

La localisation forte d'Anderson



En 1958, Philip W. Anderson a étudié l'effet des impuretés sur les propriétés de transport électronique dans les cristaux imparfaits. Il a prédit l'existence d'un régime localisé, correspondant à une absence totale de diffusion quand le désordre est suffisamment fort, et d'une transition délocalisé-localisé (métal-isolant) avec des caractéristiques bien particulières quand on augmente la force du désordre. Cet effet, dû à des interférences quantiques, est difficile à mettre en évidence expérimentalement, car les effets parasites tels que la diffusion inélastique et les interactions électron-électron perturbent fortement le scénario d'Anderson. Aujourd'hui, la localisation forte d'Anderson a été observée dans la conductance électronique, dans la transmission des ondes électromagnétiques et des ultrasons, et directement dans l'expansion d'ondes de matière atomique (gaz atomiques froids). Les articles qui suivent présentent trois avancées importantes sur ce qui est devenu un phénomène majeur en physique : la transition d'Anderson, une transition de phase gouvernée par des effets quantiques.

Dans un métal idéal, la conduction électrique est assurée par un gaz d'électrons quasi-libres mis en mouvement par le champ électrique extérieur, le cristal périodique sous-jacent n'ayant pour effet que de modifier leur relation de dispersion. La plupart des cristaux réels comportent des défauts, tels que des lacunes ou des impuretés, qui peuvent modifier radicalement leur comportement électrique. En fait, les électrons vont subir de nombreuses collisions sur les imperfections du cristal, acquérant un mouvement global *a priori* diffusif. Une première approche quantitative de ce phénomène est fournie par la théorie classique de Drude, qui montre que la conductivité d'un métal est déterminée par une longueur caractéristique unique : le libre parcours moyen, c'est-à-dire la distance moyenne parcourue par un électron entre deux diffusions successives. Ainsi, si le libre parcours moyen est grand, l'électron peut se propager rapidement sur de grandes distances, et la conductivité est élevée. Quand on augmente le degré de désordre dans l'échantillon, le libre parcours moyen – et donc la conductivité – chutent, ce qui est couramment observé en laboratoire. Il faut toutefois prendre en compte la nature quantique de l'électron, c'est-à-dire le fait qu'il faut le décrire par une fonction d'onde plutôt que comme une particule classique.

Or, qui dit « fonction d'onde » dit « interférence » : en particulier, la partie de la fonction d'onde électronique diffusée par une impureté peut interférer avec la partie non diffusée, ce qui peut affecter considérablement le transport. On voit alors apparaître une deuxième longueur caractéristique : la longueur d'onde de de Broglie de l'électron, qui est la taille caractéristique pour les effets d'interférence quantique. C'est le rapport de ces deux longueurs qui va déterminer la nature du transport électronique en présence de désordre. Si le libre parcours moyen est bien supérieur à la longueur d'onde de de Broglie, la phase accumulée entre deux diffusions successives est très grande devant 2π , et les effets d'interférence se moyennent à zéro : on s'attend donc à retrouver le comportement classique du modèle de Drude. C'est bien le cas dans un métal usuel où le libre parcours moyen est de l'ordre de 100 nm alors que la longueur d'onde de de Broglie est d'environ 1 nm.

En 1958, Philip W. Anderson s'est demandé si le modèle de Drude restait valable quand le désordre était élevé. Il a alors imaginé le modèle de cristal désordonné le plus simple (voir *encadré 1*) et, après un calcul complexe et délicat, est arrivé à la conclusion suivante :

Article proposé par :

Dominique Delande, delande@spectro.jussieu.fr
Laboratoire Kastler Brossel, UMR 8552, UPMC / CNRS / ENS, Paris

Jean-Claude Garreau, jean-claude.garreau@univ-lille1.fr
Laboratoire de Physiques des Lasers, Atomes et Molécules, UMR 8523, CNRS / Univ. Lille 1, Villeneuve-d'Ascq

Laurent Sanchez-Palencia, laurent.sanchez-palencia@institutoptique.fr
Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique, Institut d'optique / CNRS / Univ. Paris-Sud, Palaiseau

