est la conséquence de ce transfert d'impulsion sur l'orbite de l'ion?



L'objectif de ce problème est d'étudier la condition d'équilibre d'une colonne cylindrique de plasma parcouru par un courant I .

On considère un cylindre circulaire de plasma de rayon R . Les ions sont supposés infiniment lourds et les électrons de masse m et de charge q sont décrits par la fonction de distribution des vitesses et des positions $F(x, y, z, v_x, v_y, v_z)$. On utilisera une base cartésienne $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ pour repérer les vitesses: $\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z$ et une base cylindrique $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ pour repérer les positions ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$). L'axe des z constitue l'axe du cylindre. La densité d'électrons $n(r)$ est supposée inhomogène et ne dépend que de r , la fonction de distribution des vitesses $f(v_x, v_y, v_z)$ est supposée indépendante de la position.

$$dN = F(x, y, z, v_x, v_y, v_z) dx dy dz dv_x dv_y dv_z = f(v_x, v_y, v_z) n(r) 2\pi r dr dz dv_x dv_y dv_z$$

La fonction de distribution des vitesses est donc normalisée à l'unité:

$$\int f(v_x, v_y, v_z) \underbrace{dv_x dv_y dv_z}_{d\mathbf{v}} = 1$$

Les électrons transportant un courant total I , la distribution de vitesse est anisotrope; afin de quantifier cette anisotropie on introduit les deux moments:

$$\begin{aligned} \langle v_x^2 + v_y^2 \rangle &= \int (v_x^2 + v_y^2) f(v_x, v_y, v_z) d\mathbf{v} \\ \langle v_z \rangle &= \int v_z f(v_x, v_y, v_z) d\mathbf{v} \end{aligned}$$

associés à la pression transverse et à la densité de courant:

$$P(r) = mn(r) \frac{\langle v_x^2 + v_y^2 \rangle}{2}, \quad J(r) = qn(r) \langle v_z \rangle$$

La densité de courant axiale J suivant l'axe des z est la source d'un champ magnétique orthoradial B qui génère une force de Laplace radiale:

$$\mathbf{J} = J(r) \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{B} = B(r) \mathbf{e}_\theta$$

L'équilibre entre cette force de Laplace et la force de pression est décrit par:

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \nabla P \quad \& \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \rightarrow \frac{dP}{dr} = -\frac{B}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rB)$$

V1 Exprimer I en fonction de $n(r)$ et $\langle v_z \rangle$.

V2 Exprimer I en fonction de $B(R)$ et R .

V3 En intégrant $r^2 \frac{dP}{dr}$ de 0 à R obtenir une relation entre le courant totale I et $\int_0^R rPdr$ (on utilisera le fait que la pression s'annule à l'extérieur du plasma : $P(R) = 0$).

V4 En déduire la condition d'équilibre du cylindre de plasma en fonction des moments:

$$\frac{\langle v_x^2 + v_y^2 \rangle}{\langle v_z \rangle} = c \left(\frac{I}{I_A} \right)$$

où c est la vitesse de la lumière, exprimer I_A le courant d'Alfvén. Calculer numériquement I_A .



Considérons un champ magnétique stationnaire possédant une symétrie de rotation autour de l'axe des z et présentant une zone de champ faible encadrée par deux zones de champ fort. Etudions le mouvement d'un électron au voisinage de cet axe de symétrie. Afin de simplifier l'étude de ce mouvement, effectuons un développement de Taylor du champ au voisinage de l'axe des z ; la forme générale, au voisinage de l'axe des z , d'un champ possédant une symétrie de révolution et présentant une zone de champ faible encadrée par deux zones de champ fort, est donnée par :

$$\mathbf{B}(x, y, z) = B \left(1 + \frac{z^2}{L^2} \right) \mathbf{e}_z - B \frac{xz}{L^2} \mathbf{e}_x - B \frac{yz}{L^2} \mathbf{e}_y$$

où x , y et z constituent un système de coordonnées cartésiennes, B est la valeur du champ au point de référence $(0, 0, 0)$, L est une longueur caractérisant la dimension du piège ainsi constitué et $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z]$ est une base cartésienne orthonormée directe associée au système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) . L'équation de Newton se réduit à l'identité entre l'accélération et la force de Laplace que divise la masse.

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \omega_c \mathbf{v} \times \mathbf{e}_z + \omega_c \mathbf{v} \times \left(\frac{z^2}{L^2} \mathbf{e}_z - \frac{xz}{L^2} \mathbf{e}_x - \frac{yz}{L^2} \mathbf{e}_y \right)$$

où $\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z$ est la vitesse de l'électron et $\omega_c = -eB/m$. Nous allons résoudre cette équation dans le cadre d'une méthode perturbative, le petit paramètre du développement perturbatif est donné par le rapport du rayon de Larmor au voisinage de l'axe divisé par la longueur L .

