

L'Homologie persistante

Appliquée à la reconnaissance de formes

Mathieu Vallée

Objectifs

Contexte:

On a des données sous la forme de nuage de points, on veut trouver sur quelles courbes, surfaces, formes elles se répartissent.

Contexte:

On a des données sous la forme de nuage de points, on veut trouver sur quelles courbes, surfaces, formes elles se répartissent.

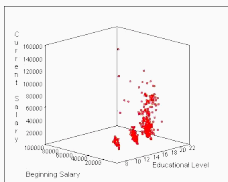


Figure 1: Graphique en 3D représentant le salaire actuel en fonction du premier salaire et du niveau d'éducation de différents individus.

Objectifs

Contexte:

On a des données sous la forme de nuage de points, on veut trouver sur quelles courbes, surfaces, formes elles se répartissent.

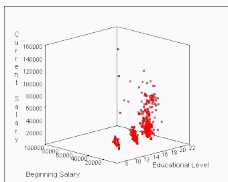


Figure 1: Graphique en 3D représentant le salaire actuel en fonction du premier salaire et du niveau d'éducation de différents individus.

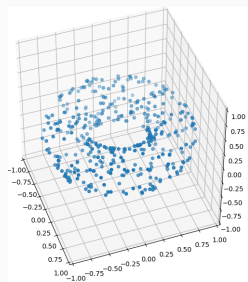


Figure 2: Un tore en 3D

Objectifs:

Problème

Trouver une méthode permettant de savoir sur quelles formes reposent ces nuages de points

Objectifs:

Problème

Trouver une méthode permettant de savoir sur quelles formes reposent ces nuages de points

Objectif

Programmer un algorithme permettant de déterminer la forme d'un nuage de points

Topologie algébrique

La topologie algébrique

Outil mathématique permettant de trier les formes selon des classes d'équivalence.

La topologie algébrique

Outil mathématique permettant de trier les formes selon des classes d'équivalence. Deux formes appartiennent à la même classe d'équivalence si l'on peut passer continuellement de l'une à l'autre (ssi elles sont *homéomorphes*).

La topologie algébrique

Outil mathématique permettant de trier les formes selon des classes d'équivalence. Deux formes appartiennent à la même classe d'équivalence si l'on peut passer continuellement de l'une à l'autre (ssi elles sont *homéomorphes*).

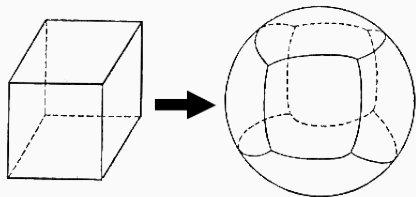


Figure 3: On peut passer continuellement de la surface d'un cube à celle d'une sphère

La topologie algébrique

Outil mathématique permettant de trier les formes selon des classes d'équivalence. Deux formes appartiennent à la même classe d'équivalence si l'on peut passer continuellement de l'une à l'autre (ssi elles sont *homéomorphes*).

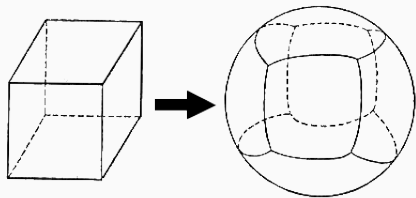


Figure 3: On peut passer continuellement de la surface d'un cube à celle d'une sphère

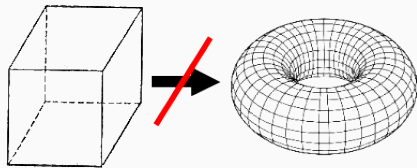


Figure 4: On ne peut pas passer continuellement de la surface d'un cube à la surface d'un tore

L'homologie simpliciale

L'homologie simpliciale

Objectifs

On veut créer des invariants tels que 2 objets homéomorphes aient les mêmes invariants.

L'homologie simpliciale

Objectifs

On veut créer des invariants tels que 2 objets homéomorphes aient les mêmes invariants.

Problème:

Jusqu'à maintenant on a seulement raisonné sur des formes continues: on ne peut pas implémenter d'algorithme gérant ce genre d'objet sans passer par une discrétisation.

L'homologie simpliciale

Objectifs

On veut créer des invariants tels que 2 objets homéomorphes aient les mêmes invariants.

Problème:

Jusqu'à maintenant on a seulement raisonné sur des formes continues: on ne peut pas implémenter d'algorithme gérant ce genre d'objet sans passer par une discrétisation.

Idée

Utiliser ce qu'on appelle un complexe simplicial pour représenter un objet continu.

