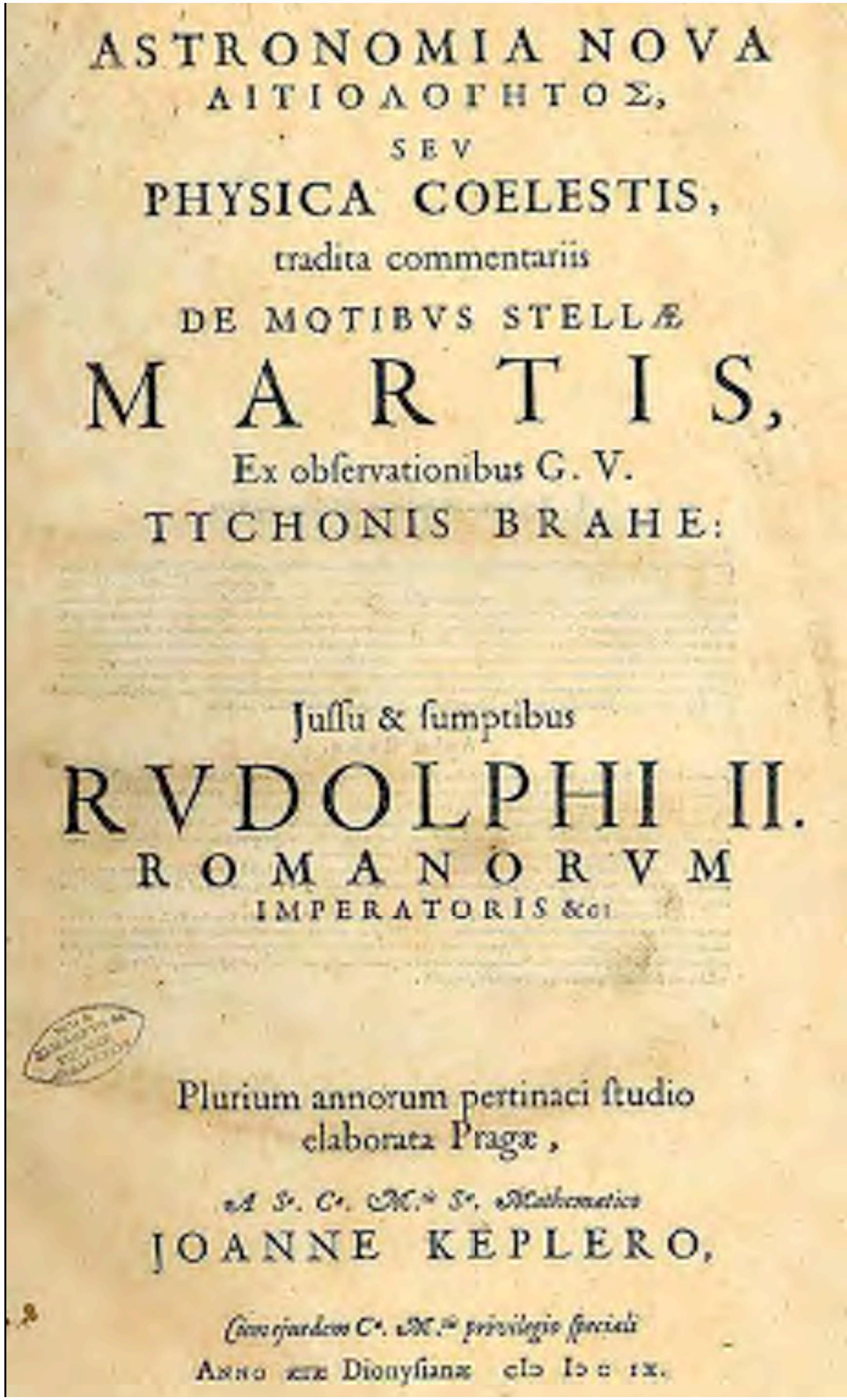
# LE PROBLÈME DES TROIS CORPS



ASTRONOMIA NOVA
ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΤΟΣ,
SEV
PHYSICA COELESTIS,
tradita commentariis
DE MOTIBVS STELLÆ
MARTIS,
Ex obſervationibus G. V.
TYCHONIS BRAHE:

Juſſu & ſumptibus
RVDOLPHI II.
ROMANORVM
IMPERATORIS &c:

Plurium annorum pertinaci ſtudio
elaborata Pragæ,

A S^e. C^e. M.^tis S^e. Mathematico
JOANNE KEPLERO,

Cum ejusdem C^e. M.^tis privilegio ſpeciali
Anno æræ Dionyſianæ cIↃ IↃ c IX.



TYCHONIS BRAHE

ASTRONOMIÆ INSTAURATÆ MECHANICA

SVSPICIENDO

DESPICIO

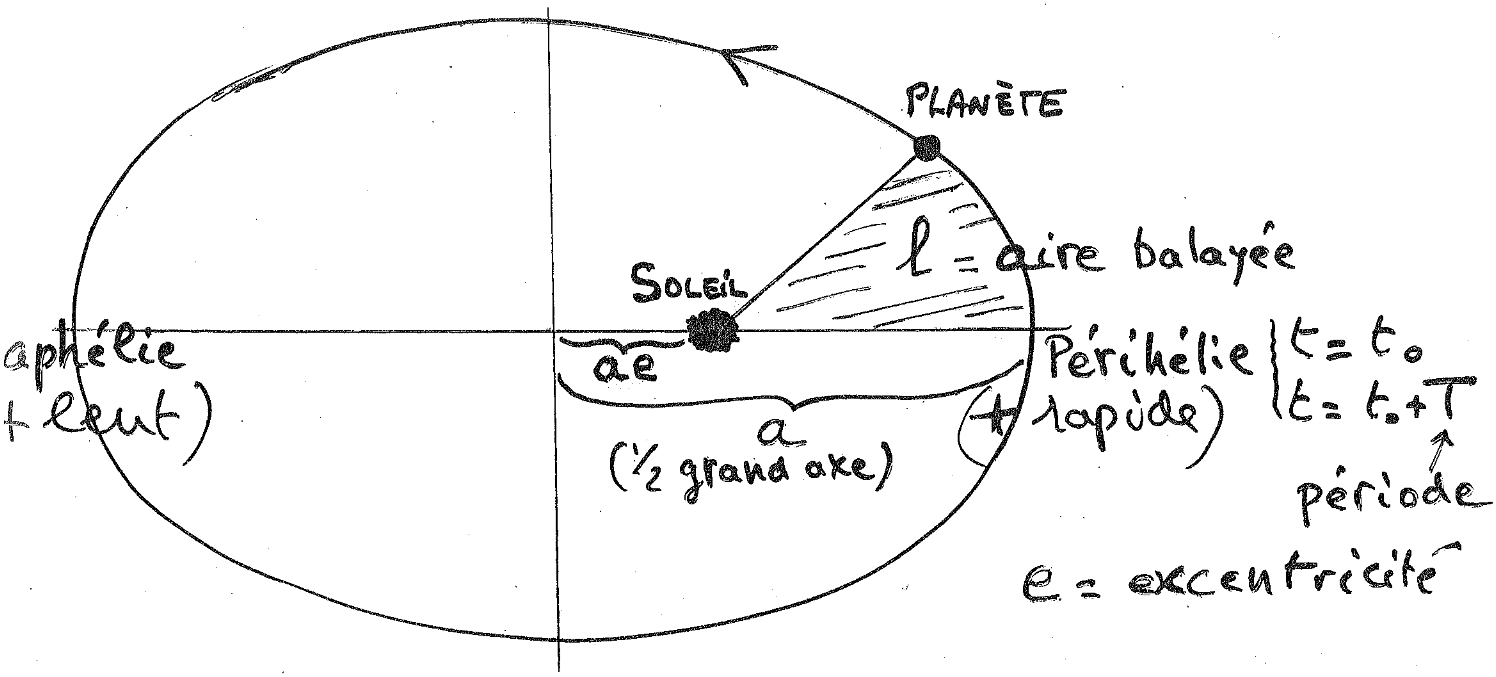
WANDESBVRGI

ANNO

CIƆ. IƆ. IIC.

*Cum Cæsaris & Regum quorundam Privilegiis.*

# KEPLER




**Loi 1 :** ELLIPSES

**Loi 2 :** ℓ proportionnelle au temps t

ASTRONOMIA NOVA 1609

**Loi 3 :** $T^2$ proportionnelle à $a^3$

HARMONICE MUNDI 1619

Portrait de Galilée peint par Justus Sustermans en 1636.

DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
*intorno à due nuoue ſcienze*
Attenenti alla
MECANICA & I MOVIMENTI LOCALI,
*del Signor*
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filoſofo e Matematico primario del Sereniſſimo
Grand Duca di Toſcana.
*Con vna Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.*


IN LEIDA,
Appreſſo gli Elſevirii. M. D. C. XXXVIII.

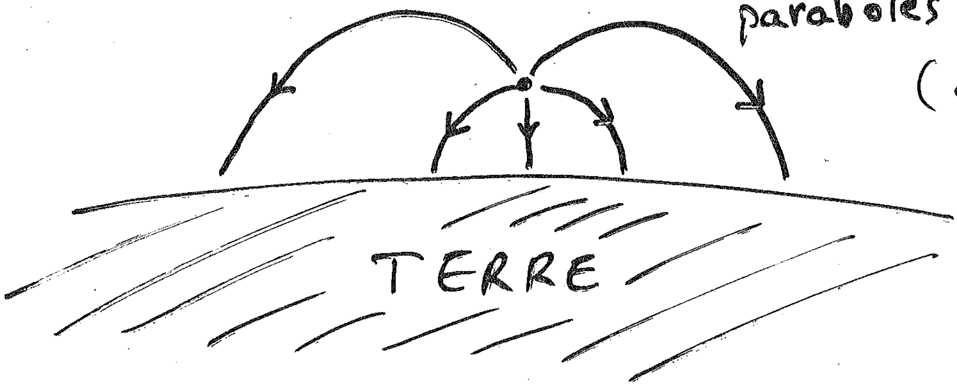
# GALILÉE

LAGRANGE : "La dynamique est la science des forces accélératrices ou retardatrices et des mouvemens variés qu'elles doivent produire. Cette science est due entièrement aux modernes, et Galilée est celui qui en a jeté les premiers fondemens" (in Mec. Anal. I, 221).

## Chute des corps sur la terre

paraboles

(accélération constante)

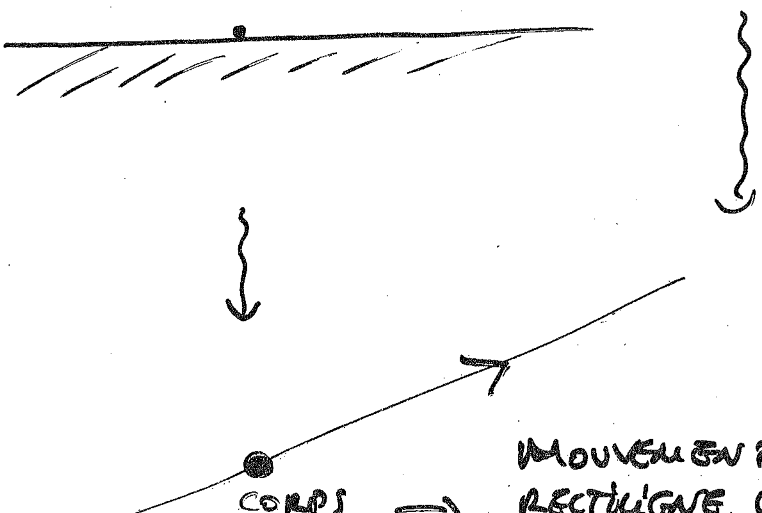



~~1638~~

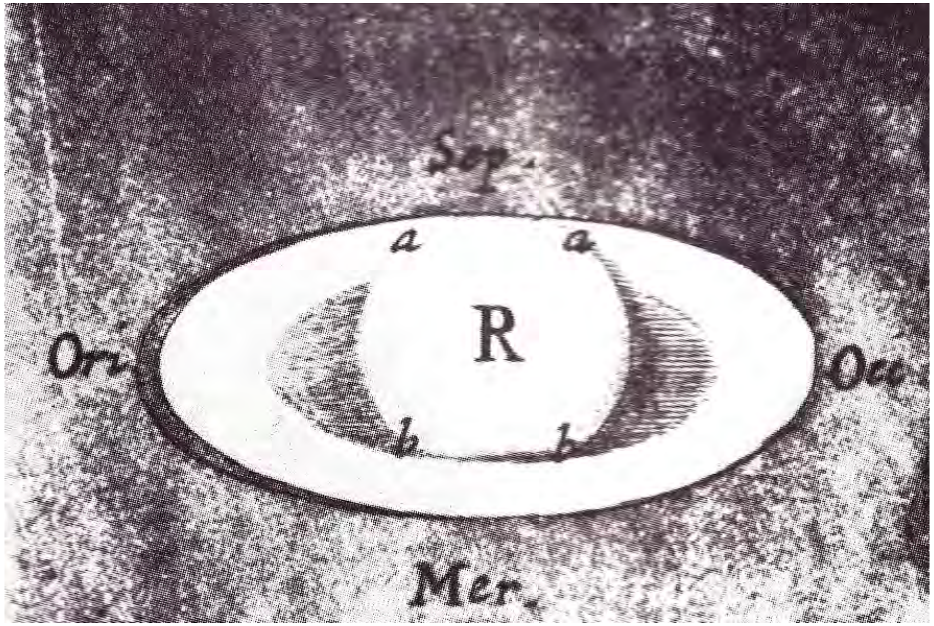
DISCORSI E DIMOSTRAZIONI MATEMATICHE INTORNO A DUE NUOVE SCIENZE

## Principe d'inertie

GALILÉE 1638
GASSENDI 1640
TORRICELLI 1644
DESCARTES 1644



CORPS ISOLÉ ⟹ MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME




ROBERT HOOKE : Observation of Saturn rings, 1666

PHILOSOPHIÆ

NATURALIS

PRINCIPIA

MATHEMATICA.

Autore *JS. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc.* Mathefeos Profeffore *Lucafiano,* & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.

S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.

*Julii* 5. 1686.

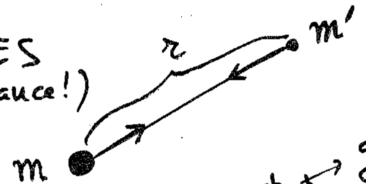
*LONDINI,*

Juffu *Societatis Regiæ* ac Typis *Jofephi Streater.* Proftat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

# NEWTON

## Attraction universelle    PRINCIPIA 1687

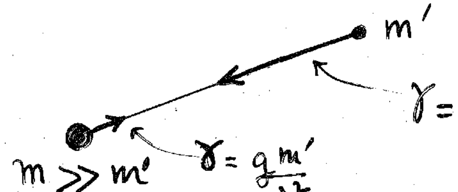
FORCES
(à distance!)




égales en grandeur
opposées en direction

constante → $g \frac{mm'}{r^2}$

ACCÉLÉRATIONS    $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ (dans 1 repère Galiléen)



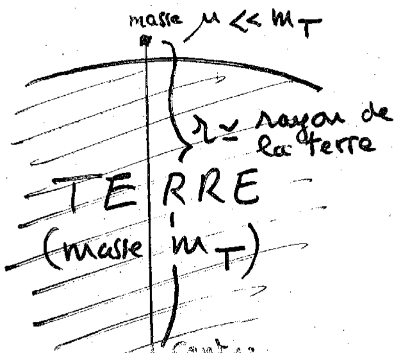

$\gamma = g\frac{m}{r^2}$

$m \gg m'$    $\gamma = g\frac{m'}{r^2}$

Isaac Newton <u>*Philosophiæ naturalis Principia Mathematica*</u> Liber tertius Propositio VIII Theorema VIII : *"Si la matière de deux globes qui gravitent l'un vers l'autre est homogène à égales distences de leurs centres : le poids de l'un de ces globes vers l'autre sera réciproquement comme le quarré de la distance qui est entre leurs centres"* (traduction de la Marquise du Chastellet).