Bart van Tiggelen, bart.van-tiggelen@grenoble.cnrs.fr
Laboratoire de Physique et de Modélisation des Milieux Condensés, UMR 5493, Univ. Joseph Fourier / CNRS, Grenoble



Encadré 1

Le modèle d'Anderson

Le modèle utilisé par Anderson pour décrire un cristal imparfait utilise une approche de type *liaisons fortes à une seule bande* (*tight-binding*) où l'on décompose la fonction d'onde de l'électron sur une base d'états localisés $|i\rangle$ dans chaque site i d'un réseau périodique. En insérant ce développement dans le hamiltonien, on obtient :

$$H = \sum_i W_i |i\rangle\langle i| + \sum_{\langle i,j \rangle} V |i\rangle\langle j| \quad (2)$$

où W_i est l'énergie « diagonale » – c'est-à-dire l'énergie « attachée » au site i – et V le couplage par effet tunnel entre sites, la somme sur $\langle i,j \rangle$ ne portant que sur des sites immédiatement voisins. Le désordre est introduit en considérant les W_i comme des variables aléatoires uniformément réparties dans un intervalle $[-W/2, +W/2]$ (voir *figure E1a*). La dynamique est alors gouvernée par le paramètre W/V . Pour $W = 0$, le spectre est continu mais est limité aux énergies $-2dV < E < 2dV$, où d est la dimension.

Dans le cas unidimensionnel ($d = 1$), les fonctions d'onde sont localisées pour toutes les valeurs de W/V et pour toutes les énergies. On peut comprendre ce résultat de façon heuristique en considérant un paquet d'onde qui se propage dans le réseau : à chaque site, une partie du paquet est transmise et une autre réfléchi. Dans un réseau parfait, ces processus se font en phase d'un site à l'autre, alors que dans un réseau désordonné, les paquets d'onde ont une phase aléatoire et interfèrent destructivement. Chaque site a donc en moyenne l'effet de réfléchir une fraction du paquet proportionnelle à l'amplitude du paquet incident, ce qui conduit à une décroissance exponentielle de l'amplitude transmise. En dimension 2, tous les états sont également localisés. En dimension 3 et supérieure, il existe un « seuil de mobilité » (*mobility edge*) séparant une région dite « métallique » où les états sont délocalisés d'une région dite « isolante » où les états sont localisés (voir *figure E1b*). Si $W/|V| \ll 1$, seuls les états au voisinage des bords du spectre $E \simeq \pm 2dV$ sont localisés, et la force de couplage entre sites (le *hopping*) V domine le transport pour les autres énergies. Pour $W/|V| > 16.5$ (en dimension 3) les états à toute énergie sont

localisés. L'exposant critique a été déterminé numériquement et vaut $\nu = 1.57 \pm 0.02$.

Une variété de modèles « cousins » a été étudiée, où par exemple on considère des distributions d'énergie sur site, W_i , plus compliquées, ou un couplage tunnel V fluctuant de site à site. En fait, le mécanisme de la transition d'Anderson est *universel*, c'est-à-dire indépendant des détails microscopiques du modèle, de sorte que beaucoup de ces modèles se comportent comme le modèle originel d'Anderson. C'est aussi pour cela que la même transition d'Anderson est observée dans des situations physiques très différentes.