L'homologie simpliciale

Objectifs

On veut créer des invariants tels que 2 objets homéomorphes aient les mêmes invariants.

Problème:

Jusqu'à maintenant on a seulement raisonné sur des formes continues: on ne peut pas implémenter d'algorithme gérant ce genre d'objet sans passer par une discrétisation.

Idée

Utiliser ce qu'on appelle un complexe simplicial pour représenter un objet continu.

Proposition

Une forme est homéomorphe à un complexe simplicial.

L'homologie simpliciale

Objectifs

On veut créer des invariants tels que 2 objets homéomorphes aient les mêmes invariants.

Problème:

Jusqu'à maintenant on a seulement raisonné sur des formes continues: on ne peut pas implémenter d'algorithme gérant ce genre d'objet sans passer par une discrétisation.

Idée

Utiliser ce qu'on appelle un complexe simplicial pour représenter un objet continu.

Proposition

Une forme est homéomorphe à un complexe simplicial.

Ainsi si on définit des invariants sur les complexes simpliciaux, on les aura définis exactement pour les formes.

Définition (Simplexes)

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $i \leq n$, un i -simplexe est l'enveloppe convexe de $i+1$ points de \mathbb{R}^n . Si α est un i -simplexe alors $\dim \alpha = i$

L'homologie simpliciale

Définition (Simplexes)

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $i \leq n$, un i -simplexe est l'enveloppe convexe de $i+1$ points de \mathbb{R}^n . Si α est un i -simplexe alors $\dim \alpha = i$

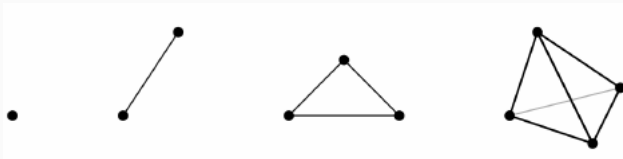


Figure 5: De gauche à droite un 0 -simplexe (un point), un 1 -simplexe (une arête), un 2 -simplexe (un triangle) et enfin un 3 -simplexe (un tétraèdre).

L'homologie simpliciale

Définition (Simplexes)

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $i \leq n$, un i -simplexe est l'enveloppe convexe de $i+1$ points de \mathbb{R}^n . Si α est un i -simplexe alors $\dim \alpha = i$

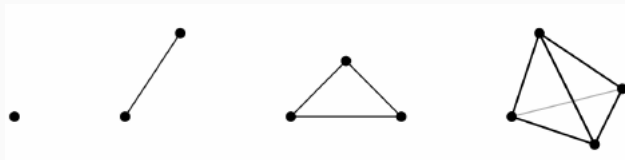


Figure 5: De gauche à droite un 0 -simplexe (un point), un 1 -simplexe (une arête), un 2 -simplexe (un triangle) et enfin un 3 -simplexe (un tétraèdre).

Remarque

Un n -simplexe contient des $(n-1)$ -simplexes

Définition (Complexe simplicial)

Un complexe simplicial \mathcal{K} est un ensemble de simplexes vérifiant la propriété suivante:

$$\forall \alpha \in \mathcal{K}, \forall \beta \subset \alpha, \beta \in \mathcal{K}$$

L'homologie simpliciale

Définition (Complexe simplicial)

Un complexe simplicial \mathcal{K} est un ensemble de simplexes vérifiant la propriété suivante:

$$\forall \alpha \in \mathcal{K}, \forall \beta \subset \alpha, \beta \in \mathcal{K}$$

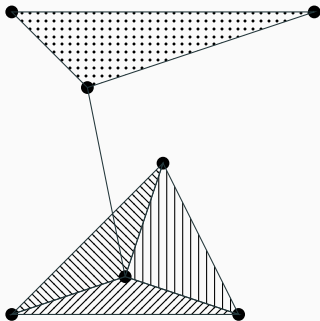


Figure 6: Un complexe simplicial de dimension 2.

Définition (Homologie simpliciale)

Soit \mathcal{K} un complexe simplicial, on construit des espaces vectoriels $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \dots$ appelés groupes d'homologie.

Définition (Homologie simpliciale)

Soit \mathcal{K} un complexe simplicial, on construit des espaces vectoriels $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \dots$ appelés groupes d'homologie.

Définition (Nombre de Betti)

Soit \mathcal{K} un complexe simplicial, on appelle n -ème nombre de Betti et on note $\beta_n = \dim \mathcal{H}_n$. Les nombres de Betti représentent le nombre de n -classe d'homologie:

Définition (Homologie simpliciale)

Soit \mathcal{K} un complexe simplicial, on construit des espaces vectoriels $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \dots$ appelés groupes d'homologie.