W1 Le champ \mathbf{B} est-il à divergence nulle?

W2 A l'ordre le plus bas ($L = \pm\infty$), le champ est considéré comme homogène. Introduisons les variables complexes $\mathcal{Z} = x + jy$ et $\mathcal{Z}^* = x - jy$. Quelles équations différentielles ordinaires du deuxième ordre vérifient $\mathcal{Z}(t)$ et $z(t)$ lorsque $L = \pm\infty$?

W3 Exprimer $\mathcal{Z}(t)$ pour tout instant t , la condition initiale étant $\left. \frac{d\mathcal{Z}}{dt} \right|_{t=0} = V_c$ où V_c est une vitesse donnée.

W4 Abordons maintenant le cas L finie et le premier ordre prenant en compte la finitude de cette longueur. Quelles équation différentielle ordinaire du deuxième ordre vérifie $z(t)$ lorsque L est finie?

Le taux de variation temporel de la vitesse \mathbf{V} d'un ion de charge Q et de masse M , interagissant avec une population de particules chargées au repos, de charge q , de masse m et de densité n , est donné par la relation : $\frac{\langle \delta \mathbf{V} \rangle}{\delta t} = -\frac{nq^2 Q^2 \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2 M^2 V^3} \mathbf{V}$ où Λ est un coefficient sans dimension, le logarithme coulombien, de valeur comprise entre 10 et 20 dans un plasma de tokamak.

Y1 Démontrer l'homogénéité de cette relation : $nq^2 Q^2 \Lambda / \varepsilon_0^2 M^2 V^3$ est homogène à une fréquence.

Dans le contexte des expériences de dépôt d'énergie par faisceaux d'ions de densité N dans un tokamak, la population de particules cibles, de charge q , de masse m et de densité n , n'est en général pas au repos et présente une distribution de vitesses maxwellienne : $F(\mathbf{v}) = (\pi v_T^2)^{-\frac{3}{2}} \exp(-v^2/v_T^2)$ ($v_T = \sqrt{2k_B T/m}$). L'objectif de ce problème est d'étudier le ralentissement d'un ion rapide, de vitesse \mathbf{V} , de charge Q et de masse M , au sein d'un plasma thermonucléaire d'hydrogène composé d'ions et d'électrons de densité n et de vitesses thermiques respectives : $v_{Ti} = \sqrt{2k_B T/m_i}$ et $v_{Te} = \sqrt{2k_B T/m_e}$; dans les questions 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 nous ne considérerons pas spécifiquement les ions ou les électrons mais une populations de particules cibles de charge q , de masse m et de densité n , à partir de la question 10, nous envisagerons spécifiquement les cas ioniques et électroniques. Une méthode permettant de généraliser la loi d'interaction entre un ion et des particules cibles aux repos au cas des particules cibles présentant une distribution thermique de vitesses consiste à considérer le problème dans un nouveau repère R' en mouvement uniforme à la vitesse \mathbf{V} par rapport au repère du laboratoire R . En effet, dans ce repère R' , les ions rapides, de densité N , sont au repos et une particule, électron ou ions, de vitesse \mathbf{v} dans le repère du laboratoire R , possède une vitesse $\mathbf{v} - \mathbf{V}$ dans le nouveau repère R' .

Y2 Etablir la formule exprimant le taux de ralentissement $\langle \delta \mathbf{v} \rangle / \delta t|_{R'}$ d'une particule (de charge q et de masse m) de vitesse $\mathbf{v} - \mathbf{V}$ dans le repère R' interagissant avec des ions au repos de charge Q et de densité N .

Y3 Justifier la relation entre les taux de ralentissement dans les deux repères : $\left. \frac{\langle \delta \mathbf{v} \rangle}{\delta t} \right|_{R'} = \left. \frac{\langle \delta \mathbf{v} \rangle}{\delta t} \right|_R$

Y4 Justifier l'identité : $NM \left. \frac{\langle \delta \mathbf{V} \rangle}{\delta t} \right|_R = -nm \int \left. \frac{\langle \delta \mathbf{v} \rangle}{\delta t} \right|_R F(\mathbf{v}) d\mathbf{v}$.

Dans la suite nous omettrons l'indice R et considérons le problème dans le repère du laboratoire.

