ENSAE

**Notes de cours**

# *PROGRAMMATION DYNAMIQUE*

Guillaume CARLIER

Année 2007

Ce cours a pour objectif d'introduire les principaux outils de base en programmation dynamique en restant dans un cadre déterministe et en insistant sur les applications économiques. Nous traiterons dans un premier temps du temps discret en horizon fini puis infini. Une excellente référence sur ce sujet est le livre de Lucas et Stokey [4] qui contient de très nombreux exemples économiques et traite également de la programmation markovienne qui est hors du champ de ce cours. Nous aborderons ensuite le temps continu avec le calcul des variations et une introduction au contrôle optimal en insistant sur l'approche programmation dynamique de Bellman. Certaines preuves seront juste ébauchées de manière heuristique sans que soit explicité en détail le cadre fonctionnel rigoureux. Le lecteur intéressé pourra consulter les références bibliographiques indiquées en fin de poly ([1] et [7] par exemple), pour un traitement plus complet et rigoureux du contrôle optimal. J'indique au lecteur qu'il peut télécharger les notes de cours d'Evans [6] qui sont très agréables à lire, largement illustrées d'exemples et comportent aussi une introduction au contrôle stochastique . Enfin, j'ai ajouté à la fin de ce poly, différents exercices non corrigés portant sur les différentes parties du cours.

La présente forme de ces notes de cours contient certainement des coquilles, si vous en remarquez, n'hésitez pas à me le signaler, vos camarades des prochaines promos vous en seront reconnaissants.

# Table des matières


## I Programmation dynamique en temps discret 6

**1 Introduction et exemples** **7**
1.1 Introduction . . . 7
1.2 Un problème de plus court chemin . . . 8
1.3 Croissance optimale à un secteur . . . 9
1.4 Un problème d'exploitation forestière . . . 10

**2 Horizon fini** **11**
2.1 Notations et remarques préliminaires . . . 11
2.2 Principe de la programmation dynamique . . . 12
2.3 Backward induction, stratégie de résolution . . . 14

**3 Horizon infini** **16**
3.1 Notations et hypothèses . . . 16
3.2 Existence de solutions . . . 18
3.3 Fonction valeur, équation de Bellman . . . 19
3.4 Théorèmes de Berge et de Blackwell . . . 20
3.5 Retour aux politiques optimales . . . 22

## II Programmation dynamique en temps continu 24

**4 Calcul des Variations** **25**
4.1 Existence et non-existence . . . 26
4.2 Equation d'Euler-Lagrange et conditions de transversalité . . . 26
4.3 Principe de la programmation dynamique . . . 29
4.4 Equation d'Hamilton-Jacobi . . . 30
4.5 Exemple d'un modèle consommation-épargne . . . 31

**5 Introduction au contrôle optimal** **33**
5.1 Généralités . . . 33

5.2 Principe de Pontriaguine . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 34
5.3 Principe de la programmation dynamique . . . . . . . . . . . . . 36
5.4 Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman . . . . . . . . . . . . . . . 36
5.5 Contrôle en feedback et condition suffisante . . . . . . . . . . . 38

**III Problèmes et exercices 40**

# Première partie

# Programmation dynamique en temps discret

# Chapitre 1

# Introduction et exemples

## 1.1 Introduction

On s'intéressera dans toute cette partie à des problèmes d'optimisation du type :

$$\sup_{(x_t)} \left\{ \sum_{t=0}^{T-1} V_t(x_t, x_{t+1}) + V_T(x_T) \right\} \tag{1.1}$$

sous les contraintes : $x_0 = x$ donné, $x_t \in A$ et $x_{t+1} \in \Gamma_t(x_t)$ pour tout $t = 0, ..., T-1$. Un tel problème est dit d'horizon fini $T$, l'ensemble $A$ est appelé espace d'états, $\Gamma_t$ est une correspondance de $A$ dans $A$ qui modélise les contraintes sur la dynamique de la variable d'état $x_t$ ($\Gamma_t(x_t)$ est l'ensemble des successeurs possibles de $x_t$), les fonctions $V_t$ sont les paiements instantanés et enfin $V_T$ est le paiement terminal. Ici nous écrirons ces problèmes sous forme de maximisation car c'est l'usage courant en économie, évidemment toute la théorie restera valable pour des problèmes de minimisation grâce à l'identité $-\sup(-.) = \inf(.)$.

On considérera aussi des problèmes d'horizon infini avec critère escompté du type :

$$\sup_{(x_t)} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t V(x_t, x_{t+1}) \right\} \tag{1.2}$$

sous les contraintes : $x_0 = x$ donné, $x_t \in A$ et $x_{t+1} \in \Gamma(x_t)$ pour tout $t \geq 0$. On interprète les données de $A$, $\Gamma$ et $V$ comme précédemment et $\beta \in ]0, 1[$ est un facteur d'escompte.

Les questions naturelles sont évidemment : l'existence de solutions (i.e. de politiques optimales) à (1.1) et (1.2) et la caractérisation maniable de ces dernières, l'idéal étant d'obtenir une stratégie permettant de les calculer. Nous verrons qu'en exploitant la structure récursive de ces problèmes, on peut asez simplement atteindre cet objectif en utilisant des idées très intuitives mais redoutablement efficaces (principe de la programmation dynamique, fonction valeur et équation de Bellman) dues pour l'essentiel à Richard Bellman.

Les problèmes de type (1.2) se rencontrent fréquemment en économie en particulier dans : les modèles de croissance, de gestion de stock, d'exploitations de ressources naturelles et de l'environnement. Avant d'aller plus loin, considérons donc quelques exemples.

## 1.2 Un problème de plus court chemin

Il s'agit ici du problème type de programmation dynamique en horizon fini avec espace d'état fini et qui revient à un problème d'optimisation sur un graphe, sa résolution illustre de manière simple le principe de la programmation dynamique. Considérons un voyageur de commerce qui doit se rendre de la ville $A$ à la ville $E$ en passant par plusieurs villes intermédiaires, les chemins possibles sont donc modélisés par un graphe ayant $A$ et $E$ pour sommets initial et final (les autres sommets représentant les villes étapes), les arrêtes de ce graphe représentant les trajets intermédiaires. On notera $\Gamma(M)$ les successeurs de la ville $M$ et pour $N \in \Gamma(M)$ on notera $MN$ le temps du parcours $MN$. Enfin, on donne : $\Gamma(A) = \{B, B'\}$, $AB = 1 = AB'$, $\Gamma(B) = \{C, C'\}$, $(BC, BC') = (2, 1)$, $\Gamma(B') = \{C', C''\}$, $(B'C', B'C'') = (2, 4)$, $\Gamma(C'') = \{D'\}$, $C''D' = 1$, $\Gamma(C) = \{D\}$, $CD = 1$, $\Gamma(C') = \{D, D'\}$, $(C'D, C'D') = (2, 1)$, $\Gamma(D) = \Gamma(D') = \{E\}$, $(DE, D'E) = (5, 2)$. Pour déterminer le ou les chemins les plus courts on pourrait bien sûr tous les essayer mais il est bien plus judicieux d'utiliser la remarque suivante(qui est précisément le *principe de la programmation dynamique* dans sa version la plus simple) :
**Si un chemin optimal de $A$ à $E$ passe par $M$ alors il est encore optimal entre $M$ et $E$.**

Introduisons la *fonction valeur* $V(M) :=$ "temps de parcours minimal entre $M$ et $E$". Evidemment $V$ se calcule facilement en partant de la fin puis en procédant par rétroaction arrière ou backward induction ; on a d'abord

$$V(D) = 5, \ V(D') = 2$$

on remonte ensuite aux villes précédentes, le principe de la programmation dynamique donne en effet :

$$V(C) = 6, \ V(C') = \min(1 + V(D'), 2 + V(D)) = 1 + V(D') = 3, \ V(C'') = 3.$$

Réitérant l'argument, il vient :

$$\begin{aligned} V(B) &= \min(2 + V(C), 1 + V(C')) = 1 + V(C') = 4, \\ V(B') &= \min(2 + V(C'), 4 + V(C'')) = 5 \end{aligned}$$

et enfin

$$V(A) = \min(1 + V(B), 1 + V(B')) = 1 + V(B) = 5.$$

Le temps de parcours minimal est donc de 5 et correspond au seul parcours $ABC'D'E$.