Définition (Nombre de Betti)

Soit \mathcal{K} un complexe simplicial, on appelle n -ème nombre de Betti et on note $\beta_n = \dim \mathcal{H}_n$. Les nombres de Betti représentent le nombre de n -classe d'homologie:

- β_0 : nombre de composantes connexes

Définition (Homologie simpliciale)

Soit \mathcal{K} un complexe simplicial, on construit des espaces vectoriels $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \dots$ appelés groupes d'homologie.

Définition (Nombre de Betti)

Soit \mathcal{K} un complexe simplicial, on appelle n -ème nombre de Betti et on note $\beta_n = \dim \mathcal{H}_n$. Les nombres de Betti représentent le nombre de n -classe d'homologie:

- β_0 : nombre de composantes connexes
- β_1 : nombre de courbes fermées non bouchées par une surface

Définition (Homologie simpliciale)

Soit \mathcal{K} un complexe simplicial, on construit des espaces vectoriels $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \dots$ appelés groupes d'homologie.

Définition (Nombre de Betti)

Soit \mathcal{K} un complexe simplicial, on appelle n -ème nombre de Betti et on note $\beta_n = \dim \mathcal{H}_n$. Les nombres de Betti représentent le nombre de n -classe d'homologie:

- β_0 : nombre de composantes connexes
- β_1 : nombre de courbes fermées non bouchées par une surface
- $\beta_n, (n > 1)$ même chose mais en dimension supérieure...

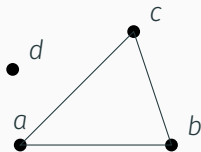


Figure 7: Pour ce complexe simplicial de dimension 2: $\beta_0 = 2$ et $\beta_1 = 1$

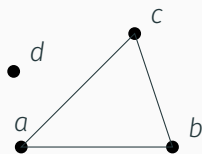


Figure 7: Pour ce complexe simplicial de dimension 2: $\beta_0 = 2$ et $\beta_1 = 1$

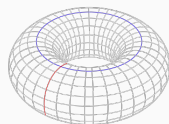


Figure 8: Pour le tore: $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2$ et $\beta_2 = 1$

Problème:

Pour pouvoir utiliser l'homologie simpliciale sur notre nuage de points, on doit lui attribuer un complexe simplicial.

Problème:

Pour pouvoir utiliser l'homologie simpliciale sur notre nuage de points, on doit lui attribuer un complexe simplicial.

Idée:

Créer à la main les simplexes à partir du nuage de points.

Problème:

Pour pouvoir utiliser l'homologie simpliciale sur notre nuage de points, on doit lui attribuer un complexe simplicial.

Idée:

Créer à la main les simplexes à partir du nuage de points.

Problème:

Comment procéder pour construire ces simplexes?

Complexe de Vietoris-Ripps

Idée:

Créer les n -simplexes ($n \in \mathbb{N}$) si tout les points leurs appartenant sont à une distance ϵ les uns des autres inférieure à un certain rayon caractéristique ϵ_0 .

Idée:

Créer les n -simplexes ($n \in \mathbb{N}$) si tout les points leurs appartenant sont à une distance ϵ les uns des autres inférieure à un certain rayon caractéristique ϵ_0 .

Complexe de Vietoris-Ripps

Idée:

Créer les n -simplexes ($n \in \mathbb{N}$) si tout les points leurs appartenant sont à une distance ϵ les uns des autres inférieure à un certain rayon caractéristique ϵ_0 .

Définition (Complexe de Vietoris-Ripps)

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit \mathcal{P} un nuage de points de \mathbb{R}^n , soit $\epsilon \in \mathbb{R}_+$. On définit le complexe de Vietoris-Ripps $\mathcal{K}_\epsilon^{V-R}$ comme tel:

Pour tout $i \in \{2, \dots, n+1\}$, pour toute famille $\{p_0, \dots, p_i\}$ de points 2 à 2 distincts de \mathcal{P} , si $\forall j, k \in \{0, \dots, i\}, j \neq k, d(p_j, p_k) < \epsilon$, alors $\{p_0, \dots, p_i\} \in \mathcal{K}_\epsilon^{V-R}$

Complexe de Vietoris-Ripps

Idée:

Créer les n -simplexes ($n \in \mathbb{N}$) si tout les points leurs appartenant sont à une distance ϵ les uns des autres inférieure à un certain rayon caractéristique ϵ_0 .

