GRAMMAIRE

DE LA NATURE

JEAN-MARIE SOURIAU

Version du 8 juillet 2007

PRINCIPALES NOTIONS ABORDÉES :

abstrait,10
action,172
âge de l'Univers,216
aléa,85,148,149,153,211
analyse dimensionnelle,189
analyse harmonique,19
anatomies,176
année sidérale,199
années-lumière,105
antimatière,141
atome,7,81,133,160
attaché,174
Big Bang,125,129,131,251
bosons,161
Bruno,124
caverne de Platon,90
centre,170
chaleur,89,123
champ magnétique,140
chaos,78
charge électrique,78,139,140,147
chaud,87
Chimie Quantique,161
chose,75,76
choses,29,31,45
Chronos,4,42,43,63,188,232
chute des corps,112
collisions,112
comètes,200
conditions initiales,78
conjugaisons de charge,141
constante cosmologique,118,213
constante de Hubble,134
constante de la gravitation,118
constante de Planck,40,122,145,154
cordes,113
corps noir,122
Cosmos,119
couleur,72,194,206
courbure,116,213
décalage spectral,213
densité,113,213
déterminisme,78
difféologie,245
dissipation,84
dissonances,99
dynamique,116,118
$E = mc^2$,71,**204**
effet Doppler,73,107,207
effet photoélectrique,206
Einstein,67,119
électricité,138
électro-dynamique,139
électromagnétisme,138
éléments,16
énergie,55,56,60,63,80
enrichir une géométrie,174,203
entropie,85
équation d'Einstein,118
équations d'onde,162
équilibre froid,91,103
équilibre thermodynamique,86
espace cosmologique,126,128,135
espace des mouvements,45,76,78,80,83,146
espace homogène,173
espace quotient,173
espace-temps,44,188
espèce,29,173
espèce de moments,78
état,84,153,187,210
état quantique,150,154,162,253,256
état statistique,84
états purs,157
événements,43
expansion,107
famille,29
famille de moments,39,76,80,146,147
fermions,161
fibré quantique,147
firmament,18
flèche du temps,122
force,78
futur,131
galaxie,92,105
Galilée,47,112,124

géodésie spatiale,190
géométrie,31,149,172
géométrie analytique,188
géométrie galiléenne,189
géométrie souple,111
géométrie symplectique,39,78,79
GPS,190
gravité,109
groupe,3,28,167
groupe cosmogonique,126,136
groupe d'Aristote,43
groupe de Bruno,48,188
groupe de Galilée,48,189
groupe de Poincaré,67,202
groupe de Thalès,38
Groupe d'Euclide,*4*,25,188
groupe électrique,139
groupe électro-souple,139
groupe linéaire,181
groupe souple,111
groupes cristallographiques,33
hasard,84,148,153,187
hydrodynamique,113
Hyper-galaxies,134
immobilité,43
impesanteur,109
impulsion,58,60
Incertitude,156
interférences,158
irréversible,83
Jupiter,237
Kepler,109,198,199
ket,158,162
liberté,175
ligne d'Univers,44
longueur d'onde,195
lumière,39,65
Lune,93
magnétisme,138
marées,92
masse,58,60,204,205
matérialité,74,154,191,203
matrices,178
mécanique,46,78
mécanique céleste,109
mécanique quantique,145,150
mécanique statistique,84,150
métaphysique,76
métrique,117
mirage gravitationnel,120
mobilité,50,51,226,230
modèle standard,164
modèles,13
moment,39,60,63,115,140,146
moments galiléens,191
Monte-Carlo,212
morphisme,170,171
mouvement,45
mouvements naturels,47
moyennes,210
mpulsion,63
nature,6
Neptune,119
neutrino,62
Newton,78,109,195,196
Nombre d'Or,98
non séparable,159
normalisateur,170
noyau,170
observation,153
oscillateurs,52
particule à spin,194
particule élémentaire,63,193,205
passage,60,63
passé,129
permutation,172
pesanteur,109,111
photon,65,160,194
Physis,118
planètes,97
poids,115
point matériel,194,205
premier principe,85,86
présence,112
pression,113
principe de relativité,48
principe d'exclusion,160
Principe Général de Relativité,111
probabilités,209
quasar,92,106,190
quasi-cristal,36
Quasi-régulier,34
quintessence,16
rasoir d'Ockham,121

régularité,4,17,30,173,175
Saturne,238
second principe,85,123
source,75,80,146,149
sous-groupe,43,169
sous-groupe normal,170
spectre,107,145,154
spin,64,113,194,205
statistique quantique,157
super-fluidité,160
Super-Galaxie,134
supernova,133
symétrie,30,173
température,87,131
temps,44
temps propre,67
tenseurs,13
théorie des nœuds,177
théorie des quanta,145
thermodynamique,84
tournoiement,60,63,145,198
transformations de Lorentz,68
transposition,181
type,29,118
type de moment,76
Univers,43,108,124
vecteur de Lenz,198
vecteur température,89,122
vibrations,52,79
viscosité,123
Voie Lactée,105
Zodiaque,95

mode d'emploi

Ce livre se compose de trois parties :
pages blanches, ***pages jaunes***, ***pages rouges***.

Les ***pages blanches*** s'adressent à tout lecteur : elles ne demandent pas de connaissances scientifiques préalables.

On y raconte l'histoire de quelques « ***idées*** » parmi celles qui ont animé les sciences ; idées qui ouvrent encore diverses perspectives.

Les ***pages jaunes*** sont destinées aux jeunes lecteurs ayant vocation à la recherche ; et à quelques autres peut-être…

Les « ***clés*** » qui figurent dans ces pages jaunes sont des ***outils*** *mathématiques,* élémentaires mais puissants ; outils qui servent à décrire *l'espace, le temps, la matière.*

Les ***pages rouges,*** pour ceux qui veulent approfondir.

Le signe ✯, qui apparaît déjà dans les pages blanches et jaunes, repère les ***liens*** entre les diverses idées évoquées.

RÈGLE DU JEU

Devant vous, un écran s'allume.

Au centre, vous apercevez la lettre ***S*** ; d'autres lettres sont réparties sur l'écran, inclinées dans tous les sens ; certaines retournées, d'autres pas.

Le jeu est simple : la même lettre ***S*** figure une seconde fois quelque part sur l'écran, il faut réussir à l'y pointer avec une commande. Le plus vite possible : vous serez chronométré.

Quelques secondes suffisent pour un joueur exercé. Mais ce qui est curieux, c'est qu'il ne faut guère plus d'un dixième de seconde à un chimpanzé pour atteindre la bonne lettre.

Bizarre… Pourquoi est-il tellement plus rapide que nous ?

Sans doute parce que ce genre de rapidité lui est plus nécessaire qu'à nous : un habitant des arbres, qui dégringole souvent de branche en branche, a besoin de se repérer dans l'espace plus rapidement qu'un simple promeneur. En un dixième de seconde, on ne tombe que de cinq centimètres ; en deux secondes, de vingt mètres.

Quand nous jouons à ce jeu, nous imaginons la lettre ***S*** qui se déplace, qui tourne, qui fuit. Et quand cette image mentale mobile rattrape l'image fixe aperçue sur l'écran, nous avons gagné.

Nous utilisons donc la possibilité de transporter mentalement les images, de leur faire subir certaines actions : rotations, déplacements, etc.

Ces actions-là ont entre elles des relations très particulières ; les géomètres en ont fait l'inventaire ;

et cet inventaire, ils l'appellent **groupe**.

Attention ! derrière ce petit mot "groupe", se cache un « *universel* » de la pensée. Un instrument pour concevoir le monde.

Tout à l'heure, naïvement, nous avions écrit « *la même lettre **S*** ». Une lettre ***S*** quelque part, et ailleurs *la même lettre*, qu'est-ce que ça signifie au juste ?

Deux fois la même lettre, ça veut dire deux lettres apparemment différentes (elles diffèrent par leur place sur l'écran), mais que l'on peut reconnaître comme identiques en *transportant* l'une sur l'autre (un transport mental suffira).

Nous ne pouvons dire « *la même* » ou « *pas la même* » que si nous avons pris en compte l'organisation de ces transports. Et cette organisation, *c'est le groupe*.

Qu'est-ce qu'un nombre ? C'est le résultat de l'art de compter.

Pour compter, les enfants apprennent d'abord à ne pas compter deux fois la même bille dans un sac de billes. *La même bille* ? Nous y voilà.

Chaque fois qu'on compte des choses, on manie implicitement un groupe, qui détermine comment ces choses sont à la fois *distinctes* — pour ne pas les compter deux fois — et *semblables* — pour les reconnaître comme équivalentes et les compter de la même façon. C'est ainsi que le groupe est antérieur, dans notre pensée, à d'autres catégories que nous pourrions croire primitives, comme « le nombre » ou « l'espace ». Le groupe spatial ? Si les singes et les hommes savent le manipuler aussi vivement, c'est qu'il s'agit d'un outil disponible à un niveau très primitif de la pensée ; peut-être est-il "câblé" quelque part dans notre cerveau, comme dans celui des animaux qui possèdent une compétence spatiale analogue à la nôtre.

Niveau si primitif que ce groupe reste implicite la plupart du temps dans l'expression de la pensée.

Peut-on gagner quelque chose à rendre le groupe plus explicite ? Cela s'est produit à Alexandrie, il y a vingt-trois siècles. Dans le traité d'Euclide, les " *Éléments* ", on découvre l'art de transporter les figures en utilisant un groupe — nous dirons aujourd'hui le *Groupe d'Euclide***.** Et cette œuvre a marqué l'essor de la géométrie.

Et la physique ? Le propre du physicien, c'est de faire des expériences reproductibles. De savoir faire deux fois la même expérience. Deux fois la même ? nous y revoilà…

Simple remarque : le physicien doit pouvoir reproduire une expérience *ailleurs* (en utilisant le groupe spatial d'Euclide), mais aussi la reproduire *plus tard* : il utilise aussi le groupe temporel, groupe qui retarde ou avance les événements.

Il est déjà dans notre tête, ce groupe « *Chronos* », où il transporte les images mentales. Il permet d'entasser dans la mémoire les souvenirs, *et aussi les souvenirs de souvenirs*.

Reproduire un mouvement, soutenir un rythme ? C'est Chronos qui nous le permet, ce groupe dont les musiciens sont les experts.

La physique est construite à la fois avec le Groupe d'Euclide, celui de la géométrie, et avec Chronos. Mieux : ces deux groupes s'associent entre eux, ils n'en forment plus qu'un — créant ainsi une géométrie nouvelle.

Géométrie de la matière et du mouvement ; géométrie qui est l'architecture de l'espace et du temps.

Géométrie qui a été perfectionnée grâce aux expériences de pensée de Giordano Bruno et de Galilée sur les mouvements à l'intérieur d'un bateau lui-même en mouvement.

Géométrie qui s'est précisée, il y a un siècle, par une analyse plus serrée des groupes — par la création de la *théorie des groupes.*

Théorie bien utile pour savoir de quoi nous parlons tous les jours. Voyez donc :
nous disons "la même distance", "la même durée", "au même instant", "la même molécule", "la même mélodie", "la même forme" …; chacun de ces "*même*"-là implique *un groupe* ; et ce sont ces groupes qui créent les *espèces* appelées distance, durée, instant, molécule, mélodie, forme.

La classification des choses en espèces, ça se fait avec un groupe.

Il y a des *régularités* dans la vie : battements de cœur, symétrie des feuilles, croissance des coquillages…. ; *des régularités techniques* : celle des tours à bois ou à métaux, des billes de roulement, des montres à quartz…; *des régularités naturelles* qui distribuent les atomes dans les cristaux, les galaxies dans l'univers. La planète Terre, née dans le tumulte et la fureur, a acquis progressivement sa rondeur et sa rotation si parfaites : *régularités* auxquelles nous devons à la fois l'espace où nous vivons et le compte de nos jours.

La régularité d'une chose, c'est un groupe.

Nous nous formons des images mentales pour évoquer la réalité, pour en parler. Lorsque des groupes permettent d'agir sur ces images, ils leur confèrent une objectivité qui permet de les communiquer d'un esprit à l'autre. Choisissons : ou bien nous prenons conscience des groupes et de leurs actions ; ou bien nous restons passifs devant l'Univers : temps, espace, énergie, matière …

Les chaussures sont un outil pour marcher ;
les mathématiques, un outil pour penser.
On peut marcher sans chaussures, mais on va moins loin.

I

LA NATURE ET LA SCIENCE

THÉÂTRE DE LA NATURE

décor naturel

Tous, nous aimons et nous connaissons la nature : les forêts, les montagnes, les animaux sauvages.

La nature, c'est la vie.

nature morte

Sur la Lune, il y a des montagnes et des plaines. C'est encore la nature ; mais morte.

Et la mort ? c'est une loi naturelle.

Mort et vie, deux faces de la nature.

extraits naturels

Quel est le contraire de «*naturel* » ? « *artificiel* », sûrement.

Artificiel : fait par l'art.

On aime tant la nature qu'on hait l'artificiel. Ceux qui vendent une boisson ou un yaourt au goût de fraise, et qui ont honte de le faire par artifice, annoncent un *extrait naturel de fraise*.

Règle d'or de la publicité, affirmer le contraire de ce qui est évident : rien de plus artificiel qu'un extrait, on le proclamera naturel. C'est une publicité si évidemment « mensongère » qu'on ne songe pas à sévir : elle ne sert qu'à atténuer le regret de ceux qui ne mangent pas une fraise *naturelle*.

Mais sont-elles si naturelles, ces fraises ? cultiver son jardin, c'est aussi un art…

Comment méconnaître que la nature que nous connaissons : les champs, les prés, les bois, c'est presque entièrement l'œuvre des paysans depuis quelques milliers d'années ? Leur artifice ?

Artifice : nature de l'homme.

mise en scène

Tout est donc nature : vivant ou non, artificiel ou non. Alors c'est n'importe quoi, la nature ?

Non, la nature, voyons-la comme un théâtre où dialoguent les innombrables acteurs d'un drame.

Parmi les acteurs, les choses ; et nous-mêmes, les personnes, qui déclamons notre texte. Nous y témoignons de nos *observations*, de notre *connaissance* des gens et des choses.

Certains de ces textes ont pour objet la nature elle-même ; voici deux exemples :

- "*La Nature des choses* " *(de Rerum Natura),* œuvre du poète latin Lucrèce, au premier siècle avant JC. Poème qui met en scène les atomes et les hommes, qui rapporte l'enseignement de Démocrite (V^{ème} siècle) et d'Épicure (III^{ème} siècle).
- "*Philosophie naturelle* " *(Philosophiae Naturalis Principia Mathematica),* œuvre de Newton (1686).

Deux scènes extraites de ce grand drame qu'on appelle *la science.*

Parmi les divers modes de connaissance, celui de la science a une vertu spécifique: activer le drame naturel en donnant aux personnes un certain pouvoir sur les choses, la technique.

Technique qui donne un rôle nouveau aux choses : celui de leurs réactions à nos essais de pouvoir.

Rôle que nous traduisons dans notre propre discours.

Cette scène où se répondent divers acteurs de la science, c'est *l'expérimentation* ; et cette expérimentation réalimente la connaissance scientifique.

LE TEMPS DE PENSER

plus universels les uns que les autres

Quelles sont, dans la nature, les choses avec lesquelles la science nous apprend à dialoguer ?

Les objets « naturels », pour les scientifiques, ce sont les objets qui existent partout : les atomes, les molécules, la lumière, l'espace : des objets ***universels.***

Les géologues s'occupent en principe de la seule Terre ; mais ils étendent leur science par la « planétologie » sans éprouver de trouble particulier ; la géologie devient ainsi universelle.

Et les biologistes ? Ils sont fermement ancrés dans la science, sans pourtant que rien ait encore prouvé que la vie s'étende au-delà de notre planète.

Il est cependant permis de penser (et c'est le credo de la biologie moléculaire) que les agencements d'atomes qui supportent la vie sur Terre pourraient être animés de vie sur toute autre planète présentant des conditions analogues.

Les mathématiques — la plus dure des sciences, dit-on — posent une question un peu plus délicate : qu'est-ce qui permet de croire que leur objet est universel ?

Leur objet, c'est la vérité mathématique. Mais quel est le critère de la vérité mathématique ? rien d'autre que

la décision souveraine de la communauté des mathématiciens.

Ainsi se singularise la scène mathématique parmi les scènes de la science : rien que des personnes, qui tiennent aussi le rôle de l'objet.

Bien restreinte dans l'Univers, cette communauté des mathématiciens ! S'il est vrai qu'un perroquet ait appris à compter jusqu'à trois, l'universalité des mathématiques n'a que peu augmenté.

Quelques faits militent cependant pour une universalité plus grande. Un exemple : les microprocesseurs matérialisent des objets bien mathématiques, comme les « *cosinus* » ou les « *logarithmes* » ; or ces processeurs fonctionnent parfaitement — et utilement — n'importe où, sur la planète Mars par exemple.
Mais depuis longtemps, bien des mathématiciens affirment l'universalité de leur art sans se préoccuper d'en donner la moindre preuve. Ils assurent que "deux et deux font quatre partout ", sans avoir été le vérifier. D'où tiennent-ils ce droit ?

Regardons-les travailler, ces mathématiciens.

la malle et les lingots

Vous êtes quelqu'un de raisonnable, et ce soir vous avez chez vous un ami mathématicien. Il semble un peu rêveur, un peu distrait ; dans l'espoir d'animer la conversation, vous lui posez une question qui devrait lui plaire :
— Tu as une malle dont l'intérieur est un cube de côté m ; peux-tu la remplir complètement avec des lingots d'or dont les arêtes mesurent a, b, c ?

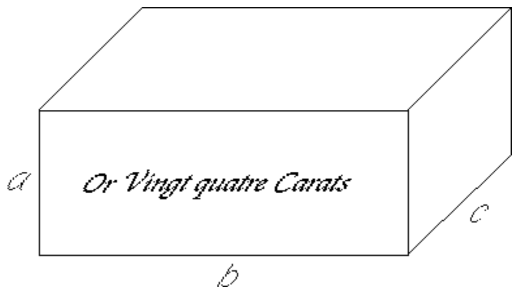


Figure 1. élément d'un trésor

Après les quelques secondes nécessaires pour passer courtoisement du problème qu'il méditait au problème que vous lui offrez,le mathématicien vous répond :

— Il *suffit* que m soit divisible par a , par b et par c ; alors on peut remplir la malle en alignant simplement les lingots, tous dans le même sens, en plusieurs couches semblables :

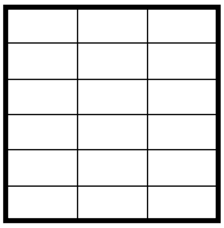


Figure 2. dix-huit lingots au fond d'une malle

Oui. Mais il y a plusieurs façons de remplir la malle :

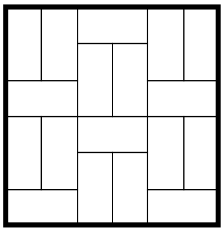


Figure 3. un rangement plus élégant ?

Pire ! on peut aussi poser certains lingots sur la tranche.
Alors je me demande : est-ce que cette divisibilité est vraiment *nécessaire* ? "

Vous n'aviez pas pensé à toutes ces façons de ranger ; comment s'y retrouver ?

Comme vous avez une réelle affection pour votre ami, vous le laissez méditer, puisque ça l'intéresse.

Ça dure un moment — dix minutes, une heure, six heures : *il prend vraiment le temps de penser.* Il tient le coup en absorbant un petit café bien sucré de temps en temps ([1]).

Soudain il saisit un petit papier, écrit une formule mystérieuse qui le remplit d'une grande joie, et il s'écrie " Maintenant je le sais :

Cette divisibilité est nécessaire et suffisante ! "

Vous avez grande confiance en lui, et vous ne vous permettez pas de le contredire. Pourtant, par-devers vous, vous savez bien que sa condition n'est pas suffisante, qu'il a oublié ce qu'il y a de plus *nécessaire* pour ranger des lingots d'or dans une malle : il faut les avoir, ces lingots.

Tout le monde le sait, mais le mathématicien feint de l'oublier ; ce n’est pas ça qui l'intéresse.

Il a été tout content de découvrir qu’on pouvait ranger les lingots de diverses façons dans la malle (fig. 3), et maintenant il est encore plus content d’avoir réussi à démontrer, au bout de six heures, que ça ne sert à rien : si on peut remplir la malle, sa condition garantit qu'on peut toujours le faire par simple alignement (fig. 2).

Pourquoi consacre-t-il tant de temps à des détails aussi futiles ? Pas futiles pour lui, en tout cas. Quand il a décidé de faire de l’ordre dans sa tête, il le fait à fond, et il prend le temps qu'il faut.

1 Le cerveau qui pense a besoin d'être alimenté, et consomme ainsi une certaine puissance : une quinzaine de watts pour la contemplation courante d'une émission de télévision, près d'une centaine de watts pour un calcul mental difficile exécuté avec virtuosité. Si un professeur de mathématiques arrive à passionner une classe dans une salle glaciale, la salle n'est plus glaciale au bout d'une heure : 35 têtes à 75 watts, ça chauffe. Penser, c'est une activité aussi concrète que nager ou sauter, et ça a des exigences comparables.

Et vous ? Combien de temps, par exemple, aurez-vous mis à le lire, ce texte, « *le temps de penser* » ?

Si ce temps est moindre que dix minutes, vous l'avez peut-être bien perdu, votre temps : lecture rapide, lecture foutue !

les noms et les parfums tournent dans l'air du soir

Fatigué par son exploit, le mathématicien est allé dormir.

Vous êtes un peu démoralisé(e) : comment communiquer avec lui ? y a-t-il une seule chose qui soit claire à la fois pour lui et pour vous ? Par exemple, pourquoi dit-il « *il suffit* » quand vous diriez « *il faut* » ?

La formule abstraite qu'il a écrite tout à l'heure, et qui lui semblait si prodigieuse, il l'a laissée là, sur votre table. Vous l'examinez respectueusement :

$$\boxed{\iiint e^{\frac{2i\pi}{a}(x+y+z)}\, dx\, dy\, dz = 0}$$

Figure 4. Ah ! ces matheux … ✯

Bizarre ! Quel genre de parenté a-t-elle donc avec les lingots ou la malle ?

Vous distinguez bien dans la formule la lettre a qui désigne un côté du lingot, mais pourquoi pas b et c ?

Et ces autres signes mathématiques ? ça n'évoque que de vagues souvenirs scolaires. *« i »* , est-ce que ça ne veut pas dire *imaginaire* ? Vous reconnaissez aussi le « *nombre pi* » : π = 3.14, qui sert à calculer les cercles ([1]) ; mais qu'y a-t-il de commun entre un cercle et une malle carrée ?

Abstraite, cette formule, avez-vous pensé. Et qu'est-ce que ça veut dire au juste, ce mot déplaisant, « abstrait » ? Votre dictionnaire vous répond :

abstrait = " tiré de "

Mais ça change tout ! Vous pensiez jusque-là que « *abstrait* », ça désignait quelque chose qui flotte dans l'absolu, sans rapport avec rien, et qu'on nous force à ingurgiter.

Au contraire, il s'agit d'un « *extrait naturel* »:

la formule abstraite, c'est un parfum de la réalité.

---

1 La lettre π est l'initiale du mot grec « periphereia », et exprime la longueur d'un cercle de diamètre 1. Un peu plus de précision : π = 3. 14159…; si vous êtes curieux de la suite, consultez la clé zéro (pages jaunes).

Votre ami vient donc d'isoler l'une des odeurs qu'on respire dans les vieilles malles.

Le flair des autres mathématiciens, sur quelles senteurs s'exerce-t-il ? Si vous leur posez la question, vous obtiendrez des réponses diverses.

Certains vous parleront de *physique mathématique*. Déchiffrons ce grec de cuisine :

physis = nature ; mathêma = connaissance.

Ils se déclarent ouvertement limiers de la nature, ils suivent sa trace en reniflant.

D'autres écarteront cette idée, horrifiés : ce sont ceux qui préfèrent humer l'ombre des ombres, abstraire du déjà abstrait.

Abstrait par quelqu'un d'autre, forcément : mathématiciens cannibales, ils ne répugnent pas à se nourrir des idées de leurs prédécesseurs ; ils les assimilent quand elles leur paraissent suffisamment belles et savoureuses. Leur table est délicieusement et copieusement servie : pas étonnant s'ils trouvent les mathématiques idéales…

Grâce à d'innombrables médiateurs, les mathématiques se construisent ainsi par niveaux successifs, en partant de l'abstraction la plus simple, qui sitôt nommée devient objet concret de l'abstraction suivante.

Nous allons analyser certains de ces niveaux ; mais il y en a qui sont déjà évidents : identifier, nommer, compter, additionner, par exemple.

À bien y réfléchir, il n'y a rien de si singulier dans cette façon d'agir : chaque nouveau-né, chaton ou bébé, a dû apprendre à identifier une mère unique à travers des contacts et des apparences multiples. La Mère, première et sensuelle abstraction.

Ensuite l'enfant a dit « maman ». Sachant nommer, il continue, de niveau en niveau. Parler, c'est d'abord abstraire et nommer ; et une grande partie de sa cervelle s'y consacre.

À lire et à écrire, de même, si on lui en a donné la possibilité. Sitôt nommés le « langage », l'«écriture», il sait, nous savons (plus ou moins bien) sauter au niveau suivant : on l'appelle grammaire ([1]).

Certains ont rêvé à l'arôme puissant de l'extrait qui devrait suivre, la « *linguistique générale* », clé de tous les parlers et de tous les textes, grammaire de la pensée…

Ce rôle universel, les mathématiques aussi le tiennent. Leur rôle, c'est de construire

une grammaire de la nature.

1 « Grammatikê » (sous-entendu « technê ») : art de l'écriture.

MODÉLISER LE MONDE

la loi de la gravitation est dure, mais c'est la Loi

À la fin du XIX^{ème} siècle, la physique s'exprimait par des *lois* : loi de la gravitation, loi de Mariotte, lois de Maxwell, etc. Ces lois étaient juridiques, définitives ; elles contraignaient la nature. Comme progrès, on n'envisageait que la construction de nouvelles lois pour de nouveaux objets ; ou quelque jurisprudence, précisant l'application des lois connues.

Au début du XX^{ème} siècle, apparaissent des nouveautés stupéfiantes : relativité, théorie des quanta.

Les lois classiques ne sont pas seulement modifiées, mais détruites ; tout doit être repris à zéro, même le bon sens le plus évident. Scandale !

Pourtant cette situation n'était pas sans précédents. Voyons un exemple.

Au XVII^{ème} siècle, la *loi de Boyle-Mariotte* reliait le volume et la pression d'un échantillon gazeux enfermé hermétiquement ([1]).

Cette loi n'était pas apparue sans peine : la notion de *pression* était tout juste dégagée ; quant à la notion de *volume* ([2]), il y avait deux mille ans que les mathématiciens s'évertuaient à lui offrir une définition rigoureuse — et beaucoup de travail restait à faire en ce sens.

Question naturellement posée par le succès même de cette loi de Mariotte : peut-on l'utiliser pour décrire autre chose qu'un gaz, par exemple un morceau de caoutchouc ?

Il est clair que ça ne marche pas directement : si on force une gomme à entrer dans un récipient, elle presse plus sur les parois à certains endroits qu'à d'autres ; il n'y a pas de pression d'ensemble comme dans le cas d'un gaz.

Il ne suffit donc pas d'ajuster la loi de Mariotte pour l'appliquer au caoutchouc : il faut élaborer de nouveaux concepts, choisir des mots nouveaux pour les nommer : contraintes, déformations, cisaillement, torsion, etc.

Ce n'est pas tout de nommer ; il faut aussi organiser ces mots en une « théorie », c'est-à-dire en une description *non contradictoire et prédictive* — contenant en particulier la loi de Mariotte. Une fois ces problèmes résolus, nous posséderons un

modèle de milieu continu.

---

1 Quand on comprime le gaz, volume et pression varient en sens inverse, de façon que le produit de ces deux nombres reste constant.

2 Notion que beaucoup d'enfants acquièrent en transvasant des liquides.

le physicien, l'artiste, et leurs modèles

Ce mot « *modèle* » est reconnu par l'usage. Mais attention ! le même mot est pris parfois dans des acceptions très différentes.

Un *modèle animal*, pour un biologiste, c'est l'étude des réactions provoquées chez un animal par une drogue — par opposition aux réactions de l'organisme humain.

Pour un peintre, bien sûr, le modèle, c'est la personne à peindre, et pas la peinture. Le modèle, c'est la Nature, vivante ou morte, ce n'est pas l'œuvre de l'artiste.

Mais le « modèle » du physicien, c'est la peinture qu'il donne de la réalité.

L'usage du mot "*modèle* " est donc *complètement inversé* quand on passe du peintre au physicien. Pourquoi ce renversement ?

Parce qu'il y a eu une époque où la mécanique céleste manipulait des certitudes ; où la Science semblait « exacte ». La Nature ne pouvait échapper au Modèle que lui dictait la Science.

Ces certitudes se sont dissipées, mais les ambitions de la science persévèrent.

La physique ne peut supporter les ambiguïtés et les contradictions : ses « modèles » sont donc brossés avec les couleurs franches et inaltérables de la mathématique.

C'est ainsi que les modèles des milieux continus, qui utilisent des mots que nous venons de citer : « contrainte », « déformation », nécessitent des objets mathématiques nouveaux pour les exprimer. Il a fallu inventer leur définition ; ils s'appellent « *tenseurs* ». ✯

C'est par une telle élaboration qu'un modèle mathématique est « **abstrait du réel** ». Abstrait à travers les perceptions, les expériences, les modèles antérieurs.

Le physicien, évidemment, doit savoir remonter à l'origine de son abstraction ; son modèle achevé comportera à la fois *une théorie et un mode d'emploi* ; mode d'emploi sans lequel le modèle serait inutilisable.

Si les prédictions du modèle concordent avec les observations, cela lui conférera une certaine valeur de vérité. Mais cette vérité ne deviendra assurée que lorsque beaucoup de telles concordances auront été observées ; alors qu'une seule discordance bien établie suffira à montrer la « fausseté » du modèle.

C'est ça, la ***méthode inductive*** ([1]).

---

1 Elle est déjà décrite par Platon (République, 380 Av. J. C.) : "…l'esprit, se servant comme d'images des objets qu'il avait déjà saisis, est forcé de rechercher des hypothèses d'où suive une marche qui la mène, non au principe, mais à la conclusion "

et par Huygens (Traité de la Lumière, 1690) : "…alors que les géomètres prouvent leurs propositions par des principes certains et incontestables, ici les principes se vérifient par les conclusions qu'on en tire ; la nature des choses ne souffrant pas que cela se fasse autrement. Il est possible toutefois d'y arriver à un degré de vraisemblance qui bien souvent ne cède guère à une évidence entière ; à savoir lorsque les choses qu'on a démontrées par ces principes supposés se rapportent parfaitement aux phénomènes que l'expérience a fait remarquer ; surtout quand il y en a grand nombre ; et principalement quand on prévoit des phénomènes nouveaux qui doivent suivre des hypothèses qu'on emploie, et qu'en cela l'effet répond à notre attente. "

Voilà pourquoi personne n'ose affirmer qu'un modèle soit " absolument vrai " ; on peut seulement constater que tel modèle colle bien à la réalité dans telles conditions. C'est le cas par exemple des modèles de milieux continus qui ont été élaborés au XIX^ème^ siècle par Cauchy, Lamé, et bien d'autres ensuite. Modèles qui continuent d'être perfectionnés — par exemple en vue d'applications géophysiques, ou pour décrire convenablement les innombrables matériaux dont dispose aujourd'hui la technique.

Nouveaux modèles, donc, auxquels on ne peut accéder qu'avec humilité. Finies les certitudes ; finies les lois éternelles… Cette humilité aura sa récompense : pour construire un nouveau modèle, on a le droit de commencer par tout casser ; tout pourra se reconstruire ensuite par un acte créateur libre.

Acte libre, mais dont la valeur ne résulte que de la soumission à d'innombrables contraintes : le modèle doit être cohérent ; ses règles d'application à la réalité doivent être formulées sans ambiguïté ; elles doivent coller à des expériences faisables ([1]).
Ce travail du théoricien ressemble à celui d'un sculpteur qui veut créer une statue « ressemblante », et qui a choisi pour cela le matériau le plus dur et le plus difficile à travailler. Son œuvre doit d'abord exister, être solide ; elle doit pouvoir être montrée ; elle doit être ressemblante, puisque tel a été le choix du sculpteur ; enfin il est bon qu'elle semble belle à ceux qui la regarderont.

Or on fait bien de la sculpture non figurative ; le théoricien a-t-il lui aussi ses « modèles non figuratifs » ? Des modèles qui respectent les règles de cohérence, qui ont leur propre beauté, mais que l'auteur oublie — volontairement ou non — de comparer à une réalité matérielle ?

*Oui, bien sûr. Il s'agit des « **mathématiques pures** ».*

À quoi bonnes, des mathématiques « pures » ?

À quoi est bonne la musique ?

Les mathématiques pures sont art pour l'art ; elles sont jeu ; elles sont apprentissage, plaisir, passion. Passion partagée. Il est souvent arrivé que des mathématiques ainsi créées dans toute leur pureté ludique et artistique aient été utilisées ultérieurement comme modèles d'objets concrets.

Les petits chats jouent — et ensuite ils attrapent les souris.

Revenons aux modèles « figuratifs » de la physique. Un modèle nouveau étant élaboré (structure mathématique accompagnée de règles d'application à la réalité), il reste plusieurs choses à préciser :

- délimiter son domaine de validité ;
- comprendre comment le nouveau modèle et les modèles anciens ont pu donner chacun une description satisfaisante d'un même objet matériel ;
- découvrir aussi pourquoi nous, *sujets*, avons successivement choisi l'ancien et le nouveau modèle ; ce qui fait apparaître une certaine *subjectivité* des sciences « exactes ».

[1] À propos des modèles inductifs, on emploie parfois une expression de Karl Popper, mal traduite en français : "modèles falsifiables". Ce sont ceux dont le mode d'emploi n'est pas ambigu. Les autres ne courent pas le risque d'être contredits par l'expérience, puisqu'ils n'impliquent aucune expérience. Même pas faux, ils encombrent les publications scientifiques de leur vacuité.

Certains modèles ont été élaborés pour répondre à des problèmes techniques précis. Moins compréhensible est l'apparition de modèles fort étudiés avant qu'on leur ait découvert aucune corrélation avec le réel (*trous noirs, théorie de l'inflation, super-cordes,* etc.), avec pourtant une ambition exprimée qui n'est pas celle des mathématiques pures.

Espoir d'une divine surprise, comme cela se produit parfois.

Oui, mais aussi sociologie des milieux scientifiques : le système des thèses et des patrons, le mécanisme de sélection des articles, tout cela favorise les sujets « *à la mode* ». Du moment que la mode a été lancée par un grand couturier de la science, tout travail sur ce sujet sera publié facilement — et d'autant plus facilement qu'il se réduira à quelques variations sur des opinions récemment publiées : un chercheur soucieux de sa carrière a tout intérêt à suivre la mode plutôt qu'à la questionner.

Quand elle est vide, la mode finit par passer. Bilan : d'innombrables travaux publiés d'un côté ; de l'autre, une seule connaissance nouvelle : c'est qu'il s'agissait d'une fausse piste.

modèles modernes, antiques et contemporains

Il ne faut pas oublier que la physique qui était « classique » à la fin du XIXème siècle était issue elle aussi d'une période de création orageuse : aux « temps modernes », de nouveaux modèles avaient supplanté les modèles antiques tels que la *Physique* d'Aristote.

La physique mathématique la plus classique, telle qu'on peut la lire par exemple dans les *" Principia "* de Newton, a été un modèle révolutionnaire ; mais le temps faisant son œuvre, cette révolution est devenue scolastique. On observe une certaine alternance, reproduisant au bout de quelques cycles un statut analogue de la connaissance. Ainsi des *atomes.* Comparons :

- R. P. Feynman ([1]): " Si un cataclysme détruisait toute la connaissance scientifique, et qu'un seul message soit transmis aux générations futures, comment pourrait-il contenir le plus d'information en le moins de mots ? Ce serait à mon avis :
  toutes choses sont faites d'atomes,
  petites particules qui sont en mouvement perpétuel…
  …ces mots contiennent une quantité énorme d'information sur le monde, si seulement on met en œuvre un peu d'imagination et de pensée ".

- Lucrèce ([2]) : " Aucun repos n'est accordé aux atomes à travers les profondeurs du vide "

- Démocrite ([3]): " Nous disons chaud, nous disons froid, nous disons doux, nous disons amer, nous disons couleur, mais il n'existe en réalité que les atomes et le vide. "

1 Cours de Physique, Caltech, 1965.

2 de Rerum Natura (premier siècle avant JC).

3 Fragment de Démocrite (Vème siècle avant J. C.), transmis par Sextus Empiricus (IIème siècle après J. C.).

SYMÉTRIE, PERFECTION ET HARMONIE

cinq éléments

Comparons de même la théorie pythagoricienne des *Éléments*, décrite par Platon dans Le Timée (IVème siècle avant JC), avec la théorie contemporaine des " *particules élémentaires* ».

Chez Platon, les *quatre éléments* — terre, feu, air, eau —, constitutifs de toute matière, sont associés à des polyèdres réguliers ([1]) : cube, tétraèdre, octaèdre, icosaèdre (possédant respectivement 8 , 4 , 6 et 12 sommets).

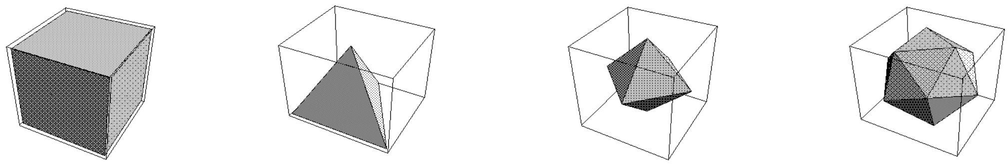


Figure 5A. Terre, feu, air et eau selon le modèle grec

La découverte d'un cinquième polyèdre régulier (le dodécaèdre, à 20 sommets, fig. 5B) suggère l'existence d'une *cinquième espèce* de matière qu'on place dans le ciel, à tout hasard, et qu'on appelle *quintessence.* ✯

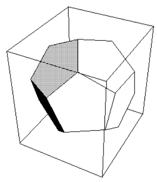


Figure 5B. Quintessence, la vraie

Pour ses écrits subversifs, François Rabelais (1490-1553) avait choisi le pseudonyme : *"Alcofribas Nasier, abstracteur de quintessence"*. Formé en Sorbonne, il savait ce qu'abstraction veut dire…

Dans les théories admises aujourd'hui, les *particules élémentaires* (quarks, baryons, leptons, etc.), constitutives de toute matière, sont regroupées en *multiplets* (ils ont 3 , 8 , 24 … éléments). En plus des particules déjà observées, les Alcofribas contemporains en imaginent d'autres — et trouvent parfois leur quintessence. Mais s'ils n'arrivent pas à les découvrir, ils les placent à tout hasard dans le ciel ([2]).

Un morceau de bois, est-il constitué avec un quart de Terre, un quart d'Air, un quart d'Eau, un quart de Feu, et un zeste de Quintessence ? Ou bien avec 99.94 % de Baryons, 0.05 % de Leptons, et un peu de Photons ?

---

1 Qu'est-ce qu'un polyèdre ? Une figure limitée par plusieurs faces planes. Quand dit-on qu'un polyèdre est régulier ? Nous allons examiner cette question en détail…

2 les « monopôles magnétiques » par exemple ; on a supposé qu'ils existaient ou qu'ils auraient existé quelque part dans les régions lointaines de l'univers. La mode étant passée, on a ensuite cherché les " wimps "…

la règle des règles

Alchimistes ou chimistes, polyèdres ou multiplets, ce que nous cherchons au cœur de la *matière*, ce sont des éléments doués d'une certaine qualité *immatérielle*. Un nom pour cette qualité ?

régularité.

Réguliers, ces polyèdres ou ces multiplets. Mais qu'est-ce que ça veut dire au juste ?

Régulier, c'est évidemment *conforme à une règle*. Mais quel genre de règle ? *Existerait-il une règle universelle concernant la nature ?* *Mais oui…* Et voici ce que nous allons découvrir :

régularité = symétrie
régularité = géométrie
régularité = groupe.

- La symétrie, tout le monde pense en avoir une idée — dans divers domaines où on la reconnaît ; pas seulement dans les sciences dures, mais aussi dans la structure des êtres vivants (animaux, plantes, virus), dans les arts (symétrie des décorations de l'Alhambra de Grenade et des coupoles des mosquées d'Ispahan ; symétrie musicale, comme dans les fugues miroir de Bach).
- La géométrie, la plupart du temps, n'évoque que quelques activités à moitié oubliées — et ennuyeuses — que l'on a dû subir ; le fameux « triangle ABC » par exemple.
- Mais un *groupe,* ce sera un concept nouveau ; *le groupe sera l'essence de la régularité.*

Un carré, c'est un polygone. Examinons-le : il est facile d'y détecter un certain nombre de *symétries* — au sens courant du terme. Par exemple on trouve tout de suite quatre « axes de symétrie », et aussi une symétrie par rapport au centre (fig. 6).

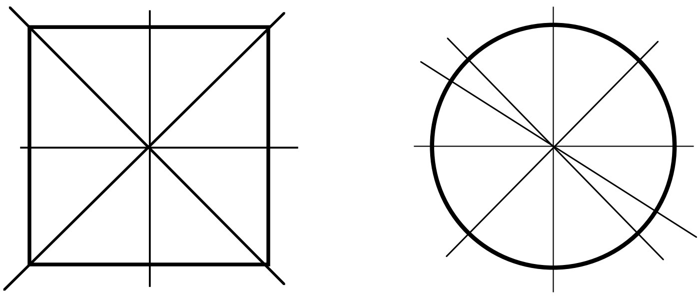


Figure 6. D'innombrables symétries

Dans le cas du cercle, toutes ces symétries se retrouvent — et d'autres encore : toutes les droites passant par le centre sont des axes de symétries. Il y a donc *plus de symétries* dans le cercle que dans le carré. Plus de régularité, si l'on veut.

Dans l'antiquité, certaines figures étaient qualifiées de « *parfaites* » ; ce sont justement celles qui apparaissent comme régulières, qui possèdent beaucoup de symétries, comme les polygones et les polyèdres réguliers ; les plus parfaites étaient les plus symétriques, comme le cercle dans le plan, la sphère dans l'espace.

La théorie pythagoricienne recherchait sous l'imperfection apparente de la matière une perfection cachée, celle des polyèdres représentant les Éléments. Et puisque les polyèdres étaient accessibles à la pensée pure, la matière pouvait le devenir aussi :

nouveaux pouvoirs à conquérir…

Même stratégie quand Aristote (IVème siècle avant JC) explique le mouvement imparfait des planètes par une *composition de mouvements réguliers sur des cercles* — mouvements qui seraient doués d'une certaine perfection. Cette composition mathématique est censée réalisée dans le ciel par un *assemblage de sphères* transparentes, articulées les unes sur les autres (56 sphères au total, dit-on). En particulier toutes les étoiles sont piquées sur une seule sphère solide ([1]). «*Solide* » = « *Firmus* »; d'où le nom de cette sphère: ***firmament.***

En grec, « assemblage » pouvait se dire « ***harmonie*** » ; c'est pourquoi cette théorie s'est appelée

Harmonie des sphères.

L'ambition du système pythagoricien, qui voulait embrasser dans un même mouvement de pensée l'assemblage des astres comme celui des sons, explique le sens que nous donnons aujourd'hui au mot « harmonie ».

Devant le firmament, il y a exactement 7 objets mobiles que nous pouvons voir : la Lune, Mars, Mercure, Jupiter, Vénus, Saturne et le Soleil ; pensons aux 7 jours de la semaine : Lune-Di, Mars-Di, … Sun-Day ([2]) . Et aux 7 jours de la Création.

De même la gamme pythagoricienne, respectueuse du Ciel, devait contenir 7 notes — et nous ne l'avons pas récusée

Qui a vu 7 couleurs dans un arc-en-ciel ? pourtant on répète qu'il y en a 7 ([3]). Vive le nombre 7 ! ([4]).

L'harmonie des sphères, élaborée par Eudoxe au IVème siècle avant JC, transmise par Aristote, a été perfectionnée par Hipparque (IIème siècle avant JC) ; les calculs d'Hipparque nous ont été transmis par l'œuvre de Ptolémée (IIème siècle après JC) : « Harmoniques », « Composition Mathématique », qui nous est parvenue sous le nom arabogrec "*Almageste* " (« le plus grand »).

Harmonie fort efficace : elle permet d'obtenir des tables journalières (éphémérides) qui prédisent la position dans le ciel de la Lune, du Soleil et des planètes avec une précision de l'ordre du diamètre apparent de la Lune.

---

1 Il fallut attendre quinze siècles pour qu'on commence à admettre que ces étoiles étaient les sœurs du Soleil.

2 Ce n'est que vers 1520 que fut découverte la 8ème planète visible à l'œil nu : la Terre (Nicolas Copernic). Mais le nombre 7 fut sauvegardé en rétrogradant la Lune au rang de « satellite de la Terre ».

3 « Violet-Indigo-Bleu-Vert-Jaune-Orangé-Rouge", dit une comptine classique. Mais cet indigo, importé des Indes, il semble bien qu'on ne l'a fourré là que pour faire le compte.

4 Et pourquoi pas 3 ou 666 ? Attention à ne pas passer de la respectable observation du ciel au délire de la « numérologie ».

Ce calcul a été pratiqué pendant près de deux mille ans. Copernic, le « *second Ptolémée* », perfectionnait encore ce système au XVI$^{\text{ème}}$ siècle — en changeant le centre de certaines sphères ; il a fallu attendre 1618 pour s'en évader définitivement grâce au système de Johannes Kepler. Complètement autonome, ce nouveau système atteignait une précision égale à ce que notre œil peut discerner ([1]).

Les éphémérides de chaque planète se calculent à partir de quelques nombres, qu'on appelle ses *éléments*. Éléments qui figurent dans chaque traité, aussi bien dans celui de Kepler que dans celui de Ptolémée.

Que ce serait satisfaisant si on n'avait pas à relire les traités pour retrouver ces éléments, si on pouvait aussi les déterminer par la pensée pure ! Le vertige pythagoricien resurgit.

Kepler espérait caractériser chaque planète par un polyèdre. Les polyèdres ne marchant pas, on a inventé la « loi de Titius-Bode ». Et la quête continue… ([2]).

Abandonné provisoirement par les astronomes, le principe de l'harmonie des sphères n'a pas pour autant disparu de la science : la représentation d'un mouvement arbitraire par une composition de mouvements circulaires réguliers s'appelle aujourd'hui

analyse harmonique ([3]).

Cette branche des mathématiques est fondamentale dans diverses techniques : acoustique (« sons harmoniques »), optique, médecine : c'est un ordinateur utilisant l'analyse harmonique qui produit les images de quelques instruments médicaux récents (scanner).

Et la solution du problème de la malle et des lingots, la mystérieuse formule écrite par votre ami mathématicien ([4]), c'est encore de l'analyse harmonique.

1 Une « minute d'angle » ; distinguer une telle minute, c'est distinguer la tête et l'abdomen d'une petite fourmi vue à une dizaine de mètres.

2 Nous y reviendrons au chapitre V.

3 Elle se continue par « *l'analyse harmonique non commutative* », branche importante des mathématiques. Son point de départ est indiqué dans la clé 10.

4 Fig. 4, p. 10.

Il

où ?

LES RACINES DE L'ESPACE

promenade dans le verre

Un matériau comme l'eau claire ou le verre, on dit souvent qu'il est *homogène*. Qu'est-ce que ça signifie ? qu'il a « partout les mêmes propriétés ». Mêmes propriétés en deux points **A** et **B** , quels qu'ils soient.

Rien de compromettant si les points **A** et **B** sont les mêmes ; cela ne devient significatif que si ces deux points sont différents.

Mais quand **B** n'est pas **A** , la matière en **B** n'est pas la matière en **A** ; qu'est-ce qui nous permettra de vérifier que ces deux matières *différentes* ont *les mêmes* propriétés ?

Il faut y aller voir.

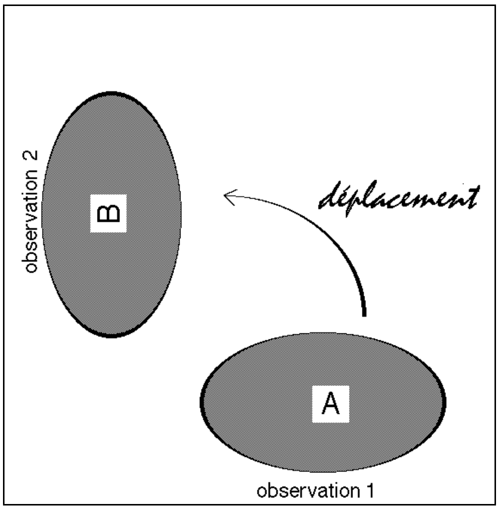


Figure 7. Déplacements

Les observations que nous avons faites en **A** , déplaçons-les en **B** ; alors notre savoir-faire d'observateurs nous permettra de comparer notre observation du matériau faite en **A** avec notre observation faite en **B**.

Attention ! pour déplacer ses observations, le physicien doit déplacer ses instruments. Les déplacer de **A** en **B**. Et si c'était le milieu à observer qu'il déplaçait de **B** en **A**, en laissant ses instruments immobiles ? ça donnerait le même résultat ; vous en êtes sûrement persuadé(e). Votre pratique du déplacement de la matière vous a déjà enseigné quelques règles universelles.

le vide hypocrite

Déplaçons d'abord le plus simple des « matériaux » : *l'espace vide*.

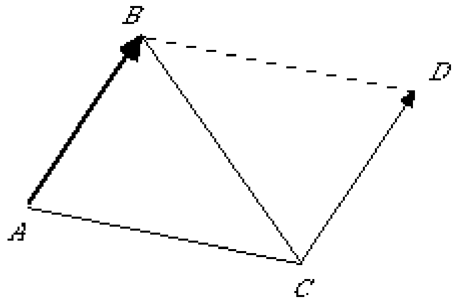


Figure 8. Déplacement parallèle

Deux points *A* et *B* (fig. 8) suffisent à définir une certaine opération qui « déplace » l'espace ; on l'appelle « translation » (transfert) ou « vecteur » (véhicule). On l'écrit avec une petite flèche: $\overrightarrow{AB}$. La translation $\overrightarrow{AB}$ va envoyer *A* sur *B*.

Mais l'opération $\overrightarrow{AB}$, d'un seul coup, va déplacer tous les points de l'espace !

Où déplacera-t-elle un autre point *C ?* au point *D* , dessiné sur la figure ([1]).

Ces translations ne sont pas les seuls déplacements « naturels » : les *Éléments* d'Euclide (III^{ème} siècle avant JC) nous enseignent l'art de combiner les translations avec les *rotations* de l'espace sur lui-même.

Nous savons bien qu'Euclide, évoquant un espace vide abstrait, se donnait la permission d'y déplacer aussi des instruments matériels, comme les compas :

son vide était plein de la possibilité d'y déplacer des objets.

Cette genèse de la géométrie par des opérations évoque le comportement des jeunes enfants qui acquièrent le sens de l'espace en remuant des objets : le jeu prépare à la connaissance.

Peut-être êtes-vous comme cet enfant perspicace qui refusait obstinément de dire « A » — ayant bien deviné qu'on lui demanderait aussitôt de dire « Bé » : nommer et abstraire, puis nommer encore, où est-ce que ça peut mener ?

Nous allons bien voir. Ayant nommé les « points », puis les « déplacements », opérations sur les points, nous n'échapperons pas au niveau suivant : les *opérations sur les déplacements.*

---

1 ABDC est un parallélogramme (fig. 8) : CD est parallèle à AB, et aussi BD à AC. Voilà donc à quoi servent les parallélogrammes !

oublier pour créer

Un mathématicien que ses amis appellent LE BARON vous entraîne dans cette voie. Il va falloir faire un effort ; mais la récompense spirituelle est assurée.

Vous avez peut-être oublié votre algèbre, mais vous vous souvenez que ça se fait en *nommant tout avec des lettres*…

Allons-y. *Nommons* un point par la lettre x ; nommons g et h deux déplacements.

Suivant l'usage, le point x déplacé par g, ça s'écrit :

$$g(x) \quad (^1)$$

Ce point $g(x)$, nommons-le à son tour, par exemple avec la lettre y. Alors nous avons une « *équation* »:

$$y = g(x)$$

qui signifie que le point nommé y est le même que le point nommé $g(x)$.

On peut recommencer, déplacer y par h, ce qui donne le point :

$$z = h(y) .$$

Recopions, mais en écrivant $g(x)$ au lieu de y, puisque c'est le même point :

$$z = h(g(x))$$

Cette écriture :

$$z = h(g(x))$$

nous permet d'*oublier* le point intermédiaire y, puisqu'il n'est plus écrit. Et qu'est-ce qui fait passer de x à z ? un nouveau déplacement !

Ce déplacement que nous venons de créer par l'écriture et la pensée, nommons-le

$$\boldsymbol{h \circ g} \quad (^2)$$

ça fait une formule facile à retenir, un simple mouvement de parenthèses :

$$\boldsymbol{(h \circ g)\,(x) = h(g(x))}$$

Typographie créatrice ! Avec deux déplacements $\boldsymbol{h}$ et $\boldsymbol{g}$, nous avons construit $\boldsymbol{h \circ g}$, qu'on appelle *composé* de $\boldsymbol{h}$ et de $\boldsymbol{g}$, et qui est *encore un* déplacement.

Voilà une nouvelle opération qui concerne les déplacements, mais plus les points ! "

la loi des groupes

ÉVARISTE est un poète. Pour lui, la façon de déplacer vaut mieux que ce que l'on déplace.

Il combine les déplacements entre eux, en marmonnant des mots magiques : « *associatif*" », « *neutre* », « *réciproque* »… il note ces mots sur son carnet.

Il ne veut plus savoir qu'il existait un niveau $\mathcal{A}$ (figure 9). Il l'a définitivement oublié, il a sauté au niveau supérieur.

---

1 Lire « *gé de iks* »

2 Lire « *hach rond gé* ».

Nous aussi, accompagnons Évariste, escaladons l'échelle de l'abstraction - à partir du bas :

E géométries

ACTIONS

Dé choix ↗

MORPHISMES

Cé opérations ↗

GROUPES

Bé oublis ↗

DÉPLACEMENTS

A opérations ↗

POINTS

Figure 9. Grimper à l'échelle de l'abstraction

Plus poétique encore, voici qu'arrive SOPHUS.

Lui, il a oublié que les déplacements déplaçaient ! Ils deviennent de simples « éléments » ([1]), qu'il s'autorise à inventer librement, qu'il « compose » à sa guise — selon des règles qu'il s'est lui-même fixé.

Étonnante, cette liberté ! Vous lui posez franchement une question qui vous brûle les lèvres : " Vos éléments, ça peut se composer *n'importe comment* ? "

— SOPHUS " Mais oui… la preuve, c'est que *c'est vous qui allez inventer la loi* ; la loi qui dira comment composer deux éléments *g* et *h* , et quel élément *gh* ça produira.

Vous choisirez librement cette loi. Mais elle ne sera belle à mes yeux que si elle respecte certaines règles : celles qui sont écrites dans le petit carnet d' ÉVARISTE.

Alors je vous décernerai un certificat : officiellement, vous aurez inventé

un groupe ([2])

dès que votre loi respectera ces règles. Ces simples règles, rien de plus : aucun sous-entendu. Et pour nous mettre tout à fait d'accord, je vous les ai écrites, ces règles :

Cé ! ! !

Bizarre, cette piété intellectuelle. Vous décidez de le prendre au mot :

— Eh bien voici des éléments *h*, *g*, … que je vous propose : ce seront *les nombres.* "

---

1 Jean Piaget, parlant de la formation de l'intelligence chez les enfants, disait : " les opérations d'un niveau deviennent les objets du niveau suivant " . Sa construction de l'*épistémologie génétique* est parallèle à l'abstraction mathématique telle qu'elle s'est développée à la fin du XIX[ème] siècle.

2 Attention ! Les mathématiciens ont la fâcheuse habitude de choisir des mots courants et vagues et de leur donner une nouvelle signification, très précise. Ainsi, « groupe » ou « ensemble », c'est quasiment la même chose dans la vie courante. Mais le groupe, pour un mathématicien, c'est bien autre chose qu'un ensemble : c'est la règle d'un jeu, rien de moins (cette règle est parfaitement précise) et rien de plus (cette règle s'applique strictement dans d'innombrables circonstances).

—SOPHUS : D'accord. Et quelle loi me proposez-vous pour composer les nombres entre eux ? "

— Vous voudriez bien que *hg* soit *le produit* des nombres *h* et *g* ? Eh bien non, rien que pour vous contrarier, je décide que ce sera *leur somme* ! "

– SOPHUS : vous pose une question perfide :
Bien sûr, vous n'avez pas oublié les nombres négatifs ? "

– Euh... Certainement pas. "

— Parfait : dans ces conditions, vous avez respecté les règles d'EVARISTE, les sept règles que j'ai écrites dans mon petit carnet… et vous avez donc inventé un groupe !
Et puisque votre loi c'est l'addition, nous l'appellerons « *groupe additif* », si vous le voulez bien. "

Alors non seulement il faut inventer une loi, il faut accepter le verdict d'ÉVARISTE le Dieu et de SOPHUS son Prophète, mais encore, si on a triomphé de ces embûches, il faut *nommer* le groupe. Drôle de jeu !
Mais après tout, à la télévision, on voit des jeux encore plus bêtes ; on peut toujours essayer celui-là. Pourtant ça a l'air difficile, le coup de chance que vous avez eu tout à l'heure avec l'addition n'a pas l'air de se reproduire souvent.

Brusquement, cependant, il vous vient une idée radicalement simple : vous prendrez comme éléments les déplacements, et comme loi *la loi même du BARON* ! (p. 23).

— Ah oui, dit SOPHUS avec un petit sourire, évidemment vous avez raison. Nous avons un vrai groupe, il ne nous reste plus qu'à le nommer. "
Et après quelques instants de concertation, vous tombez d'accord : il s'appellera :

groupe d'Euclide ([1])

Depuis quelques instants, vous planez au niveau *Ci* (fig. 9). Vous passez en revue des quantités de *groupes* (SOPHUS a accepté de vous aider), celui d'Euclide n'est plus que l'un d'entre eux.

à l'action !

Enfin SOPHUS est reparti travailler. Peut-être un peu de repos pour vous ?
Mais non, quelqu'un d'autre vous interpelle. Sans savoir exactement pourquoi, vous avez une petite idée du discours qu'il va vous tenir. Eh oui ! C'est un réformateur ! Il s'appelle FELIX, et il fait sa profession de foi :

— Rassurez-vous, je ne retranche rien au travail de mes collègues, mais je pense que leur intégrisme doit être tempéré. Et voici comment.
Pour commencer, je vous laisse inventer un groupe, celui que vous voulez. "

— Bien, mon choix est fait. Ses *éléments*, ce sont *h*, *g* …"

— FELIX: Parfait, parfait. Mais ***à quoi ça sert, un groupe ?***

[1] C'est ce groupe-là que les chimpanzés maîtrisent si bien !

— Eh bien …

Voici ce que je vous propose : inventez aussi des objets x, y, z…, et ensuite une

action du groupe sur ces objets ;

chaque fois que g sera un élément du groupe et que x sera un objet, vous décidez librement du choix de l'objet qu'on écrira g(x). "

Librement, mais quand même en respectant mon petit carnet. "

Et il sort de sa poche son petit carnet à lui ; vous vous y attendiez.

– FELIX continue : " Et quand vous aurez fait ce choix, en respectant mes règles,

Votre groupe sera devenu une géométrie !

Pas moins ! " ([1])

Cette géométrie, elle se jouera sur deux niveaux à la fois : d'un côté le groupe et ses éléments ; de l'autre, les objets qui constitueront un *espace*. *Espace géométrique*, dirons-nous. Et ce qui les reliera, c'est *l'action* grâce à laquelle chaque élément de ce groupe déplacera chaque objet de cet espace ; le déplacera quelque part dans cet espace-là. "

Encore un peu plus farfelu, ce jeu. Tout à l'heure, par politesse, vous avez jeté un coup d'œil sur ce carnet, et vous y avez aperçu la formule :

$$[\,h\,g\,](x) = h(g(x))$$

On ne vous la fait pas, vous l'avez reconnue, et vous lancez à tout hasard :

— Eh bien je prends comme groupe le *groupe d'Euclide*, comme objets *les points* ; et l'action, ce sera tout simplement le déplacement des points… "

– FELIX est ravi : Oh oui, parfait, vous venez d'inventer la **géométrie euclidienne** *!* "

Vous n'avez pas vraiment l'impression d'avoir inventé quoi que ce soit, mais simplement d'avoir aidé ces messieurs à accoucher de leurs propres fantasmes. FELIX semble avoir atteint le niveau supérieur E ; mais vous, vous avez l'impression d'être retombé(e) au niveau A . Et vous le lui dites.

– FELIX : Mais ne vous désolez pas comme ça ; au contraire, réjouissez-vous ! Voyez donc, nous pouvons jouer à la fois du E et du A . La diversité de ces niveaux, c'est celle des claviers d'un grand orgue ; songez à la richesse des variations que nous allons pouvoir exécuter en contrepoint.

Si vous connaissez déjà une géométrie — faite avec un espace et un groupe, et si vous décidez de changer de groupe, alors vous avez changé la géométrie de l'espace ([2]).

---

1 Felix Klein, " Programme d'Erlangen ", 1870. Voilà une première définition générale du mot « géométrie ».

2 Exemple : les mollusques ont inventé une nouvelle géométrie, comme le montre l'architecture de leurs coquilles (voir plus loin, *l'art surnaturel des escargots*, p. 37).

Mais vous pouvez au contraire *changer d'espace* en conservant le groupe : de nouveaux objets vont remplacer les points. Des objets plus riches et plus subtils vont apparaître, qui appartiendront cependant *à la même géométrie*. " ✯

Vous n'êtes pas entièrement convaincu(e) par ce discours :

— Voudriez-vous me faire le plaisir d'improviser une de ces variations ? "
— Écoutez donc. Le groupe, c'est toujours le groupe d'Euclide. Mais les objets, ce ne sont plus les points, ce sont les *triangles*. Et un triangle $A\,B\,C$ déplacé par g , ça donne le triangle dont les sommets sont $g(A), g(B), g(C)$. C'est comme ça qu'Euclide lui-même appliquait sa géométrie *aux triangles.* "

FELIX a évidemment raison de dire qu'il s'agit toujours de la même géométrie ; mais le charme de cette variation triangulaire vous échappe encore un peu.

Soudain un vertige vous saisit : il existe maintenant un *espace des triangles.* Un *espace euclidien de tous les triangles*. Espace où nous ne pouvons pas pénétrer — puisque nous ne sommes pas faits de triangles — mais qui est à notre portée, puisque nous connaissons les règles qui permettent d'y jouer.

Triangles… vous êtes bien jolis, mais vous n'êtes pas les seuls : les droites, les sphères, ont aussi leur espace ; mieux, il existe un espace de toutes les figures.

Continuons : toutes les œuvres graphiques, toute la sculpture, tout cela constitue un seul espace. Le tableau que vous avez dans la tête, celui que vous pourriez peindre pour représenter ce champ de blé, ces montagnes, ces étoiles, c'est un seul objet dans l'espace des œuvres.

Tous les paysages du monde y sont embusqués, dans cet espace ; et il est euclidien, puisque les œuvres se laissent déplacer sans perdre leur valeur d'œuvre.

Mystérieusement, une question et sa réponse vous viennent ensemble à l'esprit :

Ce paysage que je contemple sur une toile, comment puis-je savoir que *c'est un paysage* ? Cela, c'est un champ de blé, parce que je peux imaginer que j'y suis couché, que je vois les tiges trembler au vent, que je cueille un épi.

La montagne ? au moins par la pensée, je touche de la main ses pierres froides, je frappe du pied son sol sonore.

Étoile brûlante que voilà, ma pensée te touche aussi, tu es à moi.

Si le Cosmos entier est mon paysage, c'est parce que la pensée m'y déplace.

Je *pourrais* être là ou là, et je *suis* là ; et en tous ces *là*-là je pourrais me laisser déplacer par le groupe d'Euclide. Un nouvel espace géométrique, donc, qui est fait de tout ce que je pourrais être :

cet espace, c'est moi.

Moi, espace, je partage la géométrie du Cosmos,
donc je suis.

INITIATION

l'apprenti sorcier

Après la métaphysique, la didactique.

Si on veut apprendre ce que sont les groupes, il faut choisir par où commencer. Par exemple l'un des niveaux *A, Bé, Cé, Dé, E* que nous venons de classer ([1]). Lequel ? Choix délicat : si l'on commence tout en bas, tout est clair et compréhensible, mais il faut revivre toute l'histoire des mathématiques — et ça prend quelque temps.

La *clé 1* qui vous est proposée (dans les pages jaunes) se place au niveau *Cé*, celui des groupes à la SOPHUS. On y trouve un énoncé de diverses règles — qui peuvent sembler bien arbitraires.

Mais c'est à prendre ou à laisser : les groupes, c'est toutes ces règles à la fois, ou rien.

On va peut-être vous proposer de l'apprendre par cœur, ce recueil de règles ! Qui donc pourrait aimer ça ? …sauf peut-être un savant fou ?

Mais souvenez-vous de l'Apprenti Sorcier : il a oublié une seule petite règle, et il court à la catastrophe jusqu'à la survenue de son Maître.

Ce n'est qu'en acquérant la maîtrise parfaite de ces règles strictes qu'on peut un jour apprécier la souplesse de leurs variantes. ✯

De même en musique : *Rubato* ou *Swing* ? réservés à ceux qui savent d'abord maintenir un tempo implacable. La grâce des variations naît de la liberté mesurée.

Heureusement, il n'est pas nécessaire de connaître le solfège pour aimer la musique…

Écoutons donc simplement la musique des groupes.

Il y a plus de deux siècles que les mathématiciens aiment les groupes, se délectent à en jouer. C'est le plus classique de leurs instruments, et il ne se démode pas. ✯

Mais on doit rendre justice aux mathématiciens : les groupes, ils ne les ont pas inventés pour leur plaisir solitaire. Ainsi la définition de Felix Klein est apparue juste au moment où la pratique des groupes permettait un progrès décisif dans la connaissance de la matière ([2]).

L'outil de pensée « groupe » a été forgé dans le feu de l'action ;

les mathématiciens ont su l'affûter convenablement.

---

1 Fig. 9 , p. 24.

2 La classification des groupes cristallographiques ; voir ci-dessous *le secret des cristaux*, p. 33.

l'origine des espèces

Parmi les primates, nous savons distinguer *l'espèce humaine*.

Ambiguïté de ce mot « ***espèce*** »:

- Votre espèce est déterminée par ***un ensemble qui vous possède*** :
cet *ensemble*, c'est *« l'espèce humaine »*, constituée des individus qui possèdent cette qualité-là :

« ***extension*** »

de l'espèce, disent les grammairiens.

- Mais votre espèce, est aussi déterminée par ***une qualité que vous possédez*** :
cette *qualité*, on peut l'appeler « *humanité* ».
Selon les grammairiens ([1]), c'est la

« ***compréhension »***

de l'espèce .

La géométrie va dire son mot dans ce débat.

Choisissez *un obje*t **x** dans un espace géométrique. Faites agir *tous les éléments du groupe* ([2]) sur ce seul objet. Vous obtiendrez ainsi une partie de l'espace ;
eh bien cette partie , nous dirons que c'est ***l'espèce*** de **x** .

Si nous en parlons *en extension*, nous dirons que cette espèce est ***la famille*** de **x** ; *en compréhension*, nous dirons **le type** de **x** .

Autrement dit, les objets qui sont *de même type* que **x** , ce sont ceux qui appartiennent à la *famille* de **x** .

Ils sont tous « *de même espèce* »; l'élément **x** que nous avions choisi initialement n'est plus qu'un « représentant » de la famille : il la détermine, mais elle ne le détermine pas.

Ainsi sont faites les espèces que nous rencontrons partout… en voici quelques exemples :

- *les points de l'espace euclidien* ? ils constituent une seule famille, ils sont tous *du type* « point ».
- *les couples de points* ? ils se répartissent en familles différentes. Le type d'un couple de points, c'est la ***distance*** entre ces deux points.

Voici quelques précieux types que nous rencontrerons au cours de ce livre :

les durées, les particules élémentaires, les « choses » …

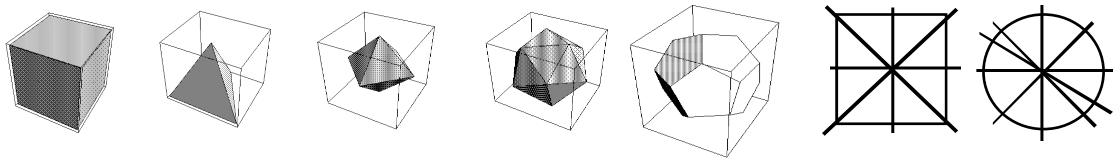
---

1 Quels « grammairiens » ? Ceux qui ont tenté d'élaborer une « grammaire universelle ». Par exemple Arnaud et Lancelot, auteurs de la *Grammaire de Port Royal*, « Grammaire générale et raisonnée, contenant les fondements de l'art de parler, expliquant d'une manière claire et naturelle les raisons de ce qui est commun à toutes les langues et les principales différences qui s'y rencontrent »,

2 Le groupe qui produit la géométrie de l'espace en agissant sur lui ; voir p. 26.

la règle des règles

Dans le premier chapitre , nous avions contemplé des figures symétriques:



Que sont leurs symétries ? des *déplacements,* qui font coïncider la figure avec elle-même. Regardez bien ces figures ; par la pensée, faites tourner un carré autour de sa diagonale et voyez-le coïncider avec lui-même au bout d'un demi-tour seulement ([1]).

Essayons avec une autre figure, par exemple la courbe spatiale qu'on appelle *hélice circulaire* (fig. 10). Courbe illimitée, dont nous ne pouvons dessiner qu'une partie :

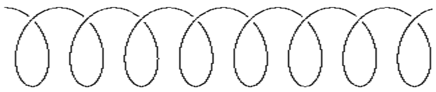


Figure 10. La vis a une âme

Quelles sont ses symétries ? Il faut rechercher tous les déplacements qui agissent sur l'hélice sans la modifier. Eh bien il y en a une infinité ; pensez à *visser* la courbe sur elle-même.

Symétries nouvelles, auxquelles on n'aurait peut-être pas pensé si on n'avait pas analysé la notion de symétrie en termes de déplacements. Symétries grâce auxquelles l'hélice est une courbe régulière — au même titre que le cercle ou que la droite.

Toutes les symétries de l'hélice, *ça constitue un groupe* ; et ce groupe, c'est lui qui assure la régularité de l'hélice.

Règle générale : pour chaque objet géométrique, les éléments du groupe qui agissent sur lui sans le modifier s'appelleront ses «***symétries*** » ; et toutes ces symétries, ça constituera *un groupe*, la « ***régularité*** » de l'objet. ✯

Espèces, régularités ; la géométrie fait acquérir à ces notions intuitives la rigueur qui en fera des briques solides pour reconstruire le monde dans nos têtes ([2]).

Derrière chaque espèce, derrière chaque régularité, se cache un groupe qui agit !

---

1 Ça n'est plus vrai pour un rectangle, moins symétrique que le carré.

2 Voir la *clé 2*,

DOMICILE DE LA MATIÈRE

de la géométrie avant toute chose

Pour connaître un objet, les enfants commencent par jouer avec lui. Quand ils savent le retourner de tous les côtés, il commence à leur appartenir : *le jouet devient un attribut du jeu.*

Jouons avec la matière. Les physiciens ne la connaissent pas complètement : la physique n'est pas achevée. Alors, humblement, comme des enfants, prenons pour *nature des choses* la possibilité de jouer avec elles.
Peu à peu, nous découvrons ainsi, à tâtons, la première règle de ce jeu :

le groupe d'Euclide déplace
les points et les figures de l'espace,
mais aussi toutes les choses…

Et ce déplacement, c'est exactement une *action de groupe,* au sens précis de Félix Klein ([1]).

Ainsi *chaque chose* acquiert le statut d'*objet géométrique ;* c'est en partageant la géométrie de l'espace qu'elle s'enracine dans cet espace ([2]).

le paradoxe du physicien

La physique tire sa *légitimité* de la possibilité de reproduire les expériences ; comme nous l'avons vu au début de ce chapitre, ceci implique la possibilité de déplacer, soit l'objet de l'expérience, soit nos moyens d'observation. Dans les deux cas, de déplacer des choses. *Comment* les déplacer ? Nous venons de le constater, *par l'action d'un groupe.* Cette règle du jeu, c'est un *visa pour la physique* ([3]).

Examinons la situation suivante : une superbe expérience a lieu dans le LABORATOIRE DE PHYSIQUE EXPÉRIMENTALE. Choisissons dans le groupe d'Euclide un déplacement qui devrait envoyer l'expérience un peu à côté, dans le jardin. Mais dans ce jardin, personne ne fait d'expérience…

Un déplacement d'une expérience réelle ne produit pas une expérience réelle — sauf coïncidence.

---

1 *à l'action !* pp. 25-26 et clé 2 . Une définition précise du groupe d'Euclide se trouve dans la clé 4.

2 Les objets mathématiques les plus directement utiles à la physique, à la construction de modèles, sont ceux qui appartiennent aussi à cette géométrie : « orientations », « torseurs », « champs » , « tenseurs » etc. Il suffit qu'on sache soumettre ces objets à l'action du groupe d'Euclide. Un point, c'est tout.

Chercher à les localiser davantage, à les dessiner, serait peine perdue : la géométrie va au-delà des possibilités du dessin ; souvent, ses images ne peuvent exister que dans notre tête.

3 Le passeport du physicien va recevoir de nouveaux visas, grâce à l'apparition de nouveaux groupes. Nous verrons comment aux chapitres III , IV et VI.

On s'en tire par l'argutie suivante : l'expérience serait possible dans le jardin, comme elle est possible dans le laboratoire. Autrement dit, le physicien va envisager deux classes de faits, le ***réel*** et le ***possible*** ([1]), et admettre les principes suivants :

- c'est sur le réel qu'on expérimente
- le réel fait partie du possible
- c'est sur le possible qu'agit le groupe d'Euclide.
- Véritables principes, ou sentences creuses ? Examinons-les de plus près. L'objet de la physique, ce sera le *possible* ; objet *universel* désormais, comme il se doit de tout objet de science

Plus de paradoxe pour la physique, mais *paradoxe pour le physicien* :

- Théoricien, il peut décrire une expérience ; mais sa théorie serait suspecte s'il lui fallait y dire *où* et *quand* l'expérience se fait ; il est condamné à ne disserter que *d'une infinité de possibles.*
- Expérimentateur, toutes les précisions assurant l'authenticité des faits qu'il décrit sont souhaitables ; sinon, c'est son expérience qui serait suspecte. Il est alors condamné à ne décrire que des faits *réels et uniques*.
- Tout acteur de la science doit ainsi incarner deux personnages ; c'est du dialogue de ces personnages que naît la science — et son pouvoir.

Double langage obligé, pour le physicien comme pour le comédien.

Maintenant que *les choses* sont des objets du groupe d'Euclide, chaque chose est munie d'une *régularité* : c'est un groupe, le groupe de toutes les *symétries* de cette chose-là.

Exemple: un *milieu homogène*, c'est un milieu M qui ne change pas quand on lui fait subir une translation *quelconque* t :

$$t(M) = M\,,$$

une chose M dont la *régularité* contient toutes les translations.

Belle définition ! Mais existe-t-il réellement un milieu homogène, en dehors du vide ? Pas sûr. Et d'ailleurs, ce vide, cet ensemble de points immatériels, existe-t-il vraiment ?

En tant qu'objet mathématique, oui, on peut le construire avec le groupe d'Euclide. Mais son rôle est devenu secondaire pour le physicien : il n'est plus l'objet de la géométrie, mais une annexe de cette géométrie.

Et d'ailleurs, ces points si petits qu'ils ne changent pas si on les fait tourner sur eux-mêmes, ont-ils jamais été l'objet d'une expérience ?

Au revoir et merci, chers petits points…

Ainsi la géométrie d'Euclide retrouve ses sources: c'est une physique des objets solides : règles, compas, équerres, diamants…

---

1 Ou « virtuel ». Mais ce virtuel-là est strictement limité par la physique elle-même.

le secret des cristaux

Occupons-nous maintenant de la régularité d'un objet réel — par exemple d'un *cristal*. Il va falloir idéaliser ; supposons le cristal sans défaut, traitons-le comme s'il était sans limites.

Mais attention ! si un cristal C est constitué d'un empilement régulier d'atomes ([1]), une translation t qui est une symétrie du cristal : $t(C) = C$, doit déplacer *chaque atome sur un atome identique*. Ces translations doivent respecter les « mailles » du réseau cristallin : ce ne sont donc pas *toutes* les translations ; lorsqu'on l'examine « de très près », le cristal *n'est pas homogène*.

Pour la même raison, il n'y a que certaines rotations qui soient des symétries de ce cristal : on dit qu'il n'est pas *isotrope* ([2]).

Voilà le chemin qui a permis de classer tous les groupes qui pourraient être la régularité d'un cristal ; on a ainsi découvert qu'ils se répartissent en 230 *types* (Fedorov, Schönflies, vers 1891) ; on les appelle

" *groupes cristallographiques* " .

Progrès décisif dans la connaissance scientifique.

L'expérience a vérifié que la *régularité* de chaque cristal rencontré dans la nature (ou produit artificiellement) appartient toujours à une (et une seule…) de ces 230 espèces classées a priori.

Voilà une *classification des types de cristaux*, complète et indépendante de toute idée préconçue. A comparer avec la classification des espèces végétales ou animales.

Cet effort de modélisation est d'autant plus remarquable qu'à l'époque « l'hypothèse atomique » n'était pas encore admise par tout le monde ; la cristallographie assujettie aux groupes devenait précisément l'un de ses tests.

Nous avons ainsi un exemple de modèle mathématique (celui des *groupes*) qui a la vertu de classer des objets réels (les cristaux que l'on pourra découvrir dans les mines les plus reculées, sur la Lune ou sur Mars) sans qu'il soit nécessaire pour autant de connaître leur structure intime, ni même leurs propriétés physiques.

Modèle ayant vocation à l'universalité.

La découverte de « modèles universels » est un progrès essentiel en physique, même *appliquée* : ainsi l'appartenance d'un cristal à tel ou tel type « abstrait » autorisera ou interdira un phénomène comme la *piézo-électricité* (Pierre Curie). La piézo-électricité produit une déformation du cristal sous l'action de l'électricité ; elle permet de faire vibrer le cristal.

Bien utile, cet effet : c'est la piézo-électricité du quartz qui donne leur précision à nos montres ; c'est avec elle qu'on fabrique les ultrasons qui permettent d'examiner les bébés dans le ventre de leur mère et de trouver les harengs dans l'océan.

---

1 L'idée que les propriétés mécaniques et optiques des cristaux (plans de clivage, biréfringence de la lumière) s'expliquent par leur constitution en empilement régulier d'atomes remonte au moins à 1660 (Christiaan Huygens, " Traité de la lumière ").

2 « Isotrope » = « pareil-tourner ». Il n'est pas toujours nécessaire de se placer à une échelle microscopique pour découvrir les rotations qui font partie de la régularité du cristal : il existe souvent des directions selon lesquelles le cristal se fend facilement (« plans de clivage »), et bien entendu chaque symétrie du cristal déplace chaque plan de clivage sur un plan de clivage.

La construction de tels modèles est l'une des ambitions les plus hautes de la physique mathématique ; l'utilisation des groupes permet ainsi d'accéder à une certaine universalité sans devoir attendre que la physique soit achevée.

les mystères de l'eau claire

Un liquide est constitué d'atomes qui se groupent et se meuvent de façon très compliquée ; spécialement *l'eau* ([1]). Rien d'analogue au cas du cristal, où les vibrations des atomes ne brisent pas l'ordonnance du réseau.
Mais si nous observons l'eau claire "de loin", à grande échelle, on peut négliger ces détails microscopiques : "macroscopiquement", l'eau possède toutes les régularités du groupe d'Euclide, elle apparaît *homogène et isotrope*.

Même régularité macroscopique pour les liquides figés tels que le verre ou les métaux usuels.

Pourtant nous avons négligé quelque chose d'essentiel : cette régularité-là exigerait un milieu répandu dans l'espace tout entier. Paradoxe donc, ni les morceaux de verre ni la mer ne sont illimités. Ils constituent *une partie seulement d'un objet régulier* : nous dirons qu'ils sont

quasi-réguliers.

Quasi-régulier, ce n'est pas une définition mathématique, cela concerne des objets dont nous sommes capables *d'imaginer* un prolongement régulier. Des objets qui évoquent une image mentale régulière ([2]). Exemple : une règle ou un fil tendu nous permet d'imaginer une "droite illimitée", objet qui n'existe que dans nos têtes. Une bonne vieille règle en bois évoque cette régularité abstraite. De même, quand nous avons appris à compter, nous avons pu imaginer un beau jour la suite illimitée des nombres entiers. Illimitée dans les deux sens, au besoin.

Regardez la figure 10 (p. 30), qui représente *en deux dimensions* une figure régulière *à trois dimensions* (l'hélice). Votre œil et votre cerveau savent reconstituer sa régularité spatiale. Observez ensuite la figure 10 bis (p.35). En vous plaçant à diverses distances de la feuille, vous pourrez y voir des motifs qui se reproduisent (alignements, rosaces…), mais qui ne se reproduisent pas exactement ([3]).

---

1 Un certain nombre de modèles de l'eau liquide ont été proposés, mais aucun ne semble définitivement acquis. Faute de modèle, l'expérience elle-même n'est pas significative : les expériences controversées du type « mémoire de l'eau » ne pourraient être interprétées clairement que si nous possédions un modèle de l'eau suffisamment précis.

2 Lisons Platon, dans *la République* : " Ils se servent de figures visibles et raisonnent sur ces figures, mais ils pensent à d'autres figures auxquelles celles-ci ressemblent. … Toutes ces figures qu'ils dessinent, qui portent des ombres et produisent des reflets dans l'eau, ils les emploient comme si elles étaient des ombres. Ombres d'objets que seule la pensée peut percevoir ".