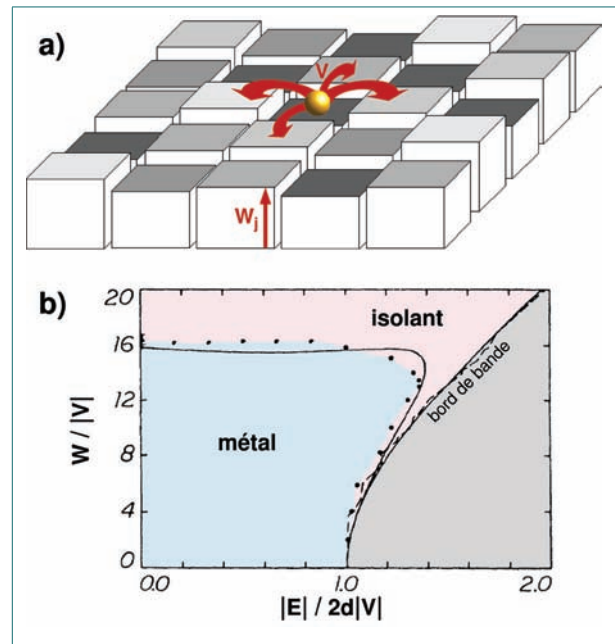


Figure E1 – a) Représentation schématique du modèle d'Anderson en dimension $d = 2$. b) Diagramme de phase obtenu pour le modèle d'Anderson en dimension $d = 3$. La transition métal-isolant est obtenue numériquement (points) et la ligne continue est le résultat de la théorie « auto-consistante » [adapté de J. Kroha *et al.*, Phys. Rev. B **41**, 888 (1990)].

pour un désordre suffisamment élevé, le mouvement diffusif des électrons est complètement stoppé ! La conductivité s'annule et le matériau devient isolant. C'est l'une des principales caractéristiques de la localisation forte (voir *encadré 2*).

Bien qu'il soit naturel que les impuretés diminuent la conductivité des métaux, il est surprenant qu'elles puissent l'annuler totalement. Pour comprendre ce résultat en termes simples, on peut considérer les différents processus « en boucle » où l'électron est diffusé par une suite d'impuretés et revient à son point initial. Même sans considérer les interférences quantiques, il n'est pas difficile d'imaginer que la probabilité que l'électron revienne à son point de départ est plus grande quand le milieu est fortement diffusant. Lorsqu'on inclut les interférences,

cette probabilité est encore amplifiée par l'interférence constructive entre l'amplitude associée à une boucle donnée et celle associée à la même boucle parcourue en sens inverse. Dans cette image, la dimension de l'espace joue un rôle crucial : plus elle est grande, plus l'électron se voit offrir de chemins différents et moins les effets d'interférence sont importants.

C'est en dimension 1 que l'on comprend le mieux la situation : l'électron, confiné le long d'une droite, ne peut aller qu'à gauche ou à droite, et la structure des chemins est suffisamment simple pour que l'on puisse mener des calculs exacts. Même quand le désordre est petit (c'est-à-dire le libre parcours moyen grand devant la longueur d'onde de de Broglie), on montre que les effets d'interférence sont si forts que l'électron ne peut pas diffuser et



Encadré 2

Différents points de vue sur la localisation d'Anderson

Si on prend le point de vue « transport », la localisation d'Anderson se caractérise par l'annulation stricte de la constante de diffusion (« *absence of diffusion* » selon l'article d'Anderson de 1958) dans la limite des très grands systèmes.

Tous les phénomènes de localisation et toutes les transitions métal-isolant ne sont pas de la localisation d'Anderson ! Si on met par exemple une particule dans un puits de potentiel suffisamment profond, elle est évidemment localisée, en mécanique classique tout comme en mécanique quantique. On sait aussi que les interactions entre particules peuvent les localiser par formation d'un « isolant de Mott », comme cela a été mis en évidence expérimentalement dans des gaz atomiques ultra-froids au début des années 2000. Il n'y a pas aujourd'hui unanimité sur la meilleure définition de la localisation d'Anderson et chaque spécialiste du sujet défend la sienne. L'existence de différents points de vue sur le même phénomène, pour peu qu'ils ne soient pas contradictoires, enrichit notre compréhension physique.

Il faudra alors bien discriminer un matériau localisé au sens d'Anderson d'un matériau à bande interdite où la densité d'états s'annule. Allumer une lampe dans un milieu localisé sera peu remarqué par un observateur à l'extérieur car les ondes seront localisées autour de la lampe. Allumer une lampe dans un matériau à bande interdite ne sera pas remarqué non plus mais pour une autre raison : la lampe n'émet pas !

