Examen final : Physique des systèmes complexes

Correction

Modèle d'Ising avec interactions de portée infinie

1. $H(s) = -s^2/(2N) - hs$.
2. On reconnaît une intégrale gaussienne $a = \beta N$, $b = \beta s$ (notation du cours) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dm\, e^{-N\beta \frac{m^2}{2} + \beta(m+h)s} = e^{\beta hs} \int_{-\infty}^{\infty} dm\, e^{-(N\beta)\frac{m^2}{2} + (\beta s)m} = e^{\beta hs} \sqrt{\frac{2\pi}{N\beta}} e^{(\beta s)^2/(2N\beta)} = \sqrt{\frac{2\pi}{N\beta}} e^{-\beta H} \quad (1)$$

3. On introduit $Z = \sum_{\{\sigma_i = \pm 1\}} e^{-\beta H}$ qui se factorise selon

$$\sum_{\{\sigma_i=\pm 1\}} e^{\beta(m+h)\sum_i \sigma_i} = \prod_{i=1}^{N} \sum_{\sigma=\pm 1} e^{\beta(m+h)\sigma} = (2\cosh(\beta(m+h)))^N \quad (2)$$

de sorte que

$$Z = \sqrt{\frac{N\beta}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dm\, e^{-N\beta\frac{m^2}{2}} \sum_{\{\sigma_i=\pm 1\}} e^{-N\beta \frac{m^2}{2} + \beta(m+h)s} \quad (3)$$

$$= \sqrt{\frac{N\beta}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dm\, e^{-N\beta\frac{m^2}{2}} (2\cosh(\beta(m+h)))^N = \sqrt{\frac{N\beta}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dm\, e^{-Nf(m)} \quad (4)$$

avec $f(m) = \beta m^2/2 - \ln[2\cosh(\beta(m+h))]$.

4. On a une forme standard pour la méthode du col, avec $f'(m) = \beta(m - \tanh(\beta(m+h)))$, et $f''(m) = \beta(1-\beta(1-\tanh^2(\beta(m+h))))$. Le point col satisfait à $m_c = \tanh(\beta(m_c+h))$ pourvu que $f''(m_c) = \beta(1-\beta(1-m_c^2)) > 0$ (condition du minimum). On retrouve l'équation auto-cohérente de l'aimantation de la théorie champ moyen mais ici, sans approximations. Pour $h = 0$, la température critique est donnée par $\beta = 1$. Lorsque $\beta < 1$, $m_c = 0$, et clairement $f''(m_c) > 0$, $f(m_c) = -\ln 2$. Lorsque $\beta > 1$, il y a deux minima dégénérés $m_c \neq 0$. Comme en cours, on peut montrer que les solutions non nulles correspondent bien à des minimas (c'est les mêmes équations que le champ moyen). Autrement dit, le champ moyen devient exact pour des interactions de portée infinie.

Transition de Lifshitz

1. **Solution uniforme**
   a) $f_0 = f_L(\phi_0) = \tilde{a}\phi_0^2 + d\phi_0^4$.
   b) $\frac{\partial f_0}{\partial \phi_0} = 0 = 2\phi_0(\tilde{a} + 2d\phi_0^2)$ donne $\phi_0 = 0$ si $\tilde{a} > 0$ ou $T \geq T_c$ (phase désordonnée) et $\phi_0 = \pm\sqrt{-\tilde{a}/2d}$ si $\tilde{a} < 0$ ou $T \leq T_c$ (solution plus favorable que $\phi_0 = 0$).
   c) On obtient $f_0 = 0$ si $T \geq T_c$ et $f_0 = -\frac{\tilde{a}^2}{4d}$ si $T \leq T_c$.
2. **Solution modulée**
   a) Avec les approximations de l'énoncé, on obtient

$$f_m = \frac{1}{2}\left(\tilde{a} + \tilde{g}q^2 + \sigma q^4\right)\phi_m^2 + \frac{3}{8} d\phi_m^4 \quad (5)$$

   b) Il faut minimiser f_m par rapport à ϕ_m et q. La minimisation par rapport à q donne

$$\frac{\partial f_m}{\partial q} = q\left(\tilde{g} + 2\sigma q^2\right)\phi_m^2 = 0 \quad (6)$$