Cet exemple pour élémentaire qu'il soit est instructif à plusieurs égards :

1. on voit aisément comment généraliser la stratégie précédente à des problèmes plus généraux de forme (1.1) : introduire les fonctions valeurs aux différentes dates, les calculer "en partant de la fin" puis par backward induction en utilisant le principe de la programmation dynamique,
2. dans l'exemple précédent, on n'a pas essayé tous les chemins possibles mais seulement les chemins optimaux à partir de $M$ qui ont ici tous été déterminés. De fait, les raisonnements précédents montrent par exemple que si le voyageur de commerce s'égare en $B'$ (par lequel il n'est pas optimal de passer partant de $A$) alors par la suite il sera optimal de passer par $C'D'E$.
3. Il peut paraitre curieux alors qu'on s'est posé un seul problème (issu du point $A$) de chercher à résoudre tous les problèmes issus des points intermédiaires. Donnons deux arguments pour lever cette objection : tout d'abord la stratégie de résolution précédente est robuste (si une erreur est commise à un moment donné et conduit à passer par une ville non optimale $M$ alors on peut se rattraper par la suite en suivant le chemin optimal à partir de $M$), ensuite cette stratégie est naturelle (choisir la ville suivante en fonction de la ville où on se trouve maintenant plutôt que de suivre un plan établi exactement à l'avance) et permet de se ramener à une succession de problèmes statiques.

## 1.3 Croissance optimale à un secteur

On considère une économie dans laquelle à chaque période un seul bien est produit servant à la fois à la consommation et à l'investissement. On note respectivement $c_t$, $i_t$, $k_t$, et $y_t$ la consommation, l'investissement, le capital et la production de période $t$. On suppose que $y_t = F(k_t)$, $F$ étant la fonction de prodution, et que le capital se déprécie au taux $\delta \in [0,1]$. On a alors ;

$$c_t + i_t = y_t = F(k_t), \text{ et } k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t$$

d'où l'on tire (en posant $f(k) := F(k) + (1-\delta)k$) :

$$c_t = f(k_t) - k_{t+1}.$$

On impose évidemment à $c_t$ et $k_t$ d'être positifs d'où la contrainte :

$$0 \leq k_{t+1} \leq f(k_t).$$

Finalement on suppose que l'économie maximise l'utilité intertemporelle :

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t).$$

En fonction du capital ce problème devient :

$$\sup \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(f(k_t) - k_{t+1}) \right\}$$

sous les contraintes : $k_0$ donnée et $0 \leq k_{t+1} \leq f(k_t)$ pour $t \geq 0$. On peut généraliser le problème précédent au cas de plusieurs secteurs, au cas d'une offre de travail inélastique, à l'introduction du capital humain etc...

## 1.4 Un problème d'exploitation forestière

On considère une forêt qui initialement est de taille $x_0$, $x_t$ est sa taille à la date $t$ (variable d'état). Un exploitant choisit à chaque période un niveau de coupe $v_t$ (variable de contrôle), l'évolution de la forêt est supposée régie par la dynamique :

$$x_{t+1} = H(x_t) - v_t.$$

En supposant que le prix du bois est constant égal à 1 et que le coût de l'abattage est $C$, le profit actualisé de l'exploitant s'écrit :

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [v_t - C(v_t)].$$

En réecrivant ce profit en fonction de la variable d'état et en imposant $v_t \geq 0$ et $x_t \geq 0$, le programme de l'exploitant se réecrit sous la forme :

$$\sup \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [H(x_t) - x_{t+1} - C(H(x_t) - x_{t+1}) \right\}$$

sous les contraintes : $x_0$ donnée et $0 \leq x_{t+1} \leq H(x_t)$ pour $t \geq 0$.

# Chapitre 2

# Horizon fini

## 2.1 Notations et remarques préliminaires

On se propose d'étudier des problèmes de programmation dynamique en temps discret et en horizon fini :

$$\sup_{(x_t)} \left\{ \sum_{t=0}^{T-1} V_t(x_t, x_{t+1}) + V_T(x_T) \right\} \tag{2.1}$$

sous les contraintes : $x_0 = x \in A$ donné (autrement dit $x$ est la condition initiale), $x_t \in A$ pour $t = 1, .., T$ et $x_{t+1} \in \Gamma_t(x_t)$ pour tout $t = 0, ..., T-1$, $T$ s'appelle l'horizon du problème et l'ensemble $A$ est appelé espace d'états, $\Gamma_t$ est une correspondance de $A$ (i.e. une application de $A$ dans l'ensemble des parties de $A$ on dit aussi une application "multivoque") qui modélise les contraintes sur la dynamique ($\Gamma_t(x_t)$ est l'ensemble des successeurs possibles de $x_t$), les fonctions $V_t : A \times A \to \mathbb{R}$ sont les payoffs de chaque période et enfin $V_T : A \to \mathbb{R}$ est la fonction de payoff terminale. Sans perte de généralité nous suposerons ici que $V_T = 0$.

Nous avons résolu un problème de type (2.1) au chapitre précédent. Nous allons voir dans ce chapitre, qui se veut aussi peu technique que possible, comment généraliser la stratégie de résolution du problème de plus court chemin du paragraphe 1.2.

On note graph$(\Gamma_t)$ le graphe de la corespondance $\Gamma_t$ :

$$\text{graph}(\Gamma_t) := \{(x, y) \in A \times A : y \in \Gamma_t(x)\}.$$

On supposera en outre que les correspondances $\Gamma_t$ sont à valeurs non vides i.e. $\Gamma_t(x) \neq \emptyset$ pour tout $x \in A$.

Concernant l'existence de solutions, remarquons que si l'on suppose que $A$ est un espace métrique compact, que pour $t = 0, ..., T-1$, que graph$(\Gamma_t)$ est fermé (donc compact dans $A \times A$) et que $V_t \in C^0(\text{graph}(\Gamma_t), \mathbb{R})$, alors il est trivial que ces conditions assurent que (2.1) admet au moins une solution ; ces conditions assurent aussi que $\Gamma_t(x)$ est un compact de $A$ pour tout $x \in A$. Notons enfin que ces conditions sont *toujours* satisfaites dans le cas où l'espace d'états $A$ est fini. Nous n'aurons cependant pas besoin dans ce qui suit de faire ces hypothèses de compacité.

## 2.2 Principe de la programmation dynamique

Compte tenu de la structure récursive du problème il est judicieux d'introduire les fonctions-valeur aux différentes dates. Pour $x \in A$ on définit donc :

$$\begin{array}{rc}
v(0,x) := & \sup\left\{\sum_{t=0}^{T-1} V_t(x_t, x_{t+1}) \,:\, x_{t+1} \in \Gamma_t(x_t),\, x_0 = x\right\} \\
v(1,x) := & \sup\left\{\sum_{t=1}^{T-1} V_t(x_t, x_{t+1}) \,:\, x_{t+1} \in \Gamma_t(x_t),\, x_1 = x\right\} \\
. & . \\
. & . \\
. & . \\
v(T-1,x) := & \sup\left\{V_{T-1}(x, x_T) \,:\, x_T \in \Gamma_{T-1}(x)\right\}.
\end{array}$$

et enfin $v(T,x) = V_T(x) = 0$.

Dans ce qui suit nous dirons qu'une suite $(x, x_1, ...., x_T) = (x_0, x_1, ..., x_T)$ est solution du problème $v(0,x)$ si cette suite est admissible (i.e. vérifie les contraintes du problème) et

$$v(0,x) := \sum_{t=0}^{T-1} V_t(x_t, x_{t+1}).$$

On étend la définition précédente aux problèmes aux différentes dates.

