

Université des Sciences et Technologies de Lille
U. F. R. de Mathématiques Pures et Appliquées

Martingales

Charles SUQUET
Année 2009–2010

Agrégation de Mathématiques

Table des matières

1	Espérance conditionnelle	5
1.1	Espérance conditionnelle dans L^1 , L^2 ou L^+	5
1.2	Propriétés de l'espérance conditionnelle	6
2	Martingales	9
2.1	Définitions et exemples	9
2.2	Temps d'arrêt	11
2.3	Surmartingales et sous-martingales	15
2.4	Inégalités	17
2.5	Théorèmes de convergence	23
2.6	En guise de conclusion	38

Index

- adaptée, 9
- conservation de l'espérance, 6
- décomposition de Doob, 16
- équi-intégrabilité, 26
- équi-intégrabilité
 - d'une martingale, 31
- espérance conditionnelle
 - continuité, 7
 - convergence dominée, 8
 - convergence monotone, 8
 - croissance, 7
 - d'une v.a. L^1 , 5
 - d'une v.a. L^2 , 6
 - espérance, 6
 - inégalité de Jensen, 8
 - indépendance, 7
 - lemme de Fatou, 8
 - linéarité, 7
 - positivité, 7
 - théorème de B. Levi, 8
 - valeur absolue, 7
- filtration, 9
 - naturelle, 9
- inégalité
 - de Jensen, 8
 - de Kolmogorov, 19
 - de moments de Doob, 20
 - des montées de Doob, 22
 - maximale de Doob, 18
- lemme
 - de Fatou, 8
 - de Kronecker, 35
- loi forte des grands nombres
 - de Kolmogorov, 37
 - martingales L^2 , 33
- martingale, 9
 - arrêtée, 13
 - bornée dans L^p , 31
 - convergence L^2 , 32
 - équi-intégrable, 31
 - fermée, 11
 - fermable, 11, 31
 - régulière, 11, 31
 - valeur absolue, 15
- montées, 22
- sous-martingale, 15
 - convergence L^1 , 31
 - image convexe, 15
- surmartingale, 15
 - convergence L^1 , 31
- temps d'arrêt, 11
- théorème
 - convergence L^1 , 30
 - d'arrêt de Doob, 14
 - de Beppo Levi, 8
 - de convergence L^2 des martingales, 32
 - de convergence des martingales, 30
 - de convergence des sous-martingales, 23
 - de convergence des surmartingales, 25
- tribu antérieure, 13
- uniformément intégrable, 26

Chapitre 1

Espérance conditionnelle

Nous présentons dans ce chapitre utilitaire un memento sur l'espérance conditionnelle dont on admettra l'existence avant d'en détailler les propriétés. Dans tout ce chapitre, on fixe un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) .

1.1 Espérance conditionnelle dans L^1 , L^2 ou L^+

Définition 1.1 (espérance conditionnelle d'une v.a. L^1). *Soit Z un élément de $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et \mathcal{G} une sous-tribu de \mathcal{F} . On appelle espérance conditionnelle de Z sachant \mathcal{G} , l'unique élément Y de $L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ tel que*

$$\forall X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{G}, P), \quad \mathbf{E}(XZ) = \mathbf{E}(XY). \quad (1.1)$$

On notera cet élément $Y = \mathbf{E}(Z | \mathcal{G})$. Dans le cas particulier où la tribu \mathcal{G} est engendrée par une variable aléatoire ou un vecteur aléatoire V ($\mathcal{G} = \sigma(V)$), on notera $\mathbf{E}(Z | V)$ comme abréviation de $\mathbf{E}(Z | \sigma(V))$.

Quitte à enfoncer une porte ouverte, notons que dans la définition ci-dessus, on ne peut généralement pas prendre $Y = Z$ puisque Z n'est pas supposée \mathcal{G} -mesurable. Il importe aussi de remarquer que, contrairement à l'espérance classique $\mathbf{E}Z$, l'espérance conditionnelle n'est pas une constante, mais une variable aléatoire \mathcal{G} -mesurable et intégrable (plus précisément la classe d'équivalence modulo l'égalité P -p.s. d'une telle variable). Avec la notation $\mathbf{E}(Z | \mathcal{G})$, on peut réécrire (1.1) sous la forme :

$$\forall X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{G}, P), \quad \mathbf{E}(XZ) = \mathbf{E}(X\mathbf{E}(Z | \mathcal{G})). \quad (1.2)$$

L'existence et l'unicité de Y ne sont pas évidentes et il faut un peu de travail préliminaire pour les établir. Une des façons de faire est de commencer par le cas particulier où Z est de carré intégrable¹. On définit alors l'espérance conditionnelle de Z sachant \mathcal{G} comme la *projection orthogonale* (dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$) de Z sur le

1. Rappelons que $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un sous-espace vectoriel de $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, mais pas un sous-espace vectoriel topologique, puisque la topologie $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est strictement plus forte que celle de $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

sous-espace fermé $L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$. Cette espérance conditionnelle notée encore $\mathbf{E}(Z \mid \mathcal{G})$ vérifie alors :

$$\forall X \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P), \quad \mathbf{E}(XZ) = \mathbf{E}(X\mathbf{E}(Z \mid \mathcal{G})). \quad (1.3)$$

Et comme les (classes de) variables aléatoires (modulo l'égalité p.s.) bornées et \mathcal{G} -mesurables sont aussi dans $L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$, (1.2) est vérifiée, ce qui montre que les deux espérances conditionnelles au sens L^1 et L^2 coïncident pour des variables de carré intégrable.

Comme d'habitude, le cas des variables aléatoires positives bénéficie d'un régime de faveur. On note $L^+(\Omega, \mathcal{G})$ l'ensemble des (classes de) variables aléatoires positives et \mathcal{G} -mesurables. Ces variables prennent leur valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Si $Z \in L^+(\Omega, \mathcal{F})$, on peut montrer l'existence d'un unique élément de $L^+(\Omega, \mathcal{G})$, noté encore $\mathbf{E}(Z \mid \mathcal{G})$ tel que

$$\forall X \in L^+(\Omega, \mathcal{G}), \quad \mathbf{E}(XZ) = \mathbf{E}(X\mathbf{E}(Z \mid \mathcal{G})). \quad (1.4)$$

Notons que les espérances (au sens classique) ci-dessus peuvent prendre la valeur $+\infty$. Lorsque $\mathbf{E}|Z| < +\infty$, $\mathbf{E}(Z \mid \mathcal{G})$ ainsi définie coïncide avec l'espérance conditionnelle de la définition 1.1, comme on peut le voir en prenant $X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{G}, P)$ et en appliquant (1.4) à X^+ et X^- .

Une propriété découlant immédiatement des trois définitions ci-dessus est qu'une variable aléatoire et son espérance conditionnelle ont même espérance.

Proposition 1.2 (Conservation de l'espérance). *Si $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ou $Z \in L^+(\Omega, \mathcal{F})$, pour toute sous-tribu \mathcal{G} de \mathcal{F} :*

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(Z \mid \mathcal{G})) = \mathbf{E}Z. \quad (1.5)$$

Dans le cas L^1 , $\mathbf{E}|\mathbf{E}(Z \mid \mathcal{G})| < +\infty$ et dans le cas L^+ , l'égalité d'espérances ci-dessus a lieu dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Preuve. Prendre $X = \mathbf{1}_\Omega$ dans (1.2) ou (1.4). □

La plus petite sous-tribu de \mathcal{F} est la tribu triviale $\mathcal{G}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Toute variable aléatoire Y \mathcal{G}_0 -mesurable est constante². D'après (1.5), cette constante ne peut être que $\mathbf{E}Z$.

$$\text{Si } Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P) \text{ ou } Z \in L^+(\Omega, \mathcal{F}), \quad \mathbf{E}(Z \mid \{\emptyset, \Omega\}) = \mathbf{E}Z. \quad (1.6)$$

1.2 Propriétés de l'espérance conditionnelle

Nous noterons $\mathbf{E}_\mathcal{G}$ l'application

$$\mathbf{E}_\mathcal{G} : Z \longmapsto \mathbf{E}(Z \mid \mathcal{G}).$$

Selon le contexte, l'ensemble de départ de cette application sera $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ou $L^+(\Omega, \mathcal{F})$. Dans ce qui suit, lorsque cet ensemble de départ n'est pas précisé, la propriété énoncée est valable pour chacun des trois.

2. Puisque pour tout $c \in \mathbb{R}$, $Y^{-1}(\{c\})$ est soit \emptyset soit Ω et cette dernière éventualité n'a lieu que pour une seule valeur de c .

Proposition 1.3 (Linéarité). *L'espérance conditionnelle $\mathbf{E}_{\mathcal{G}}$ est un opérateur linéaire sur $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (et donc aussi sur $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$) : $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall Z_1, Z_2 \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ($p = 1, 2$),*

$$\mathbf{E}(aZ_1 + bZ_2 \mid \mathcal{G}) = a\mathbf{E}(Z_1 \mid \mathcal{G}) + b\mathbf{E}(Z_2 \mid \mathcal{G}); \quad (1.7)$$

Pour l'espérance conditionnelle sur $L^+(\Omega, \mathcal{F})$, (1.7) est valide pour tous $a, b \geq 0$.

Proposition 1.4 (Positivité). *Pour toute $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ positive, $\mathbf{E}(Z \mid \mathcal{G}) \geq 0$. Pour l'espérance conditionnelle sur $L^+(\Omega, \mathcal{F})$, la positivité est vraie par construction. La positivité implique la croissance de l'espérance conditionnelle :*

$$Z_1 \leq Z_2 \Rightarrow \mathbf{E}(Z_1 \mid \mathcal{G}) \leq \mathbf{E}(Z_2 \mid \mathcal{G}), \quad (1.8)$$

dans tous les cas où $\mathbf{E}(Z_1 \mid \mathcal{G})$ et $\mathbf{E}(Z_2 \mid \mathcal{G})$ sont définies.

Corollaire 1.5. *Pour toute $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et toute sous-tribu \mathcal{G} de \mathcal{F} ,*

$$\mathbf{E}|\mathbf{E}(Z \mid \mathcal{G})| \leq \mathbf{E}|Z|. \quad (1.9)$$

Ainsi l'application linéaire $\mathbf{E}_{\mathcal{G}} : L^1(\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ est continue, de norme opérateur bornée par 1.

Proposition 1.6. *Si \mathcal{H} et \mathcal{G} sont deux sous-tribus de \mathcal{F} vérifiant $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$,*

$$\mathbf{E}_{\mathcal{H}} \circ \mathbf{E}_{\mathcal{G}} = \mathbf{E}_{\mathcal{H}}. \quad (1.10)$$

Notons que l'égalité $\mathbf{E}_{\mathcal{G}} \circ \mathbf{E}_{\mathcal{H}} = \mathbf{E}_{\mathcal{H}}$ découle immédiatement de la définition de l'espérance conditionnelle puisque toute v.a. \mathcal{H} mesurable est \mathcal{G} mesurable.

Preuve. On écrit la vérification avec L^1 , l'adaptation aux cas L^2 et L^+ étant immédiate. Pour tous $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{H}, P)$, on a par définition de $\mathbf{E}_{\mathcal{H}}$:

$$\mathbf{E}(X\mathbf{E}_{\mathcal{H}}(\mathbf{E}_{\mathcal{G}}(Z))) = \mathbf{E}(X\mathbf{E}_{\mathcal{G}}(Z)).$$

Mais comme \mathcal{H} est une sous-tribu de \mathcal{G} , X est aussi \mathcal{G} -mesurable, donc $X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{H}, P)$ et en appliquant la définition de $\mathbf{E}_{\mathcal{G}}$, on voit que :

$$\mathbf{E}(X\mathbf{E}_{\mathcal{G}}(Z)) = \mathbf{E}(XZ).$$

Ainsi, pour tous $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{H}, P)$, $\mathbf{E}(XZ) = \mathbf{E}(X\mathbf{E}_{\mathcal{H}}(\mathbf{E}_{\mathcal{G}}(Z)))$, ce qui établit (1.10). \square

Proposition 1.7. *Si Z est indépendante de la tribu \mathcal{G} ,*

$$\mathbf{E}(Z \mid \mathcal{G}) = \mathbf{E}Z. \quad (1.11)$$

Preuve. On écrit la vérification avec L^1 , l'adaptation aux cas L^2 et L^+ étant immédiate. Toute v.a. $X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{G}, P)$ est \mathcal{G} mesurable, donc indépendante de Z , d'où

$$\mathbf{E}(XZ) = (\mathbf{E}X)(\mathbf{E}Z) = \mathbf{E}(X(\mathbf{E}Z)).$$

Or la constante $\mathbf{E}Z$ est mesurable par rapport à n'importe quelle tribu, en particulier par rapport à \mathcal{G} . En raison de l'unicité de (la classe de) Y vérifiant (1.1) dans la définition (1.1), on en déduit que $\mathbf{E}(Z | \mathcal{G}) = \mathbf{E}Z$ p.s. \square

Proposition 1.8 (Inégalité de Jensen). *Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et Z une variable aléatoire telles que Z et $\varphi(Z)$ soient intégrables. Pour toute sous-tribu \mathcal{G} de \mathcal{F} ,*

$$\varphi(\mathbf{E}(Z | \mathcal{G})) \leq \mathbf{E}(\varphi(Z) | \mathcal{G}). \quad (1.12)$$

Si φ est concave on a l'inégalité inverse.