3 Voici une recette pour construire et prolonger arbitrairement la figure 10 bis : prenez un papier quadrillé régulièrement, faites-en deux photocopies sur papier calque, et superposez-les. Faites ensuite tourner l'une de 45 degrés par rapport à l'autre : les régions qui apparaîtront alors, il suffira d'en noircir une sur deux en passant du noir au blanc chaque fois que l'on traverse une ligne appartenant à l'un des quadrillages. Si la figure obtenue ne peut pas être régulière, c'est parce que la longueur du côté d'un carré et celle de sa diagonale n'ont pas de multiple commun — comme l'avaient déjà démontré les pythagoriciens.

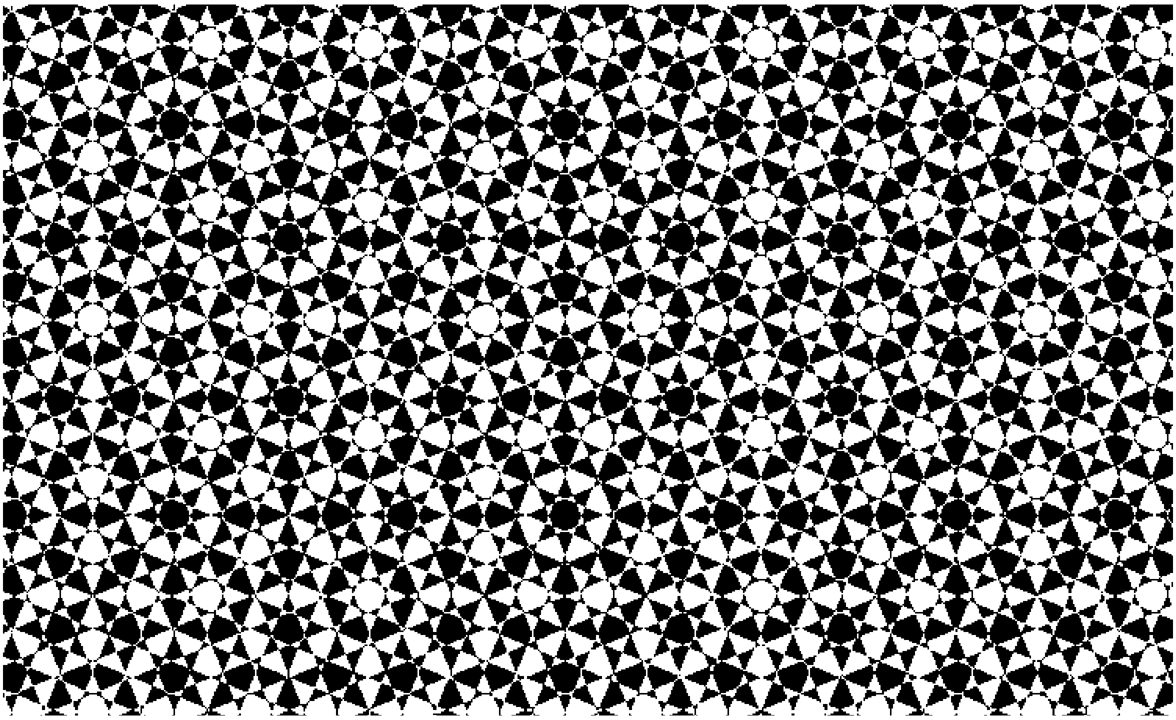


Figure 10 bis. Quasi – régularité

Cette figure serait-elle, comme la figure 10, une projection plane d'une structure tridimensionnelle régulière ? Ceux qui savent pratiquer l'auto-stéréoscopie pourront y observer des alignements dans l'espace plus réguliers, mais pas complètement. Une vraie régularité est cachée derrière, mais elle est un peu plus difficile à atteindre : c'est une section plane d'une figure régulière à quatre dimensions… ✯

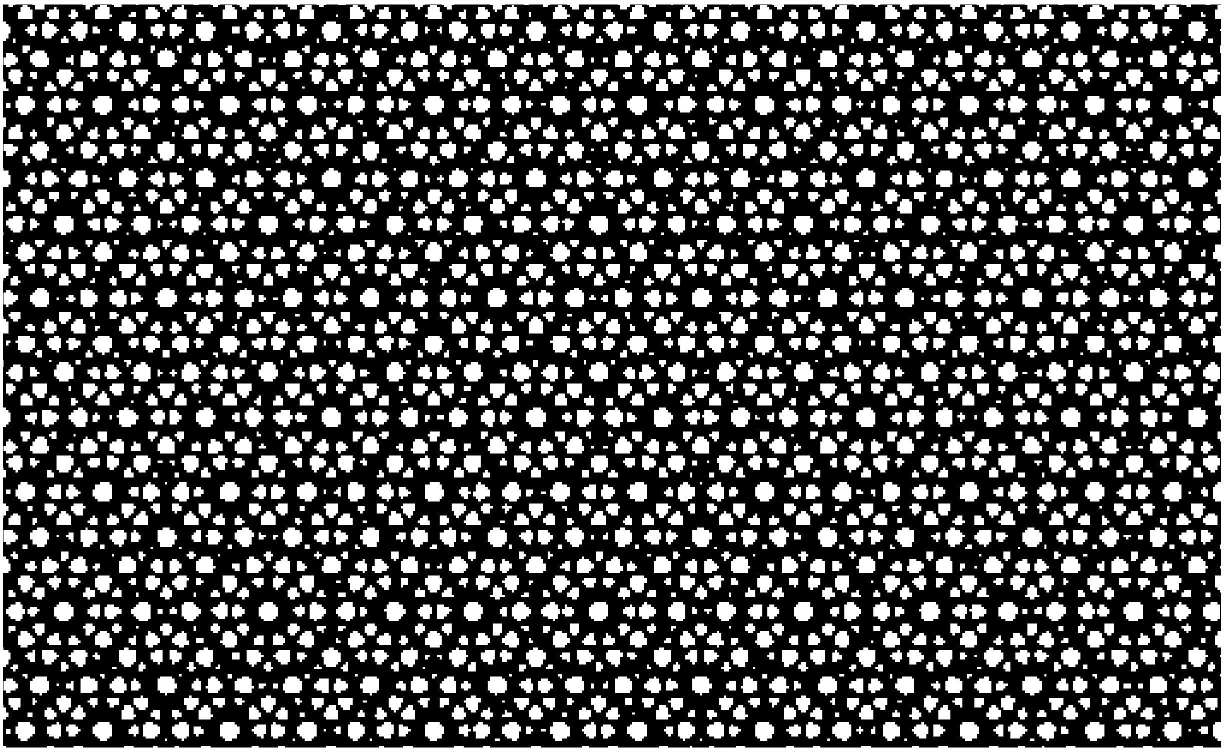


Figure 10 ter. Quasi-régularité d'un quasi-cristal

La figure 10 ter est une section plane d'une figure régulière *à cinq dimensions*.

Ce qui est remarquable, c'est qu'il existe un alliage d'aluminium et de manganèse (découvert en 1984) dont les microphotographies électroniques ressemblent terriblement à cette figure-là.

Question inéluctable : la structure microscopique *tridimensionnelle* de cet alliage est-elle régulière ? La réponse est *non*, parce qu'aucun des 230 groupes cristallographiques n'est compatible avec une telle photographie. Il s'agit donc d'un nouvel état de la matière, quasi-régulier, qui n'est pas un cristal ; on l'appelle

quasi-cristal.

LES ARTS NATURELS

Considérons un bloc solide, du verre ou du métal par exemple, dont la forme est irrégulière. Irrégulière, qu'est-ce que ça veut dire ? Que sa régularité est nulle… (1).

Cependant certaines formes sont douées d'une régularité exceptionnelle. Les polyèdres réguliers de Platon par exemple ; et aussi les cylindres, les sphères, à qui on attribue la « symétrie de révolution », la « symétrie sphérique» (2). Et d'autres.

Formes intéressantes ; comment les fabrique-t-on ?

Ô merveille : certains matériaux ont l'obligeance de les faire apparaître, presque spontanément — grâce à leur régularité interne.

Voilà le secret de quelques arts naturels.

vertus de la vis

Pour matérialiser les *vissages* qui constituent la régularité de l'hélice circulaire (fig. 10), il suffit de forcer une tige dans un écrou déjà fileté, même approximativement ; en renouvelant alternativement vis et écrou, le filetage prend forme, la régularité s'affine par usure mutuelle.

Avec suffisamment de patience et de savoir-faire, on réalise des vis extrêmement fines et précises : celles qui constituent les « micromètres à vis », les « machines à diviser ». Avec ces machines, il suffira de *compter* les tours de vis pour *mesurer* les longueurs avec précision.

les lunettes de Spinoza

Le philosophe Baruch Spinoza (1632-1677) gagnait sa vie en « polissant des verres de lunettes » .

---

1 Cette régularité-là, c'est un groupe «nul» —c'est-à-dire un groupe qui possède un seul élément…

2 Attention ! Il n'y a pas que la sphère pour posséder la « symétrie sphérique »; pensons à un assemblage de sphères concentriques… La « symétrie sphérique », ce n'est pas une surface, ce n'est pas une figure, c'est une *espèce de régularité*.

Comment faire apparaître une surface parfaitement sphérique sur un bloc de verre ? Vous l'avez deviné, par usure mutuelle sur un autre bloc de verre — un abrasif fin étant interposé.

Il ne faut pas polir n'importe comment : un bloc doit glisser sur l'autre en tournant « dans tous les sens » ; les mains de l'artisan agissent doucement selon le groupe qu'il s'agit de faire apparaître.

éloge de la soupière

Comment confectionner un vase de terre cuite ? Avant de le mettre au four, il faut pétrir la terre à la main, ou la mouler ; mais la plus belle poterie est « *faite au tour* ».

C'est le tour du potier, invention néolithique ([1]), qui déplace l'argile sous les mains adroites de l'artisan, et qui lui permet de créer ainsi la régularité du pot. De transférer au pot la régularité du tour.

Tour du potier ; tour à bois ; construction de roues ; tour du métallurgiste, ancêtre des machines-outils :

artifices industriels qui reposent sur des régularités naturelles.

l'art surnaturel des escargots

Les formes biologiques, elles aussi, ont des régularités diverses : symétries des feuilles et des fleurs, symétrie "paire" du corps humain, etc. Parmi ces formes régulières, celles de certains coquillages sont très fines et très remarquables. La figure 11 évoque certains de ces coquillages : un coquillage plat posé sur le papier, l'ombre noire d'un coquillage pointu.

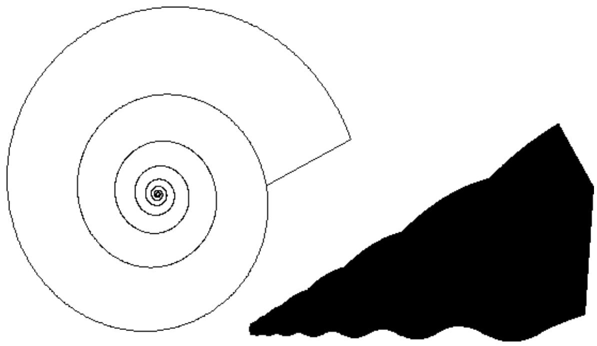


Figure 11. Pseudo-coquilles récoltées sur les plages de la géométrie

En fait, il s'agit de figures « mathématiques », elles ont été produites par un ordinateur programmé pour extraire des formes régulières d'un certain groupe. C'est dans ce groupe-là que les coquillages vont chercher leur régularité.

Quel groupe ? Un groupe *plus grand que le groupe d'Euclide* ; il contient à la fois les déplacements et les dilatations ; nous l'appellerons

groupe de Thalès ([2]).

1 Autre invention néolithique : la culture et la cuisson des céréales. Grave problème : la soupe a-t-elle précédé la soupière, ou la soupière la soupe ?

2 Il est étudié dans la *clé 4 : espace et temps classiques*.

Ces bestioles nous désignent ainsi un nouveau groupe. Serait-ce celui-là, la régularité de la nature ? Certainement pas, sinon la dilatation de la matière serait un phénomène naturel ; on pourrait à volonté grossir les mouches et les atomes, rapetisser les éléphants et les étoiles. Ça se produit dans la science-fiction, mais pas dans la nature.

Par conséquent, c'est un *surgroupe du groupe naturel* d'Euclide qu'on observe dans les coquilles ; leur régularité, on peut donc la qualifier de « *surnaturelle* ».
Ces formes ne peuvent pas se produire par l'usure de la matière — mais, nous venons de le voir, par un programme informatique.

Et c'est très probablement de cette façon que les coquillages les construisent ; comme tous les êtres vivants, ils possèdent un programme de croissance inscrit dans leur patrimoine génétique ([1]).

Les groupes sont des outils de la vie que les bigorneaux savent utiliser ;

faisons comme eux…

force et lumière

Contemporain d'Euclide, Archimède a utilisé des objets euclidiens qui ne sont pas constitués de points : les ***efforts***. Efforts qui provoquent l'équilibre ou le déséquilibre des règles, des compas, des équerres, des leviers, des bateaux ; qui tirent sur les cordes ou qui les tordent.

Qu'est-ce qu'un effort, pour un géomètre ?

Il appartient à une catégorie générale, que l'on appelle aujourd'hui les

moments ✯ ([2]).

Les moments, ça s'ajoute ; les règles d'Archimède concernant la statique (*leviers, corps flottants*) peuvent s'exprimer ainsi : *si un corps est en équilibre, la somme des moments qu'il subit est nulle.*

Utilisons maintenant un intéressant théorème du 20ème siècle : chaque « *famille de moments »* ([3]) est automatiquement pourvue d'une nouvelle géométrie, la

géométrie symplectique ✯ ([4])

Oui, mais à quoi ça sert ?

Prenons l'exemple le plus simple : une seule force, qui agit le long d'une droite ([5]).

Déplaçons cette force (grâce au groupe d'Euclide) : on pourra la transporter sur n'importe quelle droite de l'espace.

---

1 Programme qui implique une évolution des processus métaboliques : le coquillage ne peut pas utiliser « des atomes de plus en plus gros » au fur et à mesure qu'il grandit exponentiellement. Il en faut davantage, et il faut les gérer différemment.

2 Objets géométriques qui jouent un rôle important dans diverses branches de la physique. Nous donnons pp. 39-40 quelques exemples ; prochain rendez-vous : *matérialisme idéal*, p. 60.

3 Famille, au sens indiqué p. 29 (*l'origine des espèces*).

4 « symplectique » : simple transcription grecque du mot « compliqué ».

5 Pensons à la force transmise ***par une corde tendue***.

C'est ainsi que la famille des forces obtenues peut se représenter par *l'ensemble des droites orientées*, transmettant chacune une *force* de la même intensité que la force initiale.

L'ensemble de toutes ces droites est ainsi une *famille de moments* ; elle est donc *automatiquement symplectique*.

Eh bien, nous en rencontrons dans la nature, des droites orientées : les **rayons lumineux**. La *géométrie euclidienne* des rayons lumineux s'accompagne donc aussi d'une *géométrie symplectique de la lumière*. ✯

Nous pouvons donc transposer à la lumière ce que nous savons déjà pour les forces. Voici les résultats :

- Chaque type de rayon lumineux se caractérise par une nouvelle grandeur, la *couleur*. ([1])
- Quand un rayon lumineux traverse un instrument d'optique, il en ressort avec la même couleur, en respectant la géométrie symplectique. Voilà une aubaine pour produire ces instruments ([2]). ✯
- Il existe un phénomène curieux, appelé « *diffraction* », qui empêche d'isoler un rayon lumineux. Il n'est possible de concentrer la lumière que sur certains « *faisceaux lumineux* » ([3]). La géométrie symplectique permet de déterminer quels sont les faisceaux possibles. ✯
Et puisque les instruments d'optique respectent cette géométrie, un faisceau lumineux entrant dans un instrument d'optique en ressortira sous forme de faisceau. Voilà par exemple pourquoi les reflets sur les parois d'une tasse éclairée par le soleil peuvent faire apparaître une courbe brillante au fond de la tasse…([4]).

---

1 Cette couleur correspond à **l'intensité** de la force.

2 Aussi bien pour les « systèmes dioptriques » (les verres de lunettes) que pour les « systèmes cata-dioptriques » (les miroirs ardents de Syracuse ou les télescopes). C'est de là que découlent les méthodes de calcul des instruments d'optique créées dans les années 1860 par Ernst Abbe ; celles qui ont fait la fortune de la maison Carl Zeiss à Iéna.

3 Par exemple un faisceau parallèle, comme celui qui nous parvient d'une étoile lointaine.

4 Les tasses sont donc aussi des instruments d'optique… Ces courbes s'appellent « caustiques », elles peuvent se rebrousser sur des « foyers ». Et au foyer d'une loupe éclairée par le soleil, il peut faire très chaud.

Il existe une autre grandeur caractéristique des *rayons lumineux* ([1]). Celle-là, elle est la même pour toutes les lumières ; elle est très petite ; on l'appelle ***la constante de Planck***.

Si petite soit-elle, elle implique une propriété fondamentale : la lumière ordinaire est un mélange de deux lumières pures, que l'on dit « ***polarisées*** », l'une à droite, l'autre à gauche ([2]).

De là découlent divers effets optiques importants, par exemple ceux qui permettent d'analyser divers produits biologiques tels que les sucres ([3]).

1 Dans la correspondance avec les cordes (p.38), pensons à une corde non seulement **tendue**, mais aussi **tordue** (dans un sens ou dans l'autre, évidemment).

2 Cette polarisation de la lumière (dite « ***polarisation circulaire*** ») a été découverte par Augustin Fresnel vers 1810, en faisant passer la lumière dans un empilement de prismes de quartz.

3 Voir *sucreries*, p. 65.

III

QUAND ?

LE TEMPS RETROUVÉ

Chronos

Nous venons d'examiner l'espace, ou plutôt des photographies instantanées de l'espace.

Nous aurions pu noter l'heure de ces instantanés, ce qui aurait permis d'énoncer quelques sentences comme la suivante :

" Ce point-là, c'est celui où je me trouvais hier à midi précises ".

Est-ce que ça nous aurait permis d'approfondir la nature de l'espace ?
Nous venons de concevoir un lien entre l'instant et le point. Alors se pose la question : ce qui était bon pour les points, la géométrie, est-ce bon pour les instants ?
Newton écrit dans les Principia : " Le temps absolu, vrai et mathématique, coule uniformément ".

Paraphrasons librement : le temps est *régulier* ; comme l'espace, il subit l'action d'un groupe :

- Groupe constitué des « décalages temporels», avances ou retards ;
- groupe qui anime notre langage : « après-demain », « hier », « dans trois minutes »;
- groupe qui est l'une des clés de la musique ([1]);

groupe que nous appellerons ***Chronos****.*

Cette géométrie du temps est plus simple que la géométrie de l'espace ([2]). Elle nous permet de concevoir un chronomètre *"absolu, vrai et mathématique"*. Et elle nous donnera peut-être une méthode pour le *construire*, ce chronomètre.

recommencer

Reproduire une expérience, ça peut signifier « la transporter dans un autre laboratoire » ; mais ça peut signifier aussi « la recommencer dans 24 heures ». Et ça peut aussi vouloir dire : « la transporter *et* la retarder ».

Les reproductions d'expérience, *c'est l'action d'un groupe composé*, le *groupe d'Aristote*.

---

1 Allegro con brio, mesure à $\frac{3}{4}$, ♩ = 126 : voilà ce qu'on peut lire sur une partition musicale. C'est la caractérisation de deux sous-groupes emboîtés du groupe des décalages temporels. Sous-groupes que nous ressentons comme *rythmes*.

2 C'est un « groupe additif », comme disait SOPHUS (p. 25); c'est ainsi que nous savons ajouter ou soustraire les intervalles de temps.

Il se construit en composant les transports euclidiens et les décalages temporels ; ce que nous mémorisons par un dessin (fig. 12).

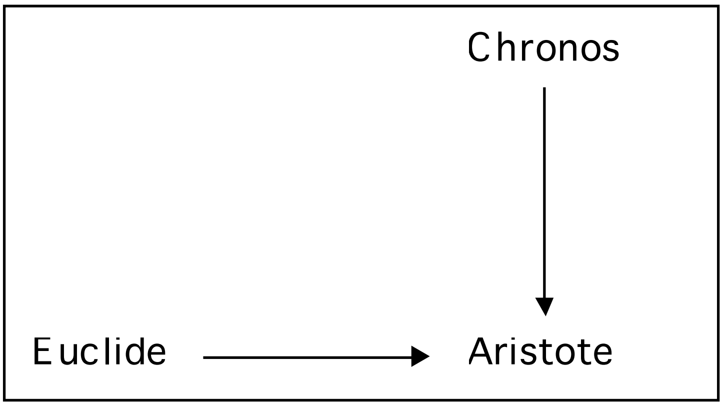


Figure 12. Voilà le groupe d'Aristote

Le groupe d'Euclide est maintenant inséré dans le groupe d'Aristote (l'insertion étant représentée par une flèche) : on dit que c'est un

sous-groupe

du groupe d'Aristote.

Autre sous-groupe, évidemment, le groupe *Chronos* des décalages temporels.

Imaginons maintenant l'expérience suivante : un caillou est là, par terre, *immobile*. Retardons cette expérience de 5 minutes. Qu'est-ce que ça change ? rien du tout, il est toujours là, par terre, immobile… C'est rigoureusement *la même expérience.*

Attention ! nous avons dit « *la même* » ? Alors, de la géométrie se cache quelque part… Voici :

Chaque chose est en mouvement.

L'***immobilité***, c'est un mouvement,
mais un mouvement *régulier* :
Une chose est **immobile** si *Chronos* fait partie de sa régularité.

ce soir à Samarcande

Et *les points*, que deviennent-ils quand nous ne nous contentons pas d'une vision instantanée ? Nous pouvons distinguer deux sortes d'objets :

- Les points qui ne durent qu'un instant, aussi brefs que petits ; nous les appellerons

« événements ».

- Les « points immobiles », constitués d'une infinité d'événements successifs.

L'ensemble des points immobiles s'appelle couramment « *espace* ». L'ensemble des événements, appelons-le

« ***Univers*** *».*

Le *lieu* et la *date* d'un événement, ce seront un « point de l'espace » et un « point du temps ».

Sur la figure 13, deux flèches symbolisent ces opérations de « position » et de « date » ([1]) .

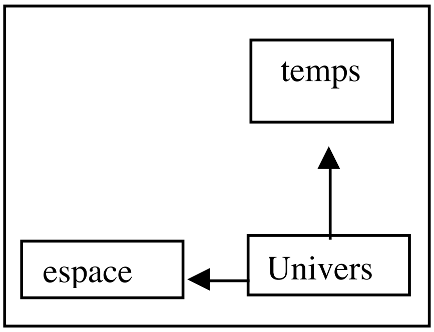


Figure 13. Pouvons-nous découper l'Univers ?

Voilà pourquoi on dit aussi « *espace-temps* » au lieu d'Univers. Mais que sommes-nous, dans cet Univers ?

Simple remarque : le rapport entre la taille moyenne de notre corps et la durée moyenne de notre vie, c'est une *vitesse ;* la « moyenne » de cette vitesse chez les humains « normaux ».

Or cette vitesse ne varie pas tellement d'un être vivant à l'autre, de l'amibe au séquoia.

Vitesse qui est proche aussi du rapport (diamètre / âge) de la Terre.

Vitesse terriblement petite par rapport à la seule vitesse universelle que connaisse la nature : *celle de la lumière*.

Pour la Nature, nous ne sommes donc que de longs filaments dans l'espace-temps. Des « lignes d'Univers ».Un rendez-vous réussi ? une ***ligne d'Univers*** qui rencontre la nôtre. Voici comment le dessiner modestement (figure 14).

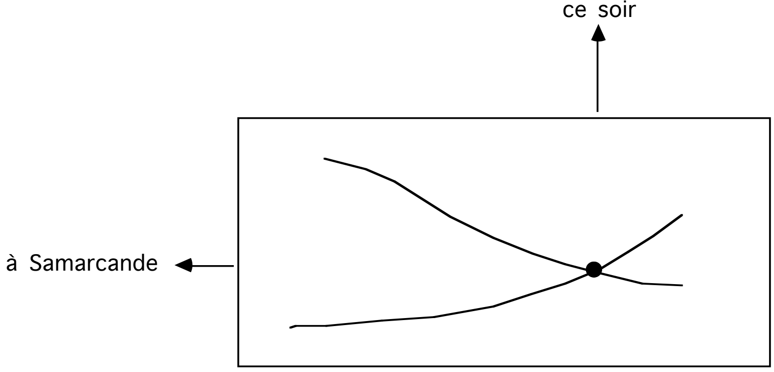


Figure 14. Fatum

1 Comparez avec la figure 12 : les flèches sont inversées. Voyez-vous pourquoi ?

tout est mouvement

Assistons à une scène instructive.

Un port, un bateau à l'ancre. Calme plat ce matin-là. Arrive un monsieur, amateur d'expériences. Il monte à bord, escalade le grand mât, sort un caillou de sa poche, et le laisse tomber.

Il admire la chute du caillou, qui tombe juste au pied du mât.

Toute la scène a été observée par un de ses amis, qui justement flânait sur le quai. Et il se dit : « Tiens, mon collègue aurait aussi bien pu laisser tomber ce caillou dans une heure. Alors je ne l'aurais pas vu tomber ; mais je sais bien qu'il serait tombé de la même façon. Il aurait eu le même mouvement ! »

Le même… non ! ce mouvement retardé diffère du premier — puisqu'il ne se déroule pas à la même heure.

Mais c'est un mouvement *de même espèce* : l'un est l'action sur l'autre de l'élément de Chronos que nous appelons « dans une heure ».

Il n'est pas sage de les confondre, d'*oublier l'action du groupe Chronos* — pensez donc, nous ne saurions même plus reconnaître l'immobilité ! ([1]).

Heureusement le théoricien qui passait ne s'y est pas trompé. Et le voici qui imagine maintenant tous les mouvements successifs du caillou. Mouvements de même espèce, tous possibles.

Oui, mais on pourrait aussi le lancer au loin, ce caillou… autre espèce de mouvement. Dans la tête du théoricien, une image apparaît, où il se représente d'un seul coup tous les mouvements d'une chose ; et il crie :

tous ces mouvements possibles,

ce sont les points d'un nouvel espace…

et cet espace, c'est « la chose en elle-même » !

Précise, maintenant, la règle du jeu des deux physiciens, quand ils s'occupent de cette chose-là :

- le théoricien s'occupe de l'ensemble infini des mouvements possibles, ensemble abstrait dans lequel le mouvement « réel » n'est qu'un seul parmi tous les autres.
- l'expérimentateur observe ce mouvement-là, et il décrit son histoire, qu'il observe dans l'espace, au cours du temps. Qu'il insère *dans l'Univers*.

C'est la réduction de chaque chose à son ensemble de mouvements qui devient la règle de leur dialogue, qui rend la physique intelligible. ✯

1 Voir p. 43 la définition de *l'immobilité.*

Un troisième collègue arrive, qui vient jeter aussi son grain de sel. Métaphysicien, il déclare «L'existence du caillou, d'accord, ce n'est que son histoire, son mouvement réel ; mais l'essence de ce caillou implique toutes ses virtualités, par exemple cet ensemble des mouvements que vous venez d'abstraire. Mais beaucoup d'autres choses encore que vous avez oubliées… vous êtes de vulgaires réductionnistes. Ne réduisez donc pas l'ontologie, science de l'être, à la mécanique, science des machines ! »

Nos deux physiciens ne se prétendent pas réductionnistes — ni rien de ce genre. En fait, ils se sentent plus tranquilles en n'adoptant pas de position philosophique. Ils ont déjà dû faire un pas immense dans le continent métaphysique : admettre que la physique soit intelligible. Ils n'iront pas plus loin, tant par crainte que par humilité. Mais leur humilité est tempérée par une certitude rassurante. Ils ont en poche un sauf-conduit géométrique :

L'ensemble des mouvements possibles mérite le nom d' « ***espace*** »
parce qu'il possède la « ***géométrie*** » du groupe d'Aristote.

1584 : NAISSANCE DE LA RELATIVITÉ

en bateau

Cette «géométrie aristotélicienne» de la matière met sur le même plan la géométrie usuelle et la mécanique, science des machines.

C'est ce qu'affirme avec force Newton en 1686 : " Les artisans ont coutume d'opérer peu exactement, et de là est venu qu'on a tellement distingué la mécanique de la géométrie, que tout ce qui est exact est rapporté à celle-ci, et ce qui l'était moins, à la première. Cependant les erreurs que commet celui qui exerce un art sont de l'artiste et non de l'art. … … Nous avons pour objet, non les arts, mais l'avancement de la philosophie…" ([1]).
Dans cette géométrie-là, l'immobilité a un caractère absolu : si une chose est immobile, l'action du groupe d'Aristote l'enverra ailleurs, mais toujours immobile. En plein accord avec la « Physique » d'Aristote.

Remontons un siècle en arrière, revivons la Renaissance. Une étoile nouvelle, si brillante qu'on la voyait en plein jour, était apparue en 1572 ; elle était beaucoup plus lointaine que la Lune (l'illustre astronome Tycho Brahe s'en était assuré).

Or selon Aristote la matière terrestre était seule sujette à la corruption ; le ciel était construit de matière incorruptible, rien ne pouvait y changer. Alors, cette étoile ?
Toutes les évidences scolastiques sont contestées. Le pape lui-même, en 1582, vient d'amputer le temps en supprimant dix journées par décret pontifical ([2]).

---

1 Préface des Principia ; traduction de la marquise Émilie du Châtelet.

2 Du 5 au 14 octobre ; il s'agissait d'établir le calendrier « grégorien ». Grégoire XIII n'osa cependant pas toucher à la chaîne des 7 jours de la semaine : le lendemain du jeudi 4 fut le vendredi 15. Cela ne changeait rien à la date de Pâques — déterminée par un algorithme luni-solaire, appelé *comput ecclésiastique*.

Un jeune moine napolitain de l'époque de l'étoile est devenu philosophe. Dans le "Banquet de Cendres" (1584), Giordano Bruno raconte comment, sur la rive d'un fleuve, un passant lance un caillou vers un bateau entraîné par le courant.

Mouvement unique du caillou, que Bruno interprète de deux façons : vu de la rive et vu du bateau. Deux mouvements apparents qui semblent différents, mais qui semblent tous les deux naturels. Rien ne permet au navigateur, en observant le mouvement du caillou, d'en déduire que son bateau est lui-même en mouvement.

Conclusion : l'expérience quotidienne ne nous permet pas de savoir si la Terre est immobile ou en mouvement dans l'espace — contrairement à l'opinion d'Aristote. Notre Terre n'est qu'un vaisseau dans lequel nous sommes embarqués ; il cabote autour du Soleil, comme l'a suggéré Copernic.

Et le Soleil lui-même doit se mouvoir, étoile parmi les étoiles. Pas de limites au mouvement et à l'espace.

Coup de tonnerre en 1610, quand paraissent les « *Nouvelles du Ciel* » de Galilée ([1]) : ayant construit une lunette, il a aperçu des taches sur le Soleil, qui est donc aussi corruptible que nous ; quatre petits astres qui accompagnent Jupiter, comme la Lune nous accompagne ; un croissant de Vénus, comme un croissant de Lune ; des montagnes sur la Lune, comme sur Terre. Et tout le monde peut les voir, un coup d'œil dans la lunette suffit.

Galilée reprend l'argument du bateau en 1632 (Dialogue sur les principaux systèmes du Monde) — sans citer sa source. Sage prudence, après le sort funeste de Bruno, brûlé vif à Rome sur le marché aux fleurs, au printemps 1600. Il dérangeait.

L'expérience réelle est faite en 1640 par Pierre Gassend, dit Gassendi, philosophe provençal, sur une galère qui vogue « *avec toute la force et la vitesse possibles* » sur les eaux du port de Marseille.

Une seule expérience de pensée, concernant la chute d'un caillou, a donc suffi à Bruno et à ses successeurs pour élargir notre conception de la nature. Le mouvement concerne non seulement les objets sur Terre, mais aussi la Terre elle-même, le Soleil, les étoiles. Chaque chose bouge par rapport à une autre, la quête de l'immobilité est vaine.

Statut unique pour tout le monde ; le mot « *Univers* » est apparu au XVIème siècle pour évoquer cette unité.

géométrie galiléenne

L'immobilité, ce n'est donc qu'une régularité subjective — puisqu'elle dépend autant de nous, sujets pensants et observants, que des objets que nous observons. Elle est définie par le groupe d'Aristote ?

Alors le groupe d'Aristote est lui-même subjectif…

Un seul espoir pour s'évader de cette subjectivité : trouver un autre groupe, qui produira *une géométrie plus objective*.

1 Sidereus Nuncius.

Pour cela, revenons à Bruno : le mouvement d'un caillou libre dans l'espace peut s'observer à la fois de la rive et du bateau. Le mouvement qui, *vu du bateau*, serait le même que le mouvement réel *vu de la rive,* ce sera nécessairement un autre mouvement *possible*. *L'embarquement* devient ainsi une correspondance entre mouvements, que nous appellerons « ***transformation de Bruno*** ». ✯

Ô merveille ! Les transformations de Bruno à l'instant présent (correspondant à tous les bateaux imaginables) constituent un nouveau groupe, le ***groupe de Bruno ;***

le groupe de Bruno et le groupe d'Aristote se composent, et produisent un nouveau groupe — qui va recevoir le nom de **Galilée.**

Risquons un coup d'œil à l'intérieur :

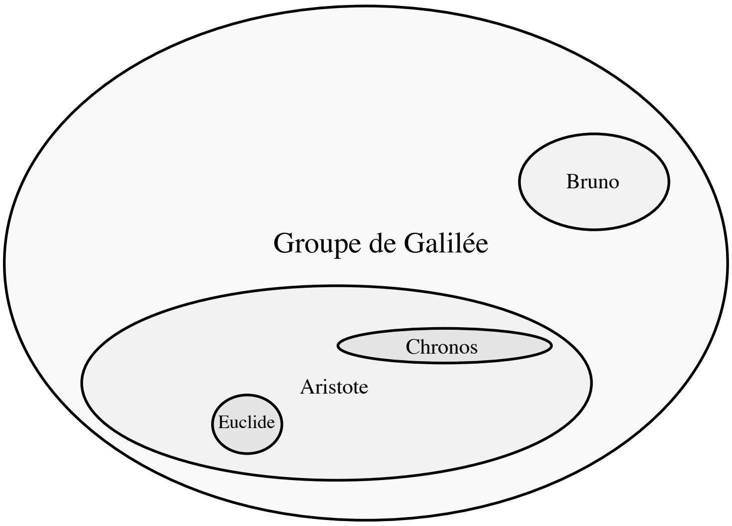


Figure 15 : Groupe de Galilée

Quatre sous-groupes apparaissent dans le groupe de Galilée : « Aristote » le dogmatique, « Euclide » qui gère l'espace intemporel, « Chronos » qui fait passer le temps, et « Bruno » qui nous embarque. Mais il y en a bien d'autres…

Heureusement la loi du groupe rétablit l'ordre dans ce fouillis. Comment s'y retrouver ? simple question de calcul ([1]). Apprivoisée, dès lors, cette complexité de la nature.

L'usage de cette nouvelle géométrie pour décrire toutes les choses : voici le

1 Le calcul matriciel élémentaire répond à ces questions ; voir les clés 3 et 4.
Qu'obtient-on par exemple en composant un déplacement d'Euclide et une transformation de Bruno ? Le résultat dépend-il de l'ordre dans lequel on effectue ces opérations ? Est-il vrai qu'une action du groupe de Galilée peut toujours se décomposer en deux actions, prises l'une dans le groupe d'Aristote, l'autre dans le groupe de Bruno ? La réponse est oui pour les deux dernières questions.

Emmanuel Kant pensait que de tels problèmes étaient inscrits dans notre « sensibilité », et sans doute qu'il suffisait d'y lire la réponse. Le groupe d'Aristote est bien disponible dans nos têtes de Terriens ; mais difficilement le groupe de Galilée, qui enchaîne mouvements sur mouvements.

principe de relativité. [1]

ARTS DU TEMPS

Au chapitre II , nous avions remarqué que les régularités euclidiennes de la matière sont génératrices de quelques techniques fondamentales.

En prenant garde au temps, nous venons d'élargir la géométrie, donc les régularités possibles de la matière.

Nouvelles régularités, nouvelles techniques ! examinons-en quelques unes.

les jardins de Syracuse

La vis, nous l'avons pensée et décrite « hors du temps » (p.30). Mais lorsqu'elle est fabriquée, c'est une chose permanente, douée d'une certaine épaisseur.
Nous pourrions la laisser au repos ; amusons-nous plutôt à la faire tourner régulièrement autour de son axe.

Cela crée une illusion, surtout si les extrémités de la vis sont cachées : tantôt nous la percevons effectivement en rotation régulière, tantôt elle nous semble se déplacer lentement le long de son axe, indéfiniment.
Nous venons de construire une « vis sans fin ». Elle possède une régularité particulière, qui compose des vissages instantanés avec des translations spatio-temporelles. C'est ce groupe qui provoque l'illusion.

Pas seulement une illusion : on utilise la vis sans fin pour faire avancer des engrenages.

Autre utilisation : si la vis est enfermée dans un cylindre de même diamètre couché sur le sol, et si ce cylindre contient un liquide, le liquide se déplacera longitudinalement par le seul jeu combiné de son poids et de la rotation de la vis.

Cette machine a été inventée par Archimède (III$^{\text{ème}}$ siècle avant JC) ; elle distribuait sans doute l'eau dans des jardins siciliens ; c'est toujours un instrument d'irrigation.

On peut aussi remplacer le liquide par des céréales : c'est la méthode la plus courante pour transporter les grains dans les silos.

---

1 Un mot bien ambigu, « relativité »… « Tout est relatif à tout, et réciproquement » : voilà en gros le discours de ceux qui prétendent révéler ce principe en ignorant les groupes. Et pourtant, il suffirait de dire que le mot "relativité" sous-entend une "relation" , et que cette relation, c'est le groupe qui la produit. Dans quelques ouvrages classiques, on énonce le principe en affirmant que " les lois de la physique sont invariantes par changement de référentiel ". Belle sentence, mais dont la portée est limitée parce qu'on ne peut préciser ni ce que sont les référentiels, ni comment on en change, ni surtout comment ce changement pourrait faire " varier les lois de la physique " : il faudrait pourtant bien que cela se pût, faute de quoi il n'y aurait pas de principe du tout.

Le discours sur les référentiels ne perd son ambiguïté que si l'on fait appel aux actions des groupes sur les choses. Voir Clé 2 , p. 172.

mobilités

Encore de la technologie : un véhicule qui respecte le confort de ses passagers doit se déplacer *régulièrement*. Cette régularité-là, c'est forcément encore un groupe. Mais quel groupe ? peut-être ne le percevez-vous pas immédiatement.

Représentez-vous la situation :

Vous êtes en croisière sur un superbe bateau près d'une côte pittoresque. Le temps est calme ; rien ne se passe, vous attendez tranquillement. Attendre cinq minutes, c'est un décalage temporel dans le bateau, ça fait partie du groupe de Galilée.

Vous regardez le paysage défiler sous vos yeux, et vous faites une constatation : attendre dans le bateau, ça n'a pas du tout la même action sur le paysage qu'attendre dans votre maison.

Il y a donc *deux groupes différents* : celui qui vous permet d'attendre dans le bateau et celui qui vous permet d'attendre chez vous.

Quand vous attendez à domicile, vous percevez la régularité même de votre maison, son « *immobilité* » (p.43). Et sur le bateau ? vous percevez la régularité de son mouvement, que nous appellerons

mobilité. ✯

Il n'y a pas que votre maison et votre bateau : il y a évidemment beaucoup d'autres mobilités possibles, engendrant chacun une façon d'attendre.

En bons disciples d'Aristote, nous avions cru jusqu'ici que le temps se manifeste en agissant sur nous comme sur toute chose ; que l'action du temps, c'était l'action d'un groupe universel qui s'appelait Chronos.

Mais nous constatons que

ce Chronos, c'est simplement la mobilité de la Terre…

Attention ! …

…l'espace lui-même varie avec notre séjour !

Inattendu, mais nécessaire : qu'est-ce donc qu'un *point de l'espace* ? Souvenez-vous, c'est une *infinité d'événements successifs* (p. 43).

« Successifs », qu'est-ce que ça veut dire ? qu'il suffit *d'attendre* pour passer de l'un à l'autre ; attendre comment ? par l'action d'une certaine mobilité. Laquelle ?

ça dépend…

Changer de séjour, c'est donc aussi changer d'espace. Un « vaisseau spatial », ce n'est pas un vaisseau qui se meut dans l'espace : c'est un vaisseau qui produit son propre espace ([1]). L'espace terrestre, c'est celui dont nous avons l'habitude — mais il ne vaut pas mieux que les autres : ainsi l'exige la relativité galiléenne.

---

1 La preuve qu'il ne se meut pas ? c'est qu'il ne peut pas s'arrêter… Et pourquoi donc ? parce que rien dans l'espace ne permet de distinguer un vaisseau « immobile » d'un vaisseau « en mouvement ». Pas de « compteur de vitesse » sur les nefs spatiales — sauf dans quelques vieux récits de science-fiction, comme celui où la nef des méchants extra-terrestres intime au vaisseau terrien l'ordre de "s'arrêter dans l'espace " .

Nous avons tous vu des hommes se mouvoir presque familièrement sur la Lune ; or l'espace lunaire qu'ils empruntaient se meut à cent mille kilomètres à l'heure par rapport au nôtre (1). Lequel des deux espaces est donc *le vrai,* celui auquel on peut croire ? Il faut y renoncer :

« le vrai espace », ce n'est qu'une illusion aristotélicienne (2).

Pouvez-vous l'accepter ? C'est difficile. Nous sommes des animaux terrestres, et particulièrement urbains ; nous prenons pour espace absolu et permanent ce qui est matière familière : nos murs, les maisons, les rues.

La difficulté n'est pas neuve : Newton, qui avait reçu la leçon de relativité de Bruno, Galilée, Gassendi, refusait d'abandonner son intuition de l'espace absolu où devaient se mouvoir les corps. Mais avec mauvaise conscience : ″Il faut avouer qu'il est très difficile de connaître les mouvements vrais de chaque corps, et de les distinguer des mouvements apparents ″.

Une preuve « sensible » que l'espace auquel nous croyons est relatif à notre véhicule ? Il suffit que le véhicule subisse quelque perturbation — et l'espace même sera avarié.

La houle grossit autour de notre bateau ? alors nous sommes dans un espace de mauvaise qualité, le mal de mer nous guette.

Pire encore : nous nous étions naïvement confiés à la douce Terre — et survient un séisme. En plus du danger que nous courons, nous éprouvons une terreur métaphysique : pendant quelques instants, nous avons affronté *la mort de l'espace.* Certains y ont perdu la raison.
Comment se fait-il que notre illusion d'un espace « absolu » soit si forte ?

demandons-le à la Terre elle-même.

Elle est « ronde », la Terre, elle possède approximativement une symétrie sphérique (3) ; mais pas parfaitement : ce n'est pas vraiment une boule de billard, elle est aplatie, elle possède des continents et des océans. Elle est *irrégulière*. Comment le constater ? faisons donc le tour du monde : notre voyage nous apprendra beaucoup de choses.
Au contraire, tester la régularité temporelle de notre planète, c'est-à-dire rester chez nous à sentir le temps qui passe, c'est beaucoup moins instructif, vous en conviendrez.

Cela signifie que parmi les *régularités* approximatives de la Terre, sa mobilité « *Chronos* » est bien plus fine que les autres régularité, qu'elle est *presque parfaite* (4).

---

1 Parce que, vue du véhicule terrestre, la Lune décrit en 25 heures un cercle de 2 500 000 Km de périphérie. Ne pensez pas 28 jours, il s'agirait d'un troisième espace différent de ceux qui nous intéressent ici.

2 Au sens technique du terme : nous ne percevons bien que la régularité de « l'espace immobile », c'est-à-dire le groupe d'Aristote.

3 Définition : p. 36.

4 Qu'est-ce que c'est, une régularité approximative ? C'est un modèle régulier que nous utilisons pour décrire approximativement quelque chose. La régularité Chronos de la Terre est violée chaque fois que quelque chose bouge ici-bas.

Comment sont apparues ces régularités de la Terre ?

Il y a très longtemps que notre planète a pratiqué spontanément quelques *arts naturels* ; c'est ainsi qu'elle a constitué son excellente régularité « Chronos » — donc aussi son espace ([1]). Et ensuite sa *symétrie sphérique,* si incroyable pour quiconque n'a pas contemplé l'horizon marin.

L'espace terrestre s'est affiné pendant des milliards d'années. Nous y sommes nés, nous y avons aménagé notre niche — comme les plantes et les animaux. Voilà sa principale vertu.

bonnes vibrations

Regardons autour de nous.

« Le temps qui passe », nous savons donc que c'est l'action sur les choses d'une régularité de la Terre. Les objets qui possèdent cette régularité, nous disons qu'ils sont *immobiles* ([2]).

Existe-t-il des choses dont le mouvement soit *un peu moins régulier* que l'immobilité ([3]) ?

---

1 Comment cela s'est-il produit ? une réponse est fournie par la physique, plus précisément par ce qu'on appelle la « thermodynamique ». Nous l'évoquerons au chapitre V , nous aurons alors de nouveaux éléments pour concevoir comment la Terre a acquis sa régularité — à partir du moment où elle s'est constituée par collisions successives de corps célestes plus petits. Avec chaque fois choc, échauffement, fusion partielle, agglomération… Processus qu'on appelle *accrétion*.

2 Immobile ? p. 43.

3 Plus précisément : des mouvements admettant comme régularité un sous-groupe de Chronos.

Oui, et voici comment bougent ces choses : après un certain décalage, le mouvement repart, identique ; au bout du décalage double, il repartira évidemment, toujours identique ; puis au bout du décalage triple — etc. …. On dit que le mouvement est *périodique.* Les choses qui possèdent de tels mouvements, on les appelle des *oscillateurs.*

La régularité naturelle des oscillateurs, à quoi l'utilise-t-on ? À beaucoup de choses.

Les oscillateurs dont le mouvement se reproduit quelques centaines de fois par seconde peuvent produire un son : avec eux, on fabrique les instruments de musique.

C'est avec des oscillateurs qu'on *mesure le temps* : il suffit de compter les oscillations ([1]):*voilà les horloges*.

Ce n'est pas sans peine : il a fallu attendre Huygens pour domestiquer le pendule oscillant ; il a construit en 1657 la première *horloge à balancier*. En 1659, il a utilisé le *ressort spiral* pour construire un chronomètre de marine — indispensable pour « faire le point » en mer .

Oscillateur " *à échappement* ", qui depuis a fait fonctionner toutes les montres…
…jusqu'à l'utilisation du quartz oscillant.

Certains atomes sont aussi des oscillateurs, les plus rapides et les plus stables ; c'est aujourd'hui l'horloge atomique qui permet la plus fine mesure du temps. C'est avec un atome oscillant qu'on définit la seconde.
Les mêmes atomes ([2]), il peut en exister un peu partout ;

voilà pourquoi elle est *universelle*, notre *unité de temps.*

---

1 Même tactique pythagoricienne pour la chronométrie que pour la métrologie (*vertus de la vis*, p. 36) ; on utilise une régularité naturelle pour réduire l'action de mesurer à l'action de compter.

2 Le groupe qui donne son sens à cette expression, qui permet de parler des « mêmes atomes », nous le rencontrerons au chapitre VII (*liens*).

IV

MATIÈRE ET GÉOMÉTRIE

VOUS AVEZ DIT « ÉNERGIE »

énergies douces ?

Ambigu, le mot *énergie.* Dans son sens le plus courant, il évoque force et violence. Étymologiquement, celui qui est habité par l'énergie, c'est l'*énergumène.*

Aubaine pour les publicitaires, cette ambiguïté : on vantera l'énergie naturelle, l'*énergie douce* contenue dans un produit à vendre.

Cette énergie-là évoque quelque vertu secrète, quelque chose qui nous protège contre la disette, tout en restant « écologique » ; quelque chose qui nous donnera de la force, de la force virile par exemple. Nous avions besoin d'énergie ; voilà ce qu'il nous faut acheter de toute urgence si nous voulons bien vivre.

Une publicité analogue précisera qu'un aliment ne fait pas grossir, qu'il contient « moins de 300 calories ». Or la calorie, ça sert à mesurer l'énergie.

Peu de calories, c'est donc peu d'énergie. Alors ?

bilan

Qu'est-ce que c'est, l'énergie, pour un physicien ?

Quelque chose qu'a découvert Christiaan Huygens — encore lui — dans ses travaux sur l'horloge à balancier ([1]).

La question que se posait Huygens, c'était de comprendre pourquoi les oscillations du balancier se répétaient régulièrement ; et de maîtriser leur durée, pour régler efficacement son horloge.

Remarque évidente : si on observe de près le fonctionnement du balancier, on voit que sa vitesse varie constamment ; elle augmente pendant la descente, elle diminue quand il remonte.

Huygens a su chiffrer précisément cette variation de vitesse ; elle s'exprime par *un bilan.*

Bilan à deux termes, équilibré à chaque instant :

- la « *force vive* », qu'on appellera T : elle ne dépend que de la *vitesse* du balancier;
- le « *potentiel* », qu'on appellera V, qui ne dépend que de sa *position*.

- On les ajoute, et miraculeusement *leur somme* ne bouge pas.

Cette somme, que l'on appelle H, est donc déterminée dès le début du mouvement ([2]).

Ça marche : en appliquant ce principe, on décrit tous les mouvements possibles du pendule, et on peut calculer sa période d'oscillation. L'expérience confirme les valeurs calculées.

Huygens a su donner une certaine universalité à ce « principe » — en l'étendant à un système mécanique complexe ; toujours sous forme d'un bilan dont le solde à tout instant reste constant. Cette constante là , c'est ce que nous appelons aujourd'hui

---

1 "Horologium oscillatorium", 1673. Huygens part du principe de Torricelli, suivant lequel le centre de gravité d'un système abandonné sans vitesse ne peut remonter plus haut qu'à son départ.

2 Cette constante , c'est Lagrange, théoricien et historien de la mécanique, qui l'a nommée H en l'honneur de Huygens (Mécanique Analytique, deuxième édition, 1811). Chose curieuse, la plupart des physiciens pensent aujourd'hui que H est l'initiale de Sir William Rowan Hamilton, et l'appellent donc " *hamiltonien* ". Hamilton, qui se faisait appeler " *le Lagrange irlandais* ", fut un génie précoce ; mais il n'avait que sept ans en 1811.

l'énergie

d'un mouvement.

L'expérience confirme l'universalité de ce principe : si une certaine énergie a été communiquée à une chose, c'est qu'elle a été prise ailleurs. Un principe de ce genre ne peut être que s'il ne souffre pas d'exception :

- Une petite chose qui mangerait un peu d'énergie ruinerait le principe : interdite, la petite chose !
- Un infime pondeur d'énergie le ruinerait tout autant : utopie ! Peu de chance de réussite aux inventeurs de « mouvements perpétuels », appareils qui produiraient un peu d'énergie à partir de rien.

Voilà donc le statut de ce principe mystérieux, qui a tant frappé les imaginations.

L'énergie peut se transmettre, s'enfuir ou revenir, se « dégrader », mais elle ne peut ni se créer, ni se détruire.

C'est pourquoi *il n'y a pas d'énergie douce* : l'énergie voyage, se transfère, mais ne garde pas le souvenir de son origine, douce ou violente. Comme « l'argent sale de la drogue », qui peut si facilement se « blanchir ».

Une entreprise soucieuse du bien-être de ses salariés les paye-t-elle avec de l'argent doux ?

L'énergie se mesure en unités variées : les calories, les kilowatt-heures, les méga-électron-volts. Comme l'argent, qui se mesure en dollars, en euros ou en roupies. Mais pour l'énergie, le taux de change est rigoureusement fixe.

On a proposé ce principe comme explication universelle de la physique ; mais s'il permet de prévoir le mouvement d'un pendule, il ne suffit pas à prévoir le mouvement d'un système plus compliqué.

Insuffisant donc, ce principe universel, mais quand même bien utile ;

voyons un exemple.

je t'attendrai

Problème : comment économiser l'énergie en conduisant une voiture ? Chacun a entendu dire que « les accélérations rapides coûtent cher ». On l'a entendu dire, mais est-ce que c'est vrai ? Comment faut-il accélérer ?

Pour « modéliser » le problème, il faudra le préciser et le simplifier. Par exemple comme ceci :

CHARLES rentre de Carcassonne. Au milieu du trajet, il a une grande côte à monter ; ensuite une petite descente ; le garage de CHARLES est un peu plus haut que Carcassonne.

C'est vrai, s'il appuie à peine sur l'accélérateur, il économisera l'énergie. Mais il va traîner, CHARLES. Et celle qui l'attend à la porte devra patienter longtemps.

CHARLES économiserait encore plus d'énergie en restant à Carcassonne ; mais puisqu'il veut rentrer, il doit bien faire tourner son moteur. Comment ? ça dépend s'il est pressé ou non.

Laissons donc à Charles le choix de la durée qu'il va mettre à rentrer ; une durée raisonnable. Et aidons-le à dépenser le moins d'énergie pour la durée choisie.

Facile, il suffit de revenir à Huygens, de faire le bilan de cette énergie.

- Il y a d'abord « *l'énergie potentielle*» V ; il va devoir en fournir pour monter les côtes, mais il profitera de cette énergie acquise pendant les descentes. Le bilan de cette énergie-là est vite réglé : il dépend du profil de la route, mais pas de la façon de conduire ; il sera le même dans tous les cas. Inutile donc d'en tenir compte dans la comparaison des divers modes de conduite.
- Ensuite il y a la « force vive » T, qu'on appelle aujourd'hui « *l'énergie cinétique* ». Celle-là, elle dépend de la vitesse atteinte — mais pas de la façon dont on l'a atteinte. Pour dépenser le moins d'énergie cinétique possible, il suffit donc de limiter la vitesse maximum.

Limiter la vitesse maximum pour arriver dans un temps donné : la façon la plus efficace, c'est d'atteindre cette vitesse maximum le plus tôt possible, et d'y rester. Ainsi l'énergie cinétique fournie par le moteur sera la plus petite possible. Charles roulera donc *dès que possible à vitesse constante*, *juste celle qu'il faut*.

Enfin il ne faut pas oublier l'énergie communiquée par la voiture à l'atmosphère, sous forme d'agitation et d'échauffement. Le cas de cette énergie-là est moins évident, mais le résultat est le même : vitesse constante. ✯

Si aucune vache ne s'interpose, si le trajet est parfaitement libre, sans panneaux intempestifs, sans virages en épingle à cheveux, une seule tactique : CHARLES va *accélérer le plus possible* au départ, mais *juste le temps* d'atteindre la vitesse choisie. Ensuite il n'a plus qu'à *maintenir* cette vitesse, par exemple en écoutant la chanson de son moteur. Évidemment il appuie plus sur l'accélérateur quand ça monte, presque à fond si ça monte beaucoup. Et moins à la descente. Et il arrête rapidement sa superbe auto à la porte du garage.

Voilà la conduite la plus économique.

Bien entendu, cette conduite doit être modulée par les impératifs divers : arrêts obligés, sécurité, confort des passagers, rendement du moteur, etc. Mais le résultat n'est pas fondamentalement changé.

Les chauffeurs à qui l'on a fait croire qu'il faut « accélérer progressivement », qu'il ne faut pas trop appuyer sur l'accélérateur pour monter les côtes, qu'on peut « rattraper le temps perdu » en profitant des descentes, ceux-là gaspillent simplement l'énergie.

S'ils savaient, ils pourraient arriver plus tôt en brûlant moins d'essence.

MATÉRIALITÉ GÉOMÉTRIQUE

Nous avons rencontré deux principes universels concernant la nature :

- la *conservation de l'énergie* ;
- le *principe de relativité*, caractérisé par le rôle universel du groupe de Galilée.

L'un de ces principes concerne la *matière,* et l'autre la *géométrie* ; et Il faut bien qu'ils coexistent. Inéluctable donc , la question suivante :

Quelle est la géométrie de l'énergie ?

jeu de boules sur une péniche

Examinons une chose en mouvement qui évolue librement. Dans ce mouvement, comme dans chacun des mouvements qu'elle pourrait avoir, la chose conserve une énergie bien déterminée.

Faisons agir *un élément du groupe de Galilée* : le mouvement réel devient un autre mouvement, un mouvement possible. S'il était réalisé, ce mouvement possible, il aurait lui aussi son énergie. Est-ce forcément la même ?

Eh bien non ! et ça mérite réflexion… L'énergie du mouvement réel et celle du mouvement transformé sont l'une et l'autre conservées : ça va faire deux grandeurs conservées au lieu d'une. Et rien ne nous empêche de recommencer l'action du groupe, d'en trouver une troisième ; etc.

Il ne faut rien exagérer : les grandeurs qu'on découvrira ainsi ne seront plus nouvelles après quelques essais. Ce qu'on obtient en exploitant à fond cette méthode, c'est trois grandeurs indépendantes, chacune conservée : *énergie*, *masse* et *impulsion* ([1]).

Qu'est-ce que c'est, la masse, l'impulsion ?

- La masse, *c'est ce que chacun appelle* « le poids » ; ça se mesure avec une balance ; notion familière.
- *L'impulsion,* en gros, c'est « l'élan ». Cette grandeur a été étudiée dès le XV[ième] siècle sous le nom d' « *impetus* » par Jean Buridan.

Masse et impulsion ne sont pas des notions si évidentes ; à partir de la physique d'Aristote, il a fallu des millénaires pour que les physiciens arrivent à les identifier.
Ici tout semble clair, parce qu'il y a une définition précise, géométrique, pour chacune de ces grandeurs, et que chacune permet de faire des bilans. Ainsi la *somme* des impulsions de plusieurs corps ne change pas quand ces corps se choquent. ✯

Chacun peut découvrir par la seule pensée ce qui se passe dans un cas simple. Imaginons : une sphère est lancée droit sur une sphère identique et immobile dans l'espace. Que se passe-t-il après le choc ? Eh bien la première sphère s'arrête, c'est la seconde qui s'en va, avec la vitesse de la première (vous pouvez essayer simplement avec deux pièces de monnaie qui glissent sur une table).

Oui, mais pourquoi ?

Lisons Huygens, qui met en scène le bateau de Bruno : " Imaginons un navire transporté le long de la rive par le courant d'un fleuve. " … Le passager … " fait choquer deux sphères égales, animées par rapport à lui-même et au navire de vitesses égales et opposées ".

---

1 Le détail est indiqué dans la clé 5.

Vous devinez la suite : les deux sphères vont rebondir l'une sur l'autre, avec la même vitesse qu'avant le choc (conservation de l'énergie dans le bateau). Voilà ce que verra le passager. Et l'observateur sur la rive ? Si la vitesse de chaque boule est justement celle du navire, il verra d'abord l'une des sphères immobile, et l'autre animée de la vitesse double. À l'instant du choc, elles échangeront ces rôles : précisément ce qu'il fallait démontrer.

Mais si cet effort de raisonnement « relativiste » vous paraît fatigant, sachez que vous pouvez vous en dispenser : Huygens l'a fait pour vous ([1]), il en a déduit l'impulsion et le principe de sa conservation, et il vous suffit d'utiliser ce principe.

il passe en tournoyant

Une planète tourne autour du Soleil.

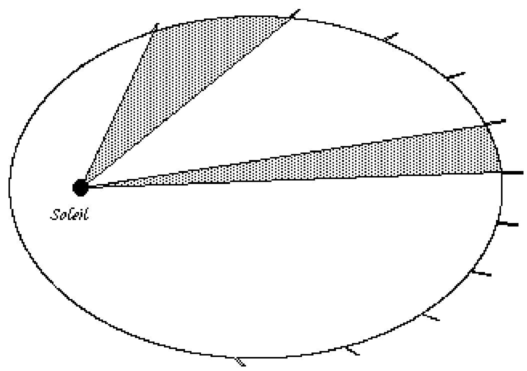


Figure 16. Course d'un astre

Elle va vite lorsqu'elle est près du Soleil, lentement lorsqu'elle est loin. Cela se voit sur la figure, cochée à intervalles de temps égaux ([2]).

Un gymnaste fait un triple saut périlleux. Il s'est mis en boule, il tourne très vite. Mais il lui suffit d'allonger son corps pour ralentir instantanément sa rotation, avant même de retomber sur ses pieds.

Entre le saut de l'acrobate et la course de la planète Mars existe une parenté secrète : la stricte conservation d'un objet nouveau que nous appellerons

tournoiement.

Comme impulsion, masse, ou énergie, le tournoiement ([3]). est objet de bilan ; il ne peut ni apparaître, ni disparaître, seulement se transférer d'une chose à l'autre. Règle absolue.

1 "De motu corporum ex percussione", 1700 (posthume) ; la difficulté est de concevoir l'impulsion comme un objet « vectoriel », qui se transmet « vectoriellement » lors des collisions. Les premiers travaux de Huygens sur ce sujet datent de 1654 ; on raconte qu'il en avait discuté dès l'âge de quinze ans avec un ami de son père, René Descartes.

2 Les aires des zones dessinées en gris sur la figure 16 sont égales : c'est la deuxième loi de Johannes Kepler (Astronomia Nova, 1609).

3 « Tournoiement » est la traduction littérale du mot anglais « spin ». Dans ce livre, nous l'avons préféré à la terminologie officielle, hésitante : « moment cinétique » ou « moment angulaire ». C'est une notion qui s'est constituée progressivement, depuis Kepler et Newton jusqu'à Daniel Bernoulli et Patrick d'Arcy (1747). Pour une définition précise, voir les clés 5 et 6.

Le bateau de Bruno va permettre une nouvelle découverte : le tournoiement d'une chose à terre change si son mouvement est embarqué sur le bateau ; et l'ampleur de ce changement se mesure avec un nouvel objet de bilan : le ***passage*** ([1]).

Qu'est-ce que c'est que ça ? c'est ce qui vous empêche de bouger sans faire bouger quelque chose dans l'autre sens : échange de passage entre cette chose et vous.

Un exemple : vous êtes assis à l'arrière d'un avion en vol, et on vous invite à passer à l'avant. Vous ne passerez qu'en empruntant un peu de passage à l'appareil ; cela lui fera perdre un bon centimètre sur son plan de vol.

C'est la conservation du passage qui permet d'établir la règle suivante : Si une chose est libre dans l'espace, son *centre de gravité* ([2]) se déplace en ligne droite, à vitesse constante, dans la direction de l'impulsion ([3]).

Quand une fusée explose dans l'espace, le centre de gravité, imperturbable, ne s'aperçoit de rien et continue son petit bonhomme de chemin ([4]).

matérialisme idéal

Est-ce que ça va durer longtemps, ce défilé de principes ?

Récapitulons ce que nous venons d'apprendre, en donnant un nom collectif à tous ces objets conservés ; nous dirons ***le moment*** ; ce moment, nous l'écrirons ***J*** :

J =(**énergie, masse, impulsion, passage, tournoiement**).

Chaque mouvement de chaque chose possède son moment ([5]), et le seul avatar qui puisse survenir au moment, c'est de se transférer partiellement d'une chose à l'autre.

Rien ne peut le faire apparaître ou disparaître. C'est ainsi qu'on peut mesurer le moment, mesurer chacun des constituants de cet objet composite ([6]).

Voici quelqu'un de très sérieux, un physicien qui aime se poser les questions essentielles : accompagnons-le.

Il a choisi une chose en mouvement; *mouvement* dont le *moment* vaut ***J***. Il cherche à exploiter une fois encore le raisonnement « relativiste » de Huygens : il fait donc agir un élément *g* du groupe de Galilée ; nouveau mouvement, nouveau moment ***J'***. Il étudie consciencieusement la situation, et parvient finalement à écrire une *grosse formule* qui lui permet de calculer ***J'*** au moyen de *g* et de ***J*** .

---

1 Défini dans la clé 5. Ce bilan conservé n'a pas reçu de nom officiel ; il faut donc utiliser un néologisme. La preuve que ça existe : en bateau comme en avion, le passage est payant.

2 Ce « centre de gravité » a été utilisé par Archimède au III[ème] siècle avant JC.

3 Si l'impulsion est nulle, le centre de gravité est immobile.

4 Bien entendu, une fusée n'est pas tout à fait libre, elle reste soumise à l'attraction de la Terre et du Soleil, qui perturbe lentement le mouvement du centre de gravité en transférant du passage à la fusée.

5 Attention ! ce moment-là n'a rien à voir avec un « instant ». Le mot « moment », utilisé dès 1765, se rattache au latin « *movimentum* » qui signifie *mouvement*. La relation fondamentale entre « moment » et « mouvement » sera étudiée dans *la source et les ombres*, (p. 74).
Nous avions déjà parlé de « moments » (p. 38) ; le lien entre ces deux acceptions est assez subtil… (voir les pages rouges).

6 En prélevant une partie du moment de la chose et en la transférant sur l'instrument de mesure.

Et en plus, notre physicien découvre que sa formule est universelle ! Il l'avait établie en pensant à *une* chose. Or il s'aperçoit qu'elle est vraie pour *toutes* les choses ; pour *tous les mouvements de toutes les choses* . Il s'écrie :

énergie de l'atome,
masse de la planète,
impulsion du javelot,
passage de l'hirondelle,
tournoiement de la Galaxie :

une même règle vous unit…

Cette règle à laquelle se soumet toute matière, c'est le *statut de la matérialité*, une loi première de la physique ([1]).

Encore secoué par toutes ces nouveautés, notre physicien éprouve le besoin d'en discuter posément. Des formules comme celle-là, où il y a à la fois un groupe et un objet qui change, ça lui rappelle quelque chose. Oui, une conversation l'autre jour avec un mathématicien. Le voici justement à la table voisine, devant un petit café.

— " Dis moi, collègue, je crois bien que je viens de découvrir une nouvelle action du groupe de Galilée. Regarde un peu ma formule. "

— MATH. , après inspection : " Mais c'est que tu as raison ; c'est très précisément ce que nous appelons une *action de groupe* ([2]) ; tu as bien découvert un nouvel espace géométrique. "

— PHYS. " Oui, c'est ***l'espace des moments***, qui participe à la géométrie universelle de la matière. Il a sûrement quelque chose de fondamental, même pour un mathématicien pur ? "

— MATH. : " Attends un peu ; effectivement, il me semble que je la reconnais. Voyons … Oui, les *moments*, ce sont des objets géométriques que nous connaissons bien, qui sont définis sur des groupes. Et chaque fois, le groupe agit sur ses moments, créant ainsi un *nouvel espace géométrique*…

— PHYS. Bravo ! tu viens de découvrir cet espace que nous connaissions si bien… ✯

Pour le mathématicien, ***J*** est simple géométrie, *idée* pure. Pour le physicien, ***J*** représente la matière, traquée dans ce qu'elle a de plus *matériel.*

Leur dialogue pourrait-il produire un « matérialisme idéal »?

Ils parlent d'un même objet ***J*** , mais ils y pensent différemment.

Chez le physicien, praticien de la matière, le moment ***J***, symbole de la « ***matérialité*** », est associé fidèlement, *comme une ombre*, au *mouvement* de chaque chose.

---

1 Clé 5. Cette formule universelle est certainement écrite dans tous les bons traités de mécanique et de physique ? Eh bien non, elle est rarement écrite… Pourquoi ? Intéressant problème épistémologique.

2 Voir *à l'action*, p. 25, ou *clé* 2.

J permet des bilans : quand deux choses se rencontrent, elles mettent en commun leurs moments. Si elles se séparent à nouveau, elles peuvent en avoir échangé une partie.

Ce n'est pas du marivaudage : c'est la règle qui régit les collisions de particules provoquées par les grandes machines qu'on appelle « accélérateurs » ([1]).

Et c'est aussi la règle des *désintégrations* : si une particule explose, les particules-filles se partagent le moment de la particule-mère. Ainsi, en 1931, on avait observé une désintégration dont le bilan semblait déséquilibré ([2]) : Wolfgang Pauli et Enrico Fermi ont su conjecturer qu'il existait une particule-fille qui s'était échappée sans être détectée par les instruments.

De quoi avait-elle l'air, cette mystérieuse particule ? si inconnue soit-elle, *elle devait se conformer au statut universel de la matérialité* ; son moment à elle, ce ne pouvait être que le moment apparemment perdu lors de la réaction. Et avec ce moment-là, on pouvait la reconstruire.

Cette particule indétectable et cependant mesurée, découverte « en creux » comme un fossile absent, Fermi l'a nommée *neutrino*. L'avenir lui a donné raison : aujourd'hui on sait observer les neutrinos ([3]).

De son côté, le mathématicien voit le moment comme un objet géométrique associé à chaque groupe. Ainsi le moment ***J*** qui paraît si matériel à son collègue, ce n'est qu'une vertu géométrique du groupe de Galilée ; la formule si puissante du physicien, elle était déjà inscrite dans le groupe, il suffisait de savoir la lire.

Le mathématicien sait aussi que les moments sont doués d'une propriété héréditaire fort précieuse : un moment d'un groupe engendre *un moment de chaque sous-groupe*.

Voici des exemples :

*Le **passage**, c'est la part du moment qui vient du groupe de Bruno ;*

*le **tournoiement** concerne les rotations ;*

***l'impulsion** provient des translations ;*

et c'est le groupe Chronos ([4]) *qui produit **l'énergie**.*

---

1 Le plus grand accélérateur de particules est celui du CERN (Centre Européen de Recherches Nucléaires, un nom destiné à faire croire aux responsables politiques qu'on y fait effectivement de la physique nucléaire). C'est la seule machine qui fasse près de 10 kilomètres de diamètre ; elle s'étend entre la France et la Suisse, près de Genève, sous le Jura.

2 La « *radioactivité bêta* ».

3 Mais ils restent difficiles à détecter : à chaque seconde, des milliers de milliards de neutrinos, échappés il y a dix minutes du centre du Soleil, traversent votre corps sans vous faire ni chaud ni froid. À minuit comme à midi, la Terre entière ne vous en abrite pas.

4 Attention ! Quand on change de séjour, on change de Chronos (voir p. 50); on change donc aussi d'énergie…. Vous voyagez en train, et vous faites un geste. Ce geste a donc deux énergies différentes : celle que vous avez déployée dans le train ; et celle que peut constater une observatrice qui séjourne dans un pré voisin.

La voilà enfin, la **géométrie de l'énergie** : chaque fois que vous direz *énergie*, vous saurez qu'il ne s'agit que d'un aspect partiel d'un objet géométrique « absolu » : *le* ***moment***.

LA BOUTIQUE AUX ATOMES

pureté

Armés de cette géométrie du moment, essayons de faire comme Démocrite ou Platon, de concevoir par la pensée pure les Atomes, les Éléments ; en termes contemporains, les « *particules élémentaires* ».

« A-tome » = « qui ne peut pas se couper » ; on pense à des *points* — qu'on déclarera « *matériels* ». Mais la matérialité, nous savons maintenant que c'est le *moment*. N'essayons plus de nous représenter une particule comme *un objet infiniment petit*, mais plutôt comme ***un élément pur*** *de cette matérialité*.

Une ***particule élémentaire***, ce sera donc ***un moment pur***.

Pensez donc à « *un électron* ».

Alors, « un autre électron », ce sera ***quoi*** ?

Eh bien ce sera unmoment *de la même famille,* juste comme nous le disent les grammairiens ([1]).

Le géomètre sait classer ces familles-là ; il peut donc les proposer aux physiciens comme :

modèles de particules.

ce modèle vous plaît ?

Qu'il classe les cristaux ou les particules, le théoricien est comme un bottier possédant des chaussures de toutes les pointures, et qui attend les clients.

Sa collection est riche, probablement toutes ses chaussures ne serviront pas — mais il se sent capable de chausser tous ceux qui se présenteront.

Ici, les chaussures, ce sont des *espèces de moments,* soigneusement rangées dans des tiroirs, et étiquetées.

Écoutons ce qui se dit dans la boutique.

Arrive un client, goûts classiques, qui désire seulement un « point matériel ».

— Bien sûr, nous avons ça. *Dimension 6* . Quelle masse voulez-vous ?

— ………

1 *l'origine des espèces*, (p. 29).

—Eh bien j'ai exactement ce qu'il vous faut. Voici. "

— Et l'énergie ? "

— Cinétique, Monsieur, seulement cinétique. Je vous vends un modèle au repos, vous le lancez comme vous voulez ; ça lui donnera l'énergie qui vous conviendra. Et aussi l'impulsion, et tout le reste. " ([1])

Voici maintenant une cliente élégante.

— J'ai vu dans votre vitrine un modèle chic. Celui-ci. "

— Regardons les étiquettes : « *spin* » : ½; *« masse »*: 0.511*MeV* ; « *dimension de l'espèce »* : 8. ✯

— Tout à fait ce qu'il vous faut, Madame ; c'est le modèle *électron*. "

— J'achète. "

Qu'est-ce que le *spin* ? Un *tournoiement* que possède la particule.

Une toupie possède aussi un tournoiement ; mais la toupie est un objet composé, dont les points tournent effectivement autour du centre ; le tournoiement de la toupie varie avec sa vitesse de rotation.

Au contraire, dans une « particule élémentaire », il n'y a rien qui tourne ; ce qui n'empêche pas la particule de posséder un tournoiement. Tournoiement dont l'intensité est fixe : c'est ce que prouve la géométrie (clé 5) ; particule à prendre toute faite dans la boutique, au même titre que le point matériel. Historiquement, c'est l'expérience qui a fait découvrir ce tournoiement inattendu et paradoxal.

Certains bons esprits s'étaient cependant déjà rendu compte que le point matériel est tout aussi paradoxal — en ce sens qu'il ne peut jamais posséder de tournoiement autour de son centre.

Paradoxes qui nous enseignent que ces particules ne sont pas des billes. Que nous devons renoncer à retrouver dans les éléments un simple modèle réduit des objets familiers — puisque ces objets-là ne sont pas élémentaires.

Hélas, le bottier-géomètre n'arrive pas à vendre certains modèles bizarres ([2]) ; en particulier aucune de ses particules de masse négative : apparemment la Nature n'en veut pas.

---

1 *clé* 5.

2 Il s'est trouvé un jour un acheteur pour payer très cher des « particules de spin 1/3 » ; le vendeur n'était pas un géomètre, mais un illusionniste qui avait réussi à convaincre les responsables d'une grande entreprise que ses particules traversaient les obstacles les plus épais, et pouvaient servir à la prospection du pétrole.

QUE LA LUMIÈRE SOIT

sucreries

Vous aussi, vous pénétrez dans la boutique. Enhardi(e) par l'aspect engageant des rayons, vous osez demander au vendeur :
— Auriez-vous des Atomes de Lumière ? "

En effet, vous avez lu dans Newton que la lumière est constituée de petites particules qui viennent frapper l'œil ([1]).

— Des atomes de lumière ? mais certainement. Nous les appelons *photons.* Nous en avons de pleins tiroirs. *Masse :* zéro ; *spin*, voyons … oui, spin 1. Et de toutes les *couleurs* que vous voudrez : vert, jaune, rouge, infra-rouge, ultra-violet, X, gamma, radio, micro-onde …"

Vous ne pouvez plus le faire taire. Au fond de vous-même, vous êtes satisfait(e), parce que Newton a montré, en utilisant le prisme, que la lumière ordinaire était composée de lumières distinctes, *indécomposables*, chacune caractérisée par sa couleur. Mais vous êtes exigeant(e), et vous demandez encore une précision :

— Et comment reconnaissez-vous la couleur d'un photon ? "

— Tout simple, par sa *longueur d'onde*. Elle est indiquée sur l'étiquette. "

Vous êtes de plus en plus content(e), parce que Newton a expliqué que chaque particule de lumière avance en subissant des « accès » successifs, équidistants les uns des autres. Il y a une distance définie pour chaque couleur, elle se mesure avec une belle expérience d'optique, les « anneaux de Newton ». C'est sûrement ça, la longueur d'onde. Mais il insiste :

— … et en plus, pour chaque photon, nous avons la paire : droite et gauche. "

Tout de même pas comme des chaussures, pensez-vous ? Mais si, ça vous revient, la lumière peut effectivement être « *polarisée* » à droite ou à gauche ([2]).

---

1 Communication à la Royal Society, 8 février 1672. En opposition, la théorie de Huygens sera « ondulatoire » (Traité de la Lumière, 1690). Opposition qui a duré fort longtemps.

2 p. 40.

Est-ce qu'il n'y a pas une histoire d'eau sucrée, à ce propos ? Oui, voilà : un photon gauche et un photon droit ne sont pas réfractés de la même façon par l'eau sucrée. Pourquoi ? Parce que le sucre « naturel », fabriqué par les plantes, est « *gauche* ». Les chimistes savent fabriquer un sucre « *droit* », mais celui-ci n'a ni saveur, ni valeur nutritive ([1]).

Tout va bien. Une dernière question, rien que pour la forme, avant d'acheter :

— Et elle va vite, votre lumière ? "

— Alors là, vous allez être satisfait(e). Mes photons ont une vitesse infinie ; *rigoureusement infinie*. "

révolution nécessaire ...

Là, il en fait un peu trop, ce géomètre. Vous avez lu dans Huygens que la lumière ne va guère que six cents mille fois plus vite que le son ([2]). Et vous avez un souvenir scolaire : la vitesse de la lumière, *c*, est de trois cent mille kilomètres par seconde ([3]). Vous le lui dites.

Le vendeur-géomètre est perplexe :
— Mais Madame-ou-Monsieur, ça n'est pas possible. Si c'était ça, il suffirait d'une transformation de Bruno pour immobiliser la lumière. Et qui a jamais vu *de la lumière arrêtée* ? "
— C'est votre affaire ; il y a déjà longtemps qu'on mesure la vitesse de la lumière, et on a toujours trouvé la même valeur pour *c*. Débrouillez-vous, votre modèle n'est pas au point. "

Soliloque de géomètre :
" Il n'y a qu'une chose à faire : modifier les transformations de Bruno. Et il va falloir y fourrer *c*. Comment faire ? " Il paraît soudain frappé par la foudre :
" Oui, mais alors le groupe de Galilée est cassé ! Il va falloir y renoncer. Je veux bien renoncer à tout, mais pas au groupe, tout de même.

Une seule chose à faire, ***changer de groupe*** ! Espérons que ça va marcher… "

Puis, s'adressant à vous :
— Je ferme boutique pour réfléchir. Repassez dans quelque temps, je pourrai sans doute vous proposer des photons qui vous conviendront. "

---

1 Certains ont rêvé d'entrer dans le monde inversé que l'on aperçoit dans les miroirs. Cette audace serait punie de mort : mort de faim.

2 " Ce qui est tout autre chose que d'être instantanée, puisqu'il y a la même différence que d'une chose finie à une infinie" (*Traité de la lumière*). Huygens commente les découvertes de Ole Römer sur les mouvements des satellites de Jupiter.

3 Valeur officielle : c = 299 792 458 mètres par seconde. Et pourquoi cette lettre *c* ? c'est l'initiale du mot *célérité*.

EINSTEIN EST ARRIVÉ

nouvelle relativité

Eh bien il existe un nouveau groupe qui permet à la lumière de se propager en toutes circonstances à la vitesse *c* — en préservant les principales vertus du groupe de Galilée : il contient les déplacements classiques de l'espace et du temps ([1]).

Il s'appelle ***groupe de Poincaré*** ([2]) ; il produit une ***nouvelle géométrie de l'Univers***.

Ce groupe devra donc agir, non seulement sur l'espace-temps, mais aussi sur la matière ; et la nouvelle matérialité sera faite des moments du nouveau groupe.

Nouvelle géométrie qu'on appelle ***théorie de la relativité d'Einstein*** ([3]).

Mais Einstein ne pratiquait guère la théorie des groupes, et c'est plutôt par intuition que par déduction-induction qu'il travaillait.Expliquant sa propre théorie, il supposait une intuition analogue chez ses lecteurs, ce qui n'allait pas sans peine ; et le flou conceptuel de ses propos n'a pas facilité leur adoption par les milieux scientifiques ([4]).

Mais ce flou même a eu un résultat inverse sur un public plus large. La Relativité Nouvelle a connu sa période de popularité : après la guerre mondiale de 1914-1918, elle semblait donner à la pensée une nouvelle liberté. Le paradoxe était désormais non seulement permis, mais encouragé et nécessaire ; la sagesse revêtait les habits de la folie.

Deux dates à rapprocher : prix Nobel d'Einstein : 1921 ; Manifeste du Surréalisme (André Breton) : 1924. Mais les principaux obstacles à l'adoption de cette relativité étaient plus profonds. Déjà le groupe de Galilée avait relativisé l'espace ; le groupe de Poincaré relativise le temps comme l'espace : chaque véhicule a non seulement son *espace* propre, mais aussi son *temps propre :* symptôme majeur de la nouvelle géométrie.

Cet effet, on l'appelle *paradoxe des jumeaux*. L'un des jumeaux reste sur Terre, l'autre fait un voyage aller et retour en fusée en atteignant une vitesse proche de celle de la lumière. Quand ils se retrouvent, ils ont des âges différents — très différents même (15 ans et 100 ans par exemple ; c'est celui qui est parti qui a le moins vieilli).

Paradoxe que ne pouvaient supporter des penseurs tels que Bergson ou Jankélévitch, mais auquel la physique ne laisse aucune échappatoire.

---

1 Plus précisément : il contient le *groupe d'Aristote* (*recommencer*, p. 42-43).

2 Définition précise dans la clé 7. Il a été construit à partir de1904 par Hendrik Lorentz et Henri Poincaré.

3 Albert Einstein a exposé les prémisses de cette géométrie dans un article célèbre, "Sur l'électrodynamique des corps en mouvement ", 1905.

4 Henri Poincaré avait esquissé avant Einstein les bases de cette nouvelle géométrie.

Encore plus de flou dans l'expression initiale de la deuxième relativité d'Einstein, dite "*Relativité générale*"; nous l'examinerons au chapitre VI .

le choc des géométries

Paradoxe, mais pas contradiction : dans la relativité d'Einstein comme dans celle de Galilée, la cohérence est assurée de la même façon — *grâce à un groupe* : les « axiomes » du petit carnet de Félix sont faits exprès pour ça ([1]).

Mais les deux groupes (Galilée, Poincaré) sont incompatibles ; l'un au plus peut décrire la nature, il faut choisir. Comment ? C'est une question que l'expérience seule peut trancher — et pas la sensibilité kantienne.