Le principe de la programmation dynamique s'exprime comme suit :

**Proposition 2.1** *Soit $x \in A$ ; si $(x_0, x_1, ..., x_T) = (x, x_1, ..., x_T)$ est une solution du problème $v(0,x)$ alors pour tout $\tau = 1, ..., T-1$, la suite $(x_\tau, ..., x_T)$ est solution du problème $v(\tau, x_\tau)$.*

**Preuve.** Par définition on a :

$$v(0,x) := \sum_{t=0}^{T-1} V_t(x_t, x_{t+1}). \tag{2.2}$$

Supposons que pour une date $\tau \in \{1, ..., T-1\}$, la suite $(x_\tau, ..., x_T)$ n'est pas solution du problème $v(\tau, x_\tau)$ alors il existe $(z_\tau, z_{\tau+1}, ....z_T) = (x_\tau, z_{\tau+1}, ....z_T)$ admissible pour le problème $v(\tau, x_\tau)$ telle que :

$$\sum_{t=\tau}^{T-1} V_t(x_t, x_{t+1}) < \sum_{t=\tau}^{T-1} V_t(z_t, z_{t+1}).$$

En définissant alors la suite (admissible pour $v(0, x)$) $(y_0, ..., y_T)$ par $(y_0, ..., y_T) = (x, x_1, ..., x_\tau, z_{\tau+1}, ..., z_T)$, on obtient avec (2.2) :

$$v(0, x) < \sum_{t=0}^{T-1} V_t(y_t, y_{t+1})$$

ce qui contredit la définition même de $v(0, x)$.

$\square$

Notons bien que dans la proposition, on a supposé l'existence d'une suite optimale. Sans faire cette hypothèse (et en autorisant les fonctions-valeur à prendre éventuellement la valeur $+\infty$), on obtient des relations fonctionnelles récursives (équations de Bellman) reliant les fonctions valeurs aux dates successives.

**Proposition 2.2** *Soit $x \in A$, on a :*

$$v(0, x) = \sup \{V_0(x, y) + v(1, y) \; : y \in \Gamma_0(x)\} \tag{2.3}$$

*De même pour $t \in \{1, ..., T-1\}$ :*

$$v(t, x) = \sup \{V_t(x, y) + v(t+1, y) \; : y \in \Gamma_t(x)\} . \tag{2.4}$$

**Preuve.** Evidemment, il suffit d'établir (2.3). Soit $y \in \Gamma_0(x)$ et $(y_1, ..., y_T) = (y, ..., y_T)$ telle que $y_{t+1} \in \Gamma_t(y_t)$ pour $t \geq 1$, la suite $(x, y_1, ..., y_T)$ étant admissible pour $v(0, x)$ il vient :

$$v(0, x) \geq V_0(x, y) + \sum_{t=1}^{T-1} V_t(y_t, y_{t+1})$$

passant au supremum en $(y_2, ..., y_T)$, puis en $y = y_1 \in \Gamma_0(x)$ dans le membre de droite il vient :

$$v(0, x) \geq \sup \{V_0(x, y) + v(1, y) : y \in \Gamma_0(x)\} .$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $(x_0, x_1, ..., x_T) = (x, x_1, ..., x_T)$ admissible pour $v(0,x)$ telle que :

$$v(0,x) - \varepsilon \leq \sum_{t=0}^{T-1} V_t(x_t, x_{t+1})$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned} \sup\{V_0(x,y) + v(1,y) : y \in \Gamma_0(x)\} &\geq V_0(x,x_1) + v(1,x_1) \\ &\geq \sum_{t=0}^{T-1} V_t(x_t, x_{t+1}) \geq v(0,x) - \varepsilon \end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire on en déduit (2.3). $\square$

## 2.3 Backward induction, stratégie de résolution

En utilisant la proposition 2.2, et la relation terminale $v(T,x) = V_T(x)$ pour tout $x \in A$, il est possible (au moins en théorie mais aussi en pratique dans certaines applications), de calculer toutes les fonctions valeurs en partant de la date finale $T$ (backward induction). En “remontant” les équations, on calcule d'abord $v(T-1,.)$ :

$$v(T-1,x) = \sup\{V_{T-1}(x,y) : y \in \Gamma_{T-1}(x)\}$$

puis $v(T-2,.)$ :

$$v(T-2,x) = \sup\{V_{T-2}(x,y) + v(T-1,y) : y \in \Gamma_{T-2}(x)\}$$

et ainsi de suite jusqu'à $v(0,.)$.

Admettons maintenant que l'on connaisse $v(0,.)$, ..., $v(T-1,.)$, il est alors très facile de caractériser les suites (ou politiques) optimales :

**Proposition 2.3** *La suite $(x, x_1, ..., x_T)$ est solution de $v(0,x)$ si et seulement si pour $t = 0,..,T-1$, $x_{t+1}$ est solution de :*

$$\sup_{y \in \Gamma_t(x_t)} \{V_t(x_t,y) + v(t+1,y)\} \tag{2.5}$$

**Preuve.** Application immédiate des propositions 2.1 et 2.2. $\square$

Notons qu'en pratique pour résoudre les équations de Bellman, on a souvent déja calculé les solutions des problèmes statiques apparaissant dans (2.3).

Il convient de bien retenir la démarche en deux étapes de ce chapitre :

1. on détermine les fonctions valeur par backward induction,
2. on détermine ensuite les politiques optimales (s'il en existe) en résolvant la suite de problèmes *statiques* (2.5) qui consistent à déterminer les successeurs optimaux $x_1$ de $x_0$ puis les successeurs optimaux de $x_1$ etc...

Enfin notons que la méthode présentée ici (la même que celle adoptée dans le problème du plus court chemin) est robuste car elle permet aussi de résoudre tous les problèmes intermédiaires posés à n'importe quelle date intermédiaire avec n'importe quelle condition initiale à cette date.

# Chapitre 3

# Horizon infini

On considère désormais des problèmes d'horizon infini avec critère escompté du type :

$$v(x) := \sup \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t V(x_t, x_{t+1}) : x_0 = x,\, x_t \in A,\, x_{t+1} \in \Gamma(x_t)\ \forall t \geq 0 \right\}. \tag{3.1}$$

L'interprétation de $A$, $\Gamma$ et $V$ est la même que précédemment et $\beta \in ]0,1[$ est un facteur d'escompte. La fonction $v(.)$ est la fonction *valeur* de (3.1), son argument est la condition initiale $x \in A$. Deux différences sont à noter avec le cas de l'horizon fini du chapitre précédent. Tout d'abord ici, le critère est la somme d'une série et les politiques optimales sont des suites (infinies), des précautions sont donc à prendre d'une part pour la définition même du critère mais surtout concernant l'existence de solutions. En outre, l'approche backward induction du chapitre précédent n'a pas de sens ici ; c'est la raison pour laquelle on se limite ici à un cadre "plus stationnaire" ($\Gamma$ ne dépend pas de $t$ et payoff instantané de la forme $\beta^t V(x_t, x_{t+1})$) qu'au chapitre précédent.