Y5 En déduire l'expression du taux de ralentissement, $\langle \delta \mathbf{V} \rangle / \delta t$, d'un ion rapide de vitesse \mathbf{V} , de charge Q et de masse M , interagissant avec une population de particules de charge q , de masse m et de densité n et présentant une distribution de vitesse $F(\mathbf{v})$.

Y6 Interpréter la relation intégrale ainsi obtenue dans le cadre d'une analogie électrostatique.

Deux cas peuvent être considérés : (i) $V \gg v_T$ et (ii) $V \ll v_T$.

Y7 Sous l'hypothèse $V \gg v_T$ exprimer $\langle \delta \mathbf{V} \rangle / \delta t$.

Y8 On admettra que sous l'hypothèse $V \ll v_T$: $\int \exp\left(-\frac{v^2}{v_T^2}\right) \frac{\mathbf{V}-\mathbf{v}}{|\mathbf{V}-\mathbf{v}|^3} d\mathbf{v} \approx \frac{4}{3}\pi \mathbf{V}$, en déduire l'expression de $\langle \delta \mathbf{V} \rangle / \delta t$.

Soit un ion rapide de vitesse \mathbf{V} ; le cas considéré dans la question 8 correspond à l'interaction entre ion rapide et ions thermiques : $V \gg \sqrt{2k_B T_i/m_i}$ et le cas considéré dans la question 9 est quant à lui associé à l'interaction ion

rapide-électrons thermiques : $V \ll \sqrt{2k_B T_e / m_e}$.

Y9 Démontrer que la loi de ralentissement d'un ion rapide de vitesse \mathbf{V} , de charge Q et de masse M , interagissant avec un plasma d'hydrogène, de température T et de densité n , est de la forme : $\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\left(\frac{V_c^3 + V^3}{V^3}\right) \frac{\mathbf{V}}{\tau_S}$, on notera e la charge de l'électron, m_e sa masse et m_i la masse du proton, et on exprimera V_c^3 et τ_S en fonction des données du problème.

Y10 Un ion présente une vitesse initiale $V(t=0) = V_0$, établir la loi horaire $V(t)$ décrivant le processus de ralentissement.

Y11 Il est instructif de considérer le dépôt spatial d'énergie, aussi il est d'usage de construire la quantité dV^2/dx où dx mesure la distance parcouru durant l'intervalle infinitésimal $dt = dx/V$; établir la relation décrivant le dépôt spatial d'énergie $MdV^2/2dx$ en fonction de V , V_c et τ_S .

Y12 Etablir la loi de dépôt d'énergie sous forme implicite ($V^2(x) \rightarrow x(V^2)$), sous la condition $V(x=0) = V_0$, sans chercher à exprimer la quadrature (intégrale) ainsi identifiée. Calculer la longueur de ralentissement $L \equiv x(V^2=0)$ sans chercher à exprimer la quadrature (intégrale) ainsi identifiée.



L'objectif de ce problème est d'établir la formule du coefficient de diffusion électronique dans un plasma magnétisé; l'ensemble des coefficients de transport en plasma magnétisé est usuellement référencé comme l'ensemble des coefficients de Braginski. Le mouvement d'un électron dans un champ magnétique homogène est la combinaison d'une rotation uniforme autour des lignes de champ et d'une translation uniforme le long des lignes de champ. Le sens de la rotation cyclotronique est tel que le courant créé par la charge induit un champ opposé à celui appliqué. On retrouve ici la tendance qu'ont les effets à s'opposer aux causes qui leur donnent naissance.

Z1 Quelle est la valeur numérique de la fréquence de cette rotation électronique dans un champ de 1 Tesla? Dans un champ de 1 Gauss?

Soit un électron de masse m et de charge $-q$ plongé dans un champ magnétique statique uniforme $\mathbf{B} = B\mathbf{b}$ où \mathbf{b} est un vecteur unitaire. L'écriture de l'équation du mouvement de cet électron se réduit à la prise en compte de la force de Laplace dans l'équation de Newton: $m d\mathbf{V}/dt = -q\mathbf{V} \times \mathbf{B}$. La solution de cette équation est :

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\parallel} + \mathbf{V}_c = \underbrace{\mathbf{V}_{\parallel}}_{\text{translation}} + \underbrace{V_c \cos[\omega_c t] \mathbf{e}_x + V_c \sin[\omega_c t] \mathbf{e}_y}_{\text{rotation cyclotronique}}$$