L'expérience n'est significative que dans des circonstances bien déterminées : mesures extrêmement précises, ou encore vitesses proches de celle de la lumière ; mais toutes ces expériences se prononcent en faveur de la relativité d'Einstein-Poincaré.

Un exemple : le temps propre des jumeaux a été mesuré directement. Pas dans les conditions que nous avons indiquées ci-dessus, qui sont impossibles à réaliser techniquement ([2]) ; les jumeaux, ou plutôt les jumelles, c'étaient des *horloges atomiques*.

L'une est restée dans son laboratoire ; l'autre est partie avec un physicien et a accompli le tour du monde le plus rapide possible sur les lignes régulières (avec deux billets ; une horloge atomique, c'était assez encombrant). Au retour, les horloges différaient de quelques milliardièmes de seconde — juste comme le prévoyait la relativité d'Einstein. Même vérification avec un tour du monde dans l'autre sens — le résultat étant un peu différent à cause de la rotation de la Terre.

Nous sommes dans une situation typique : nous venons de contester le modèle « classique » de la matière, et nous envisageons de le remplacer par le modèle « relativiste ».

Si le précédent modèle n'était pas si mauvais, et si le nouveau est encore meilleur, ils doivent se ressembler. Or chacun des modèles est « mathématique » ; nous devons donc être capables de comprendre comment deux descriptions mathématiques exclusives l'une de l'autre peuvent se « ressembler ». La grammaire de la nature est ici au banc d'essai.

Ce qui a disparu dans la nouvelle relativité, ce sont les *transformations de Bruno* : elles sont remplacées par les « *transformations de Lorentz* » (fig. 17). Qu'est-ce que c'est que ça, une « *transformation de Lorentz* » ?

---

1 *à l'action*, pp. 25-26.

2 Pour produire un décalage temporel d'un siècle, il suffit qu'une fusée maintienne pendant cinq ans une accélération voisine de celle de la pesanteur ; très supportable par le passager, mais très difficile pour le constructeur : dans les meilleures conditions théoriques (propulsion photonique alimentée par annihilation matière-antimatière), il faudrait une énergie au départ proche de la production mondiale des dix mille prochaines années…

C'est la nouvelle description de ce qui se passe quand on embarque dans un honnête véhicule : le bateau de Bruno, Galilée ou Gassendi, par exemple ([1]). Et comment s'écrivent-elles, ces transformations de Lorentz ? Par des formules horribles, pleines de racines carrées, où la vitesse de la lumière c intervient partout ([2]).

Est-ce qu'elle forment un groupe ? même pas… Les honnêtes gens sont scandalisés : où est passée la saine sensibilité que Kant nous avait accordée ?

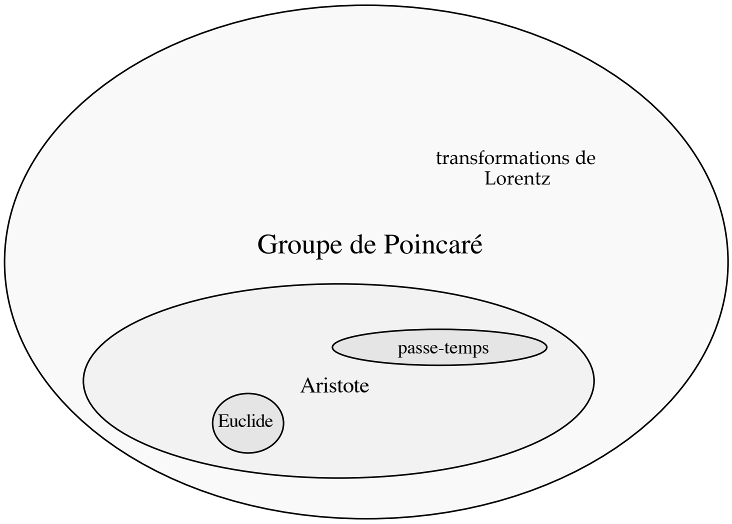


Figure 17. Groupe de Poincaré ([3])

Dans ces formules suspectes, on croit lire des choses bizarres. Par exemple une contraction que doit subir le bateau du seul fait qu'il est en mouvement : ça s'appelle la « *contraction de Lorentz* ». On y lit aussi que la vitesse du bateau ne peut jamais atteindre celle de la lumière.

Ces affirmations mêlent le vrai et le faux.

- Vrai : le bateau sera toujours distancé par la lumière ; même s'il va « avec toute la vitesse et la force possibles », elle fuira toujours devant lui — et derrière lui — avec la même et inexorable vitesse ; la nouvelle relativité est faite pour ça.
- Faux : la « contraction de Lorentz », c'est une simple sottise ([4]) : la relativité exprime justement le principe selon lequel la nature ne fournit aucun moyen de détecter le « mouvement absolu » d'un véhicule.

D'où proviennent ces erreurs ? du fait que les questions sur le mouvement ne peuvent plus se poser exactement de la même façon qu'avant.
Observons la galère de Gassendi : la vitesse que le Capitaine de la galère pense avoir obtenue, et qu'il mesure en comptant le temps qu'il met à parcourir le Vieux Port, *rien ne la limite* que l'ardeur de ses braves galériens.

1 pp. 46-47.
2 Ces formules ont été esquissées pour la première fois en 1887 par Waldemar Voigt pour interpréter le résultat des expériences de Michelson et Morley, puis précisées par Henrik Lorentz. Leur forme classique a été proposée par Poincaré, qui les a aussi nommées. Elles sont contenues dans une formule de la clé 7 ; au chapitre VI, nous les verrons apparaître comme le fruit d'une construction géométrique directe.
3 Comparer avec la figure 15, p. 48. Même groupe d'Aristote dans les deux cas. Une comparaison détaillée des deux groupes se trouve dans la clé 7.
4 En 1872, Lorentz l'avait envisagée pour interpréter les expériences de Michelson. La sottise, c'est d'y croire encore après 1905.

Mais pensons à son frère jumeau, le Capitaine du port; il est resté sur le quai, et il calcule la vitesse de la galère en consultant son chronomètre. Chacun des jumeaux utilise son propre temps, son « temps propre » ; par conséquent ils vont évaluer différemment la vitesse de la galère ; et ce n'est que la valeur calculée sur le quai qui sera obligatoirement inférieure à celle de la lumière.

L'art d'évaluer les vitesses est devenu plus délicat ([1]).

Pendant des décennies bien des braves gens, ingénieurs retraités par exemple, se sont acharnés à trouver une erreur dans les formules de Lorentz. Il suffisait d'une faute d'impression dans un ouvrage de vulgarisation. Peine perdue. Deux remarques lavent ces formules de tout soupçon d'incohérence :

- Les composées des transformations de Lorentz et des transformations d'Aristote forment bien un groupe, le groupe de Poincaré. Puisqu'il y a groupe, il y a géométrie, le modèle est cohérent. ✯
- Supposons que la vitesse de la galère de Gassendi soit beaucoup plus petite que celle de la lumière — ce qui est habituel chez les galères ([2]). Si nous exploitons les formules de Lorentz et les formules correspondantes de Bruno, nous constaterons qu'elles donnent des résultats pratiquement indiscernables : « au millionième de millionième près », même dans le cas d'un avion supersonique.

Deux géométries donc, chacune cohérente,
qui donnent le même résultat pour la vie courante.

$$E = mc^2$$

Examinons maintenant comment les modèles rivaux (Galilée, Poincaré) vont décrire la *matière*.

La matérialité, en géométrie galiléenne, nous l'avons caractérisée par un objet $\boldsymbol{J}$, qui est un *moment* associé au groupe de Galilée ([3]).

Comment décrire la matérialité avec le groupe de Poincaré ? Rien de plus facile : vous vous souvenez que les mathématiques fournissent, obligeamment, *des moments pour chaque groupe*. Comme nous l'avons déjà indiqué, il suffira d'utiliser les moments du groupe de Poincaré.

Mais un moment du groupe de Galilée et un moment du groupe de Poincaré, ce sont deux objets appartenant à des espaces différents ; comment reconnaître dans le nouveau moment les grandeurs avec lesquelles nous travaillons déjà ?

---

1 Les formules exactes sont dans la clé 7 . Elles vous permettront de répondre à la question suivante : est-il vrai que la vitesse d'un vaisseau spatial soit limitée par celle de la lumière ? Là aussi deux réponses — compatibles l'une et l'autre avec le fait qu'un vaisseau spatial ne possède pas de compteur de vitesse. Pendant que vous y serez, vous pourrez aussi étudier le problème suivant : après la course marseillaise, quand ils se retrouvent devant leur apéritif, quel est l'âge *relatif* des capitaines ?

2 La lumière file pas loin de six cent millions de nœuds…

3 Voir p.60.

Le physicien, aidé par le géomètre, arrive à faire la traduction ; mais l'usage de cette traduction requiert une certaine vigilance ([1]).

Nous n'écrirons ici qu'un extrait de cette traduction ; c'est :**E = m c** $^{\mathbf{2}}$, la célèbre formule d'Einstein ([2]) qui relie

l'énergie relativiste E et la ***masse classique m*** .

Elle est expliquée dans la clé 7. Que signifie-t-elle ? Elle donne une nouvelle interprétation de cette mystérieuse « *masse* » : c'est de *l'énergie stockée* ; énergie qui peut désormais se mesurer avec une balance.

Beaucoup d'énergie : le taux de change entre masse et énergie est écrit dans la formule : c'est c^2 , le carré de la vitesse de la lumière. C'est tellement gros que c'est difficile à concevoir.

Mais ça marche : voici deux exemples.

- Quand on a été en mesure d'observer de quoi était fait le Soleil, on y a retrouvé les mêmes matériaux que sur Terre — à l'exception d'un corps nouveau, qu'on a donc baptisé *hélium* (« hélios » = « soleil »). On a fini par en trouver un peu sur Terre. Le noyau d'un atome d'hélium pèse quatre fois plus qu'un noyau d'hydrogène : on peut envisager que l'hélium se soit formé dans le Soleil, quatre atomes d'hydrogène se fondant en un atome d'hélium.

  Mais un noyau d'hélium est un petit peu plus léger que quatre noyaux d'hydrogène ; il faut en tenir compte dans le *bilan* ; quand se produit la fusion de l'hydrogène en hélium, un peu de masse doit s'échapper. Un peu de masse, c'est à dire pas mal d'énergie (n'oublions pas c^2). **Voilà pourquoi le Soleil brille — et les étoiles.**
- Pesons donc les atomes, avec soin. Le noyau d'un gros atome peut se fendre, et les morceaux pèsent au total un peu moins que le noyau initial. Bilan favorable, voilà de l'énergie disponible. « Nucleus » = « noyau » :

voici l'*énergie nucléaire*.

Bien sûr, la formule d'Einstein ne suffit pas pour construire directement une bombe ou une centrale nucléaire ; mais elle indique le point de départ ; et, très précisément, l'énergie disponible. Exemple typique de prédiction produite par un modèle théorique et confirmée par l'expérience.

---

1 Clé 7 . Exemple de piège : on affirme souvent qu'en Relativité d'Einstein, " la masse des objets augmente avec leur vitesse ". Essayez donc de le vérifier : empruntez le kilogramme-étalon qui somnole à Sèvres, embarquez-le avec vous dans une fusée qui s'éloigne de la Terre à 99 % de la vitesse de la lumière, et faites dessus toutes les mesures de masse que vous voudrez : eh bien vous trouverez encore un kilo tout juste.

2 Le taux de conversion entre masse et énergie a été établi dès 1900 par Poincaré — dans le cas des relations entre matière et rayonnement. Dans une brève note de 1905, Einstein s'est contenté d'affirmer le caractère universel de cette relation.

la nouvelle collection

La nouvelle relativité va permettre d'autres prédictions : les modèles de particules, qui sont des « *familles de moments du groupe de Galilée* » (p. 63), vont être remplacés par des familles de moments du groupe de Poincaré. Tout simplement.
La Boutique aux Atomes vient de rouvrir, sens dessus dessous ; des tiroirs sont mélangés, certains condamnés ; de nouvelles étiquettes partout.

- Le *point matériel* est toujours là ; en le lançant, on peut toujours lui communiquer autant d'énergie (« *cinétique* ») que l'on veut ; mais sa vitesse reste toujours inférieure à celle de la lumière.
- Même chose pour *l'électron*. C'est comme ça, le géomètre l'a dit. Encore une prédiction réalisée : dans les accélérateurs de particules, on peut communiquer une énergie relativement énorme à un électron ; les vitesses obtenues approchent de très près celle de la lumière, mais elles ne l'ont jamais atteinte.
- Des objets énigmatiques s'entassent encore dans cette boutique. Non seulement les *particules de masse négative* que nous y avions déjà rencontrées, mais aussi une catégorie nouvelle : des particules qui ne savent aller que plus vite que la lumière, et parfois à vitesse infinie. Elles s'appellent « tachyons » (« tachys » = « rapide ») et elles posent quelques problèmes : elles vont si vite qu'on ne sait même pas si elles ne vont pas arriver avant d'être parties. Ce n'est pas une plaisanterie : un tachyon émis par Monsieur A et reçu par Monsieur B, c'est aussi bien B qui l'a émis et A qui l'a reçu. Ainsi le veut la géométrie.

Inutile pour l'instant de se casser la tête au sujet des tachyons : les expériences où quelques physiciens pensent avoir observé des tachyons n'ont pas franchi l'obstacle de la reproductibilité ; tout au moins dans l'opinion de la communauté physicienne.

couleurs des fruits mûrs

Et le *photon,* est-il satisfaisant maintenant ? Il a gardé sa ressemblance avec la lumière que nous connaissons, comme la caractérisation d'une couleur par une longueur d'onde ([1]) ; mais il y a un petit changement.

Maintenant, *l'énergie* du photon est strictement liée à sa *couleur*. Très intéressante, cette propriété du photon, parce que c'est elle qui nous permet de *voir*. Et qu'elle puisse être vue, c'est l'une des choses que nous savons de la lumière… ✯

Comment pouvons-nous voir ? parce que la rétine est pourvue de cellules sensibles à l'énergie des photons qu'elles reçoivent. Nous avons même plusieurs types de cellules, sensibles à des énergies différentes : c'est ainsi que nous distinguons les couleurs ([2]).

---

1 Et aussi la polarisation à droite ou à gauche.

2 Les photons d'énergie trop élevée (« ultra-violets ») ou trop basse (« infra-rouges ») ne sont pas vus. Parmi les ultra-violets : les « rayons X » de la radioscopie et les « rayons gamma » : ceux qui stérilisent les plats cuisinés industriels, ceux qu'émet la bombe atomique, ceux qui servent à la radiothérapie. Parmi les infra-rouges : ceux qui chauffent la nourriture dans un four, ordinaire ou micro-onde, ceux que produit un émetteur de télévision ou un téléphone portable.

Ainsi voient les couleurs les mammifères mangeurs de fruits (nous, par exemple, et nos cousins les primates), et aussi les abeilles. La couleur, c'est un mode de communication entre les végétaux et les animaux qui s'en nourrissent ; les couleurs vives des fleurs sont des indications pour les insectes qui vont y butiner ; en échange ces insectes se chargent de la pollinisation, participent à la reproduction de ces plantes. Depuis longtemps, donc, la sexualité des orchidées utilise un « effet relativiste ».

Attention ! Il n'y a qu'une seul type de photon, qui peut passer par toutes les couleurs. Ce que trie le prisme de Newton, ce n'est donc pas les types de photons, mais leurs énergies.

La couleur-énergie que nous voyons, elle dépend autant du mouvement de notre œil que du mouvement du photon ([1]). Un photon émis avec une certaine couleur dans un véhicule changera de couleur apparente s'il est absorbé dans un autre : c'est ce qu'on appelle **l'*effet Doppler-Fizeau***.

C'est ainsi qu'un photon émis *ultra-violet* par un quasar ([2]) peut être *rouge* ou *infra-rouge* quand on le reçoit sur Terre ; et cette couleur du photon nous donnera des informations sur le mouvement relatif du quasar et de la Terre.

Et enfin, la *vitesse* du photon ? C'est la question initiale.

Quelle que soit notre embarcation, quel que soit le mouvement d'une source lumineuse, quelle que soit sa couleur, la relativité nous affirme que les photons qui en sont issus passeront devant nous avec la même vitesse *c* ; c'est maintenant une règle géométrique.

Et c'est ce que confirme l'expérience, avec une précision extrême ([3]).

La *définition du mètre*, aujourd'hui, c'est le chemin parcouru par la lumière pendant une durée donnée ([4]) ; on a renoncé à la métrologie directe, au « mètre-étalon » international, définitivement relégué au musée.

On préfère la chronométrie, plus précise ([5]). Mais ceci implique une confiance absolue dans la constance de la vitesse de la lumière : en ce sens, la relativité d'Einstein a aujourd'hui *valeur légale*.

1 Quand on parle de "photons de haute énergie", on fait implicitement référence à la Terre — ou à quelque autre vaisseau cosmique qui reçoit ces photons.

2 Un quasar, c'est un astre brillant et lointain ; voir plus loin *poussière de galaxies*, p. 106.

3 Les astronomes observent des photons dont la couleur-énergie varie dans un rapport de plusieurs millions (gamma–astronomie, radio-astronomie) ; photons issus d'objets situés parfois à des milliards d'années-lumière, animés de vitesses prodigieuses. Et ils n'ont constaté aucun effet suggérant une différence de vitesse entre ces divers photons quand ils arrivent chez nous.

4 Cette durée, c'est une seconde divisée en 299 792 458 parties égales, puisqu'on a convenu que la vitesse de la lumière, c'était 299 792 458 mètres par seconde.

5 Triste conséquence : plus personne ne peut mesurer la vitesse de la lumière, cette quête est terminée. Mais un métrologiste résolu peut encore mesurer l'ancien mètre, l'étalon qui repose au Pavillon de Breteuil, à Sèvres, depuis l'an 1889.

LA NATURE DES CHOSES

la source et les ombres

Notre géomètre a quitté sa boutique d'atomes (pp. 64-65), il vient de rentrer dans son lieu de travail habituel.

Mais son collègue physicien, acharné, l'a suivi, et continue à le harceler de questions :

— Il y a quand même quelque chose de pas clair dans ton discours. Souviens-toi ([1]), j'avais recensé dans la Nature toutes les qualités d'une chose qui se laissent *mesurer*, et j'avais ainsi reconstitué la *matérialité* de cette chose, le *moment* ***J.***

J'avais mis au point des formules assez jolies qui te donnent la géométrie de ces moments ; tu as classé les *types* ainsi créés, et je dois avouer que tu as eu raison d'y reconnaître les *particules élémentaires*.

D'accord encore pour tes subtilités sur la « physique classique » et la « physique relativiste » ; de toute façon ça ne change rien pour moi quand je fais une expérience — sauf ma vigilance. ✯

Tu sais décrire une particule élémentaire ; bravo.

Mais tu sembles oublier qu'il y a autre chose dans l'Univers ! Le plus simple des atomes n'est pas élémentaire, et personne ne sait parfaitement comment il est constitué. Et une molécule, un cristal, une goutte d'eau ? Je suis parfaitement incapable d'en donner une description complète — et pourtant nous savons que chacune de ces choses accepte de se plier à deux contraintes :

- le groupe géométrique agit sur les *mouvements* de cette chose ;
- chaque mouvement de la chose possède son *moment*, qui le suit *comme une ombre.*

Ô paradoxe ! je n'ai pas besoin de savoir de quelle chose il s'agit pour savoir où le groupe va envoyer son moment : il suffit d'utiliser ma formule universelle ([2]), qui est respectée scrupuleusement.

Comment *l'infinie diversité des choses* peut-elle s'accorder avec *un seul jeu d'ombres* ? Mystère ! Je devrais me réjouir de connaître un tel principe universel — mais j'ai plutôt peur et honte.

Entends donc ma confession.

---

1 Notre physicien récapitule une collaboration qui lui a laissé un bon souvenir (p. 61). Le groupe géométrique qu'il appelle G — G comme « groupe » — est-ce le groupe de Galilée ou le groupe de Poincaré ? Pour l'instant, aucune importance….

2 p. 61. Pour le détail, voir les clés 5 et 7.

D'abord, ce moment, où réside-t-il ? de quoi est-il fait ?

Tout se passe comme s'il s'agissait d'un « capital » géré par un « expert-comptable » ; comptable démoniaque embusqué au fond de la chose, capable de faire à chaque instant un bilan complet de chacun des constituants du moment ; démon habilité à interdire tout mouvement qui ne respecterait pas, tous à la fois, cette bonne dizaine de bilans. Ceci instantanément, d'un bout à l'autre de la chose, et même pendant les mouvements les plus violents. Inquiétant, n'est-ce pas ?

Je raconte à tout le monde que je sais ce qui caractérise la matière : les masses, les énergies, etc, et que je sais mesurer cette matérialité. Or quand je fais une mesure, je n'atteins au mieux que ce que le démon a déjà inscrit dans son grand livre de comptes : je ferais aussi bien de lire par-dessus son épaule. Je prétends connaître la matière, *mais je ne suis qu'un copiste du gardien des ombres…*

Cette utilisation des bilans, elle est si confortable ! elle dispense de comprendre vraiment ce qui se passe. Ça marche, c'est tout ce que je sais, et c'est tout ce que je veux savoir. À peu près comme si j'étais chargé de faire un cours sur le fonctionnement de la télévision, et que je me contente d'affirmer :

« la télévision marche parce qu'on a appuyé sur le bouton ».

Où sont les causes, où sont les raisons suffisantes ? J'accepte que la question ne soit pas posée. Honte sur moi, démission de ma pensée !

Il fallait bien que j'avoue à quelqu'un le secret douloureux qui me faisait languir. "

Le mathématicien s'efforce de répondre sérieusement à ce tragique aveu :
— Nous autres, nous avons justement un mot pour désigner la situation que tu viens de décrire : nous disons « *équivariance* »… Non ! ne t'énerves pas ; bien sûr ce n'est qu'un mot, ça n'explique rien ! Si je disais ça, c'était simplement pour te montrer que j'avais bien compris ta question. Et c'est vrai qu'il y a là un petit problème amusant auquel je n'avais pas songé. Voyons…

- Le groupe géométrique G agit sur les mouvements eux-mêmes : principe de relativité, comme tu dis.
- Ton action, c'est l'action du groupe G sur ses propres moments. Donc sur l'ombre ***J*** d'un mouvement.

Deux actions différentes, l'une inconnue, l'autre connue. Par quel miracle s'accordent-elles ? Et ceci pour toutes les choses…

? ? ? ? ?

Mais c'est tout simple ! Voici la réponse à tes angoisses : chaque mouvement est lui-même un moment …

! ! ! ! ! ! ! ! ! !

Tu ne comprends pas bien ? écoute donc.

Chaque chose a beaucoup de symétries. Évidemment il y a d'abord l'action sur la chose de tous les éléments du groupe géométrique G ; mais il peut y en avoir bien d'autres. Prises toutes ensemble, ces symétries constituent forcément un groupe. Un grand groupe ***S*** , que nous allons appeler

la source de la chose.

Comme beaucoup d'autres groupes, ce **groupe-source** possède ses propres moments ; et il agit sur eux selon des règles que nous avons déjà rencontrées.

Et voici ce qui doit se passer :

Il existe une *famille de moments* de la source ***S***
qui est *l'espace des mouvements* de la chose.

On peut donc dire que

*« **la chose en elle-même** »*, c'est un « ***type de moment*** *»* de ***S*** ([1]).

Et puisque le groupe géométrique G est contenu dans ***S*** , chaque mouvement de la chose engendre un moment ***J*** du sous-groupe G ([2]) :

*la voilà, **l'ombre J** de chaque mouvement !*

Les moments, quels qu'ils soient, ça se mesure. Voilà pourquoi vous autres physiciens vous rencontrez des « grandeurs mesurables », pourquoi vous pouvez faire des bilans !

Toi qui mesures la matérialité, tu pourras désormais le faire légitimement. Tu savais que tu ne mesurais que *des ombres* ; tu sauras maintenant *de quoi elles sont les ombres, et comment ces ombres sont portées*.

Quand même, c'est parfois fascinant de répondre aux questions naïves des collègues. Te rends-tu compte ? nous venons de faire une découverte remarquable :

de quoi est fait l'ensemble ***M*** des mouvements ? de ***moments*** du groupe ***S*** ;
de quoi est fait le groupe ***S*** ? de ***symétries*** de l'ensemble ***M*** .

M *et* ***S*** *se confèrent mutuellement l'existence !*

C'est comme une poule éclose d'un œuf, mais qui aurait aussi pondu cet œuf : *l'espèce* ***M*** serait sans doute l'espèce-poule, et sa *source* ***S***, l'œuf-de-poule. "

— Un troisième collègue, qui les écoutait depuis un moment, ricane doucement :

" Ah ces scientifiques ! leur naïveté est bien rafraîchissante…

Ils prétendaient réduire l'essence d'une chose au stupide catalogue de ses mouvements ; et voilà maintenant qu'ils placent eux-mêmes cette essence ailleurs, dans une dialectique entre matière et symétrie.

Ils commencent à découvrir qu'ils n'atteignent que des ombres ; ils ignorent sans doute que Platon les en avait avertis il y a vingt quatre siècles ! ([3])

Un peu de science éloigne de la métaphysique, plus de science y ramène…

---

1 *Famille, type* ? voir p.29.

2 Nous avons déjà rencontré et utilisé cette propriété héréditaire des moments ; c'est ainsi que le moment ***J*** lui-même engendre l'énergie, l'impulsion, etc. (voir les conclusions de *matérialisme idéal*, p. 63).

3 Nous avons déjà rencontré ce personnage : *tout est mouvement*, pp. 44-45. Il fait allusion à la Caverne de Platon (République, livre 7), caverne mythique où nous pénétrerons bientôt (chapitre V).

— Tout ça c'est très joli, s'interroge le physicien.

Ils rêvent chacun de leur côté ; et moi j'assume la réalité. Leur discours sur la scène de la Nature, j'aimerais savoir si c'est celui de la sagesse ou celui de la folie.

C'est vrai, mon secret est devenu moins douloureux depuis que ce cher géomètre l'a approfondi. Encore faut-il qu'il ait raison : plus de démon caché dans chaque chose, mais un *groupe*… est-ce que ce n'est pas tout aussi prodigieux ?

L'idée qu'il m'a proposée, il ne se rend même pas compte de toutes ses implications. Une seule chose à faire, la mettre à l'épreuve ; selon la bonne vieille méthode inductive, je vais confronter son discours déductif avec les enseignements de l'expérience. "

coexistence

Notre physicien se trouve en présence d'une chose, et il essaye de la décrire avec les outils de pensée que vient de lui proposer le géomètre. Première question : quelle est la *source* S de la chose ?

C'était simple quand la chose était une particule élémentaire — sa source, ce n'était rien de plus que le groupe géométrique $\boldsymbol{G}$. Oui, mais comment décrire *quelque chose de plus compliqué qu'une particule* ?

Avec sa naïveté désarmante, le mathématicien fait une suggestion immédiate :

— *Quelle chose plus simple, après une particule, que deux particules ? "*

Deux particules qui se contentent de coexister, sans agir l'une sur l'autre. Elles constituent une chose composite $\boldsymbol{C}$, dont chaque mouvement est évidemment constitué par un mouvement de chaque particule.

Comment agit le groupe géométrique $\boldsymbol{G}$ sur un tel mouvement composé ? facile, il agit *à la fois* sur chacun des mouvements individuels.

Mais voici l'idée créatrice : faire agir deux éléments du groupe, séparément, sur chacune des deux particules. Les *couples d'éléments de* $\boldsymbol{G}$ seront les éléments d'un *nouveau groupe* (le mathématicien l'appelle « Gé croix Gé » ; il écrit « $\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{G}$ » ou « $\boldsymbol{G}^2$ »), nouveau groupe qui agit sur les mouvements de la chose composée $\boldsymbol{C}$.

Voilà la solution : la source $\boldsymbol{S}$ *que nous cherchions, ce sera le groupe* $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$ *.* ✯

Tout marche bien. Le moment $\boldsymbol{J}$ du système des deux particules, c'est la *somme* des moments de chaque particule. Exactement ce qu'il faut pour faire les *bilans :* on ajoute les masses, on ajoute les énergies, on ajoute les passages, etc.

Quelques précisions données par le mathématicien :

- *Toutes* les espèces de moments de $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{G} \times \boldsymbol{G}$ décrivent un système de deux particules, pas forcément identiques.
- Rien n'est plus simple que de passer au cas de 3, 4… particules, en construisant des groupes qui s'appelleront évidemment $\boldsymbol{G}^3$, $\boldsymbol{G}^4$ …. Ainsi l'œuf de douze poules, c'est une douzaine d'œufs.
- Et des choses qui coexistent, sans pourtant être élémentaires ? Notre physicien devine ([1]) quelle sera la source unique de toutes ces choses : le « groupe produit » des sources individuelles.

1 Vous aussi, sûrement.

Et si les sources de ces choses contiennent *un même groupe*, plus grand que le groupe géométrique G ? Dans ce cas, une nouvelle grandeur conservée sera *répartie* entre toutes ces choses ; ça peut par exemple être la *charge électrique* ([1]).

que la force soit avec nous

Mais le physicien reste sceptique :

— Tout ça c'est très joli. Tu as sans doute de bonnes raisons de parler de ce « groupe-source », mais dis moi : à quoi peut-il me servir ? "

— Voici un exemple, répond le mathématicien : un système de points matériels qui agissent les uns sur les autres.

L'***espace des mouvements***, c'est une ***espèce de moments*** de la source ; il possède donc une ***géométrie symplectique*** ([2]). Et celle-ci fait apparaître quelque chose de très intéressant :

les forces. *"*

Le physicien, circonspect, déclare : " Bon, je peux admettre que la nature des forces soit « *symplectique* ». Mais à quoi ça sert ? "

— MATH. "Mais ça nous donne un tas de conditions concernant ces forces ! "

Calculant avec adresse, le mathématicien en établit la liste. Et le physicien, secrètement ravi, reconnaît ces conditions : ce sont les « principes de la mécanique ».

D'abord la loi de Newton qui nous indique comment chaque force fait varier progressivement la vitesse du point auquel elle est appliquée ([3]).

Ensuite la règle qui caractérise les forces par la seule énergie qu'elles produisent ou consomment en « travaillant ». Un principe confirmé sans faille par l'expérience : " C'est proprement le cas de la Nature ", disait Lagrange.

En utilisant ces principes, les spécialistes de mécanique peuvent parfois déterminer complètement le mouvement du système quand ils connaissent, à l'instant présent, les positions et les vitesses de tous les points (ce qu'ils appellent les « conditions initiales ») .

Prédiction de l'avenir, par la vertu d'un simple calcul ([4]) : on appelle ça ***déterminisme***.

Mais ce calcul n'est pas toujours facile, et ses résultats sont souvent illusoires : il arrive souvent que des conditions initiales si voisines qu'elles nous semblent identiques déterminent des mouvements qui apparaîtront très différents au bout d'un certain temps.

Cette situation banale a reçu beaucoup de noms suggestifs : « *instabilité* », « *effet papillon* » « *théorie du chaos* » ([5]) …

---

1 Cette charge est un moment d'un certain « groupe électrique ». Nous la rencontrerons au chapitre VI.

2 Voir *force et lumière*, p. 38.

3 La « loi fondamentale de la dynamique », qui relie la force et l'accélération, et qu'on écrit $\mathbf{F} = m\,\mathbf{A}$.

4 Un exemple est traité dans la clé 6.

5 Qu'est ce que c'est que le « *chaos* » ? « *l'absence de théorie efficace* ». Donc il n'y a pas de théorie du chaos.

Rien de nouveau là-dedans, nous savons tous que l'avenir lointain garde son mystère. Quant au passé, c'est rarement avec des équations qu'on en écrit l'histoire…([1]).

l'atelier de mécanique

C'est Joseph Louis Lagrange qui a découvert en 1808 la structure symplectique de la dynamique ✯.

Il cherchait un moyen de calculer les perturbations que chaque planète produit sur les mouvements des autres. La géométrie symplectique détermine ces perturbations, puisqu'elle implique toute la dynamique.

C'est cette géométrie qui donne à ce *calcul des perturbations* sa souplesse et sa puissance. Ce calcul est devenu l'outil fondamental de la mécanique céleste ; il permet d'établir les prévisions astronomiques avec l'admirable précision qu'on leur connaît.

Utilisé à l'envers, ce calcul a même permis à Adams et à Le Verrier de découvrir la planète Neptune sans jamais regarder dans un télescope ([2]).

Mais il n'y a pas que la mécanique céleste. Si des poussières se soulèvent pendant les orages, si du courant passe dans un fil, si deux aimants s'attirent ou se repoussent, c'est à cause de la charge et de l'aimantation des électrons qui s'y trouvent. Charge et aimantation qui produisent des forces nouvelles.

Eh bien ces forces s'inscrivent aussi dans la géométrie symplectique. ✯

Enfin on peut utiliser ce modèle pour décrire les mouvements d'une petite partie d'un système — *si on admet de négliger son influence sur le reste du monde*.

Une machine que nous installons dans un atelier, nous nous arrangeons pour qu'elle perturbe le moins possible l'environnement : pas de vibrations transmises au sol qui la supporte, ça gênerait le voisinage.

Dans cette hypothèse optimiste, voici comment le théoricien va travailler : il extrait d'un vaste modèle cosmique la chose qui le concerne (la machine), et va étudier les mouvements de cette chose seule.

Il a admis que sa chose ne perturbe pas l'extérieur — donc que l'extérieur se comporte comme si elle n'existait pas. Mais il sait bien que l'extérieur agit sur la chose : elle subit des « *forces extérieures* ». Il en tient compte, et alors il peut prévoir les mouvements possibles de la chose par application des « principes de la mécanique ». Il peut définir *l'espace M des mouvements de cette chose-là en présence du reste* ; il peut encore définir la géométrie symplectique de l'espace M, qui détermine encore son évolution.

1 Cependant, c'est avec les équations de la mécanique céleste que nous pouvons retrouver les mouvements des satellites de Jupiter que Galilée avait dessinés ; il avait noté les dates d'observation.

2 Ils connaissaient les perturbations de la planète Uranus ; ils ont imaginé une planète qui serait la cause de ces perturbations, et Neptune était bien au rendez-vous.

Elle fonctionne, cette *mécanique pratique*. La géométrie initiale est un peu lointaine, mais il peut arriver qu'elle ne soit pas tout à fait perdue.

Un exemple : la chose, ce sera un pendule soumis à l'action de la pesanteur, qui oscille librement autour d'un axe fixé au mur de l'atelier.

Dans ces conditions, la régularité géométrique n'a pas entièrement disparu : le groupe Chronos de l'atelier agit encore sur les mouvements ([1]). Et du coup le pendule oscillant possède et conserve le moment associé : ***l'énergie***.

Voilà pourquoi Huygens a pu découvrir l'énergie universelle en observant le pendule avec lequel il voulait mesurer le temps ([2]).

Ainsi naît la mécanique classique, tout armée par la géométrie, comme l'optique.

le fil des ans

Pratique qui réussit, donc. Mais qui laisse ignorer la

source

présumée S. Peut-on l'atteindre systématiquement ? Question difficile. ✯

Voici un exemple intéressant : le premier exemple de système mécanique complètement élucidé, le système de deux points matériels qui gravitent l'un autour de l'autre selon la « loi de l'attraction universelle » de Newton.

Dans ce cas, on sait construire explicitement un groupe S et une famille de moments de S qui constitue l'espace des mouvements. ✯

Et une des conséquences de l'existence de cette source-là, c'est que ces mouvements sont *périodiques*. ✯

Songeons au *système Terre-Soleil* : cette *période*, c'est *l'année*. Voilà pourquoi le Soleil repasse régulièrement, au bout d'une durée fixe, devant les mêmes étoiles : *le calendrier est né d'un groupe*.

Ce groupe et cette famille caractérisent donc toute la dynamique du système ; en particulier la fameuse loi de Newton : *"une force d'attraction inversement proportionnelle au carré de la distance"*. Si cette loi était modifiée si peu que ce soit, cette source S disparaîtrait — et avec elle le calendrier…

Il suffit donc au géomètre de savoir que le calendrier fonctionne bien pour connaître la loi de l'attraction universelle :

puissance de la géométrie !

Puisque chaque mouvement est un *moment* d'un groupe S que nous connaissons, nous connaissons aussi des grandeurs conservées spécifiques ([3]), qui complètent le moment classique $\boldsymbol{J}$ (énergie, impulsion, etc).

1 Voir p .50.

2 Voir p. 56.

3 C'est l'existence de ces grandeurs qui permet de reconstruire les trois lois de Kepler (clé 6).

Ces grandeurs nouvelles supportent tout — même les collisions ; c'est pourquoi elles sont performantes pour calculer les mouvements qui sont presque des collisions : un alunissage, par exemple. Ce sont donc elles qui ont été utilisées, avec succès, dans les ordinateurs de bord des modules lunaires ou martiens ([1]) ;

et ces grandeurs-là, nous les retrouverons à l'intérieur d'un atome…

1 Mais pas la première fois, dit-on : au moment du premier alunissage, l'ordinateur se bloqua en alerte rouge. La catastrophe fut évitée par la dextérité de Neil Armstrong, qui sut se saisir à temps des commandes manuelles.

V

DU HASARD AU VERTIGE

L'USURE DU TEMPS

sans retour...

Des gens courent dans la rue en regardant droit devant eux ;
un vase se casse ;
le gaz brûle sous une casserole.

Qu’est-ce qu’il y a de commun à tout cela ? Ce sont des événements ***irréversibles***.

Si vous avez filmé ces événements, vous ferez rire les petits enfants en les visionnant à l’envers.

Ils savent bien qu'on ne peut pas courir en arrière au milieu des voitures sans se retourner ; des morceaux de verre épars sur le plancher ne sautent jamais sur la table pour former un vase précieux ; la vapeur qui séjourne près du plafond de votre cuisine ne redescend pas former une flamme réfrigérante sous votre casserole, se séparer en air et gaz, rentrer dans la canalisation, et faire tourner votre compteur à l’envers.

du flou...

La mécanique classique, telle que nous l’avons décrite (pp. 79-80), n’est pas suffisante pour définir cette irréversibilité. Que faire ? Construire un nouveau modèle, évidemment.

Nous avions supposé, jusqu’ici, que le mouvement d’une chose était décrit par un point **x** dans « l’espace des mouvements » **X** de la mécanique classique ;

maintenant, au lieu d’un point, imaginons une tache dans **X** (fig. 18) :

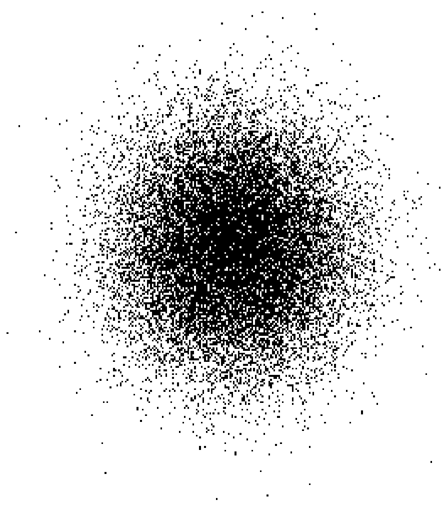


Figure 18. Un mouvement flou

Eh bien, pour décrire cette tache, il existe un modèle mathématique ([1]) ; nous l'appellerons **hasard.** ✯

Un ***état statistique*** d'une chose,
ce sera *un* ***hasard*** *dans l'espace des mouvements.*

Ainsi peut se modéliser la ***mécanique statistique*** ([2]).

en principe…

Nouveau modèle, mais à quoi peut-il servir ?

à décrire un ***milieu continu*** , un ***gaz*** ou un ***liquide*** par exemple..

Essayons donc de décrire ce milieu par un *état statistique*, une belle tache dans l'espace des mouvementsdes atomes qui constituent ce milieu.

Avec une telle description, nous ne saurons pas si un atome passe ici maintenant : l'espace sera rempli, non par des atomes, mais par des probabilités de présence d'atomes…

Soyons plus précis : examinons comment cet *état mathématique* peut se confronter à des *expériences de physique*.

Question préliminaire : dans cet état-là, est-ce que le milieu est *en mouvement* ou *immobile* ?

Souvenons-nous : pour distinguer les choses immobiles et celles qui ne le sont pas, nous avons recouru à l'action d'un groupe ([3]).

Pour respecter le principe de relativité, nous devrons donc envisager l'action de ce groupe de Galilée (p. 48) sur les états statistiques. ✯

Le physicien n'a plus qu'à poursuivre dans cette voie ([4]). Mais ça ne lui suffira pas pour atteindre son but : décrire les *phénomènes irréversibles*. La science de ces phénomènes, il l'appellera

thermodynamique

— quand elle sera construite…

Voici le point de départ de cette thermodynamique : dans certaines circonstances, *on imagine que la tache peut changer.* Changer, mais seulement *en s'élargissant* — ce qui est évidemment irréversible.

Cet élargissement, on l'appellera ***dissipation.***

---

[1] Ce modèle est exposé dans la clé 8 ; il contient le classique ***calcul des probabilités.***

[2] « Statistique » = « relatif à l'État ». À l'origine, la statistique, c'était simplement le décompte des richesses et des dettes de l'État. Pour éviter le quasi-pléonasme « état statistique », vous pourrez dire « stochastique » (= conjectural), vous aurez l'air branché. L'usage systématique des statistiques en mécanique est dû initialement à J. W. Gibbs.

[3] Le groupe "*Chronos*" lié au séjour sur Terre; voir p. 43.

[4] Plus de détails dans le chapitre VI , où nous verrons apparaître miraculeusement la *pression* des gaz: *présence de la matière*, pp. 112-113.

Le principe d'élargissement des taches, on l'appelle *principe de Carnot* ([1]) ou, plus pompeusement :

« ***second principe de la thermodynamique*** ([2]) ».

Mathématiquement, il va falloir évaluer *la largeur* de ces taches ; largeur que les théoriciens appellent

entropie. ✯

Alors le « *second principe* » devient très simple :

l'entropie augmente…

Oui, mais ce n'est qu'un tout petit renseignement sur ce qui peut se passer : la thermodynamique a besoin d'autres principes pour se constituer.

Il y en a un auquel nous sommes forcés de songer : la conservation de l'énergie, et plus généralement la conservation du moment (p. 60). Comment l'exprimer ?

Situation paradoxale : Le moment ***J***, ombre du mouvement, est lui aussi devenu « aléatoire » ; il est décrit par *l'ombre de la tache* — ombre qui est *une tache dans l'espace des ombres*. ✯

Quand jouera la dissipation, qu'est-ce qui pourra bien subsister de ce moment ?

Essayons le principe suivant :

Pendant la dissipation, le centre de la tache ne change pas.

Superbe, ce *premier principe* ; tant pis s'il n'a été découvert que bien après le *second*.

Bien entendu, ce principe exige du mathématicien qu'il sache dire exactement ce que c'est que « ***le centre*** » de cette tache.

Faisons-lui confiance, il sait faire ; c'est le résultat d'un bilan statistique dont le résultat s'appelle *valeur moyenne*.

Nous pourrons maintenant l'exprimer en jargon, ce :« **premier principe de la thermodynamique** » :

la valeur moyenne du moment ***J*** *ne change pas,*

même pendant la dissipation.

Bien peu de chose, ces deux principes : ils ne sont pas suffisants pour prévoir tout ce qui va se passer dans les phénomènes irréversibles.

Mais c'est la dure loi de la thermodynamique : en général, on ne saura rien de plus, et il faudra s'en contenter.

Et ces principes eux-mêmes, d'où sortent-ils ? Certainement pas de la mécanique classique, puisque le modèle classique est ici cassé.

---

1 Sadi Carnot, « Réflexions sur la puissance motrice du feu… », 1824.

2 Ne vous inquiétez pas, le premier principe va arriver…

On aimerait bien rattacher cette mécanique statistique à d'autres principes, selon la prescription de Guillaume d'Ockham : " il faut s'opposer à la pluralité des raisons " ([1]). Et effectivement, nous verrons qu'on peut rattacher le premier principe à la théorie de la *gravitation* ([2]).

Mais le point de vue empirique reste légitime : tout est permis à qui construit un nouveau modèle, tous les principes qu'il voudra — pourvu qu'ils subissent avec succès la confrontation avec l'expérience. Donc :

confrontons.

chaud et froid

Les choses que nous venons de considérer sont libres dans l'espace ; mais il est plus facile de faire des expériences sur Terre.

Plaçons-nous donc dans les conditions de la mécanique pratique (p. 80). Nous expérimentons sur un objet qui est soumis à son environnement terrestre, mais dont on néglige l'influence sur le reste du monde.

Dans cette chose ainsi décrite, rien ne subsiste de la régularité du groupe géométrique, le premier principe est inutilisable. A moins que…

A moins qu'on ait construit soigneusement un dispositif destiné à laisser à la chose une certaine régularité — donc une part conservée du moment. Le plus souvent ce sera le groupe Chronos associé au séjour sur Terre, dont le moment est l'énergie. ([3]) ✯

Dans ces conditions, il ne subsistera qu'un « premier principe restreint » :

La valeur moyenne de l'énergie reste constante.

La chose, ce pourra être un gaz enfermé dans un réservoir immobile ; ou bien un pendule libre de tourner tout autour de son axe.

Prenons l'exemple du pendule : parmi ses mouvements, il y en a un dont *l'énergie est la plus petite* : c'est l'équilibre dans la position la plus basse. Supposons le pendule ainsi abandonné en position basse : c'est un mouvement classique, une tache réduite à un seul point. ✯

Pourrait-il arriver au pendule un événement irréversible ? Il faudrait pour cela que la tache s'élargisse, qu'elle déborde sur d'autres mouvements. Mais ces autres mouvements ont une énergie plus grande, et s'ils étaient impliqués dans une tache, la moyenne de l'énergie augmenterait. Or nous savons que c'est impossible, le *premier principe* l'interdit. Donc *pas de dissipation possible pour ce mouvement-là* : on appelle ça un

équilibre thermodynamique.

---

1 Principe du « *rasoir d'Ockham* ». Guillaume d'Ockham, moine et philosophe du XIV^ème siècle, acteur principal de la querelle des Universaux. Que sont les Universaux ? Selon d'Ockham, ce sont « les intentions de l'esprit qui s'appliquent à un grand nombre d'objets ».

2 *ça va chauffer*, pp. 121-122.

3 Voir p. 63.

Même raisonnement pour le mouvement dont l'énergie est la plus haute :

l'équilibre en position supérieure, au-dessus de l'axe…

…excusez l'auteur d'avoir essayé de vous tromper !

Cet équilibre (instable) est effectivement un mouvement ; mais son énergie n'est pas la plus grande : il suffit de donner un tout petit coup au pendule qui stationne tout en haut pour augmenter son énergie ; dans son nouveau mouvement, le pendule tournera toujours dans le même sens en repassant périodiquement au point haut.

Ainsi cet « équilibre » qui est *instable* pour la mécanique classique *n'est pas un équilibre* pour la thermodynamique.

Plaçons-nous maintenant dans le cas général d'une chose qui n'échange pas d'énergie avec son environnement.

Quand cette chose est dans un état dont l'entropie est *maximum* ([1]), les autres états sont interdits par le second principe (qui nous enseigne que l'entropie ne peut qu'augmenter) ; la chose est donc *protégée contre la dissipation*.

Un raisonnement simple montre aussi que cet état est *immobile*. ✯
On appelle encore ça des « *équilibres thermodynamiques* » ([2]); nous préciserons

équilibres-chauds

afin de les distinguer des premiers équilibres que nous avons étudiés, réputés

équilibres-froids.

Pourquoi « chauds » et « froids » ? Ça intrigue un peu un expérimentateur sceptique. Il s'adresse à son collègue théoricien, et lui pose la question suivante :

— Voici deux choses qui coexistent, chacune en équilibre thermodynamique *chaud*, comme tu dis. Elles constituent ensemble une nouvelle chose. Eh bien cette chose-là, est-ce qu'elle est en équilibre thermodynamique ? "

— Tu as raison, ce n'est pas automatique. Il y a sûrement une condition à découvrir ! "

Il réfléchit plusieurs petits cafés durant, et finit par déclarer :

— Chaque équilibre est associé à un nombre très intéressant, que je vais appeler *bêta*. Le système composé ne sera en équilibre que si les deux choses qui le composent ont *le même bêta*. Et ce *bêta* sera également le *bêta* de la chose composée. " ✯

L'expérimentateur s'exclame :

— Tu ne m'étonnes guère : ce que tu appelles *bêta*, c'est simplement la *température* !

Si tu mets en présence deux choses en équilibre à la même température, rien ne se passe. Mais si les températures sont différentes, nous savons bien qu'il va se passer quelque chose…

Mais dis moi, ta température *bêta*, est-elle *Celsius* ou *Fahrenheit* ? Tel que je te connais, je parie que tu as inventé une échelle de températures assez biscornue. "

---

1 Maximum parmi les états permis par le premier principe, parmi ceux qui possèdent la même valeur moyenne de l'énergie.

2 On dit aussi « états de Gibbs ».

Un peu de travail permet aux deux compères de s'y retrouver. Pour obtenir *bêta*, deux étapes :

- on part de la température Celsius, et on lui ajoute 273 degrés : le résultat s'appellera « *température absolue* », mesurée en « *degrés Kelvin* » ;
- ensuite on prend *l'inverse de la température absolue* ; voilà *bêta*. ✯

Un peu moins biscornu que l'échelle Fahrenheit, mais bizarre quand même. Ça ne fait rien; cette quantité *bêta* , appelons-la *température thermodynamique*.

Ce qu'il y a de grave, c'est que ça ne marche pas au « *zéro absolu* » ([1]), parce que 0 n'a pas d'inverse.

Mais ça n'étonne pas vraiment l'expérimentateur, parce qu'il sait bien qu'on n'a jamais réussi à réfrigérer quelque chose jusqu'à ce « *zéro absolu* ». La température absolue est toujours positive ([2]).

Qu'advient-il donc à un équilibre chaud quand sa température absolue tend vers zéro ? Vous l'avez deviné, il tend vers un équilibre froid. Pas plus compliqué que ça.

L'expérimentateur vient de nous apprendre que la température absolue est toujours *positive*. Comme tout nombre positif, elle a donc un inverse, qui est la température thermodynamique *bêta.*

Mais cette constatation chagrine le mathématicien :

— J'ai des modèles de particules qui possèdent de vrais états d'équilibre, mais avec un *bêta* qui est négatif. "

— Curieux. Et qu'est-ce que c'est que ces particules ? "

— Tout simple, ce sont les *particules de masse négative* ([3]). "

Comme c'est intéressant ! ces particules-là sont incapables de coexister avec les autres. Un mélange des deux espèces ne peut avoir d'équilibre, puisque *bêta* devrait être à la fois positif et négatif ; la seule solution envisageable, ce serait *bêta* = zéro, c'est-à-dire une *température infinie*, engendrant une explosion cosmique…

Il vaudrait mieux qu'elles soient absentes de la nature… ([4]).

inventer l'eau tiède

Revenons à la question posée tout à l'heure : que se passe-t-il si deux choses chacune en équilibre — mais à des températures différentes — sont mises en contact ?

Les petits enfants qui posent leurs doigts partout l'apprennent vite, c'est l'expérience la plus banale du monde.

Mais il est intéressant d'écouter ce que le théoricien peut en dire.

Il nous déclare qu'une évolution irréversible doit se produire, mais qu'il est en général incapable de la décrire en détail : il s'agit de cette partie de la thermodynamique qui reste inachevée.

---

1 vers −273 degrés Celsius.

2 Exemples : Le matin, vous avez 310,2 ° K (Kelvin). Au Groenland, il peut faire très froid : 208°K (moins 65° Celsius).

3 Elles sont en vente dans la boutique (p. 72).

4 Par ailleurs, elles ne participent pas comme les autres à "l'attraction universelle" de Newton.

Cependant les deux principes que nous venons de reconnaître suffisent à établir quelques règles inéluctables.

Ce qui peut se passer, ça se manifestera par une *croissance* de l'entropie, par un *échange* d'énergie — du plus chaud vers le plus froid, par une *égalisation* des températures. Jusqu'où ? Pas de réponse précise, sauf la suivante : au plus jusqu'à l'obtention d'un nouvel équilibre, avec une température globale intermédiaire entre les températures initiales.

Ce sont encore ces règles-là que nous utilisons pour mesurer la température avec un thermomètre ; pour construire des modèles de *fluides parfaits*, pour prédire leurs *changements d'état* (vaporisation, liquéfaction par exemple) ; pour décrire la *pression* des fluides ; pour observer et mesurer *l'entropie* ([1]), la *chaleur*, avatar de l'énergie ; etc.

Ainsi s'est constituée la *thermodynamique pratique,* outil fondamental ([2]) : on l'utilise pour le chauffage et la réfrigération ; pour la construction des moteurs, des centrales thermiques ou nucléaires ; pour la météorologie ; etc.

Voici par exemple la recette pour confectionner un bain tiède : ouvrir les robinets d'eau chaude et d'eau froide ; mélanger doucement pour faire monter l'entropie.

Et le deuxième principe nous assure que ça ne se « démélangera » pas, qu'au moment d'entrer dans le bain, nous ne trouverons pas une partie de l'eau glaciale et l'autre brûlante. Rassurant, n'est-ce pas ?

un lit chaud et douillet

L'habileté des artisans n'a pas de bornes, ils savent fabriquer beaucoup d'appareils qui mettent en œuvre les principes de la thermodynamique.

Par exemple une boîte immobile, communiquant à son contenu sa propre *température* : on appelle ça un *thermostat*. Vous l'utilisez chaque fois que vous placez vos provisions au frigo, que vous mettez un gratin ou un rôti au four.

Mais ils savent aussi construire des choses possédant une autre régularité que la régularité temporelle ; pour celles-là, ce n'est plus seulement l'énergie qui sera conservée, mais le moment tout entier de cette régularité.

Dans ce cas, le premier principe ([3]) nous apprend que les *équilibres chauds* seront les états statistiques d'entropie maximum pour un moment moyen donné ; ces équilibres seront caractérisés par un nouvel objet, que nous appellerons

vecteur-température.

Qu'est-ce que c'est que ça ? Demandons donc au géomètre. ✯

Un vecteur-température β se manifeste à la fois par une *température* ordinaire et par une *régularité* ; la régularité d'un véhicule où la chose serait immobile.

De quelle espèce, le mouvement de ce véhicule ? la liste est fournie sur demande par le géomètre.

Dans le contact de deux choses, ce sont les vecteurs-température qui vont s'égaliser.

---

1 On retrouve la définition historique de l'entropie, due à Clausius (1854).

2 Elle repose donc sur la notion d'équilibre, et aussi sur quelques modèles dissipatifs: conduction de la chaleur, viscosité, etc. Nous en rencontrerons au chapitre VI (p. 123, *flèche fatale*).

3 Sous sa forme géométrique générale (p. 85).

Voilà pourquoi notre vie requiert un double équilibre avec l'environnement : équilibre thermique et équilibre dynamique.

Double équilibre que nous recherchons pour nous endormir.

Quand nous sommes levés, nous utilisons quelques appareils possédant un vecteur-température spécifique. Citons-en trois :

- Un frigo, où vous placez vos provisions. On espère que leur séjour leur communiquera la température souhaitée.
- Une essoreuse où vous placez du linge mouillé. Un processus irréversible (viscosité, frottement) doit communiquer au linge le séjour tournant de l'essoreuse : les gouttes d'eau seront expulsées.
- Une voiture, dont vous souhaitez emprunter le séjour et supporter la température.

ZODIAQUE

l'espace est glacial

Prenons une chose isolée, libre dans l'espace, et essayons de lui appliquer les règles que nous venons d'élaborer.

Un théorème va nous arrêter immédiatement : il nous apprend qu'aucune chose ne peut posséder d'équilibre chaud si elle est seule dans l'espace. ✮

Seuls y sont permis les équilibres froids.

ombres caverneuses

Qu'est-ce que c'est exactement, un équilibre froid dans l'espace ? Une allégorie va nous l'indiquer.

Le soleil brille au-dessus de l'horizon, et éclaire l'entrée d'une caverne ; caverne où nous sommes enchaînés. Nous ne pouvons apercevoir que le mur du fond.

Un philosophe facétieux dépose une statue au soleil devant l'entrée. Stupéfaits, nous contemplons son ombre sur le mur. Dans notre ignorance du monde extérieur, nous suivons des yeux avec avidité *le bord de cette ombre,* sentant bien que nous découvrons ainsi un objet jusque là inconnu.

Transposons la scène dans une autre géométrie :

- Le philosophe nous soumet une chose quelconque, donc *l'espace de ses mouvements* (p. 45).
- Comment la chose porte-t-elle ombre au fond de la caverne ? le soleil philosophal qui éclaire cette allégorie crée une ombre de chaque mouvement. Cette ombre c'est son *moment* ***J*** ([1]).

1 Nous savons comment (p. 76). Par conséquent le fond de cette caverne-là, c'est l'espace des moments ; c'est un mur plat, illimité, avec une bonne dizaine de dimensions.

Ce que nous appellerons maintenant

équilibre-froid

ce sera un mouvement dont l'ombre est au bord des ombres ([1]).

manèges dans le ciel

Si l'ombre n'a pas envahi tout le mur du fond de la caverne, on peut présumer qu'elle a un bord, donc que ces équilibres froids *existent* : gros avantage sur les équilibres chauds ! En voici quelques propriétés :

- Tout équilibre froid possède une régularité particulière, qu'on peut repérer par la ***température froide,*** nouvel objet géométrique. ✯
- Si deux choses *coexistent* (p. 77) et si leur système est en équilibre froid, alors chacune d'elles est en équilibre froid, et admet la même température froide : celle du système.

Voici des exemples :

- une *particule élémentaire* libre : tout mouvement est un équilibre-froid ;
- *deux particules* sans interaction : elles sont en équilibre-froid si elles voyagent de conserve, avec la même vitesse ;
- deux points matériels soumis à l'attraction universelle de Newton : s'ils sont en équilibre-froid, ils tournent l'un autour de l'autre d'un mouvement régulier circulaire ([2]) ;
- un *système de points matériels*, qui interagissent selon les lois de la mécanique classique : s'ils sont en équilibre-froid, ils tournent tous ensemble autour d'un axe passant par le centre de gravité.

Mais que venons-nous de décrire,
sinon la rotation de la Terre ?

Que la Terre tourne comme un solide, qu'elle possède la régularité qui produit notre perception du temps et de l'espace ([3]), tout cela résulte de la simple géométrie des équilibres froids ([4]).

Ce sont aussi selon des équilibres-froids que tournent le Soleil et les étoiles.
Et peut-être aussi les galaxies ?

---

1 Les équilibres froids que nous avons déjà rencontrés (*chaud et froid*, p. 86), ce sont les mouvements dont l'énergie est minimum (il n'y a généralement pas de maximum) : leur énergie est donc « au bord des énergies ». Mais l'énergie, ce n'est que la partie émergée de l'iceberg « moment » ; si on abandonne la référence à notre monde terrestre, il faudra donc chercher « les moments au bord des moments ». D'où cette définition.

2 Bien entendu le centre de gravité est animé d'un mouvement régulier rectiligne : *il passe en tournoyant*, pp. 59-60.

3 Régularité de la Terre qui était le premier de nos *Chronos* (p. 42). Mais à ce moment, nous ne pensions pas encore que la Terre tournait…

4 Ce n'est que son équilibre-froid qui donne à la Terre les apparences de la rigidité. Elle n'est pas solide, elle est élastique et plastique. L'attraction lunaire l'éloigne un peu de l'équilibre froid et la fait palpiter : nous montons et nous descendons ainsi de 40 cm toutes les 12 h 25. Marée terrestre.

Une galaxie comme celle où nous habitons est constituée d'une centaine de milliards d'étoiles, animées d'un vaste mouvement de rotation.

Mais la régularité du mouvement d'une galaxie n'est qu'approchée : elle ne tourne comme un solide que dans les régions centrales, sa rotation se ralentit au loin.

Par ailleurs, le mouvement d'ensemble est perturbé par les vitesses individuelles des étoiles, et aussi par des ondes qui produisent l'apparition des « bras spiraux ».

La vitesse de rotation, qui entraîne une grande partie de la galaxie, ne peut être que très lente ([1]). Cette lenteur compromet l'équilibre au centre : le cœur d'une galaxie peut s'effondrer, produisant en retour une explosion spectaculaire ; c'est ainsi qu'ont dû apparaître les objets les plus brillants de l'Univers, les *quasars*.

Ces constatations, et d'autres que nous allons faire, indiquent que les processus dissipatifs des systèmes isolés les conduisent, à la longue, vers des équilibres thermodynamiques — nécessairement froids.

la vie au soleil

La Terre a commencé son existence dans le bruit et la fureur : d'innombrables collisions de corps célestes l'ont constituée progressivement. Elle est vieille aujourd'hui ([2]) et assagie ; ce qui se manifeste par la proximité d'un équilibre-froid.

Et cet équilibre, c'est lui qui a produit l'espace où nous vivons.

Si cet équilibre froid était parfait, rien ne se passerait sur Terre : tous les mouvements qui s'y produisent sont des écarts à l'équilibre froid : météorologie, marées, séismes ; chutes d'étoiles filantes ; et aussi tout ce que produit la vie.

Pourquoi ces écarts ? On voit évidemment deux raisons principales :

- D'abord la Terre a conservé un peu de jeunesse ; un jour très lointain, elle aura évacué toute l'énergie radioactive qui se développe en son sein. Alors cesseront les mouvements tectoniques, le volcanisme, les séismes.
- D'autre part, elle n'est pas réellement libre dans l'espace : ce sont la Lune et le Soleil qui provoquent les marées ; c'est le rayonnement solaire qui nourrit les tempêtes et la vie.

les terrasses de Carthage

Voyons maintenant comment la Lune perturbe l'espace de la Terre ; analysons le système *Terre-Lune.*

S'il était en équilibre parfait, ce système tournerait sur lui-même d'un mouvement de rotation circulaire uniforme ; non seulement les deux corps tourneraient l'un autour de l'autre sur une orbite circulaire, mais ils tourneraient sur eux-mêmes autour du même axe, avec la même vitesse de rotation, et par conséquent ils se montreraient toujours le même côté ([3]).

Que se passe-t-il réellement ?

---

1 Environ un tour en 250 millions d'années pour notre Galaxie. Depuis qu'elle s'est formée, elle n'a pas eu le temps de faire cent tours.

2 Quatre milliards et six cent millions d'années, dit-on.

3 C'est la situation du couple constitué par la Terre et un satellite de télécommunications géostationnaire.

- Le *mouvement de la Lune par rapport à la Terre* n'est circulaire et uniforme qu'en moyenne : pour décrire son mouvement réel, il faut composer ce mouvement simple avec une perturbation due à l'action du Soleil. Perturbation qui se calcule parfaitement par la mécanique céleste, et qu'on peut décomposer en plusieurs termes de périodes différentes : certains apparaissent déjà dans l'harmonie des sphères de Hipparque et de Ptolémée (p. 18).
- La Lune montre constamment *la même face à la Terre*.
- Mais pas la Terre à la Lune : l'axe de rotation de la Terre sur elle-même est proche de l'axe de rotation de la Lune autour de la Terre, mais la Terre tourne beaucoup plus vite ; à cause de cela la Lune, comme le Soleil, se lève à l'est et se couche à l'ouest. La *vitesse de rotation de la Terre* est trente fois trop grande, en gros, puisqu'il y a trente jours dans un mois ([1]).

Tous les citadins ne le savent pas. Gustave Flaubert nous a raconté comment la princesse Salammbô, de sa terrasse de Carthage, assiste au lever de la Lune dont elle est la prêtresse. Mais dans ce récit ce lever a lieu en plein sud : Flaubert n'a donc pas eu l'idée d'observer réellement le chemin de la Lune dans le ciel.

Et vous ?

Simple question de patience : l'action des marées ralentit la rotation de la Terre. Attendons seulement que l'âge de la Terre ait doublé, la durée du jour aura approximativement doublé ; alors s'éteindront simultanément les marées lunaires et le mouvement apparent de la Lune.

Elle ne se lèvera ni ne se couchera plus. Un équilibre froid sera atteint — si le Soleil ne s'en est pas mêlé entre-temps…

Même conclusion donc que précédemment : ce qui écarte le système Terre-Lune d'un équilibre froid, c'est d'une part le fait qu'il n'est pas isolé ; d'autre part sa relative jeunesse : processus dissipatifs en cours.

soli soli soli ([2])

Question inévitable : le système Terre-Lune-Soleil est-il proche d'un équilibre ?

Même question, bien sûr, pour le Système Solaire dans son ensemble.

Une première réponse, radicale, est fournie par la géométrie : un système d'astres qui s'attirent selon la loi de Newton *ne possède pas d'équilibre-froid* s'il y a plus de deux corps. Pourquoi ? parce que l'ombre du système envahit toute la caverne ([3]). ✯

Paradoxe ! notre vieille Lune et notre vieux Système Solaire semblent pourtant bien équilibrés. Il faut examiner de plus près la signification de ce verdict géométrique.

---

1 Conventionnelle, bien sûr, la durée du mois, mais issue des phases de la Lune. Difficile de faire un calendrier respectant à la fois le Soleil et la Lune, parce que l'année et la lunaison sont « dissonants » (voir ci-dessous, p. 99) : en première approximation, il faut 235 lunaisons pour faire 19 ans. Il faut choisir : les agriculteurs sont astreints à suivre le Soleil ; c'est dans un pays de nomadisme qu'est apparu un calendrier lunaire : le calendrier musulman.

2 « *Au seul soleil de la terre* » ; devise de cadran solaire.

3 *ombres caverneuses*, p. 90. En termes moins imagés : parce que le moment J du système peut prendre toutes les valeurs dans l'espace des moments.

Une remarque : dans le cas des deux corps, la conservation du moment suffit en général à *éviter les collisions.* Mais pas pour trois corps ou plus ([1]).

Ces collisions, phénomènes dissipatifs, doivent donc être prises en compte pour construire un modèle thermodynamique de l'histoire du Système Solaire. Pour cela, on ne peut plus considérer les constituants du système comme de simples points, il faut tenir compte de leurs dimensions réelles. Alors la description de l'attraction universelle se complique ; en particulier il faudra tenir compte des *marées* — phénomènes dissipatifs.

Nous sommes bien incapables de construire un tel modèle du Système Solaire et de son évolution. Cette ignorance ne nous gêne pas trop, dans la mesure où nous présumons que les détails violents de cette histoire ont maintenant été effacés par la dissipation, et que nous n'en possédons plus qu'un héritage tranquille.

Mais regardons un peu plus loin : dans le ciel, il y a beaucoup d'autres systèmes de corps qui gravitent ensemble ; ils sont assez différents les uns des autres.

Par exemple il y a en a de très vieux et très beaux, qu'on appelle « *amas globulaires* », qui ne ressemblent guère au Système Solaire. Constitués de millions d'étoiles, leur nom indique bien leur forme, leur symétrie sphérique ([2]).

Souvenons-nous aussi que beaucoup d'étoiles sont doubles ou triples : deux ou trois étoiles, de tailles parfois très différentes, qui tournent les unes autour des autres. S'il y a des planètes à côté, personne ne sait exactement où elles peuvent se trouver ; aucun télescope n'a encore permis de les voir, simples fragments obscurs perdus dans la lumière de leurs soleils multiples.

Tout ce qu'on peut faire de raisonnable, c'est donc d'étudier les particularités actuelles de notre Système Solaire, et chercher si on peut leur donner une interprétation « thermodynamique ».

Mais nous savons qu'il ne peut pas être en équilibre-froid, puisqu'il ne tourne pas d'un seul bloc ; il faut donc approfondir un peu la thermodynamique.

Un point de départ évident : nous avons un seul Soleil, et il est beaucoup plus lourd que toutes les planètes prises ensemble, presque mille fois.

le domaine des bêtes

Esquissons donc un modèle où la masse de chaque planète est négligeable devant celle du Soleil. Chaque planète choisira son propre équilibre-froid ; elle tournera autour du Soleil d'un mouvement circulaire régulier.

Ça correspond à peu près aux mouvements réels des planètes.

Mais on constate quelque chose de plus : les *plans de rotation* sont proches les uns des autres, ainsi que les *sens de rotation* ([3]).

---

1 Il est heureux que les prières de Salammbô n'aient pas réussi à convaincre la Lune de se lever au sud : au bout de quelques années, le mouvement à trois corps Soleil-Terre-Lune se serait probablement achevé par la chute de la Lune sur la Terre. Aucun Flaubert ultérieur pour raconter cette histoire.

2 Il y en a des centaines autour de chaque galaxie. Un système de ce genre doit disparaître par collisions et dispersion ; mais le très grand nombre d'objets qui composent les amas globulaires rend leur dispersion si lente qu'ils constituent en fait les structures les plus permanentes du Cosmos.

3 L'inclinaison du plan de rotation des diverses planètes par rapport à celui de la Terre est inférieur à 4 degrés, sauf pour la plus proche du Soleil (Mercure, 7 degrés) et la plus lointaine (Pluton, 17 degrés).

C'est ainsi que les 7 astres mobiles visibles à l'œil nu (Soleil, Lune, planètes) décrivent à peu près le même chemin apparent dans le ciel, en passant devant les mêmes étoiles qui paraissent fixées au firmament. Chemin qu'on appelle *écliptique,* parce que c'est celui où se produisent les éclipses.

Comment pouvez-vous retrouver dans le ciel ce chemin où courent les planètes ? En apprenant à reconnaître ces étoiles, grâce aux *constellations* qu'elles forment.

Une constellation, c'est plusieurs étoiles qui nous semblent proches dans le ciel, qui y tracent une figure remarquable.

Mais il nous manque la perception de la profondeur : dans l'espace, ces étoiles sont généralement très loin les unes des autres ([1]).

Si notre point de vue se déplaçait suffisamment, ces mêmes étoiles se grouperaient autrement, nous apercevrions d'autres constellations.

Les constellations proches de l'écliptique, on appelle ça *le Zodiaque*. Notre Zodiaque occidental remonte au moins aux Assyriens, qui s'étaient efforcés de trouver douze constellations sur ce chemin — à cause des douze mois lunaires ([2]) ; la plupart avec des noms d'animaux :

« Zodiaque » = « Domaine des bêtes ».

Le Zodiaque a joué un rôle dans diverses religions ; par exemple dans le culte de Mithra, d'origine indienne et persane, très répandu en Europe à l'époque romaine ([3]). Les bas-reliefs mithriaques évoquent des combats entre diverses bêtes zodiacales : serpent, scorpion, taureau notamment ([4]).

Cette spiritualité antique s'est bien dégradée : il ne nous en est resté que le commerce des horoscopes, la classification des individus par « signes du Zodiaque ».

Narcisse s'admirait dans l'eau d'une source. Encore plus narcissiques, c'est dans le ciel que nous recherchons notre image.

Vous êtes peut-être né(e) un 12 juin ? Alors ce qui suit vous concerne.

- On vous a dit que votre signe est celui des « Gémeaux (21 mai - 21 juin) » ; vous croyez sans doute que le jour de votre naissance, vu de la Terre, le Soleil était dans la direction de la constellation des Gémeaux. Vérifions.
- Mais non, ça ne marche pas ! Le jour de votre naissance, la direction du Soleil était pratiquement celle d'Alnath, l'étoile « Bêta du Taureau ». Donc « votre signe », c'est le Taureau.

---

1 Voici par exemple les distances qui nous séparent des principales étoiles du Capricorne, comptées en « années-lumière » : 35, 100, 130, 550, 1600 : un dessin à bonne échelle vous montrera que l'aspect « constellation » du Capricorne est dû au seul hasard qui met en perspective pour nous des étoiles sans aucun lien entre elles. Vu de la plus lointaine de ces étoiles, le Capricorne serait la constellation dont fait partie le Soleil.

2 Certaines de ces constellations sont bien difficiles à voir : le Crabe (ou « Cancer ») ne contient aucune étoile brillante ; mais il fallait bien donner un nom à cette portion à peu près vide du Zodiaque.

3 La naissance de Mithra était célébrée à la date du 25 décembre ; ce jour a été choisi par l'empereur Aurélien comme jour férié œcuménique de tout l'empire. C'est un siècle plus tard que cette date a été choisie pour commémorer la naissance de Jésus — jusque-là célébrée le 6 janvier, jour de l'Épiphanie (= Apparition).

4 On a retrouvé de nombreuses stèles de Mithra : à Rome ; dans le midi de la France à Fréjus, Arles, Bourg St Andéol, etc. ; à Londres ; en Rhénanie. Elles sont toutes organisées autour d'un zodiaque.

› Attendez un peu, mais oui, le Soleil était bien dans les Gémeaux un 12 juin. Mais c'était il y a quatre cents ans ([1]). Si c'est vraiment votre signe, vous ne faites pas votre âge.

› Non, encore un peu de patience : Gémeaux ou Taureau, la constellation où se trouvait le Soleil ce jour-là était lointaine et invisible : derrière le Soleil, on ne pouvait la voir ni de nuit, ni de jour.

› Quelles sont donc les étoiles qui dominent la nuit du 12 juin, celles dont nous étions « proches » à l'instant de votre naissance, celles vers lesquelles la Terre se trouvait dirigée dans son mouvement autour du Soleil ? S'il y en a qui ont pu influencer votre destin, ce sont bien celles-là. Elles sont à mi-chemin du Scorpion et du Sagittaire, car la Terre se trouvait ce jour-là en direction de l'étoile « Thêta du Serpent ». Si vous êtes « quelque chose », vous êtes donc Serpent.

L'astronomie vous offre ainsi le choix entre Gémeaux, Sagittaire, Scorpion, Serpent, Taureau (par ordre alphabétique) ; vous devriez trouver là-dedans un horoscope réconfortant.

Et les astrologues contemporains, comment font-ils donc ? C'est simple, ils ont choisi de négliger les étoiles du jour de la naissance ; ils se contentent d'un zodiaque en papier, celui qu'on lit sur les calendriers. Astrologie sans astres.

Si vous êtes "Gémeaux", ça signifie simplement que vous avez été conçu(e) à la fin de l'été ([2]). Il pourrait bien exister une influence des saisons sur les individus, comme sur les fraises ; mais on peut douter d'une influence notable du jour (ou de l'heure) de la naissance et de la conception : l'homme n'est pas un fraisier, c'est « l'animal qui fait l'amour en toute saison », ses aptitudes reproductives varient peu au fil des mois.

gamme céleste

Revenons à la « température froide » des planètes. Nous avons constaté que le plan et le sens de rotation sont pratiquement les mêmes pour toutes les planètes.

Mais pour la période de rotation, c'est l'anarchie : Mercure tourne autour du Soleil en 88 jours, la Terre en 365 jours, Pluton en 248 ans et 5 mois. Un puzzle à interpréter. Faisons comme Pythagore, comparons cette répartition avec la gamme musicale. En musique, le rapport des périodes de deux notes s'appelle un *intervalle*. Sur un piano, l'intervalle entre deux touches consécutives est constant ([3]) ; la valeur de cet intervalle, c'est ce qu'on appelle un « demi-ton » ([4]).

---

1 Pourquoi ce décalage? Parce que, sous l'action de la Lune et du Soleil, l'équateur terrestre ne reste pas exactement parallèle à l'écliptique ; il se « balance » lentement autour ; on appelle ça la « précession des équinoxes ». Encore une découverte d'Hipparque (p. 18). Il aurait su calculer sans faute la position du Soleil le jour de votre naissance, à 21 siècles dans son futur.

2 À condition que ça se soit passé dans l'hémisphère nord…

3 On dit que les fréquences sont *en progression géométrique*.

4 Si un piano est déclaré « juste », « bien tempéré », c'est que son demi-ton vaut 0.943874…, c'est-à-dire $2^{-1/12}$. Ainsi le veut la coutume occidentale actuelle, qui a supplanté au XVII$^{\text{ème}}$ siècle celle de Pythagore.

Pour représenter graphiquement les périodes des notes, il est commode de représenter des intervalles égaux par des distances égales ; c'est à peu près ce qu'on fait sur une portée musicale. Mathématiquement, ce procédé est pratiqué depuis 1614 ([1]).

Appliquons-le aux planètes, dessinons des traits parallèles verticaux représentant leurs fréquences : ces traits sont sensiblement équidistants. On peut vérifier en dessinant en dessous un « clavier » accordé rigoureusement, ce qui fournit la figure 19 ([2]).

On constate bien sur cette figure que les traits représentant les planètes sont proches des milieux des touches. Leurs fréquences se répartissent donc tout près d'une *progression géométrique*, comme celle des notes d'un piano.

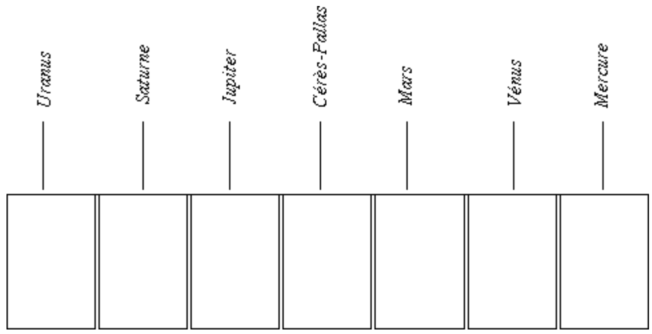


Figure 19. La gamme des planètes.

Mais qu'avons-nous fait ? Nous avons oublié de placer la Terre, qui doit s'insérer entre Vénus et Mars : réparons au plus tôt. Voici ce que ça donne :

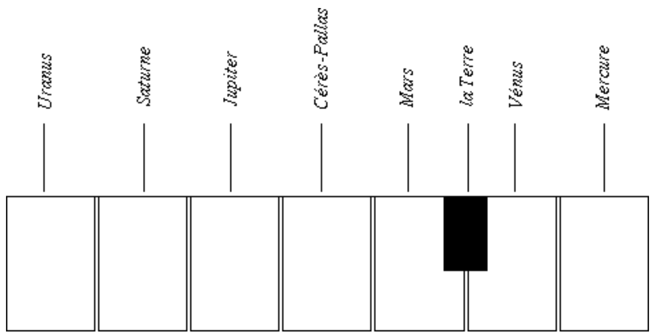


Figure 20. La Terre, en demi-ton…

Une seule touche noire sur ce clavier : la Terre. C'est bien la preuve que notre planète bleue est exceptionnelle.

Dans cette gamme ajustée aux planètes, le *demi-ton* vaut 0.616. L'astronome qui vient de faire cet ajustement, tout content, en parle à son collègue mathématicien :

— C'est curieux, le nombre 0.616 joue un rôle tout à fait spécial dans le Système Solaire. Par exemple, 0.616, c'est l'année vénusienne comptée en années terrestres. Mais il n'y a pas que Vénus, regarde comme elle est bien assortie aux planètes, ma gamme ! "

1 Il s'agit des « logarithmes » du baron John Neper (clé 3).

2 La fréquence d'une planète, c'est l'angle qu'elle décrit autour du Soleil en un an, compté en tours. La figure comporte les planètes connues au début du XIXème siècle. La plus lourde des « petites planètes », Cérès, a été découverte en 1801, puis perdue ; en la cherchant, on a découvert en 1802 Pallas, dont la période est pratiquement la même (1681 et 1684 jours). Voir ci-dessous nocturne, p. 106.

— Ah tiens ! très intéressant … Mais ce demi-ton, ça ne serait pas plutôt 0.618 et des poussières ? "

— Ça c'est comme tu veux, la gamme des planètes n'est pas parfaitement accordée, alors… Et d'ailleurs ça ne fait aucune différence visible sur la figure. Mais pourquoi donc 0. 618 ? "

— Mais c'est bien toi qui m'a raconté un jour que la fréquence de Vénus, plus celle de Mars, plus deux fois celle de la Terre, ça fait tout juste la fréquence de Mercure ? "

— Oui, c'est une remarque que j'ai empruntée à Moltchanov ; le résultat est très précis (à 99. 87 % !). Eh bien, pour que ta gamme et ta remarque soient toutes les deux exactes, il faudrait que la valeur du demi-ton soit très précisément :

0. 618 033 988 749 894 848 . . .

et ce nombre-là, ce n'est pas n'importe lequel ; il s'appelle

le Nombre d'Or "

Nombre d'Or ! Notre astronome en a déjà entendu parler, mais il n'imaginait pas que ça puisse le concerner. Il demande donc à son collègue quelques explications — mais pas un cours complet, précise-t-il.

— " Le Nombre d'Or, pour nous les mathématiciens, c'est une solution d'une équation très simple. ✯

Mais on peut aussi obtenir le Nombre d'Or par des formules *infinies* ; je t'en écris deux, simplement parce qu'elles sont assez jolies :

$$\cfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}}}}} \qquad \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}}}$$

dissonances et résonances

Le mathématicien poursuit:

— Une autre propriété du Nombre d'Or, c'est d'être *le plus dissonant de tous les nombres*.

Un nombre *résonant*, c'est une fraction simple, par exemple 1/2 ou 2/3. On apprécie les résonances en musique : ce sont les intervalles appelés *octave* et *quinte* ([1]).

Mais il y a des nombres qui ne sont pas résonants ; des nombres *dissonants* qu'on ne peut pas écrire avec une fraction ; le nombre « pi » par exemple ([2]).

1 De do à do ou sol : huit ou cinq touches blanches sur un piano ("octaves" ou "quintes"). C'est sur la quinte que sont accordées les cordes du violon solo. La gamme de Pythagore suppose la quinte résonante, mais pas la gamme tempérée (qui ne respecte que la résonance des octaves).

2 Au lieu de résonant ou dissonant, les mathématiciens disent « rationnel » « irrationnel ». Pourquoi donc ? Parce qu'un sens primitif du mot « ratio » ou « raison », c'est rapport, proportion, taux. Même s'ils étaient très mal vus par les pythagoriciens, les nombres « irrationnels » sont quand même accessibles à la froide raison : notre mathématicien est capable de raisonner sur le dissonant.