⇓

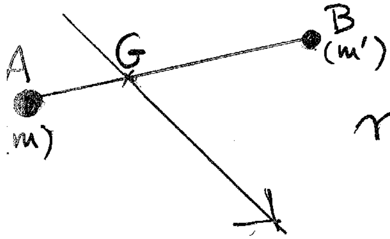
Loi de la
chute des corps
sur la terre




accélération
$\frac{gm_T}{r^2} \simeq$ cste

# LE PROBLÈME DES DEUX CORPS

Mouvement du <u>centre de gravité</u> :



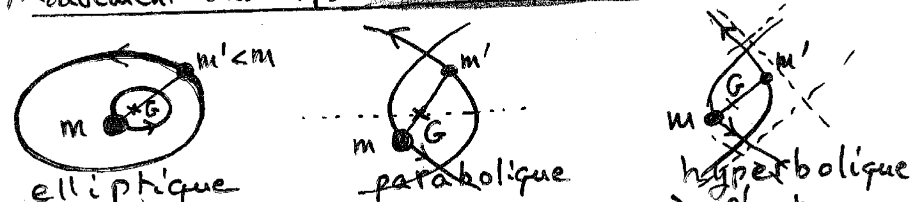

$$m\vec{GA} + m'\vec{GB} = \vec{0}$$

Aucune force ne s'exerce sur G

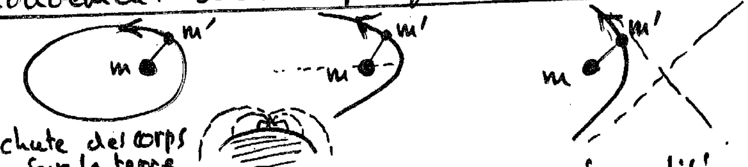
⇓

G a un mouvement <u>rectiligne uniforme</u>

- <u>Mouvement des corps dans un repère (Galiléen) fixant G</u>

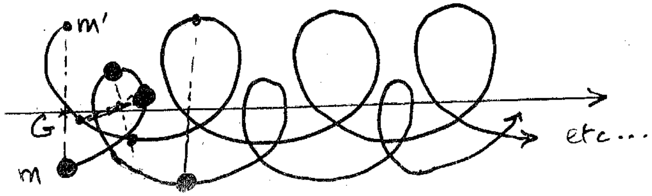



- <u>Mouvement d'un corps par rapport à l'autre</u>



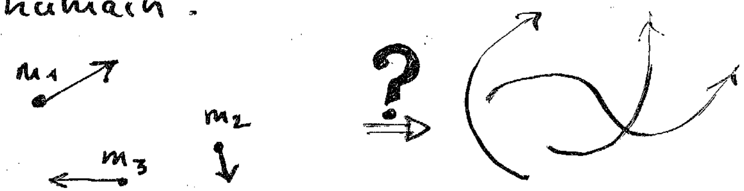

⇒ chute des corps sur la terre

- <u>Mouvement des corps dans 1 repère galiléen quelconque</u>

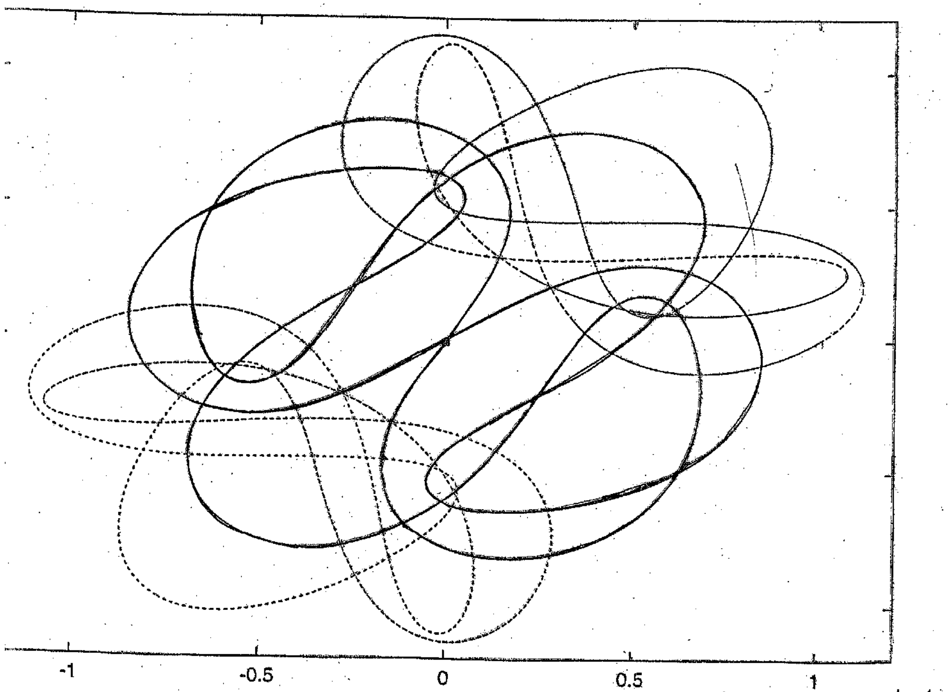


# LE PROBLÈME DES TROIS CORPS

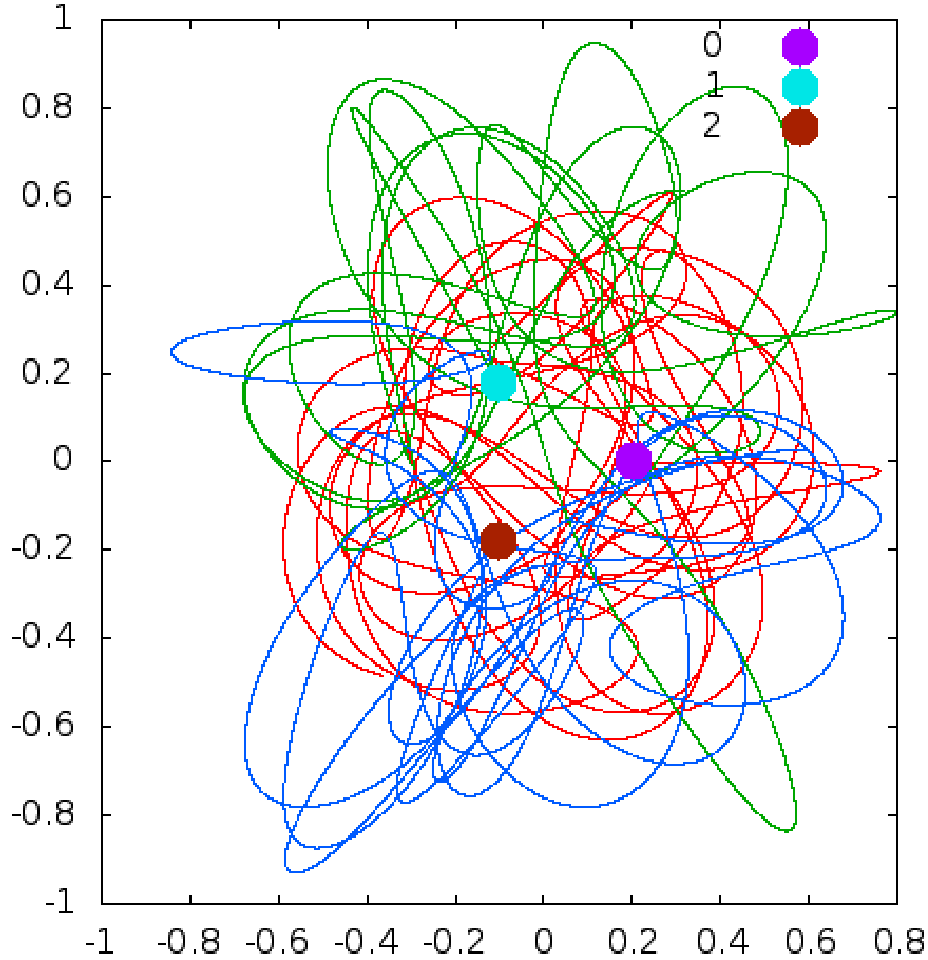
**NEWTON :** (une solution exacte du problème des 3 corps) "dépasse, si je ne me trompe, les forces de l'esprit humain".




**UN EXEMPLE :** Une solution "assez simple" du problème des 3 corps (3 masses égales)

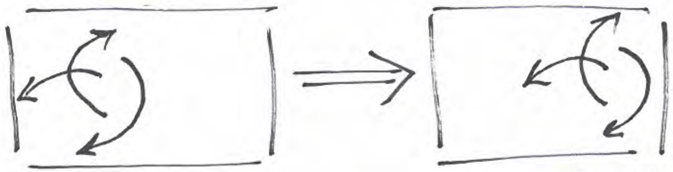



Calculée numériquement par C. Simó



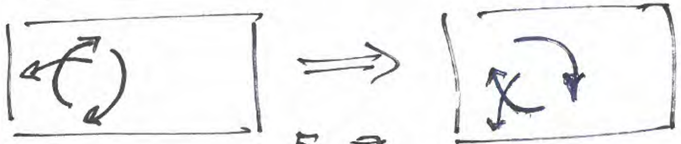
# SYMÉTRIES ET INTÉGRALES PREMIÈRES

**TRANSLATION**
(en position, ou vitesse)



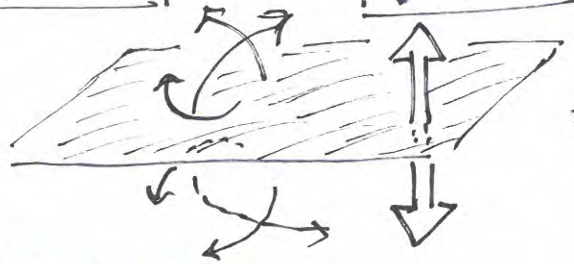
**MOMENT LINÉAIRE**
(mouvement galiléen du centre de gravité)

**ROTATION**



**MOMENT CINÉTIQUE**
(loi des aires)

**SYMÉTRIE PLANE**



⇒ MOUVEMENT DANS UN PLAN POUR 2 CORPS

**TRANSLATION TEMPORELLE**

$t = t_0$ $t = t_1$

**ÉNERGIE**

EMMY NOETHER (1918)

SYMÉTRIE SO(4) (seulement pour 2 corps)

VECTEUR DE HERMAN-LAPLACE (direction du périhélie)

⇓

solutions toutes périodiques en énergie négative

# 13. Invariante Variationsprobleme

Nachr. v. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1918, S. 235–257

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 26. Juli 1918[1]).

Es handelt sich um Variationsprobleme, die eine kontinuierliche Gruppe (im Lieschen Sinne) gestatten; die daraus sich ergebenden Folgerungen für die zugehörigen Differentialgleichungen finden ihren allgemeinsten Ausdruck in den in § 1 formulierten, in den folgenden Paragraphen bewiesenen Sätzen. Über diese aus Variationsproblemen entspringenden Differentialgleichungen lassen sich viel präzisere Aussagen machen als über beliebige, eine Gruppe gestattende Differentialgleichungen, die den Gegenstand der Lieschen Untersuchungen bilden. Das folgende beruht also auf einer Verbindung der Methoden der formalen Variationsrechnung mit denen der Lieschen Gruppentheorie. Für spezielle Gruppen und Variationsprobleme ist diese Verbindung der Methoden nicht neu; ich erwähne Hamel und Herglotz für spezielle endliche, Lorentz und seine Schüler (z. B. Fokker), Weyl und Klein für spezielle unendliche Gruppen[2]). Insbesondere sind die zweite Kleinsche Note und die vorliegenden Ausführungen gegenseitig durch einander beein-

---

1) Die endgiltige Fassung des Manuskriptes wurde erst Ende September eingereicht.

2) Hamel: Math. Ann. Bd. 59 und Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. 50. Herglotz: Ann. d. Phys. (4) Bd. 36, bes. § 9, S. 511. Fokker, Verslag d. Amsterdamer Akad., 27./1. 1917. Für die weitere Litteratur vergl. die zweite Note von Klein: Göttinger Nachrichten 19. Juli 1918.

In einer eben erschienenen Arbeit von Kneser (Math. Zeitschrift Bd. 2) handelt es sich um Aufstellung von Invarianten nach ähnlicher Methode.

# COMBIEN DE PARAMÈTRES ?

**2 CORPS DANS L'ESPACE** 12 positions et vitesses

Réductions dues aux SYMÉTRIES
- −6 centre de gravité
- −3 moment cinétique
- −1 énergie
- −1 vecteur de Helman-Laplace

**= 1 L'orbite est déterminée**

**3 CORPS DANS L'ESPACE** 18 positions et vitesses

LAGRANGE 1772

Réductions dues aux SYMÉTRIES
- −6 centre de gravité
- −3 moment cinétique
- −1 énergie
- −1 rotations

**= 7 !!!**

**LE PROBLÈME DES TROIS CORPS EST "<u>NON-INTÉGRABLE</u>"**

BRUNS 1887
POINCARÉ 1892

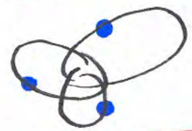
# DIVERSES APPROCHES DU PROBLÈME

**THÉORIE DES PERTURBATIONS**

Existence et stabilité des systèmes planétaires et lunaires

Mécanique céleste classique

**SOLUTIONS EXACTES**



**SOLUTIONS NON PERTURBATIVES**

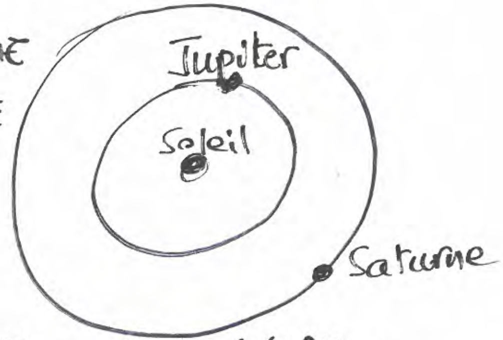
Méthodes topologiques
Dynamique symbolique
Calcul des variations

Méthodes Nouvelles

**PHÉNOMÈNES LIÉS AUX COLLISIONS TRIPLES**

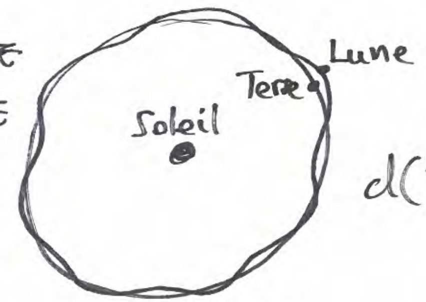
# PERTURBATIONS

PROBLÈME PLANÉTAIRE




$m_J, m_{Sat} \ll m_S$

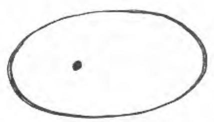
PROBLÈME LUNAIRE




$d(T,L) \ll d(T,S)$

$m_L \ll m_T \ll m_S$

Mouvements séculaires : PRÉCESSION



remplacé par

MÉCANIQUE CÉLESTE CLASSIQUE

Z Nombreuses explications possibles :

| PERTURBATIONS DUES À L'ATTRACTION EN $1/r^2$ | Loi en $1/r^{2+\varepsilon}$ ou en $\frac{1}{r^2} + \frac{\varepsilon}{r^4}$ (Clairaut) | corrections relativistes (ex. Mercure) |
|---|---|---|

1747-48 CRISE DE L'APOGÉE DE LA LUNE

NEWTON
EULER, CLAIRAUT, D'ALEMBERT
LAPLACE, LAGRANGE, POISSON
DELAUNAY, HILL,
POINCARÉ, BIRKHOFF ---- ARNOLD (K.A.M.)

EULER

CLAIRAUT

D'ALEMBERT

# CONSIDÉRATIONS
SUR LE
# PROBLEME DES TROIS CORPS.(*)

PAR MR. L. EULER.

1.

Le probleme où il s'agit de déterminer le mouvement de trois corps qui s'attirent mutuellement, ſelon l'hypotheſe Newtonienne, eſt devenu depuis quelque tems ſi fameux par les ſoins que les plus grands Géometres y ont employés, qu'on a déjà commencé à diſputer, à qui la gloire de l'avoir le premier réſolu appartenoit. Mais cette diſpute eſt fort prématurée, & il s'en faut bien encore qu'on ſoit parvenu à une ſolution parfaite du probleme. Tout ce qu'on y a fait juſqu'ici eſt reſtreint à un cas très particulier, où le mouvement de chacun des trois corps ſuit à peu près les regles établies par *Kepler*; & dans ce cas même on s'eſt borné à déterminer le mouvement par approximation. Dans tous les autres cas, on ne ſauroit ſe vanter qu'on puiſſe aſſigner ſeulement à peu près le mouvement des trois corps, lequel demeure encore pour nous un auſſi grand myſtere, que ſi l'on n'avoit jamais penſé à ce probleme.

2. Pour prouver clairement combien on eſt encore éloigné d'une ſolution complette de ce probleme, on n'a qu'à le comparer avec le cas où il n'y a que deux corps qui s'attirent mutuellement, & même avec le cas le plus ſimple, où il s'agit de déterminer le mouvement d'un corps peſant projetté d'une maniere quelconque dans le vuide. Et on conviendra aiſément qu'il auroit été impoſſible de trouver

(*) Lû le 4 Déc. 1765.



## DE L'ORBITE DE LA LUNE,

*En ne négligeant pas les quarrés des quantités de même ordre que les forces perturbatrices.*

Par M. CLAIRAUT.

JE ſuppoſerai ici, comme dans la ſolution que je donnai en 1747, que les deux orbites ſont dans le même plan, que celle du Soleil eſt ſans excentricité; & je n'aurai point d'égard aux termes qui ſeroient introduits dans les valeurs des forces Φ & Π, ſi l'on ne négligeoit pas le quarré du rapport des diſtances du Soleil & de la Lune à la Terre.

Dépoſé à l'Acad. le 21 Janv. 1749. & lû le 15 Mars 1752.

Ainſi les forces Φ & Π ſeront encore

$$-\frac{Nr}{t^3}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\operatorname{coſ.} 2T\right), \ \& \ -\frac{3N}{2t^3}\left(\operatorname{ſin.} 2T\right):$$

*N* étant la maſſe du Soleil, *M* la ſomme des maſſes de la Terre & de la Lune, *r* le rayon vecteur quelconque de l'orbite de la Lune, *t* le rayon de l'orbite du Soleil, *T* l'élongation des deux aſtres.

J'aurai toûjours, comme dans mon premier Mémoire, pour l'équation générale de l'orbite produite par les forces $\frac{M}{rr} + \Phi$ & $\Pi$;

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{c}{p}\operatorname{coſ.}v + \frac{1}{p}\operatorname{ſin.}v \int \Omega \operatorname{coſ.}v\, dv - \frac{1}{p}\operatorname{coſ.}v \int \Omega \operatorname{ſin.}v\, dv,$$

en ſuppoſant, 1.° que $v$ ſoit l'angle compris entre le rayon vecteur quelconque *r*, & celui qui paſſoit par la Lune ſuppoſée apogée, au moment où les forces Φ & Π ont commencé à agir: 2.° que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{c}{p}\operatorname{coſ.}v$, exprimeroit

# QUATORZIÉME MÉMOIRE.

*Réfléxions ſur le Problême des trois Corps, avec de nouvelles Tables de la Lune, d'un uſage très-ſimple & très-facile.*

## I.

J'AI publié dans mes *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, imprimées en 1754, des Tables de la Lune, telles que la théorie me les avoit données. J'avois cru devoir conſerver dans ces Tables la forme de celles des *Inſtitutions Aſtronomiques*, parce que les Aſtronomes me paroiſſoient accoutumés à cette forme, & parce que d'ailleurs cette forme me ſembloit avoir quelques autres avantages, dont j'ai fait mention p. 249 & 250 de la premiere Partie des *Recherches* déja citées.

## I I.

Ayant fait réfléxion depuis, qu'il ſeroit très-commode & très-utile aux Aſtronomes d'avoir des Tables particulieres qui marquaſſent ſeulement la différence des miennes d'avec celles des *Inſtitutions*, j'ai publié ces Tables

# ENCYCLOPÉDIE,

OU

DICTIONNAIRE RAISONNÉ

DES SCIENCES,

DES ARTS ET DES MÉTIERS,

*PAR UNE SOCIETÉ DE GENS DE LETTRES.*

Mis en ordre & publié par M. *DIDEROT*, de l'Académie Royale des Sciences & des Belles-Lettres de Pruſſe; & quant à la PARTIE MATHÉMATIQUE, par M. *D'ALEMBERT*, de l'Académie Royale des Sciences de Paris, de celle de Pruſſe, & de la Société Royale de Londres.

