M1 Physique Fondamentale
Année 2018-2019

Université Paris-Saclay

Examen final : Physique des systèmes complexes

Vendredi 15 Mars 2018 – 3h

Notes de cours autorisées. Lisez bien l'énoncé, il y a beaucoup de questions indépendantes. Le sujet est long, le barème sera sur plus de 20 points.

Modèle d'Ising avec interactions de portée infinie

On considère un modèle d'Ising dans lequel tous les spins interagissent avec les autres :

$$H = -\frac{1}{2N}\sum_{i,j=1}^{N}\sigma_i\sigma_j - h\sum_{i=1}^{N}\sigma_i \tag{1}$$

où les variables valent $\sigma_i = \pm 1$ et N représente le nombre de spins, h le champ externe.

1. Réécrire H en fonction de la variable $s = \sum_{i=1}^{N}\sigma_i$.
2. Montrer que

$$e^{-\beta H} = \sqrt{\frac{N\beta}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dm\ \exp(-N\beta\frac{m^2}{2} + \beta(m+h)s) \tag{2}$$

3. On introduit la fonction de partition $Z = \sum_{\{\sigma_i=\pm 1\}} e^{-\beta H}$. Montrer que

$$Z = \sqrt{\frac{N\beta}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dm\, e^{-Nf(m)}\ ;\ \text{avec } f(m) = \beta m^2/2 - \ln[2\cosh(\beta(m+h))]. \tag{3}$$

4. Analyser l'intégrale Z dans la limite $N \to \infty$ par une méthode du col. En particulier, donner l'équation donnant la position du point col m_c. Discuter le signe de la dérivée seconde $f''(m_c)$ en donnant une condition impliquant β et m_c.

Transition de Lifshitz

Dans le cadre de la théorie de Landau, nous étudions la possibilité d'une solution non-uniforme lorsque le terme usuel d'énergie élastique peut devenir négatif. Ce type de situation se retrouve par exemple dans des modèles magnétiques frustrés. On se place à une dimension et l'on considère un système décrit par l'énergie libre suivante, écrite à l'aide un paramètre d'ordre scalaire $\phi(x)$, et définie en moyenne volumique :

$$f[\phi] = \frac{1}{L}\int_0^L dx\,\left\{\tilde{g}\,(\nabla\phi)^2 + \sigma\,(\nabla^2\phi)^2 + f_L(\phi)\right\} \text{ avec } f_L(\phi) = \tilde{a}\,\phi^2 + d\,\phi^4 \tag{4}$$

avec $\tilde{g} = g\,(p - p_c)$, $g > 0$ et $\sigma > 0$ correspond au préfacteur d'un nouveau terme d'ordre supérieur dans la dérivée, tandis que f_L est la densité d'énergie libre usuelle du modèle de Landau (on rappelle que $\tilde{a} = a\,(T - T_c)$ avec $a > 0$ et $d > 0$). p est un paramètre physique externe, contrôlable, tel que $\tilde{g}$ change de signe à la valeur p_c.

Diagramme de phase

Nous allons étudier la possibilité d'une solution modulée de la forme $\phi(x) = \phi_m \cos(qx)$, avec $q \neq 0$ et $\phi_m \neq 0$, en compétition avec une solution uniforme $\phi(x) = \phi_0$.

1. **Solution uniforme**
   a) Déterminer l'expression de $f_0 = f[\phi_0]$, l'énergie libre associée à la solution uniforme, en fonction de $\tilde{a}$, d et ϕ_0.
   b) Retrouver les valeurs possibles de ϕ_0 en fonction de la température.
   c) En déduire l'expression de f_0 en fonction de $\tilde{a}$ et d. Tracer f_0 en fonction de la température.
2. **Solution modulée**
   La phase modulée est caractérisée par les deux *paramètres variationnels* ϕ_m et q. En considérant un système suffisamment grand, nous ferons les approximations suivantes pour $q \neq 0$:

$$\frac{1}{L}\int_0^L \cos^2(qx)dx \simeq \frac{1}{L}\int_0^L \sin^2(qx)dx \simeq \frac{1}{2} \text{ et } \frac{1}{L}\int_0^L \cos^4(qx)dx \simeq \frac{3}{8} \tag{5}$$

   a) Déterminer l'expression de f_m, l'énergie libre associée à la solution modulée, en fonction de $\tilde{a}$, d, $\tilde{g}$, σ, ϕ_m et q.
   b) Quelles équations permettent de déterminer q et ϕ_m ?
   c) Montrer que la solution modulée n'est possible que si $\tilde{g} < 0$. Dans ce cas, donner l'expression de q en fonction de $\tilde{g}$ et σ.
   d) En déduire que l'énergie libre de la solution modulée prend la forme

$$f_m = \frac{1}{2}\left(\tilde{a} - \frac{\tilde{g}^2}{4\sigma}\right)\phi_m^2 + \frac{3}{8}d\,\phi_m^4 \tag{6}$$

   e) Déterminer alors la condition d'existence de la phase modulée. Que vaut alors ϕ_m ?
   f) Donner enfin l'expression de f_m en fonction de $\tilde{a}$, $\tilde{g}$, d et σ.
3. **Lignes de transition** – On raisonne dans le plan $(\tilde{g}, \tilde{a})$ pour construire le diagramme de phase.
   a) Dans la région $\tilde{g} > 0$, quelles sont les deux phases possibles ? Donnez l'équation de la ligne de transition et l'ordre de la transition entre les deux phases.
   b) Même questions dans la région $\tilde{g} < 0$ et $\tilde{a} > 0$.