Pour finir ce rappel, il convient de mentionner que les théorèmes classiques de convergence pour des espérances se généralisent aux espérances conditionnelles. Ces résultats ne seront pas utilisés dans la suite de ce polycopié.

Théorème 1.9 (de convergence monotone ou Beppo Levi). *Soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite p.s. croissante dans $L^+(\Omega, \mathcal{F}, P)$, de limite Z . Pour toute sous-tribu \mathcal{G} de \mathcal{F} , $(\mathbf{E}(Z_n | \mathcal{G}))_{n \in \mathbb{N}}$ est p.s. croissante et convergente vers $\mathbf{E}(Z | \mathcal{G})$.*

Lemme 1.10 (de Fatou). *Pour toute suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $L^+(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et toute sous-tribu \mathcal{G} de \mathcal{F} ,*

$$\mathbf{E}\left(\liminf_{n \rightarrow +\infty} Z_n | \mathcal{G}\right) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(Z_n | \mathcal{G}).$$

Théorème 1.11 (de convergence dominée). *Si $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge p.s. vers Z et si pour tout n $|Z_n| \leq Y$ p.s. avec $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, alors pour toute sous-tribu \mathcal{G} de \mathcal{F} ,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(Z_n | \mathcal{G}) = \mathbf{E}(Z | \mathcal{G}), \quad \text{p.s. et au sens } L^1.$$

Chapitre 2

Martingales

2.1 Définitions et exemples

Dans tout ce chapitre, on fixe un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) et toutes les variables et vecteurs aléatoires considérés sont réputés être définis sur Ω et (au moins) \mathcal{F} mesurables.

Définition 2.1 (Filtration).

On appelle filtration toute suite $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-tribus de \mathcal{F} qui est croissante pour l'inclusion.

On peut interpréter \mathcal{F}_n comme la tribu des évènements qui sont observables jusqu'à l'instant n . À toute suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires, on peut associer la filtration donnée par $\mathcal{F}_n = \sigma(X_k, k \leq n)$, appelée *filtration naturelle* de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dans ce cas, chaque X_n est \mathcal{F}_n mesurable (et aussi \mathcal{F}_k mesurable pour tout $k \geq n$). Plus généralement, étant donnée une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *adaptée* à cette filtration si pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est \mathcal{F}_n mesurable.

Définition 2.2 (Martingale).

La suite de variables aléatoires $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, en abrégé une (\mathcal{F}_n) -martingale, si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1. $\mathbf{E}|M_n| < +\infty$;
2. M_n est \mathcal{F}_n mesurable ;
3. pour tout $m \leq n$, $\mathbf{E}(M_n | \mathcal{F}_m) = M_m$, p.s.

En raison de la proposition 1.6, la condition 3 ci-dessus équivaut à

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) = M_n, \quad \text{p.s.} \quad (2.1)$$

La notion de martingale a une interprétation intuitive en terme de jeu. Dans ce contexte, la tribu \mathcal{F}_n représente l'information accessible à un joueur « honnête » à l'instant n (par exemple après observation des n premières parties) ; M_n est la fortune du joueur à l'issue de la n^{e} partie. La propriété (2.1) signifie alors que le jeu est équitable. Bien sûr la portée de la théorie des martingales va bien au-delà de cette modélisation.

Remarque 2.3. Si $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale, la suite $(\mathbf{E}M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{E}(M_n | \mathcal{F}_0) = M_0$ d'où $\mathbf{E}M_n = \mathbf{E}(\mathbf{E}(M_n | \mathcal{F}_0)) = \mathbf{E}M_0$.

Remarque 2.4. On peut généraliser la notion de filtration $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ et de martingale pour cette filtration à n'importe quel ensemble ordonné¹ I . Ceci permet notamment de définir les martingales à temps continu. Un exemple plus simple est celui des martingales finies indexées par l'ensemble fini $\{0, \dots, n\}$ ou $\{1, \dots, n\}$. En dehors des théorèmes de convergence, tous les résultats de ce chapitre ont une adaptation immédiate aux martingales finies.

Regardons quelques exemples de martingales.

Exemple 2.5. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, intégrables et centrées (pas forcément de même loi). On pose

$$S_0 := 0, \quad \text{et } \forall n \geq 1, \quad S_n := \sum_{k=1}^n X_k,$$

$$\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_n := \sigma(X_k, k \leq n).$$

Alors $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Vérification. La suite $(S_n)_{n \geq 1}$ hérite de l'intégrabilité des X_k et est clairement adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour tous entiers $m \leq n$, on a par additivité de l'espérance conditionnelle :

$$\mathbf{E}(S_n | \mathcal{F}_m) = \mathbf{E}(S_n - S_m | \mathcal{F}_m) + \mathbf{E}(S_m | \mathcal{F}_m). \quad (2.2)$$

La variable aléatoire S_m étant \mathcal{F}_m mesurable, $\mathbf{E}(S_m | \mathcal{F}_m) = S_m$. D'autre part, la tribu \mathcal{F}_m et la v.a. $S_n - S_m$ sont indépendantes², d'où

$$\mathbf{E}(S_n - S_m | \mathcal{F}_m) = \mathbf{E}(S_n - S_m) = \sum_{m < k \leq n} \mathbf{E}X_k = 0,$$

en utilisant la proposition 1.7 et le centrage des X_k . En revenant à (2.2), on obtient $\mathbf{E}(S_n | \mathcal{F}_m) = 0 + S_m = S_m$. □

Exemple 2.6. Soient $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une filtration et définissons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_n := \mathbf{E}(Z | \mathcal{F}_n)$. Alors $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Vérification. D'abord, chaque M_n est \mathcal{F}_n mesurable par construction. Pour vérifier l'intégrabilité de M_n , en utilisant la conservation de l'espérance et le corollaire 1.5, on obtient :

$$\mathbf{E}|M_n| = \mathbf{E}|\mathbf{E}(Z | \mathcal{F}_n)| \leq \mathbf{E}|Z| < +\infty.$$

Enfin, pour $0 \leq m \leq n$,

$$\mathbf{E}(M_n | \mathcal{F}_m) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(Z | \mathcal{F}_n) | \mathcal{F}_m) = (\mathbf{E}_{\mathcal{F}_m} \circ \mathbf{E}_{\mathcal{F}_n})(Z) = \mathbf{E}_{\mathcal{F}_m}(Z) = M_m,$$

en utilisant l'inclusion $\mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_n$, cf. proposition 1.6. □

1. Pour cette généralisation, la condition 3 est préférable à (2.1).

2. Y compris dans le cas $n = m$ puisqu'alors $S_n - S_m$ est la constante 0 qui est indépendante de toute tribu.

Définition 2.7. On dit que la martingale $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est fermée par la variable aléatoire Z si

$$Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad M_n = \mathbf{E}(Z \mid \mathcal{F}_n) \quad \text{p.s.} \quad (2.3)$$

Si $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie (2.3) pour une certaine Z , on dit qu'elle est fermable ou régulière.

Exercice 2.1. Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires positives, i.i.d., intégrables d'espérance 1. On pose

$$R_0 := 1, \quad R_n := \prod_{i=1}^n X_i, \quad (n \geq 1).$$

Vérifiez que $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale pour la filtration naturelle de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. \triangleleft

Exercice 2.2. Si $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et Y une v.a. \mathcal{F}_0 mesurable, alors $(M_n - Y)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale pour la même filtration. Ceci est valable notamment pour $(M_n - M_0)$ et pour $(M_n - c)$ avec c constante. \triangleleft

Exercice 2.3. Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ martingale et $(\mathcal{G}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une autre filtration à laquelle $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi adaptée et telle que pour tout n , $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}_n$. Montrez que $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi une $(\mathcal{G}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ martingale. En particulier, toute martingale est aussi une martingale pour sa filtration naturelle. \triangleleft

2.2 Temps d'arrêt

Les temps d'arrêt sont les instants aléatoires où se produit un certain événement (par exemple numéro du lancer où l'on obtient pile pour la première fois à pile ou face). En termes de jeu, le temps d'arrêt est une règle que se donne le joueur « honnête » pour arrêter de miser : il décide d'arrêter à l'instant n au vu de l'information apportée par les n premières parties³. L'importance des temps d'arrêt en théorie des martingales apparaîtra dans la suite de ce chapitre. Commençons par formaliser leur définition. On note $\bar{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Une variable aléatoire définie sur (Ω, \mathcal{F}) et à valeurs dans $\bar{\mathbb{N}}$ est une application $\Omega \rightarrow \bar{\mathbb{N}}$, mesurable \mathcal{F} - $\mathcal{P}(\bar{\mathbb{N}})$, où $\mathcal{P}(\bar{\mathbb{N}})$ désigne la tribu de toutes les parties de $\bar{\mathbb{N}}$.

Définition 2.8 (Temps d'arrêt). Une variable aléatoire T sur (Ω, \mathcal{F}) à valeurs dans $\bar{\mathbb{N}}$ est appelée temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

Remarque 2.9. La variable aléatoire T sur (Ω, \mathcal{F}) à valeurs dans $\bar{\mathbb{N}}$ est un temps d'arrêt si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$. Pour le voir, il suffit de noter que $\{T = n\} = \{T \leq n\} \setminus \{T \leq n-1\}$ et que $\{T \leq n\} = \cup_{k=0}^n \{T = k\}$.

3. Un tricheur, ou en termes boursiers un « initié », pourrait disposer à l'instant n d'informations sur les parties suivantes.

Un exemple trivial de temps d'arrêt est T constante (finie ou infinie) car alors $T^{-1}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = \{\emptyset, \Omega\} \subset \mathcal{F}_n$ pour tout entier n . L'exemple suivant est plus intéressant et assez typique.

Exemple 2.10. Soit $(\mathcal{F}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une filtration et $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires adaptée à cette filtration (pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, Z_i est \mathcal{F}_i mesurable). Notons B un borélien fixé de \mathbb{R} . Définissons

$$T := \inf\{i \in \mathbb{N}^*; Z_i \in B\},$$

avec la convention habituelle $\inf \emptyset := +\infty$. Alors T est un temps d'arrêt. Pour le vérifier, il suffit d'écrire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\{T \leq n\} = \bigcup_{i \leq n} \left(\bigcap_{j < i} \{Z_j \notin B\} \cap \{Z_i \in B\} \right),$$

avec la convention $\bigcap_{j \in \emptyset} A_j = \Omega$. En utilisant la \mathcal{F}_j mesurabilité de chaque Z_j et l'emboîtement des tribus \mathcal{F}_j , cette décomposition montre que $\{T \leq n\}$ est bien membre de \mathcal{F}_n . Le cas $n = 0$ est trivial.

Exercice 2.4. Vérifiez que si S et T sont des temps d'arrêt pour la même filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $c \in \mathbb{N}^*$ est une constante, $\min(S, T)$, $\max(S, T)$ et cT sont aussi des temps d'arrêt. \triangleleft

Définition 2.11. Soient $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires (\mathcal{F} mesurables), $(\mathcal{F}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une filtration, et T un temps d'arrêt pour cette filtration qui est fini, c'est-à-dire $\{T = +\infty\} = \emptyset$. Alors on peut définir une nouvelle variable aléatoire Z_T en posant :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Z_T(\omega) := Z_{T(\omega)}(\omega) = \sum_{i \in \mathbb{N}} Z_i(\omega) \mathbf{1}_{\{T=i\}}(\omega).$$

Remarquez que l'écriture $Z_T = \sum_{i \in \mathbb{N}} Z_i \mathbf{1}_{\{T=i\}}$ ne pose aucun problème de convergence, car pour chaque $\omega \in \Omega$, il y a au plus un terme non nul dans la série ci-dessus. Z_T apparaît ainsi comme la somme d'une série de variables aléatoires convergente sur tout Ω , donc est elle-même une variable aléatoire (\mathcal{F} -mesurable).

Proposition 2.12. Soient $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une filtration, $(M_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une martingale adaptée à cette filtration et T un temps d'arrêt pour cette filtration, borné par une constante $c \in \mathbb{N}$. Alors M_T est intégrable et

$$\mathbf{E}M_T = \mathbf{E}M_0.$$

Preuve. Dire que T est borné par c signifie que $\{T \leq c\} = \Omega$ et par conséquent

$$M_T = \sum_{k=0}^c M_k \mathbf{1}_{\{T=k\}}.$$

Ceci justifie en particulier l'intégrabilité de M_T qui apparaît ainsi comme une somme d'un nombre fini de variables aléatoires intégrables ($\mathbf{E}|M_k \mathbf{1}_{\{T=k\}}| \leq \mathbf{E}|M_k| < +\infty$). La

propriété de martingale n'est pas utilisée pour cette intégrabilité (à part l'intégrabilité de chaque M_k).