Un élément important dans l'étude de (3.1) est le lien étroit entre $v$ la valeur du problème et l'équation fonctionnelle suivante appelée équation de Bellman :

$$w(x) = \sup_{y \in \Gamma(x)} \{V(x,y) + \beta w(y)\} \tag{3.2}$$

## 3.1 Notations et hypothèses

Dans tout ce chapitre, nous supposerons que $A$ est un espace métrique compact, nous noterons $d$ la distance sur $A$. Nous ferons l'hypothèse de non vacuité : $\Gamma(x) \neq \emptyset$ pour tout $x \in A$. Nous supposerons en outre que $V(.,.)$

est continue sur $A \times A$. Pour $x \in A$, nous noterons $\mathrm{Adm}(x)$ l'ensemble des suites admissibles issues de $x$ :

$$\mathrm{Adm}(x) := \{\widetilde{x} = (x_t)_{t\geq 0} : x_0 = x,\, x_t \in A,\, x_{t+1} \in \Gamma(x_t)\ \forall t \geq 0\} \tag{3.3}$$

Pour $\widetilde{x} = (x_t)_{t\geq 0} \in \mathrm{Adm}(x)$ ou plus généralement $\widetilde{x} = (x_t)_{t\geq 0} \in A^{\mathbb{N}}$ , on pose :

$$u(\widetilde{x}) := \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t V(x_t, x_{t+1}).$$

Ainsi le problème (3.1) consiste à maximiser $u$ sur $\mathrm{Adm}(x)$. Notons que comme $V$ est bornée sur $A \times A$ et $\beta \in ]0,1[$, $u$ est bien définie et bornée sur $A^{\mathbb{N}}$ donc aussi sur $\mathrm{Adm}(x)$.

Nous aurons aussi besoin d'hypothèses de continuité sur la correspondance $\Gamma$ (la dynamique), ceci nécessite les définitions suivantes :

**Définition 3.1** *Soit $X$ et $Y$ deux espaces métriques et soit $F$ une correspondance à valeurs* ***compactes non vides*** *de $X$ dans $Y$, et soit $x \in X$ on dit que :*

1. *$F$ est hémi-continue supérieurement (h.c.s.) en $x$ si pour toute suite $x_n$ convergeant vers $x$ dans $X$ et pour toute suite $y_n \in F(x_n)$, la suite $y_n$ admet une valeur d'adhérence dans $F(x)$.*
2. *$F$ est hémi-continue inférieurement (h.c.i.) en $x$ si pour tout $y \in F(x)$ et pour toute suite $x_n$ convergeant vers $x$ dans $X$, il existe $y_n \in F(x_n)$ telle que $y_n$ converge vers $y$ dans $Y$.*
3. *$F$ est continue si $F$ hémi-continue supérieurement et inférieurement en chaque point de $X$.*

Dans le cas où $X$ et $Y$ sont des métriques compacts, dire que $F$ est h.c.s. revient simplement à dire que son graphe :

$$\mathrm{graph}(F) := \{(x,y) : x \in X,\, y \in F(x)\ \}$$

est fermé. Noter que dans ce cas $F$ est automatiquement à valeurs compactes.

Remarquons que dans le cas *univoque* i.e. $F(x) = \{f(x)\}$ on a équivalence entre "$F$ est h.c.s.", "$F$ est h.c.i" et "$f$ est continue". Si $X = Y = \mathbb{R}$ et $F(x) = [f(x), g(x)]$ avec $f$ et $g$ deux fonctions continues telles que $f \leq g$ alors $F$ est une correspondance continue. Pour fixer les idées, il est bon d'avoir en mémoire les exemples suivants :

La correspondance $F$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ [0,1] & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

est h.c.s. mais pas h.c.i. en 0.

La correspondance $G$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ [-1,1] & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

est quant à elle h.c.i. mais pas h.c.s. en 0.

Dans toute la suite, nous suposerons que $\Gamma$ est une correspondance continue de $A$ dans $A$.

## 3.2 Existence de solutions

Soit $A_\infty := A^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $A$, munissons $A_\infty$ de :

$$d_\infty(u,v) := \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{2^t} d(u_t, v_t).$$

Il est clair que $d_\infty$ est à valeurs finies et définit une distance sur $A_\infty$. On a alors le résultat classique de compacité (le lecteur averti reconnaitra un corollaire du théorème de Tychonov) suivant :

**Proposition 3.1** $(A_\infty, d_\infty)$ *est compact.*

**Preuve.** La démonstration est classique (compacité de $A$ et extraction diagonale), le détail en est donc laissé au lecteur. $\square$

**Lemme 3.1** *Pour tout $x \in A$,* $\mathrm{Adm}(x)$ *est un compact de* $(A_\infty, d_\infty)$

**Preuve.** Avec la proposition 3.1, il suffit de vérifier que $\mathrm{Adm}(x)$ est un fermé de Ai,d$_\infty$). Soit donc $\widetilde{x}^n$ une suite de $\mathrm{Adm}(x)$ convergeant vers $\widetilde{x} = (x_t)_{t\geq 0} \in A_\infty$ pour la distance $d_\infty$. Pour tout $t \in \mathbb{N}$, $\widetilde{x}_t^n$ converge vers $x_t$ dans $A$ quand $n \to +\infty$, en particulier $x_0 = x$. Comme $\Gamma$ est de graphe fermé et que $(\widetilde{x}_t^n, \widetilde{x}_{t+1}^n) \in \mathrm{graph}(\Gamma)$ on en déduit que $x_{t+1} \in \Gamma(x_t)$ ce qui prouve finalement que $\mathrm{Adm}(x)$ est fermé. $\square$

**Lemme 3.2** *$u$ est continue sur $(A_\infty, d_\infty)$.*

**Preuve.** Soit $\widetilde{x} = (x_t)_{t\geq 0} \in A_\infty$ et $\varepsilon > 0$. Comme $V$ est continue et $A \times A$ compact, il existe $\tau \in \mathbb{N}$ tel que

$$\max_{A\times A} |V| \sum_{t=\tau}^{\infty} \beta^t \leq \frac{\varepsilon}{4} \tag{3.4}$$

Par continuité de $V$, il existe $\delta_0$ tel que pour tout $(y, z) \in A \times A$ et tout $t \leq \tau - 1$ on ait :

$$d(x_t, y) + d(x_{t+1}, z) \leq \delta_0 \Rightarrow |V(x_t, x_{t+1}) - V(y, z)| \leq \frac{\varepsilon}{2\tau} \tag{3.5}$$

Ainsi en posant $\delta := \delta_0 2^{-\tau-1}$ pour tout $\widetilde{y} \in A_\infty$ tel que $d_\infty(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \leq \delta$ on a $|u(\widetilde{x}) - u(\widetilde{y})| \leq \varepsilon$, ce qui achève la preuve. $\square$

Des lemmes 3.1 et 3.2, on déduit le résultat d'existence :

**Théorème 3.1** *Pour tout $x \in A$, il existe $\widetilde{x} \in \mathrm{Adm}(x)$ optimale i.e. telle que : $v(x) = u(\widetilde{x})$.*

## 3.3 Fonction valeur, équation de Bellman

On rappelle que la fonction valeur de (3.1) est définie pour tout $x \in A$ par :

$$v(x) := \sup\{u(\widetilde{x}) : \widetilde{x} \in \mathrm{Adm}(x)\}. \tag{3.6}$$

Les hypothèses de ce chapitre assurent que $v$ est bornée sur $A$ et le théorème 3.1 assure que le sup dans (3.6) est en fait un max. Par la suite nous dirons que $\widetilde{x}$ est solution du problème $v(x)$ ssi $\widetilde{x} \in \mathrm{Adm}(x)$ et $v(x) = u(\widetilde{x})$.

On laisse comme exercice, désormais de routine, au lecteur le soin de vérifier le principe de la programmation dynamique et le fait que $v$ est solution de l'équation de Bellman :

**Proposition 3.2** *Soit $x \in A$, on a :*

1. ***Principe de la programmation dynamique :*** *si $\widetilde{x} \in \mathrm{Adm}(x)$ est solution du problème $v(x)$ alors pour tout $\tau \geq 0$ la suite $(x_t)_{t\geq\tau}$ est solution du problème $v(x_\tau)$,*
2. *$v(.)$ est solution de l'**équation de Bellman :***

$$v(x) = \sup_{y\in\Gamma(x)} \{V(x, y) + \beta v(y)\}. \tag{3.7}$$

## 3.4 Théorèmes de Berge et de Blackwell

On se propose maintenant d'examiner dans quelle mesure l'équation de Bellman (3.7) caractérise la fonction valeur. Pour cela, il est utile de définir $B(A)$ comme l'ensemble des applications bornées de $A$ dans $\mathbb{R}$. On rappelle que muni de la norme infinie ($\|f\|_\infty := \max\{|f(x)|,\ x \in A\}$), $B(A)$ est un espace de Banach et que $C^0(A, \mathbb{R})$ est un sous-espace fermé (donc complet) de $B(A)$. Pour $f \in B(A)$ et $x \in A$ on définit :

$$Tf(x) := \sup_{y \in \Gamma(x)} \{V(x, y) + \beta f(y)\}. \tag{3.8}$$

Il est facile de voir que $Tf \in B(A)$ ainsi $T$ définit un opérateur de $B(A)$ dans lui-même. Le fait que la fonction-valeur $v$ soit solution de l'équation de Bellman signifie exactement que $v = Tv$ autrement dit que $v$ est un **point fixe** de $T$.