*Tantum series juncturaque pollet,*
*Tantum de medio sumptis accedit honoris!* HORAT.

le tome 9 de l'*Encyclopédie* (le volume paraît en 1765 mais l'article est rédigé en 1759) : *"Je ne dois pas oublier d'ajouter 1°. que ma méthode pour déterminer le mouvement de l'apogée, est très-élégante & très-simple, n'ayant besoin d'aucune intégration, & ne demandant que la simple inspection des coefficients du second terme de l'équation différentielle ; 2°. que j'ai démontré le premier par une méthode rigoureuse, ce que personne n'avoit encore fait, & n'a même fait jusqu'ici, que l'équation de l'orbite lunaire ne devoit point contenir d'arcs de cercle ; si on ajoute à cela la maniere simple & facile dont je parviens à l'équation différentielle de l'orbite lunaire, sans avoir besoin pour cela, comme d'autres géometres, de transformations & d'intégrations multipliées ; & le détail que j'ai donné ci-dessus de mes travaux & de ceux des autres géometres, on conviendra, ce me semble, que j'ai eu plus de part à la théorie de la lune que certains mathématiciens n'avoient voulu le faire croire.*

A PARIS,

Chez BRIASSON, *rue Saint Jacques, à la Science.*
DAVID l'aîné, *rue Saint Jacques, à la Plume d'or.*
LE BRETON, *Imprimeur ordinaire du Roy, rue de la Harpe.*
DURAND, *rue Saint Jacques, à Saint Landry, & au Griffon.*

M. DCC. LI.

*AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.*

le tome 9 de l'*Encyclopédie* (le volume paraît en 1765 mais l'article est rédigé en 1759) : *"Je ne dois pas oublier d'ajouter* 1°. *que ma méthode pour déterminer le mouvement de l'apogée, est très-élégante & très-simple, n'ayant besoin d'aucune intégration, & ne demandant que la simple inspection des coefficients du second terme de l'équation différentielle ;* 2°. *que j'ai démontré le premier par une méthode rigoureuse, ce que personne n'avoit encore fait, & n'a même fait jusqu'ici, que l'équation de l'orbite lunaire ne devoit point contenir d'arcs de cercle ; si on ajoute à cela la maniere simple & facile dont je parviens à l'équation différentielle de l'orbite lunaire, sans avoir besoin pour cela, comme d'autres géometres, de transformations & d'intégrations multipliées ; & le détail que j'ai donné ci-dessus de mes travaux & de ceux des autres géometres, on conviendra, ce me semble, que j'ai eu plus de part à la théorie de la lune que certains mathématiciens n'avoient voulu le faire croire.*

# TRAITÉ

DE

# MÉCANIQUE CÉLESTE,

PAR P. S. LAPLACE,

Membre de l'Institut national de France, et du Bureau des Longitudes.

TOME PREMIER.

DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET.

A PARIS,

Chez J. B. M. DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins.

AN VII.


**Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)**

# MÉCHANIQUE

## ANALITIQUE;

*Par M. DE LA GRANGE, de l'Académie des Sciences de Paris; de celles de Berlin, de Pétersbourg, de Turin, &c.*

*A PARIS,*

Chez LA VEUVE DESAINT, Libraire, rue du Foin S. Jacques.

M. DCC. LXXXVIII.

*AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.*

stantes, deviendra

$$\Delta\Omega = \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\Delta\alpha + \frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\Delta\beta + \frac{\partial\Omega}{\partial\gamma}\Delta\gamma + \ldots + \frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}\Delta\lambda + \frac{\partial\Omega}{\partial\mu}\Delta\mu + \frac{\partial\Omega}{\partial\nu}\Delta\nu + \ldots.$$

En la substituant dans le premier membre de l'équation de l'article précédent et ordonnant les termes par rapport aux différences marquées par $\Delta$, on aura

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}dt - \delta\lambda\right)\Delta\alpha + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}dt - \delta\mu\right)\Delta\beta + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma}dt - \delta\nu\right)\Delta\gamma + \ldots \\
&+ \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}dt + \delta\alpha\right)\Delta\lambda + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}dt + \delta\beta\right)\Delta\mu + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}dt + \delta\gamma\right)\Delta\nu + \ldots = 0.
\end{aligned}$$

Comme on peut donner aux différences $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, ... marquées par la caractéristique $\Delta$ une valeur quelconque, il faudra que l'équation soit vérifiée indépendamment de ces différences, ce qui donnera autant d'équations particulières, telles que

$$\begin{array}{llll}
\dfrac{\partial\Omega}{\partial\alpha}dt = \delta\lambda, & \dfrac{\partial\Omega}{\partial\beta}dt = \delta\mu, & \dfrac{\partial\Omega}{\partial\gamma}dt = \delta\nu, & \ldots, \\
\dfrac{\partial\Omega}{\partial\lambda}dt = -\delta\alpha, & \dfrac{\partial\Omega}{\partial\mu}dt = -\delta\beta, & \dfrac{\partial\Omega}{\partial\nu}dt = -\delta\gamma, & \ldots.
\end{array}$$

14. Les différences marquées par la caractéristique $\delta$ sont proprement les différentielles des constantes arbitraires devenues variables (art. 10); ainsi, comme ces différentielles peuvent maintenant être rapportées également au temps $t$, il est permis et même convenable de changer les $\delta$ en $d$, et l'on aura, pour la détermination des nouvelles variables $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ..., $\lambda$, $\mu$, $\nu$, ..., les équations

$$\begin{array}{llll}
\dfrac{d\alpha}{dt} = -\dfrac{\partial\Omega}{\partial\lambda}, & \dfrac{d\beta}{dt} = -\dfrac{\partial\Omega}{\partial\mu}, & \dfrac{d\gamma}{dt} = -\dfrac{\partial\Omega}{\partial\nu}, & \ldots, \\
\dfrac{d\lambda}{dt} = +\dfrac{\partial\Omega}{\partial\alpha}, & \dfrac{d\mu}{dt} = +\dfrac{\partial\Omega}{\partial\beta}, & \dfrac{d\nu}{dt} = +\dfrac{\partial\Omega}{\partial\gamma}, & \ldots,
\end{array}$$

qui sont, comme l'on voit, sous une forme très simple, et qui fournissent ainsi la solution la plus simple du problème de la variation des constantes arbitraires.


Siméon-Denis Poisson (1781 - 1840)


JOURNAL
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

# MÉMOIRE

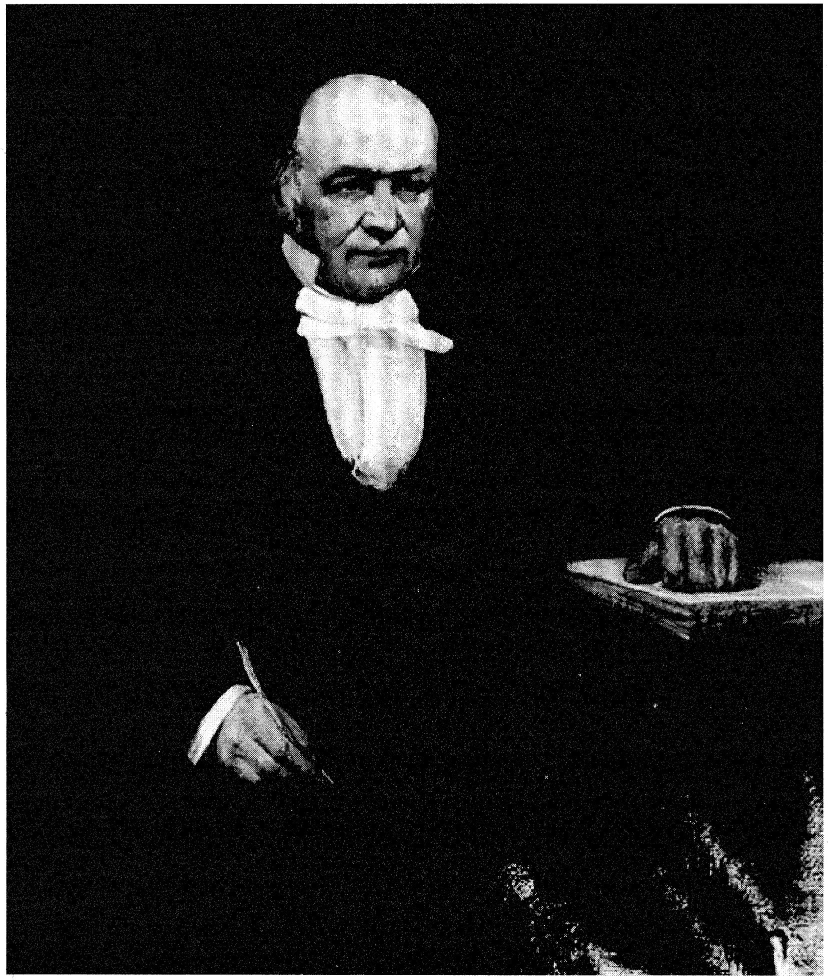
*Sur les Inégalités séculaires des Moyens mouvemens des Planètes ;*

Lu à l'Institut, le 20 Juin 1808.

Par M. POISSON.

L'ACTION réciproque des planètes produit, dans leurs mouvemens, des inégalités que l'on distingue en deux espèces : les unes sont périodiques, et leurs périodes dépendent de la configuration des planètes entre elles ; de sorte qu'elles reprennent les mêmes valeurs toutes les fois que les planètes reviennent à la même position : les autres sont encore périodiques ; mais leurs périodes sont incomparablement plus longues que celles des premières, et elles sont indépendantes de la position relative des planètes. On nomme ces inégalités à longues périodes, *inégalités séculaires ;* et, vu la lenteur avec laquelle elles croissent, on peut les considérer pendant plusieurs siècles, comme proportionnelles

# The Hamilton-Jacobi equation

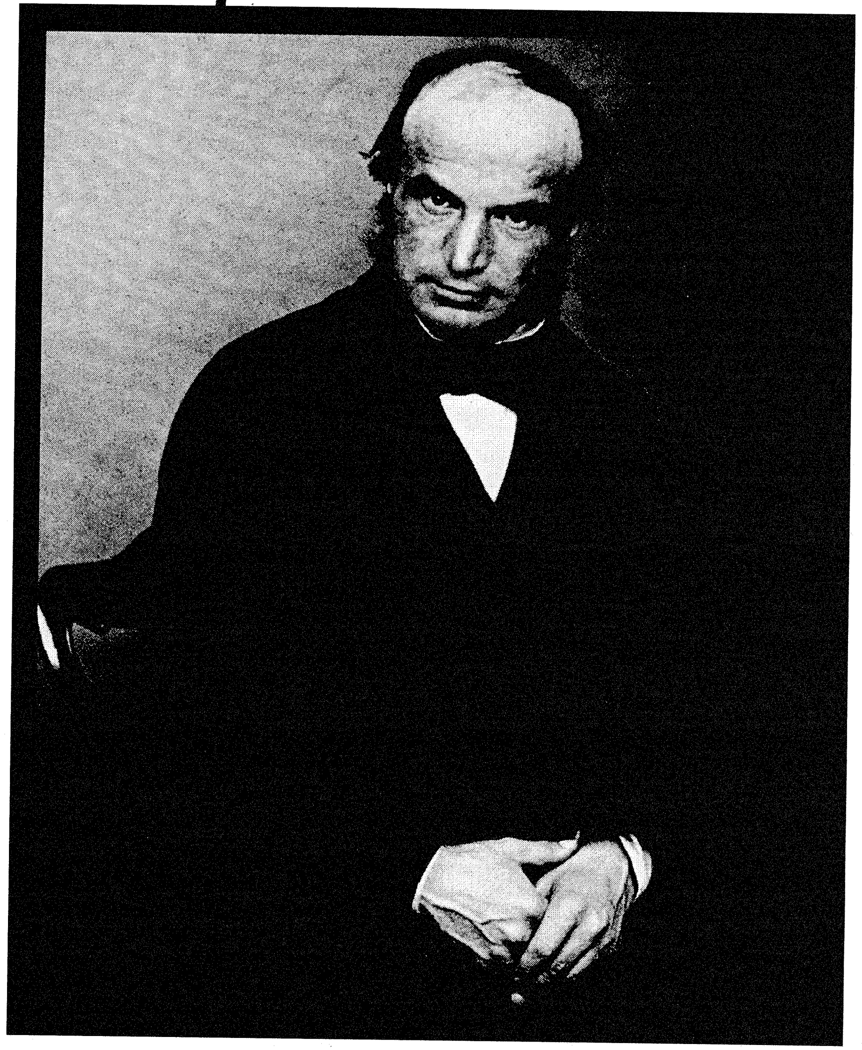


William Rowan HAMILTON (1805 - 1865)

Carl-Gustav JACOBI (1804 - 1851)

# Découverte de Neptune

Urbain LE VERRIER (1811 - 1877)



John Couch ADAMS (1819 - 1892)

# Charles.Eugène DELAUNAY (1816.1872)

(C) Photo MINES ParisTech



$$(383)^{*}\quad + m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}
&-\frac{5}{8}e'+\frac{15}{8}\gamma^2e'+\frac{15}{4}e^2e'+\frac{25}{32}e'^3-\frac{45}{4}\gamma^2e^2e'-\frac{2955}{512}e^4e'\\
&-\left(\frac{45}{16}e'-\frac{675}{32}\gamma^2e'-\frac{1755}{128}e^2e'\right)\frac{n'}{n}+\left(\frac{15}{32}e'+\frac{165}{64}e^2e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{855}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}\\
&-\left(\frac{45}{32}e'-\frac{735}{64}e^2e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{675}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{15}{64}e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{215}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{27}{64}e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{459}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}\\
&+\frac{27}{128}e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{189}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{15}{128}e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{695}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{135}{64}e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1485}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}\\
&-\frac{45}{64}e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{495}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{45}{128}e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{261}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{45}{256}e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{117}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{135}{256}e^2e'\frac{n'}{n}\\
&+\frac{135}{256}e^2e'\frac{n'}{n}-\frac{675}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{1035}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{45}{32}\gamma^2e'\frac{n'}{n}-\frac{45}{32}\gamma^2e'\frac{n'}{n}+\frac{11025}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}
\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(3h+3g+3l-3h'-3g'-2l')$$

$$(384)\quad + m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}
&\frac{5}{64}e'^2-\frac{15}{64}\gamma^2e'^2-\frac{15}{32}e^2e'^2-\frac{135}{64}e'^2\frac{n'}{n}+\frac{405}{64}e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{45}{16}e'^2\frac{n'}{n}-\frac{15}{256}e'^2\frac{n'^2}{n^2}\\
&+\frac{45}{256}e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{165}{512}e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{297}{512}e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{27}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{15}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{135}{64}e'^2\frac{n'^2}{n^2}\\
&+\frac{45}{64}e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{405}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{135}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{495}{1024}e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{45}{256}e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{2025}{2048}e'^2\frac{n'^2}{n^2}\\
&+\frac{225}{64}e'^2\frac{n'^2}{n^2}
\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(3h+3g+3l-3h'-3g'-l')$$

$$(385)\quad + m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}
&\frac{15}{16}e-\frac{45}{16}\gamma^2e-\frac{285}{64}e^3-\frac{45}{8}ee'^2-\frac{4275}{128}ee'^2\frac{n'}{n}-\frac{855}{128}ee'^2\frac{n'}{n}\\
&+\frac{255}{64}e\frac{n'^2}{n^2}-\frac{75}{64}e\frac{n'^2}{n^2}+\frac{93}{128}e\frac{n'^2}{n^2}+\frac{25}{64}e\frac{n'^3}{n^3}-\frac{81}{128}e\frac{n'^2}{n^2}-\frac{81}{64}e\frac{n'^3}{n^3}
\end{aligned}\right\}$$

Cette portion du coefficient du terme (385) a disparu par suite de la 19e opération.

Ce coefficient du terme (385) se continue à la page suivante.

* On a dû pousser ici l'approximation jusqu'aux quantités du neuvième ordre, avant la 3e opération, mais seulement dans les parties qui contiennent $e^2$ ou $e^4$ en facteur, afin de pouvoir calculer complétement la portion du coefficient du terme (334) qui provient du terme (383) dans cette 3e opération.

Une page de la théorie du mouvement de la Lune (1860)

Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut impérial de France.

Félix TISSERAND ( 1845 - 1896)

# TRAITÉ
DE
# MÉCANIQUE CÉLESTE

PAR

F. TISSERAND,
MEMBRE DE L'INSTITUT ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES.

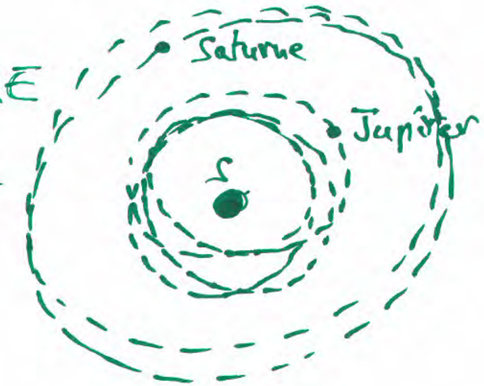
## TOME I.

PERTURBATIONS DES PLANÈTES D'APRÈS LA MÉTHODE DE LA VARIATION DES CONSTANTES ARBITRAIRES.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.
1889

# STABILITÉ OU INSTABILITÉ ?




**Exemple typique :** SYSTÈME SÉCULAIRE PLANÉTAIRE

au voisinage des mouvements circulaires coplanaires de 2 planètes autour du soleil.

| VARIABLES SÉCULAIRES (ou lentes) | VARIABLES DE POSITION (ou rapides) |
| --- | --- |
| position & forme des ellipses planétaires osculatrices | ½ grands axes $a_1, a_2$<br>aires balayées $l_1, l_2$ |

| NEWTON | LAPLACE/LAGRANGE | POINCARÉ | ARNOLD (KAM) HERMAN/FÉJOZ | LASKAR |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Instable | Stable au 1er ordre | Stable formellement mais peut-être instable | Stable en mesure si masses planétaires microscopiques | Instable numérique, (tout le système solaire) |

[ Il est impossible de prédire comment sera orienté le périhélie de la Terre dans 100 millions d'années ]

ORIGINE DE L'INSTABILITÉ : RÉSONANCES

TRADUCTION ANALYTIQUE : DIVERGENCE DES SÉRIES DE PERTURBATION

LES MÉTHODES NOUVELLES

DE LA

# MÉCANIQUE CÉLESTE

PAR

**H. POINCARÉ,**
MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES.

TOME I.