La propriété de martingale nous donne $M_k = \mathbf{E}(M_c \mid \mathcal{F}_k)$ pour tout $k \leq c$, ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}M_T &= \sum_{k=0}^c \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{T=k\}} M_k) \\ &= \sum_{k=0}^c \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{T=k\}} \mathbf{E}(M_c \mid \mathcal{F}_k)) \\ &= \sum_{k=0}^c \mathbf{E}(\mathbf{E}(M_c \mathbf{1}_{\{T=k\}} \mid \mathcal{F}_k)) \quad (\text{par } \mathcal{F}_k \text{ mesurabilité de } \mathbf{1}_{\{T=k\}}) \\ &= \sum_{k=0}^c \mathbf{E}(M_c \mathbf{1}_{\{T=k\}}) \\ &= \mathbf{E}\left(M_c \sum_{k=0}^c \mathbf{1}_{\{T=k\}}\right) = \mathbf{E}(M_c \mathbf{1}_\Omega) = \mathbf{E}M_c = \mathbf{E}M_0. \end{aligned}$$

□

Exercice 2.5. Soient $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale et T un temps d'arrêt pour la même filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Vérifiez que $(M_{n \wedge T})_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi une (\mathcal{F}_n) -martingale ($n \wedge T := \min(n, T)$). Généralisez ce résultat au cas où $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-martingale, ou une surmartingale, cf. définition 2.17, p. 15. ◁

Définition 2.13. Soit T un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On appelle tribu antérieure à T la tribu :

$$\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F}; \forall n \in \mathbb{N}, A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n\}. \quad (2.4)$$

Exercice 2.6. Justifiez cette définition en vérifiant que \mathcal{F}_T est une sous-tribu de \mathcal{F} . ◁

Proposition 2.14. Si S et T sont des temps d'arrêt pour la même filtration \mathcal{F}_n tels que $S \leq T$, alors $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

Preuve. L'inégalité $S \leq T$ signifie ici que $S(\omega) \leq T(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$. Elle implique en particulier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{T \leq n\} \subset \{S \leq n\}$.

Soit A un évènement quelconque de la tribu \mathcal{F}_S et montrons que A appartient aussi à \mathcal{F}_T , autrement dit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A \cap \{T \leq n\}$ appartient à \mathcal{F}_n . Puisque $\{T \leq n\} \subset \{S \leq n\}$,

$$A \cap \{T \leq n\} = A \cap (\{T \leq n\} \cap \{S \leq n\}) = \underbrace{(A \cap \{S \leq n\})}_{\in \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{T \leq n\}}_{\in \mathcal{F}_n}.$$

Donc $A \cap \{T \leq n\}$ appartient bien à \mathcal{F}_n et ceci étant vrai pour tout entier n , A appartient à \mathcal{F}_T . □

Une fonctionnalité remarquable des temps d'arrêt est que la propriété de martingale s'étend aux temps d'arrêt. La formalisation s'appuie sur le résultat de mesurabilité suivant.

Proposition 2.15. *Soit $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une filtration, $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. adaptée à $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et T un temps d'arrêt fini pour $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors Z_T est \mathcal{F}_T mesurable.*

Preuve. Il nous faut vérifier l'appartenance à \mathcal{F}_T de l'évènement $\{Z_T \in B\}$ pour B borélien quelconque de \mathbb{R} , ce qui revient à vérifier que $\{Z_T \in B\} \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout entier n . Ceci résulte immédiatement de la décomposition suivante :

$$\{Z_T \in B\} \cap \{T \leq n\} = \bigcup_{i=0}^n (\{Z_i \in B\} \cap \{T = i\}).$$

□

Théorème 2.16 (Théorème d'arrêt de Doob). *Pour la même filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, soient $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale, S et T deux temps d'arrêt bornés par une constante $c \in \mathbb{N}$ et tels que $S \leq T$. Alors*

$$\mathbf{E}(M_T \mid \mathcal{F}_S) = M_S, \quad \text{p.s.}$$

Preuve. M_S est \mathcal{F}_S mesurable et intégrable d'après les propositions 2.15 et 2.12. Comme M_T est elle aussi intégrable, il nous faut seulement vérifier que

$$\forall Y \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_S, P), \quad \mathbf{E}(M_T Y) = \mathbf{E}(M_S Y).$$

Il suffit de faire cette vérification pour $Y = \mathbf{1}_A$, $A \in \mathcal{F}_S$. Fixons donc un $A \in \mathcal{F}_S$ quelconque et définissons

$$R := S\mathbf{1}_A + T\mathbf{1}_{A^c}.$$

La variable aléatoire entière R est un temps d'arrêt (borné par c) car pour tout n entier,

$$\{R \leq n\} = (A \cap \{S \leq n\}) \cup (A^c \cap \{T \leq n\})$$

et dans cette décomposition $A \cap \{S \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ en raison de la définition de \mathcal{F}_S et pour le second terme de la réunion, $A^c \in \mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$ et la définition de \mathcal{F}_T donnent aussi l'appartenance à \mathcal{F}_n .

Grâce à la proposition 2.12, on a donc $\mathbf{E}M_R = \mathbf{E}M_0 = \mathbf{E}M_T$. Or

$$\begin{aligned} \mathbf{E}M_T &= \mathbf{E}(M_T\mathbf{1}_A + M_T\mathbf{1}_{A^c}); \\ \mathbf{E}M_R &= \mathbf{E}(M_S\mathbf{1}_A + M_T\mathbf{1}_{A^c}). \end{aligned}$$

En soustrayant membre à membre ces deux égalités, on obtient $\mathbf{E}(M_T\mathbf{1}_A) = \mathbf{E}(M_S\mathbf{1}_A)$, ce qu'il fallait vérifier. □

Exercice 2.7. Soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. intégrables adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Montrez que si pour tout temps d'arrêt fini T pour cette filtration, $\mathbf{E}Z_T = \mathbf{E}Z_0$, $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ martingale. ◁

Indication. Pour $0 \leq m \leq n$, et A fixé dans \mathcal{F}_m , considérer $T := m\mathbf{1}_{A^c} + n\mathbf{1}_A$ et utiliser T pour vérifier que $\mathbf{E}(X_n\mathbf{1}_A) = \mathbf{E}(X_m\mathbf{1}_A)$.

2.3 Surmartingales et sous-martingales

Définition 2.17 (Sous-martingale, surmartingale).

La suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-martingale ou une surmartingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1. $\mathbf{E}|Z_n| < +\infty$;
2. Z_n est \mathcal{F}_n mesurable ;
3. pour tout $m \leq n$, presque-sûrement

$$\begin{cases} \mathbf{E}(Z_n | \mathcal{F}_m) \geq Z_m & (\text{sous-martingale}), \\ \mathbf{E}(Z_n | \mathcal{F}_m) \leq Z_m & (\text{surmartingale}). \end{cases}$$

En terme de jeu, une sous-martingale modélise un jeu favorable au joueur (sa fortune aura tendance à croître), une surmartingale un jeu défavorable.

Toute martingale est évidemment à la fois sous- et surmartingale. $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ martingale si et seulement si elle est à la fois sous- et surmartingale pour $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Remarque 2.18. Si $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-martingale, $(\mathbf{E}Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante. Pour le voir, il suffit de prendre l'espérance des deux membres de $\mathbf{E}(Z_n | \mathcal{F}_m) \geq Z_m$. De même si $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une surmartingale, la suite des espérances décroît.

Exemple 2.19. Toute suite croissante $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires intégrables adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-martingale pour cette filtration. Pour le voir, il suffit d'utiliser la croissance de l'opérateur $\mathbf{E}_{\mathcal{F}_m}$: pour $n \geq m$, $Z_n \geq Z_m$ implique $\mathbf{E}(Z_n | \mathcal{F}_m) \geq \mathbf{E}(Z_m | \mathcal{F}_m) = Z_m$.

La proposition suivante permet de construire une riche famille de sous-martingales en prenant l'image d'une martingale par une fonction convexe.

Proposition 2.20. Si $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et si $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{E}|\varphi(M_n)| < +\infty$, alors $(\varphi(M_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-martingale pour $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Sous les mêmes hypothèses, mais avec φ concave, $(\varphi(M_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une surmartingale.

Corollaire 2.21. Si $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale, $(|M_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-martingale.

Preuve de la proposition 2.20. Puisque (M_n) est une martingale, pour tous entiers $n \geq m$, $\mathbf{E}(M_n | \mathcal{F}_m) = M_m$ p.s., d'où $\varphi(\mathbf{E}(M_n | \mathcal{F}_m)) = \varphi(M_m)$ p.s., ce qui montre au passage l'intégrabilité de $\varphi(\mathbf{E}(M_n | \mathcal{F}_m))$. Il suffit maintenant d'appliquer l'inégalité de Jensen pour obtenir :

$$\mathbf{E}(\varphi(M_n) | \mathcal{F}_m) \geq \varphi(\mathbf{E}(M_n | \mathcal{F}_m)) = \varphi(M_m) \quad \text{p.s.}$$

Si φ est concave, l'inégalité de Jensen ci-dessus est inversée et on voit que $\varphi(M_n)$ est une surmartingale. \square

Exercice 2.8. Soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-martingale et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{E}|\varphi(Z_n)| < +\infty$. Montrez qu'alors $(\varphi(Z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-martingale. \triangleleft

Remarque 2.22. Comme cas particulier intéressant de l'exercice 2.8, en prenant comme fonction convexe croissante $\varphi : x \mapsto \max(0, x) = x^+$, on voit que si $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-martingale, $(Z_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est aussi.

Théorème 2.23 (Théorème d'arrêt de Doob pour les sous-martingales). *Si $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, S et T deux temps d'arrêt pour la même filtration, bornés par $c \in \mathbb{N}$ et si $S \leq T$, alors $\mathbf{E}(Z_T | \mathcal{F}_S) \geq Z_S$ et en particulier, $\mathbf{E}Z_S \leq \mathbf{E}Z_T \leq \mathbf{E}Z_c$.*

Preuve. La preuve de $\mathbf{E}Z_T \leq \mathbf{E}Z_c$ est la même que pour la proposition 2.12 en changeant les égalités en \leq dans le calcul de $\mathbf{E}M_T$. Le reste est laissé en exercice. \square

La décomposition de Doob permet d'écrire l'accroissement depuis l'origine d'une sous-martingale comme la somme d'un processus croissant (lui-même une sous-martingale d'après l'exemple 2.19) et d'une martingale d'espérance nulle, laquelle apparaît ainsi comme une fluctuation autour du processus croissant.

Théorème 2.24 (Décomposition de Doob). *Soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Il existe une $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ martingale $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $M_0 = 0$ et un processus croissant $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (pour tout n , $A_n \leq A_{n+1}$ p.s.) avec $A_0 = 0$, chaque variable aléatoire A_{n+1} étant \mathcal{F}_n mesurable tels que*

$$Z_n = Z_0 + M_n + A_n. \quad (2.5)$$

Cette décomposition est p.s. unique.

Preuve. Définissons A_n par $A_0 := 0$ et

$$\forall n \geq 1, \quad A_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(Z_k - Z_{k-1} | \mathcal{F}_{k-1}).$$

Puisque (Z_k) est une sous-martingale, $\mathbf{E}(Z_k - Z_{k-1} | \mathcal{F}_{k-1})$ est positif pour tout $k \geq 1$ et (A_n) est donc bien un processus croissant. D'autre part, A_n est \mathcal{F}_{n-1} mesurable par construction pour tout $n \geq 1$ et hérite de l'intégrabilité des Z_k .

Il nous reste à vérifier qu'en posant $M_n := Z_n - Z_0 - A_n$, on obtient bien une martingale. Il suffit de le vérifier pour $M'_n = Z_n - A_n$ puisque Z_0 est \mathcal{F}_n mesurable pour tout n (cf exercice 2.2). Remarquons que M'_n est intégrable comme combinaison linéaire de Z_n et A_n . D'après la définition de A_n , $\mathbf{E}(Z_n - Z_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) = A_n - A_{n-1}$, d'où par \mathcal{F}_{n-1} mesurabilité de Z_{n-1} et de A_n , $\mathbf{E}(Z_n - A_n | \mathcal{F}_{n-1}) = Z_{n-1} - A_{n-1}$ p.s. Ceci étant vrai pour tout entier $n \geq 1$, (M'_n) est bien une (\mathcal{F}_n) martingale. Il en va de même pour $M_n = M'_n - Z_0$. De plus, $M_0 = Z_0 - Z_0 - A_0 = 0$.

Pour établir l'unicité, supposons qu'il existe deux décompositions :

$$\begin{aligned} Z_n &= Z_0 + M_n + A_n, & \forall n \in \mathbb{N}, \\ Z_n &= Z_0 + N_n + B_n, & \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

ayant les propriétés ci-dessus. Par soustraction, on a

$$M_n - N_n = B_n - A_n.$$

Comme B_n et A_n sont \mathcal{F}_{n-1} mesurables, $M_n - N_n$ l'est aussi, d'où p.s.

$$M_n - N_n = \mathbf{E}(M_n - N_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1} - N_{n-1} = \cdots = M_0 - N_0 = B_0 - A_0 = 0.$$

Ainsi pour tout n , $M_n = N_n$ p.s. et donc $A_n = B_n$ p.s., ce qui prouve l'unicité de la décomposition de Doob. \square

Remarque 2.25. Si $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un processus croissant adapté à $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, c'est une sous-martingale pour cette filtration, cf. exemple 2.19. Mais sa décomposition de Doob n'est pas forcément donnée par $A_n = Z_n$ et $M_n = 0$. Il faudrait pour cela que Z_n soit \mathcal{F}_{n-1} mesurable.

Corollaire 2.26. *Toute surmartingale $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une décomposition*

$$Z_n = Z_0 + M_n - A_n,$$

où (M_n) et (A_n) sont comme dans la décomposition de Doob.

Il suffit pour le voir d'appliquer la décomposition de Doob à la sous-martingale $(-Z_n)$.