Le caractère contractant de $T$ (donc en particulier l'unicité dans $B(A)$ de la solution de l'équation de Bellman) est assuré par le théorème de Blackwell :

**Théorème 3.2** *Soit $H$ un opérateur de $B(A)$ dans lui-même vérifiant les propriétés :*

1. *$H$ est monotone i.e. : $\forall (f, g) \in B(A) \times B(A)$, $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in A$ $\Rightarrow Hf(x) \leq Hg(x)$, $\forall x \in A$,*
2. *il existe $\eta \in ]0, 1[$ tel que, pour toute constante positive $a$ et tout $f \in B(A)$ on ait $H(f + a) \leq Hf + \eta a$,*

*alors, $H$ est une contraction de $B(A)$ de rapport $\eta$.*

**Preuve.** Soit $(f, g) \in B(A) \times B(A)$, on a $f \leq g + \|f - g\|_\infty$, ainsi les hypothèses sur $H$ impliquent :

$$Hf \leq H(g + \|f - g\|_\infty) \leq Hg + \eta \|f - g\|_\infty$$

inversant les rôles de $f$ et $g$ et en passant au sup en $x \in A$, il vient bien :

$$\|Hf - Hg\|_\infty \leq \eta \|f - g\|_\infty.$$

$\square$

En remarquant que $T$ vérifie les conditions du théorème de Blackwell avec $\eta = \beta$, et en utilisant le théorème du point fixe pour les contractions, on en déduit immédiatement :

**Corollaire 3.1** *L'équation de Bellman 3.7 admet une unique solution qui est la fonction valeur définie par (3.6). De plus pour tout $f \in B(A)$, $v$ est limite uniforme de la suite des itérées $T^n f$.*

L'équation de Bellman caractérise donc bien la fonction valeur : $v$ est l'unique solution bornée de (3.7). On peut être plus précis en remarquant que $T$ est aussi un opérateur sur les fonctions continues et par conséquent, le point fixe de $T$ est une fonction continue.

**Proposition 3.3** *Pour tout $f \in C^0(A, \mathbb{R})$, $Tf \in C^0(A, \mathbb{R})$. Ceci implique que en particulier que la fonction-valeur $v$ est continue.*

**Preuve.** La première partie du résultat précédent est une conséquence immédiate du théorème de Berge énoncé plus bas. Prouvons la seconde partie du résultat : $T$ est une contraction de $C^0(A, \mathbb{R})$ qui est complet donc $T$ admet un unique point fixe dans $C^0(A, \mathbb{R})$, or nous savons que l'unique point fixe de $T$ (dans $B(A)$) est $v$ on a donc $v \in C^0(A, \mathbb{R})$. $\Box$

Nous terminons ce paragraphe par le théorème de Berge. Ce résultat de dépendance continue pour les problèmes d'optimisation dépendant d'un paramètre est très utile en pratique et pas uniquement en programmation dynamique. Dans la littérature, ce théorème est souvent appelé théorème du maximum, nous éviterons soigneusement cette terminologie pour éviter toute confusion : il existe déja deux principes du maximum (le principe de Pontriaguine en contrôle que nous verons plus tard et le principe du maximum pour les équations elliptiques) qui n'ont rien à voir entre eux et encore moins avec le théorème de Berge ci-dessous !

**Théorème 3.3** *Soit $X$ et $Y$ deux métriques, $F$ une correspondance* ***continue, à valeurs compactes, non vides*** *de $X$ dans $Y$, $f \in C^0(X \times Y, \mathbb{R})$. Pour tout $x \in X$ soit :*

$$g(x) := \max_{y \in F(x)} f(x, y) \text{ et } M(x) := \{y \in F(x) : f(x, y) = g(x)\}.$$

*Alors $g$ est continue sur $X$ et $M$ est une correspondance à valeurs non vides, h.c.s..*

**Preuve.** Le fait que $M$ est une correspondance à valeurs compactes non vides découle immédiatement de la continuité de $V$ et du fait que $F(x)$ est compact non vide pour tout $x \in X$.

Montrons que $g$ est continue. Soit donc $x_n$ une suite de $X$ convergeant vers $x$. Soit $z_n \in F(x_n)$ tel que $g(x_n) = f(x_n, z_n)$. Considérons une suite extraite $(x_{n_j}, z_{n_j})$ vérifiant

$$\lim_j f(x_{n_j}, z_{n_j}) = \limsup_n f(x_n, z_n) = \limsup_n g(x_n).$$

Comme $F$ est h.c.s., quitte à extraire à nouveau, on peut supposer que $z_{n_j}$ converge vers une limite $z \in F(x)$, ainsi $g(x) \geq f(x, z)$ et par continuité de $f$, on a :

$$\limsup_n g(x_n) = \lim_j f(x_{n_j}, z_{n_j}) = f(x, z) \leq g(x).$$

Soit maintenant $y \in F(x)$ tel que $g(x) = f(x, y)$, comme $F$ est h.c.i., il existe $y_n \in F(x_n)$ telle que $y_n$ converge vers $y$, comme $g(x_n) \geq f(x_n, y_n)$, il vient :

$$\liminf_n g(x_n) \geq \liminf f(x_n, y_n) = f(x, y) = g(x).$$

On a donc établi la continuité de $g$.

Il reste à établir que $M$ est h.c.s.. Soit $x \in X$, $x_n$ convergeant vers $x$ dans $X$ et $y_n \in M(x_n)$. Comme $M(x_n) \subset F(x_n)$ et $F$ est h.c.s., il existe une sous-suite $y_{n_j}$ convergeant vers une limite $y \in F(x)$. Par ailleurs pour tout $j$, on a $f(x_{n_j}, y_{n_j}) = g(x_{n_j})$, par continuité de $f$ et $g$, en passant à la limite il vient $f(x, y) = g(x)$ i.e. $y \in M(x)$ ; $M$ est donc h.c.s.. $\square$

**Remarque :** On peut établir directement (i.e. sans utiliser l'équation de Bellman ni le théorème de Berge) la continuité de $v$ (le lecteur pourra vérifier cette affirmation sans difficulté, l'exercice étant cependant un peu fastidieux).

## 3.5 Retour aux politiques optimales

Comme dans le cas de l'horizon fini, connaitre la fonction valeur permet de calculer les stratégies optimales. Il est en effet clair (s'en persuader) que $\widetilde{x} = (x_t)_{t\geq 0} \in \mathrm{Adm}(x)$ est solution de $v(x)$ ssi pour tout $t \geq 0$, $x_{t+1}$ résout le problème statique :

$$\max_{y \in \Gamma(x_t)} \{V(x_t, y) + \beta v(y)\}.$$

Ainsi pour déterminer les politiques optimales on détermine d'abord $v$ en résolvant l'équation de Bellman. On définit alors la correspondance :

$$M(x) := \{y \in \Gamma(x) : v(x) = V(x, y) + \beta v(y)\}.$$

$M(x)$ s'interprète naturellement comme l'ensemble des successeurs optimaux de $x$, et les politiques optimales issues de $x$ sont simplement les itérées de cette correspondance.