Définition (Complexe de Vietoris-Ripps)

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit \mathcal{P} un nuage de points de \mathbb{R}^n , soit $\epsilon \in \mathbb{R}_+$. On définit le complexe de Vietoris-Ripps $\mathcal{K}_\epsilon^{V-R}$ comme tel:

Pour tout $i \in \{2, \dots, n+1\}$, pour toute famille $\{p_0, \dots, p_i\}$ de points 2 à 2 distincts de \mathcal{P} , si $\forall j, k \in \{0, \dots, i\}, j \neq k, d(p_j, p_k) < \epsilon$, alors $\{p_0, \dots, p_i\} \in \mathcal{K}_\epsilon^{V-R}$

En fonction de la densité de points et pour une certaine distance, on pourrait se rapprocher d'un complexe simplicial ressemblant à cette dite forme.

Complexe de Vietoris-Ripps

Rappel

- $\beta_0 = \dim \mathcal{H}_0 =$ nombre de les composantes connexes
- $\beta_1 = \dim \mathcal{H}_1 =$ nombre de courbes fermées non bouchées par une surface

étape || β_0 | β_1

Figure 9: Construction du complexes de Vietoris-Ripps et calcul des nombres de Betti.

Complexe de Vietoris-Ripps

Rappel

- $\beta_0 = \dim \mathcal{H}_0 =$ nombre de les composantes connexes
- $\beta_1 = \dim \mathcal{H}_1 =$ nombre de courbes fermées non bouchées par une surface

étape	β_0	β_1
1	1	0

a



Figure 9: Construction du complexes de Vietoris-Ripps et calcul des nombres de Betti.

Complexe de Vietoris-Ripps

Rappel

- $\beta_0 = \dim \mathcal{H}_0 =$ nombre de les composantes connexes
- $\beta_1 = \dim \mathcal{H}_1 =$ nombre de courbes fermées non bouchées par une surface

a
●

b
●

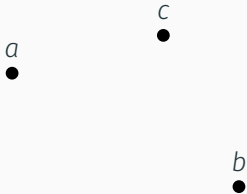
étape	β_0	β_1
1	1	0
2	2	0

Figure 9: Construction du complexes de Vietoris-Ripps et calcul des nombres de Betti.

Complexe de Vietoris-Ripps

Rappel

- $\beta_0 = \dim \mathcal{H}_0 =$ nombre de les composantes connexes
- $\beta_1 = \dim \mathcal{H}_1 =$ nombre de courbes fermées non bouchées par une surface



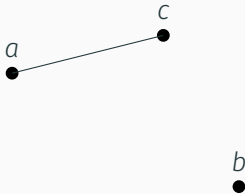
étape	β_0	β_1
1	1	0
2	2	0
3	3	0

Figure 9: Construction du complexes de Vietoris-Ripps et calcul des nombres de Betti.

Complexe de Vietoris-Ripps

Rappel

- $\beta_0 = \dim \mathcal{H}_0 =$ nombre de les composantes connexes
- $\beta_1 = \dim \mathcal{H}_1 =$ nombre de courbes fermées non bouchées par une surface



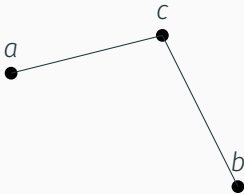
étape	β_0	β_1
1	1	0
2	2	0
3	3	0
4	2	0

Figure 9: Construction du complexes de Vietoris-Ripps et calcul des nombres de Betti.

Complexe de Vietoris-Ripps

Rappel

- $\beta_0 = \dim \mathcal{H}_0 =$ nombre de les composantes connexes
- $\beta_1 = \dim \mathcal{H}_1 =$ nombre de courbes fermées non bouchées par une surface



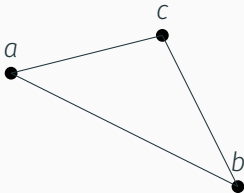
étape	β_0	β_1
1	1	0
2	2	0
3	3	0
4	2	0
5	1	0

Figure 9: Construction du complexes de Vietoris-Ripps et calcul des nombres de Betti.

Complexe de Vietoris-Ripps

Rappel

- $\beta_0 = \dim \mathcal{H}_0 =$ nombre de les composantes connexes
- $\beta_1 = \dim \mathcal{H}_1 =$ nombre de courbes fermées non bouchées par une surface



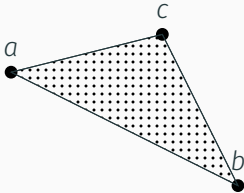
étape	β_0	β_1
1	1	0
2	2	0
3	3	0
4	2	0
5	1	0
6	1	1

Figure 9: Construction du complexes de Vietoris-Ripps et calcul des nombres de Betti.