**Solutions périodiques. — Non-existence des intégrales uniformes.
Solutions asymptotiques.**

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1892


LES MÉTHODES NOUVELLES

DE LA

# MÉCANIQUE CÉLESTE

PAR

**H. POINCARÉ,**
MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES.

TOME II.

**Méthodes de MM. Newcomb, Gyldén, Lindstedt et Bohlin.**

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55

1893


LES MÉTHODES NOUVELLES

DE LA

# MÉCANIQUE CÉLESTE

PAR

**H. POINCARÉ,**
MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES

TOME III.

**Invariants intégraux. — Solutions périodiques du deuxième genre.
Solutions doublement asymptotiques.**

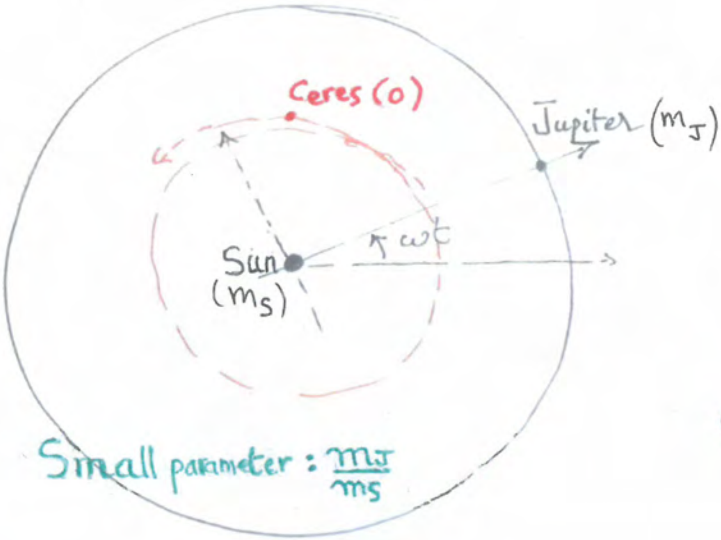
PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

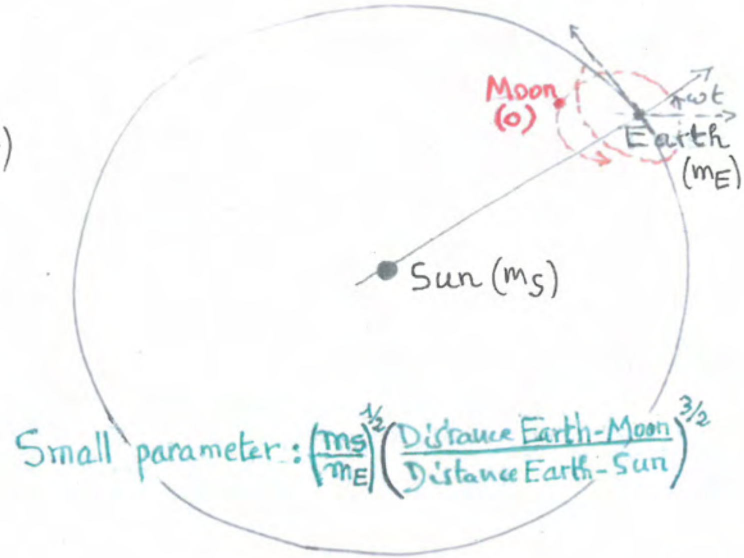
1899


HENRI POINCARÉ DANS SON CABINET DE TRAVAIL.

Henri Poincaré dans son cabinet de travail. — Phot. Dornac.

# LE PROBLÈME RESTREINT DES TROIS CORPS



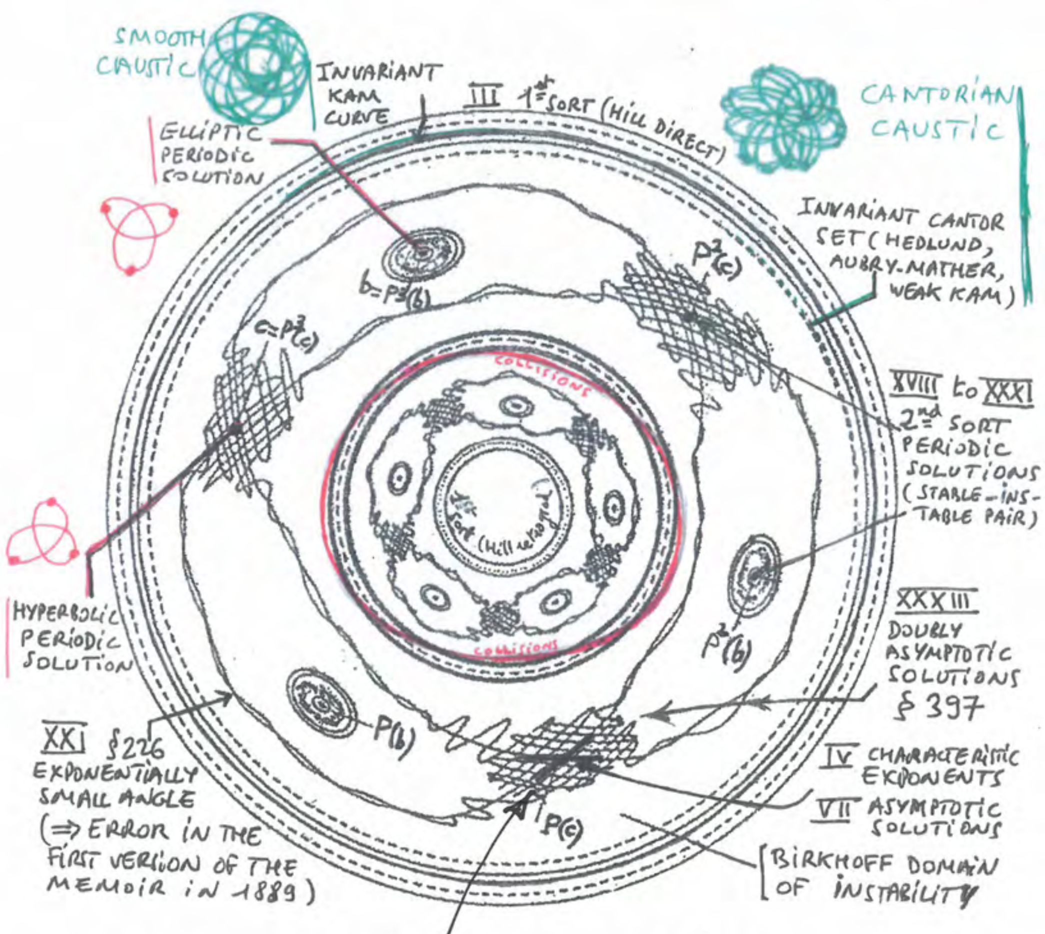

En ce qui concerne le problème des trois corps, je ne suis pas sorti du cas suivant : Je considère trois masses, la première très grande, la seconde petite mais finie, la troisième infiniment petite ; je suppose que les deux premières décrivent un cercle autour de leur centre de gravité commun et que la troisième se meut dans le plan de ces cercles. Tel serait le cas d'une petite planète troublée par Jupiter, si l'on négligeait l'eccentricité de Jupiter et l'inclinaison des orbites.[120]

TOME III

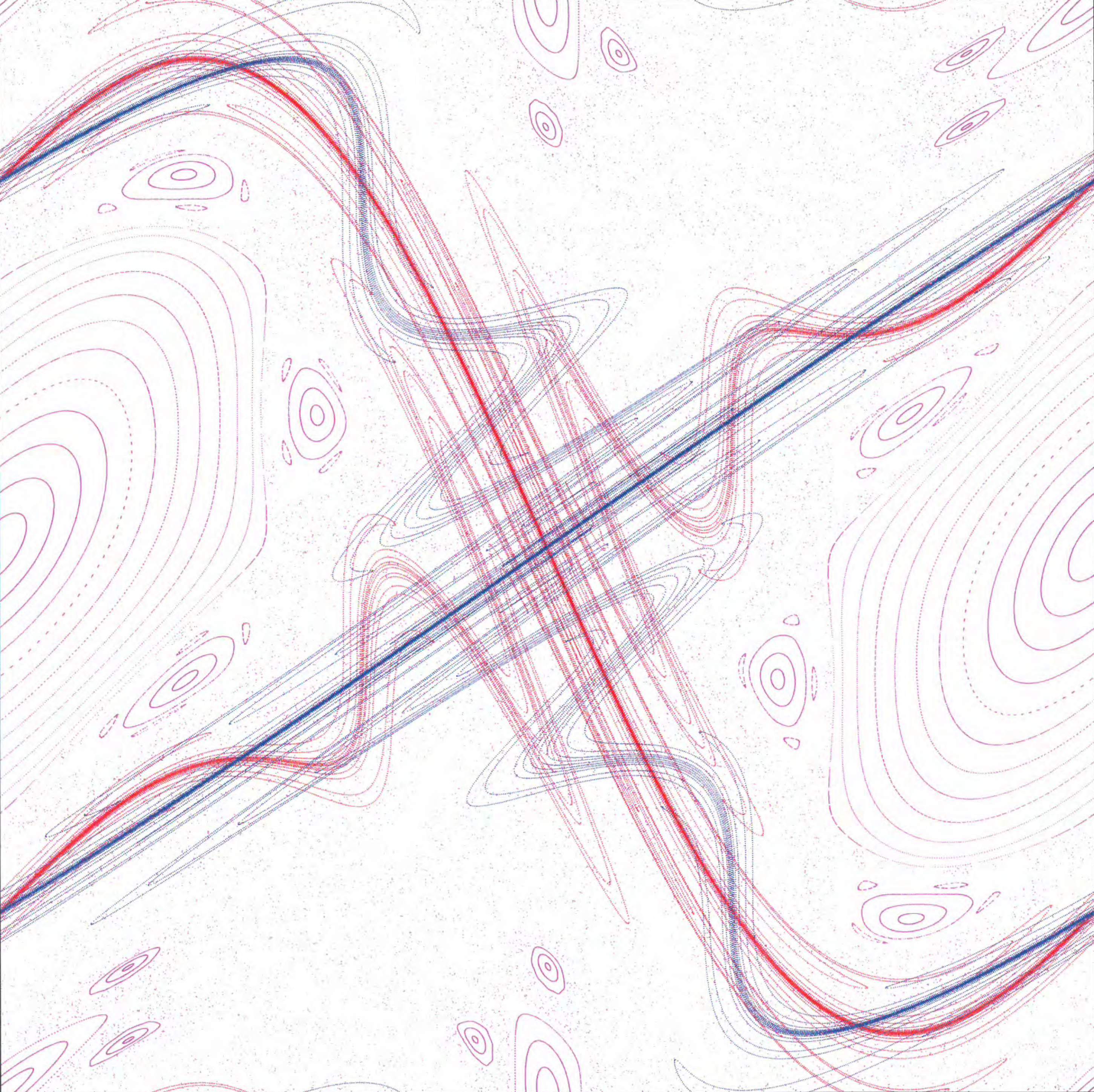
§397

397. Que l'on cherche à se représenter la figure formée par ces deux courbes et leurs intersections en nombre infini dont chacune correspond à une solution doublement asymptotique, ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées; chacune des deux courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier sur elle-même d'une manière très complexe pour venir recouper une infinité de fois toutes les mailles du réseau.

On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner une idée de la complication du problème des trois corps et en général de tous les problèmes de Dynamique où il n'y a pas d'intégrale uniforme et où les séries de Bohlin sont divergentes.

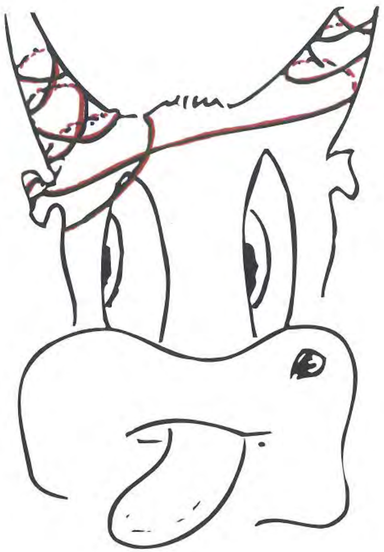


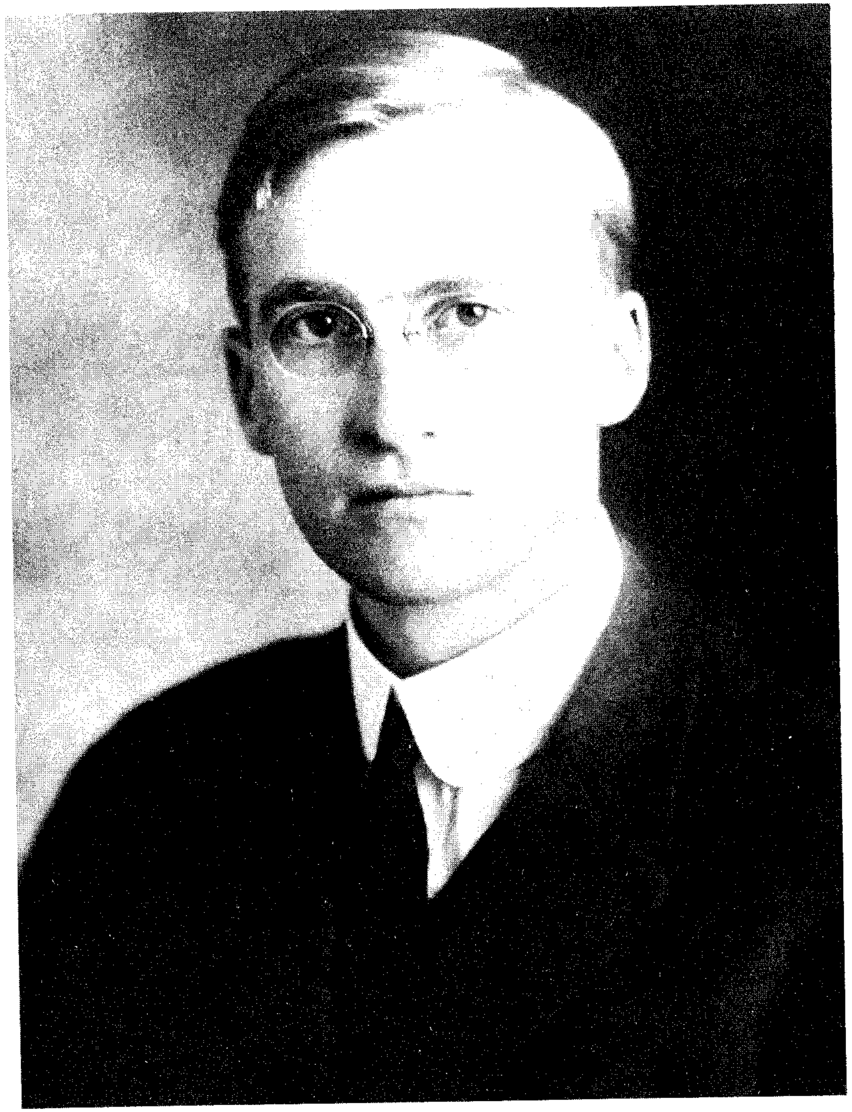

LES INTERSECTIONS HOMOCLINES DE L'APPLICATION DE 1e RETOUR



Sensibilité aux conditions initiales

(Hadamard interprété par Pierre Duhem)





George David Birkhoff, 1913

(1884 - 1944)

Reprinted from *Trans. Amer. Math. Soc.*, January, 1913, Vol. 14, pp. 14–22

# PROOF OF POINCARE'S GEOMETRIC THEOREM

BY

GEORGE D. BIRKHOFF *

In a paper recently published in the Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (vol. 33, 1912, pp. 375–407) and entitled *Sur un théorème de Géométrie*, POINCARÉ enunciated a theorem of great importance, in particular for the restricted problem of three bodies; but, having only succeeded in treating a variety of special cases after long-continued efforts, he gave out the theorem for the consideration of other mathematicians.

For some years I have been considering questions of a character similar to that presented by the theorem and it now turns out that methods which I have been using are here applicable. In the present paper I give the brief proof which I have obtained, but do not take up other results to which I have been led.†

**1. Statement of the Theorem.** Poincaré's theorem may be stated in a simple form as follows: Let us suppose that a continuous one-to-one transformation $T$ takes the ring $R$, formed by concentric circles $C_a$ and $C_b$ of radii $a$ and $b$ respectively ($a > b > 0$), into itself in such a way as to advance the points of $C_a$ in a positive sense, and the points of $C_b$ in the negative sense, and at the same time to preserve areas. *Then there are at least two invariant points.*

In the proof of this theorem we shall use modified polar coördinates $y = r^2$, $x = \theta$ where $r$ is the distance of the point $(x, y)$ from the center of the circles, and $\theta$ is the angle which a line from the center to $(x, y)$ makes with a fixed line through the center. The transformation $T$ may be written then

$$x' = \varphi(x, y), \qquad y' = \psi(x, y).$$

The function $\psi(x, y)$ is a continuous function of $(x, y)$, uniquely determined at each point of $R$, and so is periodic in $x$ of period $2\pi$. The function $\varphi(x, y)$ admits of an infinite number of determinations which differ from each

* Presented to the Society, October 26, 1912.

† Some of my results are contained in a paper entitled *Quelques théorèmes sur les mouvements des systèmes dynamiques*, which is shortly to appear in the Bulletin de la Société Mathématique de France.