Il est possible d'évaluer la « *dissonance* » d'un nombre. Sur la fig. 21, j'ai essayé de te dessiner la dissonance des nombres compris entre zéro et un ; c'est assez difficile, parce qu'il s'agit d'une figure un peu « fractale », comme on dit. ✯

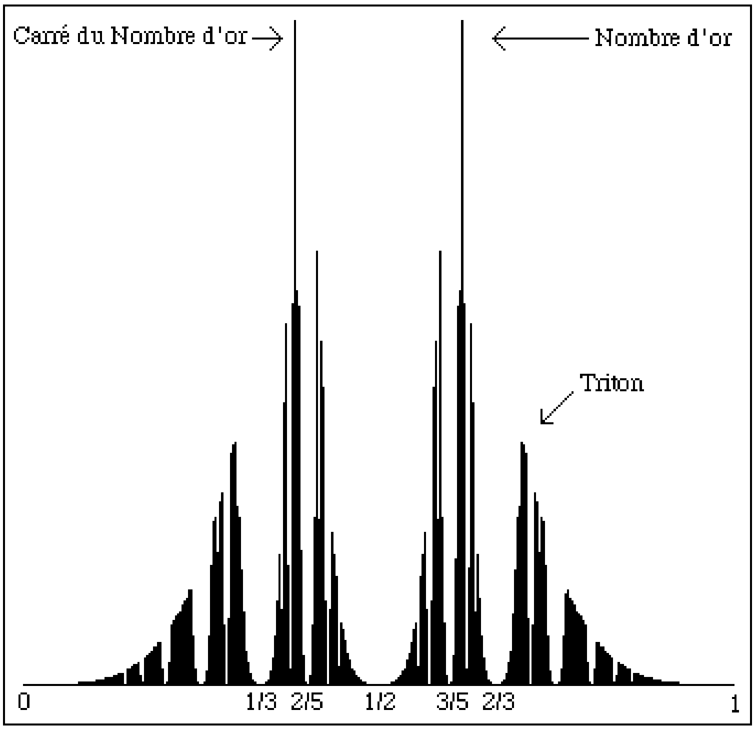


Figure 21. Échelle des dissonances

Tu vois sur cette figure deux pics très pointus qui battent le record de dissonance ; eh bien il s'agit du Nombre d'Or et de son carré : juste le demi-ton et le ton qui constituent la gamme des planètes. Tellement même qu'on a renoncé à s'en servir en musique ([1]).

Par contre on en use et on en abuse dans les arts de l'espace. Le Nombre d'Or, on le retrouve un peu partout : peut-être dans la Grande Pyramide, dans les Mesures du corps humain de Léonard de Vinci, dans la forme du violon, dans les Demoiselles d'Avignon de Picasso ; certainement dans le format du papier à lettres et celui des cartes de crédit. Kepler le cherchait déjà dans les mouvements des planètes. "

Le mathématicien commente :

— Tout à l'heure, nous avons rencontré le Nombre d'Or comme clé des fréquences des planètes — ce qui introduit la pire *dissonance* dans l'harmonie des sphères. Mais nous sommes partis de la remarque de Moltchanov (p. 98): et lui, il y voyait une *résonance* de ces mêmes planètes. Apparemment, résonance et dissonance, ça se ressemble plus qu'on ne pourrait le croire. " ✯

---

1 Ce qu'on utilise de plus dissonant en musique correspond à un autre pic de cette figure, situé à la valeur $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707\ldots$ C'est l'intervalle appelé " triton ", " quarte augmentée " , " quinte diminuée ", " Diabolus in musica ". Camille Saint Saens en a usé systématiquement dans sa Danse Macabre. " Le be-bop, c'est essentiellement l'art de diminuer les quintes ", écrivait Boris Vian. Graphiquement, c'est cette dissonance qui produit l'irrégularité de la fig. 10 bis (p. 34). C 'est aussi le format du papier utilisé dans les photocopieuses (« A4 », 21cm/29.7cm), alors que l'ancien format "lettres" utilisait le Nombre d'Or. Nombre d'Or qui apparaît aussi dans la quasi-régularité des quasi-cristaux (fig. 10 ter, p. 35).

— Tout ça c'est bien joli ", pense l'astronome, " mais ça ne répond pas à la question cruciale : comment le Nombre d'Or pourrait-il s'être introduit subrepticement dans le mouvement des planètes ? "

Il lui vient soudain une idée : c'est peut-être à cause des *marées solaires*. Chaque planète produit dans le Soleil des forces qui tendent à l'allonger dans la direction de la planète et dans la direction opposée ([1]). Toutes ces forces se composent ; quel est l'effet résultant ?
Comme l'effet des marées terrestres : d'abord une *déformation du Soleil*, très petite ([2]). Mais déformation *mobile* dans « le séjour solaire », et produisant donc, par viscosité, des effets *dissipatifs*. Il ne s'agit que d'une toute petite part des effets dissipatifs qui se produisent dans le Système Solaire ; mais part qui dépend directement du mouvement des planètes, et qui produit un transfert d'énergie et de tournoiement du Soleil aux planètes. Effet petit, mais cumulatif. ✯

Pour analyser complètement le résultat « *séculaire* » de ces phénomènes, il faudrait que la science thermodynamique soit exacte, et que l'on connaisse toute l'histoire passée du Système Solaire…

Faute de mieux, l'astronome demande au mathématicien de composer les forces tournantes dues aux diverses planètes. Composer des mouvements circulaires ? Il connaît bien, c'est ça *l'analyse harmonique*. Et le résultat peut se visualiser par une courbe qui ondule dans un disque.

Les « grandes marées » se produisent lorsque les planètes et le Soleil sont alignés : alors la courbe passe près du bord, les actions se conjuguent : on appelle ça une « *syzygie* » ([3]). Les deux chercheurs essayent de tracer cette courbe ; mais elle est extrêmement compliquée : les effets de toutes les planètes se composent inextricablement ([4]).

Finalement ils se contentent de marquer un point de temps en temps, cent cinquante mille points répartis sur une période de dix milliards d'années. Le résultat, c'est la figure 22. Le mathématicien commente :

Cette tache n'a rien de très remarquable ; les marées se répartissent n'importe comment. Oui, mais c'était un simple essai, je l'ai calculé en choisissant n'importe comment le demi-ton de ta gamme. Et si j'essayais maintenant le *Nombre d'Or* ? "
C'est ainsi qu'il établit la figure 23 :

1 Les divers points du Soleil ne sont pas à la même distance de la planète, et ne subissent donc pas la même attraction de la part de celle-ci. La différence entre l'attraction en un point et l'attraction moyenne, voilà la force qui semble agir en ce point pour produire la marée.

2 De l'ordre du millimètre ; à comparer aux décimètres des marées terrestres.

3 « syzygie » = « conjugaison » = attelage de deux bœufs sous un même joug.

4 Les effets principaux sont dus à Jupiter et à Vénus (presque à égalité) ; ensuite la Terre et Mercure ; les autres planètes comptent peu.

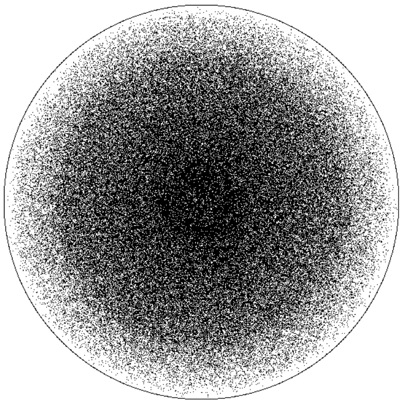


Figure 22. Des marées sur le Soleil

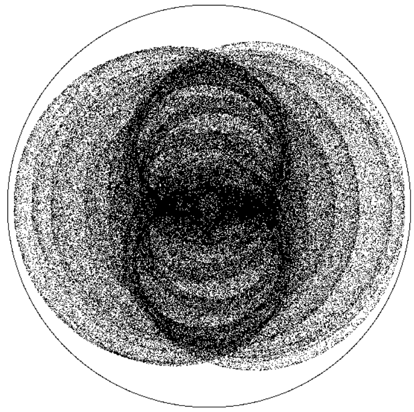


Figure 23. Apparition d'une régularité secrète

Extraordinaire ! Sur cette figure, construite avec les masses réelles des planètes du système solaire, la tache est structurée ; on voit apparaître quelque chose. Eh oui, je vois ce que cette figure représente, *c'est un groupe* ! Un groupe bien malmené, apparemment, mais un vrai groupe quand même ([1]). Et à cause de ce groupe, la tache évite le bord du disque ; si elles se concertent selon la gamme du Nombre d'Or, les planètes évitent la syzygie ! "

L'astronome acquiesce :
" Très remarquable, en effet. Mais comment diable les planètes auraient-elles pu trouver ce moyen de limiter les effets dissipatifs ? …
" Ah mais voilà, il me vient une idée ; et si c'est vrai, les planètes pourraient aussi bien s'être mises en résonance. Essaye donc la résonance la plus simple, un demi-ton égal à 1/2 . "
Le mathématicien produit la figure 24. ✯

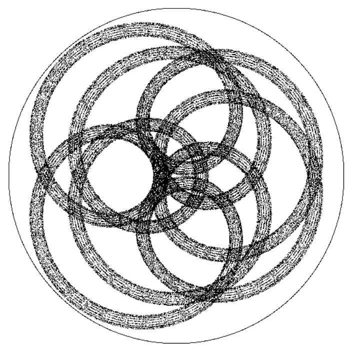


Figure 24. Résonance fiction

Commentaire de l'astronome : — Hé hé … ce n'est pas si différent, au fond ([2]) ; là aussi, l'*énergie est économisée* ! Si je t'ai demandé ça, c'est parce que je pensais au couple Neptune-Pluton : ce sont les planètes les plus lointaines du Système Solaire, et elles sont en résonance ([3]).

---

1 Ce groupe peut se figurer comme un tuyau refermé sur lui-même ; la figure 23, c'est simplement ce tuyau tordu et écrasé sur le papier.
2 Ce qui est dessiné cette fois-ci sur le disque, c'est une courbe fermée, soigneusement disposée sur le papier ; un groupe de dimension 1 ; la dimension valait 2 dans le cas du Nombre d'Or.
3 Le rapport des périodes de Pluton et Neptune est 0. 6652. Bien proche de $\frac{2}{3}$ = 0. 66666…, presque aussi bien que l'accord de quinte sur un piano tempéré. Aucune résonance aussi forte entre les autres couples de planètes.

Regarde sur la gamme (fig. 25), c'est comme ça qu'elles se partagent la touche basse du clavier. "

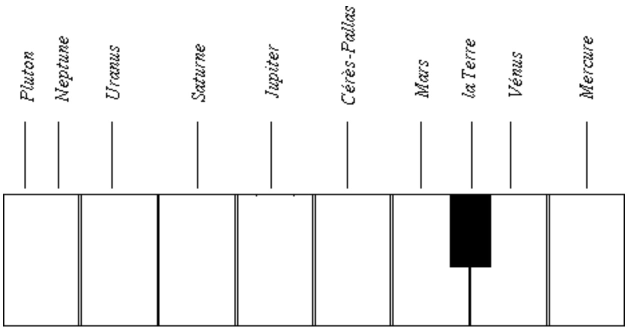


Figure 25. Gamme céleste achevée

Il est donc clair que résonances et dissonances sont associées dans les mouvements des planètes autour du Soleil. Saurais-tu effectuer cette association ? "
— Mais oui, s'écrie le mathématicien ; simple exercice d'analyse harmonique ! "
Aussitôt dit, aussitôt fait : effectivement, les mouvements des planètes s'obtiennent en associant une fraction simple avec le Nombre d'Or. ✯

Et une association analogue suffit à classer les mouvements apparents des *satellites de Jupiter et de Saturne* ; avec en prime :

- le mouvement apparent du *Soleil* autour de ces planètes ;
- le mouvement des *anneaux* de Saturne, avec les *divisions* principales qui les coupent en trois… ([1]) . ✯

Ces régularités constatées dans le mouvement du Système Solaire, on peut les interpréter comme des *structures dissipatives*. Une structure dissipative, c'est un mouvement qui est à la fois *le fruit d'une évolution dissipative* et un état *économisant la dissipation.* Mais leur théorie générale pose encore quelques questions…

1 Voir les figures dans les pages rouges, pp . 238-239.

L'évolution du Système Solaire n’est pas achevée : les astrophysiciens prévoient que le Soleil doit se mettre à gonfler, tellement qu'il pourrait peut-être avaler ses planètes d'ici quatre ou cinq milliards d'années.

La fin de l'histoire ? après cette dernière dissipation, le Soleil s'éteint en continuant à tourner lentement :

équilibre froid, la fin de notre monde

VI

MACROCOSMOS

AU-DELÀ DES NUAGES

à l'œil nu

Dans le ciel, nos yeux distinguent la Lune, le Soleil, les planètes. Les astronomes nous le disent : la distance de ces objets atteint quelques *heures-lumière* ([1]). ✯
Les étoiles : dans les meilleures conditions, nos yeux en découvrent quelques milliers ; leurs distances se répartissent entre trois et quelques milliers d'*années-lumière*. ✯

Quand elles sont trop loin pour que nous puissions les distinguer individuellement, les étoiles se fondent en une brume laiteuse, la *Voie Lactée* (ne comptons pas la voir en ville ; il faut s'éloigner des éclairages). Elle dessine tout autour du ciel un immense anneau. Les Grecs l'appelaient «*galaxias cyclos* », le cercle de lait ; on dit aujourd'hui *la Galaxie*. Elle contient environ cent milliards d'étoiles ; son diamètre est de cent mille années-lumière.

Nos yeux nous permettent-ils de voir encore plus loin ? Oui : lorsqu'on est dans l'hémisphère sud, deux petits nuages semblent suspendus dans le ciel : les « Nuages de Magellan ». Dans l'hémisphère nord, on peut apercevoir la « Nébuleuse d'Andromède ». La figure 26 peut aider à la retrouver ([2]).

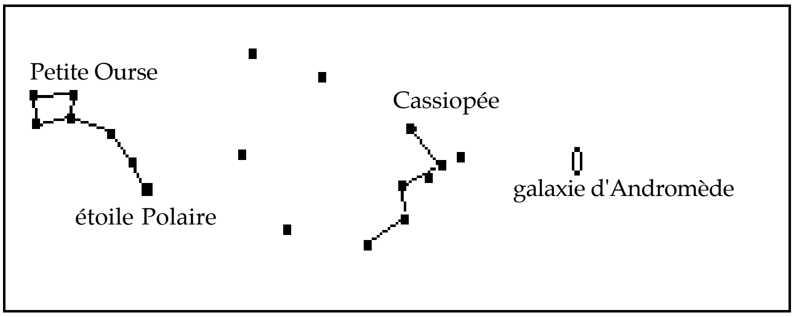


Figure 26. Pour les soirs d'automne

«*Nébuleuse* » ou « *nuage* », le même mot, évoquant l'apparence de ces objets. Leur structure se découvre au télescope : ils sont composés d'étoiles, tout comme notre Galaxie ; c'est pourquoi on les appelle «*des galaxies* ».

---

1 Heure-lumière, année-lumière,…, etc : distance parcourue par la lumière en une heure, une année…, etc.

2 La période la plus favorable est le début de l'automne, où elle est le plus haut au-dessus de l'horizon vers minuit. C'est un grand objet : elle occupe dans le ciel une surface proche de celle d'un croissant de Lune. Mais elle est très pâle, juste comme la Voie Lactée ; un bon quart d'heure d'obscurité totale est utile pour se préparer à la voir. Des jumelles ordinaires améliorent sa visibilité.

On voit donc à l'œil nu trois galaxies extérieures à la nôtre. À quelles distances ? *Deux cent mille* années-lumière pour les Nuages de Magellan ; *deux millions* d'années-lumière pour Andromède.

Comment est-elle faite, cette galaxie d'Andromède ? à peu près comme la nôtre. Tout est analogue : dimension, nombre d'étoiles, vitesse de rotation ([1]).

Par comparaison, les Nuages de Magellan sont des galaxies « *naines* », « *irrégulières* », des satellites de notre propre Galaxie.

poussière de galaxies

Et au-delà ?

Au-delà de cent millions d'années-lumière, les télescopes sont nécessaires ; ils nous montrent

encore et partout des galaxies.

Comment sont réparties ces galaxies dans le ciel ?

Découverte fondamentale, acquise à partir des années 1920 grâce à la construction de très grands télescopes : à grande échelle, le ciel est *saupoudré de galaxies, également réparties dans toutes les directions* — avec simplement des fluctuations locales.

Leurs différents types ont été classés : en dehors des « *galaxies spirales* » comme la nôtre, et des « *galaxies irrégulières* », il existe aussi des « *galaxies elliptiques* ».

Certaines galaxies ont un noyau central particulièrement brillant — qui peut éclipser par contraste la galaxie elle-même. Il s'agit d'un ***quasar*** ([2]).

Même si la structure intime des quasars nous est encore mal connue, ces objets nous apprennent beaucoup de choses par leur simple présence : ils jalonnent les régions les plus lointaines de l'Univers. ✯

Les différents types d'objets sont eux aussi répartis également dans toutes les directions. Il n'y a pas de zone du ciel privilégiée pour y découvrir des merveilles particulières ; on dit que le ciel est *isotrope* ([3]) ✯

nocturne

A la fin du XVIIIème siècle, dans la ville de Brême, un médecin insomniaque passait ses nuits à scruter le ciel avec une lunette qu'il avait installée sur son toit.

C'est ainsi qu'Heinrich Olbers eut le rare privilège de découvrir l'une des planètes du Système Solaire ([4]). Des comètes aussi. Et pas du tout par hasard : il avait inventé une nouvelle méthode pour déterminer les orbites.

---

1 pp. 91-92, *manèges dans le ciel*.

2 p. 92.

3 « Isotrope » = « pareil-tourner » : l'aspect général du ciel lointain ne change pas quant on fait tourner son image en faisant tourner le télescope. Ainsi apparaît un groupe, le « groupe des rotations » .

4 Il cherchait Cérès, il a trouvé Pallas.

C'est pourquoi on le prit au sérieux le jour où il posa à la communauté astronomique une question embarrassante — que d'autres avaient déjà murmurée plus discrètement ([1]) : si l'espace infini est uniformément rempli d'astres, en quelque direction que l'on regarde, on doit finir par rencontrer une étoile. Le fond du ciel n'étant ainsi composé que d'étoiles, il devrait être aussi brillant qu'elles, que le Soleil par exemple. Et nous serions grillés comme des fourmis sur lesquelles on concentrerait la lumière du Soleil avec une loupe.

Alors comment peut-il faire nuit ?

Les explications du type : " ces étoiles sont si loin ", " il y a de la poussière interposée ", ne tiennent pas la route — si du moins on s'en tient à la physique connue. Près de deux siècles plus tard, le *paradoxe d'Olbers* exige toujours une réponse.

En voici une : le paradoxe n'apparaît que si nous imaginons un Univers à la fois homogène et *immobile* ([2]).

Il suffit que les astres lointains soient en mouvement, qu'ils s'éloignent assez vite de nous : alors leurs photons ne peuvent nous atteindre qu'avec une énergie atténuée, et le fond du ciel sera frais ([3]).

Ce que nous enseigne le ciel nocturne, c'est que l'Univers est en mouvement ; et il nous indique le sens de ce mouvement : puisque les nuits sont fraîches, les astres les plus lointains s'éloignent ; on dit que

« l'Univers est en expansion »

signature des atomes

Comment le vérifier ? à l'aide d'un simple instrument, le *spectromètre*, qui mesure l'énergie individuelle des photons que nous recevons des objets célestes.

Chaque atome peut émettre des photons, mais pas n'importe lesquels : leurs énergies sont réparties principalement sur quelques valeurs particulières, qui constituent une "signature " de l'atome ; signature qu'on appelle *spectre*.

La lumière que nous recevons d'une galaxie vient surtout des atomes situés à la surface de ses étoiles ; le spectromètre permet donc d'*analyser les étoiles*.

Supposons qu'une étoile se rapproche ou s'éloigne de nous. Alors l'énergie des photons que nous en recevons est *décalée* ; il s'agit de *l'effet Doppler-Fizeau* que nous avons déjà rencontré (p. 73).

Aucun danger cependant que ceci nous fasse prendre un atome pour un autre : **l'effet Doppler-Fizeau**, phénomène géométrique, *décale de la même façon tous les photons émis par un même atome.*

Aucune difficulté pour identifier les spectres ainsi décalés : c'est comme une signature au bas d'un document, qu'on lit aussi bien si elle est écrite à gauche, à droite ou au milieu ([4]).

---

1 Notamment en 1744 à Lausanne, J. P. L. de Chésaux.

2 Dans un Univers immobile contenant uniformément étoiles et poussière, la poussière aurait été chauffée progressivement par le rayonnement des étoiles jusqu'à ce qu'elle atteigne leur température, et elle brillerait tout autant.

3 Frais, ça ne signifie pas forcément noir : la vraie couleur de la nuit, c'est infra-rouge (voir p. 108).

4 Cette constance élimine d'autres causes éventuelles du décalage, telles que la rencontre des photons avec des poussières : dans ce cas la signature serait barbouillée, effacée, illisible.

Les mesures spectrométriques nous renseignent donc à la fois sur la *composition* des galaxies, et sur leur *cinématique* ([1]). Voici les résultats :

- ***Unité de la matière*** : les atomes qu'on détecte dans les galaxies sont tous identifiés. Vérification directe du principe d'unité de la matière, principe qui a émergé à la Renaissance et qui a donné naissance au mot «*Univers* ».
- Pas d'exotisme galactique : les atomes les plus lointains, ceux qu'on détecte dans la lumière émise par les quasars et qui sont donc présents dans ces quasars mêmes, sont courants sur Terre.
- Les plus visibles sont *l'hydrogène, le carbone, l'oxygène, l'azote* : quelques-uns parmi la centaine de types d'atomes qui existent, mais ceux-là mêmes qui sont prépondérants dans la matière vivante : nous sommes faits de la matière la plus banale de l'Univers.
- ***Cinématique*** : l'observation confirme ce que suggère le ciel nocturne. Toutes les galaxies s'éloignent de nous ([2]), et la vitesse d'éloignement croît régulièrement avec la distance : c'est la *loi de Hubble*, découverte en 1929. Le taux de cette loi, appelé « constante de Hubble », est un nombre-clé de la cosmologie ; mais sa détermination est peu précise — parce qu'il est difficile de mesurer la distance des galaxies. On espère connaître cette constante avec une erreur inférieure à quinze pour cent — mais on n'en est pas tout à fait sûr… ✯ L'énergie des photons émis par les galaxies lointaines est parfois 5 ou 6 fois plus petite quand nous les observons que quand ils ont été émis ([3]) ; les formules de Christian Doppler et d'Hippolyte Fizeau indiquent des vitesses d'éloignement tellement proches de celle de la lumière qu'il est nécessaire d'utiliser l'optique relativiste.

Ce sont des télescopes d'un genre particulier qui nous ont ramené l'information la plus lointaine : des télescopes qui permettent d'observer des photons « *infra-rouges* » dont la longueur d'onde est de l'ordre du centimètre ([4]).

La découverte a eu lieu en 1965 tout à fait par hasard ([5]) ; le « télescope » en question était en fait une antenne destinée à communiquer avec des satellites.
Ces photons qui proviennent du « fond du ciel », leur spectre est très précisément celui que rayonnerait un objet chauffé (si l'on peut dire…) à la température de —270° Celsius.

Ce rayonnement est le même dans toutes les directions, avec une précision étonnante : c'est ce qu'ont montré plusieurs satellites lancés pour étudier cet effet. ✯

Comment des régions aussi incroyablement distantes se sont-elles accordées pour nous envoyer un rayonnement aussi incroyablement régulier ? mystère à élucider…

---

1 « *cinématique* » = description du mouvement.

2 À l'exception de quelques unes des galaxies proches. Ce qui suggère une certaine « agitation » de la poussière de galaxies.

3 À cause de ce décalage, un rayonnement qui nous arrive « visible » a été émis dans l'« ultra-violet lointain ».

4 Celle de la lumière visible est approximativement un demi-millième de millimètre.

5 Et pourtant ce rayonnement avait été envisagé par des théoriciens, notamment George Gamow.

PESANTEUR ET DYNAMIQUE

La nuit, à la limite du sommeil, nous éprouvons la pesanteur par toutes les fibres de notre corps.

Mais nous pouvons l'éprouver autrement : en sautant, en lançant des objets. Souvenez-vous par exemple de Bruno, Galilée et Gassendi, étudiant les diverses façons de choir qui peuvent animer un caillou ([1]).

En latin, *gravis* = lourd. La pesanteur qui écrase ou anime toute chose, on l'appelle aussi *gravité*. Et la pierre ou la pomme qui tombe, on a le droit de dire qu'elle *gravite*.

Et le mouvement de la Lune ? ne serait-ce qu'une chute ? Il s'agirait d'une chute sans fin ; une chute qui maintiendrait la Lune dans le voisinage de la Terre, mais qui ne se conclurait pas par un choc sur la Terre. Bizarre, mais pas impossible…

Et les planètes ? la Terre elle-même ? et le Soleil ? Seraient-ils tous en train de tomber ?

Alors les trois lois mathématiques par lesquelles Kepler était parvenu à décrire les mouvements du Système Solaire (1618), ne seraient que des conséquences d'une *loi universelle de la gravitation*.

Il a fallu attendre 1686 pour que cette loi soit établie ; ce fut l'œuvre de Newton.

De grands progrès l'accompagnaient : elle rendait compte des marées, de l'aplatissement de la Terre, des influences mutuelles des planètes :
*ainsi était fondée la « **mécanique céleste** ».*

échapper à la pesanteur

Examinons donc la pesanteur elle-même comme un objet physique ; mieux, comme un objet géométrique.

Première remarque, que chacun peut faire : *pendant une chute, on ne se sent plus peser…*

Les spationautes le constatent bien à bord d'une station orbitale : c'est simplement parce que la station tombe avec eux qu'ils peuvent y flotter en plein milieu, y faire la sieste ; ils éprouvent l'*impesanteur* ([2]).

Et toutes les choses embarquées flottent de même. Pour maîtriser la pesanteur, une seule recette : prendre place dans un véhicule, le faire accélérer, le laisser graviter…

---

1 p. 46, *en bateau*.

2 On dit aussi *apesanteur*, *microgravité*. L'impesanteur n'est pas « produite par le vide », comme le croient certains : on fait souvent le vide sur Terre dans un instrument de laboratoire, et la pesanteur n'y est nullement modifiée.

Bien. Nous avions déjà un moyen pour embarquer dans les véhicules : *utiliser un groupe*, le groupe de Galilée ou le groupe de Poincaré ([1]).

Bon départ, mais insuffisant : ces groupes ne produisent pas les accélérations nécessaires aux spationautes. Comment faire ?

Il faut trouver un groupe plus grand,
capable de produire les bonnes accélérations.

les malheurs de Sophie

SOPHIE est toute pâle ce matin ; elle a mal dormi :

" J'ai fait un cauchemar épouvantable.

J'étais dans la brousse africaine. Pas loin de moi il y avait un troupeau d'éléphants, très tranquilles. Tout se passait bien, je n'étais pas inquiète du tout. Je regardais distraitement un buisson d'épines à côté de moi ; et sur une branche, une mouche minuscule.

Brusquement, sans prévenir, la branche et la mouche se mettent à gonfler, gonfler… C'était affreux ; la mouche était plus grande que moi, grande comme une maison, avec une trompe gigantesque. Heureusement d'ailleurs, elle n'avait pas l'air de me voir. Je me sentais paralysée ; j'avais l'impression que le temps n'avançait presque plus.

Puis le temps est reparti : sans effort, je filais comme une flèche, je me rapprochais des éléphants. Alors ce sont eux qui ont été pris dans le cauchemar : ils ont rétréci, ils ont pris la taille des chats, puis celle des souris, des moucherons.

C'est là que je me suis réveillée, avec un grand mal de cœur et un grand mal de tête. "

Sophie n'est pas une sainte, mais elle a beaucoup de sagesse :

" Après tout, qu'est-ce qui s'est passé exactement dans mon rêve ? La mouche a grossi, mais elle n'a pas écrasé la branche parce que la branche grossissait avec elle. Et si elle ne me voyait pas, c'est peut-être que ce qu'elle voyait ne changeait pas.

Et les éléphants ? malgré ce que j'ai cru voir, ont-ils vraiment changé de taille ? Si quelqu'un avait essayé de les mesurer pendant leur transformation — disons un arpenteur avec un mètre-ruban — est-ce que la transformation l'aurait gêné ? Je m'imagine très bien l'arpenteur ratatiné traînant un mètre ratatiné sur le dos de l'éléphant ratatiné — et trouvant exactement le même nombre de mètres. Tout compte fait, il n'aurait rien remarqué.

Et le temps ? Je ne pensais pas le moins du monde à regarder ma montre, mais elle ralentissait peut-être en même temps que moi ; je suis sûre qu'elle non plus n'aurait rien remarqué.

Alors mon cauchemar ? Il ne se passait rien, tout était dans ma tête.

1 Dans le groupe de Galilée, c'est le *sous-groupe de Bruno* qui est spécialisé dans les embarquements (pp. 47-48, géométrie galiléenne). La relativité selon Poincaré utilise les « *transformations de Lorentz* » (pp. 68-69, le choc des géométries).

géométrie souple

Dans la tête de SOPHIE… et dans celle d'un de ses amis.

Il est géomètre ; et il pense, comme elle, aux transformations « *souples* » qui agissent *à la fois sur l'espace et sur le temps*.

Il rêve, lui aussi, de les faire agir sur la matière (celle des mouches ou des éléphants par exemple). Comme Sophie, il a remarqué que les physiciens *ne s'apercevront de rien* si ces transformations agissent aussi sur leurs instruments de mesure : la *réalité physique restera la même*.

La même ? … c'est clair, ces transformations constituent un groupe ! ([1]) ;
*le **groupe souple**, dira le géomètre* ✯.

Ce groupe définira automatiquement une nouvelle géométrie de l'univers :
la géométrie souple.

Cette géométrie souple est aussi rigoureuse que les géométries « dures » que nous connaissions ([2]).

Nouvelle règle pour la physique :

la *matière est un " objet souple "* ;

le physicien devra donc découvrir *comment* le groupe souple agit sur elle. Einstein rêvait à un tel principe — et l'appelait
Principe Général de Relativité ([3]).

chute souple

C'est Galilée qui a découvert que tous les corps tombent dans le vide avec la même accélération ([4]). Accélération de la pesanteur, dit-on. Notre géomètre s'en inspire, et parvient à faire entrer la ***pesanteur*** en géométrie souple : la pesanteur D devient ainsi un ***objet souple*** .

Si on embarque dans une station spatiale, la pesanteur disparaît. Pourquoi donc ? Simplement parce que le groupe souple peut produire cet embarquement, et qu'il annule D. ✯

Très bien, mais comment l'objet souple D fait-il tomber les choses?
Le géomètre va vite trouver comment faire.

1 Chaque fois que nous disons "le même", "la même", "les mêmes", nous faisons appel inconsciemment à un instrument mental qui permet de comparer les objets ; et cet instrument, c'est *un groupe* (voir pp. 3-4, *la règle du jeu*).

2 Plus précisément, c'est une *géométrie solide*, au sens précis de la *clé* 2 : elle possède des *référentiels*, que les spécialistes appellent des *atlas*.

3 Quand les idées d'Einstein se répandaient en Europe, dans les années 20, Salvador Dali représentait des *" montres molles "* — exprimant ainsi que la souplesse impliquait à la fois le temps et l'espace. Mais l'imprécision de la formulation d'Einstein (qui ne parlait pas de groupe, mais seulement de « mollusques de référence ») a été à l'origine d'une interminable polémique ; beaucoup de théoriciens ont rejeté tout principe de ce genre.

4 Galilée a exprimé cette loi dans son dernier ouvrage, les Discorsi (1638).

présence de la matière ?

Pour décrire un point matériel qui tombe, pour décrire sa *ligne d'univers* ([1]), le géomètre invente un nouvel *objet souple* T, qu'il l'appelle ***présence*** du corps qui tombe.

Très astucieux : la ***loi de la chute des corps*** selon Galilée s'écrit maintenant avec une équation très simple :

$$\mathrm{TD} = 0 \,. \quad ✯$$

Le géomètre s'aperçoit alors que cette équation implique une autre loi physique : la *masse* du corps est aussi décrite par l'objet T, et elle reste *constante* au cours de la chute.

Bravo !

la loi de Galilée vient d'entrer parfaitement en géométrie souple. ✯

Un grand frisson saisit le géomètre : il pressent que cette équation $\mathrm{TD} = 0$ va beaucoup plus loin que la simple chute d'un corps.

Pour commencer, il étudie la chute de *deux corps*.

Il décrit leurs deux présences par deux objets souples T_1 et T_2 . Ces objets s'ajoutent, et leur somme $\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2$ vérifie automatiquement la même condition $\mathrm{TD} = 0$.

Ainsi le seul objet T décrit la présence des deux corps, leurs deux chutes, leurs deux masses !

Mais attention, des corps qui tombent, ils peuvent se rencontrer… Est-ce que la loi $\mathrm{TD} = 0$ pourrait nous enseigner quelque chose sur ces chocs ?

Certainement : elle produit toutes les ***lois des collisions,*** celles qui ont été découvertes au XVII^ème^ siècle par Galilée, Mariotte, Huygens ([2]).

Le géomètre se souvient alors de Démocrite et de Lucrèce, pour qui l'air n'était qu'un système d'atomes en chute perpétuelle ([3]). Et il s'écrie :

" Maintenant, le rêve de Lucrèce peut se réaliser. Chacun de ces atomes, je peux décrire sa chute par sa présence. Toutes ces présences peuvent s'ajouter : eh bien le résultat T décrit d'un seul coup la présence de *tous les atomes* constituants du fluide !

---

1 *Ligne d'univers* : voir p. 44.

2 Voir *jeux de boules sur une péniche*, pp. 58-59.

3 *modèles modernes, antiques et contemporains,* p. 15. Lucrèce affirmait que les atomes ne tombent pas tous parallèlement, que leur mouvement d'ensemble comporte des inclinaisons relatives (en latin : *clinamen*).

Et si je ne connais pas vraiment chaque particule, si je n'en ai qu'une connaissance *"moyenne"* ? Aucune difficulté, je peux faire la *moyenne* de cette présence T ; et je décrirai comme ça la présence d'un *état statistique* ([1]), qui s'insérera dans l'espace et le temps…" .

Et comment est-elle faite, cette *présence statistique* ? Tout va bien : l'air est décrit comme un *fluide*, dont la présence T exprime à la fois **densité, vitesse**, et **pression.** Alors la loi TD = 0 va nous faire connaître *les mouvements de l'air !*

Effectivement, le géomètre retrouve ainsi les équations que Leonard Euler avait écrites en 1755, exprimant en quatre lignes les résultats d'un siècle de recherches, de Torricelli à Bernoulli ([2]).

Ainsi apparaissent les ***lois de l'hydrodynamique***, élaborées aux XVII$^{\text{ème}}$ et XVIII$^{\text{ème}}$ siècles pour décrire les mouvements des liquides et des gaz. ✯

TD = 0 nous dit aussi comment le son se propage dans l'air :*bruits, musiques, paroles, vous atteindrez nos oreilles* ([3]).

Mais la loi TD = 0 s'applique à bien d'autres états de la matière :

- Elle permet de décrire la présence des ***particules à spin***, leurs chutes, leurs collisions, leurs désintégrations, leurs états statistiques. ✯
- Les ***cordes*** , les ***fils*** ? Facile ! si T est la présence d'un fil, la loi indique que ce fil possède une tension ; qu'il est rectiligne s'il est tendu et immobile ([4]).
- En assemblant des fils, le géomètre apprend à construire une toile d'araignée. Et il découvre ainsi que chaque fil transmet une *force*, et comment ces forces *se composent*.
- La loi s'applique à tous les mouvements des fils, comme les vibrations des cordes d'un violon. ✯
- Elle décrit aussi la rigidité, la souplesse et les mouvements du chevalet, de l'âme et de la caisse de ce violon.
- Ainsi peuvent se décrire toutes les membranes ou coques : un bon outil pour les constructeurs de réservoirs ou de fusées. ✯
- Règles aussi pour la *matière molle* , le *diamant*, *la marche sur les eaux des petites araignées*, le *gyroscope* et le *pendule de Foucault* ([5]).

---

1 *du flou*, p. 83.

2 Jets d'eau de Torricelli : vers 1644. Baromètre de Pascal, 1648. En 1682, la machine hydraulique de Marly permet les Grandes Eaux de Versailles. Hydrodynamique de Daniel Bernoulli : 1738.

3 Les molécules de l'air qui nous entoure sont agitées de vitesses aléatoires de plusieurs centaines de mètres par seconde, caractéristiques de la température. Or nous sommes capables d'entendre un son qui ne modifie ces vitesses que de quelques centièmes de millimètre par seconde. Paradoxe ! pourquoi ne sommes-nous pas assourdis par le bruit énorme que devrait produire cette agitation ambiante ? Qu'est-ce donc que le « silence » ?

La « présence statistique » **T** nous le dit, mais bien difficilement le modèle « particulaire ».

4 Rectiligne si on néglige la pesanteur. Mais la loi indique aussi la forme des fils pesants, comme les câbles qui relient deux pylônes. Elle indique aussi que l'équilibre d'un fil à plomb est vertical. Et puisque cette loi est universelle, rien ne changera si on remplace le plomb par l'or : la verticale est la même pour les riches et pour les pauvres.

5 Expériences célèbres de Léon Foucault (1851-52). Même au fond d'une grotte obscure, le gyroscope indique à quelle vitesse la Terre tourne sur elle-même.

Enthousiasme du géomètre :

C'est selon cette loi que la matière subit la pesanteur :
chutes, houles et marées ;
et qu'elle peut lui résister :
les arbres et les hommes se dressent vers le ciel.

La loi conduit notre sang, fait battre notre cœur ;
elle guide chacun de nos gestes et de nos tressaillements ;
le sommeil, la marche et la danse.
Dure loi de la pesanteur,
douce loi de l'amour,
je connais votre secret…"

Mais ce n'est pas tout… le géomètre décide d'étudier la statique : il va par exemple étudier la présence T d'une chaise qui flotte en impesanteur dans l'espace vide (fig. 27). ✯

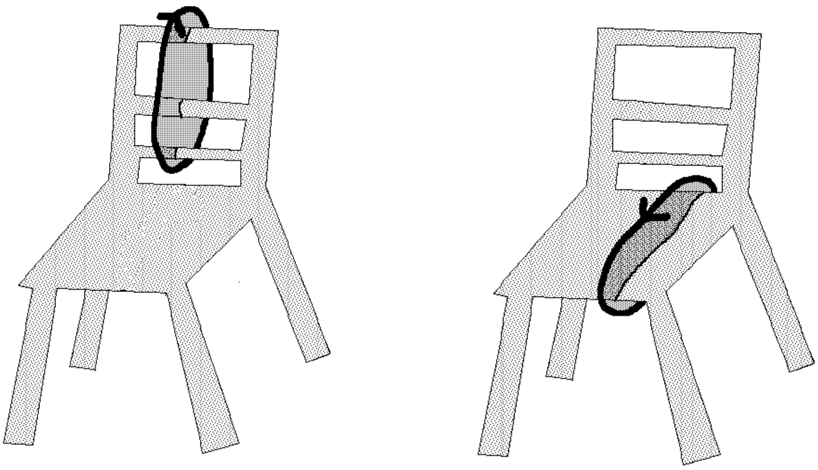


Figure 27. Efforts dans un dossier ? 27 bis. Ils sont équilibrés par le siège !

Une idée saugrenue lui vient : il imagine un disque élastique, disque qui peut traverser librement les barreaux, à condition que son bord reste extérieur à la chaise ; Il est représenté sur la figure 27.

En utilisant la présence T de la chaise, le géomètre évalue ***l'effort*** ([1]) créé par les tensions qui règnent là où le disque traverse la chaise. Et la loi $TD = 0$ indique que cet effort ne change pas si on déplace et si on déforme le disque.

La boucle qui embrasse les trois barreaux du dossier (fig. 27), imaginez un glissement élastique qui lui fait entourer la planche du siège (fig. 27 bis). Vous avez réussi ? alors vous avez *démontré* que l'effort supporté par cette planche équilibre exactement les efforts supportés par les trois barreaux du dossier. ✯

1 Effort qui se mesure par un nouvel objet que les mécaniciens appellent « torseur ». Un torseur, ce n'est qu'un *moment du groupe d'Euclide*. Voir *force et lumière*, p. 38.

Joie du géomètre :

leviers d'Archimède,
arcs-boutants des cathédrales, architectures,
je connais le secret de vos équilibres !

Son optimisme est un peu prématuré : il avait dû négliger la pesanteur de la chaise. Mais avec beaucoup de travail, il arrive à formuler quelques théorèmes irréprochables, par exemple le suivant :

" Si vous êtes debout et immobile sur une bascule, vos pieds exercent sur elle une force verticale ; elle se mesure par le produit de votre masse par l'accélération de la pesanteur…"

— Grande découverte, lui affirme gentiment MAX, son collègue physicien ([1]) ; tu viens d'inventer *le poids*…

Mais notre géomètre ne se laisse pas démonter. Ce qu'il avait fait avec des disques dans l'espace, il s'ingénie à l'adapter à l'espace-temps à 4 dimensions. ✯

Ainsi apparaît une conséquence importante de la loi $\mathrm{TD} = 0$: dans certaines conditions, *dix grandeurs* sont attachées au mouvement de chaque chose, et restent constantes. Dix grandeurs constituant un objet géométrique $\boldsymbol{J}$. Qu'est-ce que c'est donc que cet objet ?

Le géomètre pose la question à MAX. Réponse immédiate :

— Évidemment, ton objet $\boldsymbol{J}$ est constitué par des choses que je connais bien : d'abord la *masse* ; puis trois composantes pour *l'impulsion*, trois pour le *passage*, trois pour le *tournoiement*. "

Comment Max a-t-il reconnu ces dix grandeurs ? Tout simplement parce qu'il a rapidement calculé $\boldsymbol{J}$ dans le cas le plus simple, celui des particules libres. Et il a cru reconnaître le moment qu'il connaissait depuis longtemps ([2]). ✯

Le géomètre poursuit sa méditation à haute voix :

" Jusqu'à présent, j'avais supposé qu'on pouvait annuler la pesanteur par la chute libre dans une bonne partie de l'Univers ([3]).

Ça me fournissait un modèle pratique, qui permettait de décrire la pesanteur que nous éprouvons au repos, quand nous nous appuyons sur la Terre par l'intermédiaire des planchers, des sièges ou des lits.

C'est avec ce modèle que j'ai pu étudier les constructions pesantes : c'est le modèle qui convient aux architectes.

Mais avec ce modèle, toutes les verticales sont parallèles, l'intensité de la gravité est constante…alors la Terre serait plate !

1 Il ressemble peut-être un peu à Max Planck (1858-1947). Un peu seulement…

2 Voir *matérialisme idéal*, p. 60.

3 La géométrie souple nous a seulement enseigné qu'on pouvait annuler la pesanteur *en un point* de l'Univers.

Nous avons tous été traumatisés quand nous avons appris que la Terre est ronde ; qu'il y a quelque part des hommes qui marchent les pieds en face des nôtres ([1]), sans éprouver de malaise particulier. Et honnêtement, peux-tu réellement le concevoir ? C'est en voyageant, en observant l'horizon marin, que tu verras comment la courbure de la Terre est accompagnée d'une *courbure de la pesanteur* ([2]). ✭

Cette courbure, je sais l'évaluer partout ([3]). Et c'est ici même qu'elle est la plus forte, à des années-lumière à la ronde. Pourquoi ? simplement parce que la courbure à la surface d'un corps sphérique ne dépend que de la *densité* de ce corps ; or le globe le plus dense du Système Solaire, c'est la Terre. ✭

Voilà pourquoi le spationaute qui fait une sieste en impesanteur au milieu d'une station orbitale dérive assez rapidement : un petit choc contre la paroi le réveillera brusquement. À bord d'une sonde qui atteindra des régions où la pesanteur est moins courbée, par exemple entre la Terre et Mars, les spationautes pourraient sortir dans l'espace sans avoir réellement besoin de s'attacher ; mais ce sera probablement interdit par les règlements.

Ces divers exemples suggèrent que l'association à la matière d'un objet souple T, solution de l'équation $\mathrm{TD} = 0$, est une ***loi universelle***.

Cette équation, nous allons l'appeler *loi de la dynamique*, ou, plus brièvement :

la dynamique.

DESSINER LA PHYSIQUE

Pour assembler les notions qui fondent la physique, il est utile de tracer quelques schémas. Commençons par « dessiner » l'Univers, support du *groupe souple* S :

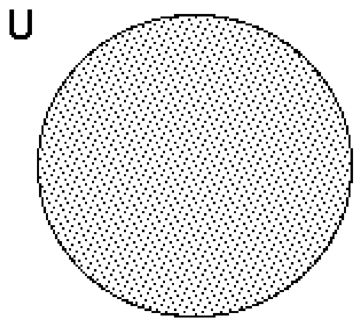


Figure 28 : simple portrait de l'Univers

1 *Antipodes* ? « pieds opposés » .

2 Fort improprement, on parle de « courbure de l'espace » au lieu de « courbure de la pesanteur ».

3 Elle se décrit géométriquement par un objet souple **R** associé à la pesanteur **D**. **R** comme *Riemann* (voir les pages rouges).

Mais un peu plus tôt ([1]), nous avions accordé à l'univers une autre géométrie : celle du *groupe de Poincaré*.

Le groupe de Poincaré est contenu dans le groupe souple ; mais comment l'y retrouver ?

Hermann Minkowski, géomètre des nombres, a inventé une réponse en 1908. En voici l'essentiel : il suffit de créer un objet souple dont la *régularité* sera le groupe de Poincaré ([2]). L'objet choisi par Minkowski, on l'écrit $\mathbf{g}$, on l'appelle

métrique. ✯

D'où vient ce nom ? « *metron »* = mesure; la *métrique* sert à ***mesurer***, à mesurer les durées et les distances.

Comment mesure-t-on les distances ? en comptant des unités de longueur.

Et les durées ? En comptant des unités de temps.

Eh bien les transformations souples de l'Univers, qui agissent sur les "unités" aussi bien que sur les « distances » et sur les « durées », ne changent rien à ces décomptes ([3]). Le résultat de la mesure ne dépend donc que de l'objet souple « métrique », plus précisément de son *type* ([4]).

La métrique $\mathbf{g}$ possède une autre vertu : on peut lui associer géométriquement une pesanteur D ; on peut concevoir que D, c'est « la pesanteur pour laquelle la métrique $\mathbf{g}$ ne tombe pas ». Si on veut exprimer ça par une équation, on écrira :

$$\mathrm{D}\mathbf{g} = 0$$ ✯

En particulier la *métrique de Minkowski* est associée à la *pesanteur nulle.* Pour décrire *la pesanteur réelle*, celle que nous ressentons comme celle qui règne dans l'Univers, il faudra donc envisager *une autre métrique*. Laquelle ? Où la chercher ? Dans l'ensemble **M** de *toutes les métriques possibles,* qui est représenté sur la figure 29.

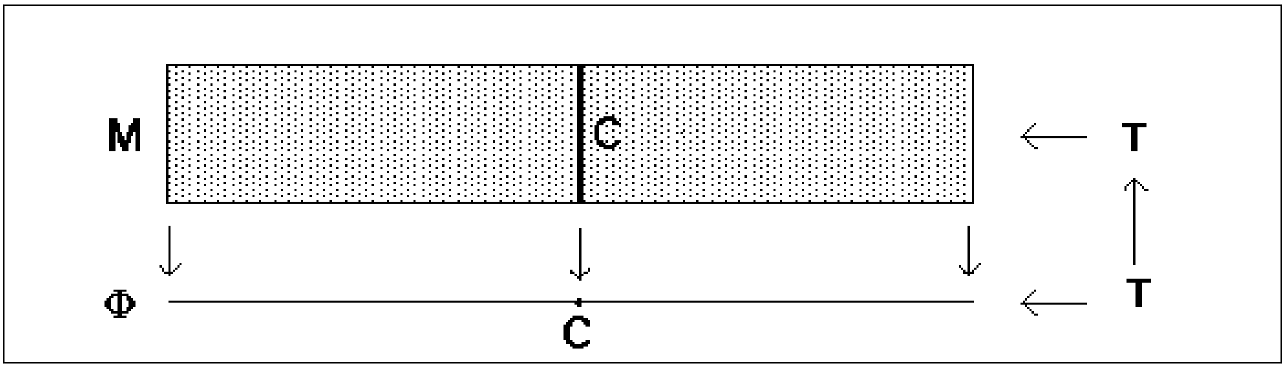


Figure 29 : types de métriques…

Sous l'action du groupe souple, les métriques constituant **M** se répartissent en *familles* : elles sont représentées *verticalement* dans l'espace **M** (figure 29).

1 *nouvelle relativité*, p. 67.

2 La régularité d'un objet géométrique, c'est un groupe. Voir *la règle des règles*, pp. 29-30.

3 Sophie s'en était déjà rendu compte (*les malheurs de Sophie,* p. 110).

4 Type ? Voir *l'origine des espèces*, p. 29.

Parmi toutes ces familles, il y en a une qui est « *réelle* » : celle qui règne dans l'Univers, qui est l'objet de la quête des astronomes aussi bien que des historiens : elle s'appelle **C** sur le dessin. ✯

Physis et attraction

Souvenons-nous que chaque ***famille*** est associée à un ***type*** ([1]).

Sur la figure 29, en dessous de **M**, on aperçoit l'espace de ces « ***types*** ». Il s'appelle Φ (phi…).

Ce nouvel espace Φ possède sa propre *géométrie souple* ; il peut héberger lui aussi des objets souples, par exemple un *tenseur* T.

Dans ce cas, la géométrie souple permet de *relever* T sur l'espace **M** des métriques ; et ce relevé possède automatiquement une propriété qui s'écrit

$$TD = 0 \qquad ✯$$

Oh oh… nous l'avons déjà rencontrée, cette formule : c'était ***la dynamique*** (p. 116).

L'origine de la dynamique, c'est donc ce nouvel espace Φ ; en cet honneur, nous dirons que

Φ*, c'est la* ***Physis*** ([2]).

Oui… mais comment pouvons nous ***choisir*** ce tenseur T sur la Physis Φ ? Eh bien il existe sur Φ un tenseur qui est *seul de son espèce* ([3]) ; alors ce tenseur se décrira par une nouvelle relation

$$T = S(\mathbf{g})$$

qui nous indiquera comment sont liées la *présence de la matière* T et la métrique $\mathbf{g}$; et par surcroît la *pesanteur* D que nous recherchions.

Voilà la transcription en *géométrie souple* de la *loi de l'attraction universelle* de Newton ;

Eh bien cette relation $T = S(\mathbf{g})$,

c'est **l'équation d'Einstein** ✯

Mais attention ! la confrontation de cette équation d'Einstein avec les observations implique le choix de deux *unités de mesure* : ***unités gravitationnelles*** de *temps* et de *masse*.

Si on tient à conserver des unités habituelles, il faudra faire intervenir deux « constantes »: la ***constante de la gravitation*** (celle de Newton et Cavendish), et la **constante cosmologique** (beaucoup plus récente). ([4])

---

1 *l'origine des espèces*, p. 29.

2 Pour Héraclite, Empédocle, Épicure, Platon, Aristote, le mot "Physis" signifiait "destin", "évolution", "nécessité". Voilà l'origine du mot "Physique" ; et aussi du mot "Métaphysique".

3 Espèce ? espèce pour la géométrie souple de la Physis Φ. Souvenons-nous toujours de *l'origine des espèces* (p. 29).

4 Certains n'hésitent pas à désigner cette *constante cosmologique* comme " *énergie noire* " ou « *énergie du vide* », bien qu'il ne s'agisse nullement d'une énergie.

Ce sont les expériences et les observations qui permettront de préciser la valeur de ces constantes ; c'est la géométrie souple qui assurera la valeur universelle de l'équation ([1]).

apparition du Cosmos

L'équation d'Einstein associe la présence **T** de la matière au point **C** de la *Physis* ; elle décrit donc globalement la présence de la matière *sur tout l'Univers* : près ou loin, passé ou futur… Avec elle,

C, c'est **le Cosmos** ([2]) .

NOUVELLE GRAVITÉ

Équation d'Einstein : voilà donc la nouvelle attraction universelle, voilà la nouvelle mécanique céleste. Ça marche ! Et ça marche même très bien :

- en première approximation, on retrouve la mécanique céleste selon Newton.
- Mais la seconde approximation est intéressante : elle implique des corrections à cette mécanique — et ce sont tout juste celles dont les astronomes avaient constaté la nécessité, sans pouvoir les expliquer.

Au total, la gravitation selon Einstein est le modèle physique dont les prédictions sont les plus précises qu'on ait jamais obtenues.

disparition de Vulcain

La planète Neptune a été observée pour la première fois en 1846 ; mais sa présence venait d'être déterminée à partir de l'observation du mouvement de la planète Uranus (Adams et Le Verrier).

Dans les deux cas, c'est la *dynamique* d'une chose qui a révélé et mesuré la *présence* d'une chose voisine ([3]).

Le Verrier a aussi utilisé cette méthode pour interpréter la dynamique de la planète Mercure ([4]). Il en avait déduit l'existence d'une nouvelle planète qu'il avait nommée *Vulcain*.

Erreur ! erreur due à l'utilisation de la gravité newtonienne. Erreur parfaitement corrigée en 1919 par l'utilisation de l'équation d'Einstein. *Vulcain n'est plus…*

---

1 C'est cette universalité qui permet de faire glisser la dynamique TD=0 de la géométrie souple à la géométrie galiléenne.

2 Voici la **cosmologie : l'**exploration de **C.**

3 *Dynamique, présence* : voir p. 116, p. 112.

4 Mercure, qu'on peut observer avec une très grande précision lors de ses passages devant le disque solaire.

la lumière tombe

Changer de gravité, c'est grave…

Pour tester cette nouvelle pesanteur, le géomètre commence par étudier la chute de particules qui auraient une *masse nulle*.

Le résultat est là : elles tombent à la vitesse de la lumière. Ainsi les « photons », particules de lumière, pourraient avoir une masse nulle.

Mais il y a un autre changement : la lumière ne va plus "en ligne droite"; le chemin des photons semble incurvé dans le même sens que celui des particules matérielles.

Dessinez la Terre, le Soleil, et un rayon lumineux qui arrive tout droit en provenance d'une étoile lointaine ([1]). Faites passer le rayon à côté du Soleil, et courbez-le un peu vers lui, puisque les photons tombent eux aussi.

Faites ensuite reprendre au rayon sa course rectiligne pour atteindre la Terre. Et maintenant lisez sur votre dessin où vous croyez voir cette étoile.

Vous comprendrez alors pourquoi l'étoile paraît un peu plus écartée du Soleil qu'elle ne l'est réellement ; pourquoi le Soleil agit sur la lumière *comme une loupe*.

De même les galaxies lourdes peuvent grossir le paysage cosmique devant lequel elles passent, en le déformant si elles sont irrégulières : c'est ce qu'on appelle un *mirage gravitationnel*. On observe dans le ciel de nombreux mirages de ce genre : « *quasars multiples* », « *arcs gravitationnels* ».

La déviation de la lumière des étoiles par le Soleil, observée lors de l'éclipse de Soleil du 29 mai 1919, collait bien à la théorie : elle a entraîné l'adhésion des astronomes et des physiciens.

Après l'éclipse une petite fête a lieu. Le champagne coule, l'euphorie est générale : l'Homme a relevé le premier défi de la Nature, celui de la pesanteur.

Dans un coin de la salle, voici un métaphysicien qu'il nous semble avoir déjà rencontré. Il participe à la fête, mais avec un certain recul, semble-t-il. Son verre contient de l'eau minérale ; et il ne peut s'empêcher de marmonner :

" Ah ces théoriciens !
Ils voulaient atteindre les mouvements fulgurants des astres lointains.
Et qu'ont-ils touché ? La langueur des mouvements du corps.

Pesanteur subie : soumission de la Matière au Cosmos ;
pesanteur créée : modelage du Cosmos par la Matière.
Dialectique transcendante — qu'ils ont oubliée ! "

MAX le physicien, qui vidait son verre juste à côté, sursaute…
— Mais il a raison, ce philosophe… Puisque cette nouvelle mécanique céleste diffère radicalement de celle de Newton, est-ce qu'elle s'interprète encore par une attraction réciproque des astres ? "

Réponse spontanée d'un voisin, géomètre de son état : " Réciproque, oui ; attraction ? peut-être pas. Laisse-moi t'expliquer.

1 Faites le vraiment, ce dessin ; et attention à bien placer votre étoile…

D'abord, il est possible que le simple vide soit répulsif… ([1]).

Songe maintenant à des objets qui auraient *une masse négative*. Alors plus d'attraction : ils repoussent les autres, et ils se repoussent entre eux ([2]). Si de tels objets existent, pourquoi ne les avons-nous pas rencontrés ? Simplement parce qu'ils seraient certainement très loin de nous, à l'écart dans les grands "vides" qui séparent les galaxies…

Et puisque la matière qui les constitue est auto-répulsive, elle n'a pas pu se condenser, elle est restée à l'état diffus. Elle se cache si bien, cette matière négative, qu'elle pourrait se permettre d'exister à notre insu !

J'en viens maintenant à la réciprocité caractéristique de l'attraction newtonienne.

C'est probablement ça que notre collègue philosophe appelle « dialectique ». Je peux vous rassurer tous les deux : toutes les variantes de l'équation d'Einstein que l'on peut envisager respectent nécessairement cette réciprocité, parce qu'elles sont issues de la Physis…"

Encore une fois, MAX est irrité par les couloirs que le géomètre se permet d'emprunter entre la métaphysique et la physique hérétique. Mais il en retient quelque chose : la géométrie souple, c'est peut-être une clé dont il pourra se servir pour pénétrer plus avant dans la nature des choses.

ÇA VA CHAUFFER

En hâte, MAX et le géomètre quittent la fête et se remettent au travail.

Ils évoquent d'abord l'air ; l'air selon Lucrèce, l'air constitué de particules en chute chaotique ; chaos dont la statistique a fait apparaître la pression ([3]).

— GÉOM. : Puisque l'air ainsi décrit est conforme à la dynamique, il est forcé de conserver au cours du temps l'objet $\boldsymbol{J}$ que j'avais découvert tout à l'heure ([4]). Et cet objet, c'est la moyenne du moment des particules.

J'ai donc démontré quelque chose : dans l'air en mouvement, cette moyenne restera constante… "

— MAX : mais dis donc, ce que tu viens de démontrer, ce n'est rien moins que le premier principe de la thermodynamique ! Voilà un principe réduit au rang de simple théorème, un principe économisé…

La géométrie souple maintient fermement le rasoir d'Ockham ! ([5]) "

1 Cela dépend du signe de la « constante cosmologique » qui figure dans l'équation d'Einstein.

2 Situation bien différente de celle des charges électriques, qui se repoussent quand elles sont de même signe, s'attirent quand elles sont de signe contraire.

3 Voir p. 113.

4 p. 115.

5 p. 86.

Max a encore une idée derrière la tête. Il demande au géomètre de l'excuser quelques instants, part en ville, et revient une heure après avec un beau four tout neuf. Il l'essaye à vide : le thermostat réglé au maximum, il ferme la porte et laisse chauffer.

Ça chauffe au rouge. Curieux comme il l'est, Max a fait un petit trou dans la paroi du four pour regarder à l'intérieur ; effectivement tout est rouge, uniformément ; il ne distingue même plus les parois.

On va bien voir ! Dans le four il met ses clés, un pot en céramique multicolore, des cailloux blancs et noirs, et il recommence la chauffe : par le petit trou, tout redevient uniformément rouge, les objets sont encore indiscernables. Cette lumière ne dépend donc pas de ce qui l'émet, c'est la même pour une clé rouillée, une céramique verte ou un caillou noir : *une lumière universelle !*

MAX a tôt fait d'inventer une belle formule qui décrit parfaitement cette lumière ; pour ne pas se compromettre, il va l'appeler « ***rayonnement du corps noir*** » ([1]).

Cette formule contient une grandeur que nous avons déjà frôlée, la ***constante de Planck.*** Elle va devenir une diva de la scène scientifique ; on l'écrit h ([2]).

Paradoxe : cette description géométrique des fours chauffés au rouge convient aussi bien à la couleur glaciale qui tombe du ciel — couleur « infra-rouge » ([3]). Elle permet donc de mesurer la température du ciel nocturne. Résultat : -270° Celsius ([4]).

Nulle part dans le Cosmos il ne fait plus froid — sauf peut-être dans certains laboratoires terrestres.

flèche fatale

Malgré ces succès, MAX a encore des états d'âme : – Sais-tu décrire le four chaud avec ta géométrie souple ? "

– GÉOM. Très simplement : avec son ***vecteur température*** ✯ "

– MAX. Et un vecteur, c'est quoi, pour un géomètre ? "

– GÉOM. Un ***vecteur***, ça se dessine souvent comme une flèche. Ces vecteurs transportent les points sur des lignes, en leur donnant un sens. Dans le cas du vecteur-température, ce sens, c'est « passé » ou « futur ».

— Max devient lyrique :

Vecteur-température !
c'est toi la flèche du temps , la marche à la mort.
tu nous refuses l'action sur le passé, le souvenir du futur :
tu es le remords, tu es l'espoir ;
tu nous accordes le souvenir du passé, l'action sur le futur :
tu es la mémoire, tu es la vie.

---

1 Achèvement des travaux de Boltzmann, Kirchhof, Wien, cette formule a été annoncée par Max Planck au dernier mois du XIXème siècle.

2 p. 40. On utilise aussi la « constante de Planck réduite » $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ (prononcer *achbarre*).

3 Voir p. 108.

4 Soit une « température absolue » de 3° Kelvin. Plus précisément : 2.73 °K, juste cent fois plus froid que la glace fondante.

Eh bien, puisque nous avons posé un pied dans la thermodynamique, essayons donc d'y faire quelques pas. Tu sais le calculer, le vecteur-température du four ? "
— GÉOM : Voyons… Nous avons rencontré la température en étudiant les *équilibres chauds* ([1]). Ça nous montre que le vecteur-température β est une solution de la simple équation $\beta \mathbf{g} = 0$. ✯
— MAX : Tu ne t'en es pas aperçu, mais tu es génial… Tu viens de caractériser les équilibres chauds par la condition $\beta \mathbf{g} = 0$. Quand $\beta \mathbf{g}$ n'est pas nul, il n'y a donc plus d'équilibre….
Et voilà : la *source de la dissipation*, c'est ce tenseur $\beta \mathbf{g}$. Je vois d'ici une « *fonction de dissipation »* qui va relier les objets $\beta \mathbf{g}$ et T ; elle va produire *l'entropie* ([2]), construire le *« second principe de la thermodynamique »* ([3]), établir les *relations d'Onsager* … "

Le géomètre et MAX plongent au plus profond d'équations où nous n'allons pas les suivre. Ils persévèrent, ils noircissent feuille sur feuille. Enfin ils aboutissent à un *modèle dissipatif*, qui unifie deux découvertes empiriques de l'année 1822 :

- la *conduction de la chaleur* selon Joseph Fourier ([4]),
- la *viscosité* selon Henri Navier,

en les enrichissant de résultats nouveaux ([5]).

---

1 Voir p. 87.
2 Voilà enfin «*un moment du groupe souple* » : c'est « *le courant qui transporte l'entropie* ».
3 p. 85.
4 Fourier ne se préoccupait pas de rechercher ce qu'était la chaleur, mais seulement comment elle se propageait. Cela l'a conduit à utiliser de nouvelles « séries » pour appliquer sa théorie. Ces séries de Fourier ont servi à bien d'autres choses — puisqu'elles constituent le point de départ de *l'analyse harmonique*, sous sa forme contemporaine (voir p. 19).
5 voir P. IGLESIAS ET J.M. SOURIAU, Heat, Cold and Geometry, "Differential Geometry and Mathematical Physics, M.Cahen edr , p.37-68, Reidel Pub. C° (1983) ".

HISTOIRE DE L'UNIVERS

Le mot « *univers* » est apparu en français vers 1530, comme adjectif signifiant : « *d'une seule espèce* ».

L'Univers, envisagé au sens actuel de « totalité », ne remonte qu'au XVII$^{\text{ème}}$ siècle : il implique une option philosophique : l'unité de tout ce qui existe.

C'était déjà la philosophie de Giordano Bruno — étendant à l'infini le système de Copernic (qui ne concernait que le Système Solaire). Le Soleil n'était plus qu'une étoile parmi l'immensité des étoiles ; la matière constituant le Ciel était la même que celle qui constitue la Terre.

Le monde d'Aristote (*Ciel incorruptible + Terre privée de quintessence*), était « bi-vers » ; celui de Bruno devenait « uni-vers ».

Quarante ans après Giordano Bruno, ce présupposé philosophique devenait *objet d'observation*, grâce à Galilée.

Muni de la première lunette astronomique, il a découvert en quelques années combien le Ciel ressemblait à la Terre :

- Il y a des montagnes sur la Lune, comme sur la Terre.
- Vénus apparaît parfois en forme de croissant, comme la Lune.
- Autour de Jupiter tournent des lunes, semblables à celle de la Terre.
- Des taches apparaissent à la surface du Soleil ; Soleil aussi « corruptible » donc que la Terre et que nous-mêmes.

Ces découvertes de Galilée fondent notre cosmologie.

l'Univers gravite

L'observation nous suggère que l'Univers lointain a les mêmes propriétés dans toutes les directions — qu'il est ***isotrope*** (1).

Est-ce qu'il s'agit d'une propriété de l'Univers *vu de la Terre* ? Nous ne savons pas comment apparaît l'Univers vu d'une galaxie lointaine, mais un peu de modestie nous incite à penser que tous les points de vue se valent. Il y a un mot pour dire ça : on dit que l'univers est ***homogène*** (2).

Un Univers qui gravite en restant homogène : est-ce possible ? C'est l'étude qu'entreprend un dénommé ÉDOUARD. Il explique à son ami ALEXANDRE ce qu'il veut faire :

— Pour décrire l'Univers que nous montrent les télescopes, rien de plus facile : Je me place dans le bon vieil espace d'Euclide (IV$^{\text{ème}}$ siècle avant JC).

Comment la matière subit-elle la gravité ? je l'exprime par les équations d'Euler, celles de 1755.

---

1 *poussière de galaxies*, p. 106.

2 Homogène, ça veut dire « *de même origine* » (Cf . « génétique »). Le choix de ce mot contient le même présupposé philosophique que celui du mot « Univers » : l'homogénéité du ciel actuel serait un indice sur la cosmogonie, sur l'origine du monde.

Comment la gravité est-elle produite *par la matière* ? j'utilise l'équation de Poisson, qui date de 1812. Je peux même envisager que le vide soit répulsif : il suffit que j'ajoute une petite constante dans cette équation ([1]).

Avec ça, je fais tourner la machine mathématique ; elle me donne une superbe formule qui raconte l'histoire de l'Univers : son mouvement homogène, son passé, son avenir. ✯

Bien entendu, comme chaque fois qu'on utilise une formule algébrique, il faut remplacer les lettres par leur valeur : mais ces valeurs, je n'ai qu'à les demander à nos collègues astronomes, qui les ont mesurées avec leurs grands télescopes.
Tiens, voici deux galaxies dont ils connaissent la distance mutuelle aujourd'hui : ma formule indique la valeur de cette distance il y a cinq milliards d'années, ou bien dans cinquante milliards d'années. Fabuleux ! "

— Bravo ! s'écrie ALEXANDRE. Mais permets-moi de te poser quelques questions — juste pour être sûr d'avoir bien compris. Les deux galaxies dont tu viens de me parler, dis-moi donc leur distance il y a cinquante milliards d'années ? "

— EDOUARD : Eh bien, il y a un petit problème. Ma formule ne marche pas dans un passé trop lointain ; je ne peux pas remonter beaucoup plus loin que quinze milliards d'années… "

— ALEXANDRE : Aïe aïe aïe ! Mais qu'est-ce qui se passe ? "

— EDOUARD : C'est tout simple, il y a un instant où tout s'arrête, la densité devient infinie, et ma formule refuse de calculer des dates plus lointaines. "

—ALEXANDRE : Ah oui… Mais c'est curieux, tu viens de dire « tout s'arrête », alors qu'il s'agit du passé. Il me semble que tu devrais plutôt dire « tout commence »…?

—EDOUARD : Euh… mais c'est que tu as raison : cet instant, ça ne peut être que le *commencement de l'univers*. Et si mes formules refusent de dire ce qui se passait avant, c'est la preuve ma-thé-ma-tique *qu'il n'y a pas eu d'avant*.

Sans prévenir, l'espace et le temps sont donc apparus ensemble. Et dans quel état ! densité et pression infinies, qui ont immédiatement produit une explosion gigantesque… Nous devrions l'appeler :

Big Bang !

— ALEXANDRE : Excellente idée, je suis sûr que ce nom aura du succès. Mais il y a quelque chose qui me chiffonne : tu as dit que dans le passé, l'Univers était plus petit. À l'époque du Big Bang, de combien était-il plus petit ? "

— EDOUARD : Infiniment plus petit. C'est évident… "

— ALEXANDRE : Tu prétends donc qu'à cette date-là toutes les régions de l'Univers étaient à une distance nulle les unes des autres. Elles étaient donc toutes au même point de l'espace, de cet immense espace euclidien initial. Mais *en quel point* ?

Évidemment, il s'agit du point qui constitue notre passé le plus lointain. Le point qui avait la vertu de faire apparaître l'Homme au bout de quelques milliards d'années. "

1 La « constante cosmologique ».

un peu de modestie

— ALEXANDRE poursuit : Moi, je n'arrive pas à croire que l'Univers ne soit apparu que pour produire nos illustres personnes.

Heureusement il n'est pas nécessaire de nous prendre pour les moteurs de l'Univers : il suffit d'utiliser la gravité relativiste au lieu de la gravité newtonienne. Elle est plus précise, nous le savons ; et sa géométrie souple peut nous éviter bien des paradoxes inutiles. Laisse-moi réfléchir un instant…"

Et voilà : en partant des principes de la Relativité Générale, ALEXANDRE arrive à décrire le mouvement de l'Univers qui gravite en restant « homogène et isotrope » ; il obtient ainsi une nouvelle *équation de l'Univers.* ✯

Ô surprise… L'équation relativiste d'ALEXANDRE et l'équation newtonienne d'EDOUARD sont les mêmes, exactement les mêmes ! ([1]). Ils commencent par ne pas y croire. Mais après vérification, ils constatent que cette même équation possède deux interprétations très différentes.

C'est ALEXANDRE qui entame les débats : " Grâce à la géométrie souple, *l'homogénéité* de l'Univers devient un objet géométrique : c'est *la régularité de la métrique* $\mathbf{g}$.

Une régularité, c'est un groupe; je propose donc que nous l'appelions :

groupe cosmogonique.

Le groupe cosmogonique agit sur l'Univers, et va donc faire apparaître *types* et *familles* ([2]).
Le *type cosmogonique* d'un événement, c'est sa

date ([3]) ;

sa famille cosmogonique, c'est l'ensemble de tous les événements à cette date-là : c'est donc

l'espace à cette date-là.

Le groupe cosmogonique agit automatiquement sur cet « espace », et constitue sa *géométrie*. Et puisque ce groupe est intemporel, la géométrie de l'espace ne dépend pas de la date :

géométrie éternelle. "

— Bravo ! s'écrie EDOUARD. Et je suis sûr que cette éternelle géométrie, c'est celle d'Euclide. "

— ALEXANDRE : Mais non, rien de moins sûr ! Regarde bien ton équation : tu y vois un nombre que nous avons appelé **k**… "

---

1 Historiquement, le modèle relativiste d'Alexandre Friedmann (1922) est antérieur au modèle newtonien d'Edward Milne et William Mc Crea (1934).

2 *L'origine des espèces*, p.29.

3 *Régularité* : ce mot a été défini dès l'introduction du livre. Le *groupe cosmogonique* apparaît ici comme sous-groupe du groupe souple. Le groupe de Poincaré avait déjà été caractérisé comme régularité de la métrique $\mathbf{g}$ (p. 117) : il s'agissait de la *Relativité Restreinte*. Ici, à l'échelle cosmogonique, la régularité est moindre, *mais elle n'est pas nulle* : la dimension du groupe de Poincaré valait 10 ; la dimension du groupe cosmogonique vaut 6 .

— EDOUARD : Oui, mais il ne représente rien d'intéressant…"

— ALEXANDRE : oh que si ! *C'est ce petit nombre qui caractérise la géométrie de l'Univers*. Si **k** est positif, ce sera la géométrie de Riemann ; si **k** est négatif, la géométrie de Lobatchevski ([1]) ; et il faudrait que **k** soit *exactement nul* pour obtenir celle d'Euclide.

À échelle « petite » ou « moyenne » (jusqu'à celle des amas de galaxies), les trois géométries sont indiscernables. ✯

Tu préfères la géométrie euclidienne ? ça ne prouve qu'une chose : que tu es tout petit face à l'Univers. Heureusement pour toi, d'ailleurs ; sinon tu ne trouverais pas grand chose à manger.

Mais puisque nous avons décidé d'être modestes, tu m'accorderas que la taille de notre corps n'est pas non plus un facteur déterminant de l'histoire de l'Univers.
Revenons maintenant au découpage de l'univers par le groupe cosmogonique. Le ***type*** ([2]) d'un événement, c'était ***sa date***. Sa ***régularité*** ([3]), ce sera ***sa place***.

Et voici quelque chose qui va encore t'étonner : les astres gravitent *en restant à la même place* ! Ils tombent, mais *ils ne tombent que vers le futur* ([4]).

Si la distance qui les sépare semble augmenter, c'est que la métrique évolue (selon les lois relativistes de la mécanique céleste), et agrandit ainsi la mesure des distances : telle est la description relativiste de l'expansion de l'Univers.

Ton modèle classique suggérait au contraire des astres qui s'écartaient les uns des autres dans un espace « immobile ». Nous venons de produire deux discours différents pour décrire la même expansion ; la différence était dans nos têtes, mais pas dans la Nature. "

1 Géométries proposées dans la première moitié du XIX^{ème} siècle comme alternatives à la géométrie euclidienne.

2 *L'origine des espèces*, p. 29.

3 p. 30 (*la règle des règles*).

4 L'ensemble des places où les astres sont immobiles, les cosmologistes l'appellent « **l'espace co-mobile** ». La place d'un astre, c'est sa régularité, donc un groupe. Et l'espace co-mobile, ce n'est qu'une espèce de régularité…

Cet espace co-mobile constitue donc un nouveau firmament géométrique où sont accrochés les astres. Mais si on descend en dessous de l'échelle cosmogonique, des irrégularités apparaissent, et ce firmament se dissipe avec le groupe cosmogonique lui-même.

un passé en forme de poire

ALEXANDRE s'anime : Regarde bien la *figure 30* : c'est une carte de l'Univers — *espace et temps associés.*

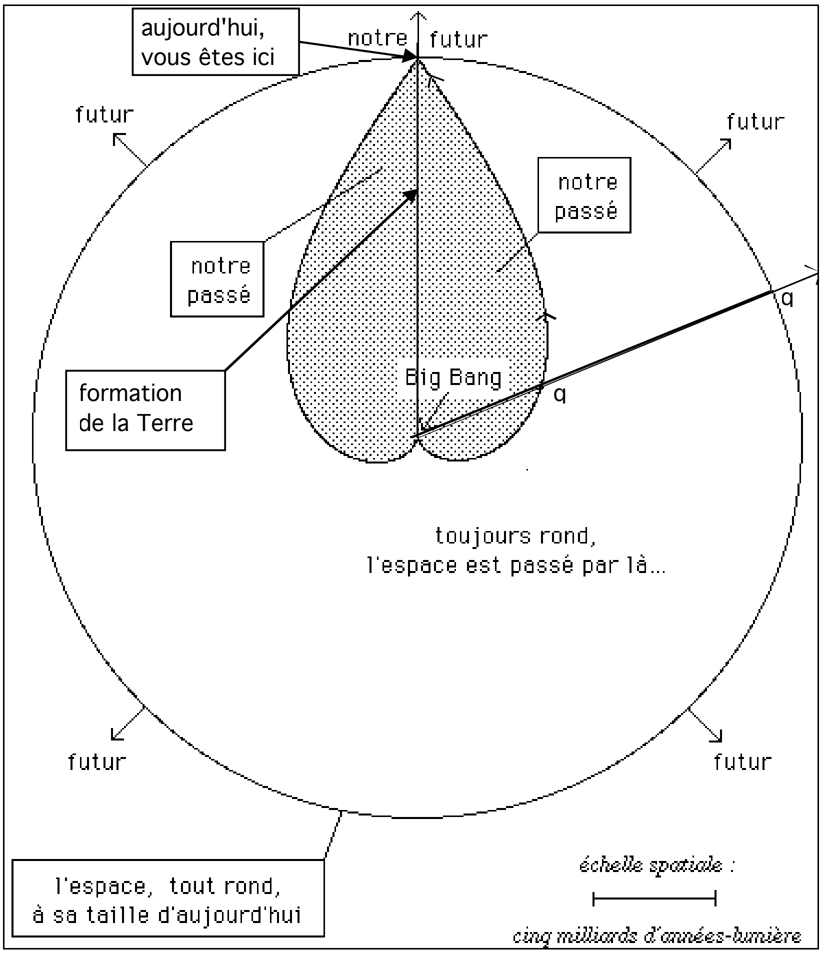


Figure 30. Brève histoire de l'espace

Pour construire cette figure aussi exactement que possible, j'ai demandé à des astronomes les valeurs les plus vraisemblables des ingrédients du modèle ; elles me permettent de le traiter numériquement. Alors tout est déterminé. En particulier la géométrie : ***l'espace est rond.*** ✯

Notre espace est donc représenté sur la figure comme un cercle ([1]). Le futur est représenté *vers l'extérieur*, puisque l'espace est en expansion.

Grâce à la régularité de l'Univers, toutes les places se valent dans cet espace : sans violer notre modestie, j'ai donc pu nous représenter sur la verticale issue du centre du cercle. Cette verticale, c'est notre ligne d'Univers. Vu l'échelle, c'est aussi celle où gravite notre Galaxie. Dans cette galaxie, le Soleil et les planètes (Terre comprise), sont apparus il y a 4. 7 milliards d'années : une flèche indique *où* et *quand* s'est produit cet événement intéressant.

1 L'échelle est indiquée ; le tour de l'espace, aujourd'hui, c'est environ cent milliards d'années-lumière.

Choisissons, parmi les observations des astronomes,
« un *quasar quelconque* » q ([1]).

Où qu'il soit, le groupe cosmogonique nous autorise à le représenter sur la même figure 30 ; sa ligne d'Univers sera une autre droite issue du centre. Le nom q du quasar est écrit deux fois sur cette droite : une fois à la date d'aujourd'hui (sur le cercle représentant notre espace) ; une fois à la date passée où nous le voyons.

Pourquoi le voyons-nous dans le passé ? Parce qu'il a fallu à sa lumière le temps d'arriver ici. Le chemin de cette lumière est représenté ([2]) : c'est une courbe en forme de spirale, fléchée dans le sens de la propagation.

On peut la tracer avec précision parce que le modèle indique aussi bien la gravitation de la lumière que celle des astres. En évaluant les distances sur la figure, on constate que l'espace était trois fois plus petit à cette date-là que maintenant. "

— ÉDOUARD : Très bien, mais quand tu pointes ton télescope sur ce quasar, comment peux-tu savoir à quelle date tu le vois ? et quelle était la dimension de l'Univers à cet instant-là ?

— ALEXANDRE: Merveilleusement simple : avec un spectromètre, tu mesures l'énergie des photons qui en parviennent.

Et si l'énergie des photons est aujourd'hui trois fois plus petite qu'à l'émission ([3]), tu es sûr que l'espace est trois fois plus grand aujourd'hui. Et le modèle te permet de savoir *où* et *quand* tu le vois.

Tu te demandes sans doute *comment la lumière se propage dans l'Univers*. Là aussi, simplicité : tous les chemins possibles de la lumière, émise n'importe où, n'importe quand, dans n'importe quelle direction, tu les obtiens à partir de la courbe que j'ai tracée sur la figure, simplement en la faisant tourner autour du centre ([4]) ".

Un de ces chemins est représenté sur la figure, en position symétrique du précédent : il s'agit de la lumière qui peut nous parvenir dans la direction opposée à celle du quasar *q.*

Entre ces deux chemins de lumière, en grisé sur la fig. 30, la zone des événements qui ont pu nous envoyer un signal voyageant moins vite que la lumière : *cette zone, c'est **notre passé**.*

Tu le vois sur cette figure, notre passé a la forme d'un cœur ; mais il ne faut pas oublier que l'espace a trois dimensions ([5]). Par la pensée, faisons tourner ce cœur autour de la verticale : nous verrons alors que nous avons un passé *en forme de poire* ([6]). Ce passé contient le centre de l'espace, le Big Bang, entouré du futur naissant ([7]).

---

1 Quasars ? Voir pp. 92, 106.

2 Cette courbe est tracée à partir de l'équation de l'Univers, celle qui est commune à ALEXANDRE et à EDOUARD.

3 *signature des atomes*, p. 107. Ce nombre qui mesure le rapport des énergies, les astronomes l'écrivent 1+z ; dans le cas du quasar q, 1+z=3, ils disent que le "décalage spectral" z est égal à 2.

Avec le modèle newtonien, on doit interpréter ce changement d'énergie comme effet Doppler-Fizeau ; mais cet effet ne peut se calculer exactement qu'en utilisant la Relativité. Il est plus simple de travailler directement dans un modèle relativiste.

4 Ces rotations autour du centre représentent les éléments du *groupe cosmogonique* (p. 126).

5 Alors qu'une seule dimension d'espace est représentée sur la figure, l'autre étant prise par le temps.

6 Et même d' « hyper-poire », puisque la rotation ne nous a fait gagner qu'une dimension, et qu'il en faudrait une de plus. Pas très facile à imaginer, mais aucune difficulté pour les géomètres.

7 Atteignez le Pôle Sud de la Terre : alors, dans toutes les directions, vous verrez le nord. De même, autour du Big Bang, rien que du futur.

Et le quasar q, quel est son passé aujourd'hui ?

Facile, il suffit de faire tourner la poire autour du centre pour la pointer sur lui ; tu peux imaginer les deux poires qui se croisent, les deux passés qui se rencontrent. Pas seulement son passé à lui. Tous les objets qui existent ont un passé commun :

Ni dans l'espace, ni dans le temps, rien ne nous est étranger ([1]) ;
Unité du Cosmos : l'Univers mérite son nom…"

— EDOUARD : J'ai compris ! Et je lis sur la figure que les événements les plus lointains que nous puissions voir sont aussi les plus anciens. Même ce qu'il y a de plus lointain dans l'espace, notre *antipode cosmique,* semble encore observable ! Il s'agit approximativement du rayonnement infra-rouge qui tombe du fond du ciel. Dans toutes les directions, ce rayonnement vient donc d'une seule région, très lointaine, mais pas très grande parce que l'espace était alors tout petit…

Terriblement paradoxal, même si c'est parfaitement logique ! J'ai bien du mal à le « sentir », ton espace rond ! "

— ALEXANDRE : Simple question de préjugés… Songe à l'un de nos ancêtres européens, qui croyait la Terre plate ; qu'aurait-il pensé si on lui avait raconté qu'il existe un pays, la Nouvelle-Zélande, qu'on atteint aussi bien en partant vers le Sud, vers le Nord, vers l'Est ou vers l'Ouest ?