Complexe de Vietoris-Ripps

Rappel

- $\beta_0 = \dim \mathcal{H}_0 =$ nombre de les composantes connexes
- $\beta_1 = \dim \mathcal{H}_1 =$ nombre de courbes fermées non bouchées par une surface



étape	β_0	β_1
1	1	0
2	2	0
3	3	0
4	2	0
5	1	0
6	1	1
6(bis)	1	0

Figure 9: Construction du complexes de Vietoris-Ripps et calcul des nombres de Betti.

Problème:

Trouver la bonne distance caractéristique.

Problème:

Trouver la bonne distance caractéristique.

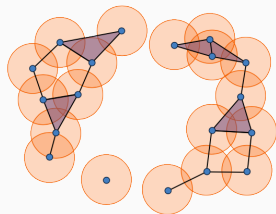


Figure 10: Rayon choisi trop faible.

Problème:

Trouver la bonne distance caractéristique.

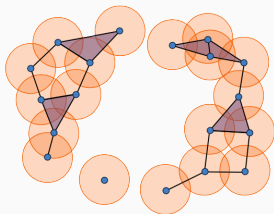


Figure 10: Rayon choisi trop faible.

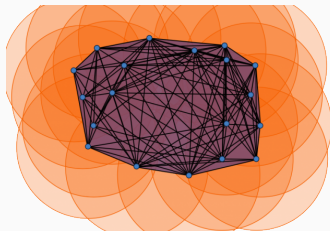


Figure 11: Rayon choisi trop grand.

L'homologie persistante

Principe de l'homologie persistante:

- Construire les $(\mathcal{K}_\epsilon^{V-R})_{\epsilon>0}$

Principe de l'homologie persistante:

- Construire les $(\mathcal{K}_\epsilon^{V-R})_{\epsilon>0}$
- Calculer l'homologie de chaque complexe de cette famille

Principe de l'homologie persistante:

- Construire les $(\mathcal{K}_\epsilon^{V-R})_{\epsilon>0}$
- Calculer l'homologie de chaque complexe de cette famille
- On observera alors l'apparition et la disparition de classes d'homologie quand ϵ augmente

L'algorithme:

- On part du nuage de points avec $\epsilon = 0$

L'algorithme:

- On part du nuage de points avec $\epsilon = 0$
- On augmente ϵ et on ajoute au fur et à mesure dans une liste *splx* les simplexes créés dans le complexe de Ripps

L'algorithme:

- On part du nuage de points avec $\epsilon = 0$
- On augmente ϵ et on ajoute au fur et à mesure dans une liste *splx* les simplexes créés dans le complexe de Ripps
- On crée la matrice D_{∂} de l'application bord définie comme telle:

L'homologie persistante

L'algorithme:

- On part du nuage de points avec $\epsilon = 0$
- On augmente ϵ et on ajoute au fur et à mesure dans une liste *splx* les simplexes créés dans le complexe de Ripps
- On crée la matrice D_{∂} de l'application bord définie comme telle:

$$D_{\partial}[j, i] := \begin{cases} 1 & \text{si le simplexe } j \text{ est une face du simplexe } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Où i représente le i -ème simplexe de la liste *splx*

L'homologie persistante

L'algorithme:

- On part du nuage de points avec $\epsilon = 0$
- On augmente ϵ et on ajoute au fur et à mesure dans une liste *splx* les simplexes créés dans le complexe de Ripps
- On crée la matrice D_{∂} de l'application bord définie comme telle:

$$D_{\partial}[j, i] := \begin{cases} 1 & \text{si le simplexe } j \text{ est une face du simplexe } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Où i représente le i -ème simplexe de la liste *splx*

- On agit ensuite sur la matrice D en suivant un algorithme qui permet de faire correspondre les simplexes qui créent une classe d'homologie avec ceux qui la détruisent -> construire les "paires de persistance"

Résultats

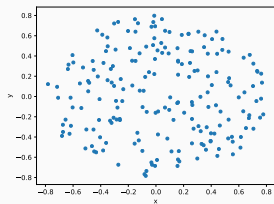


Figure 12: Nuage de 200 points représentant un disque.

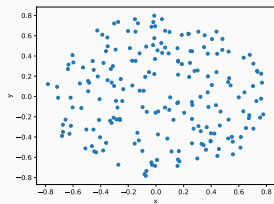


Figure 12: Nuage de 200 points représentant un disque.