Exercice 2.9. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, intégrables et de même espérance μ . On pose

$$S_0 := 0, \quad \text{et } \forall n \geq 1, \quad S_n := \sum_{k=1}^n X_k,$$

$$\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_n := \sigma(X_k, k \leq n).$$

Montrez que selon que μ est négatif, nul ou positif, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une surmartingale, une martingale ou une sous-martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Explicitez complètement sa décomposition de Doob. \triangleleft

2.4 Inégalités

Les martingales vérifient des inégalités très utiles notamment dans l'étude des convergences. Nous commençons par l'inégalité maximale de Doob. Pour l'apprécier à sa juste valeur, rappelons que si Z_1, \dots, Z_n sont des v.a. positives intégrables, tout ce que l'on

peut faire en général pour contrôler en probabilité leur maximum tient dans la ligne suivante :

$$P\left(\max_{j \leq n} Z_j \geq t\right) = P\left(\bigcup_{j \leq n} \{Z_j \geq t\}\right) \leq \sum_{j=1}^n P(Z_j \geq t) \leq \frac{1}{t} \sum_{j=1}^n \mathbf{E}Z_j,$$

pour tout $t > 0$.

Théorème 2.27 (Inégalité maximale de Doob). *Si $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-martingale,*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t > 0, \quad P\left(\max_{j \leq n} Z_j \geq t\right) \leq \frac{\mathbf{E}(Z_n^+)}{t}. \quad (2.6)$$

Si $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t > 0, \quad P\left(\max_{j \leq n} |M_j| \geq t\right) \leq \frac{\mathbf{E}|M_n|}{t}. \quad (2.7)$$

La deuxième inégalité est une conséquence immédiate de la première puisque, si $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale, $(|M_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-martingale (cor. 2.21). Nous proposons deux démonstrations de (2.6), à vous d'adopter la variante qui vous convient le mieux.

Première preuve de (2.6). Fixons n et $t > 0$ et posons $A := \{\max_{j \leq n} Z_j \geq t\}$. On découpe A en une partition de $n + 1$ évènements A_k définis par :

$$\begin{aligned} A_k &= \{ \text{le seuil } t \text{ est atteint ou dépassé pour la 1}^{\text{re}} \text{ fois à l'instant } k \} \\ &= \left\{ \max_{0 \leq i < k} Z_i < t \leq Z_k \right\}. \end{aligned}$$

Puisque $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-martingale pour une certaine filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a l'inclusion de tribus $\sigma(Z_j, j \leq k) \subset \mathcal{F}_k$. Comme A_k est membre de $\sigma(Z_j, j \leq k)$, il est aussi dans \mathcal{F}_k et donc $\mathbf{1}_{A_k} \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_k, P)$. En utilisant le découpage en union disjointe finie $A = \bigcup_{k \leq n} A_k$, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \int_A Z_n \, dP &= \sum_{k=0}^n \int_{A_k} Z_n \, dP = \sum_{k=0}^n \mathbf{E}(\mathbf{1}_{A_k} Z_n) \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{A_k} \mathbf{E}(Z_n \mid \mathcal{F}_k)\right) \\ &\geq \sum_{k=0}^n \mathbf{E}(\mathbf{1}_{A_k} Z_k) \quad ((Z_n) \text{ sous-martingale}) \\ &= \sum_{k=0}^n \int_{A_k} Z_k \, dP \\ &\geq \sum_{k=0}^n \int_{A_k} t \, dP = tP(A) \quad (Z_k \geq t \text{ sur } A_k). \end{aligned}$$

Relue en partant de la fin, cette suite d'inégalités nous donne :

$$P(A) \leq \frac{1}{t} \int_A Z_n \, dP \leq \frac{1}{t} \int_A Z_n^+ \, dP \leq \int_\Omega Z_n^+ \, dP = \mathbf{E}(Z_n^+),$$

ce qui établit (2.6). Notez que l'on est vraiment obligé d'introduire Z_n^+ quand on veut majorer \int_A par \int_Ω , car Z_n n'est pas forcément positive sur tout Ω . \square

Deuxième preuve de (2.6). Fixons $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$, définissons le temps d'arrêt

$$T := \inf\{j \in \mathbb{N}; Z_j \geq t\},$$

avec la convention habituelle $\inf \emptyset := +\infty$ et notons que

$$\left\{ \max_{j \leq n} Z_j \geq t \right\} = \{T \leq n\}. \quad (2.8)$$

Sur $\{T \leq n\}$, $Z_T \geq t$, d'où $Z_T > 0$ et $Z_T = Z_T^+$. Par conséquent, $\{T \leq n\} \subset \{Z_T^+ \geq t\}$, d'où $\{T \leq n\} = \{T \leq n\} \cap \{Z_T^+ \geq t\}$ et

$$P(T \leq n) = \mathbf{E} \left(\mathbf{1}_{\{T \leq n\} \cap \{Z_T^+ \geq t\}} \right) = \mathbf{E} \left(\mathbf{1}_{\{T \leq n\}} \mathbf{1}_{\{Z_T^+ \geq t\}} \right).$$

On utilise maintenant l'inégalité élémentaire

$$\forall t > 0, \quad \mathbf{1}_{\{Y \geq t\}} \leq \frac{Y^+}{t},$$

vérifiée par toute variable aléatoire réelle Y (notez que si Y peut prendre des valeurs strictement négatives, on ne peut pas remplacer Y^+ par Y au second membre), pour en déduire que

$$P(T \leq n) \leq \frac{1}{t} \mathbf{E} \left(\mathbf{1}_{\{T \leq n\}} Z_T^+ \right).$$

Arrivés ici, on aimerait pouvoir écrire : $\mathbf{E} \left(\mathbf{1}_{\{T \leq n\}} Z_T^+ \right) \leq \mathbf{E} Z_T^+ \leq \mathbf{E} Z_n^+$. La première inégalité est évidente, la deuxième serait vraie si T était un temps d'arrêt borné par n , en vertu du théorème 2.23 en utilisant le fait que (Z_n^+) est aussi une sous-martingale (remarque 2.22). Pour rendre l'argument correct, nous allons donc remplacer T par le temps d'arrêt *borné* $T \wedge n = \min(T, n)$ en remarquant que sur $\{T \leq n\}$, $Z_T = Z_{T \wedge n}$, d'où

$$\mathbf{E} \left(\mathbf{1}_{\{T \leq n\}} Z_T^+ \right) = \mathbf{E} \left(\mathbf{1}_{\{T \leq n\}} Z_{T \wedge n}^+ \right).$$

Finalement,

$$P(T \leq n) \leq \frac{1}{t} \mathbf{E} \left(\mathbf{1}_{\{T \leq n\}} Z_{T \wedge n}^+ \right) \leq \frac{1}{t} \mathbf{E} Z_{T \wedge n}^+ \leq \frac{1}{t} \mathbf{E} Z_n^+,$$

ce qui compte-tenu de (2.8), achève la preuve. \square

Corollaire 2.28 (Inégalité de Kolmogorov). *Si les variables aléatoires X_i sont indépendantes, centrées, de carré intégrable, en posant $S_j := \sum_{i=1}^j X_i$, on a*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t > 0, \quad P \left(\max_{1 \leq j \leq n} |S_j| \geq t \right) \leq \frac{1}{t^2} \text{Var } S_n. \quad (2.9)$$

Preuve. On sait que (S_n) forme une martingale pour la filtration donnée par $\mathcal{F}_n = \sigma(X_i, i \leq n)$. En prenant son image par la fonction convexe $x \mapsto x^2$, on obtient une sous-martingale, donc d'après(2.6),

$$P\left(\max_{1 \leq j \leq n} S_j^2 \geq t^2\right) \leq \frac{1}{t^2} \mathbf{E}S_n^2 = \frac{1}{t^2} \text{Var } S_n.$$

Il ne reste plus qu'à noter que si les réels y_j sont positifs, $\max_{1 \leq j \leq n} y_j^2 = \left(\max_{1 \leq j \leq n} y_j\right)^2$, d'où

$$P\left(\max_{1 \leq j \leq n} S_j^2 \geq t^2\right) = P\left(\left(\max_{1 \leq j \leq n} |S_j|\right)^2 \geq t^2\right) = P\left(\max_{1 \leq j \leq n} |S_j| \geq t\right),$$

pour en déduire (2.9). □

L'inégalité maximale de Doob permet notamment de démontrer une inégalité de moments. Avant de le voir, on « rappelle » un résultat classique⁴ permettant de calculer les moments d'une variable aléatoire à l'aide de sa fonction de survie.

Lemme 2.29. *Soient X une variable aléatoire positive et g une application continue strictement croissante $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* . Alors*

$$\mathbf{E}g(X) = g(0) + \int_0^{+\infty} P(X > s)g'(s) ds. \quad (2.10)$$

En particulier, si Y est une variable aléatoire réelle quelconque, on a

$$\forall p \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathbf{E}|Y|^p = \int_0^{+\infty} ps^{p-1}P(|Y| > s) ds. \quad (2.11)$$

Preuve. On écrit que

$$g(X) = g(0) + \int_0^X g'(s) ds = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0, X]}(s)g'(s) ds,$$

on reporte ceci dans $\mathbf{E}g(X) = \int_{\Omega} g(X) dP$ et on applique le théorème de Fubini ... en vous laissant le soin d'une rédaction détaillée. □

Théorème 2.30 (Inégalité de moments de Doob). *Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-martingale positive ou une martingale. Pour tout $1 < p < +\infty$, il existe une constante universelle c_p telle qu'en notant*

$$M_n^* := \max_{j \leq n} |M_j|,$$

on ait

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{E}(M_n^*)^p \leq c_p \mathbf{E}|M_n|^p. \quad (2.12)$$

La valeur optimale de c_p est $(\frac{p}{p-1})^p$, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{E}\|M_n^*\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|M_n\|_p. \quad (2.13)$$

4. Vous l'avez probablement vu un jour en exercice.

Preuve de (2.12). Remarquons d'abord que $(|M_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-martingale : parce que $|M_n| = M_n$ dans le premier cas, par le corollaire 2.21 dans le deuxième. Fixons $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ arbitraires et définissons :

$$X_n := |M_n| \mathbf{1}_{\{|M_n| > t/2\}}, \quad \text{et} \quad Z_j := \mathbf{E}(X_n \mid \mathcal{F}_j), \quad 0 \leq j \leq n.$$

Alors $(Z_j)_{0 \leq j \leq n}$ est une martingale finie (et positive) par une adaptation immédiate de l'exemple 2.6. On peut donc lui appliquer l'inégalité maximale de Doob (avec n fixé). Avant cela, remarquons que puisque $(|M_j|)_{j \leq n}$ est une sous-martingale :

$$\begin{aligned} \forall j \leq n, \quad |M_j| &\leq \mathbf{E}(|M_n| \mid \mathcal{F}_j) \\ &= \mathbf{E}\left(X_n + |M_n| \mathbf{1}_{\{|M_n| \leq t/2\}} \mid \mathcal{F}_j\right) \\ &= Z_j + \mathbf{E}\left(|M_n| \mathbf{1}_{\{|M_n| \leq t/2\}} \mid \mathcal{F}_j\right) \\ &\leq Z_j + \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

En notant $Z_n^* := \max_{j \leq n} Z_j$, on en déduit que $M_n^* \leq Z_n^* + t/2$, d'où

$$P(M_n^* > t) \leq P\left(Z_n^* + \frac{t}{2} > t\right) = P\left(Z_n^* > \frac{t}{2}\right).$$

Par l'inégalité maximale de Doob appliquée à la martingale finie $(Z_j)_{0 \leq j \leq n}$, on obtient :

$$P(M_n^* > t) \leq \frac{2}{t} \mathbf{E}Z_n = \frac{2}{t} \mathbf{E}X_n = \frac{2}{t} \mathbf{E}|M_n| \mathbf{1}_{\{|M_n| > t/2\}}.$$

Comme $t > 0$ était arbitraire, on peut utiliser cette inégalité dans la formule (2.11) appliquée à $Y = M_n^*$ pour obtenir :

$$\mathbf{E}(M_n^*)^p \leq 2 \int_0^{+\infty} pt^{p-2} \mathbf{E}|M_n| \mathbf{1}_{\{|M_n| > t/2\}} dt.$$

En intervertissant les intégrations (grâce au théorème de Tonelli), il vient :

$$\mathbf{E}(M_n^*)^p \leq 2 \mathbf{E} \left(|M_n| \int_0^{2|M_n|} pt^{p-2} dt \right) = \frac{2^p p}{p-1} \mathbf{E}|M_n|^p.$$

Ceci démontre (2.12) avec la constante $c_p = 2^p p / (p-1)$. Pour la valeur optimale de c_p , voir [1, Th. 3.6, p. 29]. \square

Pour terminer cette section, nous allons établir « l'inégalité des montées » de Doob, qui sera un outil pour démontrer le théorème de convergence des martingales. Soit $Z = (Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires (autrement dit, un processus stochastique indexé par \mathbb{N}). Fixons deux réels $a < b$. Le nombre U_n de montées de a à b entre l'instant 0 et l'instant n est le nombre de fois où le processus monte d'un point en dessous de a jusqu'à un point au dessus de b (chaque « montée » peut comporter des redescentes partielles, on appelle montée le morceau de trajectoire de Z indexé par un premier instant (après

la montée précédente) où Z est en dessous de a jusqu'au premier instant suivant où Z passe au dessus de b). On peut formaliser ceci en utilisant des temps d'arrêt définis comme suit :

$$T_0 = 0,$$

puis par récurrence sur j :

$$S_{j+1} = \min\{k \geq T_j ; Z_k \leq a\}, \quad T_{j+1} = \min\{k > S_{j+1} ; Z_k \geq b\},$$

avec les conventions $\min \emptyset = +\infty$ et $\max \emptyset = 0$ (ces temps d'arrêt sont à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}}$). Les T_j et les S_j sont des temps d'arrêt pour la filtration naturelle⁵ de $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Par construction, on a $0 = T_0 \leq S_1 < T_1 < S_2 < T_2 < S_3 < \dots$ et pour tout $j \geq 1$, $Z_{S_j} \leq a < b \leq Z_{T_j}$. Avec ces notations, on a

$$U_n = \max\{j \leq n ; T_j \leq n\}.$$

Théorème 2.31 (Inégalité des montées de Doob). *Soit $Z = (Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-martingale. Pour $a < b$, le nombre U_n de montées de Z de a à b entre les instants 0 et $n \geq 1$ vérifie :*

$$\mathbf{E}U_n \leq \frac{1}{b-a} \mathbf{E}(Z_n - a)^+ \leq \frac{1}{b-a} (\mathbf{E}|Z_n| + |a|). \quad (2.14)$$

Preuve. Posons $Y_k := (Z_k - a)^+ = \max(Z_k - a, 0)$. La fonction $\varphi : x \mapsto (x - a)^+$ est convexe et croissante, $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une sous-martingale (cf. exercice 2.8, en notant que $|\varphi(x)| \leq |x| + |a|$, donc chaque Y_k hérite de l'intégrabilité de Z_k).