Pas besoin d'évoquer un ancêtre lointain : tout européen qui consulte un planisphère croit dur comme fer que la Nouvelle-Zélande, c'est au sud-est, et pas ailleurs. Jusqu'au moment où il se décidera à regarder un globe terrestre et à y voir qu'elle est sous ses pieds. Vraie ou fausse géométrie, c'est toute la question. "

— ÉDOUARD : Mais ton espace rond, refermé sur lui-même, il me déçoit un peu. Comme Giordano Bruno, j'aimais l'idée d'un espace réellement infini. Et le tien, il sent un peu le renfermé, il ne contient qu'une quantité finie de matière. Peux-tu me dire combien ? "

— ALEXANDRE: Probablement de quoi faire 10^{80} atomes d'hydrogène ; ça n'a l'air de rien, mais essaie seulement d'écrire les zéros :

100 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000…

…000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 atomes,

tu vois que ça fait beaucoup.

Mais d'accord, ça n'a rien de commun avec une *infinité*. Si un tel espace te donne de la claustrophobie, dis toi bien que nos phobies et nos goûts ont peu de poids dans notre quête.

Nous pouvons confronter à l'observation tout modèle cohérent ; or à cet espace fini, la *géométrie souple* accorde la même cohérence qu'au classique espace d'Euclide et de Newton. "

1 Dans le modèle euclidien, les objets dont le passé rencontre le nôtre ne constituent qu'une part négligeable de l'Univers : c'est ce qu'on appelle le *problème de l'horizon* ; on dit que le modèle n'est pas *causal*. Cette difficulté a conduit à imaginer des scénarios-remèdes assez étranges (« *l'inflation* », par exemple) ; mais le problème peut se résoudre par la simple géométrie, comme le montre la figure.

cosmogonie universelle

— ÉDOUARD : Bon, admettons que ton modèle décrive correctement l'histoire de l'Univers. Il donne une origine commune à la matière dans tout l'Univers, ce qui « expliquerait » pourquoi la matière est la même partout. Mais ton modèle pourrait-il aussi expliquer pourquoi le ciel lointain semble le même dans toutes les directions ? "

— ALEXANDRE : Je vais te répondre par une métaphore :

L'autorité militaire a décidé de faire l'expérience suivante : produire une explosion thermonucléaire dans l'espace, loin au-dessus de l'atmosphère terrestre. La bombe est un long cylindre, qui tient juste dans une fusée. Elle explose comme prévu, et produit en une micro-seconde une superbe boule de feu.

Mais une autorité militaire étrangère était au courant de l'essai, et a observé la chose avec soin. Elle aimerait connaître mieux l'armement rival ; elle a donc photographié cette boule de feu : les photos la montrent parfaitement sphérique.

Symétrie, pense le Chef du Renseignement, symétrie *sphérique* ; or je sais que la régularité des effets est incluse dans la régularité des causes. Et il annonce à sa hiérarchie :

" *Nos adversaires ont fait exploser une bombe sphérique*
qui était placée au centre d'une fusée sphérique ".

Eh bien non, Chef, il n'est pas sûr que la régularité de la boule de feu soit déjà présente dans la fusée : elle a pu apparaître pendant l'explosion seulement ; apparaître pour de simples raisons de thermodynamique.

Et voilà : dans le cas du Cosmos aussi, il pourrait s'agir d'une *régularité acquise* ; la régularité cosmogonique (1) serait un phénomène progressif.

Non seulement l'Univers ne se disloque pas en gravitant, mais au contraire il se régularise.

Nous connaissons bien des exemples de régularités apparues comme conséquences de processus dissipatifs (2) ; rien d'étonnant si ces processus jouent encore à l'échelle cosmique, s'ils ont coopéré pour *arrondir l'espace*. Et cela suffit à expliquer la stupéfiante régularité du rayonnement observé au fond du ciel (3) "

— MAX, qui passait par là, ne peut s'empêcher d'intervenir : " Bien sûr, Alexandre, tu as le droit de parler de thermodynamique ; as-tu donc pensé à la *température* ? "

— ALEXANDRE : Certainement ; je ne pense qu'à ça…

Je sais que la température est un *vecteur* (4) ; et ce vecteur est inscrit dans mon modèle. Il pointe vers le futur, comme il se doit.

Regarde : tout à l'heure, ÉDOUARD et moi nous admirions un quasar q, tel qu'il était au moment où l'espace était *trois fois plus petit* que maintenant (fig. 30, p. 128).

Eh bien l'espace était juste *trois fois plus chaud* à ce moment-là ; le fond du ciel était à 9°K. Vous voyez comme c'est simple, l'histoire de la température ! " ✯

— MAX : " Oui mais alors, au moment du Big Bang, la température devait être infinie ! Ça ne signifie plus rien…"

---

1 « *Kosmo-gonia* » = génération du monde. Utilisé depuis la Renaissance, le mot *cosmogonie* s'est d'abord appliqué à l'étude de la formation de la Terre ; son usage s'est élargi progressivement.

2 Régularités de la Terre, des étoiles, des galaxies. Voir *manèges dans le ciel*, pp. 91-92.

3 Voir pp. 108-109.

4 *flèche fatale*, p. 123.

— ALEXANDRE : Au contraire ; ça signifie tout simplement que *le vecteur-température était nul* ([1]) ; or il n'y a rien de plus symétrique qu'un vecteur nul…

Un vecteur température nul en un point de l'Univers, sa température infinie met à l'œuvre instantanément toutes les lois de la physique. Alors le vecteur se met à pousser tout autour ; le futur apparaît, l'Univers se refroidit.

Le vecteur ne s'annulera plus. Tout autre Big Bang est interdit…

…Créateur jaloux ! "

plus brûlant autrefois

ALEXANDRE continue : " La régularité de l'Univers, nous venons de remarquer qu'elle pourrait être acquise progressivement, *à cause de la thermodynamique*.

Alors il serait absurde d'utiliser trop tôt un modèle qui suppose cette régularité éternelle ([2]). D'autres histoires des premiers instants restent donc possibles.

Mais dans tous les cas, il me paraît nécessaire que l'Univers ait été autrefois *très chaud*. Aurions-nous des traces de ces périodes brûlantes ? "

Tous les trois, ils imaginent les conditions qui pouvaient régner dans l'Univers âgé seulement de quelques centaines de milliers d'années. Il leur semble très probable qu'il ait alors été rempli d'un *plasma d'hydrogène.*

Plasma, c'est un état de la matière que l'on produit dans les tubes luminescents. Le plasma d'hydrogène, c'est un mélange de protons et d'électrons. Mélange qui produit un rayonnement, et qui s'attache à ce rayonnement. Double conséquence de cet attachement mutuel :

la lumière accroche la matière, qui ne peut se condenser ;
la matière arrête la lumière : l'Univers est opaque.

Mais il a bien fallu qu'elle se termine, cette période primitive. Ils se livrent à quelques calculs, et tombent d'accord : c'est le refroidissement qui a dû transformer le plasma en hydrogène ([3]) ; transition produite quelque cinq cent mille ans après le Big Bang, quand l'Univers était mille fois plus petit qu'aujourd'hui, quand la température était de 3000°K environ ([4]). Que s'est-il passé alors ? Voici leurs conclusions :

- La matière, libérée de la lumière, commence à se condenser. Les galaxies apparaissent, et ne se dilateront plus : la matière échappe à l'expansion.
- La lumière, libérée de la matière, commence à circuler dans l'Univers. Et à se refroidir, parce que l'Univers se dilate ([5]) : ce que nous observons au fond du ciel nocturne, c'est la lumière issue de ce plasma brûlant, refroidie jusqu'à l'infra-rouge ([6]).

Lumière infra-rouge, donc noire à nos yeux : **Née d'une nuit blanche, noire est la nuit.**

---

1 La température thermodynamique, c'est *l'inverse* de la température absolue ; voir , p. 87 (*chaud et froid*).

2 Certains ne s'en privent pas : on remonte allégrement aux premières secondes de l'Univers, et même au « temps de Planck », c'est-à-dire à la date de 0. 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 1 seconde « après » le Big-Bang.

3 L'accrochage matière-lumière s'est précisé : chaque électron s'est accouplé à un proton en utilisant l'énergie d'un photon. Les couples ainsi formés, ce sont les *atomes d'hydrogène*.

4 La température du filament d'une ampoule électrique.

5 Thermodynamique élémentaire : c'est la dilatation d'un fluide qui refroidit nos frigos.

6 *signature des atomes*, pp. 107-108.

D'où l'intérêt d'étudier toutes les particularités de ce rayonnement — indice important dans l'enquête cosmogonique. Indice suggérant qu'une température très supérieure à 3000°K a pu régner dans l'ensemble du Cosmos.

L'enquêteur cosmique a-t-il des traces d'une telle température ? Difficile d'en trouver dans les observations lointaines : si un plasma opaque a rempli l'espace, aucun espoir d'observer ce qui a précédé. Mais on peut rechercher partout — et ici même — les « *cendres* » d'une époque brûlante.

Les étoiles aussi sont brûlantes ; et c'est le métier des astrophysiciens de décrire comment une grande masse d'hydrogène, écrasée par son propre poids, s'allume spontanément. Une étoile brille ; des réactions « thermonucléaires » y produisent à la fois de l'énergie et de nouveaux atomes.

Ces étoiles créent ainsi les atomes les plus courants : *carbone*, *azote*, *oxygène* par exemple ([1]) ; puis la plupart des autres, comme le *silicium* ; point final : le *fer*. Arrivée là, l'étoile peut exploser ([2]), enrichissant de ses débris le milieu environnant. Débris qui formeront de petits corps célestes. S'ils passent là où se forme une nouvelle étoile, ils pourront s'agglutiner pour former des planètes solides. Planètes où l'on retrouvera toutes ces types d'atomes. C'est ainsi que le fer est le principal constituant de la Terre ([3]) ; mais il n'est pas le seul…

La Terre et ses habitants peuvent donc être le fruit d'une cosmogonie où nos mères les étoiles seraient nourries d'une seule matière première : l'*hydrogène* primordial.

Mais ce n'est pas sûr: certains atomes légers, par exemple le *bore*, le *lithium*, ne devraient pas se former dans ces réactions stellaires — la théorie prévoit au contraire leur destruction dans les étoiles.

Ils n'auraient pu se former que dans un environnement beaucoup plus chaud que le cœur des étoiles les plus chaudes, à une température d'une centaine de milliards de degrés

Or on rencontre ces atomes, sur Terre ([4]) comme dans notre Galaxie. Ils pourraient donc provenir d'une époque où l'espace aurait été cent milliards de fois plus petit et plus chaud que maintenant. Ils seraient mélangés à l'hydrogène primordial ; ceux que nous rencontrons, ce serait ceux qui auraient *échappé aux étoiles.*

Connaître l'abondance de chacun de ces atomes, la confronter avec les modèles de leur formation et de leur destruction, voilà une part importante de la quête cosmogonique.

Enquête en cours, mais difficile.

---

1 Nous avons constaté qu'il y en a partout (*signature des atomes*, p. 108).

2 Une étoile qui explose ainsi, on l'appelle *supernova* **;** par exemple l'étoile de Tycho Brahe (*en bateau*, p. 46).

3 Sidérurgie sidérale, considérable et sidérante ! de «sideros» = fer (en grec), et de «sidera» = étoiles (en latin). La plus ancienne sidérurgie utilisait le fer météoritique, issu des « étoiles filantes ».

4 Le lithium, le plus léger des métaux, n'est pas si rare ; il est connu depuis 1817. Il est utilisé dans les piles électriques, particulièrement celles des montres. On l'utilise comme médicament psychiatrique, on l'a même donné à boire à tout le monde dans les « sels lithinés du Docteur Gustin ». Il est aussi utilisé dans les bombes thermonucléaires, qui libèrent une énergie emmagasinée depuis très belle lurette.

GÉOGRAPHIE DU COSMOS (1)

Super-Galaxie

Jusqu'à une distance de cent millions d'années-lumière environ, les galaxies (plusieurs centaines) ne sont pas réparties uniformément dans le ciel : elles dessinent approximativement une nouvelle "voie lactée " autour du ciel ; on l'a appelée " *la Super-Galaxie* ".
Comme le Soleil était un constituant de la Galaxie, notre Galaxie est donc un des constituants de la Super-Galaxie.

Si la Super-Galaxie tournait d'un mouvement d'ensemble, les distances mutuelles des galaxies seraient à peu près constantes, les photons que nous en recevons ne seraient pratiquement pas décalés en énergie, et ceci quelle que soit la distance de ces galaxies.

Mais non, c'est dans la Super-Galaxie qu'on observe l'expansion; la Super-Galaxie explose, comme le Cosmos le plus lointain… ; et c'est là qu'on mesure la fameuse « ***constante de Hubble*** »

Galaxie qui tourne sans exploser, Super-Galaxie qui explose sans tourner — pas d'analogie réelle donc entre les deux.

Et cela pose un problème : *pourquoi la Super-Galaxie a-t-elle quand même une forme aplatie ?* (2) On pourrait penser à un mouvement initial de rotation, « fossile » en quelque sorte — mais comment ce mouvement libre aurait-il pu se transformer spontanément en explosion ?

À grande échelle, le Cosmos possède la régularité du groupe cosmogonique C . À « petite échelle », celle des amas de galaxies, régularité nulle ; la répartition de la matière fait penser à celle d'une éponge.

Nous pouvons envisager une *échelle intermédiaire* où apparaîtrait une régularité H moindre que C — la régularité d'une *direction* privilégiée dans le ciel.

Régularité supposée primordiale, qui aurait été noyée progressivement dans la régularité cosmogonique du groupe C — par le jeu des processus dissipatifs (3).

Alors la Super-Galaxie serait un *fossile* de cette régularité antérieure — son axe serait proche de la direction privilégiée qui détermine cette régularité H . ✯

Et ceci laisserait prévoir d'innombrables sœurs et émules de notre Super-Galaxie, réparties chacune sur une espèce de H :

Hyper-galaxies, à découvrir.

1 Proprement dit : *cosmographie*.
2 Son axe est dans une direction voisine de celle de l'étoile Sirius.
3 Voir *cosmogonie universelle*, p. 131.

dessiner l'espace

Pouvons-nous vraiment « dessiner l'espace ([1]) » ? Deux grosses difficultés, a priori :

- Cet espace a toujours *trois dimensions* ; très rassurant… mais il va falloir le représenter sur une feuille de papier à deux dimensions. Et deux objets éloignés l'un de l'autre pourront apparaître proches sur le dessin, s'ils sont l'un derrière l'autre : effet de perspective, bien difficile à maîtriser.
- Bon nombre des « constellations » que nous voyons dans le ciel ne sont que des alignements d'étoiles que rien ne relie entre elles ([2]). De même, parmi les « amas de galaxies » que les astronomes ont répertoriés, beaucoup d'entre eux, vus d'un autre point de l'espace, apparaîtraient comme de longs doigts pointés sur la Terre…

Mais il y a pire : l'espace cosmique a le droit d'être *rond* ….
Nous sommes peu habitués aux dessins représentant un espace rond. Mais c'est peut-être un peu moins difficile à représenter que l'espace euclidien, parce qu'un espace rond à trois dimensions se laisse projeter naturellement sur un disque :

Un disque qui est une « perspective » de l'espace.

Perspective plutôt moins perverse que la perspective astrale qui nous est imposée par la contemplation du ciel. La figure 31 représente ainsi des astres répartis dans l'espace : plusieurs milliers de *quasars*, issus de la compilation de nombreuses séries d'observations. ✯

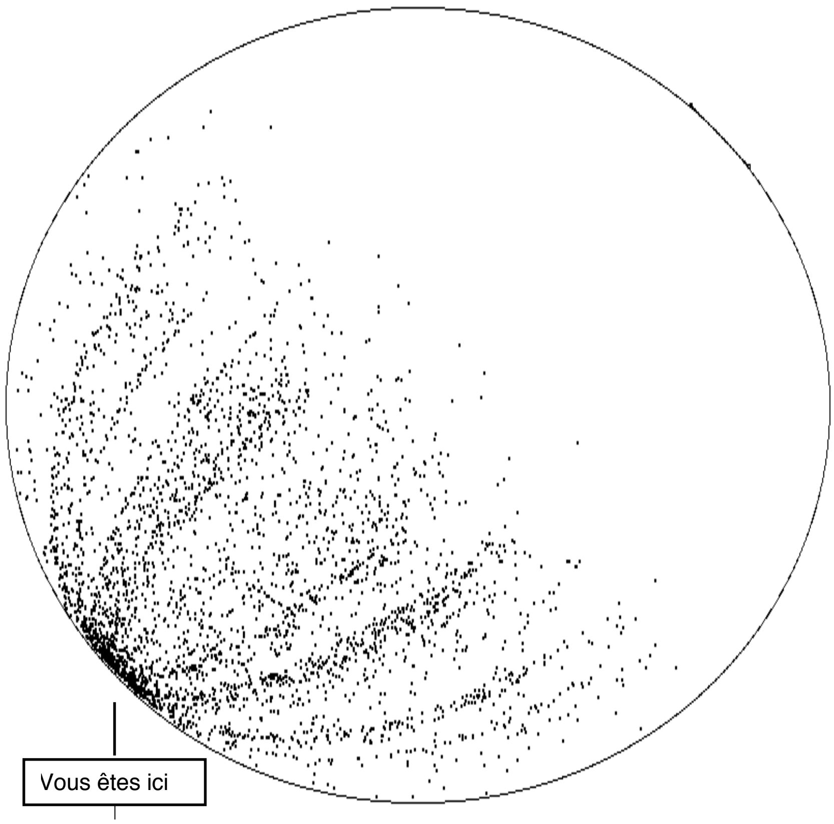


Figure 31. L'espace aujourd'hui

1 « Espace » qui est une « espèce » du « groupe cosmogonique » ; voir p.126, *un peu de modestie*.
2 *le domaine des bêtes*, p. 95.

L'action du *groupe cosmogonique* sur la figure laisse un certain arbitraire dans cette perspective ([1]) ; on peut profiter de cette liberté pour que la Terre soit représentée *au bord du disque*, et pour que les hyper-galaxies éventuelles apparaissent comme des structures *verticales.*

Regardons cette figure 31. À première vue, on y distingue de nombreuses traînées courbes qui partent de la Terre. Elles sont dues au fait que la recherche des quasars n'a pas été faite uniformément dans le ciel : divers observateurs ont choisi chacun une petite région du ciel pour y faire un sondage profond. Ce sont des séries d'objets ainsi observés qui constituent des traînées sur cette figure. Rien de particulier ne s'est donc passé à ces emplacements là ils ont simplement été plus observés.

Autre évidence : les objets sont plus serrés au voisinage de la Terre. Bien sûr, ce sont les plus faciles à observer.

Ce qui est plus intéressant, c'est que les quasars sont répartis assez régulièrement sur une bonne moitié du disque ([2]).

Indice de la vraisemblance du modèle cosmogonique adopté.

Mais comment se fait-il qu'il n'y ait presque rien dans l'autre moitié, opposée à la Terre ? simplement parce que cette région correspond aux observations d'objets *trop anciens* (plus de dix milliards d'années). Les quasars éventuels ne s'étaient pas encore formés ([3]).

Quant aux *hyper-galaxies* espérées, elles pourraient être au rendez-vous. Vous les percevrez mieux si vous inclinez le livre vers l'arrière, pour rapprocher visuellement les points qui sont sur une même verticale. Ou bien si vous observez la figure 32, compression verticale élargie de la figure précédente.

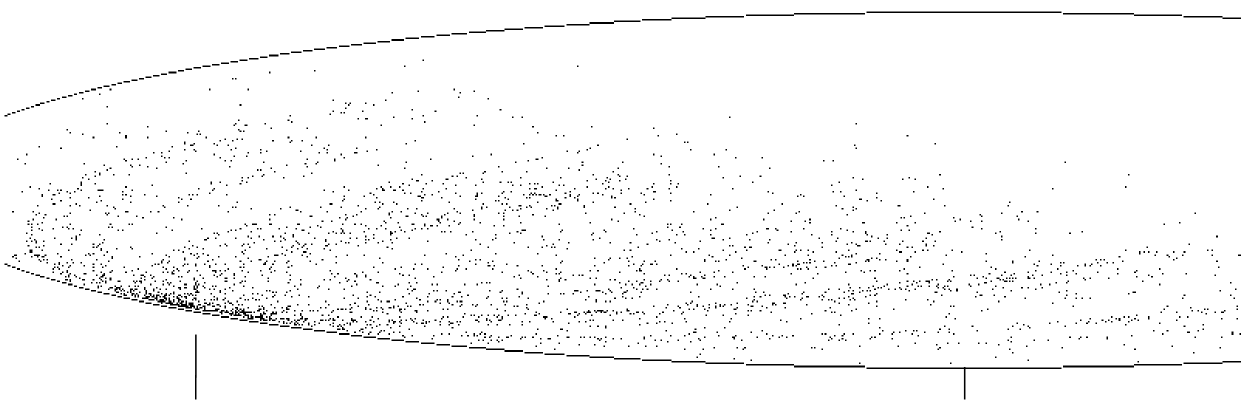


Figure 32. Espace aplati

1 Paul Cézanne, de même, cherchait les meilleurs emplacements pour peindre la *Montagne Sainte Victoire* en se déplaçant dans le *Pays d'Aix*. Ses *déplacements* étaient évidemment choisis dans le *groupe d'Euclide*.

2 Des objets équipartis dans l'espace apparaîtront équipartis en projection. Pourquoi ? c'est une propriété générale de la projection d'une sphère à n dimensions sur un disque à n-1 dimensions; théorème établi au IIIème siècle avant JC. par Archimède (dans le cas n=2) ; c'est ainsi qu'il a déterminé l'aire de la sphère.

3 Ils auraient été assez brillants pour être observés comme les autres — malgré leur distance : la « courbure » de l'espace aurait produit un effet de focalisation.

On arrive à distinguer sur cette figure 32 de petits alignements verticaux, surtout au voisinage de la Terre, là où les objets sont les plus serrés ([1]).

Alignements petits sur la figure ; mais beaucoup plus grands que notre Super-Galaxie ; le diamètre correspondant approche le milliard d'années-lumière…

…hyper-galaxies, sagement parallèles.

La figure 33 est un agrandissement de la région proche de la Terre. On y soupçonne quelques « hyper-galaxies » verticales. ([2]).

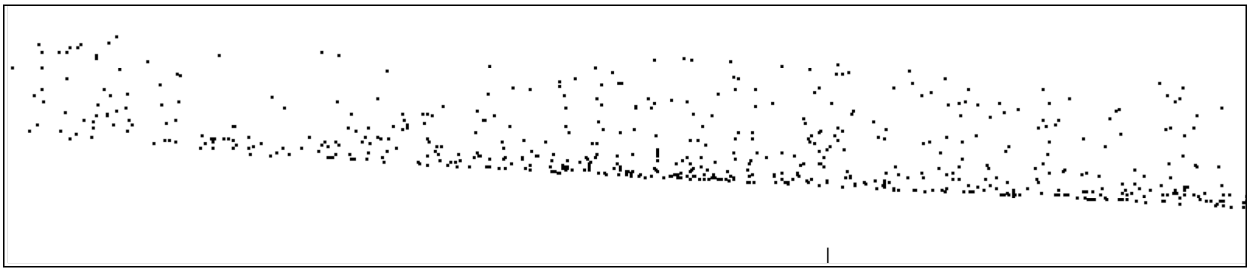


Figure 33. Espace proche

Attention ! Les ingrédients du modèle ont été déterminés par l'ordinateur pour optimiser de telles apparences ; il faut être sûr qu'il ne s'agit pas d'un artefact — qui serait dû à la puissance même du programme informatique…
Remarquons aussi, en position centrale sur la figure 32, une zone verticale un peu moins riche en objets ; elle est indiquée par un petit trait.

Si ce n'est pas un artefact, cette zone indique la position d'un *plan* au voisinage duquel les objets sont plus rares ([3]).

Qu'est-ce que cette absence pourrait indiquer ?

1 La principale difficulté pour les distinguer, c'est la perspective : plusieurs alignements que la perspective rapproche par hasard peuvent devenir difficiles à distinguer. L'ordinateur ne souffre pas de cet inconvénient, parce qu'il peut distinguer plus de deux dimensions.

2 Cet agrandissement atteint les limites de la précision des mesures : un changement de 1/5000 de la mesure d'un décalage spectral serait visible sur cette figure.

3 Une telle bande, c'est un équateur du Cosmos (« équateur » = « qui partage en deux parties égales »), vu « en perspective ». Un équateur, c'est un plan dans la géométrie du groupe cosmologique ; pensons à l'équateur terrestre, qui apparaît comme « rectiligne » à ceux qui le parcourent.

VII

INVENTER L'ÉLECTRICITÉ

LA FOUDRE ET L'AIMANT

Méditons maintenant quelques évidences mystérieuses.

Dans la Nature, l'électricité peut se manifester par des effets spectaculaires : sur Jupiter comme sur la Terre, la foudre tonne. Mais nous ne savons pas bien la décrire…

Et l'aimant… Que se passe-t-il donc près d'un aimant ? Des morceaux de fer qu'on en approche peuvent être attirés, nous le savons. Mais comment cette force peut-elle se transmettre à travers l'espace vide? Comment peut-elle aussi traverser une table en bois ? ([1]).

Électricité et magnétisme, dit-on pour décrire de tels phénomènes. D'où viennent ces mots ?

En grec ancien, l'ambre jaune s'appelait *"electron"*. Et des morceaux d'ambre frottés ont la propriété d'attirer des poussières ou des brindilles. " *Force électrique* ", dit-on.

Près de la ville de *Magnésie* (Manisa, en Turquie), on trouvait des aimants naturels — doués des mêmes propriétés que ceux que nous utilisons. La force qu'ils produisaient a donc été qualifiée de « *magnétique* ».

Longue série d'expériences pour relier entre eux les divers aspects de l'électricité et du magnétisme. En voici trois jalons :

- 1800 : Volta découvre la « pile électrique », qui produit des « courants électriques ».
- 1819 : Œrsted montre que les courants électriques dévient la boussole — comme les aimants.
- 1830 : Faraday montre que le mouvement d'un aimant peut produire un courant électrique.

Et les théories ? Coulomb, Ampère, Maxwell, et bien d'autres sont intervenus. De nouveaux objets physiques (et peut-être géométriques?) sont apparus : charge électrique, champ électrique, champ magnétique, aimantation, courant, potentiels, forces électromagnétiques, etc. …

Naissance d'une science nouvelle, **l'électromagnétisme**, codifiée à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle.

Ses lois sont confortées par les expériences, et permettent de décrire convenablement les applications technologiques : création d'électricité par le mouvement des aimants (générateurs électriques) et mécanisme inverse (moteurs électriques) ; génération, propagation et réception des ondes de la radio et de la télévision ; etc.

---

1 Expérience : avec un aimant caché, vous pouvez faire rouler magiquement une bille métallique sur une table.

naissance de l'électro-physique

Et à propos, que devient la *dynamique* $TD = 0$?

On peut la sauver, en imaginant une règle pour décrire la présence propre des phénomènes électromagnétiques. Mais il y a plus simple : il suffit de construire

une nouvelle géométrie…

Voici comment. Notre Univers familier U, notre "espace-temps" à 4 dimensions, est constitué d'*événements* (1). Eh bien ces événements, plutôt que les imaginer comme des « points », imaginons-les comme des « cercles ». Des cercles *hors-espace et hors-temps.*

En rassemblant par la pensée tous ces cercles, nous construisons un univers " encerclé ". Appelons-le

électro-Univers (2),

que nous écrirons simplement $\breve{U}$ (3). La dimension de $\breve{U}$ vaut évidemment **5** (quatre plus un).

Ces cercles, imaginons de les faire tourner tous à la fois, du même angle : nous produisons ainsi un groupe qui agit sur $\breve{U}$: ce sera le

groupe électrique.

Et le

groupe électro-souple,

ce sera simplement le groupe qui agit souplement sur l'électro-Univers en respectant le groupe électrique.

Alors la géométrie électro-souple va inscrire l'électromagnétisme dans la physique. Elle fait apparaître

l'électro-métrique $\breve{g}$

qui produit **l'électro-pesanteur** $\breve{D}$ (4), **l'électro-présence** $\breve{T}$ (5).
Alors nous pouvons formuler

l'électro-dynamique $\breve{T}\breve{D} = 0$

qui étend la dynamique $TD=0$ à tous les phénomènes où interviennent **électricité** et **magnétisme**. ✯

---

1 Les événements, ce sont les « ici et maintenant » de toute l'histoire de l'Univers.

2 L'idée de cette construction est due à Theodor Kaluza (1919).

3 U smile…

4 Électro-pesanteur qui va associer la pesanteur et le « champ électro-magnétique ».

5 Électro-présence qui va associer à la présence de la matière la « charge » et le « courant » électriques.

Un simple exemple : électrifions la chute des corps selon Galilée ([1]). Alors intervient, à côté de la masse, une caractéristique nouvelle , la

charge électrique.

Si la charge électrique n'est pas nulle, les corps ne se contenteront plus de "tomber" bêtement : on pourra par exemple les mettre en « lévitation » avec un matériel approprié. C'est par cette expérience que Millikan a mesuré en 1909 la charge de l'électron ([2]).

La charge électrique est un *moment* : *moment du groupe électrique*. Comme dans le cas des autres moments ([3]), les charges des choses pourront donc se transférer de l'une à l'autre — mais elles ne pourront jamais apparaître ni disparaître seules.

neutralité planétaire

Les corps constituant le Système Solaire pourraient évidemment être chargés électriquement ; alors les forces électriques qui en résultent joueraient un rôle dans la détermination de leurs mouvements. Et pourtant les données astronomiques ne mentionnent aucune charge électrique pour les planètes : les mouvements prévus en négligeant toute force électrique collent parfaitement aux observations.

Excellente neutralité électrique des corps constituant le Système Solaire.

magnétisme cosmique ?

Il existera aussi une charge électrique de l'Univers, déterminée depuis le Big Bang — éternellement la même ;

et ce pourrait bien être la charge zéro…

Mais il ne faut pas en déduire que l'électro-magnétisme ne joue aucun rôle dans l'évolution de l'Univers : les astronomes ont observé et mesuré un *champ magnétique* dans notre Galaxie ([4]) — et dans quelques autres : les champs magnétiques appartiennent au Macrocosmos.

L'idée que des phénomènes magnétiques puissent jouer un rôle dans la formation des galaxies spirales est donc raisonnable — et étudiée.

---

1 pp. 111 et 112.

2 L'électron, découvert par J. J. Thomson en 1897, n'est pas un simple point matériel : c'est une *particule à spin* : il possède un *tournoiement propre*.

La géométrie électro-souple permet de lui associer un *moment magnétique propre,* dont la première mesure a été obtenue en 1915 par J. De Haas .

Voici le principe de son expérience : avec un fil, on suspend verticalement un barreau de fer dans l'axe d'une bobine électrique. En faisant passer du courant dans la bobine, on peut aimanter le barreau, ou « retourner » cette aimantation. Dans les deux cas, le barreau se met à tourner sur lui-même. Le rapport (changement de tournoiement) / (changement de moment magnétique) ainsi mesuré est une constante universelle, qui appartient à l'électron lui-même.

Et c'est le moment magnétique de l'électron qui est l'origine du « *ferromagnétisme* » des aimants.

3 Moments ? voir *force et lumière*, p. 38, *matérialisme idéal*, p. 60.

4 Champ qui est très petit par rapport aux champs magnétiques terrestre et solaire, mais qui s'étend dans l'énorme volume de notre galaxie.

ANTIMATIÈRE

frères ennemis

Revenons à la géométrie de l'électricité, celle du groupe électro-souple (1).

Et d'abord, comment est-elle faite, cette géométrie ?

Une première remarque : le groupe électro-souple se partage en deux :

- D'abord un sous-groupe, qui agit sur les mouvements des choses en conservant toutes les charges.
- Ensuite le reste du groupe, qui agit sur les mouvements en changeant le signe des charges. Ces éléments-là s'appellent des ***conjugaisons de charge*** (2).

Si nous admettons que la matière possède la régularité électro-souple, ces conjugaisons transforment tout mouvement possible d'une chose en un mouvement tout aussi possible. Si la chose initiale était un électron (dont la charge est *négative*), la chose finale sera donc un électron doué d'une charge *positive*… *Horreur* !

Mais non : ils existent, ces objets « positifs » qui ressemblent tellement aux électrons; on les appelle des positons (3). Par pudeur, on préfère dire que ce sont des nouvelles particules, mystérieusement associées aux électrons : des « anti-électrons ».

Et évidemment, l' « anti-anti-électron », ce sera le brave électron, modèle 1897.

Même chose pour les protons, qui connaissent les « anti-protons », et plus généralement pour tout type de matière :

antimatière *, dira-t-on.*

Il existe des particules qui ne diffèrent pas de leur anti-particule : les « photons » (4). Mais les « neutrons », de charge nulle comme l'indique leur nom, diffèrent des anti-neutrons.

Et comment la fabrique-t-on, cette antimatière ? Très simplement : avec suffisamment d'énergie habilement maniée, on peut faire apparaître une paire électron-antiélectron, une paire proton-antiproton, etc.

On sait même produire des « anti-atomes d'hydrogène », où tournent des anti-électrons autour d'anti-protons.

---

1 *Groupe électro-souple* : p.140.

2 Dans l'électro-Univers (p.139), ce sont les transformations qui changent l'orientation des cercles constitutifs.

3 Les positons ont été découverts en 1932 par C. D. Anderson. La camera à positons est un instrument important d'imagerie médicale.

4 Ce qui implique que leur charge soit nulle.

La méthode la plus simple pour produire de l'antimatière, ce serait de se placer là où il fait assez chaud ([1]) ; alors des paires particule-antiparticule doivent apparaître spontanément. Mais une température suffisante, ça ne se trouve qu'à proximité du Big Bang… c'est-à-dire dans un passé très reculé.

Toutes les particules constitutives de l'Univers auraient donc pu apparaître par paires ; dans ce cas il est inutile de se casser la tête pour comprendre la neutralité électrique : elle aurait été assurée automatiquement, l'apparition de toute particule chargée ayant impliqué l'apparition de l'anti-particule de charge opposée. Et même si des désintégrations ont eu lieu ultérieurement, la charge totale est restée nulle.

Cette hypothèse s'appelle « **cosmologie symétrique** *».*

l'antimonde

Oui ; mais nous rencontrons partout de la matière — et très rarement de l'antimatière. Où est elle donc cachée, cette antimatière qui devrait nécessairement exister quelque part ?

Certains ont suggéré que la symétrie matière-antimatière n'était qu'illusoire. L'antimatière pourrait être un peu instable, et aurait tranquillement disparu depuis sa formation. Mais le même genre d'hypothèse suggère aussi une certaine instabilité de la matière, la possibilité pour le proton de se désintégrer spontanément ; l'expérience a été faite, elle a coûté très cher, et elle n'a pas confirmé ce modèle.

Autre hypothèse : dans chaque région, les réactions de dématérialisation n'ont laissé subsister que le type de matière qui s'est trouvé un peu excédentaire à cet endroit-là ; peut être un milliardième en masse du mélange matière-antimatière initial ; et s'il reste ici de la matière, c'est qu'il reste ailleurs de l'antimatière, pouvant constituer des anti-étoiles, des anti-galaxies, etc. Juste autant que de matière.

Où donc ? Encore une alternative :

- Ou bien l'antimatière constitue avec la matière une sorte d'« émulsion » : galaxies-antigalaxies, amas-antiamas. Dans ce cas on prévoit des réactions de désintégration sur les frontières matière-antimatière ; mais on n'a pas observé les photons de haute énergie qui seraient émis dans ces réactions.
- Ou bien l'Univers est partagé en deux parties séparées, remplies l'une de matière (la nôtre !), l'autre d'antimatière ([2]).

Séparées, mais en presque-contact, de part et d'autre d'une surface. La surface la plus économe en réactions de dématérialisation, ce serait évidemment un plan. ✯

Et cette séparation pourrait être perceptible entre les objets représentés sur les figures 31,32 (pp. 135,136).

1 Quelque chose comme vingt mille milliards de degrés.

2 La masse de l'antimatière est positive, tout comme celle de la matière.

VIII

MICROCOSMOS

ATOMES

vus de près

Est-ce q'un atome ressemble à une étoile ?

Vers 1910, Ernst Rutherford proposait le modèle suivant pour l'atome d'hydrogène : un *proton* autour duquel tourne un *électron,* avec un mouvement « keplérien », analogue à celui de la Terre autour du Soleil ([1]).

mystères quantiques

Niels Bohr, jeune stagiaire de Rutherford, a découvert en 1913 quels mouvements de l'atome se rencontrent dans la Nature :

ceux dont le ***tournoiement*** est égal à $\hbar$, ou $2\hbar$, $3\hbar$, etc.

L'écriture $\hbar$ («*h* barre ») évoque une grandeur mystérieuse que la physique avait déjà rencontrée, la ***constante de Planck*** ([2]).

Cette loi inattendue a été généralisée par Rydberg ; elle s'applique à d'autres atomes, en prédisant correctement les valeurs de l'énergie des photons qu'ils émettent ; leur spectre (3), dit-on.

Ainsi est né un catalogue de nouvelles lois de la physique ; on l'a appelé :

théorie des quanta ([4]).

Ça marchait bien, mais c'était une rupture totale avec la physique connue. Comment retrouver l'unité de la science ?

Pour que ces quanta révélés par l'expérience deviennent *nécessaires*, il fallait réécrire la science mécanique ; créer une véritable

mécanique quantique.

1 Mouvement qui est décrit en détails dans la clé 6.

2 La constante $h = 2\pi\hbar$ a été introduite par Planck pour décrire le rayonnement des objets chauds (*ça va chauffer* p. 122). Pour le *tournoiement*, voir p.60 ; la *constante de Planck réduite* $\hbar$ a été introduite par Dirac pour décrire le tournoiement de l'électron.

3 Ce n'est pas une histoire de fantômes : un *spectre*, c'est ce qu'on observe avec un *spectroscope* (*signature des atomes*, pp. 107-108). Et n'oublions pas que *l'énergie* d'un photon, c'est aussi sa *couleur* (*couleur des fruits mûrs*, p. 72).

4 Rien de compromettant : « quanta » = « quantités ». Dans son laboratoire de Copenhague, Niels Bohr, obsédé par le tournoiement des atomes, aurait recouru à la pédagogie des derviches tourneurs pour convaincre ses disciples. C'est du moins ce que racontait en privé l'un d'entre eux, Léon Rosenfeld.

Chose faite, en principe, de 1924 à 1926, grâce aux travaux de Louis de Broglie, Werner Heisenberg, Erwin Schrödinger, Wolfgang Pauli, Paul Dirac — et bien d'autres.

Où en est-on au XXI^{ème} siècle ?

Avec la mécanique quantique*,* on sait (en principe…) calculer les *propriétés chimiques* d'un atome ou d'une molécule, à l'aide d'un ordinateur suffisamment puissant.

Et le *noyau* des atomes ? Là c'est un peu plus délicat ; un modèle annoncé comme achevé ([1]) tarde à faire ses preuves, et les bases de la *physique nucléaire* sont encore largement empiriques.

Malgré les succès de ces théories quantiques, leur interprétation reste difficile.

Ainsi les traités parlent de « *relations d'incertitude* » quantiques, aussi bizarres que les « *contractions de Lorentz* » relativisxptes.

Les mots nous jouent des tours : construites comme un raffinement de notre connaissance de la Nature, ces « *incertitudes* » sont souvent perçues comme une échappatoire de la Nature devant notre connaissance.

En fait, il s'agit de simples inégalités, qui n'apparaissent comme des « incertitudes » que si on essaye de parler à la fois le langage de la « *mécanique classique* » et celui de la « *mécanique quantique* ». Le discours ne peut être cohérent que si l'on indique clairement de quel modèle on se sert.

RETOUR AUX SOURCES

Les phénomènes quantiques posent donc un problème essentiel : imaginer un couple de modèles « *classique* » et « *quantique* », dont les relations mutuelles seront spécifiées par la géométrie ([2]).

Commençons par une remarque : les mystérieux *quanta* qui apparaissent dans la physique atomique, ce sont toujours des *moments* ([3]). Et un moment, c'est issu d'un groupe. Quel groupe ?

Souvenons-nous d'un géomètre qui nous a enseigné que *chaque chose classique* est associée à *un groupe.* Il disait : le ***groupe-source*** **S** ([4]).

Il nous a enseigné que chaque *mouvement* de la chose est alors un *moment* de **S**, et que les mouvements possibles sont tous *de la même famille* ([5]).

Pour caractériser une Chose, il est donc nécessaire de connaître :

sa source S ;

l'espace des mouvements, qui est une famille de moments de S.

1 La « *chromodynamique quantique* ».

2 Nous nous sommes déjà trouvés dans une situation analogue : le conflit entre mécanique classique et mécanique relativiste ; c'est bien *la géométrie* qui avait donné la solution.

3 *matérialisme idéal*, pp. 60 à 63.

4 *la source et les ombres*, pp. 74-77.

5 *D'un seul type*, si vous préférez ; voir *l'origine des espèces*, p. 29.

Nous avons déjà inséré le *groupe géométrique* **G** dans la source de chaque chose, ce qui nous a donné de riches enseignements ([1]).

Mais nous connaissons un autre groupe dont l'action est universelle : le *groupe électrique*. Il joue certainement un rôle fondamental dans la structure de la matière, puisqu'il est responsable de l'existence de *l'antimatière* ([2]).

Ainsi le *groupe électrique* doit s'insérer lui aussi dans la source de chaque chose. Ça expliquerait pourquoi chaque *mouvement* de la chose comporte une *charge électrique,* qui est un *moment* de ce groupe ([3]).

La matière est généralement constituée de particules chargées : charge positive pour le proton, négative pour l'électron (les constituants de l'atome d'hydrogène). Et on constate que la charge de l'électron est *très précisément* opposée à celle du proton.

Oh oh ! les charges électriques sont déjà quantifiées !

Il n'y a plus qu'à s'en inspirer… D'abord, un petit dessin :

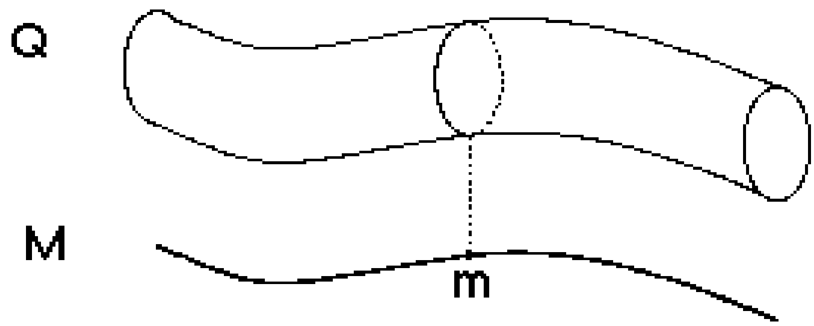


Figure 34. Une chose toute simple

Sur cette figure, *l'espace des mouvements* **M** est une *famille de moments* de la source **S**.

Le groupe électrique, qui fait tourner tous les cercles, agit sur chaque mouvement **m**, mais sans le changer. Pour faire apparaître l'action du groupe, il suffira de dessiner des cercles *au dessus des points de* **M**.

Ainsi apparaît un nouvel espace **Q** ; que nous appellerons

fibré quantique.

Et le groupe électrique agira sur **Q** en faisant tourner *tous les cercles du même angle.* ✯

1 Le « *groupe géométrique* », c'est celui qui permet d'énoncer le principe de relativité. Selon l'objet de nos recherches, il s'agira du *groupe de Galilée* (*géométrie galiléenne*, pp. 47-48) ou du *groupe de Poincaré* (*le choc des géométries*, pp. 68-69.

2 pp. 141….

3 Exemple : une *particule* et *l'antiparticule* associée, ce sont « deux mouvements d'une même chose », mouvements dont les charges électriques sont opposées (voir p. 141).

les choses et le hasard

En *mécanique classique*, une Chose, c'était une source **S** et une famille de *moments* de **S**, qui constituait l'espace **M** des *mouvements* ([1]).

Puis cette Mécanique était devenue « *statistique* », « *aléatoire* »: les *mouvements* étaient tirés au sort… ([2]) : *…Mécanique infernale !*

Si cette mécanique-là nous déplait, descendons aux Enfers et essayons d'en ramener une Mécanique ressuscitée.

Entrons dans le CASINO INFERNO, où règne Mr. DIABOLOS, organisateur du hasard. Regardons-le travailler. Il a choisi une chose — et il a dessiné l'espace **M** de ses mouvements et l'espace quantique **Q** associé (fig. 34).

Et voilà qu'il invente un objet bizarre **A**.

A, c'est un groupe, qui agit sur l'espace **Q** en faisant tourner, en bloc, chacun des cercles sur lui-même. Chacun tourne, mais l'angle de rotation varie. Diabolique astuce ! Ce groupe tordu, il l'appelle simplement ***aléa.***

DIABOLOS, en bon Directeur, vérifie régulièrement le travail de son personnel. Il interpelle l'une de ses employées, la tremblante EURYDICE : " Toi là-bas, choisis-moi un *hasard* …"

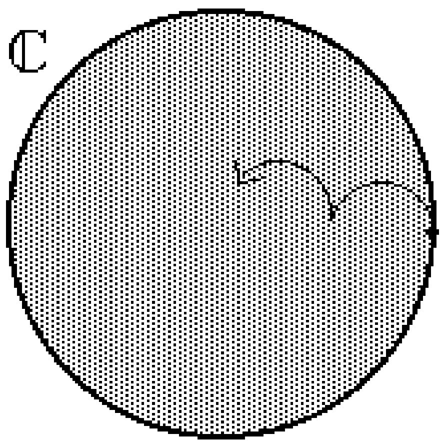


Figure 35. L'écran du hasard

EURYDICE s'exécute : elle allume l'écran de contrôle ℂ et fait quelques réglages. ✯

Pour vérifier le hasard choisi par EURYDICE, DIABOLOS promène son doigt sur le groupe **A** ; l'espace **Q** se tortille sur lui-même.

Sur l'écran ℂ, un spot trace un chemin mystérieux (fig. 35). Une étrange mélodie retentit.

Comme le temps n'existe pas pour M. DIABOLOS, instantanément il a exploré tout le groupe **A**. Et ce qu'il a observé sur le disque lui convient : bon travail, EURYDICE !

---

1 *la source et les ombres*. pp. 74-77.

2 *du flou*, pp. 83-84.

Mais soudain la porte vole en éclats. La pièce est envahie par une troupe nombreuse :

l'Orphéon !

Vêtus de blanc, armés de lyres et de cithares, les disciples d'Orphée (1) entourent Diabolos d'un cercle infranchissable.

ORPHÉE prend la parole : " Ô toi HADÈS-PLUTON-SATAN-AHRIMAN, toi qui te fais passer pour MITHRA-DIABOLOS l'Intercesseur, je viens te proposer un marché… "

— DIABOLOS : ? ? ? "

— ORPHÉE : Sache d'abord que la mécanique que tu pratiques depuis une éternité est *fausse,* tout simplement ! "

— DIABOLOS : Il m'arrive d'avoir parfois des doutes… mais toi Orphée l'Apollinien, que sais-tu donc de la vraie Mécanique ? "

— ORPHÉE : Tu en jugeras. Voici mon marché : si je t'aide à corriger ton erreur, tu libéreras EURYDICE mon âme…"

—DIABOLOS: Foi de moi ! "

— ORPHÉE, fort de son pacte avec le Diable, lui assène quelques dures vérités : "Les hasards dont tu as fixé arbitrairement les règles, ce sont bien des « *états* » d'un groupe ? " (2). ✯

— DIABOLOS: Bien sûr… "

— ORPHÉE : En effet ; ton erreur est ailleurs ! Et elle est toute simple : *tu t'es trompé de groupe !*

Le *vrai groupe***,** c'est ***la source*** **S** ; ta pensée myope l'a remplacé par un groupe ratatiné, ton vulgaire ***groupe-aléa*** **A** (3) !

La source **S** agit sur l'espace **Q** , en faisant tourner *verticalement* les cercles ; mais en même temps elle *les déplace horizontalement.*

Et par conséquent, en bas, **S** déplace d'autant les mouvements, et *agit donc sur l'espace* **M** *des mouvements de la chose.* Et là, quel est le statut de la source ? "

— DIABOLOS: Non, tu ne vas quand même pas me dire que

S, c'est *la* ***géométrie*** *de* **M** ? "

— ORPHÉE: Bien sûr que si… Ne t'étais-tu pas rendu compte que tu superposais deux visions du monde :

- la pure Mécanique dont la géométrie est le groupe **S** ;
- et tes probabilités de tenancier de Casino, ton stupide groupe-aléa **A** qui écrase la chose, qui ignore toutes les symétries de ses mouvements.

---

1 Orphée fut probablement un personnage réel, initiateur d'une école qui s'est développée en Grèce au VI[ème] siècle avant J. C. École qui a rivalisé avec celle de Pythagore ; orphistes et pythagoriciens avaient adopté les mêmes règles de vie, les mêmes vêtements blancs…

Les poèmes d'Orphée, dont certains ont été rapportés par Platon, révélaient aux initiés sous forme imagée les Mystères du monde. Didactique réutilisable…

2 ORPHÉE et DIABOLOS sont familiers de tous les états de tous les groupes.

3 p.148.

Si tu avais écouté Guillaume d'Ockham, tu aurais compris que *deux groupes comme source d'une seule chose, ça fait un groupe de trop*. "

— DIABOLOS: Mais pourtant j'ai bien regardé : quand l'espace **Q** se tortille, je vois les cercles tourner sur eux-mêmes, mais je n'avais pas remarqué qu'ils se déplaçaient horizontalement ! "

— ORPHÉE : Tout simplement parce que tu ne regardes pas d'assez près. Il faut dire que leur déplacement est souvent bien petit : il se mesure avec une minuscule unité qu'on appelle $\hbar$. Mais $\hbar$ n'est pas inaccessible : demande donc à Planck… "

—DIABOLOS : Évidemment tu dois avoir raison. Alors laisse-moi deviner.

Maintenant il suffira à EURYDICE de remplacer les états du groupe **A** par des états du groupe **S** — et la ***mécanique statistique*** sera promue ***mécanique quantique***.

Pourquoi ne l'ai-je pas fait moi-même ? Je connaissais bien la source **S** de chaque chose ([1]), et j'ai cru Malin de bricoler un groupe aléa **A**. J'ai fait la bête quand je pouvais faire l'ange… Déchéance !

Allez, éloignez-vous de moi, laissez-moi penser seul. Mais je vous préviens, les MYSTÈRES que vous avez découverts, ne les révélez à quiconque… "

Orphée aux enfers

Le chemin serpente dans la forêt obscure qui encercle l'INFERNO.

En tête marche ORPHÉE ; il chante, accompagné par l'ORPHÉON ; séduites par cette harmonie, les bêtes de la forêt écoutent.

EURYDICE suit, et médite à haute voix :

" Quand j'étais DRYADE DE LA MÉCANIQUE, je devais déterminer le *mouvement* dont chaque chose est animée. Chez DIABOLOS LE STOCHASTIQUE, seul le *hasard* était mon lot, je devais saupoudrer le hasard sur les mouvements des choses.

NYMPHE QUANTIQUE désormais, je dois connaître l'*état quantique de chaque chose* ! "

— Ah ah ! s'écrie DIABOLOS. Tu viens de révéler le secret interdit …

…écoutez mon implacable sentence : *Orphée, je t'emmène chez moi pour l'éternité ;*

Et toi, Eurydice, je te condamne à enseigner la Physique à l'Orphéon.

1 pp. 74-76 (*la source et les ombres*).

PHYSIQUE DU MINUSCULE

inauguration

L'ORPHÉON est donc reconverti. *Musiciens* devenus *physiciens*, tous s'installent dans le nouvel INSTITUT DES QUANTA. Ils vont y travailler sous la direction de Madame EURYDICE.

Pour la séance inaugurale, EURYDICE accueille le Conseil d'Administration, et son Président, M. PYTHAGORE.

PYTHAGORE arrive de l'étage au-dessus, il représente une ACADÉMIE qui a l'air d'un club assez fermé ([1]).

Il est précédé d'une flatteuse réputation ; il paraît qu'il a découvert des propriétés admirables de certains triangles. Qui aurait pu croire qu'un secret aussi prodigieux puisse se cacher dans de simples moitiés de rectangle ?

Avec une charmante simplicité, PYTHAGORE souhaite la bienvenue à Mme EURYDICE ; il rappelle qu'il était un vieil ami de feu son mari.

Un peu émue, EURYDICE expose la mission du nouvel Institut : — Notre tâche, c'est de nous occuper des Choses.

Connaître une chose, c'est connaître d'abord tous ses mouvements possibles ; l'espace de ces mouvements, je vais l'appeler familièrement **M**.

Dans l'INSTITUT DE MÉCANIQUE ANALYTIQUE où je travaillais naguère, nous avons découvert un fait surprenant : l'espace des mouvements **M**, c'est toujours une famille ; famille de moments d'un groupe **S** ([2]) ; et **S**, c'est la *source* de la chose.

La Mécanique Statistique, celle de M. DIABOLOS chez qui j'ai aussi travaillé, est maintenant périmée ; mais elle nous a quand même appris un fait important : c'est que la chose comporte un autre espace **Q,** qui est fabriqué avec des cercles situés au-dessus de **M**. *Fibré quantique…*

Non, ne vous inquiétez pas, Messieurs les Membres du Conseil : c'est très simple, un « *espace fibré* » ; en voici un petit dessin :

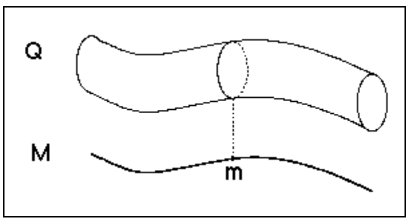


Figure 36: une chose parmi d'autres…

---

1 Sur la porte, de sévères mises en garde : " Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre ", " Dieu ne fait que de la Géométrie ".

2 Une *famille de moments* ; voir p.76.

Et maintenant où est la chose ?

Les ignorants ne connaissent que ses mouvements, qui remplissent l'espace **M**.

Mais nous, les initiés, nous savons que *la chose, c'est* **Q** *et* **M** *pris ensemble,* indissolublement liés par la *géométrie* **S** . Notre tâche sera de déterminer cette géométrie, et d'en faire un modèle de la chose…

…***un modèle quantique*** ! "

au travail

Applaudissements. Ayant ainsi conclu, EURYDICE offre quelques rafraîchissements aux membre du Conseil, et les expédie rapidement. Sauf M. PYTHAGORE, visiblement très intéressé, qui a demandé à participer aux premiers travaux.

Pour commencer, EURYDICE décroche son téléphone et appelle l'étage inférieur :

— Dites-moi donc, cher collègue DIABOLOS, reparlons un peu de notre groupe **S**. Lorsqu'il agit sur l'espace **Q**, vous convenez qu'il ne se contente pas de faire tourner les cercles sur eux-mêmes (fig. 34-36), mais qu'il les déplace aussi horizontalement — comme vous l'a révélé ORPHÉE ? "

— DIABOLOS : Je n'en disconviens pas : j'ai vu ces cercles se déplacer ; mais j'ai aussi écouté leur musique. Vous autres du clan apollinien, vous êtes sensibles à l'harmonie ; trop sensibles même… Moi, j'entends une mélodie, des sons qui montent et qui descendent ; mélodie que je joue en faisant agir progressivement le groupe **S**.

Ferme maintenant tes oreilles, PYTHAGORE ; puisque tu aimes autant la géométrie que la musique, je vais te dire ça avec le langage des yeux. Au lieu de suivre du regard les cercles qui défilent, je me concentre sur ce qui se passe *au-dessus d'un seul point* **m**. Et je regarde de très près…

Comme ça je vois que les cercles qui passent au-dessus de ce moment, *ils passent en tournant* ; je me moque de savoir *quels* cercles sont passés, mon œil diabolique me permet de voir *de quel angle* « *ça* » *a tourné au-dessus de* **m**.

Tu sais que je fais beaucoup de choses en un instant ; un coup d'œil me suffit pour évaluer de combien ça a tourné au-dessus de *chacun* des points de **M**.

Je me fiche éperdument du défilement horizontal des cercles ; je ne vois que ce que je voulais voir, un groupe qui fait tourner les cercles sur eux-mêmes, *un groupe-aléa* … " ([1]).

— PYTHAGORE murmure entre ses dents : On pourrait croire qu'il s'illusionne — mais non, il a raison le bougre : la mélodie qu'il entend, la rotation qu'il voit, ça existe bel et bien. " ✯

Mais soudain une idée contraire lui vient ; c'est si manifeste que Mme EURYDICE, spontanément, lui tend le combiné. PYTHAGORE s'exprime sarcastiquement : " Mais dites donc, Monsieur DIABOLOS, vous avez beaucoup de façons d'atteindre « progressivement », comme vous dites, un point du groupe **S** ; l'angle que vous mesurez, ne dépendrait-il pas du chemin que vous avez pris pour y parvenir ? " ✯

---

1 p. 151.

— DIABOLOS " Tu aurais parfaitement raison si j'étais aussi naïf que tu sembles le croire. Non, je ne me promène pas n'importe comment dans **S** ; je reste dans une partie **A**, bien choisie, et alors tout se passe bien. "

— PAM, l'un des nouveaux physiciens, attrape PYTHAGORE par la manche, et lui souffle :
" Il a raison ! A, c'est ce que j'appelle une *observation* . Si DIABOLOS respecte les règles que j'ai proposées pour faire ces observations (1), aucun ennui pour lui. "

— Immédiatement, PYTHAGORE a tout compris. Il explique à PAM : " Tes observations **A**, ce ne sont que des groupes ! (2).

Le point de vue de DIABOLOS est irréprochable : il peut aussi faire agir **A** comme ***groupe-aléa*** (3).

Et qu'est-ce qu'on obtient avec un groupe-aléa ? des *probabilités*, bien sûr ! Et des probabilités qui pourraient bien se répartir en ***quanta*** ! "

dans quel état ?

L'énigme qui tourmentait EURYDICE, elle en connaît maintenant la réponse. Où l'a-t-elle trouvée ? dans les vantardises mêmes de DIABOLOS.

Devant tout son personnel, Madame la Directrice fait le point de la situation :

" Jusqu'à présent, le *mouvement* d'une chose était un *moment* de sa source**.**

Maintenant ça ne suffit plus, on a besoin de quelque chose de nouveau. Eh bien, Messieurs les Physiciens, vous ne pourrez plus déterminer le ***mouvement classique*** **m** d'une chose — mais un autre objet : son ***état quantique*** μ (4).

Les mathématiques nous fournissent obligeamment une nouvelle notion : les **états d'un groupe**. L'état d'une chose habitera son groupe-source **S**.

Comment pourrez-vous l'observer ? par essais successifs…

PAM et PYTHAGORE nous ont déjà enseigné qu'une observation, c'est un sous-groupe **A** de la source **S** ; et comme nous l'a révélé DIABOLOS, le groupe **A** agit aussi comme *groupe-aléa.* ✯

Mais qu'est-ce que l'état μ associe à ce groupe-aléa ? *un hasard !*

un *hasard* $\mu($**A**$)$ *sur l'espace des mouvements.*

Et voici la seule réponse que la Nature accorde à la question «*quel mouvement ?* » : une réponse "*en probabilités* " : le hasard $\mu($**A**$)$ qu'elle associe à chacune des observations **A**.

Des questions ? "

---

1 Théorie des ***observations quantiques*** de Paul Adrien Maurice Dirac. " *Des observables qui commutent* ", a-t-il indiqué.

2 Des sous-groupes de la source **S** ; des sous-groupes " *commutatifs* ".

3 Deux actions donc d'un même groupe **A** sur le même espace **Q**. L'une « oblique », l'autre « verticale ».

4 Prononcer « mu »… La règle qui définit les états d'un groupe figure dans la *clé* 3 (p.187). Règle héréditaire : chaque état de chaque groupe engendre un état de chaque sous-groupe.

— PYTHAGORE se lance : " Ma chère EURYDICE, j'ai bien compris comment votre état de **S** va donner un état de chaque observation **A**.

Je sais aussi que les hasards d'un groupe-aléa **A,** ce sont des états. *Mais il y a aussi des états de* **A** *qui ne sont pas des hasards*. Comment être sûr d'obtenir *un hasard pour chaque observation* ? "

— EURYDICE réplique assez vivement : " Parce qu'un état quantique, c'est un état qui a cette vertu ! ✯

— Pythagore insiste : Une réserve, quand même, Madame la Directrice. Chaque fois que nous ferons une observation **A**, votre état quantique ne pourra nous informer que partiellement ; il ne nous renseignera que sur le *moment* de notre groupe **A**. "

— Eurydice : En un certain sens, vous avez tout à fait raison... "✯

Si vous le voulez bien, Messieurs, ce que nous connaîtrons ainsi du *moment*, nous l'appellerons un *spectre* ([1])."

— C'est maintenant Max qui intervient : " Sans vouloir faire de mauvais esprit, Mme la Directrice, j'attire respectueusement votre attention sur une « observation » qui me semble tout à fait inutile : il s'agit du groupe qui fait tourner tous les cercles à la fois, du même angle. Ça intéresse peut-être les mathématiciens, mais qu'est-ce qu'un physicien pourrait bien en faire ? "

— EURYDICE : J'allais vous en parler. Un mot pour M. PYTHAGORE, d'abord : ce groupe, ce n'est pas n'importe quoi, c'est le *centre* de la source.

D'accord, MAX, à première vue, il ne semble pas vous servir à grand chose : il ne déplace pas les mouvements ; son moment, c'est une *constante*, *la même pour toutes les choses* ; son spectre, c'est toujours cette constante. " Mais dites-moi, MAX, peut-être devinez-vous de quelle constante il s'agit ? "

— MAX : J'ai des soupçons, mais j'ose à peine y croire… "

— EURYDICE : Eh bien oui, c'est *votre* constante ; celle que vous avez découverte, que PAM a réduite à l'écriture $\hbar$.

C'est cette ***constante de Planck*** qui devient l'« *unité naturelle* » permettant de mesurer les moments — tous les moments, toute la matérialité !

Voilà pourquoi ce groupe vous concerne vous aussi, MM. les Physiciens… "

Murmure général, approbatif mais méditatif.

— MAX revient à la charge : Oui ; au fond c'est très simple et très nécessaire. Et ça a une conséquence intéressante : si je prends une observation « *oscillante* », qui ramène périodiquement chaque mouvement sur lui-même, les quanta de son spectre seront les multiples d'un seul nombre. C'est trop beau ! incroyable que ça marche à tous les coups ! "

— EURYDICE: Mais si ! Imaginez que votre observation oscillante, ce soit *le temps qui passe ;* alors vous saurez où se trouve le spectre de l'énergie… "

1 *vus de près*, p. 145.

— MAX : Bon sang, mais c'est bien sûr ! voilà une formule : $E = nh\nu$ qui me dit quelque chose… [1]. "

— EURYDICE " Et tourner autour d'une droite, ça vous ramène évidemment à votre point de départ au bout d'un tour complet. Alors le tournoiement, il est quantifié sur les multiples de $\hbar$. "

— C'est à NIELS de sursauter : *Ma formule !* [2]

évocation d'un spectre

Chacun va étudier la chose qui le concerne. Pour JOHANNES, c'est un atome d'hydrogène. L'*observation* qu'il a choisie, c'est le groupe *Chronos* qui fait passer le temps : le spectre correspondant, c'est donc celui de *l'énergie* [3].

Ce spectre est fait avec des quanta dont la répartition est très régulière — à première vue ; mais quelle est la clé de cette régularité ?

L'obstination de JOHANNES finit par être récompensée : à force de mesurer ces quanta avec son spectromètre, il arrive à découvrir une formule qui les décrit parfaitement ; dans cette formule, une nouvelle « constante », à laquelle ses collègues s'empressent de donner son nom [4].

Il est de la lignée des Kepler et des Mendeleïev, de ceux qui parviennent à assujettir à une simple formule l'un des grands mystères de la Nature. Mais un succès de ce genre ne clôt une quête que pour en ouvrir une autre : *pourquoi* ? pourquoi l'hydrogène obéit-il si bien à une règle d'apparence aussi *arbitraire* ?

JOHANNES veut bien croire que l'hydrogène soit composé d'atomes, que chacun de ces atomes soit lui-même constitué d'un électron qui tourne autour d'un proton — selon la loi même qui fait tourner la Terre autour du Soleil. Mais comment partir de là pour expliquer les mystères de son spectre ? Ou bien, comment partir de l'observation du spectre pour découvrir l'architecture tourbillonnante d'un atome invisible ? Fabuleux défi !

— C'est WOLFGANG qui va le mettre sur la voie : As-tu vu d'aussi jolis spectres quand tu observais d'autres atomes ? "

— JOHANNES : Jamais vraiment. Le spectre de l'hydrogène est exceptionnellement régulier. "

— WOLFGANG : Tu as dit *régulier* ? Alors sûrement il y a un groupe caché là derrière…

Voici : parmi tous les systèmes mécaniques, le «système à deux corps» (qui décrit aussi bien le système Terre-Soleil que l'atome d'hydrogène) possède une *régularité exceptionnelle.*

---

1 Prononcer « ennachenu ». Règle que Max Planck avait posée a priori pour construire sa formule du corps noir (*ça va chauffer*, p. 122). E, c'est l'un quelconque des quanta de l'énergie ; n un entier ; h, c'est $2\pi\hbar$; ν, c'est la fréquence. Formule valable pour un oscillateur dont tous les mouvements ont la même fréquence.

2 Règle de Niels Bohr (*mystères quantiques*, p. 145).

3 p. 63.

4 La constante de Johannes Rydberg (1889).

C'est ce groupe qui explique le mystère du calendrier… ([1]). Même chose donc pour l'atome d'hydrogène ; voilà pourquoi sa source contient une *observation* ([2]) oscillante ; observation dont le spectre est produit par des « quanta » entiers : 1, 2, 3…, comptés avec l'unité $\hbar$. Or la mécanique la plus classique nous dit comment l'énergie dépend de ce moment-là : ça y est, voilà qui détermine le spectre de l'énergie, voilà tes quanta, JOHANNES ". ✯

Le défi est relevé : triple conciliation de la mécanique de l'atome, des principes quantiques et de la physique expérimentale : désormais les physiciens vont pouvoir croire à la Mécanique Quantique ([3]).

surprises

WERNER travaille déjà depuis longtemps, mais une certaine agitation indique que quelque chose ne va pas. Il se décide enfin à consulter Mme EURYDICE :

" La chose sur laquelle je travaille, c'est un *point matériel.* J'ai choisi comme observation le *groupe des translations ;* le moment correspondant, c'est *l'impulsion* ([4]) du point.

Bien. Vous nous aviez recommandé de changer ensuite d'observation ; j'ai donc choisi le *groupe de Bruno*, dont le moment donne la *position* du point.

Et voici ce qui se passe : ces deux groupes refusent d'entrer dans une même observation ! ✯

Les conséquences sont dramatiques : la Nature et vous-même, Mme la Directrice, vous pouvez choisir l'état pour que l'un ou l'autre des deux spectres soit concentré sur une seule valeur *certaine* — mais *jamais plus d'un seul à la fois*.

***Incertitude** !* Incertitude inévitable *!*

Pire : si l'impulsion est concentrée sur une seule valeur (zéro par exemple), alors à tout instant la position est strictement *équipartie dans l'espace tout entier.* Où est-il passé, mon point ? Partout, donc nulle part ! je n'ai aucune chance de le retrouver !

Particule arrêtée, particule perdue… "

— EURYDICE: Vous avez parfaitement raison. Mais pourquoi vous étonner ? Si nous descendons dans le Microcosmos, ce n'est pas pour retrouver exactement ce que nous avons chez nous. Nos vieilles habitudes, rafraîchissons-les !

Comment découvrir les nouveautés nécessaires ? Cherchons le paradoxe, il nous ouvrira une piste. "

— WERNER n'a pas besoin de se le faire dire deux fois. L'impulsion et la position impliquent une *incertitude* ? WERNER transforme vite cette incertitude en une nouvelle « loi naturelle » ([5]). Autre incertitude à exploiter : il suffit de se souvenir que le groupe d'Euclide n'est pas commutatif… Voici une conséquence : si le point est *arrêté*, non seulement sa position est équipartie dans l'espace, mais son tournoiement est équiparti *sur l'infinité des multiples de la constante de Planck*.

Merveilleuses découvertes… ✯

---

1 Voir *le fil des ans*, p. 81. Particularité unique de la loi de Newton-Coulomb.

2 *dans quel état*, p. 153.

3 Historiquement, c'est ce qui s'est passé après la publication en 1926 d'un article de Wolfgang Pauli ; il y traitait quantiquement l'atome d'hydrogène, en utilisant le « vecteur de Lenz » (clé 6), qui est le moment associé à cette régularité particulière.

4 Voir dans *matérialisme idéal*, p. 60, les définitions de *l'impulsion* et du *passage* ; passage qui détermine la position du centre de gravité.

5 Voilà les fameuses **relations d'incertitude** de Werner Heisenberg.

Merveilleuses, mais inquiétantes. Cette fois-ci c'est WOLFGANG qui explose :
— Bien sûr, Madame la Directrice, je veux vous croire. Mais ce que j'ai trouvé, moi, c'est si paradoxal que la tête me tourne.

Ce que j'étudie, c'est le *tournoiement* de l'électron autour de son centre, son « spin », comme on dit. C'est un moment, le moment du simple groupe des rotations.

Le géomètre nous a appris que la *mesure* de ce tournoiement était fixe ([1]) ; seule pouvait varier sa direction, son *pôle*. Ce pôle ? un point que vous deviez donc choisir sur une sphère, quand vous étiez DRYADE DE LA MÉCANIQUE.

Chez DIABOLOS, vous ajoutiez du hasard, le pôle se diluait, formait une tache sur cette sphère.

Mais que pouvez-vous faire maintenant, ô NYMPHE QUANTIQUE ? Tout cela nous est interdit, parce que ce brave groupe des rotations n'est pas commutatif, *ce n'est pas une observation* !

Je n'ai droit qu'à des observations partielles, seulement des clins d'œil sur ce spin ! Ces clins d'œil, ça y est, j'ai attrapé le coup pour les faire correctement ([2]).

Et que vois-je ? Quand je cligne verticalement, je ne vois le spin que tout en haut ou tout en bas, et le plus souvent un peu les deux à la fois ([3]).

Bizarre ! Et si je cligne horizontalement ? Évidemment, je le vois tout à droite *et* tout à gauche ; ou bien par-devant *et* par-derrière…Vraiment, pensez-vous que tout ça soit cohérent ? Pire qu'une incertitude ([4]), c'est une *incompatibilité* ! un paradoxe qui frise la contradiction… "
— EURYDICE répond avec un petit sourire : Eh oui, avec la nouvelle mécanique, les probabilités sont nouvelles. La Nature n'a pas l'esprit de casino, ce n'est plus tout à fait aux dés qu'elle joue. Mais non, pas de contradiction : la quantification est géométrique, et les probabilités peuvent suivre, comme je te l'ai montré.
Ces paradoxes qui te scandalisent, c'est de toi qu'ils te parlent. Voici ce qu'ils te révèlent :

tu jetais sur la Nature les regards d'un enfant ;
apprends à regarder en adulte, tu percevras l'intimité des choses. "

jouer de l'ocarina

Ça y est, ça commence à chauffer dans l'ORPHÉON. Le premier,PAM s'écrie " Madame, Madame ! Je ne sais pas où vous les avez trouvés, vos états, mais si vous m'en donnez deux, moi je sais en trouver un nouveau ! Leur milieu, tout simplement ! "

EURYDICE acquiesce. Oui, comme les vieux « *états statistiques* », les *états quantiques* acceptent qu'on en prenne le milieu.
La mécanique statistique de DIABOLOS est morte, voici maintenant qu'apparaît une

statistique quantique !

1 Spin 1/2, a-t-il dit (*ce modèle vous plaît*, pp. 63-65) ; compté avec l'unité de moment $\hbar$, bien sûr.

2 En utilisant des matrices, les « matrices de Wolfgang Pauli ».

3 Expérience de Stern et Gerlach (1922).

4 L'incertitude est aussi là : si l'observation verticale indique que le spin pointe « sûrement » vers le haut, une composante horizontale est forcément équipartie entre la gauche et la droite, entre l'arrière et l'avant. Tels sont ces états quantiques.

— PYTHAGORE médite sur cette idée de « milieu ». " Bon, on peut toujours prendre le milieu de deux états. Mais quand on a un état, *est-ce qu'il est le milieu de deux autres* ? Question subtile. Peut-être bien qu'il y a des « ***états purs*** », qui ne sont pas « *mélangés* », qui ne sont le milieu que d'eux-mêmes.

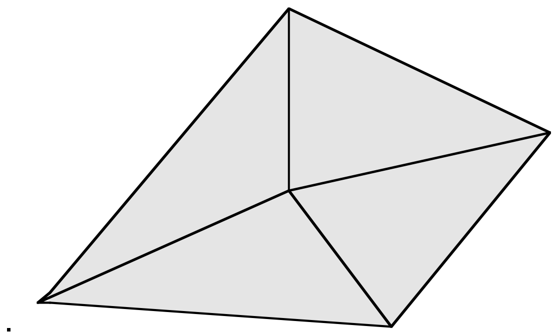


Figure 37 : les états purs, et les autres

Et peut-être aussi que tous les autres états sont obtenus à partir de ceux-là, en prenant indéfiniment des milieux et des limites.

Il pose la question à la Directrice, tout en dessinant au tableau (fig. 37).

— " Cette sorte de pyramide irrégulière, ça représente *tous les états quantiques*, figurés chacun par un point. Et les états « purs », ce sont les pointes de cette pyramide. Bien sûr, ce n'est qu'une image, mais elle peut donner des idées. "

Mme EURYDICE est d'accord : il y a bien des états purs — et ils permettent d'obtenir tous les autres, tout juste comme PYTHAGORE le pense. ✯

— Mais elle le met en garde : " Il y avait aussi des « états purs » pour M. DIABOLOS : c'était tout simplement les *mouvements* de la chose ([1]). Nous, nous savons qu'il avait tort : il y a bien des *états purs*, oui ; mais non, ce ne sont pas des mouvements « classiques », ce sont encore des *états quantiques*.

Vous avez eu une bonne idée, cher Monsieur PYTHAGORE ; mais votre dessin ne me satisfait pas complètement. Qui arrivera à le rendre plus ressemblant ? "

— Il y a déjà un moment que PAM avait levé le doigt : " Moi je sais, Madame. Je fais mieux que mes petits camarades : vous me donnez un seul état, celui que vous voulez, *et j'en trouverai instantanément une infinité d'autres* ! J'ai inventé quelque chose de spécial pour ça, les « ***kets*** ». Je prends votre état, et avec lui je fabrique un ket ; et pas seulement un ket, *tout un espace de kets* ; et chacun de ces kets produit un nouvel état ! En plus, je sais faire des tas d'opérations sur ces kets : les ajouter, les faire tourner sur eux-mêmes, les multiplier par un nombre, même imaginaire ! Regardez, c'est extraordinaire : je prends deux kets dans mon espace, donc deux états. Je prends le milieu de mes deux kets : un nouvel état. Eh bien *ce n'est pas le milieu des deux états précédents*. *Superposer les kets*, c'est beaucoup plus joli que *mélanger les états*. Je suis sûr que c'est ça qui produit les ***interférences***, ces belles couleurs que nous aimions tant quand nous faisions des bulles de savon !

Et sur mon espace des kets, je sais faire agir la source **S** de la chose ; ça n'a l'air de rien, *mais c'est comme ça que je crée tous ces états.* " ([2]).

1 Les *certitudes* — au sens de la clé 8.
2 C'est ainsi que P. A. M. Dirac a formulé les " *principes de la mécanique quantique* " en 1930..

—PYTHAGORE pose une question perfide : " Si j'ai bien compris, mon cher PAM, vous venez tout simplement de réinventer les espaces de mon cher collègue Hilbert ? " ✯

— PAM ne se laisse pas démonter : " Oui, bien sûr, si ça peut vous faire plaisir. Mais j'ajouterai une remarque qui vous a peut-être échappé : si Madame EURYDICE nous a donné un état pur, tous mes kets produisent aussi des états purs.
À eux tous ils constituent bien une pointe dans votre dessin, cher Monsieur PYTHAGORE, mais une pointe arrondie…" (fig. 38) ✯

Même quantiques, les choses participent à la géométrie du Cosmos…

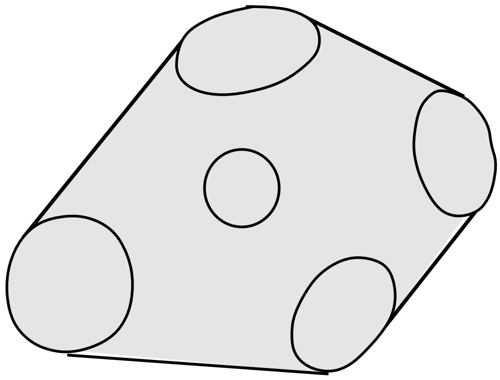


Figure 38 : … donc elles sont ! "

Le portrait de tous les états possibles d'une chose, c'est un espace géométrique ; il possède la géométrie de la source **S**, qui fait glisser chaque pointe sur elle-même.

Et il possède ainsi la géométrie de l'espace et du temps, puisque le *groupe géométrique* agit sur les états, via la source **S** (1).

liens

Le travail de SATY, c'est de s'occuper de *deux choses à la fois*.

Deux choses : la chose numéro 1 et la chose numéro 2, qui se contentent de coexister — et de constituer ainsi un « système », une « Chose composée ».

Première question : quelle est la source **S** de ce système ?

Un ami qui s'occupait de mécanique classique a appris à SATY que c'était simplement le « produit » des sources $\mathbf{S}_1$ et $\mathbf{S}_2$ des choses composantes. ✯

SATY a deviné comment constituer un état de la chose composée avec un état de chaque composante ; tout va bien, les spectres s'ajoutent comme il faut. ✯

Mais SATY s'aperçoit vite qu'il y a d'autres états, qui ne peuvent pas vraiment se séparer entre les constituants. Et dans ces états " *non séparables* ", voici de nouveaux paradoxes (2) !

— SATY proteste : Rassurez-moi, Madame la Directrice ! Il s'agit certainement d'un simple jeu mathématique, la Nature ne produit pas de telles horreurs ! "

---

1 *la source et les ombres*, p.76.

2 Exemple : il peut arriver que les spins de deux particules soient orientés chacun « au hasard » — mais que « certainement » ils soient opposés l'un à l'autre. De tels **états non séparables** peuvent manifester des liens entre les mouvements de choses par ailleurs indépendantes.

—EURYDICE Mais si, mais si, le monde est plein de ces états-là… Et d'ailleurs, rien de plus amusant ! Le plus intéressant, c'est quand les deux choses sont les mêmes…. Les mêmes, comme deux atomes ou deux molécules de même formule chimique.

Qu'est-ce que ça veut dire, « les mêmes » ? Tout simplement que l'échange des deux choses fait partie de la source **S** de la chose composée. Vous voyez bien ce que ça implique ? "

— Eh oui, SATY y pensait depuis un moment. ✯ Et il pose une question précise : Un état de la chose, tel que vous nous le donnez, c'est une fonction sur le groupe **S** ; et l'échange des deux choses, vous venez de nous dire que ça fait partie de **S**. Mme la Directrice, dites-moi donc *quelle est la valeur de votre état en ce point-là* ? "

— EURYDICE : Voici la réponse :

$$\boxed{\mathbf{1}}$$

tout simplement… "

Entendant cela, SATY bondit de joie. « Un », mais ça a des implications formidables ! Et immédiatement, il exprime la plus belle :
-- Alors un état séparable de la chose composée, c'est nécessairement fait avec deux composantes *dans le même état.*

Et pas seulement pour deux choses : cent mille milliards de photons dans un état séparable, c'est *cent mille milliards de photons dans le même état* ! " ✯

Voilà comment se comportent les photons dans la *lumière cohérente* du laser (1)… Et ça doit aussi permettre de comprendre la *super-fluidité* de l'hélium ! "

— Mais visiblement WOLFGANG n'est pas content du tout : Non, je ne peux pas vous croire ! J'ai bien remarqué que deux électrons, *ça refuse absolument d'adopter le même état.* Ça me paraît très sérieux, un vrai Principe de la Nature (2). Alors ? "

— C'est ENRICO qui se charge de répondre : Je crois avoir deviné ce qui se passe. Dans le cas des électrons, la réponse de Mme EURYDICE aurait été différente : la valeur de l'état pour un échange de particules, ça aurait sûrement été

$$\boxed{\mathbf{-1}}$$

Voilà pourquoi les systèmes d'électrons ne sont jamais dans un état séparable ! Ai-je raison, Madame ? "

— MAIS WOLFGANG leur coupe la parole :
" Tu sais que tu es génial, ENRICO ! Superbe paradoxe : sans avoir besoin d'agir le moins du monde l'un sur l'autre, les électrons vont se faire des politesses, se céder la place mutuellement ! Ainsi se comportera la « matière électronique », et aussi la « matière nucléaire ». Et voilà un ***principe d'exclusion*** assis sur des bases inébranlables.

Et il a vraiment besoin d'une base inébranlable : c'est à cause de lui que, dans un cristal, les atomes ne se mettent pas tous à la même place, et se disposent en réseaux !

---

1 Voir ci-dessous *ondes*, p. 163.

2 Le « principe d'exclusion » de Wolfgang Pauli.

Voilà comment la matière peut résister à la pression et aux contraintes ; voilà pourquoi nous ne passons pas à travers le plancher ; pourquoi la Terre, le Soleil et les étoiles ne se ratatinent pas instantanément sous l'effet de leur propre poids !
Voilà aussi pourquoi, dans un atome, les électrons se disposent en couches. Et ces couches, ce sont elles qui créent la chimie ; la chimie peut exister,

donc la vie…

Mais Madame EURYDICE, pourquoi choisissez-vous parfois 1, et parfois -1 ? "

— EURYDICE : " Ça dépend — ça dépend des choses… Les choses pour lesquelles on trouve -1, nous les appellerons des « fermions », pour honorer notre ami ENRICO ([1]). Mais n'oublions pas SATY ([2]): le cas +1 sera celui des « bosons ». ✯

Il existe des bosons, comme ces photons qui nous viennent du ciel ; des fermions, comme ces électrons qui nous permettent de vivre. Mais *une paire d'électrons*, c'est aussi *un boson* ([3]). "

neiges

Et voici maintenant que MAX s'est mis en tête de faire de la *thermodynamique quantique* !