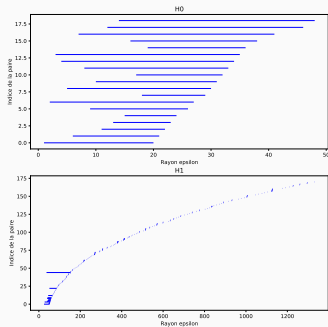


Figure 13: Diagramme de persistance de ce nuage de points.

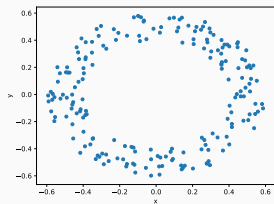


Figure 14: Nuage de 200 points représentant un annulus.

Résultats, en 2D

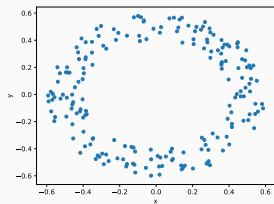


Figure 14: Nuage de 200 points représentant un annulus.

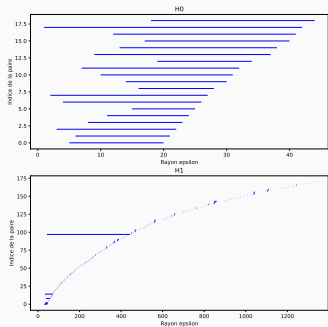


Figure 15: Diagramme de persistance de ce nuage de points.

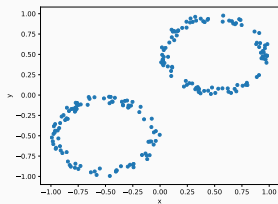


Figure 16: Nuage de 200 points représentant deux annulus.

Résultats, en 2D

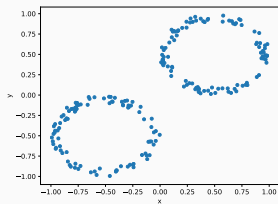


Figure 16: Nuage de 200 points représentant deux annulus.

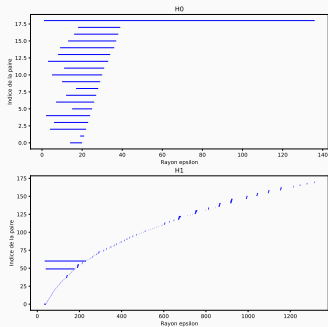


Figure 17: Diagramme de persistance de ce nuage de points.

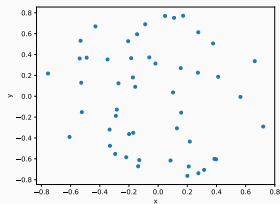


Figure 18: Nuage de 50 points représentant un disque.

Résultats, en 2D

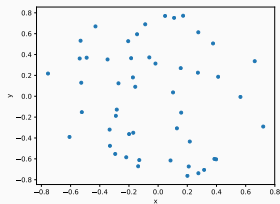


Figure 18: Nuage de 50 points représentant un disque.

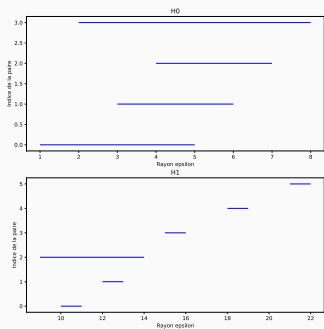


Figure 19: Diagramme de persistance de ce nuage de points.

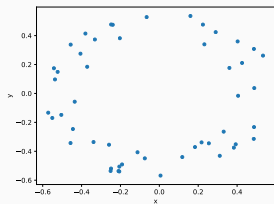


Figure 20: Nuage de 50 points représentant un annulus.

Résultats, en 2D

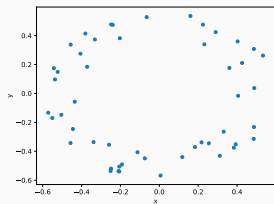


Figure 20: Nuage de 50 points représentant un annulus.

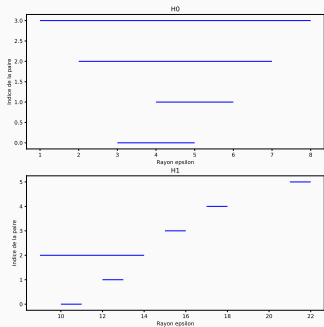


Figure 21: Diagramme de persistance de ce nuage de points.

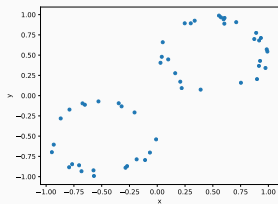


Figure 22: Nuage de 50 points représentant deux annulus.