Dans tout ce chapitre on s'est limité au cas où $V$ est continue et donc bornée sur le compact $A \times A$. Il est cependant naturel dans les applications économiques de considérer des fonctions d'utilité non bornées (typiquement un logarithme), les ingrédients essentiels du chapitre s'adaptent en général sans peine. Je vous renvoie à l'exercice 6 pour un exemple avec une fonction d'utilité logarithmique.

# Deuxième partie

# Programmation dynamique en temps continu

# Chapitre 4

# Calcul des Variations

On s'intéresse désormais à des problèmes de calcul des variations (en horizon fini pour simplifier). De tels problèmes consistent à maximiser un critère du type :

$$J(x) = \int_0^T L(t, x(t), \dot{x}(t))dt + g(x(T)) + f(x(0))$$

dans un ensemble de fonctions de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}^n$ jouissant de certaines propriétés de différentiabilité. Le bon cadre fonctionnel est celui des espaces de Sobolev mais pour ne pas alourdir l'exposé ni décourager le lecteur qui ne serait pas familier de ces espaces, nous nous limiterons par la suite aux fonctions de classe $C^1$ ou "continues et $C^1$ par morceaux".

La fonction $(t, x, v) \mapsto L(t, x, v)$ est appelée Lagrangien, et on supposera toujours $L \in C^0([0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $g$ (respectivement $f$) est la fonction de gain terminal (respectivement initial) ; on supposera $g \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (respectivement $f \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$).

Une variante est le problème à conditions aux limites prescrites :

$$\sup\left\{\int_0^T L(t, x(t), \dot{x}(t))dt : x \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n),\ x(0) = x_0, x(T) = x_T\right\}.$$

Evidemment on peut aussi considérer le cas d'une extrémité libre et d'une extrémité prescrite. Nous n'écrirons pas les conditions d'optimalité pour tous les cas possibles, les cas "manquants" seront laissés en exercice au lecteur...

Historiquement, le calcul des variations, s'est développé depuis le $17^e$ siècle (problème du brachistochrone résolu par Bernoulli) conjointement au développement de la physique (la mécanique en particulier, mais aussi le problème de la résistance minimale posé par Newton dans ses *Principia* et qui reste encore largement ouvert aujourd'hui.. ) et de la géométrie (problèmes de géodésiques ou d'applications harmoniques par exemple). Quelques grands noms parmi les mathématiciens des trois siècles passés ont marqué son développement : Euler, Lagrange, Hamilton, Jacobi, Legendre, Weierstrass, Noether, Carathéodory... Son usage en économie est plus récent, il devient véritablement populaire à partir des années 1960 dans les modèles de croissance, d'investissement, de gestion de stocks et, plus récemment, en théorie des incitations ou des enchères. En finance, il est aussi d'usage courant d'utiliser des modèles en temps continu, les dynamiques réalistes dans ce cadre ayant un caractère aléatoire, c'est plutôt le contrôle stochastique qui est utilisé.

## 4.1 Existence et non-existence

Résoudre un problème de calcul des variations c'est résoudre un problème d'optimisation dans un espace fonctionnel de dimension infinie. L'existence de solutions n'a donc rien d'évident a priori et je tiens à mettre en garde le lecteur sur ce point. Il ne s'agit pas de faire ici une théorie de l'existence, pour cela on consultera par exemple le livre d' I.Ekeland et R.Temam [5] mais d'indiquer que la plupart des résultats d'existence demandent la concavité (si on maximise ; la convexité si on minimise) du lagrangien par rapport à la variable $v$. Examinons maintenant un contre-exemple classique dû à Bolza :

$$\inf J(x) := \int_0^1 [(\dot{x}(t)^2 - 1)^2 + x^2(t)]dt : x(0) = x(1) = 0. \tag{4.1}$$

On se propose de montrer que l'infimum de ce problème est 0 et qu'il n'est pas atteint. Soit $u_0(t) := 1/2 - |t - 1/2|$ pour $t \in [0,1]$, prolongeons $u_0$ à $\mathbb{R}$ par périodicité. Enfin pour $n \in \mathbb{N}^*$ soit $u_n(t) := u_0(nt)/n$, $u_n$ vérifie les conditions aux limites du problème, $\dot{u_n}^2 = 1$ presque partout sur $[0,1]$ et $|u_n| \leq 1/2n$ donc $J(u_n)$ tend vers 0. On en déduit donc que l'infimum de (4.1) est 0. Supposons que $J(u) = 0$ avec $u(0) = u(1) = 0$. Par définition de $J$ on devrait avoir à la fois $u = 0$ et $\dot{u} \in \{-1, 1\}$ presque partout, ce qui est évidemment impossible.

## 4.2 Equation d'Euler-Lagrange et conditions de transversalité

Considérons le problème :

$$\sup_{x \in C^1([0,T],\mathbb{R}^n)} J(x) = \int_0^T L(t, x(t), \dot{x}(t))dt + g(x(T)) + f(x(0)) \tag{4.2}$$

On suppose dans tout ce paragraphe que les fonctions $(t,x,v)\mapsto L(t,x,v)$, $x\mapsto g(x)$ et $x\mapsto f(x)$ sont de classe $C^1$. Pour $i=1,...,n$, nous noterons $L_{v_i}$, $L_{x_i}$ les dérivées partielles $\frac{\partial L}{\partial v_i}$ et $\frac{\partial L}{\partial v_i}$ et $\nabla_v L$ et $\nabla_x L$ les gradients partiels de $L$ par rapport à $x$ et $v$ respectivement (i.e. $\nabla_v L = (L_{v_1},...,L_{v_n})'$, $\nabla_x L = (L_{x_1},...,L_{x_n})'$).

**Proposition 4.1** *Soit $x\in C^1([0,T],\mathbb{R}^n)$, alors si $x$ est solution de (4.2), on a*

1. *$x$ est solution des équations d'Euler-Lagrange :*
$$\frac{d}{dt}[\nabla_v L(t,x(t),\dot{x}(t))] = \nabla_x L(t,x(t),\dot{x}(t)) \tag{4.3}$$
2. *$x$ vérifie les conditions de transversalité :*
$$\nabla_v L(0,x(0),\dot{x}(0)) = f'(x(0)),\ \nabla_v L(T,x(T),\dot{x}(T)) = -g'(x(T)). \tag{4.4}$$
3. *Si on suppose en outre que $g$ et $f$ sont concaves sur $\mathbb{R}^n$ et que pour tout $t\in[0,T]$, $L(t,.,.)$ est concave sur $\mathbb{R}^n$, alors si $x\in C^1([0,T],\mathbb{R}^n)$ vérifie les équations d'Euler-Lagrange (4.3) et les conditions de transversalité (4.4) alors $x$ est solution de (4.2).*

**Preuve.**

Pour $h\in C^1([0,T],\mathbb{R}^n)$ on a d'abord :
$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}[J(x+th)-J(x)] \le 0. \tag{4.5}$$
En utilisant la formule des accroissements finis et le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient facilement que la limite précédente vaut :
$$\begin{aligned}\int_0^T [\nabla_x L(t,x(t),\dot{x}(t)).h(t) + \nabla_v L(t,x(t),\dot{x}(t)).\dot{h}(t)]dt \\ +g'(x(T)).h(T) + f'(x(0)).h(0)\end{aligned} \tag{4.6}$$
En utilisant (4.5), (4.6) et la transformation $h\mapsto -h$, il vient que pour tout $h\in C^1([0,T],\mathbb{R}^n)$ on a :
$$\begin{aligned}\int_0^T [\nabla_x L(t,x(t),\dot{x}(t)).h(t) + \nabla_v L(t,x(t),\dot{x}(t)).\dot{h}(t)]dt \\ +g'(x(T)).h(T) + f'(x(0)).h(0) = 0\end{aligned} \tag{4.7}$$
Soit
$$E_n := \{h\in C^1([0,T],\mathbb{R}^n) : h(0)=h(T)=0\} \tag{4.8}$$

En prenant $h \in E_n$ (4.7), et en raisonnant coordonnée par coordonnée, on obtient ainsi que pour tout $i = 1, ..., n$ et tout $h \in E_1$ on a :

$$\int_0^T [L_{x_i}(t, x(t), \dot{x}(t))h(t) + L_{v_i}(t, x(t), \dot{x}(t)).\dot{h}(t)]dt = 0 \tag{4.9}$$

Le Lemme de Dubois-Reymond rappelé plus bas implique donc que pour tout $i = 1, ..., n$, on a :

$$\frac{d}{dt}[L_{v_i}(t, x(t), \dot{x}(t))] = L_{x_i}(t, x(t), \dot{x}(t)) \tag{4.10}$$

on a donc établi (4.3). Soit maintenat $h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n$, en utilisant (4.3), et en intégrant par parties (4.7), on obtient ainsi :

$$(\nabla_v L(T, x(T), \dot{x}(T)) + g'(x(T)))h(T) + (f'(x(0)) - \nabla_v L(0, x(0), \dot{x}(0)))h(0) = 0 \tag{4.11}$$

on déduit ainsi aisément (4.4) de l'arbitrarité de $h$ dans (4.11).