# K

# A

# M

## 52. ON THE PRESERVATION OF CONDITIONALLY PERIODIC MOTIONS UNDER SMALL VARIATIONS OF THE HAMILTON FUNCTION *

We consider in the $2s$-dimensional phase space of a dynamical system with $s$ degrees of freedom a region $G$, represented as the product of an $s$-dimensional torus $T$ by a region $S$ in an $s$-dimensional Euclidean space. The points of the torus will be characterized by circular coordinates $q_1, \dots, q_s$ (the replacement of $q_\alpha$ by $q_\alpha + 2\pi$ does not change the position of the point $q$), and the coordinates of a point $p$ belonging to $S$ will be denoted by $p_1, \dots, p_s$. Assume that in the region $G$ the equations of motion in the coordinates $(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)$ have the canonical form

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha} H(q,p), \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial}{\partial q_\alpha} H(q,p). \tag{1}$$

In what follows, the Hamilton function $H$ is assumed to depend on a parameter $\theta$, defined for all $(q,p) \in G$, $\theta \in (-c; +c)$, and to be independent of time. In essence, the consideration below is related to real functions, but imposes rather strong conditions on the smoothness of the function $H(q,p,\theta)$, stronger than the condition of infinite differentiability. For simplicity, in what follows we assume that *the function* $H(p,q,\theta)$ *is analytic in the variables* $(q,p,\theta)$ *jointly.*

Below the summation over Greek subscripts extends from 1 to $s$. Ordinary vector notation is used: $(x,y) = \sum_\alpha x_\alpha y_\alpha$ and $|x| = +\sqrt{(x,x)}$. By an integral vector is meant a vector all components of which are integers. A set of points $(q,p) \in G$ with $p = c$ is denoted by $T_c$. In Theorem 1 it is assumed that $S$ contains the point $p = 0$, that is, $T_0 \subseteq S$.

**Theorem 1.** *Let*

$$H(q,p,0) = m + \sum_\alpha \lambda_\alpha p_\alpha + \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \Phi_{\alpha\beta}(q) p_\alpha p_\beta + O(|p|^3), \tag{2}$$

*where $m$ and $\lambda_\alpha$ are constants, and let the inequality*

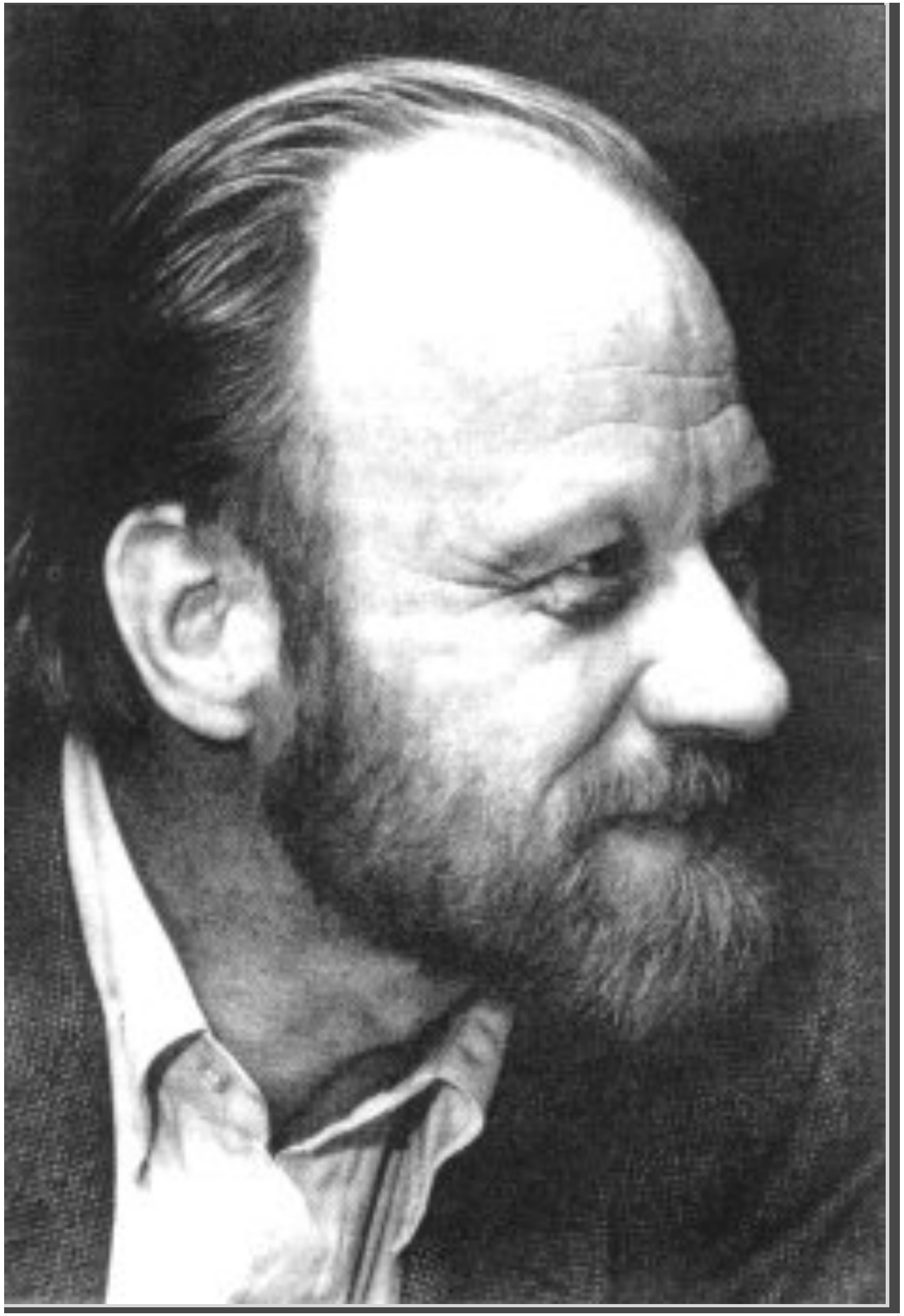
*1963 г. ноябрь—декабрь* *т. XVIII, вып. 6 (114)*

*УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК*

# МАЛЫЕ ЗНАМЕНАТЕЛИ И ПРОБЛЕМЫ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ И НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ

В. И. Арнольд

СОДЕРЖАНИЕ



COMMUNICATIONS ON PURE AND APPLIED MATHEMATICS, VOL. XI, 81–114 (1958)

# New Aspects in the Theory of Stability of Hamiltonian Systems*

JÜRGEN MOSER

## 1. Introduction

The recent development of accelerators has led to many new questions concerning the stability of orbits governed by ordinary differential equations; a mathematical theory had to be developed to account for, and to predict, the observed behavior of particle beams in the magnetic fields of these various synchrotrons. Without discussing the physical motivation we shall attempt in this paper the mathematical analysis of the pertinent questions in such a theory and point out some open problems.

The important feature of this theory is the fact that the differential equations considered are derived from a variational principle and therefore can be written in the Hamiltonian form. In physical terms this means that the influence of friction is being neglected. Thus an algebraic situation arises which makes the conventional stability theory—as developed mainly by Liapounoff—inapplicable and necessitates a new approach.

In the following introduction we shall state the problems and discuss the results whose proofs will be furnished in the later sections.

### *A) Linear Systems*

*a) Linear Problem in General.* Consider a system of differential equations of the form

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \qquad A(t+2\pi) = A(t) \tag{1.1}$$

where $x$ denotes a real $m$-vector and $A(t)$ a real $m$ by $m$ matrix. The elements of $A(t)$ are assumed to be continuous functions of $t$ and periodic with the same period which we normalize to $2\pi$. The well-known Floquet theory describes the general nature of the solutions of such a system.

The definition of stability of a linear system should be adapted to the kind of application considered. Here we will call the linear system (1.1)

*This paper represents results obtained at the Institute of Mathematical Sciences, New York University, under the sponsorship of the Office of Naval Research, Contract N6Ori-201, T.O. 1.

## 2.6 Possibilité de collisions entre Mercure, Mars, Vénus et la Terre

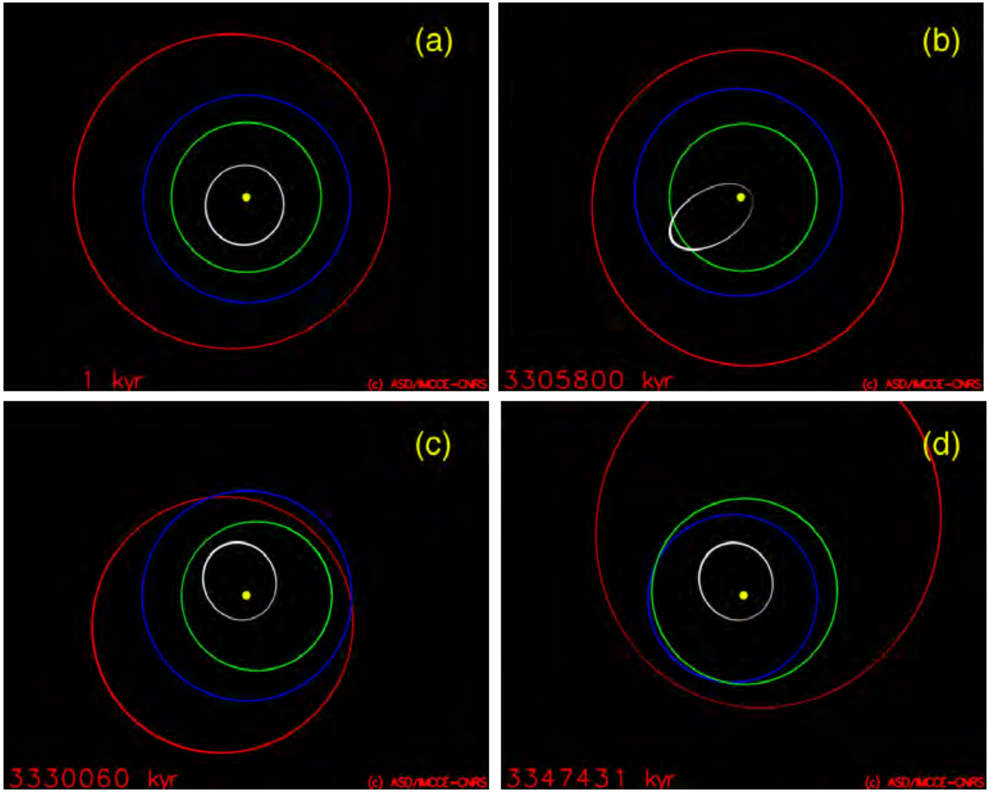


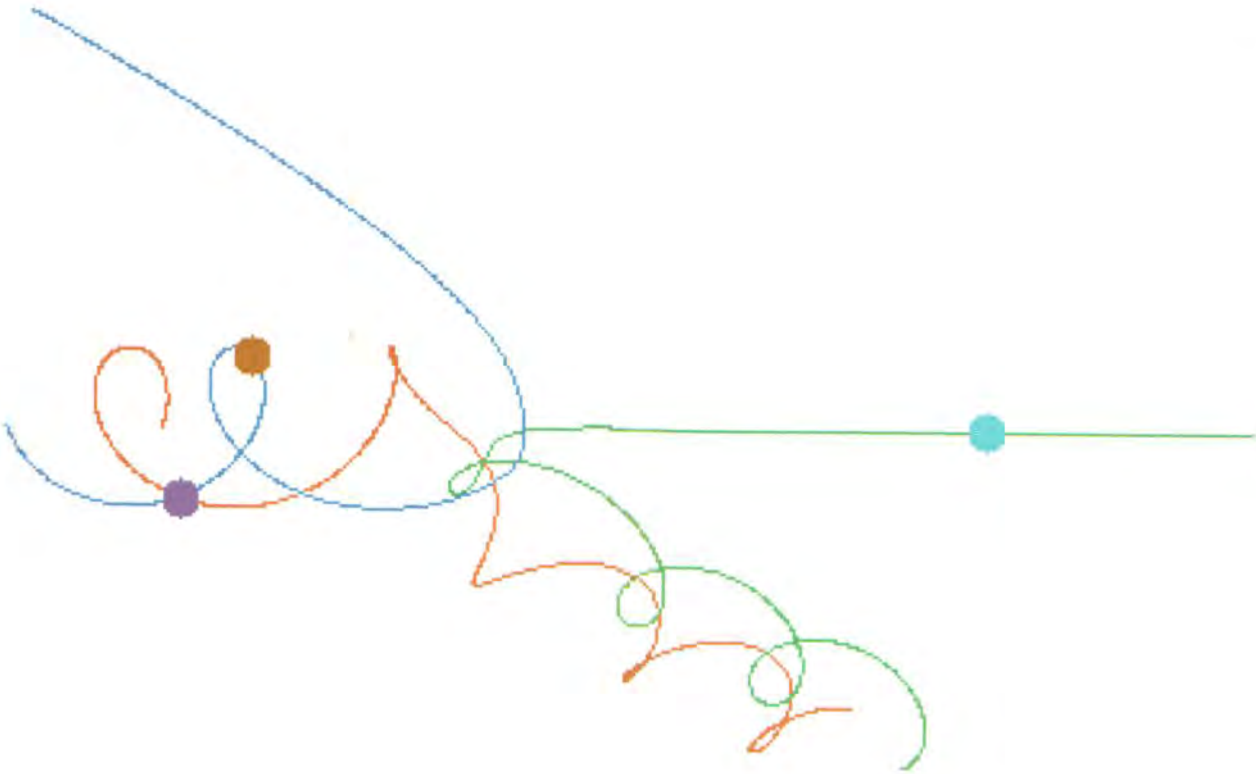

Fig. 6 – Exemple d'évolution à long terme des orbites des planètes telluriques : Mercure (blanc), Vénus (vert), Terre (bleu), Mars (rouge). Le temps est indiqué en milliers d'années (kyr). (a) Au voisinage de l'état actuel, les orbites se déforment sous l'influence des perturbations planétaires, mais sans permettre de rencontres proches ou de collisions. (b) Dans près de 1% des cas, l'orbite de Mercure peut se déformer suffisamment pour permettre une collision avec Vénus ou le Soleil en moins de 5 Ga. (c) Pour l'une des trajectoires, l'excentricité de Mars augmente suffisamment pour permettre une rencontre proche ou une collision avec la Terre. (d) Ceci entraîne une déstabilisation des planètes telluriques qui permet aussi une collision entre Vénus et la Terre (Figure issue des résultats des simulations numériques de Laskar et Gastineau, 2009).

# L'allure finale du mouvement

J. Chazy

C.A. Sitnikov

V.M. Alexeev



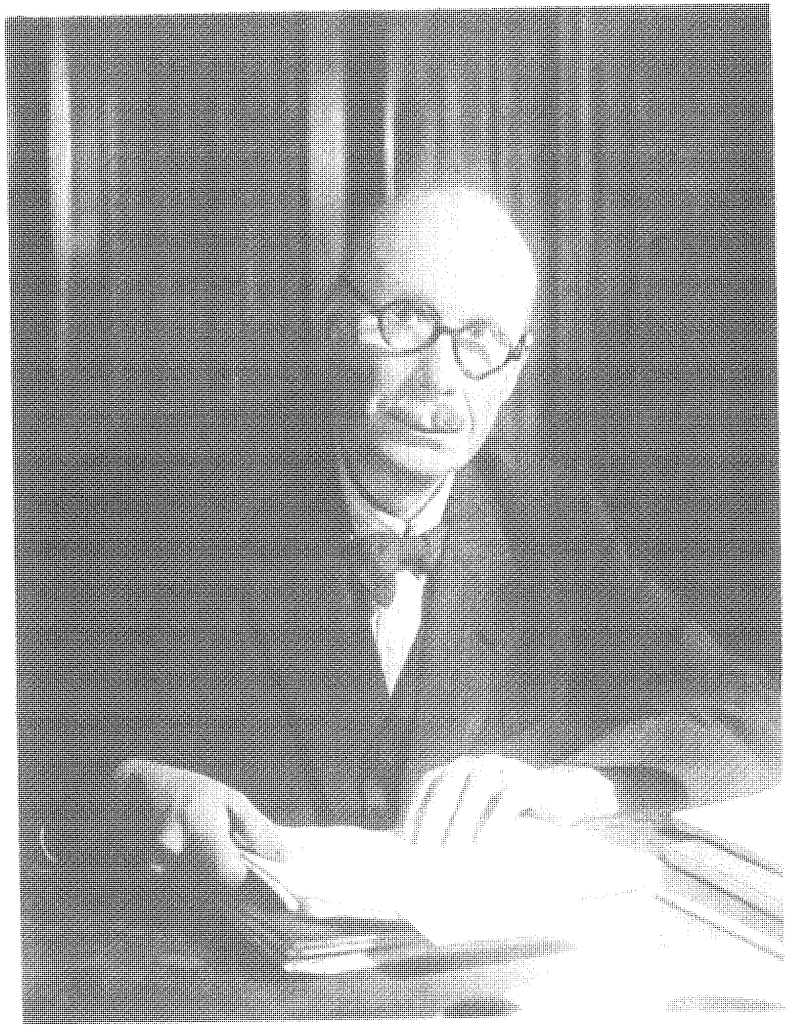


Photo Otto et Pirou

Jean CHAZY

1882-1955

Jean Chazy



# *Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps;*

**Par Jean CHAZY.**

---

**1.** Dans un Mémoire antérieur (1) j'ai classé les mouvements du problème des trois corps quand le temps croît indéfiniment en sept sortes. Je me propose ici de montrer comment sont réparties les quatre sortes de mouvements qui sont possibles quand *la constante des forces vives dans le mouvement par rapport au centre de gravité est négative.*

Ces quatre sortes de mouvement sont les suivantes. Ce sont d'abord les mouvements que j'ai appelés *hyperboliques-elliptiques*, où deux distances mutuelles, soit $r_{13}$ et $r_{23}$, sont des infiniment grands d'ordre 1 par rapport au temps, et où la troisième $r_{12}$ est bornée; en général les éléments osculateurs du mouvement de la masse $m_3$ par rapport au centre de gravité des deux masses $m_1$ et $m_2$ sont hyperboliques pour les valeurs assez grandes du temps, et tendent vers des limites, et les éléments osculateurs du mouvement relatif des deux masses $m_1$ et $m_2$ sont de même elliptiques et tendent vers des limites : on peut dire brièvement que, quand le temps croît indéfiniment, le problème des trois corps se décompose à la limite en deux problèmes des deux corps. Si dans la condition précédente les distances $r_{13}$ et $r_{23}$ sont d'ordre $\frac{2}{3}$ seulement par rapport au temps, les éléments du mouvement de la

(1) *Sur l'allure du mouvement dans le problème des trois corps quand le temps croît indéfiniment* (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. 39, 1922, p. 29-130).