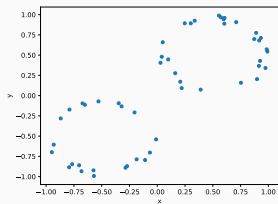


Figure 22: Nuage de 50 points représentant deux annulus.

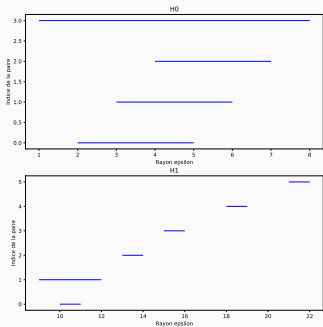


Figure 23: Diagramme de persistance de ce nuage de points.

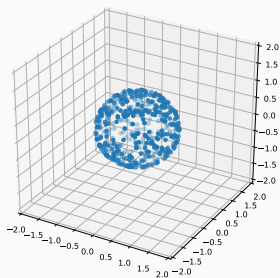


Figure 24: Nuage de 500 points représentant la surface d'une sphère.

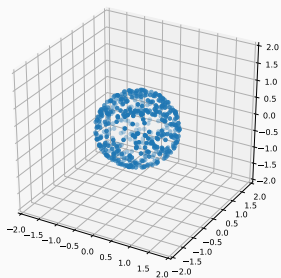


Figure 24: Nuage de 500 points représentant la surface d'une sphère.

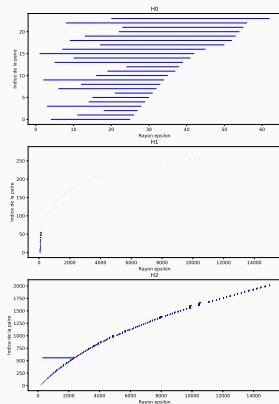


Figure 25: Diagramme de persistance de ce nuage de points.

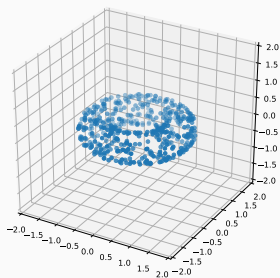


Figure 26: Nuage de 500 points représentant la surface d'un tore.

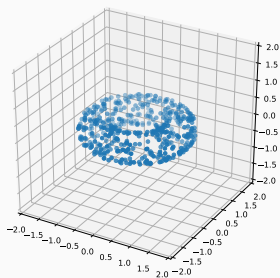


Figure 26: Nuage de 500 points représentant la surface d'un tore.

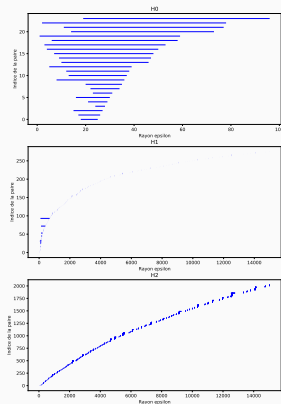


Figure 27: Diagramme de persistance de ce nuage de points.

Conclusion

Objectifs remplis:

Objectifs remplis:

- Différencier deux formes discrétisées en nuage de points en 2D

Objectifs remplis:

- Différencier deux formes discrétisées en nuage de points en 2D
- Rapidité d'exécution

Objectifs remplis:

- Différencier deux formes discrétisées en nuage de points en 2D
- Rapidité d'exécution

Limites:

Objectifs remplis:

- Différencier deux formes discrétisées en nuage de points en 2D
- Rapidité d'exécution

Limites:

- Résultats peu concluants en 3D

Objectifs remplis:

- Différencier deux formes discrétisées en nuage de points en 2D
- Rapidité d'exécution

Limites:

- Résultats peu concluants en 3D
- Liées à la théorie mathématique

Objectifs remplis:

- Différencier deux formes discrétisées en nuage de points en 2D
- Rapidité d'exécution

Limites:

- Résultats peu concluants en 3D
- Liées à la théorie mathématique
- Limite nombre de points, trop long à s'exécuter en non pré-compilé.

Questions?

Définition théorique de l'homologie simpliciale

Définition (Chaîne)

Soit \mathcal{K} un complexe simplicial, notons $(\mathcal{K}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des ensembles des n -simplexes de \mathcal{K} .

Soit $i \in \mathbb{N}$, On appelle i -chaîne une combinaison linéaire de i -simplexes à coefficients dans un corps \mathbb{K} .