Il nous reste à vérifier que (4.3) et (4.4) sont suffisantes dans le cas concave. Soit $x \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ qui vérifie les équations d'Euler-Lagrange (4.3) et les conditions de transversalité (4.4) et $y \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$. Par concavité on a :

$$\begin{aligned} J(y) - J(x) \leq & \int_0^T [\nabla_x L(t, x(t), \dot{x}(t)).(y(t) - x(t))]dt \\ & + \int_0^T [\nabla_v L(t, x(t), \dot{x}(t)).(\dot{y}(t) - \dot{x}(t))]dt \\ & + g'(x(T)).(y(T) - x(T)) + f'(x(0))(y(0) - x(0)) \\ & = 0 \end{aligned}$$

la dernière égalité est obtenue en intégrant par parties et en utilisant (4.3) et (4.4).

$\square$

Il nous reste à établir le Lemme de Dubois-Reymond :

**Lemme 4.1** *Soit $\phi$ et $\psi$ dans $C^0([0, T], \mathbb{R})$ et $E_1$ définie par (4.8), on a alors équivalence entre :*

1. *$\psi$ et de classe $C^1$ et $\dot{\psi} = \phi$,*
2. *pour tout $h \in E_1$ :*

$$\int_0^T (\phi h + \psi \dot{h}) = 0.$$

**Preuve.** Pour démontrer 1. $\Rightarrow$ 2, il suffit d'intégrer par parties. Démontrons 2. $\Rightarrow$ 1.. Soit $F$ une primitive de $\phi$, l'hypothèse s'écrit alors :

$$\int_0^T (\psi - F)\dot{h} = 0,\ \forall h \in E_1.$$

Soit $c := T^{-1}\int_0^T (\psi - F)$ on a :

$$\int_0^T (\psi - F - c)\dot{h} = 0,\ \forall h \in E_1. \tag{4.12}$$

Il suffit de remarquer que la fonction $h(t) := \int_0^t (\psi - F - c)$ appartient à $E_1$, avec (4.12) il vient donc $\psi = F + c$ ce qui achève la preuve par construction de $F$. $\square$

## 4.3 Principe de la programmation dynamique

On définit la fonction valeur

$$v(t,x) := \sup\left\{\int_t^T L(s, y(s), \dot{y}(s))ds + g(y(T)) : y \in C^1([t,T],\mathbb{R}^n)\ y(t) = x\right\} \tag{4.13}$$

Clairement $v$ vérifie la condition aux limites :

$$v(T,x) = g(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n \tag{4.14}$$

Le **principe de la programmation dynamique** dit que : “si une courbe $y(.)$ issue de $x$ en $t = 0$ est optimale entre $0$ et $T$ alors elle est encore optimale entre $t$ et $T$ parmi les courbes valant $y(t)$ à la date $t$”. Ce principe se traduit ici par la relation suivante :

**Proposition 4.2** *La fonction valeur vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $t \in [0,T]$ :*

$$v(0,x) = \sup\{\int_0^t L(s, y(s), \dot{y}(s))ds + v(t, y(t))\ : y(0) = x\} \tag{4.15}$$

On laisse au lecteur le soin de prouver le principe de la programmation dynamique sous la forme (4.15). Notons que (4.15) est une équation fonctionnelle satisfaite par la fonction valeur (noter l'analogie avec le temps discret).

## 4.4 Equation d'Hamilton-Jacobi

Nous allons voir qu'une autre propriété de $v$ est qu'elle est solution d'une équation aux dérivées partielles (EDP) du premier ordre appelée équation d'Hamilton-Jacobi :

**Proposition 4.3** *Supposons $v$ régulière, alors $v$ est solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi :*

$$\partial_t v(t,x) + H(t,x,\nabla_x v(t,x)) = 0. \tag{4.16}$$

*où $H$ est l'Hamiltonien défini pour tout $p \in \mathbb{R}^n$ par :*

$$H(t,x,p) := \sup_{q\in\mathbb{R}^n} \{q.p + L(t,x,q)\} \tag{4.17}$$

**Preuve.** Pour simplifier, nous supposerons qu'il existe des trajectoires optimales, i.e. que le sup dans (4.13) est atteint. Soit $[t, t+\Delta t] \subset [t,T]$, $p \in \mathbb{R}^n$ et $z$ une solution optimale du problème $v(t+\Delta t, x+p\Delta t)$ considérons ensuite la fonction $y$ telle que $y(s) = x+p(s-t)$ sur $[t, t+\Delta t]$ et $y = z$ sur $[t, t+\Delta t]$. Par définition de $v$ on a alors :

$$\begin{aligned} v(t,x) \geq &\int_t^{t+\Delta t} L(s, x+p(s-t), p)ds + v(t+\Delta t, x+p\Delta t) \\ =&v(t,x) + \Delta t[L(t,x,p) + \partial_t v(t,x) + \nabla_x v(t,x).p + o(1)] \end{aligned}$$

En divisant par $\Delta t$ et en faisant $\Delta t \to 0$, il vient :

$$\partial_t v(t,x) + L(t,x,p) + \nabla_x v(t,x).p \leq 0$$

comme $p$ est arbitraire, en passant au sup en $p$, on obtient que $v$ est une sous-solution de (4.16) :

$$\partial_t v(t,x) + H(t,x,\nabla_x v(t,x)) \leq 0.$$

Soit maintenant $y$ une solution optimale du problème $v(t,x)$, par le principe de la programmation dynamique, notons que $y$ est aussi optimal pour $v(t+\Delta t, y(t+\Delta t)$ :

$$\begin{aligned} v(t,x) =& \int_t^T L(s,y(s),\dot{y}(s))ds + C(y(T)) \\ =& \int_t^{t+\Delta t} L(s,y(s),\dot{y}(s))ds + v(t+\Delta t, y(t+\Delta t) \\ =&v(t,x) + \Delta t[L(t,x,\dot{y}(t)) + \partial_t v(t,x) + \nabla_x v(t,x).\dot{y}(t) + o(1)] \end{aligned}$$

En divisant par $\Delta t$ et en faisant $\Delta t \to 0$, il vient :

$$\partial_t v(t,x) + L(t,x,\dot{y}(t)) + \nabla_x v(t,x).\dot{y}(t) = 0$$

ainsi $v$ est aussi sur-solution (4.16) :

$$\partial_t v(t,x) + H(t,x,\nabla_x v(t,x)) \geq 0.$$

$\square$

Notons que dans notre démonstration heuristique nous avons supposé qu'il existait des trajectoires optimales mais surtout que $v$ était régulière (ce qui n'est généralement pas le cas). De plus, on aimerait que $v$ puisse être caractérisée comme étant l'unique solution du problème de Cauchy :

$$\begin{aligned} \partial_t v(t,x) + H(t,x,\nabla_x v(t,x)) = 0, \\ v(T,.) = g(.). \end{aligned}$$

Pour arriver à des résultats de ce type et sans faire l'hypothèse irréaliste que $v$ est régulière, il faut recourir à la notion de *solution de viscosité*. Le lecteur intéressé consultera avec profit le livre de G. Barles sur le sujet [3].