Bien sûr, il pense au « *rayonnement du corps noir* » dont il est l'inventeur ([4]) ; mais ça risque de ne pas être facile.

Qu'est devenue la belle *entropie* (p. 85) ? Elle mesurait la largeur des taches de l'espace des mouvements ; mais elles sont mortes, ces taches. Morte aussi, l'entropie !

*où sont les **équilibres** d'antan ?*

Avec quoi étaient-ils construits, ces équilibres ? avec la température. Avec le beau « *vecteur température* » que MAX a découvert ; celui qui montre s'il fait chaud ou froid, d'où souffle le vent, de quel côté est le futur : la *flèche du temps* (p.123).

Max se souvient d'un soliloque de Pythagore, qui jargonnait sans s'adresser à personne en particulier, et où il était question d'« opérateurs ». Cette idée avait beaucoup plu à certains physiciens, qui s'étaient mis à « remplacer » n'importe quoi par des « opérateurs »… Voilà ce qu'il fallait à MAX : la température va devenir un « opérateur » ; avec cet opérateur et l'action de PAM, rien de plus facile que de produire un *état* — un état *mélangé*, dosé selon une version « quantique » des équilibres thermodynamiques classiques. ✯

Eh bien cet état, on peut espérer que ce sera un *équilibre chaud et quantique* ! Et pour les *équilibres-froids*, il suffira sans doute de passer au « zéro absolu ».

---

1 A la suite des travaux de Enrico Fermi et Paul Dirac ; on dit aussi « particules de Fermi-Dirac ».

2 Travaux de Satyandra Nath Bose et Albert Einstein ; « particules de Bose-Einstein ».

3 Peut-être la supra-conductivité est-elle due aux propriétés de telles paires d'électrons. L'hélium 4, celui qui est doué de superfluidité, c'est un boson fait avec six fermions.

4 *flèche fatale*, p. 122. Forcément, ce rayonnement, c'est « thermodynamique », puisque ça a une température ; et c'est probablement « quantique », puisqu'on y rencontre la constante de Planck.

Ça marche ! Bonne recette : les atomes et les molécules, tels qu'on les rencontre dans les laboratoires, sont le plus souvent dans l'un de ces états : équilibre froid ou « état fondamental » ([1]) ; équilibres chauds ou « états excités » :

tu apparais, Chimie Quantique !

ondes

Maintenant les simples mouvements des particules sont donc remplacés par des « états » mystérieux. La Nature nous l'a enseigné, soit, mais elle ne nous a guère aidé à imaginer ce qui se passe. Même plus de « taches » dans l'espace des mouvements ; à quelle image nous fier ?

— Loulou médite sur ce sujet, et soudain il pense aux vagues de la mer.

Nul doute que ces vagues soient constituées de gouttes d'eau ; nul doute aussi que ces gouttes soient noyées et invisibles dans les flots de l'océan…

Et si c'était plus qu'une métaphore ? Si l'« état » d'un point matériel, on pouvait le représenter par une onde qui remplit l'espace, qui s'y déplace comme les ondes de l'océan ?

Si la *Mécanique* devenait *Ondulatoire* ? ([2])

Oui, mais comment ?

— C'est Erwin qui imagine une loi, une « équation » pour décrire tous les mouvements possibles de cette onde ([3]). Et comme il se doit, la source **S** *agit sur ces mouvements d'ondes*. ✯

Ô merveille, cette action, c'est tout à fait comme celles que Pam a imaginées : ainsi l'onde d'Erwin, c'est un véritable « *ket* ». Elle produit donc un *état* de la source ; un état *pur*, et un *état quantique*, par surcroît ! Celui-là, ce n'est pas à Mme Eurydice qu'on l'a demandé — mais Mme Eurydice ne le renie pas.

Et voilà, les physiciens vont pouvoir penser à de vrais mouvements ! Mouvements d'une onde au lieu de mouvements d'un point, d'accord, mais on se sent plus à l'aise : les vagues, nous connaissons.

Le branle est donné, les **équations d'onde** fleurissent : James a trouvé celle du photon, Wolfgang trouve celle de la particule à spin, Pam la rend relativiste ([4]).

Avec ces ondes, il n'y a plus qu'à rechercher les spectres des diverses observations. Travail facile avec les règles de Mme Eurydice, résultats tout à fait satisfaisants. Tout le monde est content. ✯

---

1 En mécanique statistique non quantique, les équilibres froids sont de simples mouvements, ceux dont l'énergie est la plus petite ; voir *chaud et froid*, p. 86. Ici il s'agit d'états quantiques, ceux où la moyenne de l'énergie est la plus petite ; le spectre de l'énergie est donc concentré sur la plus petite valeur. Et ce ne sont pas nécessairement des états purs.

2 Loulou ressemblerait-il un peu à Louis de Broglie, fondateur de la « *mécanique ondulatoire* » ?

3 Équation d'Erwin Schrödinger (1926). Elle concerne une « *fonction d'onde complexe* ».

4 Équations de James Clerk Maxwell, de Wolfgang Pauli, de Paul Dirac. C'est l' « équation de Maxwell » (1862), couronnement de la physique classique, qui a permis de découvrir les « ondes » radio-électriques (Heinrich Hertz, 1888). Cette équation était « *relativiste* » avant la Relativité, « *quantique* » avant la théorie des Quanta, et a servi de parangon aux modèles ultérieurs.

Tout le monde, sauf peut-être le pointilleux PYTHAGORE :
— Attention, vous vous réjouissez que vos ondes vous donnent des états *purs*. Êtes-vous donc inconscients ? Les états qui ne sont pas purs, ils existent aussi. Même l'état fondamental d'un atome, vous ne pourrez pas toujours le décrire avec une de vos ondes ! "

Protestations d'abord, consternation générale ensuite. Mais PYTHAGORE revient à la charge : " Et avec une onde, essayez seulement de décrire *deux* particules ! "
Erwin relève le défi ; mais l'onde qu'il a inventée pour ça ne se déplace pas dans le bon espace habituel. Il a dû construire pour elle un espace spécial à six dimensions ; forcément, avec ces états non séparables…

Et ça ne peut plus servir à nous représenter les choses : des vagues à six dimensions, non, nous ne connaissons pas… *Et pourtant…*

Pensons à des photons qui sont *tous dans le même état*, selon la prescription de SATY ([1]). Si leur nombre est « grand », l'état collectif peut se décrire « classiquement » par un champ électrique et un champ magnétique, solutions des équations de Maxwell : ondes de la radio, ondes lumineuses du laser…

Mais cette « lumière cohérente » n'est qu'un cas limite. Dans la lumière « ordinaire », les photons sont dans un état non séparable : c'est le cas de la lumière du jour, de celle des étoiles, du rayonnement du corps noir (*ça va chauffer*, pp. 122-123).

Elles vont être bien utiles, ces ondes : elles vont servir à faire de la Mécanique Quantique *pratique*, qui se développe dans le même sens que la Mécanique Classique *pratique* (p. 80) : elle ne nécessite pas la connaissance d'un groupe-source, elle peut s'appliquer à un système lié (une partie d'un grand système qui est censée ne pas modifier le reste) ; les *forces*, que les mécaniciens classiques ont réussi à apprivoiser dans leur propre pratique, vont aussi pénétrer les équations d'onde. Admirez ce prodige : on insère la *force électrique* dans l'équation d'ERWIN, et on retrouve le *spectre de l'hydrogène* — sans même connaître la régularité de WOLFGANG.

La Mécanique Quantique, peu à peu, devient un savoir-faire efficace, une technique assurée. Les sourires renaissent sur tous les visages.

1 *liens*, pp. 160-161.

poursuite

Ce modèle si bien structuré, on l'appelle donc *quantique*. S'il est quantique, lui, ça veut dire que les autres *ne le sont pas…* Non seulement leur pratique est complémentaire, mais leur structure même est antagoniste — sinon il n'y aurait qu'un seul modèle.

Le modèle quantique, établi pour les phénomènes microscopiques, rencontre des difficultés avec les phénomènes macroscopiques les plus courants, comme la *pesanteur*. Et pourtant *les électrons tombent*, comme tout le monde.

Même la chose la plus banale et la plus vieille du Cosmos : un *atome d'hydrogène*. Ce que l'expérience nous en a fait connaître, nous ne savons le décrire que par un compromis entre divers modèles, tous « quantiques » bien entendu, mais pas vraiment cohérents entre eux.

Et rien n'est moins élémentaire que le « *modèle standard* » des particules élémentaires ([1]).

---

1 Modèle construit avec des groupes, bien entendu ; mais le choix de ces groupes, les approximations nécessaires, tout cela reste empirique.

épilogue

Non, la physique ne triomphe pas ; elle avance à tâtons,
voilant délibérément ses échecs et ses reniements,
Impasses, retours en arrière…
Comment progresser dans ce labyrinthe ?

…Jeunes loups de la pensée
Sur les sentiers de la science
Votre flair vous guidera !

PAGES JAUNES : CLÉS

CLÉ 1 : GROUPES

les groupes, en mathématiques

Un **groupe**, c'est constitué par des **éléments** ([1]),
et par une **loi** qui relie ces éléments
en respectant les trois règles suivantes :

Règle 1 (**composition**) :

Si **a** et **b** sont des éléments, la loi les *compose,* et produit ainsi un nouvel élément ; si on choisit d'écrire la loi avec le signe ∘ , l'élément composé s'écrira

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} \qquad ([2])$$

Règle 2 (**associativité**) :

@

$$(\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) \circ \mathbf{c} = \mathbf{a} \circ (\mathbf{b} \circ \mathbf{c})$$

Nous écrirons simplement $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} \circ \mathbf{c}$

en négligeant les parenthèses non significatives ([3]).

Règle 3 (**interposition**) :

Si **a**, **b**, **c** sont des éléments, il existe un seul élément x qui produit a en s'interposant entre b et c :

$$\mathbf{b} \circ \mathbf{x} \circ \mathbf{c} = \mathbf{a}$$

---

1 Au moins un élément.

2 Il y a des cas où on peut trouver deux éléments **a** , **b** dont les composés $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$ et $\mathbf{b} \circ \mathbf{a}$ sont différents ; on dit alors que le groupe est ***non commutatif*** . Mais il existe aussi des ***groupes commutatifs***.

3 Attention ! en dehors des groupes, il existe des compositions qui ne sont pas associatives. Songez : un « *misanthropophage* », ce ne peut pas être à la fois un *ennemi des anthropophages* et un *mangeur de misanthropes*.

Pour une loi associative, vérifiez donc la règle suivante :

$$(\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) \circ (\mathbf{c} \circ \mathbf{d}) = \mathbf{a} \circ (\mathbf{b} \circ \mathbf{c}) \circ \mathbf{d}$$

Les groupes constituent un *universel de la pensée* ([1]), caractérisé par ces trois règles. Rien de plus, rien de moins…

…mais avec ces règles-là, on peut faire beaucoup de choses !

Pour commencer, on peut en déduire des règles annexes qui fonctionnent *dans chaque groupe* ([2]) : en voici quelques unes :

Règle 4 : Il y a un seul élément **e** qui vérifie $\mathbf{e \circ e = e}$; il s'appelle **élément neutre**. Pour tout élément **a**, la règle suivante est valable : $\mathbf{a \circ neutre = neutre \circ a = a}$
Règle 5 : Si deux éléments **a** et **b** vérifient $\boldsymbol{a \circ b = neutre}$, alors $\mathbf{b \circ a = neutre}$: on dit qu'ils sont **réciproques.** Chaque élément possède ***un seul réciproque***. Le réciproque d'un élément **a** pourra s'écrire $\mathbf{a^-}$
Règle 6 : $\mathbf{neutre^- = neutre}$
Règle 7 : $\mathbf{(a^-)^- = a}$
Règle 8 : $\mathbf{(a \circ b)^- = b^- \circ a^-}$
Règle 9 : La solution **x** de l'équation $\mathbf{b \circ x \circ c = a}$ (règle d'interposition) est $\mathbf{x = b^- \circ a \circ c^-}$

Attention ! Si nous travaillons sur plusieurs groupes en même temps, il faudra les nommer pour les distinguer : par exemple avec les lettres **G** et **H**. Pour éviter toute confusion, nous préciserons alors **G**-élément, **G**-neutre, **H**-réciproque**,** etc.

1 Un ***Universel***, c'est « un projet de l'esprit que l'on peut appliquer à un grand nombre d'objets » (Guillaume d'Ockham). Les *groupes* s'appliquent à suffisamment d'objets pour les ranger parmi les ***Universaux***.

2 Essayez donc de faire ces déductions, de démontrer ces règles annexes.

construction standard

voici maintenant une règle qui permet la construction de divers groupes très utiles :

Soit **E** un ensemble muni d'une loi de composition $\circ$ qui est *associative* ([1])
Alors il existe *au plus un* élément **e** vérifiant $\mathbf{e} \circ \mathbf{a} = \mathbf{a} \circ \mathbf{e} = \mathbf{a}$ quel que soit **a**
Dans ce cas, **a** est dit **inversible** s'il existe **b** tel que $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \mathbf{b} \circ \mathbf{a} = \mathbf{e}$ et les éléments de **E** qui sont inversibles constituent *un groupe* pour la loi $\circ$

Facile à vérifier…

premiers exemples de groupes

Il existe un groupe dont les éléments sont les nombres entiers de signe quelconque :

…-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …

la composition étant *l'addition* +. Ce groupe s'appelle $\mathbf{Z}$ (on précise parfois ($\mathbf{Z}$, +).

Quand on travaille dans ce groupe-là, on écrira donc **a + b** au lieu de $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$. Vous devinez tout de suite que le neutre de ce groupe, c'est le nombre 0 (zéro) : que le réciproque de a, c'est - a ([2]).

Et dans ce groupe, le composé **a + b** ne dépend pas de l'ordre d'écriture : ($\mathbf{Z}$, +). est donc un groupe **commutatif**.

Les nombres « **réels** » (fractionnaires ou irrationnels ; positifs, négatifs et nul) constituent aussi un groupe si on les compose avec l'addition. Ce groupe s'appellera. (R, +).

La multiplication de ces nombres est aussi une loi associative ; elle ne produit pas un groupe, puisque l'équation $e \times e = e$ possède deux solutions distinctes ($e = 1$ et $e = 0$).

Mais la « *construction standard* » montre qu'il suffit d'*exclure le nombre zéro*. Cette fois-ci le neutre, c'est le nombre 1 : le réciproque de a, c'est l'inverse 1/a. Encore un *groupe commutatif*.

Si on choisit un ensemble **X**, l'ensemble de ses *permutations* est un groupe (*cli* 2). Si **X** contient plus de deux éléments, ce groupe n'est pas commutatif.

sous - groupes

Qu'est-ce qu'un **sous-groupe** d'un groupe **G** ? Simplement un groupe **H** dont tous les éléments sont des éléments de **G**, et où le composé a la même valeur que dans **G**.

Vous saurez démontrer que le **H**–neutre est égal au **G**–neutre, que le **H**–réciproque d'un élément de **H** est égal à son **G**–réciproque.

Exemples, avec la loi + :

- $\mathbf{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbf{R}$
- les entiers *pairs* constituent un sous-groupe de $\mathbf{Z}$, et donc de $\mathbf{R}$.

---

1 Selon les règles 1 et 2 .

2 Entraînez-vous à réécrire les diverses règles des groupes avec l'écriture **-a** au lieu de $\mathbf{a}^{-}$.

morphismes

Choisissez deux groupes **G** et **K**, et une correspondance ***m*** qui associe un élément de **K** à chaque élément de **G.** Si cette correspondance possède la propriété suivante :

si **a** et **b** sont des éléments de **G**,
$\boldsymbol{m}\,(\mathbf{a}\circ\mathbf{b}) \;=\; \boldsymbol{m}(\mathbf{a}) \circ \boldsymbol{m}(\mathbf{b})$

nous dirons que ***m*** est un **morphisme** de **G** dans **K** ([1]).

sous les formules, la plage…

… la plage où batifolent les mathématiciens : ils dessinent sur le sable, ils oublient et ils créent. Ils parviennent au niveau *Dé* de l'abstraction ([2]).

Et c'est si facile… voici quelques exemples :

— JULIE demande à l'un de ses amis de lui proposer un morphisme *m* de **G** dans **K** ; et elle lui fait remarquer que l'ensemble des éléments *m*(**a**) est un sous-groupe de **K :** elle l'appelle **image** de *m .* Et elle sait que tous les sous-groupes sont des images de morphismes.

Elle lui indique aussi un sous-groupe de **G**, le **noyau** de *m* : il est constitué des éléments **a** de **G** pour lesquels *m*(**a**) est neutre.

— Mais JULIETTE fait remarquer à JULIE qu'il y a des sous-groupes qui ne peuvent pas être des noyaux — malgré toute l'imagination des inventeurs de morphismes. Un sous-groupe **normal**, c'est un sous-groupe qui est un noyau.

Elle en connaît un beau, qu'elle appelle **centre** du groupe : il est constitué simplement des éléments qui commutent avec tous les autres.

— JULIE rétorque à JULIETTE : " Choisis un sous-groupe **H** de **G**, celui que tu veux : et je te donnerai le plus grand sous-groupe de **G** dans lequel **H** est normal : si tu veux bien, nous l'appellerons « **normalisateur** de **H** ». "

— JULIEN demande à JULES un morphisme de **G** dans **H**, et à JULIE un morphisme de **H** dans **K** : et il affirme : « si vous prenez un élément **a** de **G**, si vous lui infligez le morphisme de JULES, puis le morphisme de JULIE, tout compte fait vous arrivez dans **K**, mais pas n'importe comment : vous aurez obtenu un morphisme de **G** dans **K** ».

Et il ajoute catégoriquement : " voilà comment grimper dans l'échelle des abstractions ([2]) ".

— JULES annonce fièrement: " Saviez-vous qu'il existe un groupe qui n'a qu'un seul élément ? ".

— JULIE répond ironiquement : " Bravo, JULES… et tu vas me dire que cet élément tout seul est neutre… mais il y a beaucoup de groupes avec un seul élément : moi je les appelle groupes **nuls**. "

---

1 Dans cette formule, il s'agit du **G**-composé à gauche, et du **K**-composé à droite. Vous trouverez facilement pourquoi $m\,(\mathbf{neutre}_{\mathbf{G}}) = \mathbf{neutre}_{\mathbf{K}}$, et $m\,(\mathbf{a}^{-}) = m\,(\mathbf{a})^{-}$.

2 Figure 9, p. 24.

Un « **isomorphisme** de **G** dans **K** » , c'est un **morphisme** qui a les deux vertus suivantes :

son image est égale à **K**,
son noyau est nul.

Si Juliette a trouvé un isomorphisme de **G** dans **K**, Jules se fait fort de revenir au point de départ par un isomorphisme de **K** dans **G .** Nos mathématiciens vont dire alors que les groupes **G** et **K** sont **isomorphes**, et au fond d'eux-mêmes ils pensent : « les groupes **G** et **K** , c'est quasiment la même chose ».

Et d'ailleurs **G** et **K** , ça peut être *tout à fait* le même groupe : alors les isomorphismes s'appellent **automorphismes**. Et les automorphismes de **G** , ça fait encore un groupe.

Jeux sans fin…

CLÉ 2 : GÉOMÉTRIES

permutations

Choisissons un ensemble **X** .

Deux fonctions **a** et **b** qui font correspondre à chaque élément de **X** un élément de **X** se composent entre elles, selon la loi classique ([1]) :

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} \ (\mathbf{x}) = \mathbf{a}\,(\,\mathbf{b}\,(\mathbf{x})\,)$$

qui est évidemment *associative* (*clé* 1).

Il est clair que la *fonction identique* **e** , définie par :

$$\mathbf{e}\,(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \text{ pour tout } \mathbf{x}$$

remplit les conditions de la *construction standard* (p.169). Ce qui justifie l'énoncé suivant :

> Pour tout ensemble **X** , les fonctions de **X** dans **X** qui possèdent une *fonction réciproque* pour cette loi **o** s'appellent ***permutations*** de **X**. ([2]).
>
> *Ces permutations et cette loi constituent un groupe :*
>
> *ce groupe, nous l'écrirons* **X !**

actions de groupe

Une **action** d'un groupe **G** sur un ensemble **X** , ce sera

un *morphisme* de **G** dans le groupe **X !** des *permutations* de **X** . ([3]).

Donnons maintenant la parole à FELIX ([4]) : Quand nous aurons choisi

un groupe **G** et une action de **G** sur un ensemble **X** ,

nous dirons que **G** est

une **géométrie** *de* **X**.

Ainsi, *une géométrie, c'est un groupe.*

Alors :

- **X** sera dit "**espace"** (géométrique) ;
- les éléments de **X** seront dits "**objets"** de cette géométrie**.**

---

1 *oublier pour créer*, p.23. Ces fonctions générales, les mathématiciens les appellent « applications » : attention à ne pas les confondre avec les « applications » des informaticiens !

2 Réciproque ? voir règle 5, p.168. Les permutations, ce sont les fonctions qui sont *à la fois "injectives" et "surjectives"* ; on dit aussi *"bijectives".*

3 *Morphismes* ? p.170. La plupart du temps, on se contente d'écrire g(x) au lieu de a(g)(x), a étant le nom de l'action. Les règles définissant les actions de groupe s'écrivent alors:

$$[g\, g'](x) = g\,(g'\,(x)) \quad \text{et} \quad e(x) = x.$$

4 *à l'action*, p. 25. Définition de Felix Klein (Programme d'Erlangen, 1872).

Exemple :

X , ce sera l'espace « ordinaire », dont les objets sont les « points » ; **G,** ce sera le groupe des « déplacements » que considérait Euclide ([1]) :

telle est la **géométrie euclidienne** *de ce que nous appelons «* ***l'espace*** *».*

Cette définition précise des géométries va permettre d'élaborer quelques notions nouvelles (*une quarantaine d'ici la page 177…*). Notions qui reçoivent ici des définitions rigoureuses et deviennent ainsi "scientifiques".

Rassurez-vous : beaucoup de ces notions correspondent à des pratiques de la vie courante. Voyez plutôt.

espèces et régularités

Travaillons dans un espace **X** muni d'une géométrie **G** . Choisissons un objet **x** dans **X.** Alors on peut lui associer deux choses:

- L'**espèce** de **x** : c'est l'ensemble des objets **g(x)** ***,*** **g** étant arbitraire dans **G** .
- La **régularité** de **x** : c'est l'ensemble des éléments **g** de **G** tels que **g**(**x**) = **x**.

Grâce aux propriétés des groupes, on établit facilement les règles suivantes :

- L'**espèce** de **x** est aussi « l'ensemble des objets qui ont la même espèce que x » : ces objets-là, on les appelle **conjugués** de x. ([2]).
- Un **espace homogène**, c'est un espace dont tous les objets sont conjugués : un espace-espèce. Exemple : l'espace euclidien des « points » est homogène.
- La régularité de **x** est un sous-groupe de **G** ([3]) ; ses éléments s'appelleront **symétries** de **x**.

Une régularité, c'est donc un sous-groupe (p.169) ; mais un sous-groupe, est-ce toujours une régularité ?

La réponse est « oui » : si **H** est un sous-groupe d'un groupe **G** , le mathématicien sait produire un *espace homogène* (qu'il appelle **espace quotient**, et qu'il écrit **G/H**), et un objet de cet espace dont la régularité est **H** .

Ces *espaces-quotients* sont les modèles de tout espace homogène **X** :

X peut se « reconstruire » comme quotient de la géométrie de l'espace par la régularité de l'un quelconque de ses points ([4]). ✯

Si H est un sous-groupe ***normal*** de G (p.171), le quotient G/H devient un groupe : on l'appelle **groupe-quotient**. ✯

Si la régularité d'un objet **x** contient la régularité d'un objet **y,** nous dirons que

x est **attaché** à **y**.

---

1 *le vide hypocrite*, p.23.

2 Nous pourrons donc parler des *espèces de l'espace* **X**, sans avoir besoin de choisir un élément dans chacune. Alors les espèces de **X** constituent " une **partition** de **X** " : elles recouvrent **X :** deux espèces différentes n'ont aucun objet commun.

3 On l'appelle aussi **stabilisateur** ou **groupe d'isotropie** de **x**.

4 Dans ce cas **G** est *géométrie* de l'espace **X**, et **X** est *quotient* du groupe **G** : ils se transmettent mutuellement l'existence.

Exemple : dans l'espace euclidien, il existe *une droite* qui est attachée à chaque *cercle :* son *axe*. Mais un cercle n'est pas attaché à son axe ; il coulisse dessus ([1]).
S'il existe un objet de la géométrie dont la *régularité* est *nulle* ([2]), tous les autres objets de l'espace lui sont attachés ; nous dirons que cet objet est
référentiel.

enrichir une géométrie

Si nous connaissons une *géométrie* **G** d'un *espace* **X** , rien de plus facile que d'étendre cette géométrie à divers autres espaces.

Voici un premier exemple :
On obtient une *action* du groupe **G** sur l'ensemble des *couples* (**x, x'**) d'objets de **X** par la règle

$$\mathbf{g}\,(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = (\mathbf{g}\,(\mathbf{x}), \mathbf{g}\,(\mathbf{x}'))\ ;$$

alors l'espace des couples possède aussi la géométrie **G .**

De façon analogue, la géométrie de **X** s'étend à l'espace des *triplets* ; plus généralement à divers « *espaces de figures* » de l'espace **X** .

Exemples :

- L'espace euclidien des *points* produit ainsi l'espace euclidien des *couples de points*. Ce n'est plus un espace homogène : une *espèce de couples de points*, vue *en compréhension* ([3]), ça s'appelle une **distance**.
- Dans l'espace euclidien des *triplets de points* (ou « triangles »), deux objets conjugués s'appellent "triangles égaux". ([4]).

L'extension d'une géométrie à de nouveaux espaces est un ***outil conceptuel fondamental de la physique***. Voici deux premiers exemples :

- Le groupe d'Euclide agit sur les points de l'espace ; mais on postule qu'il agit aussi sur les solides matériels, tels que les règles et les compas. Voilà le premier "principe" de la *mécanique des solides* ([5]).
- Archimède a étendu la géométrie d'Euclide aux *systèmes de forces* qui régissent l'équilibre des solides ; systèmes qui ne sont pas constitués de points. C'est cette géométrie qui lui a permis d'énoncer les lois concernant les *leviers* et les *corps flottants* ([6]).

Divers exemples de « géométries étendues » apparaissent dans les chapitres II à VI.

---

1 Que sont exactement les "cercles" et les "droites" ? voir p. 175.
2 Groupe nul ? p.170.
3 Souvenons-nous d'Aristote… (*l'origine des espèces*, p. 29).
4 Terminologie trompeuse. *Deux* triangles véritablement égaux? Ça n'existe pas, puisqu'ils ne font plus qu'*un* !
5 Il s'agit des "*corps solides*", ceux qu'étudie la "*mécanique des solides*". Et certains d'entre eux sont des *référentiels* (p.173). Nous croyons le plus souvent que la planète Terre est un solide — mais ça n'est pas tout à fait vrai : attention aux séismes…
6 Ces "systèmes de forces" ou "torseurs" sont les *moments* du groupe d'Euclide : voir *matérialisme idéal*, pp. 60-63.

retournons sur la plage... (1)

JULIETTE est songeuse : elle a pensé à un élément **g** d'un groupe **G** , à un élément **k** d'un sous-groupe **K** , et elle a écrit sur le sable la jolie formule :

$$\mathbf{g}_{\mathbf{K}}(\mathbf{k}) = \mathbf{g} \circ \mathbf{k} \circ \mathbf{g}^{-}$$

Elle remarque que $\mathbf{g}_{\mathbf{K}}$ est un *morphisme* de **K** dans **G** , que son *image* est un sous-groupe, et qu'elle a ainsi obtenu une *action* de **G** sur l'espace des sous-groupes de **G**.

Ainsi apparaît la « **géométrie interne** » d'un groupe **G** (2).

Et voici quelques règles valables *dans tout espace géométrique* :

régularité(**g**(**x**)) = **g** (régularité(**x**))
si **x** est attaché à **y**, g(**x**) est attaché à g(**y**)
Deux objets de même espèce ont des régularités de même espèce
Tout objet géométrique possède, non seulement une régularité, mais aussi une **bi-régularité** (la régularité de sa régularité). La bi-régularité contient la régularité : le quotient est un nouveau groupe que nous appellerons : **liberté** de l'objet.

JULES, par la pensée, est toujours dans un espace **X** , muni de la géométrie **G**. Il pense à un sous-groupe **K** de **G** : évidemment **K** agit sur **X.**

Nouvelle géométrie de **X** , **sous-géométrie** qui découpe les espèces en **sous-espèces**.

Jules se demande : " y a-t-il d'autres sous-groupes qui possèdent les mêmes sous-espèces que **K** ? "

Bonne question, vite résolue : il y en a un qui est plus grand que tous les autres : JULES décide de l'appeler « **anatomique** ». Sous-groupe caractérisé par ses espèces.

Et si **K** est un sous-groupe anatomique, l'espèce de **K** est constituée de groupes anatomiques : ces espèces-là, il les appellera **anatomies**.

Quelques *anatomies euclidiennes* ? Facile !

- La régularité d'un point **A** , c'est un groupe anatomique : ses espèces, ce sont les **sphères** de centre **A** , et aussi le point **A** tout seul. Cette anatomie-là, c'est ce qu'on appelle « **symétrie sphérique** ».
-

1 p. 170.

2 Les sous-groupes de même espèce qu'un sous-groupe **K**, on les appelle donc *conjugués* de **K**. Et ce ***normalisateur*** de **K** dont JULIE faisait tant de foin (p.169), c'est simplement sa *régularité.*

- La régularité d'un couple **(A,B)** de points distincts a pour espèces les points de la droite **AB** , et les **cercles** d'axe **AB**. L'anatomie associée, c'est la « **symétrie de révolution** ».
- Et la bi-régularité de ce couple **(A,B)** ? Ses espèces sont les **cylindres** d'axe **AB**, et la **droite** elle-même. ([1])
- La bi-régularité d'un « triangle » **ABC** ([2]) a pour espèces le **plan** du triangle, et les couples de **plans parallèles** équidistants ([3]). La liberté associée, c'est la **géométrie plane**.
- Il y a d'autres anatomies euclidiennes, plus subtiles : par exemple l'anatomie d'une *vis* ([4]) ; et les 230 anatomies qu'on appelle « **groupes cristallographiques** » (p. 33).

Quelques applications de ces règles à la géométrie euclidienne :

- Aucun point n'est *attaché* à un autre.
- Un seul point est attaché à une sphère : son **centre**. Mais la sphère elle-même est attachée à son centre. Autrement dit : même régularité, mêmes symétries pour la sphère et pour son centre.
- Les polyèdres de Platon : *cube, tétraèdre, octaèdre, icosaèdre, dodécaèdre* (qui représentaient les éléments Terre, Feu, Air, Eau, Quintessence), *sont des espèces de leur régularité :* c'est pour cela qu'on les appelle « **polyèdres réguliers** » ([5]).
  Ces cinq polyèdres n'ont que trois anatomies : celle de la Terre et de l'Air, celle de l'Eau et de la Quintessence, et celle du Feu.
- Choisissons un point situé au tiers d'une arête du dodécaèdre de Platon. Ses conjugués dans la régularité du dodécaèdre sont les sommets d'un polyèdre à 60 sommets, qui assemble 12 pentagones et 20 hexagones réguliers.
- Objet très populaire, puisqu'il est visible sur les ballons de football. Objet naturel aussi, puisqu'il constitue la « formule développée » de la molécule C60.
- Ce matériau, l'une des formes stables du carbone, s'appelle aussi footballène : il se forme spontanément dans la flamme d'une bougie, on peut le récupérer dans la fumée. ([6])

Mais nous pouvons dépasser la géométrie euclidienne : les permutations de l'espace qui sont *continues* ainsi que leur réciproque constituent un nouveau groupe : ce groupe est aussi *une géométrie de l'espace*, qu'on appelle **topologie**.

---

1 Vous savez maintenant ce que sont les *sphères*, les *cercles* et les *droites*. Et vous savez pourquoi deux sphères qui se coupent se coupent en un point ou en un cercle.

2 Trois points qui ne sont pas *sur une même droite*.

3 C'est le « postulat d'Euclide », un test de la géométrie euclidienne. Un petit coup de pouce à cette géométrie, et les espèces ne seront plus des plans, mais des « sphères » (celles qui sont proches du plan ont un très grand rayon…). Géométrie paradoxale, mais rigoureusement cohérente — grâce à l'Universel « *groupe* ». Géométrie utile : c'est celle du modèle cosmologique de Friedmann (voir la figure 30, p.128).

4 Fig 10, p. 30. Cette anatomie est caractérisée par le *pas* de la vis.

5 Figures 5 A, B, p. 16. Comme leur nom l'indique, les polyèdres sont des ensembles de faces : ces polyèdres restent *espèces de leur régularité* si on les considère comme *ensembles d'arêtes* ou comme *ensembles de sommets*.

6 Le C_{60} , c'est le point de départ des « *nano-technologies* ».

Voici quelques *anatomies topologiques* de notre espace usuel :

- Choisissons dans l'espace la figure suivante : une *courbe fermée*. Alors il existe une anatomie constituée de deux espèces : la courbe, puis le reste de l'espace. La classification des courbes par ces anatomies-là, c'est la **théorie des nœuds**.
- Autre exemple, à trois espèces : une **surface fermée**, son **intérieur** et son **extérieur**. Pensez à une amibe.
- On peut perfectionner ces animaux-là, en leur ajoutant des **poils** ([1]). Et pourquoi pas en ajoutant une espèce « **chair** », une espèce « **os** », etc. ? Pensons à notre tube digestif, qui nous permet de changer d'anatomie rien qu'en ouvrant la bouche.

1 Le nombre de poils est arbitraire, et caractéristique de l'anatomie. Quel que soit ce nombre, tous les poils constituent une seule espèce (ne pas oublier l'espèce « pointe de poil » ni l'espèce « racine de poil »).

CLÉ 3 : MATRICES

Les **matrices**, ce sont des tableaux de nombres, écrits entre parenthèses. On va se permettre de les nommer avec une seule lettre. Exemple, la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

qui a 2 **lignes**, 3 **colonnes** et $2 \times 3 = 6$ **éléments :** son **format** est [2, 3].

Cas particuliers :

- Une matrice **carrée**, c'est une matrice qui a autant de lignes que de colonnes.
- L'**espace numérique** R^n est constitué des matrices à une seule colonne, de format [n, 1].
- Les matrices de format [1, 1], ce sont simplement *les nombres* (il suffit d'oublier les parenthèses). Leur espace, c'est R^1, ou tout simplement R.

premières opérations sur les matrices

Commençons par le **découpage** : toute matrice A qui n'est pas un nombre peut se découper en deux, en deux matrices B et C de plus petit format, alignées :

$$A = \begin{pmatrix} B & C \end{pmatrix}$$

ou empilées :

$$A = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$$

il suffit de rajouter des parenthèses intérieures.

Bien sûr on peut «reconstituer» A avec B et C ; découper un découpage ; etc.

Le produit d'une matrice par un nombre s, l'addition de deux matrices de même format, se font éléments par éléments.

D'où la ***soustraction*** *; la règle* $s(A+B) = sA + sB$ *; etc.*

Matrice **nulle** : tous ses éléments sont nuls, on se permet de l'écrire aussi 0, même si deux matrices nulles de formats différents ne sont pas égales.

multiplications matricielles

L'opération de multiplication, déjà définie sur les nombres, va s'étendre aux matrices : le **produit** de deux matrices A et B sera une matrice $A{\times}B$. Mais il y a une condition d'existence du produit : il faut que les formats s'accordent ([1]).

La multiplication matricielle peut se définir par trois règles qui la combinent avec le découpage :

$A\times\begin{pmatrix}B & C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A\times B & A\times C\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\times C=\begin{pmatrix}A\times C\\B\times C\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}C\\D\end{pmatrix}=A\times C+B\times D$

Règles valables dès que les formats des matrices $A, B, C, D\dots$ s'accordent pour leur donner un sens ([2]).

Et voici une règle pratique : Pour calculer un produit A x B, on écrit la matrice A, puis la matrice B en haut et à droite de A (figure 39) ;

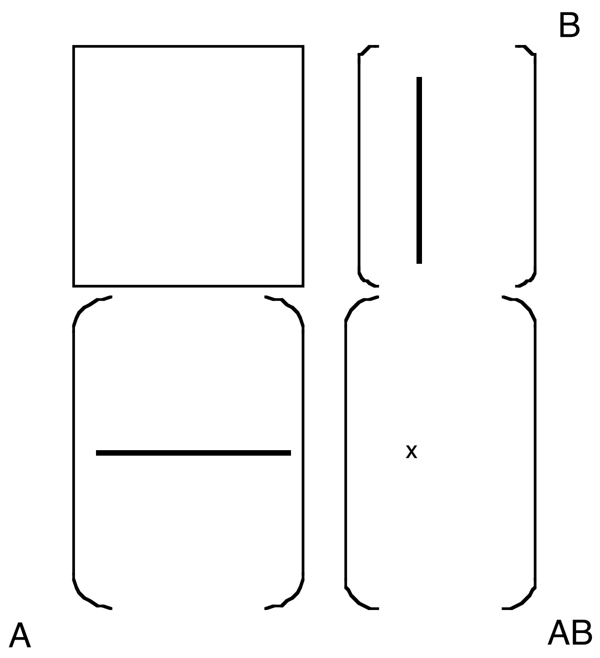


Figure 39. Multiplier les matrices

1 Le nombre de colonnes de A doit être égal au nombre de lignes de B : alors le produit $A\times B$ possède autant de lignes que A, autant de colonnes que B. En abrégé : $[p, q] \times [q, r] = [p, r]$.

2 Bien entendu, on peut aussi décrire la multiplication matricielle en numérotant les lignes et les colonnes. Ce qui produit la formule $(A\times B)_{jk} = \sum_l A_{jl}\, B_{lk}$.

La multiplication n'est possible que si on peut insérer un carré en haut à gauche : alors le produit s'insère en bas à droite ;pour obtenir un élément x du produit, on multiplie (terme à terme) la ligne de A située à gauche de x par la colonne de B située au dessus [1] ; et on ajoute.

Voici quelques conséquences immédiates des règles précédentes :

La multiplication matricielle n'est pas *commutative* : il est possible que $A \times B$ et $B \times A$ soient différents, et même qu'un seul de ces deux produits existe.

$$\begin{pmatrix} A & B & C \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} D \\ E \\ F \end{pmatrix} = A \times D + B \times E + C \times F$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \times C & A \times D \\ B \times C & B \times D \end{pmatrix}$$

$$A \times \left[B + C\right] = A \times B + A \times C$$

$$\left[A + B\right] \times C = A \times C + B \times C$$

$$s\left[A \times B\right] = \left[sA\right] \times B = A \times \left[sB\right] \quad (^2)$$

$$[A \times B] \times C = A \times [B \times C] \quad (^3)$$

Parmi les matrices carrées, on appelle **matrices diagonales** celles dont tous les éléments sont nuls en dehors de la « diagonale » qui descend de gauche à droite.

Voici un exemple : $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix}$ a, b, c étant des nombres : les éléments nuls de cette matrice sont sous-entendus.

La multiplication de deux matrices diagonales, c'est très facile…

---

1 Si vous êtes débutant, effectuez une opération numérique, par exemple $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$. Quand vous aurez obtenu le bon résultat $\begin{pmatrix} 32 \\ 77 \end{pmatrix}$, vous saurez faire les multiplications matricielles. Alors exercez-vous jusqu'à la virtuosité : après les quatre opérations élémentaires de l'arithmétique, il n'y a rien de plus utile en mathématiques…

2 s désigne un nombre.

3 Si l'un des produits écrits existe, l'autre existe et lui est égal — ce qui permet d'écrire $A \times B \times C$ sans commettre d'ambiguïté. Associativité de la multiplication matricielle.

groupe linéaire

Une ***matrice-unité*** $\mathbf{1}$, c'est une matrice telle que $A \times 1 = A$ et $1 \times A = A$ chaque fois que ces produits existent.

Comment sont elles faites ? ce sont les matrices diagonales construites avec des 1 : le nombre 1 , les matrices $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ ...

Deux matrices A et B sont dites **inverses** l'une de l'autre si leurs deux produits $A \times B$ et $B \times A$ sont des matrices-unité. Ce n'est possible que si A et B sont carrées de même format ; alors $A \times B = B \times A$.

Choisissons un entier **n** . En utilisant la «construction standard» (*clé* 1, p.169), on constate que les matrices carrées de format [**n**, **n**] qui ont une inverse *forment un groupe* :

- La loi de ce groupe ? la multiplication matricielle :
- le neutre , c'est la matrice unité $\mathbf{1}$.
- La réciproque de A : s'appelle *matrice inverse* ([1]) ; on la note $\mathbf{A}^{-1}$.

*Voilà le **groupe linéaire** (d'ordre n) : on le note* **GL(n)** .

transposition

La **transposée** d'une matrice, c'est une matrice : la transposée de A s'écrira $\overline{A}$: on l'obtient en « échangeant les lignes et les colonnes », selon l'exemple suivant :

$$\overline{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Il est clair que la transposée d'une matrice-colonne est une matrice-ligne ;que $\overline{a} = a$ si a est un nombre. Les deux règles suivantes

$$\overline{\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \overline{B} & \overline{C} \end{pmatrix} \quad , \quad \overline{\begin{pmatrix} B & C \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \overline{B} \\ \overline{C} \end{pmatrix}.$$

suffisent à caractériser l'opération de transposition. On en déduit facilement d'autres règles :

$$\overline{\overline{A}} = A \qquad \overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B} \qquad \overline{sA} = s\,\overline{A} \qquad \overline{A \times B} = \overline{B} \times \overline{A}$$

On dit que A est **symétrique** si $\overline{A} = A$: **antisymétrique** si $\overline{A} = -A$: dans les deux cas, A est carrée.

---

1 Page 184, on trouve une méthode générale de calcul des matrices inverses. Puisque vous savez multiplier les matrices diagonales, vous trouverez tout de suite quand elles ont une inverse (qui est encore diagonale).

matrices positives

Si A est une matrice-colonne, $\overline{A} \times A$ est un nombre, un nombre *positif* [1].

Généralisons : une matrice P, si elle est égale à un produit matriciel $\overline{A} \times A$, sera dite **matrice positive** [2].

Une matrice positive est *carrée* et *symétrique :* la simple formule :

$$\overline{B} \times B + \overline{C} \times C = \overline{\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}} \times \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$$

montre que toute somme de matrices positives est positive.

On écrira $A \geq B$ ou $B \leq A$ pour indiquer que $A - B$ est positive : alors $A \geq B$ et $B \geq C$ impliquent $A \geq C$; $A \geq B$ et $B \geq A$ impliquent $A = B$. ✯

groupe orthogonal

Une matrice U est dite **orthogonale** si U et $\overline{U}$ sont des matrices inverses.

Dans chaque format [n,n], le produit de deux matrices orthogonales est orthogonal : par conséquent les matrices orthogonales forment un sous-groupe du groupe linéaire GL(n) ; c'est le

groupe orthogonal O(n).

Prenons une matrice unité et changeons le signe du premier élément : on obtient une matrice $S = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \cdots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ qui est orthogonale. Les matrices $U \times S \times \overline{U}$ (U dans le groupe orthogonal) s'appelleront **miroirs :** toute matrice orthogonale est un produit de miroirs.

Toute matrice *symétrique* M peut se mettre sous la forme

$M = U \times D \times \overline{U}$, U étant *orthogonale* et D *diagonale*.

Toute *matrice carrée* M est égale à un produit

$M = U \times D \times \overline{V}$, U et V étant *orthogonales*, D *diagonale positive* ✯.

---

1 Au sens large (positif ou nul): c'est la somme des carrés des éléments de A. Le nombre $|A| = \sqrt{\overline{A} \times A}$ s'appelle ***norme*** de la colonne A.

2 Parmi les matrices A telles que $\overline{A} \times A = P$, il y en a une seule qui soit positive : c'est la ***racine carrée*** de P.

déterminants

Le **déterminant** d'une matrice *carrée* A est un nombre, noté $\det(A)$: la fonction « déterminant » est caractérisée par les deux propriétés suivantes :

- $\det(A \times B) = \det(A) \det(B)$
- si D est diagonale, $\det(D)$ est le produit de ses éléments diagonaux.

Admettons qu'une telle fonction $\det$ existe ; alors les propositions suivantes sont évidentes :

- $\det(\overline{A}) = \det(A)$;
- Si une matrice U appartient au groupe orthogonal $O(n)$, alors $\det(U) = \pm 1$;
- Dans le groupe orthogonal $O(n)$, l'équation $\det(U) = +1$ définit un sous-groupe, le **groupe spécial orthogonal**, noté $SO(n)$. Ses éléments sont les produits d'un nombre *pair* de miroirs.

La décomposition d'une matrice carrée M en produit $M = U \times D \times \overline{V}$ (U et V orthogonales, D diagonale) permet de vérifier qu'une matrice *inversible*, c'est une matrice dont le *déterminant* n'est pas nul.

un algorithme (1) ✯

Soit A une matrice carrée ; [n,n] son format.

La **trace** de A, c'est la somme des éléments de la ***diagonale principale***, celle qui descend de gauche à droite ; on l'écrit

$$\mathrm{tr}(A) \ .$$

Alors on peut calculer les matrices $M_1, M_2, \ldots M_n$ et les nombres $k_1, k_2, \ldots k_n$ que voici (2) :

$M_1 = \underline{1}$	$k_1 = -\,\mathrm{tr}(A)$
$M_2 = A + k_1 \underline{1}$	$k_2 = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(M_2 \times A)$
$M_3 = M_2 \times A + k_2 \underline{1}$	$k_3 = -\frac{1}{3}\mathrm{tr}(M_3 \times A)$
…	
$M_n = M_{n-1} \times A + k_{n-1} \underline{1}$	$k_n = -\frac{1}{n}\mathrm{tr}(M_n \times A)$

Miracle : ça s'arrête là, parce que $M_n \times A + k_n \underline{1} = 0$.

1 J-M. Souriau, Une méthode nouvelle pour la décomposition spectrale et l'inversion des matrices, C.R. Acad. Sc., Paris (1948).

L'algorithme présenté ici est une extension de l'algorithme de Le Verrier (1845), celui qui lui a permis de prévoir l'existence et la position de la planète Neptune — en utilisant les perturbations qu'elle inflige au mouvement keplérien d'Uranus. Exploit qui avait beaucoup impressionné Frédéric Chopin.

2 La notation $\underline{1}$ désigne la matrice unité de format (n,n).

Alors :

A est *inversible* si $k_n \neq 0$, et son inverse vaut $A^{-1} = -\dfrac{1}{k_n} M_n$ (1).
Le ***déterminant*** de A vaut $\pm\, k_n$, avec le signe + si n est pair, le signe - si n est impair.
On appelle **fonction caractéristique** de A la fonction réelle $\gamma(s)$ dont les *dérivées successives* $\gamma', \gamma'', \ldots \gamma^{[n]}$ sont solutions de l'équation différentielle : $$\gamma^{[n]} + k_1 \gamma^{[n-1]} + \ldots + k_{n-1}\gamma' + k_n \gamma = 0$$ et qui prennent pour $s = 0$ les valeurs : $$\gamma = \gamma' = \ldots = \gamma^{[n-2]} = 0$$ $$\gamma^{[n-1]} = 1$$
Il existe une fonction « exponentielle », notée $\exp$, définie sur les matrices carrées par : $$\frac{d}{ds}\exp(sA) = A \times \exp(sA) = \exp(sA) \times A$$ • $\exp(0) = \underline{1}$ On l'appelle **flot** de la matrice A. ✯   L'algorithme précédent donne ce flot par la formule : $$\exp(sA) = \gamma(s)\, M_n + \gamma'(s)\, M_{n-1} + \quad \ldots \quad + \gamma^{[n-1]}(s)\, M_1$$

Dans le cas $n=1$, on retrouve la « **fonction exponentielle** » usuelle, ainsi prolongée à toutes les matrices carrées.

Pour tous réels s, t, on a $\exp(sA) \times \exp(tA) = \exp([s+t]A)$ (2), ce qui entraîne

$$\exp(-A) = [\exp(A)]^{-1}.$$

1 Faites-le, ce calcul : vérifiez par exemple que $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{90}\begin{pmatrix} 29 & -19 & 11 \\ -13 & -7 & 23 \\ 4 & 16 & -14 \end{pmatrix}$.

2 Attention ! la formule exp(A+B) = exp(A) × exp(B) n'est assurée que si $A \times B = B \times A$.

On a identiquement $\exp(\overline{A}) = \overline{\exp(A)}$. Par conséquent $\exp(A)$ est ***positive*** si A est ***symétrique*** ($\overline{A} = A$), ***orthogonale*** si A est ***anti-symétrique*** ($\overline{A} = -A$).

Notons aussi la formule

$$\det(\exp(sA)) = \exp(s\ \mathrm{tr}(A))$$

Voici un simple exemple. Le *sinus*, c'est la fonction caractéristique de la matrice

$$\dot{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

la dérivée du sinus, on l'appelle *cosinus* **;** alors

$$\exp(s\dot{i}) = \cos(s) + \dot{i}\sin(s) = \begin{pmatrix} \cos(s) & -\sin(s) \\ \sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix}.$$

Ces matrices $\exp(s\dot{i})$ constituent le groupe **SO(2)** ***,*** qui est donc commutatif. Ce que nous savons de l'exponentielle nous donne ici les ***formules de trigonométrie*** ([1]).

Définition du « *nombre pi* » : c'est la plus petite solution positive π de l'équation $\exp(\pi\, i) = -1$: si vous voulez calculer π, voyez donc la *clé zéro*.

nombres-complexes

Ce groupe **SO(2)**, c'est le groupe des rotations d'un cercle sur lui-même : on l'appelle aussi le **tore :** désignons-le par la lettre $\mathbf{T}$ **.**

Les **complexes**, ce sont les matrices qui commutent avec toutes les matrices du groupe $\mathbf{T}$. Leur ensemble sera noté $\mathbf{C}$: il est évident qu'on ne sort de $\mathbf{C}$ ni par l'addition, ni par la multiplication, ni par la transposition ([2]), et que $\mathbf{C}$ contient $\mathbf{T}$.

Comment sont faits ces « *complexes* » ? Ils s'écrivent sous la forme $z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$,

ou encore, en utilisant la matrice $\dot{i}$ ci-dessus : $z = a1 + b\dot{i}$.

Pratiquement, on écrit $z = a + bi$: avec cette écriture ([3]), les opérations sur les complexes sont faciles, en remarquant que $i^2 = i \times i = -1$, et que $\overline{i} = -i$.

---

1 Calculez $\det(e^{si})$: faites le produit $e^{si} \times e^{ti}$ etc.

2 Le transposé d'un complexe z s'appelle ***complexe conjugué*** de z.

3 Si b = 0, alors z s'écrira a, et rien ne le distinguera d'un nombre « ordinaire ». Du coup les autres complexes sont considérés comme des « nombres généralisés », imaginés à des fins bien précises : au XVIème siècle, on les appelait « nombres imaginaires » ; la lettre i a été choisie comme initiale de ce mot. C'est sans doute par méfiance de l'imagination des étudiants qu'on l'a censuré : le mot « imaginaire » a été remplacé par « complexe ». Plus décent… Mais des traces de ce refoulement ont survécu : au lieu de « complexes », on dit souvent « nombres complexes » ; et les nombres ordinaires, c'est parce qu'ils ne sont pas « imaginaires » qu'on les appelle « réels ». Et c'est l'initiale R du mot « réel » qui est utilisée pour les désigner. « Réalité » bien subjective.

La multiplication des complexes est commutative.

Le produit $\bar{z}z = a^2 + b^2$ est évidemment un nombre positif : il possède donc une racine carrée, qu'on appelle **module** de z et qu'on écrit $|z|$; on vérifie la règle $|z\,z'| = |z| \times |z'|$. Tout complexe non nul z possède donc un complexe inverse, qu'on écrit aussi $\frac{1}{z}$, qui est donné par $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

On peut écrire tout complexe z sous la forme $z = |z|\, e^{\phi i}$ en faisant intervenir un nombre réel ϕ qu'on appelle **argument** du complexe z .

Le tore $\mathbf{T}$ est composé des complexes de module 1, qui s'écrivent donc $z = e^{\phi\, i}$.

L'argument ϕ est la longueur de l'arc du cercle $\mathbf{T}$ qui relie 1 à z , compté positivement dans le « *sens trigonométrique* ». Voilà comment la périphérie de ce cercle se mesure par 2π.

Il est commode de *dessiner* les nombres complexes : $z = a+bi$ est représenté par le point dont les coordonnées traditionnelles sont a et b :

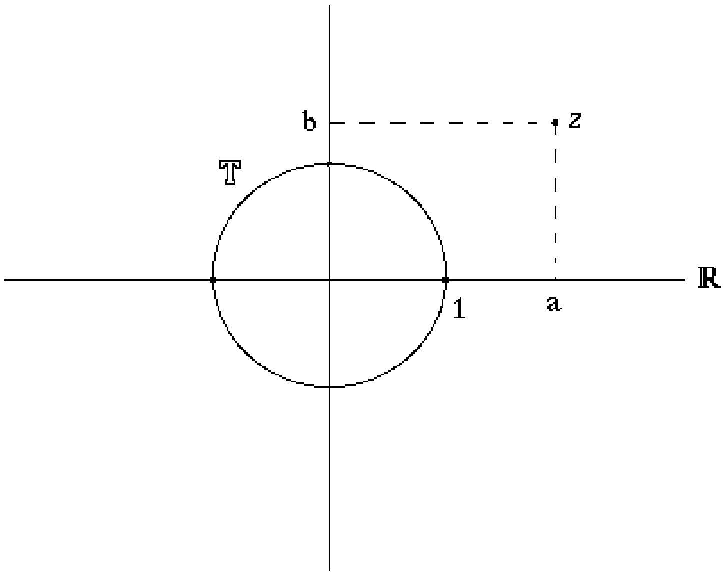


Figure 40. Plan complexe

Ainsi le groupe $\mathbf{T}$ est représenté par un *cercle*, le fameux « *cercle trigonométrique* ».

matrices-complexes

Une *matrice-complexe,* ça se définit comme une matrice ordinaire, mais ses éléments sont des « nombres-complexes ».

En considérant ces éléments comme des matrices réelles de format (2, 2), on voit que toute « *matrice-complexe* » est aussi une « *matrice réelle* » de format double.

Les *sommes, produits, inverses, transposées, exponentielles* de matrices-complexes sont encore des matrices-complexes, et le résultat de ces opérations reste le même si on les considère comme matrices-réelles de format double.

Par conséquent les matrices orthogonales complexes de format complexe [n, n] constituent un groupe, qu'on note **U(n)**, et qu'on appelle **groupe unitaire.**

La définition des *déterminants* (p. 184) se prolonge aux ma*trices-complexes* ; ainsi obtient-on le « $\mathbb{C}$**-déterminant** » ; alors le « $\mathbb{R}$**-déterminant** » d'une matrice complexe est le carré du module de son $\mathbb{C}$**-déterminant**.

Le $\mathbb{C}$-déterminant constitue un morphisme du groupe unitaire **U(n)** dans $\mathbb{T}$: son noyau, c'est le **groupe spécial unitaire**, noté **SU(n).**

La définition des matrices positives se transmet aux matrices complexes ; et une matrice $\mathbb{C}$**-positive**, c'est une matrice qui est *complexe et* $\mathbb{R}$*-positive.*

La $\mathbb{C}$-trace d'une matrices complexe carrée permet de lui appliquer l'algorithme de la p. 184, et permet de calculer le « $\mathbb{C}$*-déterminant* » , la « $\mathbb{C}$*-exponentielle* » .

états d'un groupe

À quoi ça sert, les matrices complexes positives ?

En particulier, à définir d'intéressantes fonctions sur les groupes.

Soit donc **G** un groupe – n'importe lequel.

Si une fonction μ, définie sur **G**, à valeurs complexes, possède les deux vertus suivantes :

- Chaque fois qu'on choisit un entier n et des éléments $g_1 \ldots g_n$ du groupe **G**, la matrice-complexe dont les éléments sont les $\mu(g_j^{-1}\, g_k)$ est *positive* ;
- $\mu(\text{neutre}) = 1$;

nous dirons que μ est un ***état*** de **G** . ✯

À quoi ça peut servir, ces « **états** » ? ***À modéliser divers états de la matière***. Nous constaterons plus loin que :

- Le **hasard** peut se décrire avec des états, dits« *aléatoires* » . ✯
- Avec de tels *états mathématiques*, on peut modéliser les *états physiques* des **objets quantiques**. ✯

CLÉ 4 : TEMPS ET ESPACE CLASSIQUES

géométrie analytique

Voici comment traiter numériquement la géométrie d'Euclide.

Il suffira de choisir des « coordonnées cartésiennes » ([1]) x, y, z de l'espace ; on peut alors repérer chaque « *point de l'espace* » par la *matrice-colonne* $r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Ensuite, on obtient un **modèle numérique du groupe d'Euclide** par la formule matricielle suivante :

$$r \rightarrow ar + c \ ,$$

a étant une *matrice orthogonale* ([2]), c une *matrice colonne* dans $\mathbb{R}^3$ ([3]).

coexistence de l'espace et du temps

Dès le début du livre (p.4), nous avions noté que la géométrie de ***l'espace*** (la *géométrie d'Euclide*) et celle du ***temps*** (celle du groupe *Chronos*) pouvaient se fondre en une seule. L'espace de cette géométrie, il est clair qu'on doit l'appeler **espace-temps**.

chronologie de l'espace-temps

On peut ajouter aux coordonnées spatiales cartésiennes x, y, z une quatrième coordonnée « temporelle » t ; le groupe ***Chronos*** sera représenté par

$$r \rightarrow r \quad t \rightarrow t + e$$

e mesurant « retard » ou « avance ».

Alors le **groupe de Bruno** sera représenté par

$$r \rightarrow r + bt, \ t \rightarrow t \ ,$$

la matrice colonne b représentant la *vitesse* du bateau de Bruno ([4]).

1 Cartésiennes ? en l'honneur de René Descartes. Mais dans sa "géométrie" (1637), il n'est pas question de trois coordonnées… Leur emploi systématique semble commencer vers 1770 avec Joseph Lagrange. Lagrange parlait de " *géométrie analytique* " (nous dirions plutôt maintenant " *géométrie numérique* "). Il a persévéré en créant la " *mécanique analytique* " ; dans son ouvrage de 1788 portant ce nom, il décrivait les lois des mouvements sans se référer à aucune figure, uniquement avec les règles de « *l'analyse mathématique* ».

2 Voir p.183. La matrice a est donc arbitraire dans le groupe **O(3).**

3 On peut vérifier que ce modèle ne dépend pas du choix des « coordonnées cartésiennes ».

4 Voir p. 46.

géométrie galiléenne

Eh bien ces trois règles peuvent s'écrire par une même formule :

$$g\left(\begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} ar + bt + c \\ t + e \end{pmatrix}$$

à condition de choisir convenablement a dans o(3), b et c dans R^3, e dans R. [1]

Et on peut réduire cette formule mixte à une seule multiplication matricielle :

$$\begin{pmatrix} r \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \to g \times \begin{pmatrix} r \\ t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

en posant

$$g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Vérifiez maintenant que l'ensemble de *toutes* ces matrices g constitue *un groupe* pour la multiplication matricielle [2] : vous aurez ainsi numérisé le **groupe de Galilée** *,* celui qui est « dessiné » p.48 (fig.15).

Autre vérification : la formule matricielle

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

prouve que le groupe de Galilée est *le plus petit groupe de permutations de l'espace-temps* contenant les trois sous-groupes *Euclide, Bruno, Chronos*.

pratiques galiléennes

La pratique de ce modèle requiert des procédures précises : on construit des *coordonnées galiléennes* en choisissant une «origine », trois «axes de coordonnées » orientés, perpendiculaires deux à deux, une «*unité de longueur* » arbitraire (la même sur chacun des axes), et une «*unité de temps* », tout aussi arbitraire.

Le libre choix de ces unités de temps et de longueur est le point départ de ce que les physiciens appellent *analyse dimensionnelle* ✭.

---

1 Un point $q = \begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix}$ de l'espace-temps, ça s'appelle un "**événement**", même s'il ne s'y passe rien de sensationnel…

2 Un sous-groupe du groupe linéaire GL(5).

Sévère cahier des charges pour le géomètre-expert galiléen :

Il faut que l'origine qu'il a choisie ne soit pas accélérée (naguère les bons manuels proposaient le « centre de gravité du système solaire », même s'il s'agit d'un point fort difficile à viser).

Il faut aussi que les axes de coordonnées « ne tournent pas » (la recommandation classique, c'était de les diriger « vers des étoiles fixes »).

Aujourd'hui, ce travail utilise de nouveaux instruments : horloges atomiques, interféromètres à laser, etc., et surtout

la *géodésie spatiale*.

Un navigateur au milieu de l'Atlantique, un alpiniste sur l'Himalaya, un automobiliste en ville, s'ils veulent connaître leur position, peuvent consulter le système GPS de positionnement par satellites.

Cette position se réfère à une origine située au centre de gravité de la Terre, à des axes de coordonnées dont la direction est repérée par des objets célestes lointains appelés *« quasars »* ([1]).

Des coordonnées plus « classiques » sont ensuite proposées au client: *latitude, longitude, altitude*, liées à des points de repère terrestres ([2]) .

Une difficulté : notre planète, c'est quelque chose de mou, ça se déforme en permanence sous l'action des marées (p.92, *la vie au soleil*), les points de repère terrestres sont eux-mêmes en mouvement.

Pas de problème, ces mouvements sont surveillés en permanence par les satellites ; ils sont pris en compte pour obtenir des coordonnées terrestres précises et pratiques.

Aujourd'hui, il n'y a plus de jardins secrets.

---

1 Il est difficile de viser le « centre de la Terre » ; les quasars de référence ne sont pas visés en permanence. Alors quels sont les points de repère qui permettent de mesurer effectivement ces coordonnées ? *uniquement des satellites en orbite.* Les satellites *GPS* appartiennent à l'armée des USA ; des satellites européens sont prévus aux environs de 2010 (système *Galileo*).

2 Coordonnées WGS 84.

CLÉ 5 : GÉOMÉTRIE CLASSIQUE DE LA MATIÈRE

moments-galiléens

Établissons l'action du *groupe de Galilée* (p. 189) sur la *matérialité* d'une chose, c'est-à-dire sur son *moment* (p. 60, *matérialisme idéal*).

Les éléments constituant ce moment, repérons-les numériquement.

Nous écrirons leurs noms en « lettres grasses », ce qui permettra de distinguer dans les formules ce qui est « matériel » de ce qui est « géométrique ».

Voici ces constituants:

- *l'**énergie*** **E** et la ***masse*** **m** de la chose, qui sont repérés par des ***nombres*** ;
- *l'**impulsion*** **p** et le ***passage*** **f**, qui se repèrent par des ***colonnes*** dans R^3 (1) ;
- le ***tournoiement*** $\boldsymbol{\ell}$, repéré par une ***matrice*** de format [3, 3] qui est ***antisymétrique***, c'est-à-dire telle que $\overline{\boldsymbol{\ell}} = -\boldsymbol{\ell}$ (2).

Le **moment-galiléen** ***J*** sera l'assemblage de ces grandeurs.

Les principes classiques de la « *mécanique rationnelle* » indiquent l'action sur ***J*** de chacun des sous-groupes générateurs Chronos, Bruno, Euclide (3).

Miracle ! Il existe *une seule formule globale* qui prolonge *ces trois formules partielles* par une ***action du groupe de Galilée***.

Voici cette formule, qui donne l'action d'un *élément* $g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *du groupe de Galilée* sur un *moment-galiléen* $\boldsymbol{J} = \{\mathbf{E}, \mathbf{m}, \mathbf{p}, \mathbf{f}, \boldsymbol{\ell}\}$:

---

1 Plus classique que le *passage* **f**, le *centre de gravité* **C** (p. 60). Ils se déduisent l'un de l'autre par la règle **Cm** = **f**+**p**t. Le *passage* **f** repère donc la position de **C** à la date t = 0.

2 On peut la caractériser par les nombres $\boldsymbol{\ell}_\mathbf{x}, \boldsymbol{\ell}_\mathbf{y}, \boldsymbol{\ell}_\mathbf{z}$ tels que $\boldsymbol{\ell} = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\ell}_z & \boldsymbol{\ell}_y \\ \boldsymbol{\ell}_z & 0 & -\boldsymbol{\ell}_\mathbf{x} \\ -\boldsymbol{\ell}_y & \boldsymbol{\ell}_\mathbf{x} & 0 \end{pmatrix}$: on les considère souvent comme les *composantes* d'un « *vecteur moment cinétique* ». Mais on ne peut définir ce « *vecteur axial* « qu'en choisissant une *orientation :* et cette orientation n'est pas respectée par l'action du groupe de Galilée. Complications inutiles : la matrice $\boldsymbol{\ell}$ évite toute difficulté.

3 p. 186-187, *géométrie galiléenne*.

$$\mathbf{E} \to \mathbf{E} + \bar{b}a\mathbf{p} + \tfrac{1}{2}\bar{b}b\mathbf{m}$$
$$\mathbf{m} \to \mathbf{m}$$
$$\mathbf{p} \to a\mathbf{p} + b\mathbf{m}$$
$$\mathbf{f} \to a\mathbf{f} + c\mathbf{m} - [a\mathbf{p} + b\mathbf{m}]e$$
$$\boldsymbol{\ell} \to a\boldsymbol{\ell}\bar{a} + a[\mathbf{f}\bar{b} - \mathbf{p}\bar{c}] - [b\bar{\mathbf{f}} - c\bar{\mathbf{p}}]\bar{a} + c\mathbf{m}\bar{b} - b\mathbf{m}\bar{c}$$

Règle respectée par l'action du groupe de Galilée sur tous les mouvements de toutes les choses ([1]).

Action *linéaire par rapport aux constituants du moment* (écrits en lettres grasses). Ainsi cette action *respecte les bilans* ([2]), comme le souhaitent les physiciens.

Enrichissement de la *géométrie galiléenne* ([3]), permettant une formulation classique de la mécanique.

Action dont la vie quotidienne nous donne un sentiment intime : c'est ainsi que nous savons embarquer sur un escalator sans perdre l'équilibre…

Mais cette géométrie de la matière, pourquoi son écriture est-elle si compliquée ? Et comment contrôler que cette formule indique bien une *action de groupe* ? ✯

Une seule remarque : les quatre dernières formules sont autonomes (elles ne font pas intervenir l'énergie $\mathbf{E}$). Elle doivent donc constituer à elles seules une action de groupe. Voici comment le vérifier: on construit la *matrice antisymétrique* :

$$\boldsymbol{J'} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\ell} & \mathbf{f} & -\mathbf{p} \\ -\bar{\mathbf{f}} & 0 & -\mathbf{m} \\ \bar{\mathbf{p}} & \mathbf{m} & 0 \end{pmatrix}$$

et on constate que ces quatre formules sont condensées dans l'écriture $\boldsymbol{J'} \to g \times \boldsymbol{J'} \times \bar{g}$ qui est évidemment une action de groupe.

Mais il reste à vérifier que l'association de cette action partielle avec la première formule

$$\mathbf{E} \to \mathbf{E} + \bar{b}a\mathbf{p} + \tfrac{1}{2}\bar{b}b\mathbf{m}$$

produit effectivement une *action* du groupe de Galilée sur les moments galiléens.

Très élémentaire : utiliser courageusement le calcul matriciel…

1 À condition que les « forces extérieures » (pesanteur, électro-magnétisme) soient négligeables. C'est la formule qu'a écrite le physicien consciencieux rencontré dans *matérialisme idéal* (p. 61).

2 Le bilan qui conserve l'énergie, régit les collisions, dénonce le neutrino : *matérialisme idéal*, pp. 60-63.

3 Voir p. 174.

particules élémentaires

Telle quelle, cette règle universelle va nous permettre de construire
un ***modèles galiléen*** pour chaque ***particule élémentaire***.

Dans la *boutique aux atomes* ([1]), un géomètre nous a présenté quelques-unes de ces particules : les points matériels, les particules à spin, les photons.

Les *mouvements* de ces particules sont des *espèces de moments* : chacun s'obtiendra en choisissant convenablement un moment $\boldsymbol{J}_o$ et en faisant agir le groupe.

points matériels

Le géomètre commence par le plus facile : $\boldsymbol{J}_o$, c'est le moment dont toutes les composantes sont nulles, sauf la masse **m**. Quelle valeur choisir pour **m** ? Il l'a demandée à son client : appelons-la $\mathbf{m}_o$.

Il n'y a plus qu'à appliquer la « grosse formule » à ce moment $\boldsymbol{J}_o$.
On obtient ainsi sa *régularité* et son *espèce* dans la géométrie galiléenne : examinons-les.

La régularité de $\boldsymbol{J}_o$ ([2]), donnée par la formule universelle, est constituée des matrices $g = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (les éléments b et c sont nuls). Eh bien on peut trouver une figure f_o de l'espace temps qui possède la même régularité : c'est la ligne d'Univers d'un point immobile à l'origine des coordonnées, l'ensemble des événements qui s'écrivent $\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$.

Ceci nous assure que la figure $f = g(f_o)$ *sera attachée au mouvement* $\boldsymbol{J} = g(\boldsymbol{J}_o)$, quel que soit g dans le groupe de Galilée ([3]).

f, c'est un mouvement rectiligne uniforme, qui s'interprétera donc comme « ligne d'Univers de cette particule ».

Repérons ce mouvement de façon classique : nous désignons par r la position de la particule à la date t, par v sa vitesse. Au moyen de r, v et t, le géomètre sait reconstituer le moment $\boldsymbol{J}$, *à condition de connaître la masse* $\mathbf{m}_o$. Voici le résultat :

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_o \ , \quad \mathbf{E} = \tfrac{1}{2}\mathbf{m}\,\bar{v}v \ , \quad \mathbf{p} = v\mathbf{m} \ , \quad \mathbf{f} = [r - v\,t]\mathbf{m} \ , \quad \boldsymbol{\ell} = r\mathbf{m}\bar{v} - v\mathbf{m}\bar{r}$$

1 *ce modèle vous plaît ?*, *sucreries* : pp. 64-66.

2 Rappelons que c'est le sous-groupe des éléments g de G qui préservent $\boldsymbol{J}_o$ (p.173).

3 Figure *attachée* au mouvement de la particule, au sens précis de la *clé* 2 (p. 173).

Le théoricien de la mécanique reconnaît les « *constantes du mouvement* » du **point matériel** libre ; leur constance implique le caractère *" rectiligne et uniforme "* du mouvement.

Les grandeurs mécaniques élaborées depuis Archimède jusqu'au début du XIX[ème] siècle se retrouvent donc dans la géométrie du groupe de Galilée.

particules à spin

dans le moment de référence $\boldsymbol{J}_o$, la «***particule à spin***» possède, en plus d'une masse $\mathbf{m}_o$, un tournoiement : $\boldsymbol{\ell}_o = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{s}_o & 0 \\ \mathbf{s}_o & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; le nombre positif $\mathbf{s}_o$ est la mesure du ***spin*** (1).

Tous les mouvements de la particule à spin s'obtiendront de même par l'action du groupe sur ce nouveau $\boldsymbol{J}_o$.

photon galiléen

Le géomètre fait apparaître un *photon* en choisissant le moment $\boldsymbol{J}_o$ que voici :

$$\mathbf{E_o} = 0\,, \quad \mathbf{m_o} = 0 \quad , \quad \mathbf{p_o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \chi \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{f_o} = 0 \quad , \quad \boldsymbol{\ell}_\mathbf{o} = \begin{pmatrix} 0 & -\hbar & 0 \\ \hbar & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\hbar$ et χ , ce sont deux grandeurs qui déterminent *l'espèce* du photon :

- $\hbar$, c'est le **spin :** sa valeur est la même pour tous les photons, elle se mesure expérimentalement (2).
- χ, c'est la **couleur :** autant d'espèces de photons galiléens que de couleurs. ✯

Le physicien caractérise généralement la couleur par la grandeur $\lambda = 2\pi\hbar \,/\, \chi$, qu'il appelle **longueur d'onde** du photon.

Nous avions déjà rencontré ces couleurs (p.39, *force et lumière*). Les longueurs d'onde associées aux couleurs ont été mises en évidence et mesurées par Newton (expérience des *anneaux de Newton*).

L'optique de Newton, qui affirmait que ce sont des espèces différentes de photons qui produisent les diverses couleurs, est donc bien décrite par ce modèle.

---

1 Pourquoi une seule composante ℓ_z qui ne soit pas nulle ? Autrement dit, pourquoi le « vecteur de spin » a-t-il été choisi « parallèle à l'axe des z » ? Simplement parce qu'il fallait bien choisir : une autre direction du spin aurait donné un élément de même espèce, un autre mouvement de la même particule.

2 Elle s'appelle *constante de Planck réduite.* La *constante de Planck* proprement dite, c'est $h = 2\pi\hbar$.

Comme précédemment, les divers mouvements du photon s'obtiennent par la formule universelle. Ceci permet d'attacher à chacun une figure f de l'espace-temps ([1]).

Dans le cas du photon, f est un objet composite : d'abord une trajectoire rectiligne parcourue à une certaine date, instantanément ([2]) ; ensuite un sens de parcours et un sens de "vissage" du photon sur cette trajectoire.

On rencontre des photons qui se vissent *dans les deux sens* : le sens auquel nous sommes conditionnés (celui des vis à bois, des robinets, des tire-bouchons) que l'on appelle « droit » , aussi bien que l'autre, le « gauche » ([3]). Le « vissage » des photons a été découvert cent cinquante ans après Newton, par Fresnel ([4]).

Pour donner toute sa matérialité à cette figure géométrique, il manque encore quelque chose : *l'énergie*, qui peut prendre n'importe quelle valeur ([5]).

---

1 Figure *attachée* au mouvement du photon : voir p. 173.

2 Voilà comment la vitesse des photons galiléens est *infinie*. Galilée lui-même avait expérimenté et conclu que la propagation de la lumière était instantanée.

3 Exemple : le mouvement $\boldsymbol{J}_0$ ci-dessus est celui d'un photon de longueur d'onde λ qui parcourt à la date $t = 0$ le troisième axe de coordonnées, dans le sens des z croissants, en se vissant à droite (à droite, à condition que le géodésien de service ait correctement orientés ses axes de coordonnées).

4 Voir p.40.

5 Elle a été choisie nulle dans le mouvement $\boldsymbol{J}_0$.

CLÉ 6 : MOUVEMENT DES PLANÈTES

de l'attraction à la gravitation

Le calcul matriciel (*clé* 3) fournit une technique efficace pour déterminer le mouvement des planètes à partir de la loi de Newton. Voici comment.

On choisit des coordonnées galiléennes dont l'origine est au centre du Soleil : à chaque instant t, la position du centre de la Terre sera représentée par r dans l'espace numérique R^3 ; avec r et t, on construit un « événement » $q = \begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix}$ dans R^4 (notations de la *clé* 4).

Calculons quelques *dérivées* (1) ; ainsi la *vitesse* de la Terre sera $v = \frac{dr}{dt}$: son *accélération*, ce sera $\frac{dv}{dt}$. La loi de l'attraction de Newton nous affirme que cette accélération est dirigée vers le Soleil, et inversement proportionnelle au carré de la distance.

Pour écrire cette loi, désignons cette distance par ρ : elle se calcule par la formule matricielle

$$\rho^2 = \bar{r}\, r\,.$$

Ainsi la loi de Newton devient (2) :

$$\frac{dv}{dt} = -\,r/\rho^3$$

Cherchons ce que cette loi peut nous apprendre sur le mouvement de la Terre. Quelques calculs permettent d'abord de vérifier que la dérivée de la quantité

$$H = \bar{v}\, v - \frac{2}{\rho}$$

est nulle, donc que H est constante pendant tout le mouvement (3).

1 La dérivée d'un produit matriciel, de la transposée d'une matrice se calculent par des règles simples : exemple type : $\frac{d}{dt}\left[\bar{r}\, r\right] = \frac{d\bar{r}}{dt}\, r + \bar{r}\,\frac{dr}{dt} = \bar{v}\, r + \bar{r}\, v = 2\overline{v}\, r$.

2 Nous avons profité de la liberté de choix des unités de longueur et de temps pour simplifier l'écriture de la loi : sinon il faut mettre au second membre un coefficient, caractéristique de l'attraction solaire.

3 H mesure *l'énergie* — si on prend comme unité de masse « la moitié de la Terre ».

Utilisons maintenant la variable

$$\boxed{u = \bar{v}\, r - H t}$$

dont la dérivée par rapport au temps se calcule simplement ; on trouve $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{\rho}$.

Puisque cette dérivée est positive, u est une fonction croissante du temps, que l'on peut prendre comme « paramètre » ([1]).

Il n'y a plus qu'à calculer les dérivées successives *par rapport à* u de l'événement $q = \begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix}$: soit $q' = \begin{pmatrix} r' \\ t' \end{pmatrix}$, $q'' = \begin{pmatrix} r'' \\ t'' \end{pmatrix}$, etc. On trouve facilement :

$t' = \rho$	$r' = v\,t'$
$t'' - H t = u$	$r' t'' - r'' t' = r$
$t''' - H t' = 1$	$r''' - H r' = 0$

ce qui fournit, à partir de t, r et v, tous les éléments de la matrice :

$$Q = \begin{pmatrix} q & q' & q'' & q''' \end{pmatrix}$$

dont le format est [4, 4].

Une nouvelle dérivation montre que $q'''' = H q''$;

ce qui peut s'écrire $Q' = Q \times A$, en posant :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & H \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Utilisons le *flot* de cette matrice constante A (*clé* 3, p. 184) : la relation $Q' = Q \times A$ montre que la dérivée de $Q \times \exp(-uA)$ est nulle, donc que cette matrice est aussi *constante*.

Leçon du MAÎTRE DE PHILOSOPHIE, fabricant d'almanachs, à son élève MONSIEUR JOURDAIN :

" …par conséquent la matrice $Q \times \exp(-uA)$ prend la même valeur à un instant t *choisi par vous* et à un instant t_o *choisi par moi.*

---

1 Ce que nous appelons aujourd'hui « paramètre », nombre auxiliaire dans un calcul, s'appelait naguère *anomalie*. Ici, il s'agit essentiellement de « *l'anomalie excentrique* » de Kepler.

Nous savons donc que $Q \times \exp(-uA) = Q_o \times \exp(-u_oA)$, ou encore, grâce à la propriété fondamentale des exponentielles :

$$Q = Q_o \times \exp((u - u_o)A)\ . \qquad ✯$$

J'ai *mesuré* dans le ciel, une fois pour toutes, les « conditions initiales » r_o et v_o à un certain instant t_o que j'ai choisi ; ce qui m'a permis de *calculer* u_o, A et Q_o.

Je vous fais cadeau de ces valeurs ! Alors il vous suffira de déterminer u pour connaître l'exponentielle

$$\exp((u - u_o)A)\ ;$$

multipliez à gauche par Q_o, et vous aurez la matrice Q : vous regardez sa première colonne $q = \begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix}$, et vous y lirez la position r de la Terre à l'instant t. "

— MONSIEUR JOURDAIN: Oui, mais moi je ne le connais pas, votre nombre u ! "

— LE MAÎTRE: Eh bien il suffit de l'ajuster pour que la date t prenne la bonne valeur ! "

établir les lois de Kepler

En calculant quelques dérivées, élèves ou maîtres peuvent découvrir de belles propriétés des mouvements de la Terre.

Une première dérivation nous indique que la matrice :

$$\ell = r\bar{v} - v\bar{r}$$

est constante ([1]). C'est le *tournoiement de la Terre* (au facteur près m, la masse de la Terre).

Un peu de savoir-faire permet d'en déduire qu'il existe un vecteur constamment orthogonal à r et à v ; la Terre se déplace donc *dans un plan* passant par le Soleil ; c'est ce plan qu'on appelle *écliptique*, parce que c'est près de lui que se produisent les éclipses.

Et aussi que la Terre se déplace en vérifiant *la loi des aires* ([2]) :

deuxième loi de Kepler.

Autres grandeurs constantes : le **vecteur de Lenz** ([3])

$$\epsilon = r'' - Hr$$

et le nombre

$$\rho - \bar{\epsilon}\, r\ .$$

1 Voir la *clé* 5.

2 Sur la figure 16 (p.59) , cette loi exprime que les aires parcourues en des temps égaux sont égales (aires dessinées en gris).

3 Nous avons vu plus haut que sa dérivée $r''' - Hr'$ était nulle. Cette « intégrale première » a été utilisé par Wolfgang Pauli pour construire le premier modèle « quantique » de l'atome d'hydrogène.

Cette équation $\rho - \bar{\epsilon}\, r = C^{te}$ exprime que la Terre se déplace sur une courbe « conique » dont le Soleil est un « foyer » et dont « l'excentricité » est égale à la longueur e du vecteur ϵ ([1]).

Comme cette excentricité est inférieure à 1 , cette conique est une « ellipse ».

De même pour toutes les planètes :

première loi de Kepler.

Le MAÎTRE DE PHILOSOPHIE avait choisi comme condition initiale le ***périhélie***, instant ou la Terre est au plus proche du Soleil ([2]). Il avait aussi choisi des unités de temps et de longueur pour lesquelles la période vaut 2π et H vaut -1 . C'est ainsi qu'il a pu détailler le mouvement de la Terre, avec des coordonnées cartésiennes judicieusement choisies :

$$\boxed{x = e - \cos u \quad , \quad y = \sqrt{1-e^2}\,\sin u \quad , \quad z = 0 \quad , \quad t = u - e \sin u}$$

Faites comme lui… Pour déterminer où se trouve la planète à une date t donnée, il suffit alors de résoudre numériquement en u l'**équation de Kepler :**

$$u - e \sin u = t.$$

Quelles sont les unités de longueur et de temps utilisées dans cette formule ?