La configuration qui maximise le nombre de montées entre 0 et n , est celle où $S_k = 2k - 2$, $T_k = 2k - 1$ pour $0 < 2k - 1 \leq n$. Donc clairement, $S_{k+1} \geq 2k > k$ pour $k \geq 1$ et en particulier $S_{n+1} > n$. Ceci légitime la décomposition télescopique suivante :

$$\begin{aligned} Y_n &= Y_{n \wedge S_1} + \sum_{i=1}^n (Y_{n \wedge S_{i+1}} - Y_{n \wedge S_i}) \\ &= Y_{n \wedge S_1} + \sum_{i=1}^n (Y_{n \wedge T_i} - Y_{n \wedge S_i}) + \sum_{i=1}^n (Y_{n \wedge S_{i+1}} - Y_{n \wedge T_i}). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $Z_{S_i} \leq a$, donc

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad Y_{S_i} = 0. \quad (2.16)$$

De même, $Z_{T_i} \geq b$, d'où $Z_{T_i} - a \geq b - a > 0$ et $Y_{T_i} = (Z_{T_i} - a)^+ = Z_{T_i} - a \geq b - a$, donc

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad Y_{T_i} \geq b - a. \quad (2.17)$$

Si U_n n'est pas nul, pour chaque i entre 1 et U_n , $0 \leq n \wedge S_i = S_i < T_i = n \wedge T_i \leq n$, d'où

$$\text{si } 1 \leq i \leq U_n, \quad Y_{n \wedge T_i} - Y_{n \wedge S_i} \geq (b - a). \quad (2.18)$$

5. Vérifiez le en exercice.

Si $i > U_n$, alors $T_i > n$ et ou bien $S_i \leq n$ et $Y_{n \wedge S_i} = Y_{S_i} = 0$ d'après (2.16), auquel cas $Y_{n \wedge T_i} - Y_{n \wedge S_i} = Y_n \geq 0$, ou bien $S_i > n$ et alors $Y_{n \wedge T_i} - Y_{n \wedge S_i} = Y_n - Y_n = 0$. Ainsi,

$$\forall i > U_n, \quad Y_{n \wedge T_i} - Y_{n \wedge S_i} \geq 0. \quad (2.19)$$

Grâce aux inégalités (2.18) et (2.19), il est clair que

$$\sum_{i=1}^n (Y_{n \wedge T_i} - Y_{n \wedge S_i}) \geq (b - a)U_n. \quad (2.20)$$

Cette inégalité reste vraie si $U_n = 0$ puisque le premier membre est toujours positif. En combinant (2.20) avec (2.15) et en notant que $Y_{n \wedge S_1} \geq 0$, il vient :

$$(b - a)U_n \leq Y_n - \sum_{i=1}^n (Y_{n \wedge S_{i+1}} - Y_{n \wedge T_i})$$

et comme toutes les v.a. intervenant dans cette inégalité sont intégrables,

$$(b - a)\mathbf{E}U_n \leq \mathbf{E}Y_n - \sum_{i=1}^n (\mathbf{E}Y_{n \wedge S_{i+1}} - \mathbf{E}Y_{n \wedge T_i}).$$

Comme $n \wedge T_i$ et $n \wedge S_{i+1}$ sont deux temps d'arrêt bornés par n et $n \wedge T_i \leq n \wedge S_{i+1}$, le théorème d'arrêt de Doob pour les sous-martingales (th. 2.23) nous donne l'inégalité $\mathbf{E}Y_{n \wedge T_i} \leq \mathbf{E}Y_{n \wedge S_{i+1}}$. Donc tous les termes de la somme indexée par i ci-dessus sont positifs, d'où

$$(b - a)\mathbf{E}U_n \leq \mathbf{E}Y_n,$$

ce qui établit la première inégalité dans (2.14). La deuxième est évidente. \square

2.5 Théorèmes de convergence

En analyse réelle élémentaire, il est bien connu que toute suite croissante et bornée de nombres réels converge dans \mathbb{R} . Le premier théorème limite de cette section peut être vu comme une extension aux sous-martingales de cette propriété⁶.

Théorème 2.32 (de convergence des sous-martingales). *Soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-martingale telle que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}Z_n^+ < +\infty$. Alors Z_n converge p.s. quand n tend vers l'infini vers une variable aléatoire intégrable Z .*

Il importe de noter que l'énoncé affirme seulement que $Z \in L^1$, pas que la convergence a lieu au sens L^1 . On ne peut donc pas déduire de ce théorème la convergence de $\mathbf{E}Z_n$ vers $\mathbf{E}Z$.

6. Avec un peu d'imagination... D'ailleurs si on considère la sous-martingale dégénérée $Z_n = c_n$, où (c_n) est une suite croissante de réels, le théorème 2.32 redonne ce résultat d'analyse élémentaire.

Preuve. Pour montrer la convergence presque sûre, considérons pour $a < b$ rationnels quelconques, les évènements

$$A_{a,b} := \left\{ \liminf_{n \rightarrow +\infty} Z_n \leq a \text{ et } \limsup_{n \rightarrow +\infty} Z_n \geq b \right\}$$

Notons $U_n(a, b)$ le nombre de montées de a à b entre les instants 0 et n . La suite de variables aléatoires entières $(U_n(a, b))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, donc converge vers une variable aléatoire $U(a, b)$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}}$ qui est le nombre total (éventuellement infini) de montées de a à b pour le processus $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Par le théorème de Beppo Levi (convergence croissante), on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}U_n(a, b) = \mathbf{E}U(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

D'autre part, l'inégalité des montées de Doob nous donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{E}U_n(a, b) \leq \frac{1}{b-a} \mathbf{E}(Z_n - a)^+ \leq \frac{1}{b-a} (\mathbf{E}Z_n^+ + |a|).$$

On en déduit que

$$\mathbf{E}U(a, b) \leq \frac{1}{b-a} \sup_{n \in \mathbb{N}} (\mathbf{E}Z_n^+ + |a|) < +\infty.$$

Par conséquent, la variable aléatoire positive $U(a, b)$ est intégrable, donc en particulier finie presque-sûrement. Ceci signifie qu'avec probabilité 1, le processus $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a qu'un nombre fini de montées de a à b . Or sur $A_{a,b}$, le nombre de ces montées est infini, donc

$$P(A_{a,b}) = 0.$$

Posons maintenant

$$A := \left\{ \liminf_{n \rightarrow +\infty} Z_n < \limsup_{n \rightarrow +\infty} Z_n \right\}$$

et notons que le complémentaire de A est exactement l'évènement « Z_n converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ ». Parce que A s'écrit comme union dénombrable

$$A = \bigcup_{\substack{a,b \in \mathbb{Q} \\ a < b}} A_{a,b}$$

d'évènements de probabilité nulle, $P(A) = 0$. Ceci établit la convergence presque sûre de Z_n vers une variable aléatoire Z à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

À ce stade, on ne peut affirmer que $P(|Z| = +\infty) = 0$, mais la question se résoudra d'elle-même quand on aura montré l'intégrabilité de Z . Par le lemme de Fatou,

$$\mathbf{E}|Z| = \mathbf{E} \lim_{n \rightarrow +\infty} |Z_n| = \mathbf{E} \liminf_{n \rightarrow +\infty} |Z_n| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}|Z_n|,$$

le problème se réduit à l'obtention d'une majoration uniforme de $\mathbf{E}|Z_n|$. Pour cela on remarque que

$$|Z_n| = Z_n^+ + Z_n^- = Z_n^+ + (Z_n^+ - Z_n) = 2Z_n^+ - Z_n,$$

d'où

$$\mathbf{E}|Z_n| = 2\mathbf{E}Z_n^+ - \mathbf{E}Z_n \leq 2\mathbf{E}Z_n^+ - \mathbf{E}Z_0, \quad (2.21)$$

puisque, (Z_n) étant une sous-martingale, $\mathbf{E}Z_0 \leq \mathbf{E}Z_n$. Finalement,

$$\mathbf{E}|Z| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}|Z_n| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}|Z_n| \leq 2 \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}Z_n^+ - \mathbf{E}Z_0 < +\infty,$$

ce qui achève la preuve. \square

Remarque 2.33. Comme sous-produit de la démonstration ci-dessus, l'inégalité (2.21) a l'intéressante conséquence suivante.

- a) Pour une sous-martingale (Z_n) , $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}|Z_n| < +\infty$ équivaut à $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}Z_n^+ < +\infty$.
- b) Pour une surmartingale (Z_n) , $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}|Z_n| < +\infty$ équivaut à $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}Z_n^- < +\infty$.

Du théorème 2.32 on déduit immédiatement le résultat symétrique pour les surmartingales.

Théorème 2.34 (de convergence des surmartingales). *Soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une surmartingale telle que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}Z_n^- < +\infty$. Alors Z_n converge p.s. quand n tend vers l'infini vers une variable aléatoire intégrable Z .*

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème 2.32 à la sous-martingale $(-Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en notant que $(-Z_n)^+ = \max(-Z_n, 0) = Z_n^-$. \square

Corollaire 2.35. *La suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge p.s. vers une v.a. intégrable Z dans chacun des cas suivants :*

- a) $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale, une surmartingale ou une sous-martingale bornée dans L^1 , autrement dit $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}|Z_n| < +\infty$;
- b) $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-martingale majorée par une v.a. intégrable X ($\forall n \in \mathbb{N}, Z_n \leq X$ p.s.) ;
- c) $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une surmartingale minorée par une v.a. intégrable ;
- d) $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-martingale négative ;
- e) $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une surmartingale positive.

Preuve. Dans le cas a), il suffit de remarquer que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}|Z_n|$ majore $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}Z_n^+$ et $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}Z_n^-$ et d'appliquer l'un des théorèmes 2.32 ou 2.34. Dans le cas b), grâce à la croissance de la fonction $x \mapsto x^+$, $Z_n \leq X$ entraîne $Z_n^+ \leq X^+$, puis $\mathbf{E}Z_n^+ \leq \mathbf{E}X^+$ et $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}Z_n^+ \leq \mathbf{E}X^+ < +\infty$. En fait on n'a même pas besoin que X soit intégrable, il suffit que X^+ le soit. Le cas c) se ramène au b) en considérant la sous-martingale $(-Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Les cas d) et e) sont évidemment des cas particuliers respectifs de b) et c). \square

Exercice 2.10. Soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-martingale de décomposition de Doob $Z_n = M_n + A_n + Z_0$, (A_n) étant le processus croissant. On note A_∞ la limite p.s. (dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) de A_n . Montrez que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}Z_n^+ < +\infty$ si et seulement si $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}|M_n| < +\infty$ et $\mathbf{E}A_\infty < +\infty$. \triangleleft

Pour obtenir des convergences de martingales au sens L^1 , nous aurons besoin de la propriété suivante.

Définition 2.36 (équi-intégrabilité). Soit \mathcal{J} une partie de $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Elle est dite équi-intégrable ou uniformément intégrable si

$$\sup_{X \in \mathcal{J}} \mathbf{E} \left(|X| \mathbf{1}_{\{|X| > c\}} \right) \xrightarrow{c \rightarrow +\infty} 0. \quad (2.22)$$

Remarque 2.37. Listons quelques propriétés immédiates de l'équi-intégrabilité.

1. Si $\mathcal{J} = \{X_0\}$ (famille singleton), elle est équi-intégrable (par un argument simple de convergence dominée).
2. Si \mathcal{J}_1 et \mathcal{J}_2 sont équi-intégrables, leur réunion l'est aussi.
3. Si \mathcal{J} est une partie finie de $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, elle est équi-intégrable.
4. L'équi-intégrabilité passe aux sous-familles : si \mathcal{J} est équi-intégrable, toute sous-famille $\mathcal{J} \neq \emptyset$ l'est aussi.
5. Toute famille équi-intégrable \mathcal{J} est bornée dans L^1 : $\sup_{X \in \mathcal{J}} \mathbf{E}|X| < +\infty$. Pour le voir, on prend par exemple $\varepsilon = 1$ et par (2.22), il existe un réel $c > 0$ tel que pour tout $X \in \mathcal{J}$, $\mathbf{E} \left(|X| \mathbf{1}_{\{|X| > c\}} \right) \leq 1$ et donc $\mathbf{E}|X| \leq c + 1$.