Les exemples de Sitnikov

# STABLE AND RANDOM MOTIONS IN DYNAMICAL SYSTEMS

*With Special Emphasis on Celestial Mechanics*


BY

JÜRGEN MOSER


Hermann Weyl Lectures

The Institute for Advanced Study


PRINCETON UNIVERSITY PRESS

AND

UNIVERSITY OF TOKYO PRESS

PRINCETON, NEW JERSEY

1973



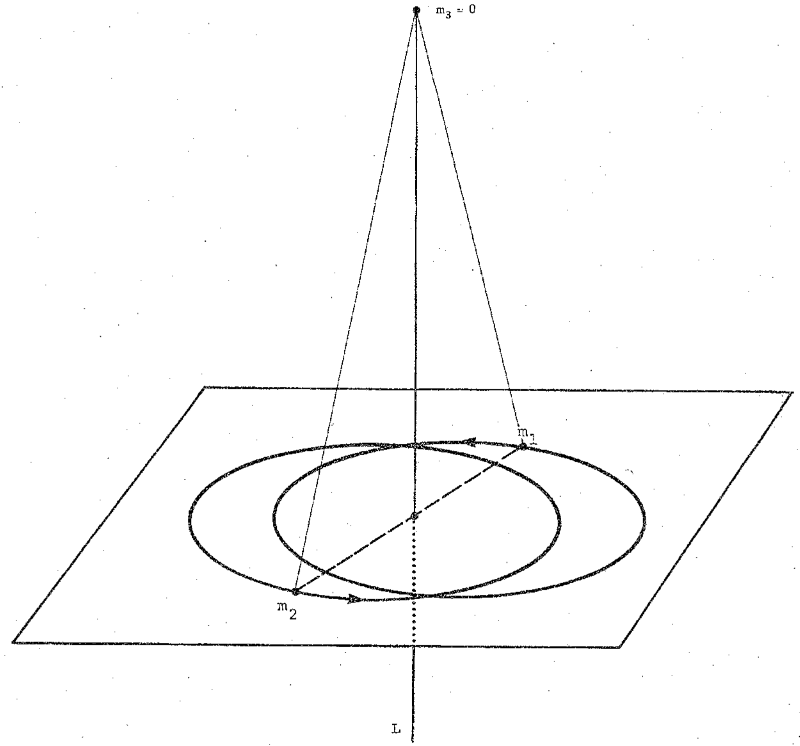




Fig. 7

*Actes, Congrès intern. Math.*, 1970. Tome 2, p. 893 à 907.

# D 12 - SYSTÈMES DYNAMIQUES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

## SUR L'ALLURE FINALE DU MOUVEMENT DANS LE PROBLÈME DES TROIS CORPS

par V. M. ALEXEYEV

### Introduction.

Le "Problème des trois corps" est parmi les plus connus en mathématique, en mécanique et en astronomie. 1687 –l'année où parurent les "Principia" de Newton– doit être considérée comme la date de naissance de ce problème. Depuis lors, soit presque 300 ans, le problème des trois corps a servi de pierre de touche aux générations successives de mathématiciens, mettant à l'épreuve leurs nouvelles méthodes.

A. Wintner remarqua une fois que chaque génération pose à sa propre manière les "questions fondamentales du problème des trois corps", et cherche à les résoudre toujours de sa propre façon. Suivant ici G.D. Birkhoff [1], je crois que du point de vue mathématique la question fondamentale est aujourd'hui celle de la description topologique de la décomposition de l'espace des phases en trajectoires des divers types. La classification des variétés intégrales invariantes est un cas particulier de ce problème.

Le problème ainsi posé est, semble-t-il, encore loin de la solution définitive. C'est pourquoi nous nous limiterons à l'un de ses aspects plus particuliers et plus approximatif, à savoir l'étude de **l'allure finale du mouvement**, c'est-à-dire l'étude des solutions lorsque $t \to \infty$.

La recherche dans cette direction commence avec les Mémoires de J. Chazy [2]-[4]. C'est pour rendre hommage à cet éminent mathématicien et astronome français, dont les travaux ont stimulé en grande partie ce qui est exposé ci-dessous, et aussi pour souligner la continuité de l'effort des diverses générations de mathématiciens, que j'ai donné à cette conférence le titre même de deux de ses Mémoires.

Le Mémoire [2] contient la description de toutes les allures finales unilatérales (c'est-à-dire se rapportant seulement au cas $t \to +\infty$ ou seulement au cas $t \to -\infty$). Du point de vue cosmogonique, tout aussi bien que du point de vue mathématique, il serait particulièrement intéressant de décrire les divers types d'évolution du système, c'est-à-dire déterminer quelles allures finales (pour $t \to +\infty$ et $t \to -\infty$) peuvent appartenir à un même mouvement.

La première partie de la presente conférence est un exposé des résultats obtenus dans cette direction. Dans la deuxième partie je traite des méthodes à l'aide desquelles ces résultats ont été obtenus.

Je voudrais remarquer que c'est A.N. Kolmogorov, qui, en 1954, a attiré pour la première fois mon attention sur ces problèmes. Depuis, son interêt amical et ses précieux conseils m'ont aidé plus d'une fois dans mes recherches.



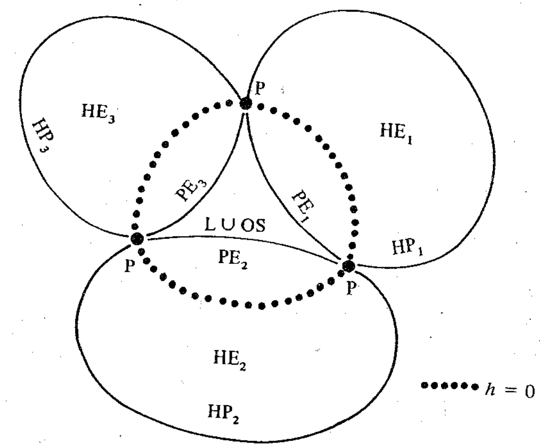



Fig. 1.

La classe $OS$ fut introduite par Chazy à partir de considérations purement logiques, et longtemps l'existence de tels mouvements n'était pas établie. Enfin, en 1959, C.A. Sitnikov [11] a démontré, que $OS \neq \emptyset$. L'existence des autres types de mouvements était déjà connue. Dans ce qui va suivre nous nous limiterons aux types principaux : $H$, $HE_i$, $L$, $OS$, car les autres ont certainement une codimension positive. Pour différencier les types qui se rapportent à $t \to \pm\infty$ nous nous servirons des indices correspondants : $H^+$, $L^-$ etc.

Il est bien connu qu'il n'existe pas dans $M^{12}$ d'intégrales premières algébriques autres que les 4 classiques (Bruns) et même d'intégrales univoques analytiques, dépendant analytiquement des masses $m_i$ (Poincaré).

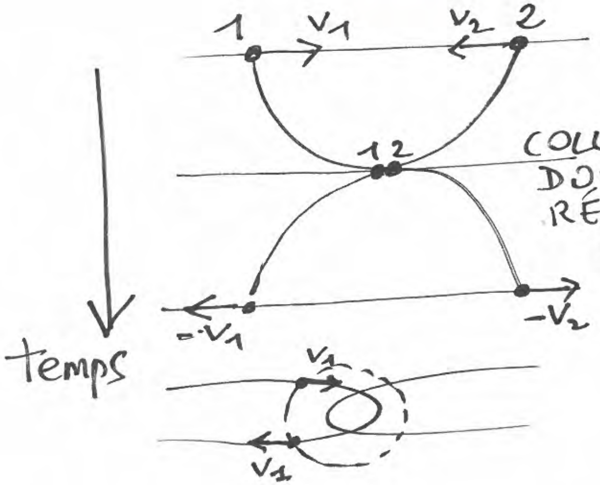
HYPOTHESE. – Dans la région $H \cup \bigcup_i HP_i \cup HE_i$ il existe une famille complète d'intégrales premières univoques analytiques.

Les arguments tendant à confirmer cette hypothèse sont exposés dans [2] et [4].

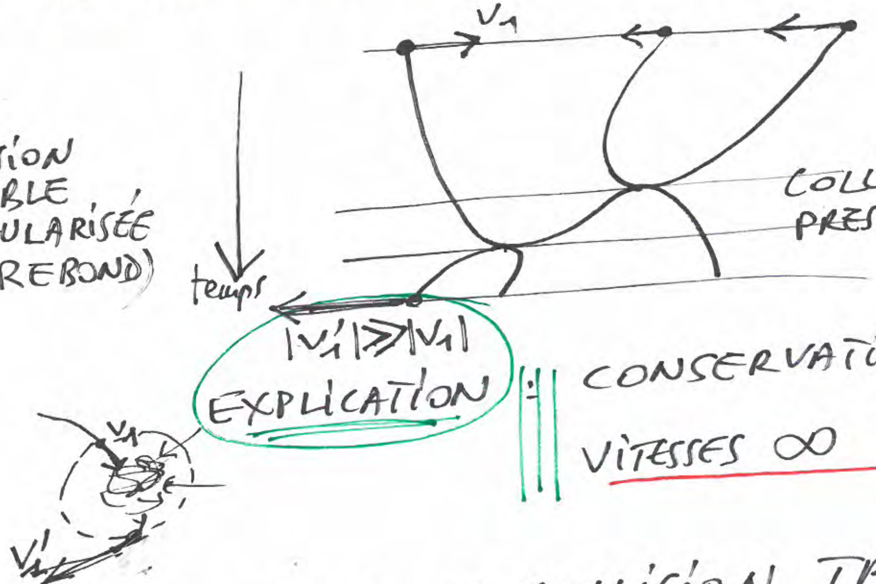
### 3. Evolution du système ; la région $h > 0$ (table 1)

Les Mémoires [3] et [4] affirment que tout mouvement à les mêmes allures finales pour $t \to -\infty$ et $t \to +\infty$. Assez longtemps les mathématiciens et surtout les astronomes furent convaincus qu'une symétrie si remarquable avait effectivement lieu. Une certaine dissonance ne fut apportée que par les examples de L. Becker [5] qui appartenaient manifestement à $HE_1^- \cap HE_2^+$. Néanmoins Chazy les attribua à des erreurs d'intégration numérique et à l'impossibilité de fixer l'allure finale $(t \to \infty)$ par intégration sur un intervalle fini du temps.

# COLLISIONS TRIPLES




COLLISION DOUBLE RÉGULARISÉE (REBOND)




COLLISION PRESQUE TRIPLE

$|v_1'| \gg |v_1|$

EXPLICATION : CONSERVATION DE L'ÉNERGIE

$\Downarrow$

VITESSES $\infty$ À LA COLLISION

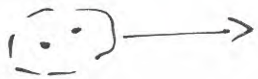
SUNDMAN, BIRKHOFF : PRESQUE COLLISION TRIPLE

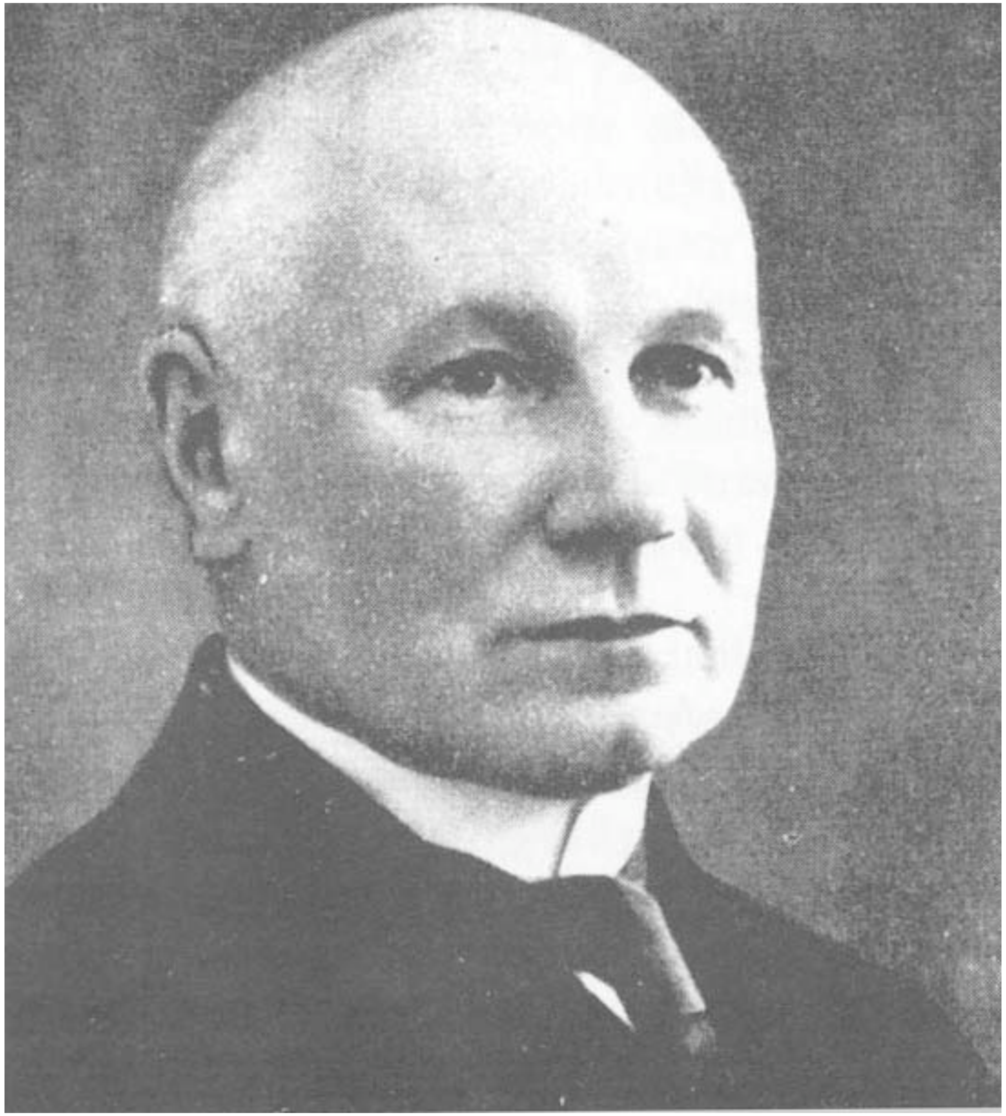
$\Rightarrow$ 1 CORPS S'ÉCHAPPE

## N>3 CORPS : À L'INFINI EN TEMPS FINI

MATHER, MC GEHEE, 1975, GERVER, 1992 XIA

( impossible pour 3 corps : PAINLEVÉ 1895





# MÉMOIRE

sur

# LE PROBLÈME DES TROIS CORPS

PAR

KARL F. SUNDMAN

à HELSINGFORS.

L'objet du présent Mémoire, rédigé sur l'invitation de M. MITTAG-LEFFLER, est de présenter une exposition d'ensemble et un résumé des recherches sur le problème des trois corps que j'ai publiées dans les *Acta Societatis Scientiarum Fennicae.*[1]

Les coordonnées et les composantes des vitesses des corps, que nous choisissons en première ligne comme inconnues du problème, satisfont à un système bien connu d'équations différentielles qui les définissent comme fonctions du temps $t$. Nous nous bornons à étudier un mouvement réel, c'est à dire un mouvement où les coordonnées des corps sont réelles pour les valeurs réelles de $t$.

Ayant défini un tel mouvement en fixant les valeurs des inconnues à l'instant initial, soit $t = 0$, si l'on fait varier $t$ en passant par des valeurs réelles, on trouve que les inconnues restent fonctions holomorphes de $t$ tant que les trois distances entre les corps sont plus grandes que zéro. Quand une des inconnues cesse d'être régulière, on dit aussi que le mouvement cesse d'être régulier. Si cela se produit quand $t$ converge vers une valeur finie $t_1$, alors, comme l'a montré d'abord M. PAINLEVÉ,[2] ou les trois distances convergent vers zéro, ou bien l'une des distances converge vers zéro tandis que les deux autres convergent vers une

[1] *Recherches sur le problème des trois corps*, l. c. tome 34, et *Nouvelles recherches sur le problème des trois corps*, l. c. tome 35.

[2] P. PAINLEVÉ, *Leçons etc.*, professées à Stockholm, Paris 1897.



# MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

## MÉMOIRE SUR LES INTÉGRALES PREMIÈRES DU PROBLÈME DES $n$ CORPS;

PAR M. PAUL PAINLEVÉ.