Les valeurs extrêmes de la distance, atteintes dans deux directions opposées, ont pour somme 2, qui est donc le *diamètre* de l'ellipse.

L'unité de longueur choisie est donc le demi-diamètre : on l'appelle « **unité astronomique** » : elle vaut environ 149.6 millions de kilomètres.

— LE MAÎTRE: Maintenant, vous connaîtrez la position de la Terre *à tout instant* qu'il vous plaira de choisir. Vous saurez par exemple près de quelle étoile était le Soleil à l'instant de votre naissance.

L'addition de 2π à u ramène la planète à la même position et ajoute 2π à t : voilà pourquoi le mouvement est périodique. L'unité de temps, c'est donc le quotient par 2π de cette période. Période qui s'appelle « **année sidérale** », et qui vaut 365 jours, 6 heures, 9 minutes, 9 secondes ([3]).

Mais la loi de Newton ne s'applique pas seulement à la Terre : elle vaut pour tous les corps célestes qui gravitent autour du Soleil, planètes et comètes par exemple.

Et aussi *toutes les formules que nous venons d'écrire.* Le mouvement des astres est désormais déterminé.

La Mécanique Céleste est parfaitement déterministe !

---

1 Le rapport des distances d'un point de ce corps au Soleil et à une droite appelée « *directrice* » est constamment égal à l'excentricité (définition des coniques par Pappus, IVème siècle après JC).

2 Début janvier. Ce n'est que dans l'hémisphère sud que l'été coïncide avec la proximité du Soleil.

3 C'est cette durée qui ramène les étoiles à la même position dans le ciel. Et le retour des saisons ? c'est 365 jours, 5 heures, 48 minutes, 46 secondes. Pourquoi cette différence ? À cause de la *précession des équinoxes* (découverte de Hipparque : voir p. 96, *le domaine des bêtes*).

Pour les autres planètes, l'analyse dimensionnelle de l'équation du mouvement :

$$\frac{dv}{dt} = - r/\rho^3$$

indique que le demi-diamètre a et la période T respectent la règle suivante : le rapport T^2 / a^3 a la même valeur que pour la Terre :

troisième loi de Kepler.

Mais pour les divers corps susceptible de graviter dans le système solaire, d'autres types de mouvement sont possibles ; en voici la liste :

circulaires *($\epsilon = 0$)*

paraboliques *($H = 0$)*

rectilignes *($\ell = 0$)* ([1]).

hyperboliques *(H positif)* ✯

Dans le cas des *comètes*, $|H|$ et $\|\ell\|$ sont petits ([2]). Ceci parce que beaucoup de comètes qui passent dans notre voisinage ont commencé leur périple très tranquillement, il y a très longtemps, très loin d'ici.

Mais leur arrivée au voisinage du Soleil n'est pas toujours tranquille : certaines viennent s'écraser sur lui ; parfois aussi sur une planète.

La nôtre n'est pas à l'abri…

1 Ces mouvements rectilignes comportent des *collisions*, à vitesse infinie… Et cependant on ne voit pas d'infini dans ces formules ; elles suggèrent simplement que les corps rebondissent élastiquement les uns sur les autres. La paramétrisation des mouvements est ainsi « **régularisée** » par l'emploi de cette variable u.

2 On peut définir la **norme** $\| M \|$ d'une matrice M par la formule $\| M \|^2 = \mathrm{Tr}(\overline{M}M) = \mathrm{Tr}(M\overline{M})$.

CLÉ 7 : RELATIVITÉ RESTREINTE

groupe de Lorentz

Le *groupe de Lorentz* peut se caractériser à l'aide d'une matrice de format [4, 4] :

$$G = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & 0 \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} :$$

1 est la matrice unité de format [3, 3], c est la mesure de la vitesse de la lumière ([1]).

Les matrices L de format [4, 4], qui vérifient la condition

$$\bar{L}\, G\, L = G$$

constituent évidemment un groupe : voilà le

groupe de Lorentz,

défini par Henri Poincaré en 1905.

Mais comment sont-elles faites, ces matrices ? On peut reconstruire un élément L du groupe de Lorentz avec une matrice orthogonale a de format [3, 3] et un élément b de R^3 par la formule :

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{c^2}\begin{pmatrix} kb\bar{b}a & 0 \\ \bar{b}a & k\|b\|^2 \end{pmatrix}, \text{ avec l'abréviation } k = \frac{1}{1+\sqrt{1+\|b\|^2/c^2}} \quad ([2]).$$

Vérification élémentaire (calcul matriciel), mais assez laborieuse… ✯

Dans le groupe de Lorentz, on atteint ainsi un sous-groupe, nommé « orthochrone ». Le reste du groupe est constitué des matrices opposées (matrices « antichrones »).

---

1 Cette matrice G qui tombe du ciel, elle est là pour schématiser la *métrique de l'Univers* selon Minkowski (p. 117).

2 Suivant la règle matricielle concernant les matrices-colonnes, nous avons posé $\|b\| = \sqrt{\bar{b}\,b}$

groupe de Poincaré

Voici un modèle numérique du **groupe de Poincaré** ; il est constitué des matrices de format [5, 5] qui se découpent en

$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

L étant pris dans le groupe de Lorentz, C dans $\mathbb{R}^4$.

Alors la formule $\begin{pmatrix} r \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \to \boldsymbol{g} \times \begin{pmatrix} r \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$ va définir une **nouvelle géométrie de l'espace-temps**, la ***Relativité restreinte*** ([1]). ✯

En utilisant l'expression détaillée du groupe de Lorentz (p. 201) , on obtient une écriture détaillée du ***groupe de Poincaré orthochrone*** :

$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} k b \bar{b} a & 0 & 0 \\ \bar{b} a & k\|b\|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } \quad k = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \|b\|^2 / c^2}} \qquad ([2])$$

Si l'on suppose que « la lumière est très rapide » , c'est-à-dire si on néglige dans cette formule le facteur $\frac{1}{c^2}$, $\boldsymbol{g}$ se réduit à $\boldsymbol{g}_\circ = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui parcourt le *groupe de Galilée.* Avec cette numérisation, le *groupe de Poincaré orthochrone* s'obtient donc en infligeant une « petite correction » au *groupe de Galilée*.

Réciproquement, il sera utile au physicien de considérer la *géométrie galiléenne* comme une *approximation de la Relativité restreinte*.

Approximation à l'usage de ceux pour qui $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}_o$, pour qui la lumière va infiniment vite ;

pour ceux qui sont lents,

par exemple les humains.

---

1 Comme précédemment, r repère la *position*, t la *date*.

2 On obtient le groupe en choisissant arbitrrairement a dans O(3), b et c dans $\mathbb{R}^3$, e dans $\mathbb{R}$.

En choisissant la matrice $\boldsymbol{g}_\circ$, dans le « groupe de *Bruno* » ? ([1]) ; ce qu'on obtient, ce sont les « *transformations de Lorentz ». Mais attention !* elles ne constituent même pas un sous-groupe ; regardez leur "dessin" sur la figure 17, p. 69. ([2])

d'une matérialité à l'autre

Nous venons de caractériser le groupe de Poincaré par quelques exercices de calcul matriciel. Mais qu'a-t-il à voir avec la Nature ?

Il faut regarder ce qu'il va nous enseigner sur la matière.

La physique classique repérait la « matérialité » d'une chose par un objet géométrique du groupe de Galilée (3).

Par quoi le remplacer ? Par un objet géométrique du groupe de Poincaré, qui enrichira la Relativité Restreinte.

Quel objet ? Essayons donc un « moment » (4). La géométrie permet de montrer que :

> Chaque *moment du groupe de Poincaré* peut se repérer par une matrice antisymétrique $\boldsymbol{J}$, de format [5,5], sur laquelle le groupe agit selon la règle :
>
> $$g\,(\boldsymbol{J}) = g\ \ \boldsymbol{J}\ \ \bar{g}.$$

Nous saurons que ce nouveau moment est acceptable si cette formule donne un résultat « galiléen » quand on remplace dans cette formule g par son approximation galiléenne $g_\circ$ (p.202).

Eh bien ce calcul a déjà été fait (5) ; nous avons constaté que les formules galiléennes sont compatibles avec le choix :

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\ell} & \mathbf{f} & -\mathbf{p} \\ -\bar{\mathbf{f}} & 0 & -\mathbf{m} \\ \bar{\mathbf{p}} & \mathbf{m} & 0 \end{pmatrix}$$

---

1 C'est-à-dire en choisissant $a = 1$, c et e nuls.

2 Les *transformations de Lorentz* sont évoquées dans *le choc des géométries* (pp. 69-70), à l'aide de la galère de Gassendi. Leur écriture traditionnelle n'utilise pas b (la vitesse évaluée depuis la galère en observant les quais), mais la vitesse évaluée avec l'horloge du quai : $v = b \Big/ \sqrt{1 + \|b\|^2 / c^2}$; c'est v qui est nécessairement inférieure à c.

3 p. 192.

4 Nous avons déjà rencontre ces « moments » (p.38).

5 p. 193.

dans lequel apparaissent *tournoiement* $\boldsymbol{\ell}$, *passage* $\mathbf{f}$, *impulsion* $\mathbf{p}$, *masse* $\mathbf{m}$,

mais pas l'énergie !

Voyons ce que va nous enseigner la nouvelle relativité.

Dans la formule galiléenne, la *masse* $\mathbf{m}$ ne variait pas sous l'action du groupe. Maintenant, la formule $g\,(J) = g\;J\;\bar{g}$ montre que la masse varie un peu, selon la règle : $\mathbf{m} \to \mathbf{m} + (\bar{b}a\mathbf{p} + k\mathbf{m}\,\|b\|^2)/c^2$, que nous pouvons aussi bien écrire :

$$\mathbf{m}c^2 \to \mathbf{m}c^2 + \bar{b}a\mathbf{p} + k\mathbf{m}\,\|b\|^2\ .$$

Cette nouvelle écriture impressionne beaucoup un physicien-philosophe qui passait par là. Il médite à haute voix :

— Oh oh ! ça me fait penser à la mystérieuse formule classique concernant l'énergie :

$$\mathbf{E} \to \mathbf{E} + \bar{b}a\mathbf{p} + \tfrac{1}{2}\mathbf{m}\,\|b\|^2 \quad (^1)\ ;$$

la comparaison est d'autant plus saisissante que la variable $k = \dfrac{1}{1+\sqrt{1+\|b\|^2/c^2}}$ est toujours très proche de $\frac{1}{2}$ (2).

" Eh bien voilà : les deux modèles vont se raccorder parfaitement si on appelle « ***énergie relativiste*** » la grandeur

$$\mathbf{E} = \mathbf{m}\,c^2$$

" La *géométrie classique de l'énergie* et la *géométrie relativiste de la masse* se raccordent ainsi avec une précision diabolique ! (3). "

" Ceux que ça incommoderait de rencontrer des énergies aussi grandes n'ont qu'à se souvenir qu'en mécanique classique, on n'a jamais affaire qu'à des *différences d'énergie.* Je suis sûr que ça va marcher très bien…

Mais voilà brusquement que notre physicien semble frappé par la foudre :

— Jusqu'à présent, je disposais de *onze* grandeurs conservées indépendantes : et maintenant, je n'en ai plus que *dix*. J'utilisais donc, sans m'en apercevoir, une grandeur *étrangère au moment*, mais qui pourtant ne variait dans aucune expérience. Laquelle ?

Bon sang, mais c'est bien sûr ! C'est la **masse atomique** des *chimistes* (4), que j'avais confondue avec la **masse inerte** des *mécaniciens* !

---

1 Voir p.192.

2 Tant que la vitesse $\|b\|$ est inférieure à trois millions de kilomètres à l'heure, k reste comprise entre 0. 499 999 et 0. 500 000

3 Le « style fondateur » d'Einstein dans sa célèbre note de 1905 reçoit ainsi un support géométrique.

4 On dit aussi « *quantité de matière* ».

" La physique classique, construite sur cette confusion, n'est donc tenable que dans les situations où la masse atomique ne varie pas ([1]).

" Oui, mais pourquoi ne variait-elle pas, cette onzième grandeur ? Sûrement, elle cachait un *moment* ; mais un moment d'un nouveau groupe que je n'ai pas encore découvert… " ([2]).

particules relativistes

Maintenant que nous connaissons ces moments du groupe de Poincaré, recommençons le jeu classique ([3]), décrivons chaque *particule élémentaire* par une « *espèce de moment* ».

Pour étudier ces particules, il est commode d'utiliser des unités de longueur et de temps telles que c =1 (*unités lorentziennes*).

L'action du groupe de Poincaré :

$$g\,(\boldsymbol{J}) = g\;\; \boldsymbol{J}\;\; \overline{g} \quad (^4)$$

se détaillera plus facilement si on *découpe* la matrice moment $\boldsymbol{J}$ de la même façon que les matrices $g = \begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Posons donc : $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{-P} \\ \overline{\mathbf{P}} & 0 \end{pmatrix}$ ([5]) : alors l'action de g sur $\mathbf{P}$ se réduit à la substitution $\mathbf{P} \to \mathbf{LP}$. Voilà à quoi va servir le « groupe de Lorentz ».

La définition $\overline{L}GL = G$ de ce groupe de Lorentz montre ensuite que la grandeur

$$\mu \;=\; \overline{\mathbf{P}}G\mathbf{P} \;=\; \mathbf{m}^2 - \|\mathbf{p}\|^2 = \; \mathbf{E}^2 - \|\mathbf{p}\|^2$$

ne change pas sous l'action du groupe de Poincaré : μ est donc ***attachée*** ([6]) *à chaque espèce de particule.*

1 L'ambiguïté n'est plus possible là où matière et antimatière coexistent, comme dans les accélérateurs de particules : les « masses atomiques » se soustraient quand les « masses inertes » s'ajoutent.

2 Il faudra aller chercher du côté de la « *jauge baryonique* ».

3 *points matériels*, p.193.

4 p. 203.

5 **S** est une matrice antisymétrique [4, 4], caractéristique du ***spin*** ; la colonne **P** s'appelle ***quadri-impulsion***.

6 Attachée, au sens de la *clé* 2 (p. 174).

A priori, tous les signes sont possibles pour μ : examinons ici le cas $\mu > 0$ ([1]). On peut alors trouver un mouvement de la particule dans lequel le moment peut s'écrire :

$$\boldsymbol{J}_o = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{s}_o & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{s}_o & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{m}_o \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{m}_o & 0 \end{pmatrix}$$

et on a alors $\mu = \mathbf{m}_o{}^2$. Les nombres positifs $\mathbf{m}_o$, $\mathbf{s}_o$ qui figurent ici sont attachés à la particule : $\mathbf{m}_o$ s'appelle ***masse au repos*** : $\mathbf{s}_o$ sera le ***spin***. Le cas $\mathbf{s}_o = 0$ est celui du « *point matériel relativiste* ».

On peut vérifier ensuite qu'il existe *une ligne d'Univers attachée au mouvement de la particule*.

Dans le cas de $\boldsymbol{J}_o$, il s'agit de la droite $\mathbf{r} = 0$: dans ce mouvement-là, la particule apparaît comme *immobile à l'origine des coordonnées*.

Et on en déduit facilement que la particule ira *moins vite que la lumière* dans chacun de ses mouvements.

photon relativiste

Si le photon relativiste existe, il doit aller « *à la vitesse de la lumière* », ce qui s'obtiendra en choisissant la valeur 0 pour la caractéristique μ ([2]).

Dans le modèle galiléen, la couleur, c'est la norme $\|\mathbf{p}\|$ de l'impulsion (p.194). La relation $\mu = 0$, qui s'écrit aussi $\mathbf{E} = \|\mathbf{p}\|$, signifie donc que ***l'énergie du photon relativiste est égale à sa couleur*** ([3]).

1 Le cas $\mu < 0$ (modèle des ***tachyons***) pose quelques problèmes d'interprétation : les tachyons ne pourraient aller que *plus vite que la lumière* : d'où leur nom (tachys = « rapide»). Voir *la nouvelle collection, couleur des fruits mûrs* pp. 74-75. Heureusement, on n'a pas observé de tachyons…

2 La formule $\mu = \mathbf{m}_o{}^2$, valable pour les particules ordinaires, pourrait faire croire que « *la masse au repos du photon est nulle* ». Mais le photon n'est jamais au repos…

3 Avec les notations des physiciens, cette relation couleur-énergie s'écrit $\mathbf{E} = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda}$, λ étant la ***longueur d'onde*** qui repère la couleur du photon. La relation $\mathbf{E} = \mathbf{m}c^2$ reste valable pour le photon ; cependant on a un peu peur de parler de « la masse d'un photon jaune » …. Et pourtant elle est facile à évaluer : un 200 000ème de celle d'un électron au repos.

Cette relation explique pourquoi **l'effet photoélectrique** (émission d'électrons par un métal éclairé) ne se produit pas quand la lumière est « trop rouge » : les photons incidents n'ont pas assez d'énergie pour extraire les électrons des atomes ([1]).

Mais cela ne suffit pas à déterminer complètement *l'espèce photon*. Il faut trouver une valeur particulière du moment $\boldsymbol{J}$ qui l'engendrera. On obtient des résultats convenables en choisissant :

$$\boldsymbol{J}_o = \begin{pmatrix} 0 & -\hbar & 0 & 0 & 0 \\ \hbar & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{-E} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{-E} \\ 0 & 0 & \mathbf{E} & \mathbf{E} & 0 \end{pmatrix}$$

La « mesure » $\hbar$ du tournoiement qui apparaît dans cette formule est attachée à la particule : on l'appelle spin du photon (2).

Attention ! la couleur E n'est pas attachée au photon. Interprétation : imaginons un photon que nous apercevons en provenance d'un astre lointain. Le photon a été émis par l'un des atomes qui constitue l'astre, avec une couleur caractéristique de cet atome. Mais le modèle relativiste exige que nous le voyions avec une autre couleur (si l'astre est en mouvement par rapport à nous) :

voilà **l'effet Doppler Fizeau** ([3]).

La couleur observée n'appartient donc pas au photon seul, mais au couple photon-œil.

Et puisque la couleur est égale à l'énergie, le photon ne possède pas d'énergie propre.

Pire… il n'y a pas de ligne d'univers attachée au photon ! La seule figure qui lui soit attachée, c'est un plan mobile qui se déplace parallèlement à lui-même avec la vitesse c (4). Mais attention ! le photon n'est pas attaché au plan : une translation spatiale perpendiculaire à l'impulsion conserve le plan, mais pas le mouvement.

---

1 C'est à cette explication que le prix Nobel d'Einstein a été attribué en 1921. La « relativité » faisait encore un peu peur au jury.

2 Comme dans le modèle galiléen (p. 194). $\hbar$ s'appelle ***constante de Planck réduite :*** sa valeur mesurée, c'est 1. 054 573…10^{-34} kg m^2 s^{-1}. La ***constante de Planck*** proprement dite est $h = 2\pi\hbar$. Voir aussi p. 40.

3 L'effet acoustique établi par Christian Doppler a été transposé à l'optique par Armand Fizeau.

4 Voilà le sens exact de la sentence « *c est la vitesse de la lumière ».*

CLÉ 8 : CALCUL DES HASARDS

des dés

Pour comprendre les jeux du hasard, il ne faut pas hésiter à s'adresser à son meilleur spécialiste : M. DIABOLOS.

DIABOLOS vous invite à traverser une forêt obscure ; il vous entraîne vers le CASINO INFERNO, dont il est le Directeur. Sur le fronton, en lettres de néon, l'inscription :

Trouvez ici l'Espérance Mathématique,
vous qui entrez !

Vous entrez — et DIABOLOS vous propose de *jouer aux dés*.

C'est sûr, il s'intéresse au ***hasard*** (en arabe, *az-zahr* = *le dé*), il pratique **l'*aléatoire*** (en latin, *alea* = *le dé*).

Tout le monde s'accorde à considérer que le jeu de dés est équitable. Et pourquoi donc ?

À cause d'un groupe ! ce groupe, c'est la régularité du cube (en grec, *kubos* = *dé*), et le jeu hérite de cette régularité-là. Voilà pourquoi ce jeu semble honnête, si les dés ne sont pas pipés — c'est-à-dire s'ils possèdent bien cette régularité-là.

aléas

Mais comment pourrons-nous concevoir le hasard si nous nous intéressons à autre chose qu'aux faces d'un dé ?

Choisissons d'abord l'ensemble X des objets ou des événements qui nous intéressent.

Examinons un objet intéressant : l'ensemble des fonctions définies sur X dont les valeurs sont des *nombres complexes de module* 1 ; fonctions qui se *multiplient* entre elles, et constituent ainsi un *groupe commutatif* ;

on l'écrit $\mathbf{T}^X$ (1) .

Pour faire de l'ensemble X un espace « *aléatoire* », on pourra *choisir un sous-groupe de* $\mathbf{T}^X$, que nous appellerons ***aléa*** ✭ . C'est le choix de ce groupe qui fera de X un « **espace aléatoire** ».

1 $\mathbf{T}$, c'est le groupe SO(2), qui se dessine comme « *cercle trigonométrique* » Voir pp. 188-187, *clé* 3.

hasards

Sur un ensemble X, choisissons donc un groupe-aléa A.

À chaque point x de X, on associe la fonction $x\uparrow$ définie sur le groupe A par la simple formule :

$$x\uparrow(a) = a(x) \text{ pour tout } a \text{ dans } A.$$

ces divers $x\uparrow$, nous les appellerons ***certitudes.***

Sur l'ensemble $\mathbb{C}^A$ des fonctions complexes définies sur A, nous pouvons définir deux opérations :

Le « milieu » : la demi-somme de deux fonctions ;

Les « limites » : ce seront les *limites uniformes sur chacune des parties finies du groupe* A (1).

Cas particulier : Si l'ensemble X est ***fini***, donc constitué de n points $x_1 \ldots x_n$, on peut vérifier l'énoncé suivant :

Pour tout hasard μ de X, il existe des nombres $p_1 \ldots p_n$, tous ≥ 0, dont la somme est égale à 1, qui produisent μ par la formule :

$$\mu(a) = p_1\ a(x_1) + p_2\ a(x_2) + \ldots + p_n\ a(x_n)$$

Ainsi tout hasard μ d'un ensemble fini peut s'exprimer avec ces nombres $p_1 \ldots p_n$, qu'on appelle « **probabilités** ».

Exemple: Si X est l'ensemble des côtés d'une pièce de monnaie, les probabilités associées au « jeu de pile ou face » valent 1/2. Le hasard μ est donc le milieu des certitudes $\text{pile}\uparrow$ et $\text{face}\uparrow$:

$$\mu(a) = \frac{a(\text{pile}) + a(\text{face})}{2}$$

Mais dans les ensembles ***infinis***, il existe des hasards qui ne s'expriment pas avec des "probabilités" ; la structure des hasards dépend essentiellement du choix du « groupe aléa ».

Et dans tous les cas, les hasards sont des **états** du groupe aléa (2). Nous pourrons donc les appeler ***états aléatoires.***

1 Plus de détails dans les pages rouges.

2 Etats d'un groupe ? définition page 188.

valeurs moyennes

Sur chaque espace aléatoire, on peut définir des fonctions intéressantes, les

fonctions-tests *:*

ce sont *les éléments du groupe-aléa*, *leurs combinaisons linéaires* ([1]) *et les limites de telles combinaisons* ✯*.* Ce sont ces fonctions-test dont on peut définir les « **valeurs moyennes** ».

Soit X un espace aléatoire, μ un hasard de X.

Nous avons déjà défini l'expression $\mu(a)$ lorsque a est un élément du *groupe aléa* : mais elle se prolonge *linéairement* à l'ensemble des *tests* ([2]). ✯

C'est ce prolongement $\mu(\alpha)$ qui s'interprétera comme « **valeur moyenne** » ou « **espérance mathématique** » de la fonction-test α dans le hasard μ **.** Nous pourrons aussi désigner cette valeur moyenne par l'écriture

$$\int_X \alpha(x)\, d\mu(x) ,$$

et appeler ça une « **intégrale** » **:** simple convention d'écriture.

On retrouvera bien les propriétés usuelles des intégrales ([3]), mais aussi quelques propriétés nouvelles qui dépendent du choix de l'aléa.

aléas et hasards composés

Soient X' , X'' deux espaces aléatoires.

Si a' et a'' appartiennent aux aléas respectifs, on peut définir une fonction $a' \otimes a''$ sur l'ensemble $X' \times X''$ des couples (x' , x'') extraits par la règle :

$$[a' \otimes a'']\,(x',x'') = a'(x') \times a''(x'')$$

Ces fonctions $a' \otimes a''$ constituent un groupe-aléa de $X' \times X''$ **; l'ensemble des couples devient ainsi aléatoire.**

Donnons-nous maintenant deux hasards μ' *et* μ'' *de* X' et X'' respectivement.

Ils engendrent sur l'ensemble des couples un ***hasard composé*** $\mu' \otimes \mu''$*,* défini par

$$[\mu' \otimes \mu''](a' \otimes a'') = \mu'(a') \times \mu''(a'').$$

Mais il peut exister d'autres hasards sur l'espace des couples, par exemple le milieu de deux hasards composés.

---

1 Les combinaisons linéaires *finies* à coefficients *complexes*.

2 Prolongement linéaire et continu : plus de précisions dans les pages rouges.

3 Sans recourir à la « théorie de l'intégration", donc à ses accessoires tels que les « tribus ».

images de hasards

Soient X' et X'' deux espaces aléatoires, A' et A'' leurs aléas.

Une application f de X' dans X'' sera dite **propre** si ses composées $a'' \circ f$ avec les éléments a'' de A'' sont des *fonctions-tests* de X'.

Alors les composés $t'' \circ f$ (t'' : fonction-test de X'') sont aussi des tests de X'.

Soit f une application *propre* de X' à X''.

Si μ' est un *hasard* de X', la fonction définie sur A'' par

$$a'' \Rightarrow \mu'(a'' \circ f)$$

est un ***hasard*** de X'' ; nous l'appellerons ***image*** par f du hasard μ', nous le noterons $f(\mu')$ ([1]).

Exemple :

Prenons deux dés, munis chacun de son hasard « pile-ou-face ». Mettons sur l'espace des doubles jets le hasard composé. Ajoutons les points marqués : on trouve l'un des nombres (2, 3, 4, ... 11, 12), avec le ***hasard image par l'addition***. Quelles sont leurs probabilités ? Celle du total 2 ou 12 vaut 1/36, celle du total 7 vaut 1/6. Voyez-vous pourquoi ?

Si un groupe agit *par fonctions propres* sur un espace aléatoire, il agit ainsi automatiquement sur l'ensemble de ses hasards.

aléas et hasards harmoniques

Rendons aléatoire l'ensemble R des nombres réels, en choisissant **l'aléa harmonique**, constitué des fonctions a_ω : $a_\omega(x) = e^{i\omega x}$ pour toutes les valeurs réelles de ω. ([2]). Avec l'aléa harmonique, on retrouve toutes les « lois de probabilité » classiques. Exemple : le hasard uniformément réparti sur l'intervalle] 0, 1 [([3]).

1 Exercice : calculer une image d'image de hasard.

2 Cet aléa se définit aussi bien dans le cas de l'espace numérique R^n, en faisant parcourir à ω l'ensemble des matrices-lignes de format [n, 1] .

3 Ce hasard μ est donné par $\mu(a_\omega) = \int_0^1 e^{i\omega x}\,dx = \begin{cases} \dfrac{e^{i\omega}-1}{i\omega} = e^{i\omega/2}\,\dfrac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} & \text{si } \omega \neq 0 \\ 1 & \text{si } \omega = 0 \end{cases}$

Mais il y a d'autres hasards harmoniques…. Par exemple le hasard μ qui est défini par

$$\mu(a_\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \neq 0 \\ 1 & \text{si } \omega = 0 \end{cases}$$

Il est *équiparti sur* R (1) ; si α est une fonction-test harmonique (2), l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)\, d\mu(x)$ est la «moyenne de α sur R » (3) : intégrale *non classique* permise par *l'aléa harmonique*.

Si μ_1 et μ_2 sont deux hasards harmoniques sur R, l'image par l'application « *somme* » de leur composé est encore un hasard harmonique μ de R : la valeur de μ sur le groupe-aléa, c'est simplement le *produit* des valeurs de μ_1 et μ_2.

« ***convolution*** » dit-on ; ou encore « **addition des variables aléatoires** ».

hasards gaussiens

Sur le carré 0<x<1, 0<y<1, on choisit le hasard μ composé des hasards uniformes sur] 0, 1 [. L'images de μ par la fonction $\gamma_{\mathbf{C,D}}$:

$$\gamma_{\mathbf{C,D}}(x,y) = \mathbf{C} + \mathbf{D}\sqrt{\ln(1/x)}\ \cos(2\pi y)$$

est un ***hasard gaussien*** de R : son « centre » $\mathbf{C}$ et sa « dispersion » $\mathbf{D}$ ($\mathbf{D} \geq 0$) sont librement ajustables.

La fonction $\gamma_{\mathbf{C,D}}$ joue un rôle important dans les *méthodes de Monte-Carlo :* pour faire un « tirage gaussien », on choisit $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$; ensuite on « tire au sort » x et y uniformément entre 0 et 1, et on associe à ce double tirage le nombre $\gamma_{\mathbf{C,D}}(x,y)$. C'est avec cet algorithme qu'a été produite la figure 18, p.83.

La convolution de deux gaussiennes est encore une gaussienne.

1 Pourquoi ce hasard est-il « équiparti » ? Parce qu'il coïncide avec ses images par toutes les translations de R.

2 Les fonctions-tests harmoniques s'appellent « ***fonctions presque-périodiques*** ».

3 On rencontre des exemples analogues dans le cas des « probabilités quantiques » (Chap. VII).

CLÉ 9 : COSMOLOGIE

modèle de Friedmann

Observons au spectrographe une galaxie lointaine.

Dans la lumière de ses étoiles, on distingue des « raies » spectrales, dont les « longueurs d'onde » permettent de reconnaître des atomes (comme ceux qu'on peut observer en laboratoire). Mais avec une petite modification : la longueur d'onde est multipliée par un facteur un peu plus grand que 1, que l'on écrit $1+z$.

Le nombre z s'appelle **décalage spectral ;** Edwin Hubble a proposé en 1929 de l'interpréter comme *indicateur de distance* de l'objet ([1]).

Dès 1922, Alexandre Friedmann avait proposé une famille de modèles de l'Univers, solutions de l'équation d'Einstein douées une certaine régularité – un **groupe cosmogonique** donc ([2]).

Certains d'entre eux décrivent un « *Univers en expansion* », avec des décalages spectraux en bon accord avec les observations.

Ces modèles de Friedmann sont repérés par trois paramètres « sans dimensions »:

λ : ***constante cosmologique réduite***

k : ***courbure réduite***

Ω : ***paramètre de densité***

On peut aussi faire intervenir un petit ***terme radiatif*** α , qui permet de tenir compte du rayonnement parmi les sources de la gravitation ([3]).

---

1 Avec la « loi de Hubble» suivante : la distance d'un objet de décalage z est égale à $\frac{z}{H_o}$, H_o étant une nouvelle constante que l'on appelle *constante de Hubble*. Les observations étaient dues à Milton Humason.

2 p. 126.

3 Dans ce modèle radiatif, le second membre T de l'*équation d'Einstein* $S(g) = T$ est la somme d'un terme « poussière» et d'un terme « rayonnement ». Les paramètres qui y figurent sont liés par la relation $\lambda - k + \Omega + \alpha = 1$. On utilise parfois le « paramètre de décélération » $q_o = \Omega / 2 + \alpha - \lambda$; Les observations privilégient les modèles *accélérés*, ceux où q_o est négatif. C'est le cas de celui que nous allons décrire.

sphère céleste

En utilisant un modèle de Friedmann, on peut *cartographier* le Cosmos.

Indiquons d'abord des notations usuelles pour les astronomes.

Pour repérer une direction dans le ciel, ils utilisent deux nombres a et d, **ascension droite** et **déclinaison** ([1]). Ils permettent de déterminer un « vecteur unitaire » $U = \begin{pmatrix} \cos(d)\cos(a) \\ \cos(d)\sin(a) \\ \sin(d) \end{pmatrix}$,, repère cette direction. Le point de déclinaison $d = \pi/2$, qui s'écrit. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, c'est la direction du *pôle nord terrestre*.

La distance angulaire ϕ de deux directions U, U' est donnée par $\cos(\phi) = \overline{U}\,U$.

Une rotation A (matrice du groupe SO(3)), agissant sur une direction U du ciel, l'envoie dans la direction A x U ([2]).

dessiner et remplir l'espace courbe

On peut reconstruire l'espace à partir du *groupe cosmogonique* **C** , et de la **C** -régularité **C'** d'un objet quelconque — *la Terre* par exemple.

Dans le cas d'un modèle de Friedmann où la courbure k est *positive*, le groupe **C** sera celui des matrices orthogonales de format [4, 4] , **C'** sera constitué des matrices qui s'écrivent $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, A orthogonale de format [3, 3]. ([3])

Les fig. 31, 32 ([4]) représentent *l'espace quotient de* **C** *par* **C'** ([5]). Espace où la position des astres est indépendante du temps ([6]) : on l'appelle donc **espace comobile**.

Pour y repérer la position d'un astre, il suffit de choisir un élément c de **C** qui nous transporte sur cet astre ([7]) : une ligne de calcul montre que la position comobile de l'astre est caractérisée par la *quatrième colonne* de la matrice c :

le Cosmos est ainsi reconstruit et cartographié.

---

1 Des raisons pratiques ont conduit à choisir l'ascension droite entre 0 et 24 *heures sidérales* (heure = π/12), la déclinaison entre -90 et +90 *degrés* (degré = π/180). La direction d'un objet dans le ciel se note (a, d), a et d étant ainsi exprimés.

2 Multiplication matricielle.

3 Ce sont ces matrices A qui caractérisent la « symétrie sphérique » du ciel autour de nous.

4 pp. 135-136.

5 p. 173.

6 Si on néglige leurs « mouvements propres » .

7 *espèces et régularités*, p. 173.

Nous-mêmes, où sommes-nous ? notre *position* s'obtient en choisissant **C** = matrice-unité **:** par conséquent la position T de la Terre, ce sera la quatrième colonne de **C** : $T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Un point de l'espace que nous voyons dans la direction U du ciel s'écrira $X = \begin{pmatrix} U \sin(s) \\ \cos(s) \end{pmatrix}$, s désignant l'angle entre les deux rayons de la figure 30 ([1]).

Dans le cas des modèles à courbure positive, cette *distance angulaire* s s'exprime en fonction du décalage spectral z par la formule :

$$s = \int_{1/(1+z)}^{1} \sqrt{\frac{k}{P(r)}}\,dr, \quad \textit{avec} \quad P(r) = \lambda r^4 - kr^2 + \Omega r + \alpha \qquad (^2)$$

En choisissant deux points orthogonaux P et Q dans l'espace comobile, on définit une projection de l'espace sur un disque de rayon 1 , par les formules

$$x = \overline{P}X\,, \quad y = \overline{Q}X$$

c'est ainsi qu'a été construite la figure 31 ([3]).

Cette projection a la propriété suivante : des points équipartis dans l'espace comobile apparaîtront équipartis dans le disque ([4]). C'est le résultat d'une extension du théorème d'Archimède concernant l'aire des calottes sphériques.

Cette propriété permet de mieux interpréter les particularités de la figure. Ainsi le fait que la figure apparaisse plus « noire » au voisinage de la Terre indique seulement que les quasars proches sont observés plus facilement que les quasars lointains.

Un ordre de grandeur acceptable ([5]) de la *constante de Hubble* est

$$H_o = \frac{1}{13 \text{ milliards d'années}} \quad (^6).$$

Le « tour de l'Univers » à l'époque actuelle (fig. 30, p. 128), c'est $\dfrac{2\pi}{H_o\sqrt{k}}$ ([7]).

---

1 p. 128.

2 Le calcul numérique de cette intégrale est facile, ne serait-ce qu'avec une calculette programmable.

3 p. 135. Les points *P* et *Q* ont été choisis pour que la Terre apparaisse *au bord du disque*.

4 Autrement dit, avec le vocabulaire de la *clé* 8 : il existe sur l'espace comobile un hasard invariant par l'action du groupe cosmologique ; l'image de ce hasard par la projection est le « hasard uniforme » dans le disque.

5 vers 2006…

6 Années-lumière, si l'on veut. Pour les amateurs d'unités traditionnelles, c'est Ho ≈ 75.

7 Environ 100 milliards d'années-lumière, aujourd'hui. La « constante cosmologique » Λ, c'est $3H_o^2\,\lambda$.

Le théorème d'Archimède généralisé permet de calculer le « volume actuel » de l'Univers :

$$\frac{2\pi^2}{\left(H_o\sqrt{k}\right)^3}.$$

Le produit de ce volume par la densité moyenne, c'est la « masse totale » de la matière : on trouve ainsi la valeur

$$\frac{3\pi}{4k^{3/2}}\,\frac{\Omega}{H_o G}$$ [1] :

ordre de grandeur : 10^{80} fois la masse d'un atome d'hydrogène.

Un objet lointain, nous l'observons dans le passé (*fig.* 30, p.128). Combien de temps s'est-il écoulé depuis ? Cela dépend de son décalage spectral z : le modèle donne la réponse :

$$t = \frac{1}{H_o}\int_{\frac{1}{1+Z}}^{1} \frac{r\,dr}{\sqrt{P(r)}}$$

L'« âge de l'Univers », on l'obtient en faisant z très grand dans cette formule. Le modèle qui produit les figures 29 et 30 donne la valeur $\dfrac{1.38}{H_o}$, soit 18 milliards d'années. Âge compatible avec les diverses observations.

1 G désignant la constante de l'attraction universelle de Newton-Cavendish.

clé zéro : calcul de pi

```
Programme DernierFaust;
const multitude = 201 ; doigts = 5 ; sexe = 2 ;  neant = 0 ;
type  demon = longint;
var Faust, ciel, ange : demon ;
enfer: array[neant..  multitude] of demon ; grimoire : text;

procedure Invoquer(var  ca, co, bra, da :demon); var  a : demon;  begin
a := bra + ca * da ; bra
:= a div co; da := a -
co * bra
end;
procedure Incube (Marguerite : demon); var  homme : demon;  begin
ciel := neant;
for homme := multitude downto neant  do
invoquer(Marguerite, Faust, ciel, enfer[homme])  end;

procedure Succube (Marguerite : demon); var  femme: demon; begin
ciel := neant;
for femme:= neant to multitude do
invoquer(Faust, Marguerite, enfer[femme], ciel) end;

procedure Vaderetro; var  exorciste : demon; begin
for exorciste := neant to multitude do
enfer[exorciste] := neant end;
procedure Satanas; begin
enfer[neant]:=succ(enfer[neant])
end;

procedure Epilogue; var  sorcier : demon;  begin
for sorcier := neant to pred(multitude) do
write(grimoire, enfer[sorcier]: succ(doigts)) end;
```

```
procedure Prologue; begin
faust := round(exp(ln(doigts*sexe) * doigts));
ange := round(multitude * ln(faust) / ln(sexe));
rewrite(grimoire, 'parchemin'); end;
begin   prologue;
vaderetro; satanas; satanas;
for  ange := ange downto  ange div ange do begin
incube (ange) ;
succube (succ (sexe * ange)) ;
satanas  end ;
incube(sexe);
epilogue end.
```

Cette suite de mots, donnez-la telle quelle à un ordinateur connaissant le *langage Pascal*. Il va se mettre à additionner, soustraire, multiplier et diviser des nombres entiers. Il range ses résultats, et quelques instants plus tard, il écrit sur un "parchemin" le nombre π, avec mille décimales exactes

3,
14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510
58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679
82148 08651 32823 06647 09384 46095 50582 23172 53594 08128
48111 74502 84102 70193 85211 05559 64462 29489 54930 38196
44288 10975 66593 34461 28475 64823 37867 83165 27120 19091
45648 56692 34603 48610 45432 66482 13393 60726 02491 41273
72458 70066 06315 58817 48815 20920 96282 92540 91715 36436
78925 90360 01133 05305 48820 46652 13841 46951 94151 16094
33057 27036 57595 91953 09218 61173 81932 61179 31051 18548
07446 23799 62749 56735 18857 52724 89122 79381 83011 94912
98336 73362 44065 66430 86021 39494 63952 24737 19070 21798
60943 70277 05392 17176 29317 67523 84674 81846 76694 05132
00056 81271 45263 56082 77857 71342 75778 96091 73637 17872
14684 40901 22495 34301 46549 58537 10507 92279 68925 89235
42019 95611 21290 21960 86403 44181 59813 62977 47713 09960
51870 72113 49999 99837 29780 49951 05973 17328 16096 31859
50244 59455 34690 83026 42522 30825 33446 85035 26193 11881
71010 00313 78387 52886 58753 32083 81420 61717 76691 47303
59825 34904 28755 46873 11595 62863 88235 37875 93751 95778
18577 80532 17122 68066 13001 92787 66111 95909 21642 01989

Quel est le secret de ce calcul ? Une formule établie au XVIII^{ème} siècle par Leonhard Euler.

Regardez bien, vous trouverez dans ce tableau la succession 999999. Quelle est la probabilité de ce fait ? Et cette question, a-t-elle un sens ?

PAGES ROUGES :

LIENS SCIENTIFIQUES

REPÉRÉS PAR LE SIGNE ✪
DANS LES PAGES BLANCHES ET JAUNES

LIENS DU CHAPITRE I : LA NATURE ET LA SCIENCE

(p. 10) ✯ (Fig. 4). Si vous aussi vous êtes mathématicien(ne), vous aurez tout de suite trouvé comment cette formule conduit au résultat…

(p. 13) ✯ « tenseurs » ?. Pas étonnant si on appelle ainsi des modèles de « tensions ».

Mais les objets mathématiques ainsi abstraits servent à décrire bien d'autres objets de la physique ; nous rencontrerons des exemples aux chapitres VI et VII.

(p. 16) ✯ Choisissons *un icosaèdre régulier* (qui est censé représenter « *l'élément eau* »). Alors sa régularité ([1]), c'est un groupe K qui agit sur l'espace, donc une nouvelle *géométrie de l'espace*.

Munissons l'espace de cette géométrie-là. Alors chaque point P pris dans l'espace va engendrer une *espèce* (*l'origine des espèces,* p.29) ; ainsi l'une de ces espèces est constituée des sommets d'un polyèdre « *eau* ».

Choisissons P au centre d'une face de cet élément « eau » : son espèce, c'est la « *quintessence* » (dodécaèdre).

Prenons maintenant P au tiers d'une arête de « l'eau » ; alors son espèce, ce n'est plus l'un des quatre éléments ; c'est un polyèdre à 60 sommets, qu'on peut construire en assemblant 12 pentagones et 20 hexagones réguliers de même côté.

Objet très populaire, puisque c'est ainsi que sont faits les *ballons de football*. Objet naturel cependant : dans la fumée d'une bougie, apparaît spontanément un matériau qui s'appelle *footballène* ([2]) ; les atomes de carbone s'assemblent soixante par soixante en molécules douées de cette régularité K ; *apparition spontanée d'une régularité dans un processus dissipatif*.

Dans cette géométrie-là, la régularité du point P est nulle : le ballon ou la molécule C_{60} , c'est donc l'image même du groupe K ; chacun des 60 sommets du polyèdre correspond à l'un des 60 éléments du groupe, dès qu'on a choisi P pour représenter l'élément neutre. K est isomorphe au *groupe de Klein,* groupe des permutations paires des doigts de la main.

Et ce sont des molécules dérivées du footballène, les *nano-tubes*, qui sont le point de départ des *nano-technologies*.

---

1 p.30, *la règle des règles.*

2 Ou *fullerène,* du nom de l'architecte Richard Buckminster Fuller, qui construisait des « dômes géodésiques » inspirés d'une géométrie analogue.

LIENS DU CHAPITRE II : OÙ ?

(p. 27) ✭ Exemple de subtilité : admettons que la symétrie par rapport à un plan fasse partie du groupe d'Euclide. Alors il existera un espace euclidien intéressant, composé de deux objets seulement : les *orientations*. Une symétrie plane va échanger les deux orientations ; elles seront donc « de même espèce ». Mais nous, nous avons du mal à lire dans un miroir : le symétrique plan d'un humain n'est pas un humain.

(p. 28) ✭ Voici des mots évoquant les groupes : *monoïdes, demi-groupes, pseudo-groupes, groupoïdes, groupes quantiques…* Et pourtant un « *groupe quantique* », ce n'est même pas un groupe et ce n'est pas quantique.

28 ✭ Les groupes interviennent dans les régions les plus diverses des mathématiques : en *analyse*, en *topologie* ; l'analyse *harmonique* ne parle que de groupes. Quelques théories construites avec des groupes recoupent transversalement des branches très diverses des mathématiques, par exemple l'*homologie* et la *cohomologie*.

(p. 30) ✭ Voici un exemple : tout groupe G agit sur l'espace des ses sous-groupes par la règle :

$$g(H) = g\,H\,g^{-1}$$

Cette action définit donc une géométrie, que nous appellerons **géométrie interne** du groupe.

Dans cette géométrie, la régularité K d'un sous-groupe H s'appelle **normalisateur** de H. Il existe alors une *loi de groupe* sur la classe des ensembles Hk ($k \in K$), définie par $Hk\ Hk' = Hkk'$; ce groupe, nous l'appellerons

liberté

de H (ou de x si H est la régularité d'un objet x) ; deux sous-groupes ou objets de même espèce ont des libertés isomorphes. La liberté est nulle ssi $K = H$.

Choisissez un objet géométrique x . Les objets ayant *même espèce et même régularité* que x constitueront un espace homogène, dont la géométrie est la *liberté* de x :

espace de liberté de x

Les régularités sont devenues elles-mêmes des objets géométriques ; chacune possède donc une espèce et une régularité. Ainsi tout objet possède une

bi-régularité

(la régularité de sa régularité); et on peut continuer…

…ces régularités successives sont emboîtées, et « croissantes » ; elles peuvent finir par coïncider.

jouons dans l'espace...

Dans **l'espace euclidien**, il y a une seule espèce de points : l'espace est homogène.

Soit A un point. Alors :

La *liberté* de A est *nulle*

Les *espèces de la régularité* de A sont *les* **sphères de centre** A : *définition* des ***sphères***.

L'espèce d'un ***couple de points***, *en compréhension*, c'est la ***distance*** de ces deux points.

Autrement dit : une « distance », c'est « un type euclidien de couple de points ».

Soient A et B deux points distincts. Alors :

- Les *espèces de la régularité* du couple (A,B) , ce sont d'une part les points de **la droite** qui les joint, d'autre part les **cercles** axés sur cette droite : *définition des droites et des cercles*.
- Voilà pourquoi deux sphères se coupent en *un cercle, un point, ou rien.*
- L'*espace de liberté* de l'objet (A,B) est constitué de tous les couples de même distance portés par cette droite : la *liberté* de (A,B) s'interprète donc comme *géométrie euclidienne de la droite*.
- Les *espèces de la bi-régularité* de (A,B) sont la **droite** d'une part, les **cylindres de révolution** axés sur cette droite d'autre part.

- Choisissons maintenant trois points non alignés A,B,C. Alors :
- Les *espèces de la régularité* du triplet (A,B,C), ce sont d'une part les points du **plan** qui contient A, B et C (*définition des plans*) ; d'autre part les couples de points *symétriques par rapport à ce plan*.
- L'*espace de liberté* est constitué de tous les « triangles *égaux* au triangle (A,B,C) » et situés dans ce plan.
- La *liberté* associée, c'est la *géométrie euclidienne du plan*.
- Les *espèces de la bi-régularité*, ce sont *le plan* et les **couples de plans parallèles** équidistants : nous savons pourquoi ces plans ne se rencontrent pas.
- Attention ! Tout ce que nous venons d'écrire reste vrai dans les *géométries non-euclidiennes* de Lobatchewski et de Riemann, à l'exception de ce dernier résultat — qui constitue l'énoncé spatial du « *postulat d'Euclide* » ou « *axiome des parallèles* ».

En « *géométrie de Riemann* », parmi les espèces de cette régularité, il existe un couple de points (les *pôles* du plan) ; les autres espèces sont des *couples de sphères* centrées sur ces pôles. ([1])

---

1 De même les parallèles à l'équateur terrestre sont centrés sur les deux pôles. Exemple : les *Tropiques*.

Revenons à la géométrie euclidienne ; considérons **une hélice** H (1). Alors :

- Comme *partie* de l'espace euclidien, H est un *espace homogène* (aussi bien qu'une droite, un plan, une sphère, un cercle, un couple de points, un « triangle équilatéral »).
- Les *espèces de la régularité* de H, ce sont les hélices de même **axe**, de même **pas** (2) et de même **sens** (3), par exemple les trajectoires des points d'un écrou qui se visse sur H ; et aussi **l'axe** lui-même.
- Parmi ces hélices, celles qui ont le même **diamètre** que H constituent *l'espace de liberté*. La *liberté* de H, qui fait glisser ces hélices les unes sur les autres, est isomorphe au tore $\mathbb{T} \equiv \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
- La *bi-régularité*, c'est simplement la régularité de l'axe, préalablement **orienté** (4). Ses *espèces* ? D'abord l'axe lui-même, puis tous les **cylindres** qui possèdent cet axe-là.
- La *bi-liberté* de l'hélice est un *groupe à deux éléments*.
- La *tri-régularité* de l'hélice est encore nouvelle : c'est la régularité de l'axe « **désorienté** », qu'elle peut retourner sur lui-même. Et elle peut aussi retourner ses autres espèces, les **cylindres coaxiaux**.

Voici maintenant *un autre jeu dans l'espace*.

Le normalisateur du *groupe d'Euclide* dans le *groupe affine*, c'est le **groupe de Thalès** (ou « ***groupe des similitudes*** »), repéré par les matrices $\begin{pmatrix} La & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, L désignant un réel positif, a une matrice de O(3), c une colonne dans $\mathbb{R}^3$. La *liberté* du sous-groupe « Euclide », c'est le groupe multiplicatif des L .

Si l'espace est muni de la géométrie du groupe de Thalès, il existe une seule *espèce de couples de points distincts* ; voilà pourquoi on peut « **mesurer** » une distance avec une autre et trouver un résultat réel positif L .

(p. 35) ✯ La figure 10 bis est construite comme section plane d'un pavage « noir et blanc » à quatre dimensions ; on peut la caractériser par l'inéquation :

$$\sin(x - ay)\ \sin(x + ay)\ \sin(y - ax)\ \sin(y + ax) > 0 \qquad \text{avec } a = \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1 .$$

Pour construire la figure 10 ter, il suffit de construire un échiquier noir et blanc dans l'espace numérique $\mathbb{R}^5$, de le couper par un 2-plan orthogonal au vecteur (1,1,1,1,1) , et de reproduire isométriquement cette section sur une feuille de papier. Si la figure n'est que quasi-régulière, c'est parce que le Nombre d'Or est irrationnel.

1 Figure 10, p.30.

2 Le *pas* de l'hélice, c'est la distance dont elle avance quand on la visse d'un tour.

3 Le *sens* d'une hélice, c'est une notion que chacun a dû acquérir pour apprendre à ouvrir ou à fermer un robinet, à déboucher une bouteille avec un tire-bouchon.

4 C'est à cause de cette propriété géométrique que certains prétendent que l'hélice « *n'est pas symétrique* ».

(p. 38) ✯ *définition des moments*

Un groupe G qui possède des moments, c'est un groupe muni d'une structure différentiable : groupes de matrices, groupes de Lie par exemple. Plus généralement, un groupe difféologique (1)

Alors un **moment** de G, c'est une *1-forme* au point neutre (la valeur en ce point de la dérivée d'une fonction réelle différentiable f). L'action du groupe sur ses moments est caractérisée par la formule

$$g\left(\left[f\circ g_G\right]'(e)\right)=f'(e),$$

g_G désignant l'automorphisme intérieur $g_G(h)=g\circ h\circ g^{-1}$.

Les mathématiciens l'appellent généralement action coadjointe (même s'il n'existe pas toujours d'action adjointe à lui associer).

38 ✯ L'action ci-dessus d'un groupe sur ses moments définit les espèces de moments.
Parmi les espèces de moments, certaines sont munis automatiquement d'une 2-forme fermée, dite symplectique. Cette « construction KKS » a été édifiée dans les années 1960 (2).

(p. 39) ✯ L'espace des rayons lumineux est une espèce de moments du groupe d'Euclide ; c'est ainsi que la construction KKS produit la géométrie symplectique de la lumière.

39 ✯ Pour construire les instruments d'optique, on a beaucoup utilisé la fonction « eikonal », que l'on peut caractériser par la géométrie symplectique.
39 ✯ Les variétés de rayons lumineux sur lesquelles la lumière peut se concentrer sont les variétés lagrangiennes : sous-variétés de dimension maximum parmi celles où s'annule la forme symplectique. Dimension maximum qui est la moitié de celle de la variété ambiante (la dimension d'une variété symplectique est toujours paire).
La variété des droites orientés possède la dimension 4. Les faisceaux lumineux sont donc tous de dimension 2 .
Mais il existe des ensembles de rayons lumineux de dimension 2 qui ne sont pas « lagrangiens » (par exemple les rayons contenus dans un plan) ; la diffraction empêche donc d'y concentrer la lumière.

---

1 Un groupe muni d'une « difféologie », pour la quelle les opérations du groupe sont « différentiables ». Voir les *liens* du chapitre VI.

2 A.A. Kirillov, B. Kostant, J-M. Souriau. Pour le détail, voir l'ouvrage de l'auteur : « *Structure des Systèmes Dynamiques* », Dunod 1970 ou sa traduction anglaise (Birkhauser 1997).

LIENS DU CHAPITRE III : QUAND ?

(p. 45) ✯ Cet « espace des mouvements » a été pris en compte par Joseph Lagrange (Mécanique Analytique, 2ème édition, 1811). Mais ses successeurs ont préféré travailler sur « l'espace de phases » ; espace qui se construit :

en choisissant arbitrairement un instant « initial » et un groupe « Chronos » ; on cache un quadri-vecteur d'Univers sous l'écriture hypocrite $\partial/\partial t$, qui présume de l'existence d'un « espace absolu »,

en se reposant sur le déterminisme ([1]), bien que la résolution des « équations du mouvement » soit souvent problématique.

Pourquoi ces choix subjectifs ? sans doute pour éviter d'affronter directement la fuite du temps.

Du coup ont été perdus les résultats les plus profonds de Lagrange. Il a fallu attendre un siècle pour qu'ils soient réinventés par des mathématiciens comme Henri Poincaré, Élie Cartan (théorie des « invariants intégraux »).

(p. 48) ✯ Voici l'action des transformations de Bruno sur les événements : leur date n'est pas touchée ; leur lieu est décalé d'un vecteur proportionnel à la date. Voir plus précisément la *clé* 4, p. 189.

(p. 50) ✯ Les *sous-groupes à un paramètre* du groupe de Galilée se répartissent en deux classes : ceux qui ne modifient pas la date — et les autres.

Ces autres, ce sont les *mobilités* possibles. Les *espèces* de l'action d'une telle mobilité, ce sont les *points* de ***l'espace*** associé.

En tant que sous-groupes du groupe de Galilée, ces diverses mobilités se répartissent en *espèces* ; espèces pour la *géométrie interne* ([2]).

De quelle espèce, *la mobilité de la Terre* ? L'espèce qui fait un tour en 23 heures, 56 minutes et 4 secondes (*jour sidéral*). Cette durée n'est pas seulement relative aux étoiles, elle appartient en propre à notre planète.

On peut le vérifier avec le *gyroscope* de Léon Foucault (1852), qui permet de *mesurer* le jour sidéral au fond d'une cave obscure.

---

1 *que la force soit avec nous*, pp.78-79.

2 p. 222.

LIENS DU CHAPITRE IV : MATIÈRE ET GÉOMÉTRIE

(p. 57) ✯ Soit F la « force de résistance à l'avancement » ; on admet généralement que c'est une fonction de la vitesse, *positive* et *convexe*. Pendant un trajet à vitesse variable, la distance parcourue est $L = \int v\,dt = \int v_o\,dt$, v_o étant la vitesse moyenne « raisonnable » choisie par Charles ([1]).

L'énergie dissipée pendant le trajet est $E = \int F(v)\,dx = \int g(v)\,dt$, en posant $g(v) = v\,F(v)$. Cette fonction g est convexe ([2]), son graphe est au-dessus de ses tangentes ; donc : $g(v) - g(v_o) \geq g'(v_o) \times (v - v_o)$.

Par intégration sur la durée du trajet, on en déduit que le minimum de E est atteint pour le trajet à la vitesse constante v_o .

(p. 58) ✯ Il s'agit de la somme *vectorielle* des impulsions.

(p. 62) ✯ Dans le dialogue rapporté ici, l'enthousiasme des protagonistes les a amenés à négliger un peu la rigueur. Précisons :

Le *statut géométrique de la masse*, c'est celui d'une « ***classe de cohomologie symplectique*** » du groupe de Galilée G.

Cohomologie qui produit une *extension* G' de G. G' s'appelle ***groupe de Bargmann*** ; G est le *quotient* de G' par son centre. La construction détaillée est indiquée ci-dessous (liens de la clé 5).

La « grosse formule » que le physicien a découverte (p. 61), celle qui est détaillée p.192, c'est celle des *moments du groupe de Bargmann*.

(p. 64) ✯ La dimension d'un espace, c'est le nombre de paramètres qu'il faut déterminer pour y fixer un point. Belle sentence ! c'est pour lui donner une signification précise que les mathématiciens ont construit la structure de ***variété***. Cas particulier d'*espace difféologique*.

(p. 70) ✯ Propriété d'autant plus remarquable que les « transformations de Lorentz » seules, contrairement à celles de Bruno, ne forment pas un groupe (si on considère des bateaux croisant dans diverses directions). Il ne suffit donc pas de les étudier individuellement pour percer les secrets de la relativité : il faut construire le groupe qu'elles engendrent : c'est la composante neutre du groupe de Poincaré. Voir la clé 7.

(p. 72) ✯ Le mécanisme de la vision utilise l'effet photo-électrique. Effet incompréhensible si on ignore la relation entre *couleur* et *énergie* qui résulte du modèle relativiste de photon (clé 7). Cette relation a été découverte empiriquement par Einstein en 1905, et c'est ce travail-là qui a été récompensés par le prix Nobel.

La couleur du photon, c'est la longueur $\|p\|$ de son « vecteur-impulsion ». L'énergie du photon selon Einstein, c'est $E = \|p\|\,c$.

---

1 Attention ! il s'agit donc d'une *moyenne temporelle*.

2 Lemme : sur un intervalle donné, les fonctions positives-croissantes-convexes se multiplient entre elles.

(p. 74) ✬ Les « *grandeurs conservées* » que l'on mesure, on peut les déduire de la « loi de la dynamique » $\mathrm{TD} = 0$ (Voir pp. 112-119). Loi qui n'est pas spécifiquement associée à un modèle « classique » ou « relativiste ».

Naguère, pour définir théoriquement les « grandeurs conservées», on utilisait les « théorèmes de Noether » ([1]), associés à un « *principe variationnel* » (principes de Fermat, de Maupertuis, de Hamilton, etc.). L'espace des solutions d'un problème variationnel est toujours symplectique ; et les grandeurs conservées associées pourront ainsi apparaître comme *moments* d'un groupe de symétries de ce problème.

(p. 77) ✬ Le groupe géométrique ***G*** est bien un sous-groupe de la source ***S = G x G*** du couple (il suffit de faire agir le même élément de *G* sur les deux objets) ; l'ensemble des mouvements de la chose composée est bien une « espèce de moments » de ***S***.

(p. 79) ✬ Voici comment exprimer la 2-forme symplectique Ω d'un système de points matériels interagissant par des forces ([2]).
On désigne par m_j les masses, R_j les positions, V_j les vitesses, F_j les forces , tout cela à une date t choisie arbitrairement pour observer le mouvement ([3]).

Alors la forme de Lagrange Ω , contractée avec deux variations δ, δ' du mouvement x, vaut

$$\boxed{\Omega(\delta x\,,\delta' x) = \sum_j \left\langle m_j\delta V_j - F_j\delta t\,,\delta' R_j - V_j\delta' t\right\rangle - \left\langle m_j\delta' V_j - F_j\delta' t\,,\delta R_j - V_j\delta t\right\rangle}$$

Les variations δ,δ' concernent *la date* t et les *conditions initiales* $R_j\,,V_j$ associées ; la formule écrite implique donc que le résultat ne dépend que des variations $\delta x\,,\delta' x$ du mouvement associé x.

Et puisque Ω est *symplectique*, la condition « $\Omega(\delta x\,,\delta' x) = 0$ quel que soit δ' » doit impliquer $\delta x = 0$.
La formule ci-dessus fournit donc les conditions $\delta R_j = V_j\delta t$, $m_j\delta V_j = F_j\delta t$, nécessaires et suffisantes pour que $\delta x = 0$; ainsi les « ***équations du mouvement*** »

$$\frac{dR_j}{dt} = V_j \qquad\qquad m_j\frac{dV_j}{dt} = F_j$$

sont issues de la forme de Lagrange Ω .

Mais pour que Ω soit symplectique, il *faut* aussi que Ω soit une *forme fermée* ([4]) ; il *suffit* que Ω soit *exacte* sur l'espace des conditions initiales, c'est-à-dire que $\Omega = d\Psi$, Ψ étant une *1-forme*.

1 Emmy Noether, 1918.
2 La notation $\langle \ldots\,,\,\ldots \rangle$ désigne le *produit scalaire* : $\langle X\,,Y\rangle = \overline{X}\,Y$ (Clé 3, p. 181) .

3 La dynamique des points matériels en simple coexistence pacifique, celle qui découle du groupe de Galilée-Bargmann G, et de G^2, $G^3 \ldots$, on l'obtient en remplaçant dans cette formule toutes les forces F_j par zéro.

4 C'est-à-dire que sa dérivée extérieure $d\Omega$ soit nulle.

Ceci a lieu en choisissant $\Psi(\delta R_j, \delta V_j, \delta t) = t\ \delta E$, avec :

$$E = u(R_1, R_2, \ldots R_n) + \tfrac{1}{2} \sum m_j \left\| V_j \right\|^2 ,$$

à condition que les forces F_j soient telles que $\delta u = -\sum \overline{F_j}\ \delta R_j$; alors E sera une *constante du mouvement.*

On reconnaît évidemment le cas où les forces dérivent d'une *fonction de forces* $-u$. Cas où ***l'énergie conservée*** E est la somme de ***l'énergie potentielle*** u et de ***l'énergie cinétique*.**

Et la relativité galiléenne ?

Elle sera sauvegardée si l'énergie potentielle $u(R_1, R_2, \ldots R_n)$ ne dépend que de l'*espèce euclidienne* du multiplet $(R_1, R_2, \ldots R_n)$.

Cette condition implique le « *principe d'égalité de l'action et de la réaction* » de Newton

$$\sum_j F_j = 0 \qquad\qquad \sum_j R_j\ \overline{F_j} - F_j \overline{R_j} = 0.$$

Alors on peut reconstruire le moment galiléen ***J*** en complétant l'expression de l'énergie par les formules suivantes :

$$p = \sum_j m_j V_j$$

$$m = \sum_j m_j$$

$$f = \sum_j m_j \left(R_j - V_j\, t\right)$$

$$\ell = \sum_j m_j \left(R_j \overline{V_j} - V_j \overline{R_j}\right)$$

caractérisant chacune une « constante du mouvement ».

Ainsi se reconstruit la ***mécanique analytique***.

Exemple : On obtient les équation de la « mécanique céleste » en choisissant les forces produites par l'attraction newtonienne (exercice : calculer dans ce cas l' « énergie potentielle » u).

Lagrange a défini la forme symplectique sur l'espace des mouvements par ses composantes ou les composantes du tenseur inverse ; les « crochets de Lagrange » et «parenthèses de Lagrange » (1).

Une autre caractérisation a été trouvée par son élève Denis Poisson (Journal de l'École Polytechnique, 1809). Ce sont ces « crochets de Poisson » qui ont servi ultérieurement à Paul Dirac de transition entre la mécanique classique et la mécanique quantique.

---

1 *Mémoires de la Première classe de l'Institut pour 1808*, et *Mécanique Analytique*, 2ème édition, 1811.

79 ✯ Ce sont les particules à spin ([1]) qui peuvent être aimantées. L'*aimantation* d'un barreau d'acier, c'est un basculement collectif du spin de certains électrons ; par conséquent ça communique au barreau un certain *tournoiement*, proportionnel au changement de moment magnétique du barreau. « *Effet gyro-magnétique* » dit-on, observé et mesuré dès 1915 par J. de Haas, à l'instigation d'Albert Einstein.

Peu importent l'acier et le barreau utilisés : cette expérience macroscopique permet de mesurer une grandeur qui appartient en propre à chacun des électrons.

Résultat d'autant plus remarquable qu'on n'avait aucune idée du spin à cette date-là.

(p. 80) ✯ Ce que nous savons a priori, c'est que l'action de ce groupe-source respecte la forme symplectique Ω ; la source est donc à choisir dans le groupe des symplecto-morphismes de l'espace des mouvements, ou dans une extension centrale d'un tel groupe.

80 ✯ Mouvements *périodiques* ? Ce mot n'a de sens que si nous avons choisi un *groupe « mobilité »* , donc un *espace* associé ([2]).

Mais en mécanique céleste nous ne pouvons pas, comme Aristote, choisir l'espace de la Terre.

L'espace dans lequel le mouvement de la Terre autour du Soleil est périodique, c'est celui qui ne tourne pas et dans lequel le centre de gravité du système Terre-Soleil reste aussi immobile qu'invisible.

Espace très subjectif…

---

1 *ce modèle vous plaît ?* (p. 64)

2 voir *recommencer* p. 43, *séjour et chronos* p.51.

LIENS DU CHAPITRE V : DU HASARD AU VERTIGE

p.84 ✭. Un ***aléa*** A c'est un groupe multiplicatif de fonctions complexes de module 1 sur un ensemble X ; C'est le choix de A qui rend l'ensemble X *« aléatoire » (*voir p.209).

Un ***hasard***, c'est une fonction définie sur ce groupe A ([1]). Mais comment obtenir tous les « *hasards* » impliqués par les axiomes des hasards (formulés *clé* 8, p. 209) ?

Il y a d'abord les *certitudes*. Pour chaque élément x de X , la certitude $x\uparrow$, définie par $x\uparrow(a) = a(x)$, vérifie la simple règle $x\uparrow(a_j^{-1}\, a_k) = \overline{a_j(x)}\, a_k(x)$; il en résulte que $x\uparrow$ est un ***état*** *de* A ([2]), et que le convexe engendré par les certitudes est encore constitué d'états de A.

Le second axiome de la p.209 exprime que les hasards sont les limites uniformes des états ainsi obtenus sur chaque partie finie de A ; il en résulte que ce sont encore des états.

84 ✭ La géométrie galiléenne pourra se transmettre des « mouvements » d'une chose aux « hasards » si le groupe de Galilée agit *proprement* sur l'espace de ces mouvements (voir *images de hasard* , p.211). Condition préalable à la cohérence de la *mécanique statistique*.

(p. 85) ✭ « Entropie » = « évolution » ; mot créé par Clausius en 1855. L'expression initiale de l'entropie est due à Boltzmann ; elle a été généralisée par J.W. Gibbs : "*Elementary Principles in Statistical Mechanics* ", 1902.

Sa définition la plus simple utilise la source **S** de la chose (p. 74, *la source et les ombres*). Mais il n'est pas nécessaire de connaître explicitement le groupe **S** , il suffit de la forme symplectique Ω qu'il engendre sur l'espace des mouvements (*la nature des choses*), et même d'un potentiel moins structuré qui en dérive : la « forme de Liouville », qui permet de définir le *volume* d'une partie de l'espace des mouvements.

Dans le cas où la tache est répartie avec des probabilités p_j entre des régions de volume v_j où elle est "uniforme", la valeur de l'entropie est : $\sum p_j \ \ln\left(v_j / p_j\right)$.

On constate sur cette formule que le groupe des « changements d'unité » agit additivement sur l'entropie ; autrement dit, ce sont les *différences d'entropie* qui seront des *nombres sans dimension*.

---

1 Une « *fonctionnelle* », dit-on, parce que c'est une fonction définie sur un ensemble de fonctions.

2 États ? Voir p 187.

On voit aussi que l'entropie est une fonction croissante de chacun des v_j , donc que l'entropie augmente quand cette tache s'élargit.

Interprétation de cette formule : l'entropie changée de signe (***néguentropie***) est la *valeur moyenne du logarithme de la densité de probabilité*. Cette interprétation suggère comment définir l'entropie dans des cas plus généraux.

85 ✯ La « tache dans l'espace des ombres », c'est l'image de l'état statistique par l'application moment (*clé* 8). Pendant la dissipation, cette tache change, mais son centre (la valeur moyenne du moment) ne bouge pas. Voilà le vrai « ***premier principe*** ». Mais on ne le formule généralement en réduisant « l'espace des moments » à « l'espace des énergies ». Voir ci-dessous.

(p. 86) ✯ Le mécanicien décrit cette situation en précisant que « *les liaisons sont indépendantes du temps ».*

Expression insuffisante : il faut préciser que *les liaisons ont la symétrie du groupe Chronos.* Comme l'avait remarqué Lagrange dès 1808 (« *Mécanique Analytique* »), c'est cette condition qui assure la *conservation de l'énergie* ([1]).

86 ✯ Les taches ponctuelles sont permises par M. DIABOLOS, sous le nom de « *certitudes* » (*hasards*, p. 209).

(p. 87) ✯ Le *groupe Chronos* ne change ni l'énergie moyenne, ni l'entropie d'un état statistique. Pourquoi ? si l'une d'entre elles changeait cet état, l'hypothèse faite ici indique que son entropie diminuerait : ce qui est interdit par le second principe. Par conséquent Chronos laisse fixe cet état ; c'est ça la définition d'un état *immobile* (p. 43).

87 ✯ On constate facilement que l'énergie d'un système composé est la somme des énergies, que son entropie est la somme des entropies. *Mais est-elle maximum pour l'énergie moyenne fixée ? c'est cette question qui fait apparaître la température thermodynamique* β , multiplicateur de Lagrange pour un problème de maximum lié.

(p. 88) ✯ Cette règle peut fonctionner à l'envers, et devient la définition légale de la température exprimée en degrés *Celsius* ; à un facteur près, qu'on appelle *constante de Boltzmann*.

Comment la choisir ? on a décidé que la température absolue d'un équilibre triple d'eau, de glace et de vapeur devait être égale à 273.16 degrés. Ainsi sur Terre l'eau gèle à peu près à 0°, bout à peu près à 100° : degrés *centigrades* donc.

Ce choix est un renoncement : *toute température est caractérisée par une énergie*, mais personne ne peut calculer l'énergie correspondant à ce point triple, faute d'un modèle calculable de l'eau dans ces conditions.

(p. 89) ✯ Dans l'ensemble des états de Gibbs, l'entropie est une fonction convexe vers le bas du moment moyen. Le vecteur température est sa dérivée, qui appartient ainsi au dual de l'espace des moments, c'est-à-dire à l'algèbre de Lie du groupe de Galilée. Algèbre de Lie qui s'interprète par des *champs de quadri-vecteurs*.

1 Énergie que Lagrange note H , en l'honneur de Huygens. Voir p.56.

(p. 90) ✭ Ce théorème met en jeu la structure du « groupe géométrique » dont le moment est impliqué dans l'énoncé du premier principe ; il est valable aussi bien dans le cas du groupe de Poincaré que dans celui du groupe de Galilée ([1]).

(p. 91) ✭ Cette régularité, c'est un sous-groupe du groupe géométrique ; la *température froide*, c'est son algèbre de Lie ; elle caractérise la *direction* du bord de l'ombre, aussi bien au fond de la caverne que sur la chose elle-même. Quand sa dimension est 1 , elle définit le *séjour* dans le véhicule constitué par le système en équilibre froid.

(p. 93) ✭ À cause de cela, il n'existe pas d'équilibre froid pour les systèmes à trois corps (ou davantage) — contrairement au cas des systèmes à deux corps (*manèges dans le ciel ,* p. 91).

Ceci n'empêche pas l'existence de mouvements de rotation d'ensemble : ce sont les configurations de Moulton et de Lagrange pour trois corps.

Dans ce dernier cas, les trois corps constituent un triangle équilatéral, qui tourne autour de son centre de gravité (qui n'est pas le centre géométrique dès que les masses sont différentes). Pour certaines valeurs des masses, cette configuration est stable, et on l'observe effectivement dans le Système Solaire : les trois corps étant le Soleil, Jupiter et un amas de petites planètes, dites *troyennes* parce que leurs noms ont été choisis dans l'Iliade.

Mais les perturbations les dispersent assez largement sur l'orbite de Jupiter, si bien qu'elles constituent un « anneau brisé » autour du Soleil.

(p. 98) ✭ Il existe deux nombres dont la somme et le produit valent –1 ; celui qui est positif, c'est *le nombre d'or*. Il est solution de l'équation $x^2 = 1 - x$, lisible sur la Fig. 21 ; Il vaut $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ = 0.618…. Bien entendu, comme tout "rapport de grandeurs", on peut aussi le caractériser par son inverse, soit : $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ = 1.618… .

(p. 99) ✭ Pour calculer la dissonance d'un nombre, on cherche un nombre résonant *r* voisin, et on multiplie la différence par le carré du dénominateur de la fraction *r* (rendue irréductible).

On recommence avec tous les nombres résonants (c'est long, parce qu'il y en a une infinité), et on prend la plus petite valeur obtenue (la borne inférieure). Sur la Fig. 21, ce nombre a été élevé à la puissance 4 , pour améliorer la lisibilité.

(p. 100) ✭ Nombres résonants d'une part, le plus dissonant des nombres de l'autre : ça a quelque chose en commun, ils appartiennent tous à la classe des nombres que les mathématiciens appellent « algébriques » : les racines d'une équation algébrique à coefficients entiers.

C'est parmi les nombres algébriques de degré 1 et 2 que se recrutent les "raies", suggérées par la fig. 39 (ci-dessous), et utilisées pour décrire les périodes stables ou instables dans le système Solaire (fig. 40).

1 Démonstration dans J.M. SOURIAU, « STRUCTURE OF DYNAMICAL SYSTEMS » (BIRKHÄUSER 1997).

100 ✯ Les mouvements de *convection* à l'intérieur du Soleil sont fortement dissipatifs. Autre effet à prendre en compte, celui du *rayonnement* : de l'énergie est emportée au loin par les photons de la lumière solaire ; du tournoiement aussi est emporté, notamment par le champ magnétique du Soleil. Une manifestation de cet effet, c'est que le Soleil ne tourne pas comme un solide ; sa vitesse de rotation n'est pas tout à fait la même aux pôles et à l'équateur.

Ces phénomènes obligent à traiter la thermodynamique du Système Solaire comme celle d'un *système dissipatif ouvert*. C'est dans ces systèmes-là que peuvent apparaître des ***structures dissipatives***.

(p. 101) ✯ Dans le modèle simplifié utilisé ici, la direction de la marée que produirait chaque planète seule peut se repérer par un point sur le tore $\mathbb{T}$ (il est caractérisé par le double de la longitude, parce que la marée est un phénomène dipolaire). L'évolution du Système est caractérisée par un morphisme du groupe des translations temporelles dans le groupe $\mathbb{T}^k$, k désignant le nombre de planètes prises en compte.

L'image est un sous-groupe de Tk ; sa fermeture est encore un sous-groupe. Dans le cas où les périodes des planètes sont en progression géométrique de raison r , et où r est un nombre algébrique de degré d (d < k), cette fermeture est isomorphe à Td .

Le degré d est égal à 2 dans le cas du nombre d'or, à 1 dans le cas r = 1/2. Les figures 23 et 24, ce sont des images dans le disque des groupes $\mathbb{T}^2$ et $\mathbb{T}$.

(p. 102) ✯ Pour savoir si des nombres $T_1 \ldots T_n$ appartiennent à une "progression géométrique", il suffit de calculer la fonction complexe : $F(r) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \exp\left(2i\pi \frac{\ln(T_j)}{\ln(r)}\right)$:

le *module* de $F(r)$ est égal à 1 si les T_j sont dans une progression géométrique de raison r , plus petit que 1 dans le cas contraire. Ce module ne change pas si on multiplie les T_j par un même nombre, ni si on les remplace par leurs inverses. Il suffit de le connaître dans l'intervalle] 0 ,1 [, puisque $F(1/r) = \overline{F(r)}$.

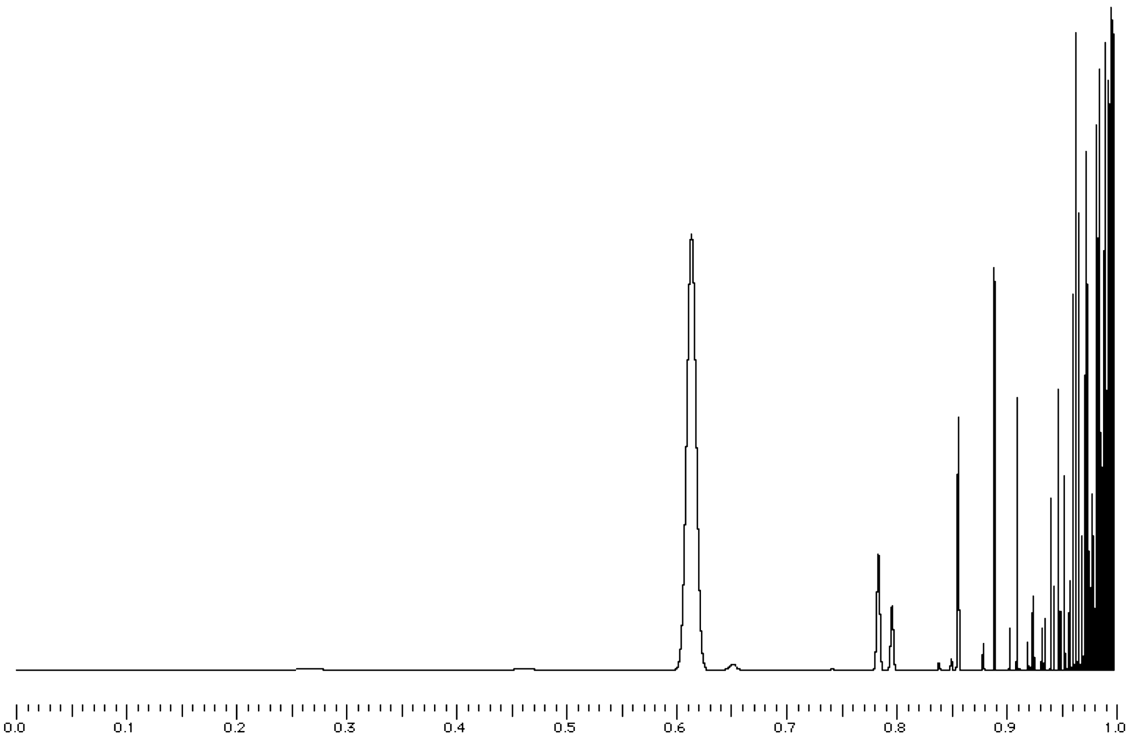


Figure 39. Spectre des fréquences des quatre planètes

La figure 39 représente le graphe de $|F(r)|^{16}$ dans le cas où les T_j sont les périodes des 4 planètes qui produisent les marées solaires les plus fortes : Vénus, Jupiter, Mercure, la Terre.

Elle se présente comme un *spectre de raies* ; une raie très marquée est proche de 0.618 (nombre d'or). L'accumulation de raies à droite du graphique est une conséquence de l'algorithme, (elles apparaissent quels que soient les T_j et dépendent très fortement de la précision des données) ; l'extrême-droite n'est pas significative.

La fonction F peut être considérée comme une *transformée de Fourier* de la répartition des périodes (plus précisément de leurs logarithmes).

répartition des planètes

À partir d'un choix de p raies r_k prises dans ce spectre, on peut effectuer une *transformation de Fourier réciproque* qui donne une fonction

$$\Phi(T) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} F_k \exp\left(-2i\pi \frac{\ln(T)}{\ln(r_k)}\right)\right) \text{ ; } \textit{on a posé } F_k = F(r_k).$$

Dans le cas des 4 planètes, choisissons deux raies dans le spectre ci-dessus (le nombre d'or $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et la fraction $6/7 = 0.857\ldots$, qui sont des *nombres algébriques*).
C'est ainsi qu'on obtient la fonction Φ représentée sur la figure 40 :

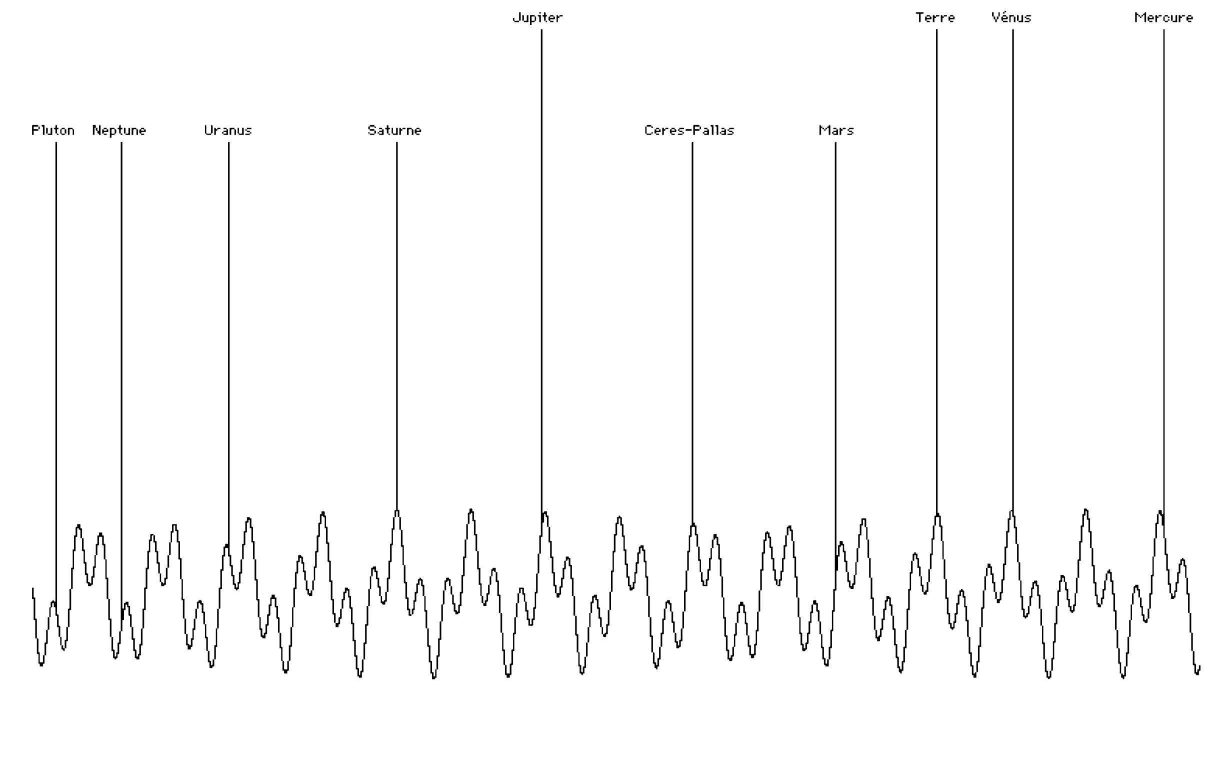


Figure 40. Apparition du système solaire

Cette courbe dépend de 5 paramètres seulement ([1]). Elle est faite pour avoir des maxima au voisinage de chacun des quatre T_j donnés initialement ; mais elle passe par des maxima au voisinage des périodes des 11 planètes principales du système solaire ([2]).