   La minimisation par rapport à ϕ_m est $\frac{\partial f_m}{\partial \phi_m} = 0$.

c) Par hypothèse pour la phase modulée, on a $q \neq 0$ et $\phi_m \neq 0$ (on serait sinon dans une solution uniforme), donc la dérivée s'annule uniquement si $\tilde{g} \leq 0$ pour la valeur $q = \sqrt{-\tilde{g}/2\sigma}$ ($q < 0$ correspond à la même solution).

d) En réinjectant $q^2 = -\tilde{g}/2\sigma$ dans l'expression de f_m, on obtient bien

$$f_m = \frac{1}{2}\left(\tilde{a} - \frac{\tilde{g}^2}{4\sigma}\right)\phi_m^2 + \frac{3}{8}d\phi_m^4 \tag{7}$$

e) Pour que ϕ_m soit non-nulle, il faut que le préfacteur du terme ϕ_m^2 soit négatif, donc la condition est $\tilde{a} \leq \tilde{g}^2/4\sigma$. Dans ce cas, on obtient par minimisation $\frac{\partial f_m}{\partial \phi_m} = 0$ que $\phi_m = \pm\sqrt{\frac{2}{3d}\left(-\tilde{a} + \tilde{g}^2/4\sigma\right)}$ (les deux signes correspondant à un déphasage de π dans la solution ondulatoire).

f) En réinjectant la valeur de ϕ_m, on obtient finalement

$$f_m = -\frac{1}{6d}\left(\tilde{a} - \frac{\tilde{g}^2}{4\sigma}\right)^2 \tag{8}$$

3. **Lignes de transition** – On raisonne dans le plan $(\tilde{g}, \tilde{a})$ pour construire le diagramme de phase.

a) La solution modulée n'est pas possible donc seules les phases D et U sont en compétition. On obtient l'habituelle transition du second ordre de Landau le long de la ligne $\tilde{a} = 0$ ($T = T_c$).

b) Lorsque $\tilde{g} < 0$ et $\tilde{a} > 0$, les phases en compétition sont la phase modulée et la phase uniforme désordonnée. Comme $f_m < 0$ si la phase modulée existe, elle est automatiquement plus favorable à $f_0 = 0$. La ligne de transition est donc la condition $\tilde{a} = \tilde{g}^2/4\sigma$ dans ce cas. ϕ_m s'annulant continûment sur cette ligne de transition, la transition est du second ordre.

c) Lorsque $\tilde{g} < 0$ et $\tilde{a} < 0$, les phases en compétition sont la phase modulée et la phase uniforme ordonnée. En comparant f_m et f_0, la phase uniforme est clairement favorisée lorsque $|\tilde{a}| \gg \frac{\tilde{g}^2}{4\sigma}$, tandis que lorsque $\tilde{a} = 0$, c'est clairement la phase modulée, si bien que M est au-dessus de O dans le diagramme. La ligne de transition correspond à l'égalité $f_m = f_0$, ce qui conduit à l'équation $\tilde{a}^2 + \frac{\tilde{g}}{\sigma}\tilde{a} - \frac{\tilde{g}^2}{8\sigma^2} = 0$, de solutions $\tilde{a}_\pm = \frac{1}{2}\left(-\frac{\tilde{g}^2}{\sigma} \pm \sqrt{\frac{\tilde{g}^4}{\sigma^2} + \frac{\tilde{g}^4}{2\sigma^2}}\right)$. On choisit la solution négative d'où la ligne de transition

$$\tilde{a} = -\kappa\frac{\tilde{g}^2}{\sigma} \text{ avec } \kappa = \frac{1 + \sqrt{3/2}}{2} \tag{9}$$