La localisation d'Anderson est déterminée par le degré de désordre du système et est due aux interférences (c'est-à-dire qu'elle disparaît si l'on supprime ou atténue les effets d'interférence en perturbant la phase de la fonction d'onde). D'un point de vue dynamique, elle se traduit par le fait qu'un paquet d'onde initialement localisé dans l'espace ne s'étendra pas à l'infini à la limite des temps très longs (son étalement $r(t)$ est borné). Ce critère de localisation est plus contraignant que le critère d'annulation de la constante de diffusion du mouvement brownien, définie par $D = \langle r^2(t) \rangle / t$; en effet cette constante s'annule dès lors que le paquet d'onde s'étale moins vite que le mouvement brownien, ce qui peut être obtenu avec un paquet qui s'étale tout de même à l'infini (il suffit que $\langle r^2(t) \rangle$ diverge moins vite que linéairement en t).

Si on s'intéresse maintenant aux propriétés des états propres du système (dans la limite de taille infinie), la localisation d'Anderson se traduit par la localisation des états propres, qui décroissent rapidement – en général exponentiellement – à grande distance, ou encore par le fait que le spectre d'énergie est discret et dense. Ce critère, préféré par les mathématiciens, est difficile à vérifier expérimentalement car les échantillons ont toujours une taille finie, avec souvent des interfaces ouvertes. Pour un physicien, c'est alors dans les « pertes » vers l'extérieur que se cachent les traces de la localisation forte.

finit toujours par être localisé. C'est un « théorème mathématique » qui s'applique à toute équation d'onde avec un potentiel aléatoire à une dimension. La dimension 2 est plus délicate : il y a plus de chemins de diffusion possibles, les effets d'interférence sont moins marqués, mais tout de même suffisants pour localiser l'électron. Ainsi, il n'existe pas de « vrai » métal en dimension 1 et 2 pour cause de localisation forte. En revanche, en dimension 3 ou supérieure, les effets d'interférence dans des milieux modérément diffusants ralentissent la diffusion de l'électron, mais ne parviennent pas forcément à l'arrêter : on parle alors de localisation faible. Ce n'est que pour un désordre suffisamment fort que la localisation forte se produit. On montre que la transition a lieu quand la phase accumulée entre deux diffusions successives est de l'ordre de 2π , c'est-à-dire quand le libre parcours moyen est comparable à la longueur d'onde de Broglie : c'est le célèbre critère de Ioffe-Regel.

Quelle est la nature de la transition d'Anderson séparant états délocalisés à faible désordre et états localisés à fort désordre ? Cette question a longtemps fait l'objet d'une vive polémique, mais semble aujourd'hui tranchée. C'est une transition dite « du second ordre » où les quantités physiques varient de manière continue à la transition, et non pas une transition du premier ordre (comme le changement d'état liquide-vapeur), comme l'avait pensé N. Mott. Ainsi, le coefficient de diffusion s'annule doucement quand on tend vers le point de transition du côté

délocalisé tandis que, du côté localisé, la longueur de localisation ξ diverge en loi de puissance au point critique W_c :

$$\xi \propto (W - W_c)^{-\nu} \quad (1)$$

où W est le paramètre mesurant la force du désordre, W_c est appelé seuil de mobilité et ν est l'exposant critique de la transition. Le fait que la longueur de localisation diverge à la transition – et devient donc plus grande que toutes les longueurs microscopiques du problème – suggère que le voisinage de la transition est gouverné par cette unique longueur caractéristique. Cette observation – fondée sur une relation surprenante établie par D. Thouless entre la conductivité électronique et le spectre du hamiltonien – a motivé le développement par E. Abrahams, P.W. Anderson, D. Licciardello et T.V. Ramakrishnan en 1979 d'une théorie d'échelle à un seul paramètre reproduisant les caractéristiques essentielles de la localisation d'Anderson. Selon cette théorie, la localisation d'Anderson est un phénomène « universel », c'est-à-dire qu'elle se manifeste de manière similaire, indépendamment des détails microscopiques, pour des systèmes apparemment différents tels que les ondes électromagnétiques, les ondes (quantiques) de matière, les ondes acoustiques ou les ondes sismiques, pourtant régies par des équations d'onde différentes.