Exercice 2.11. Donnez un exemple de famille \mathcal{J} bornée dans L^1 qui n'est pas équi-intégrable. ◁

Voici deux conditions suffisantes classiques d'équi-intégrabilité.

Proposition 2.38. La famille \mathcal{J} dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est équi-intégrable dans chacun des cas suivants.

- a) \mathcal{J} est bornée dans L^p pour un $p > 1$: $\sup_{X \in \mathcal{J}} \mathbf{E}|X|^p < +\infty$.
- b) \mathcal{J} est dominée par une v.a. intégrable Y : $\forall X \in \mathcal{J}, |X| \leq Y$ p.s.

Preuve. Pour le a), on utilise la croissance de $x \mapsto x^{p-1}$ pour voir que sur l'évènement $\{|X| > c\}$, on a $|X|/c^{p-1} > 1$, d'où $|X| \leq |X| |X|/c^{p-1} = |X|^p c^{1-p}$. En prenant l'espérance, il vient :

$$\mathbf{E} \left(|X| \mathbf{1}_{\{|X| > c\}} \right) \leq c^{1-p} \mathbf{E}|X|^p \leq m c^{1-p}$$

avec $m = \sup_{Y \in \mathcal{J}} \mathbf{E}|Y|^p < +\infty$ par hypothèse. On a donc bien convergence uniforme sur \mathcal{J} de $\mathbf{E}(|X| \mathbf{1}_{\{|X| > c\}})$ vers 0 quand c tend vers l'infini. Notez que les inégalités ci-dessus restent vraies si $p = 1$ mais ne permettent pas de conclure à cette convergence.

Dans le cas b), pour tout $X \in \mathcal{J}$, $|X| \leq Y$, d'où l'inclusion $\{|X| > c\} \subset \{|Y| > c\}$ et l'inégalité $\mathbf{1}_{\{|X| > c\}} \leq \mathbf{1}_{\{|Y| > c\}}$. On en déduit :

$$\forall X \in \mathcal{J}, \quad \mathbf{E} \left(|X| \mathbf{1}_{\{|X| > c\}} \right) \leq \mathbf{E} \left(|Y| \mathbf{1}_{\{|Y| > c\}} \right),$$

d'où la conclusion, puisque Y étant dans L^1 , la famille singleton $\{Y\}$ est équi-intégrable. ◻

Voici maintenant un exemple important de famille équi-intégrable.

Proposition 2.39. Soit $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Alors la famille

$$\mathcal{J} = \left\{ \mathbf{E}(Z \mid \mathcal{G}) ; \mathcal{G} \text{ sous-tribu de } \mathcal{F} \right\}$$

est équi-intégrable.

Remarque 2.40. Comme l'équi-intégrabilité passe aux sous-familles, on en déduit que pour toute filtration \mathcal{F}_n , la martingale $(\mathbf{E}(Z \mid \mathcal{F}_n))_{n \in \mathbb{N}}$, cf. exemple 2.6, est équi-intégrable.

Preuve. Pour alléger les écritures, notons

$$Z_{\mathcal{G}} := \mathbf{E}(Z \mid \mathcal{G}), \quad A_{\mathcal{G},c} := \{|Z_{\mathcal{G}}| > c\}.$$

Comme $Z_{\mathcal{G}}$ est \mathcal{G} mesurable, $A_{\mathcal{G},c}$ est dans \mathcal{G} et son indicatrice est \mathcal{G} mesurable. Avec ces notations, il s'agit de vérifier que $\mathbf{E}(|Z_{\mathcal{G}}| \mathbf{1}_{A_{\mathcal{G},c}})$ tend vers 0 quand c tend vers l'infini, uniformément en \mathcal{G} . Par \mathcal{G} mesurabilité de $\mathbf{1}_{A_{\mathcal{G},c}}$ et croissance de l'espérance conditionnelle et de l'espérance, on a :

$$\mathbf{E}(|Z_{\mathcal{G}}| \mathbf{1}_{A_{\mathcal{G},c}}) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(Z \mid \mathcal{G}) \mathbf{1}_{A_{\mathcal{G},c}}) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(Z \mathbf{1}_{A_{\mathcal{G},c}} \mid \mathcal{G})) \leq \mathbf{E}(\mathbf{E}(|Z| \mathbf{1}_{A_{\mathcal{G},c}} \mid \mathcal{G})) = \mathbf{E}(|Z| \mathbf{1}_{A_{\mathcal{G},c}}).$$

Ensuite on écrit que pour tout $b > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(|Z| \mathbf{1}_{A_{\mathcal{G},c}}) &= \mathbf{E}(|Z| \mathbf{1}_{A_{\mathcal{G},c}} \mathbf{1}_{\{|Z| \leq b\}}) + \mathbf{E}(|Z| \mathbf{1}_{A_{\mathcal{G},c}} \mathbf{1}_{\{|Z| > b\}}) \\ &\leq bP(A_{\mathcal{G},c}) + \mathbf{E}(|Z| \mathbf{1}_{\{|Z| > b\}}) \\ &\leq \frac{b}{c} \mathbf{E}|Z_{\mathcal{G}}| + \mathbf{E}(|Z| \mathbf{1}_{\{|Z| > b\}}). \end{aligned}$$

Notons enfin que

$$\mathbf{E}|Z_{\mathcal{G}}| = \mathbf{E}|\mathbf{E}(Z \mid \mathcal{G})| \leq \mathbf{E}(\mathbf{E}(|Z| \mid \mathcal{G})) = \mathbf{E}|Z|.$$

En résumé, nous disposons maintenant de la majoration

$$\mathbf{E}(|Z_{\mathcal{G}}| \mathbf{1}_{A_{\mathcal{G},c}}) \leq \frac{b}{c} \mathbf{E}|Z| + \mathbf{E}(|Z| \mathbf{1}_{\{|Z| > b\}}),$$

valable pour tous réels $b, c > 0$.

Fixons $\varepsilon > 0$ arbitraire. Par équi-intégrabilité de la famille singleton $\{Z\}$, il existe un $b(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\mathbf{E}(|Z| \mathbf{1}_{\{|Z| > b(\varepsilon)\}}) < \varepsilon.$$

Le réel b étant ainsi choisi, nous pouvons trouver c_{ε} tel que pour tout $c \geq c_{\varepsilon}$,

$$\frac{b(\varepsilon)}{c} \mathbf{E}|Z| < \varepsilon.$$

Et finalement, pour tout $c \geq c_{\varepsilon}$, $\mathbf{E}(|Z_{\mathcal{G}}| \mathbf{1}_{A_{\mathcal{G},c}}) < 2\varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ était quelconque et c_{ε} ne dépend pas de la tribu \mathcal{G} , on a bien établi la convergence uniforme annoncée. \square

Avant d'étudier l'utilisation de l'équi-intégrabilité pour établir la convergence L^1 , voici un théorème « préparatoire ». En dépit du caractère assez élémentaire de sa preuve, ce théorème contient entre autres le théorème de convergence dominée.

Théorème 2.41. *Si la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers une v.a. intégrable Z et vérifie :*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_c^{+\infty} P(|Z_n| > t) dt \xrightarrow{c \rightarrow +\infty} 0, \quad (2.23)$$

alors Z_n converge vers Z au sens L^1 et en particulier, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}Z_n = \mathbf{E}Z$.

Preuve. La condition (2.23) implique la convergence de chacune des intégrales de Riemann généralisées $\int_0^{+\infty} P(|Z_n| > t) dt = \mathbf{E}|Z_n|$ et donc l'intégrabilité des Z_n . D'autre part puisque $\mathbf{E}|Z| < +\infty$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(|Z| > t) dt$ converge, d'où

$$\int_c^{+\infty} P(|Z| > t) dt \xrightarrow{c \rightarrow +\infty} 0. \quad (2.24)$$

Fixons $\varepsilon > 0$ arbitraire. Dans la représentation intégrale

$$\mathbf{E}|Z_n - Z| = \int_0^{+\infty} P(|Z_n - Z| > t) dt,$$

effectuons le découpage $\int_0^{+\infty} = \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^c + \int_c^{+\infty}$, où le choix de $c > \varepsilon$ sera précisé dans un instant. Pour cela, on effectue la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \int_c^{+\infty} P(|Z_n - Z| > t) dt &\leq \int_c^{+\infty} P(|Z_n| + |Z| > t) dt \\ &\leq \int_c^{+\infty} P\left(|Z_n| > \frac{t}{2}\right) dt + \int_c^{+\infty} P\left(|Z| > \frac{t}{2}\right) dt \\ &= 2 \int_{c/2}^{+\infty} P(|Z_n| > s) ds + 2 \int_{c/2}^{+\infty} P(|Z| > s) ds. \end{aligned}$$

En raison de (2.23) et (2.24), on peut trouver un $c = c(\varepsilon) > \varepsilon$ indépendant de n tel que cette somme soit majorée par ε .

Ayant ainsi choisi c , on utilise la décroissance de la fonction $t \mapsto P(|Z_n - Z| > t)$ pour obtenir :

$$\int_\varepsilon^c P(|Z_n - Z| > t) dt \leq \int_\varepsilon^c P(|Z_n - Z| > \varepsilon) dt \leq cP(|Z_n - Z| > \varepsilon).$$

Comme par hypothèse Z_n converge en probabilité vers Z , on peut trouver un $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad \int_\varepsilon^c P(|Z_n - Z| > t) dt \leq cP(|Z_n - Z| > \varepsilon) < \varepsilon.$$

Compte-tenu de la majoration évidente $\int_0^\varepsilon P(|Z_n - Z| > t) dt \leq \varepsilon$, on voit finalement que :

$$\forall n \geq n_0, \quad \mathbf{E}|Z_n - Z| = \int_0^{+\infty} P(|Z_n - Z| > t) dt < 3\varepsilon.$$

Comme ε était quelconque, ceci établit la convergence L^1 de Z_n vers Z .

L'interversion limite espérance est une conséquence immédiate de la convergence L^1 puisque $|\mathbf{E}Z_n - \mathbf{E}Z| \leq \mathbf{E}|Z_n - Z|$. \square

Exercice 2.12. 1) Montrez que dans le théorème 2.41, l'hypothèse d'intégrabilité de Z est superflue. *Indications* : vérifiez d'abord que (2.23) implique $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}|Z_n| < +\infty$ puis utilisez le lemme de Fatou.

2) Justifiez l'affirmation « ce théorème contient le théorème de convergence dominée (pour les suites de v.a. sur (Ω, \mathcal{F}, P)) ». \triangleleft

La condition (2.23) ressemble à l'équi-intégrabilité. Cette ressemblance n'est pas fortuite.

Lemme 2.42. La condition (2.23) équivaut à l'équi-intégrabilité de la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Dans la suite nous n'aurons besoin que de l'implication équi-intégrabilité \Rightarrow (2.23).

Preuve. Pour montrer que l'équi-intégrabilité de la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ implique (2.23), on écrit

$$\mathbf{E}\left(|Z_n| \mathbf{1}_{\{|Z_n| > c\}}\right) = \int_0^{+\infty} P\left(|Z_n| \mathbf{1}_{\{|Z_n| > c\}} > t\right) dt$$

et on essaie de se débarrasser de l'indicatrice dans l'intégrale. Pour cela, notons que :

$$\forall t > 0, \forall c > 0, \quad \left\{|Z_n| \mathbf{1}_{\{|Z_n| > c\}} > t\right\} = \left\{|Z_n| > \max(c, t)\right\}$$

et par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $c > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(|Z_n| \mathbf{1}_{\{|Z_n| > c\}}\right) &= \int_0^{+\infty} P\left(|Z_n| > \max(c, t)\right) dt \\ &= cP(|Z_n| > c) + \int_c^{+\infty} P(|Z_n| > t) dt. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Comme $cP(|Z_n| > c)$ est positif, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_c^{+\infty} P(|Z_n| > t) dt \leq \mathbf{E}\left(|Z_n| \mathbf{1}_{\{|Z_n| > c\}}\right).$$

L'équi-intégrabilité de $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ implique donc bien (2.23).

Pour la réciproque, au vu de la décomposition (2.25), obtenue sans hypothèse particulière sur la suite (Z_n) , il suffit de vérifier que (2.23) implique la convergence uniforme :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} cP(|Z_n| > c) \xrightarrow{c \rightarrow +\infty} 0. \quad (2.26)$$

Pour cela on utilise la minoration :

$$\int_c^{+\infty} P(|Z_n| > t) dt \geq \int_c^{2c} P(|Z_n| > t) dt \geq (2c - c)P(|Z_n| > 2c),$$

d'où

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} cP(|Z_n| > 2c) \xrightarrow{c \rightarrow +\infty} 0,$$

ce qui équivaut à (2.26). \square

Le lemme 2.42 nous permet de reformuler le théorème 2.41 sous la forme plus classique suivante.

Théorème 2.43. *Si la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers une v.a. intégrable Z et est équi-intégrable, elle converge aussi au sens L^1 vers Z et en particulier, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}Z_n = \mathbf{E}Z$.*

Là aussi l'hypothèse d'intégrabilité de Z est superflue (cf. exercice 2.12).