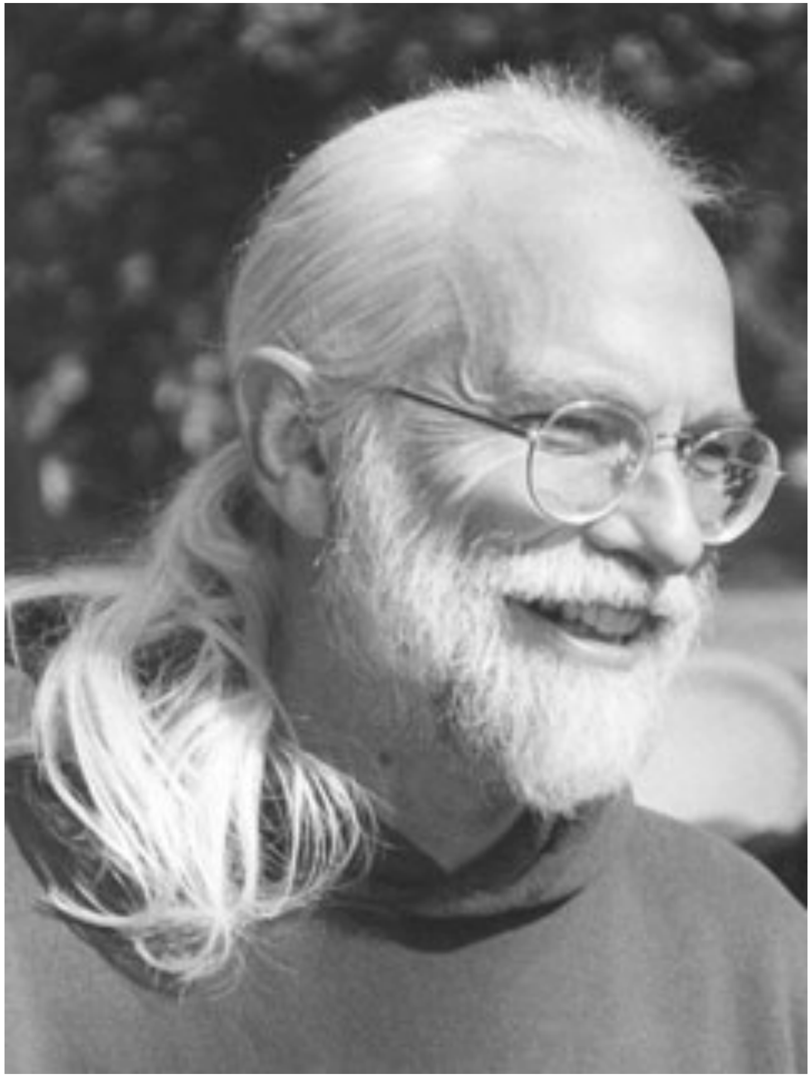
**1.** M. Bruns a démontré (*Acta mathematica*, t. XI, p. 25-97) que le problème des trois corps (ou des $n$ corps) ne saurait comporter, en dehors des intégrales classiques, d'*intégrales premières, algébriques à la fois par rapport aux coordonnées cartésiennes des $n$ corps et à leurs vitesses*. Mais, au lieu de ces intégrales, il est naturel de considérer la classe beaucoup plus étendue des intégrales premières *algébriques par rapport aux vitesses et renfermant les coordonnées d'une façon entièrement quelconque*. Cette classe est évidemment *invariante* quand on substitue aux $3n$ coordonnées $(x_i, y_i, z_i)$ n'importe quels paramètres $q_1, \ldots, q_{3n}$; autrement dit, toute intégrale première

$$F(x'_1, y'_1, \ldots, z'_n, x_1, y_1, \ldots, z_n)$$

algébrique en $x'_1, y'_1, \ldots, z'_n$ se transforme en une intégrale $F_1(q_1, q_2, \ldots, q_{3n}, q'_1, q'_2, \ldots, q'_{3n})$ algébrique en $q'_1, q'_2, \ldots, q'_{3n}$, et réciproquement.

Dans un Mémoire encore inédit (¹) que l'Académie des Sciences a bien voulu couronner (prix Bordin, décembre 1894), j'ai développé certaines propriétés générales des intégrales premières des équations de la Dynamique et j'en ai déduit une méthode de recherche des *intégrales algébriques par rapport aux vitesses*. Cette méthode peut être employée pour un système quelconque, par exemple pour le corps pesant fixé par un point. Appliquée au problème des $n$ corps, elle permet d'établir qu'*il n'existe (en dehors des intégrales classiques) aucune intégrale première algébrique par rapport aux vitesses*. C'est ce résultat dont je voudrais indiquer ici la démonstration sous sa forme la plus rapide et la plus simple.

(¹) Ce Mémoire paraîtra prochainement dans les *Acta mathematica*.





Inventiones math. 27, 191–227 (1974)


# Triple Collision in the Collinear Three-Body Problem*

Richard McGehee (Minneapolis)

## 1. Introduction

Consider $n$ point masses moving in $k$-dimensional space according to the laws of classical mechanics. If particle $i$ has mass $m_i > 0$ and position $q_i \in R^k$, then the negative potential energy is given by

$$U = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|}, \tag{1.1}$$

where $\| \ \|$ denotes the Euclidean norm in $R^k$. The motion of the particles is described by the system of differential equations

$$m_i \ddot{q}_i = \nabla_{q_i} U, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.2}$$

where $\nabla_{q_i} U$ is the gradient of $U$ with respect to $q_i$.

A position $(q_1, \ldots, q_n)$ of the particles will be called a collision if $q_i = q_j$ for some $i \neq j$. The above system of equations is defined everywhere except at collisions. Suppose we are given the position and momentum of the particles at time $t = 0$. If we do not start at a collision, then the standard theorems of differential equations assure the existence and uniqueness of a solution of Eqs. (1.2) on some maximal interval $[0, t^*)$. If $t^* < \infty$, then the solution is said to experience a singularity at $t^*$.

The behavior of a solution as it approaches a singularity is not fully understood, but some of the possibilities are known. If all of the particles approach a limiting position as $t \to t^*$, it is not difficult to show that the limiting position must be a collision [12, 17]. The singularity is then said to be due to collision and the solution is said to end in collision. If $m$ of the particles coincide while the rest have distinct positions, then the collision is called an $m$-tuple collision. It is unknown whether there are singularities not due to collision.

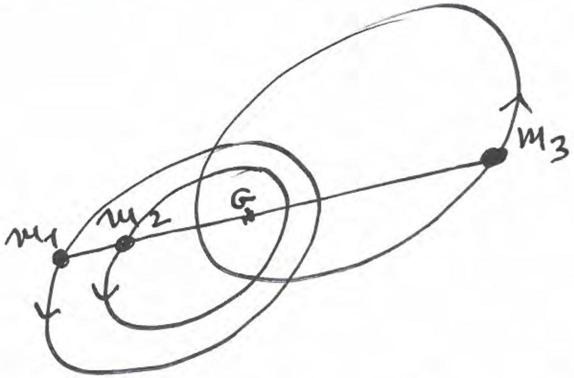
* Supported by NSF Grant GP-38955.

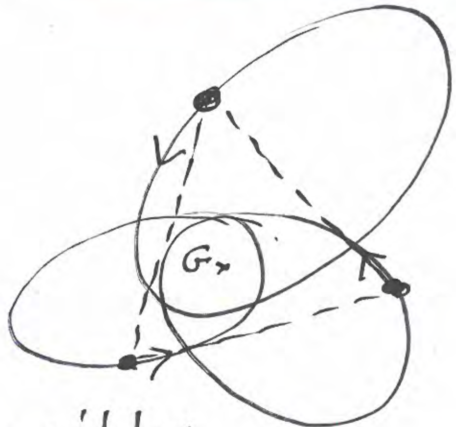
# SOLUTIONS EXACTES

ORIGINE : SYMÉTRIES (translation, rotation)
+ HOMOGÉNÉITÉ du potentiel

$\boxed{\text{SOLUTIONS HOMOGRAPHIQUES}}$ : le triangle des 3 corps reste <u>semblable</u> à lui-même au cours du mouvement et chaque corps décrit une cônique Képlerienne semblable

EULER (1767) (cas colinéaire)
LAGRANGE (1772) (cas général) in "<u>ESSAI SUR LE PROBLÈME DES 3 CORPS</u>"



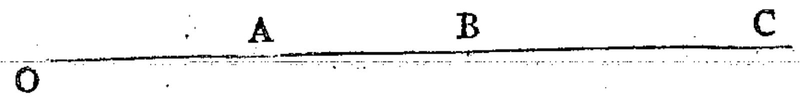

2 "formes" seulement sont possibles

ALIGNÉS
ÉQUILATÉRAL } Configurations centrales

# DE MOTV RECTILINEO TRIVM CORPORVM SE MVTVO ATTRAHENTIVM.

Auctore

L. EVLERO.




I.

Sint A, B, C maſſae trium corporum eorumque diſtantiae a puncto fixo O ad datum tempus $t$ ponantur

$$OA = x, \quad OB = y \quad \text{et} \quad OC = z$$

vbiquidem ſumitur $y > x$ et $z > y$. Hinc motus principia praebent has tres aequationes:

$$\text{I. } \frac{ddx}{dt^2} = \frac{B}{(y-x)^2} + \frac{C}{(z-x)^2};$$

$$\text{II. } \frac{ddy}{dt^2} = \frac{-A}{(y-x)^2} + \frac{C}{(z-y)^2}$$

$$\text{III. } \frac{ddz}{dt^2} = \frac{-A}{(z-x)^2} - \frac{B}{(z-y)^2}$$

vnde facile deducuntur binae aequationes integrabiles:

prior $Adx + Bdy + Cdz = Edt$ et $Ax + By + Cz = Et + F$

poſterior $\frac{Adx^2 + Bdy^2 + Cdz^2}{dt^2} = G + \frac{2AB}{y-x} + \frac{2AC}{z-x} + \frac{2BC}{z-y}$

Hinc autem ob defectum tertiae aequationis integralis parum ad motus cognitionem concludere licet.

2. Sta-

# ESSAI

SUR

# LE PROBLÈME DES TROIS CORPS.

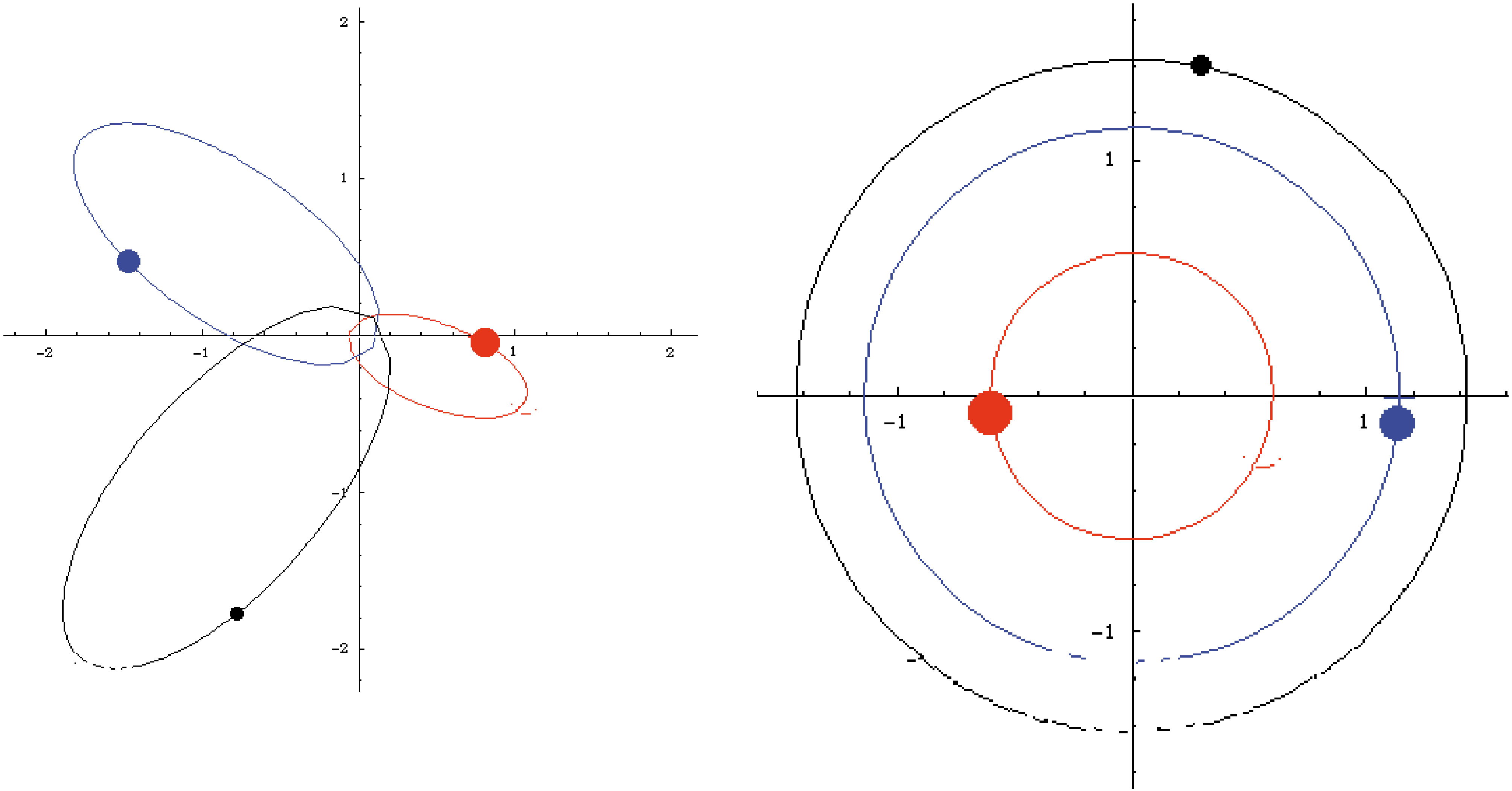
Juvat integros accedere fontes.

LUCR.

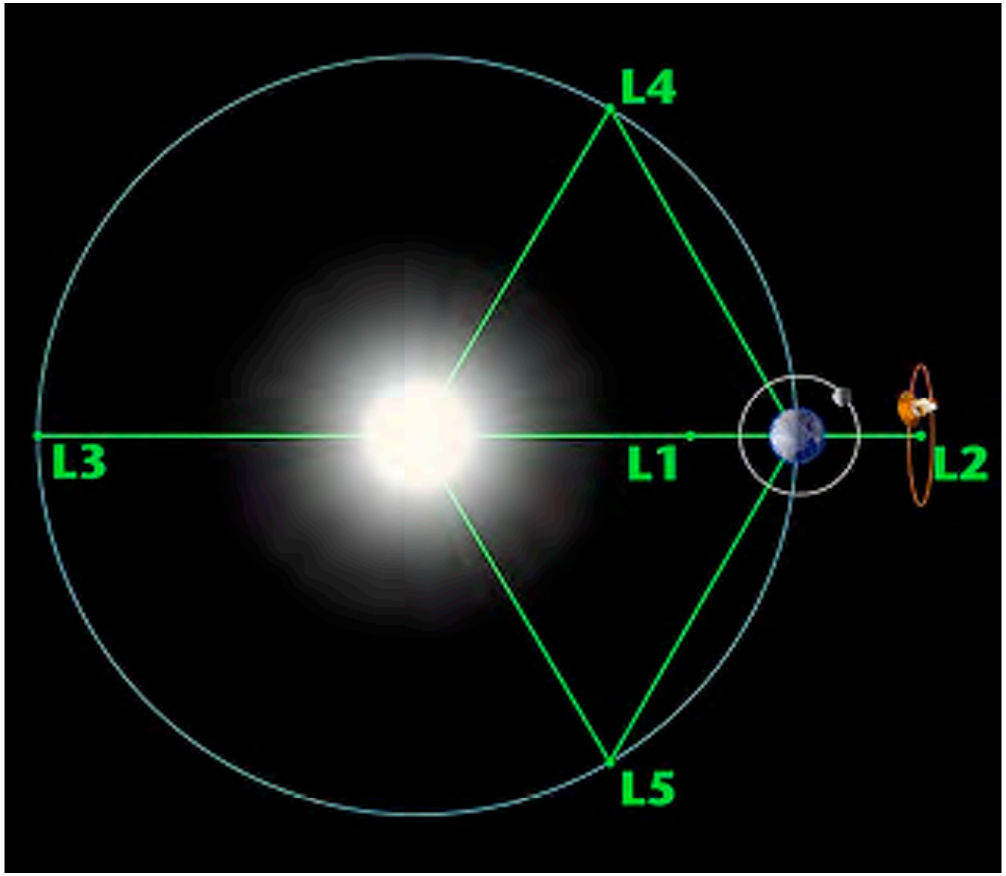
(Prix de l'Académie Royale des Sciences de Paris, tome IX, 1772.)

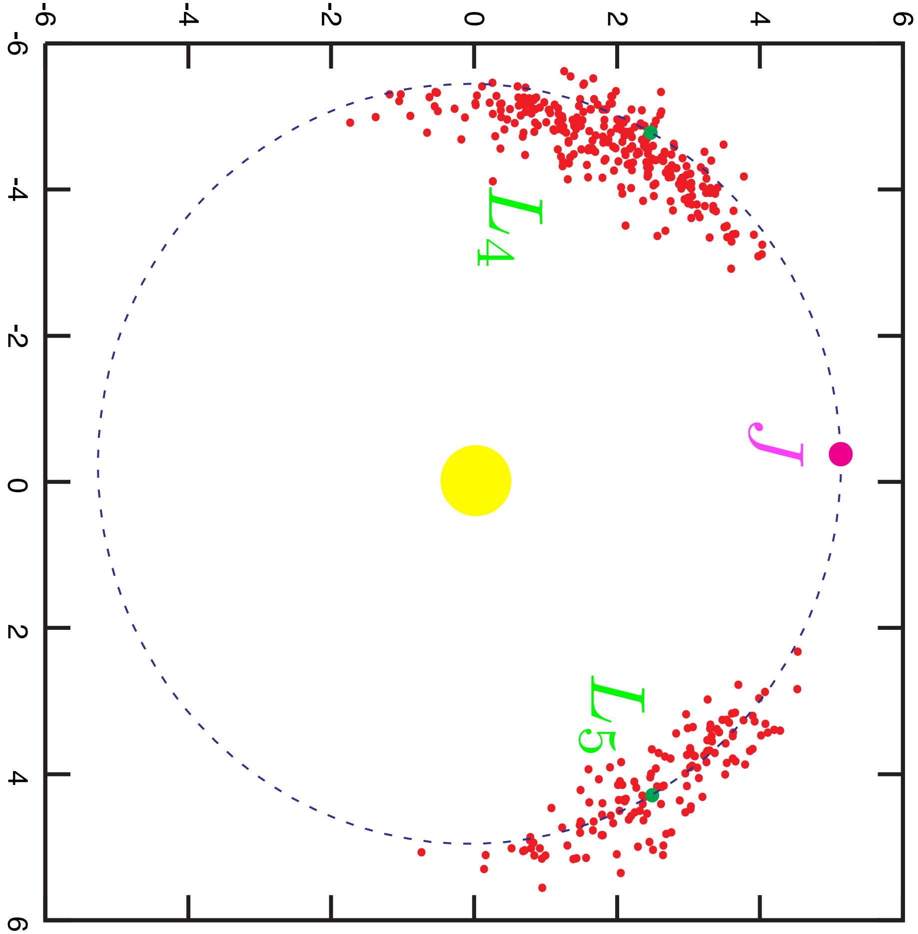
## AVERTISSEMENT.