Qu'en est-il du côté expérimental ? Des transitions « métal-isolant » ont bel et bien été observées. Mais sont-



elles induites par la localisation forte ? Un problème de fond avec les électrons, c'est que les mesures sont toujours effectuées à température non nulle. Or les phonons thermiques produisent des effets inélastiques (décohérence dans un langage plus moderne) qui détruisent les interférences quantiques. De plus, il est difficile de contrôler le désordre de façon précise. Enfin, les effets d'interaction électron-électron sont tels qu'ils modifient sensiblement le scénario d'Anderson, et notamment les exposants critiques. A cela s'ajoute le fait que les fonctions d'onde électroniques n'étant pas directement accessibles dans les expériences, il faut mesurer des quantités « globales » comme la conductance ou la constante diélectrique pour caractériser la transition.

La localisation d'Anderson étant un phénomène ondulatoire général, il est tentant de la rechercher en utilisant d'autres types d'ondes que les ondes électroniques dans les solides. La « théorie de la peinture blanche », proposée par P.W. Anderson, a lancé dans les années 1980 une discussion sur la localisation forte des ondes classiques, en particulier à la suite de l'observation de la localisation faible de la lumière à Grenoble (G. Maret et R. Maynard) et Amsterdam (A. Lagendijk). Comme on l'a vu, en dimension 3, la localisation nécessite un milieu très diffusant, donc très inhomogène. Pour se rapprocher du critère de Ioffe-Regel en utilisant des photons, il faut un brouillard avec un libre parcours moyen de l'ordre de 200 nm, soit 10 millions de fois plus dense que le brouillard sur une piste de ski ! La fabrication de matériaux d'une telle complexité constitue un véritable défi expérimental. De plus, les matériaux optiques sont généralement absorbants, ce qu'il faut éviter car l'absorption entraîne une décroissance spatiale exponentielle de la transmission, tout comme la localisation d'Anderson.

Depuis quelques années, on assiste à une spectaculaire renaissance de l'activité expérimentale, théorique, et même mathématique sur la localisation d'Anderson. Les mathématiciens français ont beaucoup contribué à la compréhension fondamentale de la localisation forte. Par exemple, F. Germinet, P. Hislop et A. Klein ont démontré en 2007 l'existence de la localisation d'Anderson à basse énergie dans un modèle continu en dimension 3, une conclusion de premier plan. En physique, la localisation forte a mobilisé une communauté assez interdisciplinaire en France. Durant l'année 2008, pas moins de trois contributions importantes – dont nous présentons ci-dessous les grandes lignes et qui sont détaillées dans les articles suivants – ont été réalisées par des équipes du CNRS, seules ou en collaboration.

Sur le front des ondes classiques, plusieurs groupes dans les années 1990 ont affirmé avoir observé la localisation en utilisant des ultrasons (R. Weaver), de la lumière infrarouge (D. Wiersma), des micro-ondes (A. Genack) ou la lumière visible (G. Maret). Ces expériences n'ont pas été concluantes, en particulier à cause de l'absorption qui empêche de conclure définitivement sur l'occurrence de localisation. Une étude récente de l'équipe de Grenoble –

en collaboration avec une équipe expérimentale de l'Université de Manitoba au Canada – révèle la localisation forte des ondes élastiques dans un verre d'aluminium tridimensionnel. L'avantage des ondes élastiques est que les longueurs d'onde sont plus grandes, et donc aussi les échantillons, et que les mesures temporelles sont plus faciles. Ainsi, on peut s'affranchir de l'absorption en étudiant les propriétés spatio-temporelles d'ondes ultrasonores transmises à travers l'échantillon. Les mesures montrent clairement la localisation d'Anderson tridimensionnelle à certaines fréquences. Un avantage supplémentaire des ondes ultrasonores est que l'on peut étudier d'autres indicateurs de la localisation forte, tels que les fluctuations géantes du déplacement élastique, la multifractalité de la fonction d'onde, ou la transmission dynamique non-exponentielle.