Comme les deux valeurs ϕ_0 et ϕ_m sont non nulles et que q passe de 0 à une valeur finie, la transition est a priori du premier ordre. Bien que la signification des amplitudes n'est pas tout à fait la même, on peut vérifier qu'elles sont différentes sur la ligne de transition : on trouve $\phi_{m,c}^2 = \frac{2}{3}\left(\kappa + 1/4\right)\frac{\tilde{g}^2}{\sigma d}$ tandis que $\phi_{0,c}^2 = \frac{\kappa}{2}\frac{\tilde{g}^2}{\sigma d}$. Il y a donc un saut de paramètre d'ordre à la transition.

d) On a le diagramme des phases suivant :

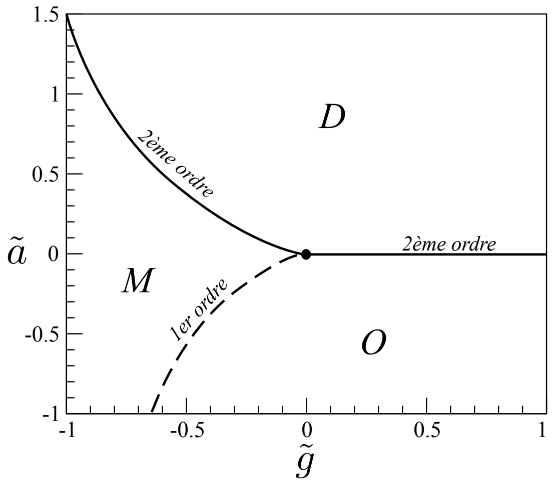

Figure 1 – Diagramme de phase.

4. **Point de Lifshitz**
   a) C'est un point tri-critique où les trois lignes de transition se rejoignent.
   b) On est dans la situation standard de la transition du second ordre de Landau, $\phi_0 \propto |T_c - T|^{1/2}$ d'après les résultats précédant donc $\beta = 1/2$.
   c) i. Sur cette ligne $\tilde{a} = 0$, il vient $\phi_0 = 0$ pour $p \geq p_c$ et $|\phi_m| = \frac{1}{\sqrt{6d\sigma}}(p_c - p)$ pour $p \leq p_c$. La transition est du second ordre et l'exposant $\beta' = 1$.
      ii. Le point critique selon p est donné par $\tilde{g}_c = -\sqrt{4\sigma\tilde{a}}$ d'après l'équation de la ligne de transition. On écrit $\tilde{g} = \tilde{g}_c - \delta g$ avec $\delta g > 0$ l'écart à gauche du point critique. En injectant cela dans ϕ_m, on obtient $\phi_m^2 \simeq \frac{8}{3d}\sqrt{\sigma\tilde{a}}\delta g$ et donc $\beta' = 1/2$ le long de cette ligne.
5. On trouve après une double intégration par parties $\frac{\delta F}{\delta \phi} = 2\phi''''(x)$, (la dérivée quatrième à un facteur près).
6. On obtient donc juste un terme supplémentaire en ϕ'''' par rapport au cas usuel :

$$\frac{\delta f}{\delta \phi} = -2\tilde{g}\phi''(x) + 2\sigma\phi''''(x) + f_L'(\phi(x)) - h(x) = 0 \tag{10}$$

7. On applique la dérivation fonctionnelle $\frac{\delta}{\delta h(x')}$ sur l'équation ci-dessus (sachant que $\frac{\delta h(x)}{\delta h(x')} = \delta(x - x')$), ou bien, de façon équivalente on linéarise l'équation en introduisant $\phi(x) + \delta\phi(x)$ et en ne conservant que les termes linéaires en $\delta\phi(x)$: on trouve après avoir fait $x' = 0$ (même chose qu'en cours ou TD mais avec le terme ϕ'''' en plus...)