Ces Recherches renferment une Méthode pour résoudre le Problème des trois Corps, différente de toutes celles qui ont été données jusqu'à présent. Elle consiste à n'employer dans la détermination de l'orbite de chaque Corps d'autres éléments que les distances entre les trois Corps, c'est-à-dire, le triangle formé par ces Corps à chaque instant. Pour cela, il faut d'abord trouver les équations qui déterminent ces mêmes distances par le temps; ensuite, en supposant les distances connues, il faut en déduire le mouvement relatif des Corps par rapport à un plan fixe quelconque. On verra, dans le premier Chapitre, comment je m'y suis pris pour remplir ces deux objets, dont le second surtout demande une analyse délicate et assez compliquée. A la fin de ce Chapitre, je ras-



2
1
−2
−1
1
2
−1
−2
1
−1
1
−1

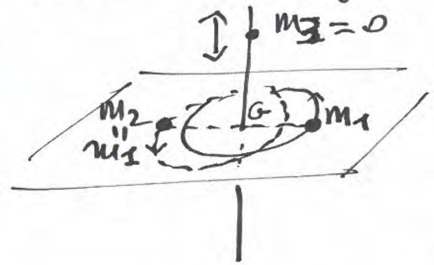

L4
L3
L1
L2
L5


$L_4$
$J$
$L_5$

# SOLUTIONS NON PERTURBATIVES

**ex 1 :** DYNAMIQUE SYMBOLIQUE (méthodes géométriques)

Solutions de SITNIKOV (1960)




Les passages de part et d'autre du plan de $m_3$ sont régis par un jeu de pile ou face

**ex 2 :** CALCUL DES VARIATIONS (méthodes analytico-géométriques)

POINCARÉ (1896)

Minimiser l'action $S = \int_a^b \underbrace{(E_{\text{cinétique}} - E_{\text{potentielle}})}_{\text{Lagrangien}} \, dt$

le long d'une courbe fermée dans l'espace de configuration

$\Rightarrow$ solution périodique s'il n'y a pas de collision

(Poincaré remplace $\frac{1}{r^2}$ par $\frac{1}{r^3}$ (force forte) pour éliminer ce problème).

A. VENTURELLI (2000) On obtient ainsi les sol  de Lagrange

**Appendice 2.** La note aux C.R.A.S. de Poincaré (30 novembre 1896).

# SUR LES SOLUTIONS PÉRIODIQUES
## ET LE PRINCIPE DE MOINDRE ACTION

*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 123, p. 915-918 (30 novembre 1896).

La théorie des solutions périodiques peut, dans certains cas, se rattacher au principe de moindre action.

Supposons trois corps se mouvant dans un plan et s'attirant en raison inverse du cube des distances ou d'une puissance plus élevée de ces distances; j'appelle $a$, $b$, $c$ ces trois corps.

L'énergie cinétique T est essentiellement positive et il en est de même de la fonction des forces U, qui est égale à une somme de termes de la forme $\frac{kmm'}{r^n}$, où $k$ est une constante positive, $m$ et $m'$ les masses de deux des trois corps, $r$ leur distance et $n$ un exposant au moins égal à 2.

L'action hamiltonienne

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (T + U)\, dt$$

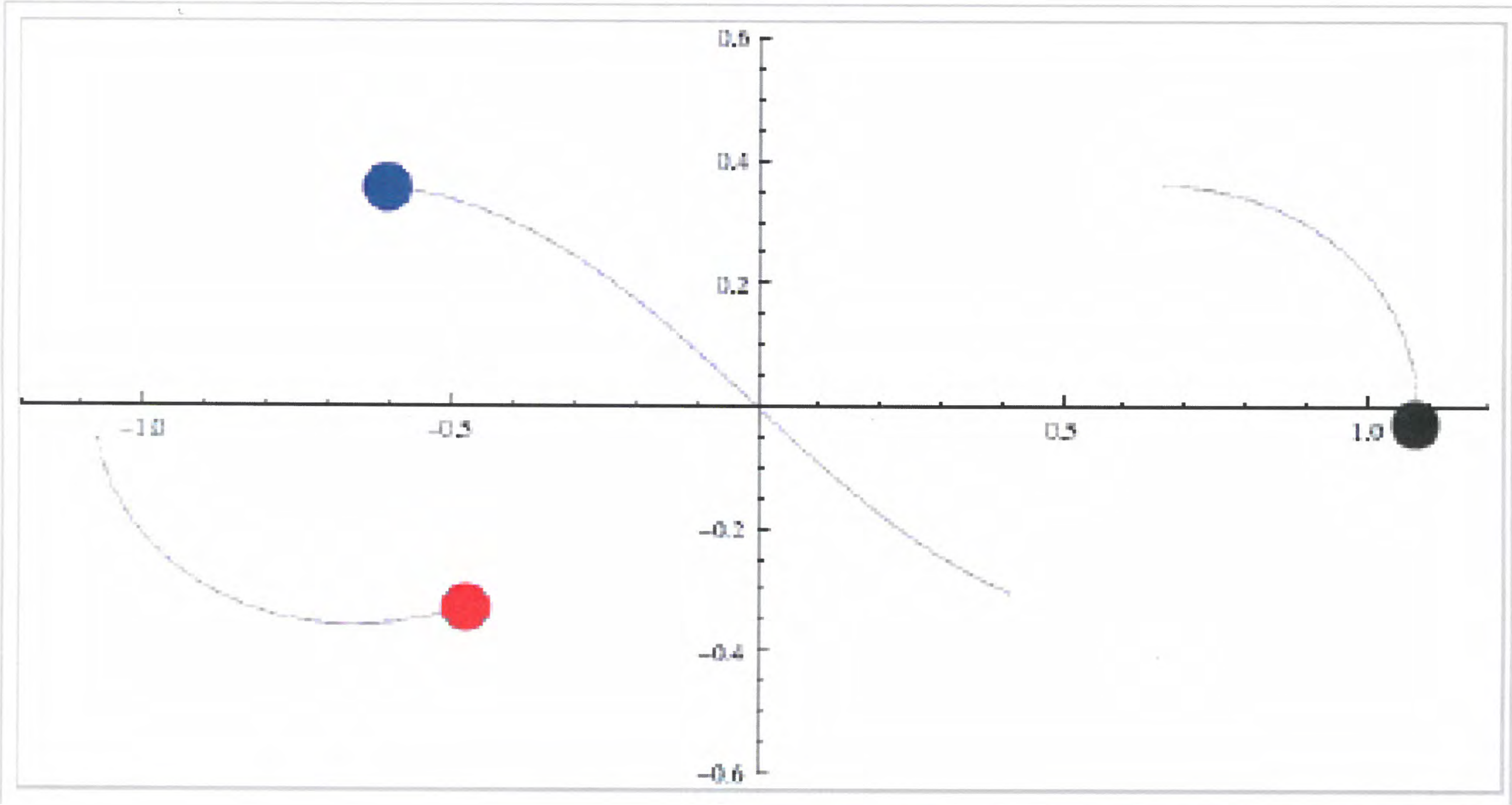
sera donc essentiellement positive.

Considérons une classe de trajectoires de nos trois corps $a$, $b$, $c$; ce seront des trajectoires fictives, c'est-à-dire ne satisfaisant pas aux équations du mouvement; mais elles seront soumises aux conditions suivantes :

1° Au temps $t_1$ les distances des trois corps seront les mêmes qu'au temps $t_0$; les vitesses seront les mêmes en grandeur et feront les mêmes angles avec les côtés du triangle des trois corps; en d'autres termes, la figure formée par les trois corps et par les droites qui représentent leurs vitesses aura repris à l'époque $t_1$ la même forme qu'elle avait à l'époque $t_0$; ou bien encore les

# CAS DE TROIS MASSES ÉGALES

Minimisation sous contrainte de symétrie D6




A. CHENCINER & R. MONTGOMERY (2000)

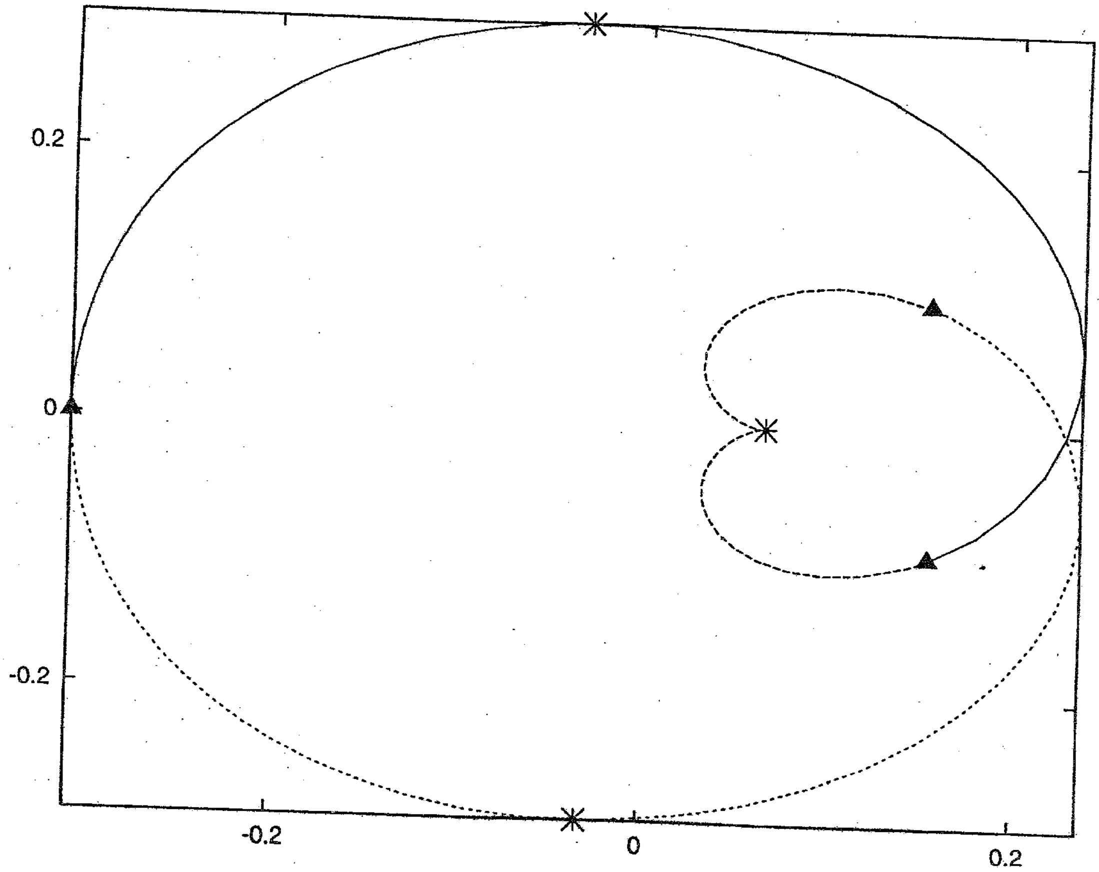
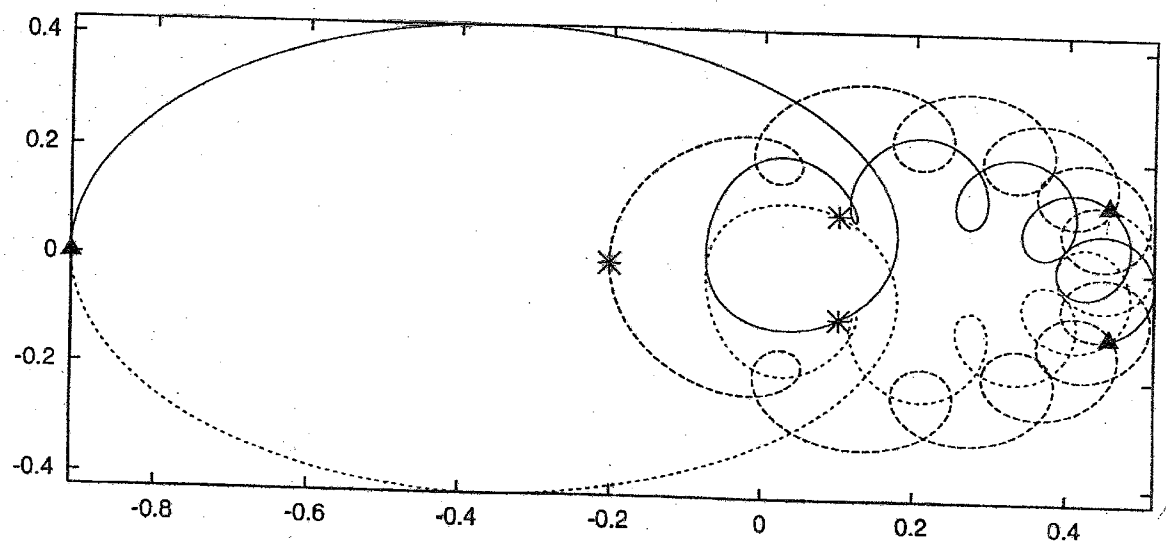
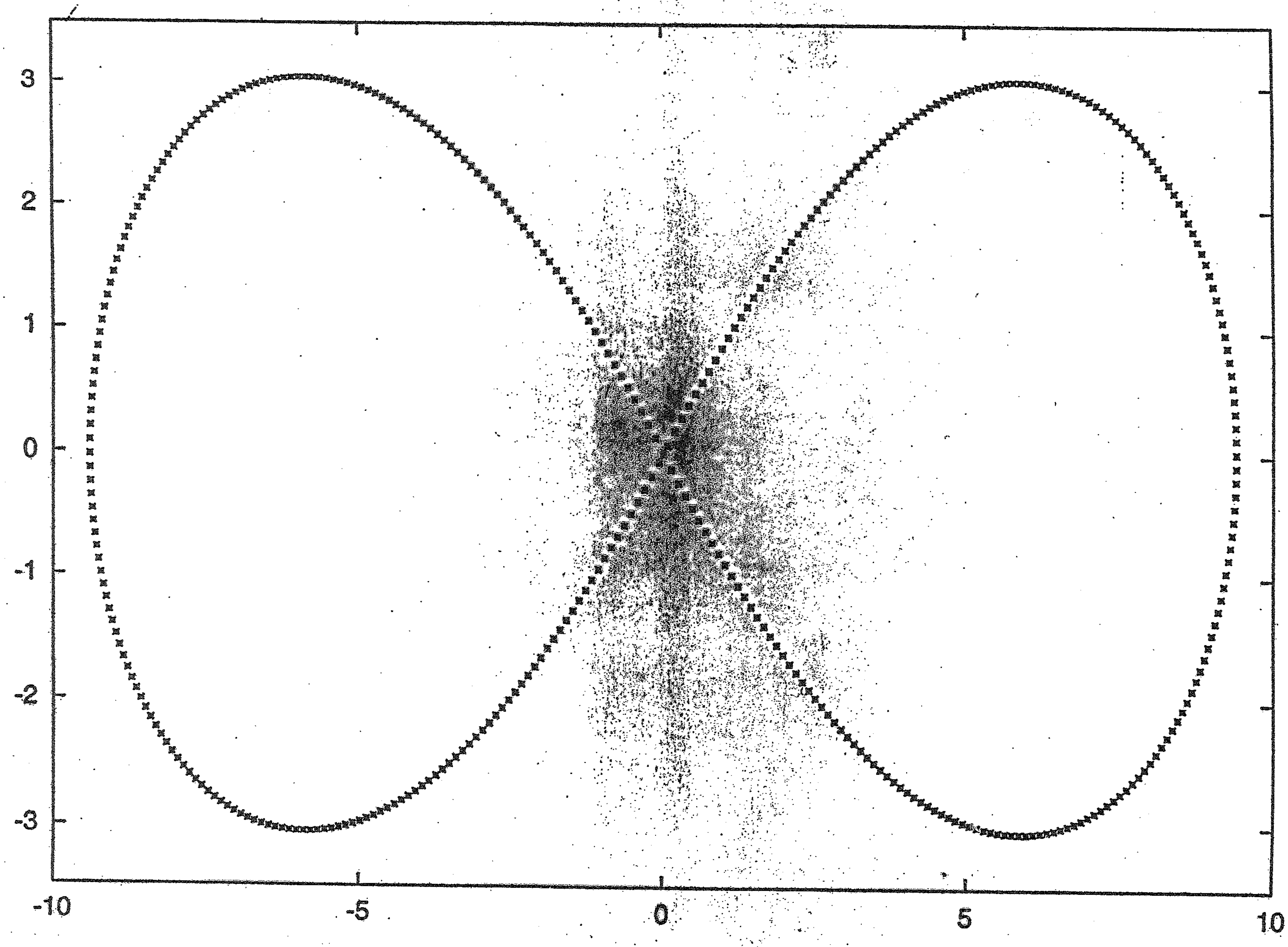



FIGURE BY C. SIMÓ



399 cdfs run 100T



... et pour finir,

une page de publicité

# Three body problem

## From Scholarpedia

Alain Chenciner (2007), Scholarpedia, 2(10):2111. doi:10.4249/scholarpedia.2111 revision #79311 [link to/cite this article]



Curator: Dr. Alain Chenciner, Math Dept Paris 7 University and IMCCE (Paris Observatory), France

The problem is to determine the possible motions of three point masses $m_1$, $m_2$, and $m_3$, which attract each other according to Newton's (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Newton.html) law of inverse squares. It started with the perturbative studies of Newton himself on the *inequalities* of the lunar motion[1] (http://en.wikisource.org/wiki/Philosophiae_Naturalis_Principia_Mathematica/Preface) . In the 1740s it was constituted as the search for solutions (or at least approximate solutions) of a system of ordinary differential equations by the works of Euler (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler.html) , Clairaut (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Clairaut.html) and d'Alembert (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/D'Alembert.html) (with in particular the explanation by Clairaut of the motion of the lunar apogee). Much developed by Lagrange (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lagrange.html) , Laplace (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Laplace.html) and their followers, the mathematical theory entered a new era at the end of the 19th century with the works of Poincaré (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Poincare.html) and since the 1950's with the development of computers. While the two-body problem is integrable and its solutions completely understood (see [2] (http://en.wikipedia.org/wiki/Two-body_problem) ,[AKN],[Al],[BP]), solutions of the **three-body problem** may be of an arbitrary complexity and are very far from being completely understood.

## Contents

# DIVERS ARTICLES & CONFÉRENCES :

www.imcce.fr/Equipes/ASD/person/chenciner/chenciner.html

# DIVERS ARTICLES & CONFÉRENCES :

www.imcce.fr/Equipes/ASD/person/chenciner/chenciner.html