Exercice 2.13. Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Vérifiez qu'elle est équi-intégrable mais ne contient aucune sous-suite convergente dans L^1 . \triangleleft

Exercice 2.14. *Équi-intégrabilité et relative compacité dans L^1 .*

1) Pour $c > 0$, on note f_c la fonction définie par $f_c(t) = 0$ si $t \leq c - 1$, 1 si $t > c$ et $t - c + 1$ sur $]c - 1, c]$. Montrez que l'équi-intégrabilité d'une famille \mathcal{J} de $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ équivaut à :

$$\sup_{X \in \mathcal{J}} \mathbf{E}(|X|f_c(|X|)) \xrightarrow{c \rightarrow +\infty} 0.$$

2) Montrez que si \mathcal{J} est une partie relativement compacte de $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, elle est équi-intégrable. *Indications.* On ne perd pas de généralité en supposant que \mathcal{J} est compacte (pourquoi?). On pourra montrer que pour $\varepsilon > 0$ fixé, $F_\varepsilon = \{x \in \mathcal{J}; \mathbf{E}(|X|f_\varepsilon(|X|)) \geq \varepsilon\}$ est un fermé de L^1 et que $\bigcap_{\varepsilon > 0} F_\varepsilon = \emptyset$.

3) En déduire la réciproque du th. 2.43. \triangleleft

Exercice 2.15. *Une caractérisation de la relative compacité dans L^1 .*

On dit qu'une famille \mathcal{J} de $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est séquentiellement relativement compacte pour la convergence en probabilité (SRCCP) si de toute suite de variables aléatoires de \mathcal{J} on peut extraire une sous-suite convergente en probabilité.

1) Montrez que \mathcal{J} est relativement compacte dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ si et seulement si elle est SRCCP et équi-intégrable.

2) Montrez que des deux conditions SRCCP et équi-intégrabilité, aucune n'implique l'autre. \triangleleft

Théorème 2.44 (de convergence des martingales). *Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Si elle est équi-intégrable, elle converge presque sûrement et au sens L^1 vers une variable aléatoire M_∞ . De plus $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est fermée par $M_\infty : M_n = \mathbf{E}(M_\infty | \mathcal{F}_n)$ pour tout n .*

Preuve. En raison de son équi-intégrabilité, la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans L^1 , cf. remarque 2.37. Par le corollaire 2.35, elle converge p.s. (et *a fortiori* en probabilité) vers une v.a. intégrable que nous notons M_∞ . Par le théorème 2.43, cette convergence a lieu aussi au sens L^1 .

Pour vérifier que $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est fermée par M_∞ , fixons un entier n et rappelons que l'opérateur $\mathbf{E}_{\mathcal{F}_n} : X \mapsto \mathbf{E}(X \mid \mathcal{F}_n)$ est continu sur $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Par la propriété de martingale on a :

$$\forall j \geq n, \quad M_n = \mathbf{E}_{\mathcal{F}_n}(M_j).$$

Quand j tend vers l'infini M_j tend vers M_∞ au sens L^1 et par continuité de $\mathbf{E}_{\mathcal{F}_n}$, on obtient :

$$M_n = \mathbf{E}_{\mathcal{F}_n}(M_\infty) = \mathbf{E}(M_\infty \mid \mathcal{F}_n).$$

Comme n était quelconque dans \mathbb{N} , la martingale est fermée par M_∞ . \square

Proposition 2.45 (caractérisation des martingales fermables).

- a) Une martingale est fermable (ou régulière) si et seulement si elle est équi-intégrable.
 b) Une martingale est fermable (ou régulière) si et seulement si elle converge au sens L^1 .

Preuve. La caractérisation a) s'obtient en combinant le théorème 2.44 avec la proposition 2.39 (plus précisément avec la remarque 2.40). La caractérisation b) découle du théorème 2.44 et de l'exercice 2.14 (réciproque du th. 2.43). \square

En se rappelant la proposition 2.38 a), on obtient le corollaire suivant du théorème de convergence des martingales.

Corollaire 2.46. Si la martingale $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans L^p pour un $p > 1$, elle converge p.s. et au sens L^1 vers une v.a. M_∞ et est fermée par M_∞ .

Exercice 2.16. Soit $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de réels et $(\epsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, centrées et de carré intégrable. On note $\sigma_i^2 = \text{Var } \epsilon_i$. Montrez que la série $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \epsilon_i$ converge p.s. et au sens L^1 dès que $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i^2 \sigma_i^2 < +\infty$. \triangleleft

La partie convergence L^1 dans le théorème 2.44 s'étend immédiatement aux sous-martingales et surmartingales.

Théorème 2.47 (convergence L^1 des sous- et surmartingales). Si $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous- ou surmartingale équi-intégrable, elle converge p.s. et au sens L^1 .

Preuve. Dans le cas sous-martingale, il suffit de reprendre la preuve de la convergence L^1 dans le th. 2.44. Si $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une surmartingale, $(-Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-martingale et l'équi-intégrabilité de $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ équivaut à celle de $(-Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. \square

Exercice 2.17. Soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui converge au sens L^1 vers une v.a. Z . Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{E}(Z \mid \mathcal{F}_n) \geq Z_n$. \triangleleft

Exercice 2.18. Montrez que si $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous- ou surmartingale bornée dans L^p pour un $p > 1$, elle converge au sens L^r pour tout $1 \leq r < p$. \triangleleft

Suite à cet exercice, il est naturel de se demander si une martingale bornée dans L^p converge au sens L^p . La réponse est positive, cf. Neveu [5, prop. IV-2-7 p. 67]. Nous nous contenterons de la preuve du cas $p = 2$ qui est particulièrement simple⁷.

7. En fait on aurait pu la donner en exercice dès le début de ce chapitre pour la partie convergence L^2 qui ne requiert que la définition des martingales.

Théorème 2.48 (convergence L^2 des martingales). *Si $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale bornée dans L^2 , elle converge p.s. et au sens L^2 .*

Preuve. Comme $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équi-intégrable, on sait déjà qu'elle converge p.s. et dans L^1 . Pour établir la convergence L^2 , nous allons vérifier que $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet L^2 . Le point clé est le calcul de $\|M_k - M_j\|_2^2$ pour $k \geq j$, où l'on utilise la propriété de martingale $\mathbf{E}(M_k | \mathcal{F}_j) = M_j$, d'où $\mathbf{E}M_k M_j = \mathbf{E}M_j^2$:

$$\mathbf{E}(M_k - M_j)^2 = \mathbf{E}M_k^2 - 2\mathbf{E}M_k M_j + \mathbf{E}M_j^2 = \mathbf{E}M_k^2 - \mathbf{E}M_j^2. \quad (2.27)$$

La suite de réels $(\mathbf{E}M_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (parce que (M_n^2) est une sous-martingale ou comme sous-produit du calcul ci-dessus qui montre que pour $k \geq j$, $\mathbf{E}M_k^2 - \mathbf{E}M_j^2$ est positif). Comme $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans L^2 , $(\mathbf{E}M_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans \mathbb{R}_+ . Elle converge donc dans \mathbb{R}_+ et c'est une suite de Cauchy. En utilisant (2.27), on en déduit immédiatement que $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans L^2 . \square

Pour étudier le comportement asymptotique d'une martingale (M_n) dans L^2 , il est utile de considérer le processus croissant de la décomposition de Doob de la sous-martingale M_n^2 . Voici un premier résultat reliant le comportement de (M_n) à celui de ce processus.

Proposition 2.49. *Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale de L^2 vérifiant $M_0 = 0$. Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$, le processus croissant dans la décomposition de Doob de la sous-martingale $(M_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$. On note V_∞ la limite p.s. de la suite croissante de v.a. positives $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Si $\mathbf{E}V_\infty < +\infty$, $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge p.s. et au sens L^2 et de plus*

$$\mathbf{E} \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} M_n^2 \right) \leq 4\mathbf{E}V_\infty. \quad (2.28)$$

Preuve. D'après la décomposition de Doob, $(M_n^2 - V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale et l'espérance commune à tous les termes de cette suite est $\mathbf{E}(M_0^2 - V_0) = 0$. Autrement dit,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{E}M_n^2 = \mathbf{E}V_n.$$

Comme $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de variables aléatoires positives, le théorème de Beppo Levi nous donne $\mathbf{E}M_n^2 = \mathbf{E}V_n \uparrow \mathbf{E}V_\infty$. On a ainsi $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}M_n^2 = \mathbf{E}V_\infty < +\infty$, donc la martingale $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans L^2 et converge p.s. et au sens L^2 par le théorème 2.48. Pour vérifier (2.28), on écrit l'inégalité de moments de Doob avec $p = 2$ pour la martingale M_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{E}(M_n^*)^2 \leq \left(\frac{2}{2-1} \right)^2 \mathbf{E}M_n^2,$$

ce qui s'écrit aussi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{E} \left(\max_{k \leq n} M_k^2 \right) \leq 4\mathbf{E}V_n.$$

En faisant tendre n vers l'infini et en appliquant le théorème de Beppo Levi à chacun des deux membres de cette inégalité, on obtient (2.28). \square

Exercice 2.19. Utilisez la proposition 2.49 pour retrouver le résultat suivant. Si $(X_k)_{k \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de carré intégrable et d'espérance nulle telle que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{E}X_k^2 < +\infty$, la série $\sum_{k=1}^{+\infty} X_k$ converge presque-sûrement et au sens L^2 (on peut aussi obtenir ce résultat par le théorème 2.48). \triangleleft

Exercice 2.20. Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ martingale de L^2 et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$, le processus croissant dans la décomposition de Doob de la sous-martingale $(M_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$. Soit T un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors $(M_{T \wedge n})$ est encore une martingale pour cette filtration, cf. exercice 2.5. Vérifiez que le processus croissant de la décomposition de Doob de la sous-martingale $(M_{T \wedge n}^2)_{n \in \mathbb{N}}$ est exactement $(V_{T \wedge n})_{n \in \mathbb{N}}$. \triangleleft

Théorème 2.50 (loi forte des grands nombres pour les martingales dans L^2).

Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ martingale de L^2 et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$, le processus croissant dans la décomposition de Doob de la sous-martingale $(M_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$. On note V_∞ la limite p.s. de la suite croissante de v.a. positives $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- a) Sur l'évènement $\{V_\infty < +\infty\}$, $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge p.s. dans \mathbb{R} .
 b) Sur $\{V_\infty = +\infty\}$,

$$M_n = o(f(V_n)) \quad \text{p.s.}, \quad (2.29)$$

pour toute fonction croissante $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+f(t))^2} < +\infty. \quad (2.30)$$

C'est le cas notamment des fonctions $f(t) = t^\alpha$ et $f(t) = t^{1/2}(\ln^+(t))^\alpha$ avec $\alpha > 1/2$.

Preuve du a). Pour tout $c \in \mathbb{N}^*$, définissons le temps d'arrêt :

$$T_c := \inf\{n \in \mathbb{N}; V_{n+1} > c^2\},$$

avec la convention habituelle $\inf \emptyset = +\infty$. Notons au passage que

$$\{T_c = +\infty\} = \{\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} \leq c^2\} = \{V_\infty \leq c^2\}.$$

La variable aléatoire T_c à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}}$ est bien un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puisque la suite $(V_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est adaptée à $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Notons aussi que $V_{T_c} \leq c^2$ (sur Ω tout entier) parce que ou bien T_c est fini et alors T_c est le dernier indice avant que la suite croissante (V_k) ne dépasse strictement c^2 , ou bien $T_c = +\infty$ et sur l'évènement correspondant, $V_\infty \leq c^2$.

Comme $(V_{n \wedge T_c})_{n \in \mathbb{N}}$ est le processus croissant de la décomposition de Doob de la sous-martingale $(M_{n \wedge T_c}^2)_{n \in \mathbb{N}}$ (cf. exercice 2.20) et comme la limite p.s. de ce processus est V_{T_c} , bornée par c^2 donc *a fortiori* intégrable, la proposition 2.49 nous dit que $(M_{n \wedge T_c})_{n \in \mathbb{N}}$ converge p.s. vers une limite qui est une v.a. p.s. finie.

En particulier, sur l'évènement $\{V_\infty \leq c^2\}$, c'est-à-dire sur $\{T_c = +\infty\}$, les suites $(M_{n \wedge T_c})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont les mêmes et convergent p.s. vers une limite finie (autrement dit, convergent p.s. dans \mathbb{R}). D'où

$$\{V_\infty \leq c^2\} \subset \{(M_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge dans } \mathbb{R}\} \cup N_c, \quad P(N_c) = 0.$$

En passant à la réunion dénombrable indexée par $c \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que

$$\{V_\infty < +\infty\} \subset \{(M_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge dans } \mathbb{R}\} \cup N, \quad P(N) = 0,$$

ce qui est précisément la traduction de « sur $\{V_\infty < +\infty\}$, $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge p.s. dans \mathbb{R} ». \square

Preuve du b). Considérons la suite de v.a. $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $Z_0 = 0$ et

$$\forall n \geq 1, \quad Z_n = \sum_{0 \leq k < n} \frac{M_{k+1} - M_k}{1 + f(V_{k+1})}.$$

Nous allons montrer que cette suite converge p.s. vers une limite finie et utiliser ensuite le lemme de Kronecker pour en déduire (2.29).

On commence par vérifier que $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ martingale. Il suffit pour cela de vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{E}(Z_{n+1} - Z_n \mid \mathcal{F}_n) = 0$. C'est bien le cas puisque

$$\mathbf{E}(Z_{n+1} - Z_n \mid \mathcal{F}_n) = \mathbf{E}\left(\frac{M_{n+1} - M_n}{1 + f(V_{n+1})} \mid \mathcal{F}_n\right) = \frac{1}{1 + f(V_{n+1})} \mathbf{E}(M_{n+1} - M_n \mid \mathcal{F}_n) = 0,$$

en raison de la \mathcal{F}_n -mesurabilité de V_{n+1} (et donc de toute fonction borélienne de cette v.a.) et de la nullité de $\mathbf{E}(M_{n+1} - M_n \mid \mathcal{F}_n)$ due à la propriété de martingale de (M_n) .