$\omega_c = \frac{qB}{m}$ et $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z]$ est un repère Cartésien orthonormé direct dont l'axe des z est orienté suivant \mathbf{b} . Dans la suite du problème la dynamique le long des lignes de champ est irrelevante; nous considérerons donc $\mathbf{V}_{\parallel} = \delta\mathbf{V}_{\parallel} = \mathbf{0}$ dans ce problème. La position de cet électron peut être décomposée comme la somme de la position du centre guide \mathbf{R} et de la position du rayon de Larmor tournant $\boldsymbol{\rho}$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho} = \underbrace{\mathbf{R}}_{\text{centre guide}} + \underbrace{\rho_L \sin[\omega_c t] \mathbf{e}_x - \rho_L \cos[\omega_c t] \mathbf{e}_y}_{\text{rayon de Larmor}}$$

Z2 Etablir qu'à chaque instant la vitesse cyclotronique \mathbf{V}_c et le rayon de Larmor $\boldsymbol{\rho}$ vérifient une relation algébrique du type $\boldsymbol{\rho} = \alpha [\mathbf{V}_c \times \mathbf{b}]$. Exprimer α en fonction de ω_c .

Z3 Dédire de la question précédente une expression algébrique de la position du centre guide $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}$ en fonction de \mathbf{r} , \mathbf{V}_c , \mathbf{b} et ω_c .

Z4 Lors d'une collision la variation de la position instantanée de l'électron est nulle: $\delta \mathbf{r} = \mathbf{0}$. Il en résulte un couplage entre la variation de vitesse cyclotronique $\delta \mathbf{V}_c$ et la variation de la position du centre guide $\delta \mathbf{R}$. Exprimer $\delta \mathbf{R}$ en fonction de $\delta \mathbf{V}_c$, \mathbf{b} et ω_c .

Dans un plasma magnétisé l'expression de l'équation de Fokker Planck décrivant l'évolution de la densité électronique $n(\mathbf{R}, t)$ est donnée par:

$$\frac{\partial n(\mathbf{R}, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \cdot \left[\frac{\langle \delta \mathbf{R} \rangle}{\delta t} n(\mathbf{R}, t) - \frac{\langle \delta \mathbf{R} \delta \mathbf{R} \rangle}{2\delta t} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} n(\mathbf{R}, t) \right]$$

La probabilité qu'un électron ne subisse aucune collision durant un temps τ puis subisse une collision à l'issue de ce temps τ durant l'intervalle $d\tau$ est donnée par $dP(\tau) = \exp(-\nu\tau) \nu d\tau$ où ν est la fréquence de transfert d'impulsion. Afin de calculer les coefficients $\frac{\langle \delta \mathbf{R} \rangle}{\delta t}$ et $\frac{\langle \delta \mathbf{R} \delta \mathbf{R} \rangle}{2\delta t}$ on considère la dynamique d'un électron entre les instants t et t_0 en l'absence de collision. Cette dynamique est décrite par la rotation cyclotronique libre: on suppose que l'électron vient juste de subir une collision à l'instant t_0 et possède après cette collision la vitesse $\mathbf{V}_c(t_0)$. En l'absence de collision la vitesse à un instant ultérieur t est donc donnée par: $\mathbf{V}_c(t) = \mathbf{V}_c(t_0) + \delta \mathbf{V}_c$,

$$\delta \mathbf{V}_c = V_c (\cos[\omega_c t] - \cos[\omega_c t_0]) \mathbf{e}_x + V_c (\sin[\omega_c t] - \sin[\omega_c t_0]) \mathbf{e}_y$$

Le coefficient $\frac{\langle \delta \mathbf{R} \rangle}{\delta t}$ est nul en l'absence de champ électrique, le transport se réduit donc à un processus de diffusion isotrope dans le plan perpendiculaire au champ magnétique décrit par le coefficient $\frac{\langle \delta R^2 \rangle}{\delta t}$.

Z5 Exprimer $\delta \mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{R}$ en fonction de V_c , ω_c , $\omega_c \frac{t-t_0}{2}$ et $\omega_c \frac{t+t_0}{2}$.

Z6 On introduit $\tau = t - t_0$, exprimer $\delta R^2 = \frac{\delta \mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{R}}{2}$ en fonction de τ .

Z7 Le résultat ainsi obtenu est fonction uniquement de la variable τ , cette variable est distribuée suivant la loi $\frac{dP(\tau)}{d\tau}$, moyenner le résultat précédent suivant la variable τ et exprimer ainsi le coefficient $\langle \delta R^2 \rangle$.

Z8 Ce coefficient décrit le carré de l'incrément de position durant une période $\delta t = \int_0^{+\infty} \tau \exp(-\nu_1 \tau) \nu_1 d\tau$. En déduire l'expression du coefficient de transport $\frac{\langle \delta R^2 \rangle}{\delta t}$ dit coefficient de diffusion de Braginski. Proposer une démonstration fluide de ce dernier résultat.