Même structure pour ce qu'on voit tourner dans le ciel de *Jupiter*, à commencer par le Soleil et Saturne ; ces deux objets et deux raies (r = 2/5 et r = 4/5) produisent la fonction Φ représentée sur la Fig. 41 ; elle accueille les quatre gros satellites découverts par Galilée en 1610 (qui présentent de fortes résonances mutuelles), et quelques autres (dont les noms ne sont pas écrits). Les *planètes troyennes* sont là aussi, avec la même période que le Soleil.

1 Les réels r_1 et r_2 , les phases des complexes F_1 et F_2 et le rapport de leurs modules. Ici les paramètres r_1 et r_2 ne sont pas ajustés, puisqu'il leur est assigné des valeurs algébriques simples.

2 La seule raie du nombre d'or conduit à une progression géométrique de raison 0.618 pour les périodes des planètes autres que la Terre; la troisième loi de Kepler implique donc une progression de $0.618^{4/3}$ = 0.526 pour les *distances* au Soleil . Pas tellement loin de 0.5 : la " **loi de Titius-Bode** " , en faveur depuis le XVIIIème siècle, est construite sur cette raison 0.5 , avec quelques aménagements : une constante est ajoutée aux distances ; le cas de Mercure est traité à part.

Zeus

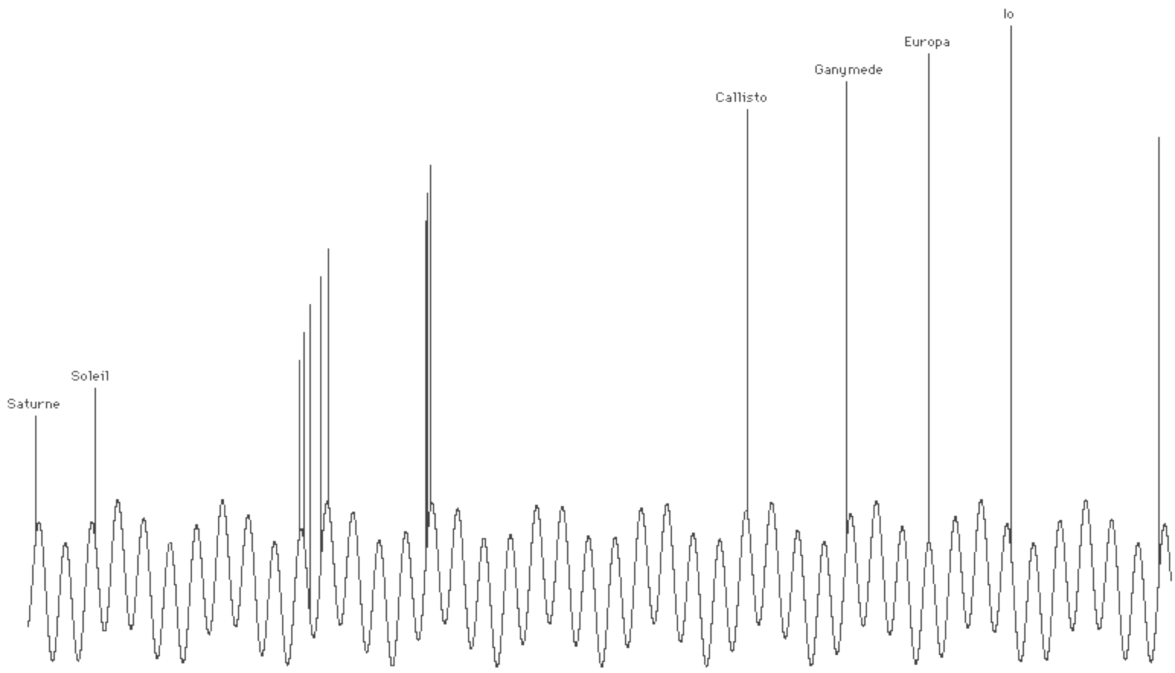


Figure 41. Dans le ciel de Jupiter

Saturne, seigneur des Anneaux

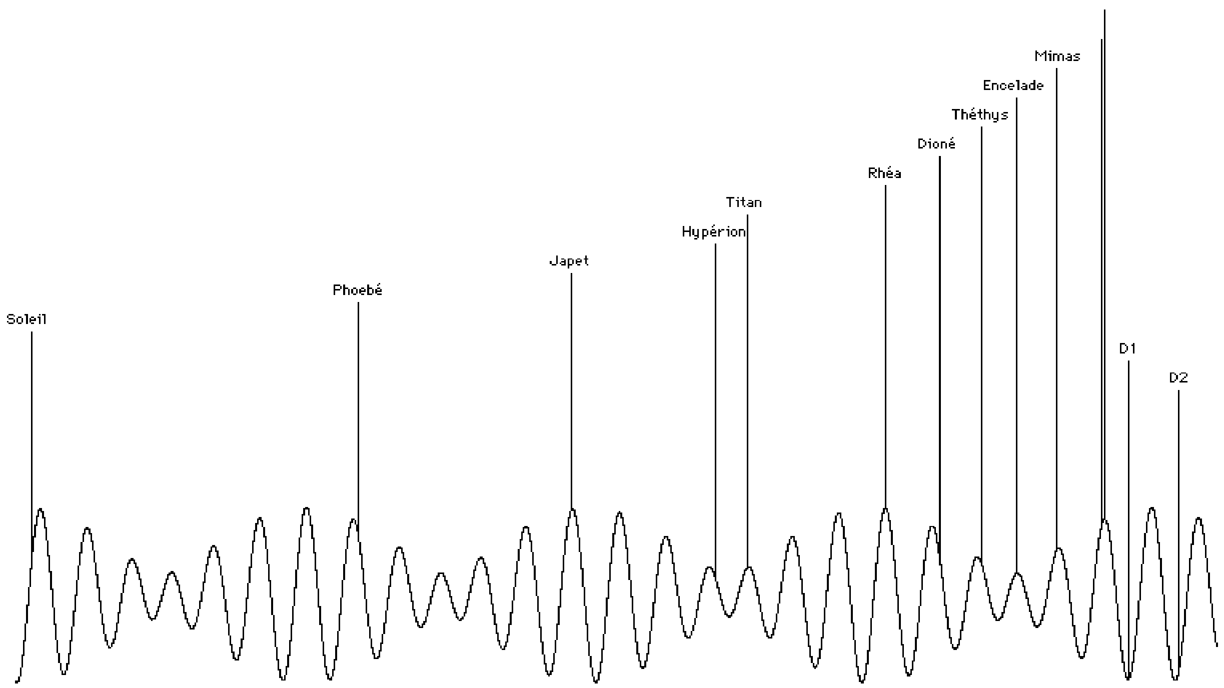


Figure 42. Dans le ciel de Saturne

102 ✯ Encore deux raies algébriques (le nombre d'or, 2/3) pour décrire le système de *Saturne* (Fig. 42).

Le satellite *Titan* est en résonance 3/4 avec son voisin *Hypérion.* Il a été découvert en 1655 par Huygens, en même temps que les *anneaux* de Saturne. Ceux-ci avaient été vus auparavant, notamment par Galilée, mais ils n'avaient pas été interprétés comme anneaux.

Ces anneaux sont séparés en trois par deux divisions principales D1 et D2, qui apparaissent aussi sur ce graphique, en creux bien entendu. À droite de D2 est l'*anneau de crêpe* ; l'*anneau intérieur* est entre D1 et D2 ; l'*anneau extérieur* s'étend entre deux satellites bergers et la *division de Cassini* D1.

LIENS DU CHAPITRE VI : MACROCOSMOS

(p. 105) ✯ Pour nous parvenir depuis la Lune, la lumière met une seconde ; du Soleil, cinq cents secondes ; de Neptune : quatre heures environ. Et la radio aussi : un coup de téléphone avec un cosmonaute sur Neptune, ce n'est pas très animé ; il faut attendre huit heures pour entendre *" Pas mal, et toi ? "*.

105 ✯ Les marins comptent en « milles » et en « nœuds », les joailliers en « carats ». De même certains astronomes aiment compter les distances lointaines en « parsecs », « kiloparsecs », « megaparsecs » ; ces unités ont été utiles ; aujourd'hui elles ne servent plus à rien, mais le jargon impressionne parfois les profanes. Qu'ils ont l'air ringard, ceux qui comptent simplement les durées en années et les distances en années-lumière ! Est-il utile de savoir que la vitesse de la lumière vaut *30.66 parsecs par siècle* ?

(p. 106) ✯ Quasars : voir pp. 73, 92. La plupart du temps la galaxie est noyée dans le rayonnement du quasar central qui nous semble brillant et ponctuel comme une étoile ; c'est d'ailleurs ce que signifie le mot *quasar*, contraction de *quasi-stellar.* Il est probable que tous les quasars sont l'effet d'un effondrement, peut-être temporaire, du « noyau » d'une galaxie. Comme un volcan permanent qui entre de temps en temps en éruption. Comment cet effondrement produit-il l'objet brillant que nous observons ? Mystère pour l'instant. Un modèle mathématique a été construit, dont le nom « *trou noir* » a beaucoup frappé les imaginations ; mais la correspondance entre ce modèle et les quasars observés reste à confirmer.

106 ✯ Les galaxies sont équiparties entre l'hémisphère sud et l'hémisphère nord ; seules sont exclues les régions qui sont cachées par les nébulosités internes de notre propre Galaxie.

On a essayé de rendre compte des fluctuations de la densité des galaxies par un modèle en « mousse de savon » : de grandes bulles vides séparées les unes des autres par des parois où se répartissent préférentiellement les galaxies. Concentration particulière de galaxies au voisinage des lignes de contact de trois bulles, des points de contact de quatre bulles.

(p. 108) ✯ La *constante de Hubble* ([1]), quotient d'une vitesse par une distance, est *l'inverse d'une durée*. Durée de l'ordre de 13 milliards d'années.

Certains astronomes évaluent la constante de Hubble avec une unité particulièrement gratinée : le « *kilomètre/seconde par mégaparsec* »; cette unité, c'est l'inverse de 977 milliards d'années(-lumière).

1 Pour la *loi de Hubble*, voir p.248.

108 ✯ L'observation dans diverses directions permet d'y reconnaître un « *rayonnement de Planck ».* Il est donc nécessairement associé à un *quadrivecteur-température* ([1]), ce qui détermine un « apex » de la Terre par rapport à ce rayonnement. Apex de l'ordre de 300 km/seconde. Les fluctuations résiduelles sont de l'ordre du cent-millième, et restent à interpréter sérieusement.

(p. 111) ✯ Le principe de Relativité Générale suppose que l'univers est une variété X de dimension 4 ([2]) ; le groupe souple, ce sera le groupe de ses difféomorphismes ([3]).

Le *principe restreint de relativité* (Relativité Galiléenne aussi bien que Relativité Restreinte) utilise l'action d'un groupe pour *transporter* les mouvements des choses, insérant les « mouvements réels » dans la classe des « mouvements possibles ».

Mais pour remonter de la Relativité Générale à une relativité plus restreinte, il faut négliger la courbure de la gravitation ; c'est ce qui se produit automatiquement à petite échelle, parce que « l'équation aux dimensions » de cette courbure est L^{-2}.

Ainsi la relativité restreinte apparaît-elle comme une théorie *microscopique.* Et de fait, c'est à l'échelle atomique qu'elle est utilisée, grâce à ses prolongements quantiques.

En physique classique comme en Relativité Restreinte, on postule l'existence d'un système de coordonnées globales x, y, z, t de l'univers X. La structure de variété de X est celle pour laquelle ce système de coordonnées est une carte.

Ainsi le groupe de Galilée et le groupe de Poincaré deviennent des *sous-groupes* du groupe souple, mais pas des sous-groupes *normaux* (voir la *clé* 1, p.170).

111 ✯ L'objet « gravité » D, vu par les géomètres, c'est une *connexion affine symétrique.* En tant qu'objet souple, on peut définir D comme transformation d'un tenseur covariant Z en tenseur covariant symétrique DZ qui ait la vertu de s'écrire (dans une carte quelconque) sous la forme :

$$[DZ]_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[\partial_\mu Z_\nu + \partial_\nu Z_\mu\right] + D^\rho_{\mu\nu} Z_\rho$$

Ces objets souples existent… ; un calcul élémentaire fournit les formules de changement de carte des coefficients $D^\rho_{\mu\nu}$, à partir des formules de changement de carte des tenseurs.

La symétrie en μ,ν des coefficients $D^\rho_{\mu\nu}$ est équivalente à la possibilité de les annuler en chaque point de l'univers en choisissant une carte adaptée ("carte en chute libre").

La gravité newtonienne écrite en coordonnées traditionnelles x^μ : x,y,z,t s'obtient en prenant $D^j_{44} = g^j$ ($j = 1,2,3$; g^j = « vecteur accélération de la pesanteur »), les 37 autres composantes indépendantes étant nulles.

1 Voir p.89 et p.123.

2 Les cartes, où "systèmes de coordonnées ", sont définies sur des ouverts de $\mathbf{R}^4$.

3 Les mathématiciens disent "*groupe des difféomorphismes*", les relativistes disent "*groupe de jauge gravitationnelle*". Si nous avons choisi l'expression "*groupe souple*", c'est pour nous rapprocher des conceptions d'Einstein.

(p. 112) ✯ Le tenseur-mesure T décrivant la présence du point en chute libre est supposée de la forme suivante : $T\Gamma = \int T^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu} ds$, les $T^{\mu\nu}$ étant définis sur la ligne d'Univers du point matériel, décrite avec un paramètre s arbitraire. La *variable d'essai* $\Gamma_{\mu\nu}$ est un tenseur symétrique, différentiable, à support compact.

L'axiome $TD=0$, abréviation de « $TDZ=0$ pour tout Z à support compact », équivaut alors aux deux règles suivantes :

- l'existence d'un multiplicateur de Lagrange Λ tel que $T^{\mu\nu} = \Lambda \dfrac{dx^\mu}{ds}\dfrac{dx^\nu}{ds}$
- l'équation $\dfrac{d}{ds}\left[\Lambda \dfrac{dx^\rho}{ds}\right] = \Lambda \; D^\rho_{\mu\nu} \dfrac{dx^\mu}{ds}\dfrac{dx^\nu}{ds}$

Dans le cas de la gravité newtonienne D, les conditions $D^4_{\mu\nu} = 0$ entraînent l'équation $\Lambda \dfrac{dt}{ds} = C^{te}$; c'est cette constante qui s'interprétera comme *masse*.

112 ✯ Si la masse n'est pas nulle, on peut faire le choix du paramètre $s = t$ (4$^{\text{ème}}$ coordonnée classique), et l'équation ci-dessus se réduit à la loi de Galilée $\dfrac{d^2x^j}{dt^2} = g^j$. Loi qui est ainsi insérée dans la géométrie souple ([1]).

Si on revient à l'équation générale, on pourra écrire la chute galiléenne des corps avec des coordonnées quelconques. Ainsi, avec des coordonnées terrestres, cette équation prend en compte les « ***forces de Coriolis*** », qui se manifestent par la déviation des projectiles vers l'est, qui agissent sur les courants marins et atmosphériques (alizés, quarantièmes rugissants).

(p. 113) ✯ L'existence d'une « *moyenne statistique* » T des mouvements individuels des particules, le fait que T soit solution de l'équation $TD = 0$, sont des conséquences du caractère linéaire de cette équation. Et c'est la linéarité de la correspondance $T \to J$ entre *mouvement* et *moment* qui permet de fonder géométriquement le *premier principe de la thermodynamique*.

Dans le cas d'un milieu continu, la présence T est une fonctionnelle sur les tenseurs symétriques $\Gamma_{\mu\nu}$ à support compact, supposée du type suivant :

$$T\Gamma = \int T^{\mu\nu}\,\Gamma_{\mu\nu}\, dx\, dy\, dz\, dt,$$ les coefficients $T^{\mu\nu}$ étant symétriques.

La loi de la dynamique $TD = 0$ s'écrit alors :

$$\partial_\mu T^{\mu\rho} = D^\rho_{\mu\nu} T^{\mu\nu}.$$

1 On notera qu'un changement d'unités sur le temps $t \to at$ implique le changement réciproque $m \to m/a$ sur la masse. En faisant $a = -1$, on voit aussi qu'un changement de sens du temps équivaut à un changement de signe de la masse.

L'interprétation classique s'obtient :

- en écrivant le tenseur $T^{\mu\nu}$ avec les dix variables ρ, V^j, σ^{jk} (*masse spécifique, vitesse, tenseur de contrainte*) qui mettent le tableau des $T^{\mu\nu}$ sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \sigma^{jk} + \rho V^j V^k & \rho V^k \\ \rho V^j & \rho \end{pmatrix}$$

- en supposant que les seules composantes non nulles de la connexion D sont données par le vecteur g, « *accélération de la pesanteur* » : $D^j_{44} = g^j$ et en utilisant trois variables intermédiaires A^k pour représenter *l'accélération.*

Alors l'équation $TD = 0$ se détaille en :

$$\partial_j \left[\rho V^j\right] + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$A^k = \frac{\partial V^k}{\partial t} + V^j \partial_j V^k$$

$$\rho A^k = \rho g^k - \partial_j \sigma^{jk}$$

On reconnaît les *équations d'Euler* des milieux continus. La première équation (dite « *équation de continuité* ») s'interprète comme *conservation de la masse* ; la seconde comme « loi fondamentale de la dynamique » en présence de la pesanteur, parce que $F^k = -\partial_j \sigma^{jk}$ est la *force spécifique* à laquelle est soumis le milieu du fait de sa contrainte. Dans le cas hydrodynamique, F^k est le « *gradient de la pression* » (changé de signe).

Les équations d'Euler sont réputées « non-linéaires »: cette fâcheuse réputation ne tient donc qu'au choix des variables classiques ; rien de plus linéaire en T que l'équation $TD = 0$; et cette linéarité peut être utilisée pour décrire les *mélanges*.

113 ✯ Le ***spin*** d'une particule ponctuelle se décrit en remplaçant le tenseur-mesure T par un tenseur-distribution — dont le support est toujours une ligne d'Univers. La loi de la dynamique permet ainsi de définir les dix composantes du moment relativiste de la particule (« masse » et « spin », par exemple) et d'assurer leur conservation.

113 ✯ Dans le cas des fils ou cordes, le tenseur-distribution T, solution de $TD = 0$, a pour support une *sous-variété de dimension 2 dans l'univers*.

On décrit ainsi divers types de cordes : une corde vibrante classique, une corde constituée par un tube mince dans lequel coule un fluide, une « corde cosmique », etc. ([1]).

La loi de la dynamique donne la définition des grandeurs dynamiques et cinématiques associées à la corde : masse spécifique, tension, torsion, raideur, débit (dans le cas d'un tuyau), etc.

---

1 Mais pas les « *supercordes* » ….

113 ✯ Les membranes ou coques, bien entendu, se décrivent par un tenseur-mesure ou un tenseur-distribution supporté par une sous-variété de dimension 3 dans l'Univers.

(p. 114) ✯ Si la chaise était en contact avec le sol, le résultat serait différent. Pourquoi ? : le mécanicien dirait : « *parce que le sol peut communiquer des efforts aux pieds de la chaise* » ; le géomètre dirait : « *parce que le contact empêcherait de faire glisser une boucle sous les pieds* ». Et ils ont raison tous les deux.

114 ✯ Les efforts géométriques (*torseurs)* sont des objets à 6 composantes ; le choix de la « géométrie euclidienne » permet des les considérer comme « moments ».

(p. 115) ✯ Pour faire correctement ce genre d'exercice, il faut faire attention à l'orientation (indiquée sur la figure par des flèches). Une modélisation rigoureuse est donnée par la théorie mathématique appelée ***homologie***.

La 2-homologie en dimension 3 qui fournit des torseurs (dans le cas statique) se prolonge par une 3-homologie en dimension 4 de la dynamique (dans l'approximation de la gravité plate D). C'est cette 3-homologie qui produit l'objet $\boldsymbol{J}$ associé aux mouvements, et qui permet d'établir les lois des collisions entre points matériels ou entre corps étendus ([1]).

115 ✯ Dans le cas de l'impesanteur, les solutions en Z de l'équation $DZ=0$ constituent un espace de dimension 10 ; elles permettent d'associer 10 constantes à la présence T d'un mouvement libre quelconque. Dans l'exemple du milieu continu, ces constantes s'expriment par des intégrales triples (dv désignant l'élément de volume $dx\,dy\,dz$). On les interprète ainsi :

$$\int \rho \, dv = \text{masse} \qquad \int \rho V^j \, dv = \text{impulsion}$$

$$\int \rho \left[x^j - V^j t\right] dv = \text{passage} \qquad \int \rho \left[x^j V^k - x^k V^j\right] dv = \text{tournoiement}$$

Il résulte de la dynamique $TD = 0$, donc ici des équations d'Euler, qu'elles sont toutes indépendantes de la date t. Grandeurs conservées, « théorèmes généraux » de la mécanique ([2]).

Ces constantes constituent un objet $\boldsymbol{J}$ qui appartient à la géométrie affine de l'univers. $\boldsymbol{J}$ peut être considéré comme « moment du groupe de Poincaré » (comme le pense MAX), mais tout aussi bien un moment du groupe des isométries de *n'importe quelle métrique* $\boldsymbol{g}'$ *vérifiant* $\mathsf{D}\boldsymbol{g}' = 0$ (par exemple une métrique positive de l'univers).

(p. 116) ✯ Le tenseur de Riemann-Christoffel de la pesanteur D :

$$R^{\lambda}_{\mu\nu,\rho} = -\partial_\mu D^{\lambda}_{\nu\rho} + \partial_\nu D^{\lambda}_{\mu\rho} + D^{\lambda}_{\mu\sigma} D^{\sigma}_{\nu\rho} - D^{\lambda}_{\nu\sigma} D^{\sigma}_{\mu\rho}$$

est nul si cette pesanteur est plate : c'est pourquoi on l'appelle *tenseur de courbure*.

---

1 La métaphore (dimension 3 -> dimension 4) transforme les assemblages en collisions.

2 La méthode de démonstration consiste à multiplier chaque solution Z (qui n'est pas à support compact) par une fonction scalaire u à support compact et à développer $TD[Zu]$.

Il induit un autre tenseur, le *tenseur de Ricci* :

$$R_{\lambda\mu} = R^{\rho}_{\rho\lambda,\mu}$$

Dans le cas de la gravité newtonienne, les seules composantes non nulles du tenseur de courbure et du tenseur de Ricci sont

$$R^{j}_{k4,4} = -R^{j}_{4k,4} = -\partial_k\, g^j$$

et

$$R_{44} = -\partial_j\, g^j.$$

Dans l'approximation où on considère la gravité galiléenne D comme *plate*, sa régularité dans le groupe souple ([1]) est un groupe de dimension 20, le *groupe affine* ; le groupe de Galilée (de dimension 10) est sous-groupe du groupe affine ; la *liberté* de « Galilée » dans « affine » ([2]), c'est la géométrie dont dérive ***l'analyse dimensionnelle*** des physiciens, qui s'exprime multiplicativement avec deux variables réelles ***L*** et ***T***, les « ***dimensions longueur et temps*** ».

Comment la présence de la matière courbe-t-elle la pesanteur ? dans le cas d'un milieu continu, Denis Poisson a proposé en 1812 l'équation

$$\partial_j\, g^j = -4\pi G\rho$$

(G : constante de Newton), qui est une reformulation de la loi de Newton ; géométriquement, elle indique comment *la matière courbe la gravité.*

Mais il n'est pas interdit d'enlever un terme constant Λ au premier membre de cette équation, qui deviendra alors

$$\partial_j\, g^j = -4\pi G\rho + \Lambda$$

Pourquoi ? parce qu'on obtient ainsi, en ajustant Λ, un modèle plus conforme aux observations lointaines, notamment celles des supernovae extra-galactiques.
« Univers accéléré » dit-on. Mais on désigne ce nouveau terme par des expressions bizarres : « force noire » , « énergie du vide ».

Elles sont certainement trompeuses, puisque l'équation aux dimensions de Λ (l'inverse carré d'un temps) ne convient ni à une force, ni à une énergie.
En relativité générale, Λ s'interprétera comme « constante cosmologique ».

116 ✭ Dans le vide entourant un globe attractif (la Terre par exemple), les composantes de la courbure sont proportionnelles à la densité moyenne de ce globe ; inversement proportionnelles au carré de la période d'un satellite en orbite basse.

(p. 117) ✭ La métrique $\boldsymbol{g}$ est donc un objet nouveau associé à la gravité. Par hypothèse, le tenseur $\boldsymbol{g}_{\mu\nu}$ est symétrique et sa signature est $+---$. Il en résulte que la matrice $\boldsymbol{g}_{\mu\nu}$ est inversible, et que les éléments $\boldsymbol{g}^{\mu\nu}$ de la matrice inverse sont les composantes d'un tenseur contravariant caractéristique lui aussi de l'objet $\boldsymbol{g}$.

---

1 Autrement dit son « normalisateur ».

2 Voir p. 175.

117 ✯ La gravité D associée à la métrique g est caractérisée par la propriété suivante : les $\partial_\lambda g_{\mu\nu}$ sont nulles en tout point où la carte est en chute libre ([1]). Condition que nous écrirons $\mathrm{D}g = 0$.

Dans une carte quelconque, cette relation s'écrit :

$$\mathrm{D}^\lambda_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2} g^{\lambda\rho}\left[\partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\nu g_{\mu\rho}\right],$$

formule qui implique l'unicité de la solution D de l'équation $\mathrm{D}g = 0$.

(p. 118) ✯ L'espace M des métriques, la Physis Φ, ce ne sont pas des variétés (leurs dimensions sont infinies…). Pour décrire leur géométrie, il faut une notion nouvelle : la ***difféologie***.

Qu'est-ce que c'est que çà ? en voici une brève description.

Appelons *ouverts numériques* les parties ouvertes d'un *espace numérique* $\mathbf{R}^n$. Les dérivations partielles permettent de définir la *classe* C^∞ des applications entre ouverts numériques.

Soit X un ensemble non vide ; *une difféologie* de X, ce sera la donnée d'un ensemble d'applications appelées *plaques* de X, vérifiant les axiomes suivants :

- Toute plaque p est une application d'un *ouvert numérique* (la *source* de p) dans X; si *n* est la dimension de cette source, nous dirons que p est une *n-plaque* ;
- si p est une plaque et f une application C^∞ d'un ouvert numérique dans la source de p , $p \circ f$ est une plaque ;
- si un ensemble de n-plaques admet un prolongement commun, le plus petit prolongement commun est une n-plaque ;
- les images des plaques recouvrent X.

Un *espace difféologique*, c'est un ensemble muni d'une difféologie. Exemple: la difféologie engendrée par les *cartes* d'une *variété* M fait de M un espace difféologique.

Alors :

- Si X et Y sont des espaces difféologiques, une application a de X dans Y sera dite *différentiable* si , pour toute plaque p de X , $a \circ p$ est une plaque de Y. Toute composée d'applications différentiables est différentiable.
- Une bijection a de X dans Y s'appellera un *difféomorphisme* si a et sa réciproque sont différentiables.
- Les difféomorphismes de X dans X constituent un groupe, donc une géométrie admettant X comme espace : la *géométrie différentielle* de X . C'est ainsi que X mérite le nom d' « ***espace*** », qu'*une difféologie est une géométrie*.

Si on se donne un ensemble X et une famille Δ d'applications d'espaces numériques dans X, il existe une plus petite difféologie de X telle que les éléments de Δ soient différentiables; c'est la *difféologie engendrée* par Δ .

1 Définition : p. 240.

Si Y est une partie d'un espace difféologique X, les plaques de X dont l'image est contenue dans Y constituent une difféologie de Y : *difféologie de partie*.

Sur tout espace difféologique, on peut définir des *tenseurs covariants* ; leurs images réciproques par des applications différentiables ; notamment par une *plaque* — ce qui produit leurs composantes dans cette plaque.

C'est ainsi qu'une 1-forme T peut se définir sur la Physis, se relever sur l'espace des métriques, et qu'on peut montrer qu'elle est alors solution de l'équation $TD=0$.

118 ✯ Sur l'Univers, la métrique g définit une gravité D, un *tenseur de Ricci* $R_{\mu\nu}$ et une « courbure scalaire » $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$.

Choisissons deux nombres réels a et b. Alors la formule :

$$L(g_1, g_2) \quad = \int \Big[(aR + b)\sqrt{|\det(g)|}\Big]_{g_1}^{g_2} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4$$

définit une fonction antisymétrique à deux points L sur l'espace des métriques ([1]). La *dérivée variationnelle* ([2]) de L définit sur la Physis une 1-forme T, qui se relève dans l'Univers par une présence T :

$$T\Gamma = \int \Big[2b g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} R_{\mu'\nu'} - [a + bR] g^{\mu\nu}\Big]\Gamma_{\mu\nu} \text{ vol}$$

Γ désigne une « variable d'essai » à support compact, « vol » la densité riemannienne associée à la métrique.

L'équation d'Einstein consiste à égaler cette *présence géométrique* T à la *présence de la matière* ; alors la *dynamique* $TD = 0$ sera automatiquement vérifiée.

Les deux constantes a et b qui figurent dans cette équation d'Einstein peuvent être normalisées ($a = b = 1$) en choisissant des unités de mesure pour les durées et les masses : « unités gravitationnelles ».

Voici une estimation de leurs valeurs: l'unité de durée $\mathbf{t}$ est de l'ordre de six milliards d'années, l'unité de masse $\mathbf{m}$ est approximativement de 2×10^{78} atomes d'hydrogène (de quoi faire vingt milliards de galaxies).

Évidemment ces valeurs si énormes ([3]) et si peu précises ne sont pas directement utilisables. Pour la mécanique céleste usuelle, on se contente de négliger $1/\mathbf{t}^2$, et d'utiliser la grandeur $\mathbf{G} = \dfrac{\mathbf{t}}{8\pi\mathbf{m}}$; pourquoi $\mathbf{G}$? parce que c'est la *constante de l'attraction universelle de Newton*, qui peut se mesurer en laboratoire.

---

1 L'intégrale est définie si les deux métriques g_1 et g_2 ne diffèrent que sur un compact ; sinon on choisit $L(g_1, g_2) = 0$.

2 Autrement dit : le *jet d'ordre 1* sur la diagonale.

3 Avec ces unités, la valeur de la constante de Planck est de l'ordre de 10^{-120}. Voilà de quoi décourager les tentatives d'expliquer le Big Bang par des « *fluctuations quantiques* ».

Dès 1798, Cavendish avait mesuré $\mathbf{G}$ en évaluant la très faible attraction mutuelle de deux boules de plomb ($G \approx 2.48 \times 10^{-36}$ s / kg). Il en avait déduit la densité moyenne 5.45 g / cm^3 pour la Terre.

On admet aujourd'hui la valeur $\mathbf{G} \approx 2.4765 \times 10^{-36}$ s / kg , correspondant à la densité 5.51 .

La constante a, négligeable dans la mécanique du système solaire, joue un rôle important à l'échelle cosmique. On appelle *constante cosmologique* la grandeur $\Lambda = \dfrac{a}{2b}$; elle est évaluée dans la *clé* 9 ($\Lambda \approx 3 \times 10^{-35}\,\mathrm{s}^{-2}$).

(p. 123) ✯ Le « *vecteur-température* » β^{μ} peut s'interpréter comme générateur d'un sous-groupe à un paramètre du groupe souple : $s \to \exp(\beta s)$.

C'est toujours un quadri-vecteur ***du genre temps***, ce qui permet de caractériser la « température absolue » $\boldsymbol{T}$ par la relation $\boldsymbol{T} = 1 \Big/ \sqrt{\boldsymbol{g}_{\mu\nu}\,\beta^{\mu}\beta^{\nu}}$ (avec un choix convenable d'unités).

123 ✯ L'objet $\beta\boldsymbol{g}$ qui est indiqué ici, c'est la ***dérivée de Lie*** de la métrique $\boldsymbol{g}$ pour le champ de vecteurs β , c'est-à-dire la dérivée initiale de $s \to \exp(\beta s)\boldsymbol{g}$.
Conductivité thermique, *viscosité*, *viscosité cinématique*, tout cela s'exprime en langage classique, mais est structuré par le modèle relativiste qui l'unifie.

Avec en prime des bilans rigoureusement équilibrés : forcément, la *dynamique* $\mathrm{TD} = 0$ est toujours présente, grâce à la Physis sous-jacente ([1]).

(p. 125) ✯ Voici le modèle "classique" élaboré par Milne. Écrivons d'abord les équations classiques des fluides parfaits : $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ désigne la position; t le temps ; la vitesse du fluide sera $\mathbf{v}$; son accélération γ, sa densité ρ, sa pression $\mathbf{p}$. $\mathbf{g}$ sera l'accélération de la pesanteur.

La cinématique des milieux continus donne la formule : $\gamma = \dfrac{\partial v}{\partial \mathbf{r}} v + \dfrac{\partial v}{\partial t}$, où $\dfrac{\partial v}{\partial \mathbf{r}}$ désigne la matrice des dérivées spatiales de la vitesse $\mathbf{v}$. Les équations d'Euler s'écrivent $\mathrm{div}(v\rho) + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, $\gamma + \dfrac{\mathrm{grad}(p)}{\rho} = \mathbf{g}$.

Par ailleurs, l'accélération $\mathbf{g}$ de la pesanteur est soumise aux équations de Newton-Poisson: $\mathrm{rot}(\mathbf{g}) = 0$; $\mathrm{div}(\mathbf{g}) = -4\pi G\rho + \Lambda$; G et Λ étant les deux constantes de la gravitation : constante de Newton, constante cosmologique (facultative a priori).

1 Pour le détail, voir P. IGLESIAS ET J.M. SOURIAU, Heat, Cold and Geometry, "Differential Geometry and Mathematical Physics", M.Cahen edr , p.37-68, Reidel Pub. C° (1983).

Décrivons avec un tel modèle la « poussière de galaxies », telle qu'elle est apparue à Edwin Hubble en 1929 : la densité et la pression sont indépendantes de la position $\mathbf{r}$ (mais pas de la date t) ; la vitesse est donnée par la ***loi de Hubble*** $\mathbf{v} = \mathbf{r}H$, la variable H désignant une fonction du temps à déterminer, dont on peut mesurer la valeur actuelle H_o, la « ***constante de Hubble*** ».

Pour traiter ce cas, nous pouvons utiliser une nouvelle fonction du temps :

$$R = e^{\int H dt}$$

la constante d'intégration étant choisie pour que $R = 1$ à l'époque actuelle.

En portant dans les équations, on obtient successivement :

- $H = \frac{R'}{R}$, (R' désigne la dérivée de R par rapport au temps),
- $\gamma = \mathbf{r}\left[H^2 + H'\right] = \mathbf{r}\ \frac{R''}{R}$,
- $\gamma = \mathbf{g}$,
- $\frac{d}{dt}[\rho\, R^3] = 0$

On trouve facilement deux intégrales premières :

- $\rho_o = \rho R^3$
- $K = -\frac{3R'^2}{2} + \frac{4\pi G\rho_o}{R} + \frac{\Lambda R^2}{2}$,

qui permettent d'écrire l'équation d'évolution sous la forme

$$t = \frac{1}{H_o}\int \frac{RdR}{\sqrt{P(R)}}$$

où P désigne le polynôme :

$$P(R) = \lambda R^4 - kR^2 + \Omega R\ ;$$

ses coefficients, *sans dimensions*, ont les valeurs :

$$\lambda = \frac{\Lambda}{3{H_o}^2}\ ,\ k = \frac{2K}{3{H_o}^2}\ ,\ \Omega = \frac{8\pi G\rho_o}{3{H_o}^2}$$ (1).

Voici les valeurs de ces coefficients qui sont utilisées dans la suite :

« constante cosmologique réduite » : $\lambda = 1.25$

« courbure réduite » : $k = 0.45$

« paramètre de densité » : $\Omega = 0.20$

1 Par construction P(1)=1, ce qui donne $\lambda - k + \Omega = 1$.

L'intégration numérique de l'équation d'évolution est facile, ce qui donne t en fonction de R, d'où R en fonction de t ; on obtient du même coup l'évolution de $H = H_o \frac{\sqrt{P(R)}}{R^2}$ et de $\rho = \frac{\rho_o}{R^3}$.

(p. 126) ✯ Voici maintenant un modèle *relativiste* de l'Univers, cartographié sur l'espace numérique $\mathbb{R}^4$:

- On choisit les unités de longueur et de temps pour que la vitesse de la lumière et le paramètre de Hubble H_o soient égaux à 1.
- La variable R désigne la distance « numérique » d'un point de $\mathbb{R}^4$ à l'origine.
- En posant $d\sigma^2 =$ métrique numérique de $\mathbb{R}^4$, la métrique d'Univers est donnée par

$$ds^2 = \left[1 + \frac{R^2}{P(R)}\right] dR^2 - d\sigma^2$$

Alors l'équation d'Einstein exprime que la matière remplissant l'Univers est une poussière ([1]) de densité $\frac{3\Omega}{8\pi G R^3}$, dont les molécules décrivent les demi-droites issues de l'origine : voir la figure 30, p. 128.

Et la relation $R \to t$ définie par *l'équation d'Einstein* coïncide *exactement* avec la solution $t = \frac{1}{H_o} \int \frac{R dR}{\sqrt{P(R)}}$ des *équations d'Euler classiques*.

Bien entendu les deux interprétations sont différentes ([2]), comme l'ont remarqué les protagonistes Édouard et Alexandre, mis en scène aux pp. 125-126.

La régularité O(4) de ce double modèle est évidente, et s'interprète comme « *groupe cosmologique* ».

(p. 127) ✯ Dans les expositions classiques du modèle de Friedmann, on se contente parfois de prendre en compte le signe de la courbure k ; de choisir k parmi les trois valeurs - 1 , 0 , 1 . Un simple changement d'unités permet de le faire, mais le résultat est désastreux : le modèle n'est plus apte à décrire la géométrie d'Euclide comme transition entre les deux autres.

(p. 129) ✯ La figure 30 (*brève histoire de l'espace*) est construite avec le modèle de Friedmann ci-dessus : c'est une section plane de $\mathbb{R}^4$ contenant la ligne d'univers de notre galaxie ; les chemins de la lumière qui y sont dessinés sont des géodésiques isotropes.

Ces courbes suffisent à modéliser l'expansion ; en ce sens, la figure raconte complètement l'histoire et la géographie de l'Univers. Pour le détail, voir la *clé* 9 (pp. 213-216).

---

1 Poussière : fluide de pression nulle.

2 En particulier pour la variable commune R, qui vaut 1 à l'époque actuelle.

(p. 132) ✯ Dans le modèle de Friedmann, le vecteur-température est Killing-conforme, ce qui est lié au fait que la température absolue soit inversement proportionnelle à la variable R ([1]).

Le rayonnement cosmologique observé (rayonnement de Planck associé à ce vecteur-température) est lui aussi une des source de la gravitation, par la densité et la pression de radiation qu'il implique ([2]).

Il se trouve qu'on peut en tenir compte très simplement dans le modèle : il suffit d'ajouter au polynôme P un terme constant α, de l'ordre de 0.0005.

(p. 135) ✯ Pour déceler la présence d'hyper-galaxies, l'ordinateur fait varier les paramètres du modèle, et chaque fois compte combien de couples de quasars pourraient appartenir à des hyper-galaxies toutes parallèles entre elles. C'est ainsi que sont obtenus les paramètres cosmologiques indiqués ci-dessus (p. 249), mais aussi le « pôle hyper-galactique » (proche de l'étoile Oméga d'Orion).

Ces résultats, obtenus à partir de 1982 ([3]), sont compatibles avec les observations ultérieures, notamment celles des supernovae extragalactiques (à partir de 2002) qui ont rendu plausible l'introduction d'une constante cosmologique non nulle.

(p. 136) ✯ La projection utilisée dans la figure 31 a les propriétés suivantes :

- La distance qui nous sépare des objets s'évalue en projection sur le diamètre qui passe par la Terre.
- Des points équipartis dans l'espace comobile apparaîtront équipartis dans le disque ([4]). Extension du théorème d'Archimède sur l'aire des calottes sphériques, cette propriété permet de calculer le « volume de l'Univers » à l'époque actuelle. Elle permet aussi de mieux interpréter les particularités de la figure.

Le fait que la figure apparaisse plus « noire » au voisinage de la Terre indique simplement que les quasars proches sont observés plus facilement que les quasars lointains.

(p. 140) ✯ On recommence la procédure décrite sur la figure 29 (p. 117), en créant **l'électro-Physis** $\breve{\Phi}$, espace des *types d'électro-métriques*.

Alors les équations $\breve{T}\breve{D} = 0$, $\breve{D}\breve{g} = 0$, $\breve{T} = \breve{S}(\breve{g})$ constituent une électro-physique géométrique complète, dont l'analyse pratique s'obtient en deux pas : passer du groupe électro-souple au produit (groupe électrique) x (groupe souple), décomposer l'univers en produit cartésien espace x temps ([5]).

---

1 Voir le discours d'ALEXANDRE, p.132.

2 On peut alternativement utiliser le modèle de Kaluza.

3 Voir H.H. Fliche, J-M. Souriau, R.Triay, «A POSSIBLE LARGE-SCALE ANISOTROPY OF THE UNIVERSE » , Astron. and Astrophysics 108, p.256-264 (1982) ; et : H.H. Fliche, J-M. Souriau, «IS OUR ENVIRONMENT STRATIFIED ?», Physics Letters A, 144, 6-7, PP.306-315 (1990).

4 Autrement dit, avec le vocabulaire de la *clé* 8: il existe sur l'espace comobile un hasard invariant par l'action du groupe cosmologique ; l'image de ce hasard par la projection est le « hasard uniforme » dans le disque.

5 Voir le détail des calculs dan « GÉOMÉTRIE ET RELATIVITÉ », J.M. SOURIAU, éd. Hermann, Paris 1964 (Chapitre VII).

(p. 143) ✯ L'*espace co-mobile,* dont les figures 31,32 sont une représentation, possède la géométrie de l'hyper-sphère euclidienne $\mathbf{S}^3$ ([1]). Un « plan » de cet espace, c'est un plan diamétral de $\mathbf{S}^3$. Espace homogène, dont la régularité est un sous-groupe O(3) de O(4). Groupes qui modélisent respectivement le groupe hyper-galactique et le groupe cosmologique du texte.

Trois ingrédients numériques pour caractériser le sous-groupe hyper-galactique représenté sur la figure 31: les coordonnées du pôle dans le ciel (qui est voisin de l'étoile Oméga d'Orion), la « latitude cosmique » de la Terre (proche de 48°).

Si le plan suggéré par la figure sépare effectivement matière et antimatière, il détermine une symétrie « physico-géométrique » S : physiquement, symétrie matière-antimatière ; géométriquement, symétrie par rapport au plan de contact. L'extension du groupe hyper-galactique par S serait alors une nouvelle régularité du Cosmos ; les éléments qui transforment matière en antimatière sont ceux qui changent l'orientation de l'espace. La possibilité d'une telle symétrie et son caractère primordial montrent qu'il n'est pas interdit d'envisager des modifications drastiques du scénario du Big-Bang.

1 D'équation R = Cte dans les notations de la p. 248.

LIENS DU CHAPITRE VII : MICROCOSMOS

(p. 148) ✯ Le point de départ de la mécanique d'une ***chose***, c'est sa ***source*** ([1]). Cette source, c'est un *groupe* , que nous allons noter **S**.

Traitée *classiquement*, la chose possède des « mouvements » ; chaque ***mouvement*** est un ***moment*** de **S**. Le groupe **S** agit donc sur ces moments, et l'espace **M** de tous les mouvements possibles est une ***famille*** de cette action ([2]).

Comment traiter « *quantiquement* » cette même chose ?

Considérons l' « espace quantique » **Q** (fig. 34, p.147). Voici les hypothèses géométriques qui sont sous-entendues :

- **Q** possède une 1-forme ω (la ***forme quantique***), dont les *caractéristiques* font de **Q** un *fibré en cercles*
- la circulation de ω sur ces cercles est fixée par la *mécanique quantique* : c'est la ***constante de Planck*** $2\pi\hbar$
- la base, c'est ***l'espace des mouvements*** **M**
- La dérivée extérieure $d\omega$ est une 2-forme de **Q** , dont le noyau est « vertical »
- $d\omega$ est l'image réciproque d'une 2-forme de **M** par la projection $\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{M}$; 2-forme sans noyau, donc *symplectique*.

La **préquantification** va consister à identifier cette variété symplectique « quantique » avec l'espace des mouvements de la chose « classique » ; c'est-à-dire avec une famille de moments du groupe-source **S** ; famille munie de sa forme symplectique KKS (p.225).

L'action de **S** sur **M** produit des « **symplectomorphismes** » ; ils devront se relever sur **Q** par des« **quantomorphismes** » , c'est-à-dire par des difféomorphismes préservant la forme quantique ω.

Le groupe de ces quantomorphismes agira transitivement sur **Q,** en produisant une extension de **S** par le *tore* ([3]).

Et rien ne nous empêchera de choisir cette extension comme « *source* » de la chose : elle fonctionnera aussi bien au niveau classique qu'au niveau quantique.

Voilà donc le statut géométrique de la ***préquantification*** ([4]).

1 Cf. *La source et les ombres*, pp. 74-77.

2 p. 76.

3 Tore qui fait tourner tous les cercles du même angle, et que l'on peut identifier au « groupe électrique » (p.140).

4 Voir J.M.Souriau, « Quantification géométrique », Comm. Math. Phys. 1, pp.374-398 (1966).

Et la **quantification géométrique** ?

Elle consistera à déterminer un ensemble d'**états** de la source ([1]). Ce ne seront pas tous les états ; seulement les

états quantiques

de **S** .

Leur définition est esquissée pp. 153-154 ; elle est associée à l'espace **M** des *mouvements classiques*.

Association qui permet par exemple de « quantifier » les modèles de particules élémentaires ([2]) et de parvenir aux **équations d'onde** associées ([3]).

Les expérimentateurs devront donc renoncer à la description par ***mouvements,*** et adopter une description par ***états*** ,

dès que la *constante de Planck* ne sera pas négligeable,

en particulier pour la *chimie*.

148 ✯ $\mathbb{C}$, c'est le plan complexe ; le disque, c'est l'intérieur du « cercle trigonométrique ».

EURYDICE a choisi un ***hasard*** μ ; quand DIABOLOS pointe un élément a du groupe-aléa **A** , le spot indique la ***valeur moyenne*** $\mu(a)$.

(p. 149) ✯ Les hasards, ce sont bien des *états* d'un *groupe-aléa* ; Voir p. 208.

(p. 153) ✯ C'est ce que les géomètres expriment en disant que ω est une *forme de connexion sur le fibré principal* **Q** ; ω permet d'extraire la composante « rotatoire » d'un « glissement oblique » de **Q** (par exemple celui que produit l'action d'un sous-groupe à un paramètre de **S**).

153 ✯ Cette dépendance, les géomètres l'appellent *holonomie* ; elle est due à la *courbure* de la connexion ; elle-même due à la *non-commutativité* de la source **S**. Et le groupe **S** ne peut pas être commutatif : chacune de ses espèces de moments serait réduite à un point.

(p. 154) ✯ Une « *observation quantique* » **A** , au sens de Dirac, c'est un sous-groupe de **Q** isomorphe à un groupe R^n, donc commutatif. Et l'état quantique μ du groupe **Q** induit sur **A** un ***état*** qui est un ***hasard***. Voilà « l'interprétation probabiliste » de la mécanique quantique.

154 ✯ La caractérisation des ***états quantiques*** par la vertu de créer des **probabilités quantiques** sur l'espace des **mouvements classiques** requiert pas mal de travail … ([4]).

154 ✯ Un *état statistique* classique, c'est un *hasard* concernant les mouvements de la chose (*du flou*, p. 83) ; c'est bien ce que produit un *état quantique* de Mme EURYDICE pour chaque observation **A** .

---

1 *États*, au sens défini p.187. États du groupe-source **S** ou d'une extension de **S** par le tore.

2 espaces obtenus pp. 193 et 204.

3 J.M.Souriau, Structure of Dynamical Systems » (Birkhäuser 1998).

4 Voir F. Ziegler, « Quantum Representations and the Orbit Method ».

Mais les informations *statistiques* données par *l'état quantique* passent par l'intermédiaire des « fonctions-test » (*clé* 8) ; or les seules fonctions-test permises ici ne concernent que les éléments du sous-groupe **A** .

N'oublions pas que les mouvements sont des moments de la source **S** (*la source et les ombres*, pp. 74-77) ; en mécanique quantique comme en statistique classique, ils ont une valeur moyenne ; cette moyenne est dans l'espace des moments, mais généralement à côté de l'espace **M** (qui n'est qu'une partie de l'espace des moments).

Un moment d'un groupe, c'est par définition la dérivée d'une fonction sur ce groupe, prise à l'élément neutre **e** (voir les liens du *chapitre II*). Un état μ d'un groupe, c'est une fonction complexe sur le groupe ; sa dérivée $\mu'(\mathbf{e})$, quand elle existe, c'est donc un complexe. Du fait que μ est un état, $\mu'(\mathbf{e})$ est « *imaginaire pur* » ; et dans le cas où l'état μ est quantique, la valeur moyenne du moment dans cet état vaut $i\,\mu'(e)$.

(p. 156) ✯ La fonction qui fait passer des valeurs du moment de cette observation oscillante (n = 1,2,3…) à l'énergie, c'est $-\mathrm{R}/n^2$, R désignant la constante de Johannes Rydberg.

156 ✯ Une observation, c'est un sous groupe commutatif de la source **S** ; et ici **S** n'est pas le groupe de Galilée, mais le groupe de Bargmann (p. 262), qui seul permet de décrire selon les principes de Mme EURYDICE une particule de masse non nulle.

Or les deux observations *translations*, *groupe de Bruno*, ne commutent plus dans le groupe de Bargmann.

Autre symptôme de ce même fait : le crochet de Poisson [*impulsion* , *position*] n'est pas nul.

(p. 157) ✯ Dans tous les états quantiques du point matériel libre, le spectre de chaque composante ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z du tournoiement par rapport à un point arbitraire (*clé* 5) est quantifié sur les multiples de $\hbar$. Si la particule est *arrêtée* (c'est-à-dire si le spectre de son impulsion est concentré sur la valeur 0), chacun de ces trois spectres est *équiparti* sur l'infinité de ces multiples.

(p. 158) ✯ Les limites qui interviennent ici sont définies par la *topologie produit* pour laquelle les états quantiques forment un *convexe compact*).

(p. 159) ✯

espaces de Hilbert

Considérons un *état* μ d'un groupe **G** (définition p.187). Appelons

ket de l'état μ (1)

toute fonction complexe ψ, définie sur le groupe **G**, vérifiant la condition suivante : il existe un réel ρ tel que, quels que soient $g_1 \dots g_n$ dans **G** , les matrices complexes Ψ, M de format (n,n) dont les éléments sont respectivement $\overline{\psi(g_j)}\,\psi(g_k)$ et $\mu(g_j^{-1}g_k)$ vérifient $\Psi \leq \rho\,\mathrm{M}$ (2).

1 Terminologie de P.A.M. Dirac.

2 Les matrices Ψ, M sont positives ; la condition précédente signifie que $\rho\mathrm{M} - \Psi$ est aussi

La plus petite valeur de ρ assurant cette condition existe ; on la note $\|\psi\|^2$; l'ensemble des kets de μ devient ainsi un *espace vectoriel complexe normé*, que nous noterons H_μ.

Un *espace vectoriel complexe normé*, s'il est isométrique à un tel H_μ, s'appellera

espace de Hilbert.

Voici quelques propriétés valables pour tout espace de Hilbert $\mathcal{H}$:

- À deux vecteurs quelconques ψ' et ψ est associé un « **bracket** », nombre complexe noté $<\psi',\psi>$, doué des propriétés suivantes :

$$<\psi,\psi'> = \overline{<\psi',\psi>}$$

$$<\psi',\psi_1+\psi_2> = <\psi',\psi_1> + <\psi',\psi_2>$$

$$<\psi',\psi z> = <\psi',\psi> z \qquad \text{si } z \text{ est un complexe.}$$

- Le bracket est caractérisé sur $\mathcal{H}$ par la condition :

$$\|\psi\|^2 = \quad <\psi,\psi> \qquad (1)$$

- Les applications $\mathbb{C}$-linéaires ρ qui conservent la norme :

$$\|\rho(\psi)\| = \|\psi\|$$

constituent le **groupe unitaire** $U(\mathcal{H})$;

elles conservent les brackets :

$$<\rho(\psi'),\rho(\psi)> = <\psi',\psi>$$

Exemples :

- Dans le cas de l'état « cosinus » du groupe $(\mathbb{R},+)$, l'espace de Hilbert associé est constitué des fonctions ψ sur $\mathbb{R}$:

$$\psi(x) = a \cos x + b \sin x \quad (a \text{ et } b \text{ complexes}) ;$$

le bracket est défini par $\langle\psi',\psi\rangle = \overline{a'}a + \overline{b'}b$.

- Dans le cas de la fonction caractéristique du sous-groupe des nombres décimaux, l'espace de Hilbert est "*non séparable* " : sa *dimension hilbertienne* est égale à la puissance du continu.

---

positive ; ce qui implique $\rho \geq 0$

1 Les conditions requises déterminent le bracket par la formule :

$$2\langle\psi|\psi'\rangle = \|\psi+\psi'\|^2 - i\,\|\psi+i\psi'\|^2 + (i-1)\left[\|\psi\|^2 + \|\psi'\|^2\right]$$

- Tout « *espace de Hilbert abstrait* » $\mathcal{H}$ se reconstruit ainsi : il suffit de choisir pour **G** le *groupe unitaire* $U(\mathcal{H})$, de choisir un vecteur unitaire quelconque ϕ, et de poser $\mu(g) = \langle \phi, g(\phi) \rangle$; alors μ est un *état* de **G**, et les kets de H_μ sont associés aux vecteurs de $\mathcal{H}$ par la bijection linéaire isométrique

Revenons à l'espace de Hilbert H_μ engendré par un état μ d'un groupe **G**. Choisissons un **vecteur d'état** ϕ, c'est-à-dire un ket de norme 1.

Il définit une **représentation unitaire** ρ de **G** sur H_μ ([1]) telle que

$$\mu(g) = \langle \phi, \rho(g)\phi \rangle \text{ pour tout élément } g \text{ de } \mathbf{G}.$$

Réciproquement, pour tout vecteur d'état ϕ', la formule $\mu'(g) = \langle \phi', \rho(g)\phi' \rangle$ définit un *état* μ' de **G**, que l'on dira ***subordonné*** à μ .

Nous avons vu que les états d'un groupe **G** forment un *convexe* ; les états *extrémaux* ([2]) seront dits ***états purs*** : ce sont ceux pour lesquels la représentation associée ρ est *irréductible.* Alors :

- Tous les états subordonnés à un état pur sont purs, et mutuellement subordonnés.
- Un état dont la norme de toutes les valeurs est égale à 1 est un morphisme du groupe **G**, autrement dit un *caractère*.
- Réciproquement tous les caractères sont des états.
- Exemple : sur le groupe additif des réels, la fonction $x \to e^{ix}$ est un caractère.

Si un état quantique μ est associé à un ket ψ par la formule $\mu(g) = \langle \psi | \rho(g)\psi \rangle$, la valeur moyenne dans une observation A peut s'écrire $\langle \psi \mid H\psi \rangle$, H étant l'opérateur self-adjoint produit de i par la dérivée de μ dans la direction choisie comme observation (théorème de Stone).

159 ✭ Ces pointes rondes, ce sont des *projectifs hilbertiens.*

(p. 160) ✭ La source quantique de deux choses en coexistence, ça pose un petit problème technique : le centre du groupe produit $\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2$, c'est le produit $\mathbb{T}^2$ des centres ; il faut faire un quotient pour réduire ce centre à $\mathbb{T}$. L'espace **M** des mouvements composés est le produit $\mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2$, le fibré quantique **Q** est un quotient de $\mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_2$. Ainsi la préquantification de la chose composée est elle conforme aux axiomes de Mme EURYDICE.

1 C'est-à-dire un morphisme du groupe G dans le groupe unitaire $U(H_\mu)$.

2 Ceux qui ne sont pas le milieu de deux états différents.

160 ✯ L'état composé est donné par la simple formule $\mu(s_1,s_2) = \mu_1(s_1) \times \mu_2(s_2)$. Si les états μ_1 et μ_2 sont l'un et l'autre quantiques, μ l'est pour la chose composée. L'espace de Hilbert de l'état μ est le « produit tensoriel » de ceux de μ_1 et de μ_2 . L'addition des spectres se fait par convolution.

160 ✯ SATY a construit le groupe produit $\mathbf{S}_0$ des sources des diverses choses. La source **S** est le produit semi-direct de $\mathbf{S}_0$ et du groupe **P** des permutations des choses. Il y a des états μ_o de $\mathbf{S}_0$ qui se prolongent automatiquement par un état μ de **S** , μ induisant sur **P** un caractère. Selon ce caractère, l'espace de Hilbert de μ s'identifie soit à une algèbre symétrique, soit à une algèbre antisymétrique de celui de μ_o . C'est à cela que SATY pensait…

160 ✯ Cela résulte de l'identité valable pour tout état μ d'un groupe :

$$\left[|\mu(g)| = 1\right] \Rightarrow \left[\mu(g g') = \mu(g' g) = \mu(g)\,\mu(g')\right]$$

(p. 161) ✯ Parmi les particules élémentaires, les bosons et les fermions se distinguent par leurs sources : produit du groupe de Poincaré par le tore dans le cas des bosons, extension centrale non triviale dans le cas des fermions.

(p. 162) ✯ Ces opérateurs, ce sont les « opérateurs self-adjoints » qui permettent de calculer les valeurs moyennes. L'« opérateur température », c'est « l'opérateur énergie » multiplié par la « température thermodynamique ». Pour définir les équilibres thermodynamiques quantiques, on utilise l'« exponentielle » et la « trace » des opérateurs ; généralisations de l'exponentielle et de la trace des matrices (*clé* 3), demandant évidemment un traitement approprié, à cause de la dimension infinie.

(p. 163) ✯ Cette source S , c'est le ***groupe de Bargmann*** (p. 262) ; le groupe de Galilée, qui n'agit pas sur le fibré Q , n'agit pas non plus sur les ondes de Schrödinger.

163 ✯ Exemple : on obtient ainsi la ***règle de Max Born*** qui donne le spectre de la « position » associé à un état de Schrödinger : une densité spatiale de probabilité qui est le carré du module de la fonction d'onde. Et on peut déterminer de même le spectre de n'importe quelle observation dans ce même état, et toutes les valeurs moyennes.

LIENS DES PAGES JAUNES

(p. 173) ✯ *(clé 2 : géométries)*

Voici la construction des « espaces quotients ».

Soient G un groupe, H un sous-groupe de G.

Dans G, la relation $\propto$: $g \propto g' \Leftrightarrow \bar{g} g' \in H$ est une *équivalence* (symétrique et transitive). Notons G/H l'ensemble des *classes* selon $\propto$. Alors :

- Il existe une action de G sur G/H définie par g(classe(g'))= classe (gg').
- Pour cette action, G/H est un espace homogène.
- classe(neutre) = H
- $\forall g \in G$, g(H)= classe(g).

(p. 174) ✯ « groupes quotients » (notations précédentes) :

SI H est un sous-groupe *normal* de G, l'ensemble G/H possède une *loi de groupe* définie par

classe(g) classe(g') = classe(g g') ;

G/H, muni de cette loi, s'appelle *groupe quotient* de G par H. C'est un cas particulier de « liberté » (p. 175), la liberté de H.

(p. 182) ✯ *(clé 3 : matrices)*

matrices « positives »

Soit A une matrice *symétrique* de format [n,n].
Premier critère de positivité :

A est positive si $\overline{X}AX \geq 0$ pour tout $X \in R^n$; ce qui montre que les matrices positives constituent un cône convexe.
Voici un critère numérique:

on découpe A en $\begin{pmatrix} a & \overline{B} \\ B & C \end{pmatrix}$, a réel, $B \in R^{n-1}$, format(C) = [n-1,n-1]. Alors A est positive si

$$(a > 0 \text{ et } aC - B\overline{B} \geq 0) \quad \text{ou} \quad (a = 0, B = 0, C \geq 0),$$

ce qui résout le problème par descente sur n.

182 ✯ Une matrice U sera dite ***orthonormale*** si $\overline{U}\,U$ est une matrice unité. Alors son format [p,q] vérifie p ≤ q (le cas p = q est le cas du *groupe orthogonal*).
Toute matrice M , carrée ou non, peut se mettre sous la forme $M = UD\overline{V}$, U et V orthonormales, D diagonale positive décroissante (les éléments diagonaux D^j_j sont ≥0 et décroissent avec le numéro *j*) . Les D^j_j non nuls constituent la partie non nulle du spectre de chacune des matrices $\overline{M}\,M$ et $M\,\overline{M}$.

C'est avec cette représentation des matrices que se construit l'*analyse factorielle des correspondances*, l'un des outils les plus efficaces de la statistique.

(p. 183) ✯ *un algorithme matriciel…*

(p. 184) ✯ La fonction caractéristique d'une matrice et ses dérivées successives se calculent facilement, à partir des coefficients k_1 , k_2 , ... k_n , par une méthode classique du XVIII[ème] siècle (le *développement en série entière*), pour les valeurs « pas trop grandes » de s . D'où les valeurs du flot.

Pour des valeurs plus grandes, le flot s'obtient en appliquant suffisamment de fois la formule :

$$e^{2sA} = e^{sA} \times e^{sA}.$$

Cela permet de programmer la fonction « exponentielle de matrice ».
L'interprétation des matrices M_j et des coefficients k_j est donnée par la formule :

$$(s\underline{1} - A)^{-1} = \frac{s^{n-1}M_1 + s^{n-2}M_2 + \ldots + M_n}{s^n + k_1 s^{n-1} + \ldots + k_{n-1}s + k_n}$$

en abrégé :

$$(s - A)^{-1} = \frac{Q(s)}{P(s)}.$$

P, c'est le ***polynôme caractéristique*** de la matrice A ; ses racines (réelles ou complexes) sont les ***valeurs propres*** de A ; leur ensemble, c'est le ***spectre*** de A.

Une matrice est inversible si et seulement si 0 n'appartient pas au spectre.

Dans le cas d'une matrice *symétrique*, le spectre est réel ; la diagonalisation

$$A = U\,D\,\overline{U}, \quad U \in O(n), \quad D \text{ diagonale,}$$

met le spectre en évidence : il est constitué des éléments (diagonaux) de D ; une matrice positive, c'est donc une matrice symétrique à spectre positif.

Le comportement du flot e^{sA} d'une matrice A lorsque s devient grand dépend du spectre ; la fonction $\gamma(s)$ et ses dérivées restent bornées pour $s > 0$ si le spectre ne contient aucun élément dont la *partie réelle* soit positive.

Donc aussi le flot : « critère de stabilité » pour les systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.

Si le spectre d'une matrice A ne rencontre pas la demi-droite $s \leq 0$, on peut définir le ***logarithme*** de A par la formule

$$\ln(A) = \int_{-\infty}^{0} \left((s - A)^{-1} - (s - \underline{1})^{-1}\right) ds$$

On a alors $A = \exp(\ln(A))$, ce qui permet de poser $A^s = \exp(s \ln(A))$: si s est entier, on retrouve effectivement les puissances entières de la matrice A. Et $A^{1/2}$, c'est la racine carrée de A, déjà rencontrée ([1]).

(p. 187) ✯ Rapppelons la définition des **états** :

Soit G un groupe. Si une fonction à valeurs complexes μ, définie sur G, possède les deux vertus suivantes :

- Chaque fois qu'on choisit un entier n et des éléments $g_1 \ldots g_n$ du groupe G, la *matrice complexe* dont les éléments sont les $\mu(g_j^{-1}\, g_k)$ est *positive* ;
- $\mu(\text{neutre}) = 1$;

nous dirons que μ est un ***état* de** G .

En voici quelques propriétés élémentaires, valables pour tous les éléments g, g' de G :

$$|\mu(g)| \leq 1$$

$$\mu(g^{-1}) = \overline{\mu(g)}$$

$$|\mu(gg') - \mu(g)\,\mu(g')|^2 \leq (1 - |\mu(g)|^2) \times (1 - |\mu(g')|^2)$$

$$\text{Si } |\mu(g)| = 1, \text{ alors } \mu(gg') = \mu(g)\,\mu(g') \text{ pour tout } g'$$

Un état dont toutes les valeurs ont pour module 1 est un ***caractère***, c'est-à-dire un morphisme de **G** dans le groupe multiplicatif des complexes de module 1.

Réciproquement, tous les caractères sont des états.

Les états de G constituent un ensemble *convexe*.

187 ✯ Voir p. 231 pourquoi les « hasards » sont des « états ».

(p. 189) ✯ *(clé 4 : espace et temps classiques)*

L'espace-temps, muni de la géométrie de Galilée, est *homogène* (l'ensemble des événements constitue une *espèce*).

Les espèces de couples d'événements distincts q, q', sont plus pittoresques : il existe des couples *successifs*, dont l'espèce est une ***durée*** ; et des couples *simultanés*, dont l'espèce est une ***distance***.

Comment est-il possible de « mesurer » ces durées et ces distances ? en utilisant la *régularité* du groupe de Galilée dans le groupe affine (son « *normalisateur* »).

1 P. 182, note 2.

Ce groupe est constitué des matrices $\begin{pmatrix} La & b & c \\ 0 & T & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où a,b,c,e désignent les mêmes objets que dans la *clé* 4, et où L et T désignent deux nombres non nuls. Le groupe de Galilée est le sous-groupe $L = T = 1$.

C'est la *liberté* Δ du groupe de Galilée dans le groupe affine qui va permettre de mesurer durées et distances. Δ peut se construire comme groupe commutatif des matrices $\begin{pmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; il agit par automorphismes sur le groupe de Galilée :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b\frac{T}{L} & c/L \\ 0 & 1 & e/T \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On écrit usuellement l'action de ces automorphismes en attribuant aux divers termes des « *équations aux dimensions* » : pour b ce sera une « vitesse » L/T ; pour c une « longueur » L ; pour e un « temps » T.

La procédure se prolonge à l'espèce *durée* (dimension T) et à l'espèce *distance* (dimension L). Elle se prolonge enfin aux *moments* (1). Alors il est intéressant d'introduire une « dimension de matérialité » A , reflétant la liberté de choix d'une « unité de moment » (2). Alors :

- A , c'est l'équation aux dimensions du *tournoiement* **l** (moment des rotations) ;
- la dimension de *l'énergie* **E** (moment des translations temporelles), c'est AT^{-1} ;
- celle du *passage* **f** (moment du groupe de Bruno), c'est ATL^{-1} ;
- pour *l'impulsion* **p** (moment des translations spatiales), c'est $A\,L^{-1}$;
- et pour la *masse* **m** (3), ATL^{-2}.

En fait la nature nous fournit une « *unité d'action* » : la *constante de Planck* $\hbar$, qu'on appelait à l'origine « *quantum d'action* » (voir *dans quel état,* pp. 153-155).
Elle en fournit aussi une pour la vitesse : la vitesse de la lumière c . Ainsi les modèles quantique et relativiste ramènent les équations aux dimensions au seul facteur T.

---

1 Un automorphisme d'un groupe agit sur le groupe, donc sur les fonctions réelles définies sur ce groupe ; il conserve l'élément neutre **e** ; s'il est différentiable, il agira donc sur les dérivées en **e** , c'est-à-dire sur les *moments* du groupe.

2 *A* s'appelle "action". Rien à voir avec une action de groupe ; c'est une allusion au "principe de moindre action", c'est-à-dire au c*alcul des variations.*

3 On la note M ; traditionnellement, on utilise les facteurs M , L et T ; alors l'équation aux dimensions de l'action s'écrit $A = M L^2 T^{-1}$.

(p. 192) ✯ (*clé 5 : géométrie classique de la matière*)

Les trois premières lignes de la formule universelle, qui concernent *l'énergie*, la *masse* et *l'impulsion*, peuvent s'écrire matriciellement sous la forme :

$$\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{p}\\ \mathbf{m}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & \bar{b}a & \frac{1}{2}\bar{b}b\\ 0 & a & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{p}\\ \mathbf{m}\end{pmatrix}.$$

Puisqu'il s'agit d'une action, les matrices : $g = \begin{pmatrix}1 & \bar{b}a & \frac{1}{2}\bar{b}b\\ 0 & a & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ forment un groupe ;

donc aussi les matrices $\begin{pmatrix}1 & \bar{b}a & \frac{1}{2}\bar{b}b & \phi\\ 0 & a & b & c\\ 0 & 0 & 1 & e\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, où intervient une nouvelle variable ϕ ;

voilà le ***groupe de Bargmann***, extension centrale du groupe de Galilée ([1]).

Alors la formule horrible de la page 192, c'est la géométrie des moments du groupe de Bargmann, qui transite obligeamment via le groupe de Galilée.

(p. 194) ✯ Le mouvement $\boldsymbol{J}_o$ choisi pour étudier le photon galiléen a pour régularité le groupe G_o des matrices de format (5,5) qui s'écrivent

$$\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0 & b_1 & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0 & b_2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & c_3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

La dimension de G_o est 4 ; celle du groupe de Galilée G est 10 ; voilà pourquoi chaque espèce "photon galiléen", difféomorphe à G/G_o, est de dimension 6 . Le groupe de Galilée G possède deux composantes, mais G_o est connexe. C'est ce qui permet à l'espèce "photon" de n'être pas connexe : la composante de $\boldsymbol{J}_o$, c'est celle des photons *droits* ; l'autre, celle des photons *gauches*.

Cette dimension et cette topologie sont les mêmes dans le cas du photon relativiste, celui qui progresse à la vitesse c et qui peut passer par toutes les couleurs.

(p.197) ✯ (*clé 6 : mouvement des planètes*)

Cette formule $Q = Q_o \times e^{(u-u_o)A}$ intègre les équations de Newton à partir de conditions initiales t_o, R_o, V_o *quelconques* et produit les lois de Kepler.

1 Extension par la variable réelle ϕ . Pour vérifier ces affirmations, il suffit de faire deux découpages différents de cette matrice.

On accède ainsi à l'espace des mouvements kepleriens.

C'est une variété symplectique de dimension 6, la ***variété de Kepler***, qu'on peut construire comme ***famille de moments du groupe O(4,2)*** ([1]).

Les *équations aux perturbations* de Lagrange sont écrites sur cette variété, et utilisent la structure symplectique ; elle est repérée par les « crochets » et « parenthèses » de Lagrange.

(p. 200) ✯ Les ***mouvements hyperboliques*** s'obtiennent avec un deuxième modèle ([2]) :

$$x = \cosh u - e \qquad y = \sqrt{e^2 - 1}\,\sinh u \qquad z = 0 \qquad t = e \sinh u - u$$

où l'excentricité e est plus grande que 1 et où les fonctions trigonométriques sont remplacées par des *fonctions hyperboliques*.

L'amateur d'analyse complexe pourra retrouver cette formule à partir du cas elliptique par la substitution $u \to iu$, $x \to -x$, $y \to -y$, $t \to -it$.

En faisant dans ce modèle N°2 la substitution un peu plus subtile ([3]) :

$u \to \varepsilon u$, $x \to \varepsilon^2 x$, $y \to \varepsilon^2 y$, $t \to \varepsilon^3 t$, $e \to 1 + \dfrac{\varepsilon^2}{2}$, avec $\varepsilon^4 = 0$, on obtient le modèle des ***mouvements paraboliques*** ($H = 0$) :

$$x = \frac{u^2 - 1}{2} \qquad y = u \qquad z = 0 \qquad t = \frac{u}{2} + \frac{u^3}{6}$$

l'unité de longueur associée est le *paramètre* de la parabole.

Les ***mouvements rectilignes*** s'obtiennent en faisant $e = 1$ dans les deux premiers modèles ; mais il faut en plus un dernier modèle :

$$x = \frac{u^2}{2} \qquad y = 0 \qquad z = 0 \qquad t = \frac{u^3}{6}$$

qui raconte l'écrasement d'une comète sur le Soleil à la date 0. Si elle ne rebondit pas, il faut réduire cette formule aux valeurs négatives de u.

---

1 J.M.Souriau, *Géométrie globale du problème à deux corps*», IUTAM-ISIMM Symposium on Modern Developments in Analytical Mechanics, Turin, 1982 - Atti Acad. Sc. Torino, 117, Suppl. , p.369-418 (1983).

2 L'énergie est positive, les unités sont choisies pour que H = 1.

3 Elle revient à travailler sur une *extension algébrique* du corps des nombres réels.

(p.201) ✯ *(clé 7 : relativité restreinte)*

Si on se donne un vecteur unitaire U dans $\mathbb{R}^3$, deux réels x et y, on vérifie que la matrice $\begin{pmatrix} 1+x\mathrm{U}\bar{\mathrm{U}} & \mathrm{U}y \\ \dfrac{y\bar{\mathrm{U}}}{c^2} & 1+x \end{pmatrix}$ appartient au groupe de Lorentz si $y^2 = c^2x(x+2)$; la formule à vérifier s'obtient en exprimant x, y et U en fonction de $b = \mathrm{U}y$, et en multipliant à droite par la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui appartient aussi au groupe de Lorentz.

(p.202) ✯ Nouvelle géométrie, celle du groupe de Poincaré, donc nouvelle classification des couples d'événements.

En plus des couples du *genre temps* (dont l'espèce est une durée) et de ceux du *genre espace* (dont l'espèce est une distance), il existe un nouveau genre, le *genre lumière*.

Pas de mesure de durée ni de distance pour ces couples-là : ils constituent une seule espèce.

(p. 208)✯ *(clé 8 : hasards)*

Par exemple, si X est un espace topologique compact, on choisira les fonctions continues ; on retrouve ainsi la notion usuelle de « mesure de probabilité » sur ces espaces (mesures positives de masse 1).

(p. 209) ✯ Limites pour la convergence uniforme sur chaque partie finie du groupe-aléa (*topologie produit*). Pour cette topologie, les hasards constituent le plus petit convexe fermé contenant les « certitudes ». Le théorème de Tikhonov montre que ce convexe est compact.

(p. 210) ✯ Ce qu'il faut noter, c'est que la *conjuguée* d'une fonction-test, le *produit* de deux fonctions-test sont encore des fonctions-tests : les analystes diront que l'espace des fonctions-tests est « une C*-algèbre commutative ».

Pour la topologie uniforme sur X, les tests constituent la C*-algèbre $\mathcal{A}$ engendrée par le groupe A . Chaque hasard possède un seul prolongement linéaire de A à $\mathcal{A}$; ce prolongement est une forme positive de norme 1.

---

1 Extension centrale : cela veut dire que le quotient du groupe de Bargmann par son centre est le groupe de Galilée.

2 Pour quelques détails voir : Jean-Marie Souriau, *STRUCTURE DES SYSTÈMES DYNAMIQUES*, (DUNOD 1969, BIRKHAUSER 1997).

3 Proton et antiproton ont des nombres baryoniques opposés, mais des masses égales.

TABLE

mode d’emploi 2

règle du jeu 3

I La nature et la science 5

théâtre de la nature 6
décor naturel 6
nature morte 6
extraits naturels 6
mise en scène 6

le temps de penser 7
plus universels les uns que les autres 7
la malle et les lingots 8
les noms et les parfums tournent dans l'air du soir 10

modéliser le monde 12
la loi de la gravitation est dure, mais c'est la Loi 12
le physicien, l'artiste, et leurs modèles 13
modèles modernes, antiques et contemporains 15

symétrie, perfection et harmonie 16
cinq éléments 16
la règle des règles 17

II où ? 20

les racines de l’espace 21
promenade dans le verre 21
le vide hypocrite 22
oublier pour créer 23
la loi des groupes 23
à l’action ! 25

initiation 28
l'apprenti sorcier 28
l'origine des espèces 29
la règle des règles 30

domicile de la matière 31
de la géométrie avant toute chose 31
le paradoxe du physicien 31
le secret des cristaux 33
les mystères de l'eau claire 34

les arts naturels 36
vertus de la vis 36
les lunettes de Spinoza 36
éloge de la soupière 37
l’art surnaturel des escargots 37
force et lumière 38

III quand ? 41

le temps retrouvé 42
Chronos 42
recommencer 42
ce soir à Samarcande 43
tout est mouvement 45
1584 : naissance de la relativité 46
en bateau 46
géométrie galiléenne 47
arts du temps 49
les jardins de Syracuse 49
mobilités 50
bonnes vibrations 52
IV matière et géométrie 54
vous avez dit « énergie » 54
énergies douces ? 54
bilan 55
je t'attendrai 56
matérialité géométrique 57
jeu de boules sur une péniche 58
il passe en tournoyant 59
matérialisme idéal 60
la boutique aux Atomes 63
pureté 63
ce modèle vous plaît ? 63
que la lumière soit 65
sucreries 65
révolution nécessaire … 66
Einstein est arrivé 67
nouvelle relativité 67
le choc des géométries 68
$E = m c^2$ 70
la nouvelle collection 72
couleurs des fruits mûrs 72
la nature des choses 74
la source et les ombres 74
coexistence 77
que la force soit avec nous 78
l'atelier de mécanique 79
le fil des ans 80
V du hasard au vertige 82

L'usure du temps 83
sans retour… 83
du flou… 83
en principe… 84
chaud et froid 86
inventer l'eau tiède 88
un lit chaud et douillet 89

Zodiaque 90
l'espace est glacial 90
ombres caverneuses 90
manèges dans le ciel 91
la vie au soleil 92
les terrasses de Carthage 92
soli soli soli () 93
le domaine des bêtes 94
gamme céleste 96
dissonances et résonances 98

VI macrocosmos 104

Au-delà des nuages 105
à l'œil nu 105
poussière de galaxies 106
nocturne 106
signature des atomes 107

pesanteur et dynamique 109
échapper à la pesanteur 109
les malheurs de Sophie 110
géométrie souple 111
chute souple 111
présence de la matière ? 112

dessiner la physique 116
Physis et attraction 118
apparition du Cosmos 119

nouvelle gravité 119
disparition de Vulcain 119
la lumière tombe 120

ça va chauffer 121
flèche fatale 122

histoire de l'Univers 124
l'Univers gravite 124
un peu de modestie 126
un passé en forme de poire 128
cosmogonie universelle 131
plus brûlant autrefois 132

géographie du Cosmos 134
Super-Galaxie 134
dessiner l'espace 135

VII inventer l'électricité 138

la foudre et l'aimant 139
naissance de l'électro-physique 140
neutralité planétaire 141
magnétisme cosmique ? 141

antimatière 142
frères ennemis 142
l'antimonde 143

VIII Microcosmos 144

atomes 145
vus de près 145
mystères quantiques 145

retour aux sources 146
les choses et le hasard 148
Orphée aux enfers 150

physique du minuscule 151
inauguration 151
au travail 152
dans quel état ? 153
évocation d'un spectre 155
surprises 156
jouer de l'ocarina 157
liens 159
neiges 161
ondes 162
poursuite 164
épilogue 165

clé 1 : groupes 168
les groupes, en mathématiques 168
construction standard 170
premiers exemples de groupes 170
sous - groupes 170
morphismes 171
sous les formules, la plage… 171

clé 2 : géométries 173
permutations 173
actions de groupe 173
espèces et régularités 174
enrichir une géométrie 175
retournons sur la plage… () 176

clé 3 : matrices 179

premières opérations sur les matrices 179
multiplications matricielles 180
groupe linéaire 182
transposition 182
matrices positives 183
groupe orthogonal 183
déterminants 184
un algorithme () ✯ 184
nombres-complexes 186
matrices-complexes 187
états d'un groupe 188

Clé 4 : temps et espace classiques 189

géométrie analytique 189
coexistence de l'espace et du temps 189
chronologie de l'espace-temps 189
géométrie galiléenne 190
pratiques galiléennes 190

clé 5 : géométrie classique de la matière 192

moments-galiléens 192
particules élémentaires 194
points matériels 194
particules à spin 195
photon galiléen 195

clé 6 : mouvement des planètes 197

de l'attraction à la gravitation 197
établir les lois de Kepler 199

clé 7 : relativité restreinte 202

groupe de Lorentz 202
groupe de Poincaré 203
d'une matérialité à l'autre 204
particules relativistes 206
photon relativiste 207

clé 8 : Calcul des hasards 209

des dés 209
aléas 209
hasards 210
valeurs moyennes 211
aléas et hasards composés 211
images de hasards 212
aléas et hasards harmoniques 212
hasards gaussiens 213

clé 9 : cosmologie 214

modèle de Friedmann 214
sphère céleste 215
dessiner et remplir l'espace courbe 215

clé zéro : calcul de pi 218

liens du chapitre I : la nature et la science 222

liens du chapitre II : Où ? 223
jouons dans l'espace… 224
liens du chapitre III : quand ? 227
liens du chapitre IV : matière et géométrie 228
liens du chapitre V : du hasard au vertige 232
répartition des planètes 236
Zeus 238
Saturne, seigneur des Anneaux 238
liens du Chapitre VI : macrocosmos 240
liens du chapitre VII : microcosmos 253
liens des pages jaunes 259
(p. 173) ✭ (clé 2 : géométries) 259
(p. 182) ✭ (clé 3 : matrices) 259