Notons $C_i(\mathcal{K})$ le \mathbb{K} -espace vectoriel généré par \mathcal{K}_i . Si on a une chaîne $c \in C_i(\mathcal{K})$ alors il existe $(c_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{K}_i} \in \mathbb{K}^{\mathcal{K}_i}$ tel que $c = \sum_{\alpha \in \mathcal{K}_i} c_\alpha \alpha$.

Définition (Face d'un simplexe)

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $\alpha \in \mathcal{K}_n$, $\alpha = \{x_0, \dots, x_n\}$. On pose pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$,

$$\partial_n^i \alpha = \alpha \setminus \{x_i\} = \{x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\}$$

On l'appelle la face numéro i de α

Définition théorique de l'homologie simpliciale

Définition (Application bord)

On définit l'application bord $\partial_n : C_n(\mathcal{K}) \rightarrow C_{n-1}(\mathcal{K})$ comme tel:

$$\forall \alpha \in C_n(\mathcal{K}), \partial \alpha = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_n^i \alpha$$

Proposition (admise)

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$$

Définition théorique de l'homologie simpliciale

Autrement dit

$$\text{Im}(\partial_n) \subset \text{Ker}(\partial_{n-1})$$

Définition (Groupe d'homologie)

On définit le n -ème groupe d'homologie \mathcal{H}_n de \mathcal{K} comme tel:

$$\mathcal{H}_n(\mathcal{K}) = \text{un supplémentaire de } \text{Im}(\partial_{n+1}) \text{ dans } \text{Ker}(\partial_n)$$

Complexité spatiale du complexe de Vietoris-Ripps

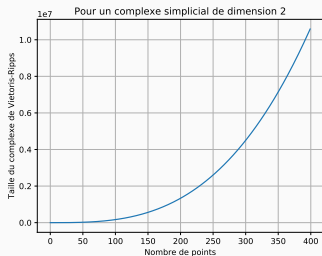


Figure 28: Nombre de simplexes en fonction du nombre de points en dimension 2.

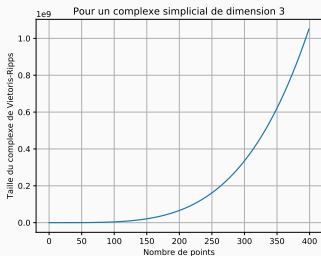


Figure 29: Nombre de simplexes en fonction du nombre de points en dimension 3.

Méthode:

Dans la pratique on utilisera un autre type de complexe simplicial.

Lazy Witness Complex

Définition (Witness Complex)

Soit $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ un nuage de k points et $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}$ un sous-ensemble de l points de \mathcal{P} . Soit d une distance sur \mathbb{R}^n . En fixant $v \leq l$, la filtration pour le Witness Complex $\mathcal{F} = \{\mathcal{W}_\epsilon^v, \epsilon > 0\}$ de \mathcal{P} est telle que:
Pour $k \leq n$, l'ensemble de points $\{p_0, \dots, p_k\} \subset \mathcal{L}$ est un k -simplexe de \mathcal{W}_ϵ^v si il existe $q \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{L}$ tel que

$$\max_{0 \leq i \leq k} d(p_i, q) \leq \epsilon + \delta_v$$

où δ_v est la v -ème plus petite distance entre q et un point de \mathcal{L}

Remarque

$$\epsilon' > \epsilon \Rightarrow \mathcal{W}_\epsilon^v \subseteq \mathcal{W}_{\epsilon'}^v$$

Lazy Witness Complex

Définition (Lazy Witness Complex)

C'est une adaptation du Witness Complex qui va utiliser le fait qu'un simplexe est dans le complexe si ses faces sont toutes dans le complexe. Un couple p_0, p_1 de points décrit une arête du complexe si il existe $q \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{L}$ tel que

$$\max\{d(p_0, q), d(p_1, q)\} \leq \epsilon + \delta_v$$

Les simplexes de dimension supérieure seront alors dans le complexe si leurs faces le sont.

Reduction de la matrice de l'application bord

On définit $low(i)$ comme étant le numéro de la ligne avec le dernier 1 dans la colonne i de \mathbf{D}_∂ ou 0 si la colonne est nulle. Au cours de l'algorithme, $low(i)$ représentera le simplexe auquel se "réfère" actuellement σ_i .

Algorithm 1 Réduction(\mathbf{D}_∂)

```
1:  $\mathbf{R} = \mathbf{D}_\partial$ 
2: for  $j = 0 \rightarrow N$  do
3:   while il existe  $j_0 < j$  tel que  $low(j_0) = low(j)$  do
4:      $\mathbf{R}[:,j] = \mathbf{R}[:,j] + \mathbf{R}[:,j_0] \bmod 2$ 
5:   end while
6: end for
```