La localisation forte des atomes froids est le tout dernier développement. Les progrès réalisés depuis 20 ans dans les techniques de refroidissement (voir « La condensation de Bose-Einstein en phase gazeuse » dans *Images de la Physique 2001*) ont permis d'obtenir des atomes dont la longueur d'onde de de Broglie est de l'ordre du micromètre. Construire un potentiel suffisamment diffusant pour la localisation 3D s'avère difficile en pratique. Suivant une idée de D. Shepelyansky, on peut néanmoins remplacer la structure spatiale complexe du potentiel par un potentiel spatialement simple, mais avec une dépendance temporelle judicieusement choisie. Dans le régime où la dynamique classique du système est chaotique et diffusive, on montre que le problème quantique est en fait très similaire à celui du modèle d'Anderson, le chaos quantique remplaçant le désordre. C'est ce qu'a choisi de réaliser expérimentalement une équipe de Lille, en collaboration avec des théoriciens parisiens. En variant les caractéristiques du profil temporel d'excitation, elle a pu observer non seulement la localisation d'Anderson en trois dimensions, mais aussi la transition localisé-délocalisé. Pour la première fois, on a pu mesurer un exposant critique de la transition d'Anderson.

L'équipe de l'Institut d'Optique s'est attaquée à la localisation d'Anderson directement dans l'espace réel, dans un système unidimensionnel obtenu en confinant fortement, le long d'un faisceau laser focalisé, une onde de matière issue d'un condensat de Bose-Einstein d'atomes de rubidium. Les effets de localisation étant très forts en 1D, on peut utiliser un désordre optique, réalisé à l'aide de faisceaux lumineux à structure spatiale compliquée (une figure de tavelures). C'est ce qu'a réussi à faire l'équipe de l'Institut d'Optique. Lorsqu'on laisse l'onde de matière se propager le long du faisceau laser en présence du champ de tavelures, elle se localise rapidement. De plus, elle acquiert un profil exponentiellement décroissant qui a pu être imagé directement dans l'expérience. Ces résultats constituent la première visualisation directe dans l'espace de la localisation exponentielle d'une onde de matière. De plus, l'intérêt majeur est que le désordre ainsi formé est remarquablement bien contrôlé, c'est-à-dire que ses propriétés statistiques sont connues et ajustables. Ceci a



permis de mettre en évidence un excellent accord avec des calculs théoriques réalisés dans la même équipe, sans aucun paramètre ajustable.

Tout est loin d'être compris sur la localisation d'Anderson. La théorie d'échelle décrite ci-dessus a pu être complétée par des théories dites « auto-consistantes », qui s'apparentent aux théories de champ moyen utilisées pour décrire les transitions de phase classiques. Ces théories apportent un éclairage intéressant, mais ne traitent que des quantités moyennes et négligent les fluctuations géantes qui apparaissent au voisinage du point critique. De ce fait, elles ne permettent pas par exemple de prédire correctement les exposants critiques. Un enjeu important serait de comprendre, caractériser et mesurer ces fluctuations géantes. Des études sont en cours, qui déboucheront sans doute dans les prochains mois ou les prochaines années sur de nouveaux résultats. Cinquante ans après le papier fondateur d'Anderson, ce domaine de recherche est plus vivant que jamais.

POUR EN SAVOIR PLUS

Anderson P.W., *Phys. Rev.*, **109**, 1492 (1958).

Janssen M., *Phys. Rep.*, **295**, 1-91 (1998).

Thouless D.J., « Percolation and localization », dans : « Ill - condensed matter », édité par Roger Balian, Roger Maynard, et Gérard Toulouse (Les Houches 1978), North-Holland (1979).

van Tiggelen B.A., « Localization of waves », dans : « Diffuse waves in complex media », édité par Jean-Pierre Fouque (Les Houches, 1998), Kluwer (1999).

Lee P.A. and Ramakrishnan T.V., *Rev. Mod. Phys.*, **57**, 287-337 (1985).

Lagendijk A., van Tiggelen B.A. et Wiersma D.S., « Fifty years of Anderson localization », *Physics Today*, **62**, 8, 24 (2009).

Aspect A. et Inguscio M., « Anderson localization of ultracold atoms », *Physics Today*, **62**, 8, 30 (2009).