$$\left[-2\tilde{g}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\sigma\frac{\partial^4}{\partial x^4} + f_L''(\phi)\right]\chi(x) = \delta(x) \tag{11}$$

8. a) En utilisant $\phi_0 = 0$ et $f_L''(\phi_0) = 2\tilde{a} > 0$ et que $4\sigma\tilde{a} \geq \tilde{g}^2$ dans la phase désordonnée, On trouve

$$\chi(k) = \frac{1}{2\sigma}\frac{1}{(k^2 - k_+^2)(k^2 - k_-^2)} \tag{12}$$

   avec $k_\pm^2 = \frac{1}{2\sigma}\left[-\tilde{g} \pm \sqrt{\tilde{g}^2 - 4\sigma\tilde{a}}\right]$ solutions (possiblement complexes) de l'équation $\sigma k^4 + \tilde{g}k^2 + \tilde{a} = 0$.
   b) **On se place dans le cas** $\tilde{g}^2 \geq 4\sigma\tilde{a}$.
      i. Comme on est dans la phase désordonnée, pour avoir $\tilde{g}^2 \geq 4\sigma a$, il faut avoir $\tilde{g} > 0$, sinon, on est dans la phase modulée. Dans ce cas, comme $\sqrt{\tilde{g}^2 - 4\sigma\tilde{a}} < \tilde{g}$, les deux racines sont réelles négatives ce que l'on peut écrire $k_\pm^2 = (i/\xi_\pm)^2$ avec $\xi_\pm^{-2} = \frac{\tilde{g}}{2\sigma}\left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{4\sigma\tilde{a}}{\tilde{g}^2}}\right]$.
      ii. Le calcul de $\chi(x)$ se fait en appliquant le théorème des résidus. Il y a quatre pôles simples sur l'axe imaginaire, on aura donc une forme $\chi(x) = A_+e^{-|x|/\xi_+} + A_-e^{-|x|/\xi_-}$ pour la fonction de Green.
      iii. On voit que lorsque $\sigma\tilde{a} \to 0$, $\xi_+^{-2} \simeq \frac{\tilde{g}}{2\sigma}\frac{2\sigma\tilde{a}}{\tilde{g}^2} = \frac{\tilde{a}}{\tilde{g}}$, c'est le résultat usuel dans la phase désordonné pour la fonction de corrélation, tandis que $\xi_-^{-2} \simeq \frac{\tilde{g}}{\sigma}$ reste constante tant que $\tilde{g} \neq 0$. Le terme en ξ_- donne une contribution d'autant plus sous-dominante que σ est petit, ce qui est cohérent avec le fait de négliger ces termes habituellement tant que $g > 0$. De plus, lorsque $\tilde{a} \to 0$, au voisinage du point critique, ξ_+ diverge et le terme en ξ_- devient non pertinent dans la description.
   c) **On se place dans le cas** $\tilde{g}^2 \leq 4\sigma\tilde{a}$**.**
      i. On a alors $k_\pm^2 = \frac{1}{2\sigma}\left[-\tilde{g} \pm i\sqrt{4\sigma\tilde{a} - \tilde{g}^2}\right]$. En prenant la racine carrée de ces deux nombres complexes, on créé 4 poles simples dans chacun quadrant du plan complexes (faire un schéma).
      ii. Dans le théorème des résidus, k_i va donner des termes à décroissance exponentielle tandis que k_r va conduire des **oscillations** dans la fonction de corrélation, typiquement, on aura

$$\chi(x) \simeq A_+\cos(k_r x)e^{-k_i|x|} \tag{13}$$

N-B : le sujet présente une version simplifiée de la transition de Lifshitz qui concerne habituellement des systèmes à dimension supérieure à 1 où le terme laplacien carré provient de la partie anisotrope. De façon assez générale, transition de Lifshitz désigne une transition spontanée vers un état modulé.

Fin.