c) Même questions dans la région $\tilde{g} < 0$ et $\tilde{a} < 0$.

d) Esquisser l'allure du diagramme de phase sur un schéma. On notera D pour la phase désordonnée, O pour ordonnée et M pour modulée.

4. **Point de Lifshitz** – On se place autour du point $(\tilde{g} = 0, \tilde{a} = 0)$

a) Comment qualifier ce point particulier du diagramme de phase ?

b) Rappelez la définition de l'exposant critique β. On se place sur la ligne $\tilde{g} = 0$ et on varie T. Quelle est la valeur de β le long de cette ligne ?

c) On définit l'exposant critique β' par $\phi \propto |p - p_c|^{\beta'}$ le long d'une ligne $\tilde{a} = \text{cste}$.

i. On se place sur la ligne $\tilde{a} = 0$ et on varie le paramètre p. Quelle est la valeur de β' ?

ii. On se place sur une ligne $\tilde{a} > 0$ et on varie p. Quelle est la valeur de β' ?

Fonction de corrélation

5. Soit la fonctionnelle $F[\phi] = \int dx (\phi''(x))^2$. Déterminez $\frac{\delta F}{\delta \phi}$ en supposant que les termes de bords s'annulent.

6. Donner l'équation du mouvement du champ $\phi(x)$ gouverné par (4) dans laquelle on rajoute un couplage $-h(x)\phi(x)$ dans la densité d'énergie libre $f_L(\phi)$. On donnera le résultat en fonction de $\tilde{g}$, σ, $h(x)$ et de dérivées de ϕ et $f_L(\phi)$.

7. Nous rappelons que la fonction de Green (ou susceptibilité généralisée) correspond à la réponse $\chi(x, x') = \frac{\delta\phi(x)}{\delta h(x')}$. On supposera un système invariant par translation de sorte que $\chi(x, x') = \chi(x - x')$. Montrer que la fonction de Green $\chi(x)$ obéit à l'équation

$$\left[-2\tilde{g} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\sigma \frac{\partial^4}{\partial x^4} + f''_L(\phi) \right] \chi(x) = \delta(x) \tag{7}$$

8. On utilise les conventions suivantes pour la transformée de Fourier

$$\widetilde{\chi}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ikx}\, \chi(x) \quad \text{ et } \quad \chi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx}\, \widetilde{\chi}(k) \tag{8}$$

On se place dans la phase uniforme désordonnée $\phi_0 = 0$ (en particulier $\tilde{a} \geq 0$).

a) Montrer que $\widetilde{\chi}(k)$ prend la forme $\widetilde{\chi}(k) = \frac{1}{2\sigma} \frac{1}{(k^2 - k_+^2)(k^2 - k_-^2)}$ et donner les expressions de $k_\pm^2$ en fonction de σ, $\tilde{g}$ et $\tilde{a}$.

b) **On se place dans le cas** $\tilde{g}^2 > 4\sigma\tilde{a}$.

i. Justifier que $\tilde{g} > 0$. Montrer que l'on a alors $k_\pm^2 = (i/\xi_\pm)^2$ avec $\xi_\pm$ deux longueurs de corrélations (positives !) dont on donnera les expressions en fonction de σ, $\tilde{g}$ et $\tilde{a}$.

ii. Sans faire un calcul complet, discuter les termes qui apparaissent dans $\chi(x)$.

iii. Que (re)trouve-t-on pour $\xi_\pm$ dans la limite $\tilde{a}\sigma \to 0$? Commenter par rapport au fait qu'on néglige habituellement les termes de dérivées supérieures à deux dans la fonctionnelle de Ginzburg-Landau.

c) **On se place dans le cas** $\tilde{g}^2 < 4\sigma\tilde{a}$.

i. Justifier sans faire de calculs compliqués et donner une interprétation dans le plan complexe, qu'il y a alors 4 pôles simples qui se situent dans chacun des quadrants, ie. de la forme $k_\pm = \pm k_r \pm i k_i$ avec $k_r > 0$ et $k_i > 0$.

ii. Sans faire un calcul détaillé, discuter quel phénomène nouveau apparaît dans le comportement de la fonction de corrélation.

Fin.