Notons $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le processus croissant de la décomposition de Doob de la sous-martingale $(Z_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$. Nous allons vérifier que sa limite p.s. B_∞ est bornée par une constante. Pour cela, on majore son accroissement $B_{k+1} - B_k$ par le terme général d'une série convergente. Un coup d'oeil dans la preuve de la décomposition de Doob nous donne $B_{k+1} - B_k = \mathbf{E}(Z_{k+1}^2 - Z_k^2 \mid \mathcal{F}_k)$, qu'il est commode de traiter comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Z_{k+1}^2 - Z_k^2 \mid \mathcal{F}_k) &= \mathbf{E}\left((Z_{k+1} - Z_k)^2 \mid \mathcal{F}_k\right) + \mathbf{E}(2Z_k Z_{k+1} - 2Z_k^2 \mid \mathcal{F}_k) \\ &= \mathbf{E}\left((Z_{k+1} - Z_k)^2 \mid \mathcal{F}_k\right) + 2Z_k \mathbf{E}(Z_{k+1} - Z_k \mid \mathcal{F}_k) \\ &= \mathbf{E}\left((Z_{k+1} - Z_k)^2 \mid \mathcal{F}_k\right). \end{aligned}$$

Nous avons simplement utilisé ici le fait que (Z_n) est une martingale et donc la même formule est valide en remplaçant (Z_n) par (M_n) . Ceci nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} B_{k+1} - B_k &= \mathbf{E}\left((Z_{k+1} - Z_k)^2 \mid \mathcal{F}_k\right) \\ &= \mathbf{E}\left(\frac{(M_{k+1} - M_k)^2}{(1 + f(V_{k+1}))^2} \mid \mathcal{F}_k\right) \\ &= \frac{1}{(1 + f(V_{k+1}))^2} \mathbf{E}\left((M_{k+1} - M_k)^2 \mid \mathcal{F}_k\right) \\ &= \frac{1}{(1 + f(V_{k+1}))^2} \mathbf{E}(M_{k+1}^2 - M_k^2 \mid \mathcal{F}_k) \\ &= \frac{V_{k+1} - V_k}{(1 + f(V_{k+1}))^2}. \end{aligned}$$

Par conséquent, en rappelant que $B_0 = 0$,

$$B_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (B_{k+1} - B_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{V_{k+1} - V_k}{(1 + f(V_{k+1}))^2}.$$

Cette série converge *a priori* p.s. dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, plus précisément, la double égalité ci-dessus est valable sur un évènement Ω' de probabilité 1, sur lequel en particulier, la suite $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante.

En utilisant cette croissance et la décroissance de $(1 + f)^{-2}$, on voit que sur Ω' ,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{V_{k+1} - V_k}{(1 + f(V_{k+1}))^2} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{V_k}^{V_{k+1}} \frac{dt}{(1 + f(t))^2} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 + f(t))^2} = c < +\infty.$$

Donc sur Ω' , $B_\infty \leq c$, d'où $\mathbf{E}B_\infty \leq c < +\infty$ et par la proposition 2.49, la martingale de carré intégrable $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge p.s. dans \mathbb{R} .

On remarque maintenant que la croissance de f avec la condition (2.30) impliquent que $f(t)$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$. Donc sur $\{V_\infty = +\infty\}$, $1 + f(V_{n+1})$ tend vers $+\infty$. Par application du lemme de Kronecker ci-dessous, on en déduit que sur l'évènement

$$\{V_\infty = +\infty\} \cap \{(Z_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge dans } \mathbb{R}\},$$

$$\frac{1}{1 + f(V_n)} \sum_{k=0}^n (M_{k+1} - M_k) = \frac{1}{1 + f(V_n)} (M_n - M_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ceci montre bien que sur $\{V_\infty = +\infty\}$, $M_n = o(f(V_n))$ p.s. \square

Lemme 2.51 (Kronecker). *Soient $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de réels et $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de réels strictement positifs tendant vers l'infini, telles que la série*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x_k}{b_k} \quad \text{converge dans } \mathbb{R}. \quad (2.31)$$

Alors

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=0}^n x_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad (2.32)$$

Preuve. Posons

$$\ell := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x_k}{b_k}, \quad \ell_n := \sum_{j=0}^n \frac{x_j}{b_j}, \quad \ell_{-1} := 0.$$

Avec ces notations, $x_k = b_k(\ell_k - \ell_{k-1})$ et

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_n} \sum_{k=0}^n x_k &= \frac{1}{b_n} \sum_{k=0}^n b_k (\ell_k - \ell_{k-1}) \\ &= \frac{1}{b_n} \sum_{k=0}^n b_k \ell_k - \frac{1}{b_n} \sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1} \ell_j \\ &= \ell_n - \frac{1}{b_n} \sum_{j=0}^{n-1} (b_{j+1} - b_j) \ell_j. \end{aligned}$$

Comme ℓ_n converge vers le réel ℓ , ce calcul réduit la vérification de (2.32) à celle de la convergence

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=0}^{n-1} (b_{j+1} - b_j) \ell_j \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell.$$

Cette convergence se prouve comme le théorème de Cesàro. Comme b_n tend vers $+\infty$, cette convergence équivaut à :

$$\frac{b_0}{b_n} \ell_0 + \frac{1}{b_n} \sum_{j=0}^{n-1} (b_{j+1} - b_j) \ell_j \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell.$$

Définissons maintenant les coefficients $(c_{n,j})_{n \geq 1, 0 \leq j < n}$ par :

$$c_{n,0} = \frac{b_0}{b_n}, \quad c_{n,j} = \frac{b_{j+1} - b_j}{b_n}, \quad 1 \leq j < n.$$

Avec ces notations, le problème se réduit à montrer que

$$\sum_{j=0}^{n-1} c_{n,j} \ell_j \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell. \quad (2.33)$$

Les propriétés utiles des $c_{n,j}$ sont ici :

- i) la positivité ;
- ii) pour tout $n \geq 1$, $\sum_{0 \leq j < n} c_{n,j} = 1$;
- iii) pour tout j fixé, $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_{n,j} = 0$.

Grâce à ii), on peut réécrire (2.33) sous la forme

$$\sum_{j=0}^{n-1} c_{n,j} (\ell_j - \ell) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad (2.34)$$

Puisque par hypothèse ℓ_n converge vers le réel ℓ , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe par (2.31) un entier j_ε tel que pour tout $j \geq j_\varepsilon$, $|\ell_j - \ell| < \varepsilon$. On a alors

$$\left| \sum_{j=0}^{n-1} c_{n,j} (\ell_j - \ell) \right| \leq \sum_{j < j_\varepsilon} c_{n,j} |\ell_j - \ell| + \varepsilon \sum_{j=j_\varepsilon}^{n-1} c_{n,j} \leq \sum_{j < j_\varepsilon} c_{n,j} |\ell_j - \ell| + \varepsilon.$$

Par iii), la somme $\sum_{j < j_\varepsilon}$ ci-dessus tend vers 0 quand n tend vers l'infini (ε et j_ε étant fixés). Par conséquent, il existe un entier $n_0(\varepsilon)$ tel que :

$$\forall n \geq n_0(\varepsilon), \quad \left| \sum_{j=0}^{n-1} c_{n,j} (\ell_j - \ell) \right| < 2\varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ était quelconque, ceci établit (2.34) et achève la preuve. \square

Remarque 2.52. Le théorème 2.50 permet de retrouver une partie des lois des grands nombres pour des sommes de variables aléatoires indépendantes. Le cas le plus simple est celui d'une suite de v.a. $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$, i.i.d., centrées, de carré intégrable. Posons $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $\sigma^2 = \text{Var } X_1 = \mathbf{E}X_1^2$. Alors $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale pour la filtration définie par $\mathcal{F}_n = \sigma(X_i, i \leq n)$, $n \in \mathbb{N}$, et le processus croissant $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la décomposition de Doob de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se calcule très facilement puisque :

$$\begin{aligned} V_n - V_{n-1} &= \mathbf{E}(S_n^2 - S_{n-1}^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbf{E}((S_n - S_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= \mathbf{E}(X_n^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbf{E}X_n^2 = \sigma^2, \end{aligned}$$

d'où $V_n = n\sigma^2$. Le processus est donc déterministe et si $\sigma^2 > 0$, $\{V_\infty = +\infty\} = \Omega$. En appliquant le théorème 2.50 avec $f(t) = t$, on obtient :

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} 0.$$

On retrouve ainsi la loi forte des grands nombres dans le cas i.i.d. (généralisation immédiate au cas où les X_i ne sont pas centrées en remplaçant la limite 0 par $\mathbf{E}X_1$). Bien sûr on est en droit d'attendre un résultat plus précis puisque d'après la loi forte des grands nombres de Kolmogorov-Khintchine, la convergence p.s. de S_n/n dans le cas i.i.d. équivaut à l'intégrabilité de X_1 et qu'ici nous avons l'hypothèse plus forte $\mathbf{E}X_1^2 < +\infty$. Effectivement, en appliquant le théorème 2.50 avec $f(t) = t^{1/2}(\ln t)^\beta$, pour $\beta > 1/2$, on obtient :

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}(\ln n)^\beta} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} 0. \quad (2.35)$$

cette dernière convergence peut aussi être vue comme un corollaire immédiat de la LFGN de Kolmogorov suivante pour les v.a. indépendantes (pas forcément de même loi) et dans L^2 .

Théorème 2.53 (LFGN de Kolmogorov). *Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes vérifiant :*

- a) pour tout $k \geq 1$, $\mathbf{E}X_k^2 < +\infty$;
- b) il existe une suite (b_k) de réels strictement positifs qui tend en croissant vers $+\infty$ telle que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\text{Var } X_k}{b_k^2} < +\infty.$$

Alors $(S_n - \mathbf{E}S_n)/b_n$ converge presque sûrement et dans L^2 vers 0. Si de plus $b_n^{-1}\mathbf{E}S_n$ converge vers m , S_n/b_n converge p.s. et dans L^2 vers m .

Il est intéressant de noter que cette LFGN de Kolmogorov peut à son tour, se déduire assez facilement de la proposition 2.49 (mais pas directement du théorème 2.50). C'est l'objet des deux exercices suivants.

Exercice 2.21. Expliquez brièvement pourquoi le lemme de Kronecker reste valable si on remplace la suite réelle x_k par une suite de vecteurs d'un espace vectoriel normé F , la convergence ayant alors lieu pour la distance associée à la norme de F . \triangleleft

Exercice 2.22. Dédurre la LFGN de Kolmogorov (th. 2.53) de l'exercice 2.19 et du lemme de Kronecker. \triangleleft

2.6 En guise de conclusion

Ce polycopié n'est qu'une ébauche incomplète. Voici quelques pistes pour compléter cette introduction aux martingales.

On peut trouver une version simplifiée du théorème limite central pour les martingales⁸ dans [4] et un énoncé de type Lindeberg-Lévy dans [2].

J'ai suivi essentiellement le plan d'exposition de Jacod-Protter [4]. La LFGN (th. 2.50) pour des martingales L^2 se trouve sous cette forme dans Neveu [5]. Je n'ai pas parlé des martingales inverses. On pourra en avoir un aperçu dans [4] avec une élégante application à la preuve de la LFGN pour des variables aléatoires i.i.d. et intégrables. Pour une approche alternative couvrant bien le programme de l'agrégation, le chapitre 15 de Ouvrard [6] est une bonne lecture⁹. On y trouve aussi quelques exercices classiques corrigés en détail (ruine du joueur, pile ou face et apprentissage, modèle de porte-feuille d'actions).

On trouvera des applications classiques des martingales en modélisation notamment dans Bercu-Chafaï [2] et dans Vallois [7] :

- algorithme de Robbins-Monro, [2] ;
- bandit à deux bras, [2] ;
- modèles discrets pour marchés financiers [7] ;
- processus autoregressif, [2] ;
- processus de branchement (Galton-Watson), [7], [2] ;
- ruine d'une compagnie d'assurance, Foata-Fuchs [3]

Pour s'entraîner, on trouvera de nombreux exercices corrigés dans Baldi-Mazliak-Priouret [1].

8. Ce théorème n'est pas au programme de l'agrégation.

9. Il est évidemment déconseillé de mélanger [4] et [6] en *première* lecture sur les martingales.

Bibliographie

- [1] P. Baldi, L. Mazliak, and P. Priouret. *Martingales et chaînes de Markov avec exercices corrigés*. Hermann, seconde édition, 2000.
- [2] B. Bercu and D. Chafaï. *Modélisation stochastique et simulation*. Sciences Sup, mathématiques appliquées pour le master/SMAI. Dunod, 2007.
- [3] D. Foata and A. Fuchs. *Processus stochastiques. Processus de Poisson, chaînes de Markov et martingales*. Sciences Sup, 2^e cycle/Master, Agrégation, Écoles d'Ingénieurs. Dunod, 2006.
- [4] J. Jacod and P. Protter. *L'essentiel en théorie des probabilités*. Cassini, 2003.
- [5] J. Neveu. *Martingales à temps discret*. Masson, 1972.
- [6] J.-Y. Oувrard. *Probabilités*, volume 2. Cassini, 2000.
- [7] P. Vallois. *Modélisations stochastiques et simulations*. Ellipses, 2007.