## 4.5 Exemple d'un modèle consommation-épargne

On se place en temps continu sur la période $[0,T]$ et on considère un ménage dont on note $x(t)$, $S(t)$, $c(t)$ et $e(t)$ la richesse, le salaire instantané (exogène), la consommation et l'épargne enfin on suppose que le ménage cherche à maximiser l'utilité :

$$\int_0^T e^{-\delta t} \log(c(t))dt + e^{-\delta T} V(x(T)).$$

On a les relations :

$$S(t) = c(t) + e(t), \ \dot{x}(t) = e(t) + rx(t)$$

avec $r$ le taux d'intérêt exogène (et supposé constant pour simplifier). La richesse initiale du ménage $x_0$ étant donnée, le choix optimal consommation-épargne du ménage se ramène ainsi au problème variationnel :

$$\sup J(x) := \int_0^T e^{-\delta t} \log(S(t) + rx(t) - \dot{x}(t))dt + e^{-\delta T} V(x(T)) : x(0) = x_0 \tag{4.18}$$

En supposant en outre que $V$ est concave, les conditions du premier ordre sont des conditions suffisantes d'optimalité. En posant $c(t) = S(t) + rx(t) - \dot{x}(t)$, l'équation d'Euler-Lagrange s'écrit ici :

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{-\delta t}}{c(t)}\right) = \frac{re^{-\delta t}}{c(t)}$$

en posant $y(t) = e^{-\delta t}/c(t)$ il vient donc : $y(t) = e^{-rt}/c(0)$ et donc :

$$c(t) = e^{(r-\delta)t}c(0)$$

Il reste à déterminer la constante $c(0)$, pour cela il faut d'une part revenir à la variable (d'état) $x$, en intégrant $\dot{x} - rx = S - c$ d'autre part utiliser la condition de transversalité en $T$ qui ici s'écrit :

$$V'(x(T)) = \frac{1}{c(T)}.$$

# Chapitre 5

# Introduction au contrôle optimal

## 5.1 Généralités

Soit $V$ un espace métrique, $T > 0$, et $u$ une fonction mesurable de $[0, T]$ à valeurs dans $V$, soit $f \in C^0([0, T] \times \mathbb{R}^n \times V, \mathbb{R}^n)$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on considère alors le problème de Cauchy :

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), u(t)) \text{ sur } [0, T] \text{ et } y(0) = x \tag{5.1}$$

ou de manière équivalente sa forme intégrale :

$$y(t) = x + \int_0^t f(s, y(s), u(s)) ds. \tag{5.2}$$

L'équation (5.1) est une équation différentielle *contrôlée* dans laquelle la variable $u$ (variable de contrôle) influence la dynamique de la variable d'état $y$, la condition initiale étant $x \in \mathbb{R}^n$ (noter que $f$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$).

Des conditions classiques de Lipschitz et de croissance contrôlée sur la fonction $f$, données ci dessous, assurent que pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $u(.)$ (mesurable de $[0, T]$ dans $V$) donnés, (5.1) admet une solution unique définie sur tout $[0, T]$. En notant $|.|$ une norme (quelconque) sur $\mathbb{R}^n$, nous supposerons dans toute la suite qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall (t, x, y, u) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times V$, on a :

$$|f(t, x, u) - f(t, y, u)| \leq C|x - y| \text{ et } |f(t, x, u)| \leq C(1 + |x|).$$

Nous ferons toujours cette hypothèse par la suite (ainsi que la continuité de $f$ en tous ses arguments). Sous ces hypothèses, le problème de Cauchy

(5.1) admet une unique solution que nous noterons $y_{x,u}$ ou simplement $y_u$ si aucune confusion n'est possible. Il est clair avec (5.2) que si $u$ est continue par morceaux sur $[0,T]$ alors $y_u$ est continue et $C^1$ par morceaux sur $[0,T]$.

Etant donné un lagrangien $L \in C^0([0,T] \times \mathbb{R}^n \times V, \mathbb{R})$ et une fonction de gain terminal $g \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ on s'intéresse au problème de *contrôle optimal* (on dit aussi *commande optimale*) suivant :

$$\sup_u J(u) := \int_0^T L(t, y_u(t), u(t))dt + g(y_u(T)) \tag{5.3}$$

La variable d'état $y_u$ étant reliée à la variable de commande $u$ par la dynamique (5.1) et la condition initiale $x$ étant donnée. On notera que dans le cas de la dynamique simple : $\dot{y} = u$, le problème (5.3) est un problème de calcul des variations. Donner un cadre fonctionnel précis et satisfaisant est au delà des objectifs de ce cours aussi supposerons-nous par la suite que les contrôles $u$ sont continus par morceaux et que par conséquent les trajectoires correspondantes $y_u$ sont continues et $C^1$ par morceaux. Si $u$ est solution de (5.3), on dit que $u$ est un contrôle optimal.

## 5.2 Principe de Pontriaguine

Introduisons quelques notations. Tout d'abord, on rajoute une variable (la variable *adjointe* qui peut s'interpréter comme un multiplicateur associé à (5.1)) $p \in \mathbb{R}^n$ et l'on définit le pré-Hamiltonien $\underline{H} : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times V \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par :

$$\underline{H}(t, x, u, p) := L(t, x, u) + p.f(t, x, u). \tag{5.4}$$

On définit ensuite le Hamiltonien $H : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par :

$$H(t, x, p) := \sup_{u \in V} \{L(t, x, u) + p.f(t, x, u)\} = \sup_{u \in V} \underline{H}(t, x, u, p). \tag{5.5}$$

Pour le principe du maximum de Pontriaguine, il faut faire quelques hypothèses de régularité supplémentaires que nous n'explicitons pas en détail, nous supposerons en particulier que $H$ est continue, dérivable par rapport à $x$ et $p$ et nous noterons $\nabla_x H$ et $\nabla_p H$ les gradients partiels correspondants.

Pour ne pas alourdir l'exposé, nous donnons ici le principe du maximum de Pontriaguine sans démonstration (il faudrait compter au minimum une quinzaine de pages pour cela) et sans préciser sous quelles hypothèses de régularité et de qualification exactement il est valide (retenez tout de même que comme le théorème de Kuhn et Tucker, le principe de Pontriaguine nécessite une certaine hypothèse de qualification). Nous renvoyons le lecteur aux ouvrages de l'école Soviétique en particulier [1] pour une approche plus rigoureuse et détaillée.

**Théorème 5.1** *Sous des hypothèses de régularité et de qualification que nous n'explicitons pas, si $u$ est un contrôle optimal continu par morceaux pour le problème (5.3) et $y := y_u$ désigne la trajectoire associée, alors il existe $p \in C^0([0,T],\mathbb{R}^n)$ $C^1$ par morceaux (variable adjointe) telle que, d'une part :*

$$H(t, y(t), p(t)) = \underline{H}(t, y(t), u(t), p(t)). \tag{5.6}$$

*D'autre part, le couple $(y(.), p(.))$ est solution du système Hamiltonien :*

$$\begin{cases} \dot{p}(t) & = & -\nabla_x H(t, y(t), p(t)) \\ \dot{y}(t) & = & \nabla_p H(t, y(t), p(t)) \end{cases} \tag{5.7}$$

*avec les conditions aux limites : $y(0) = x$ et $p(T) = g'(y(T))$ (transversalité).*

Si "tout se passe bien" (i.e. si un résultat d'existence-unicité global en temps type Cauchy-Lipschitz s'applique), le système Hamiltonien (5.7) qui est un système du premier ordre admet une solution unique vérifiant les conditions aux limites fournies par le théorème. Si "on a de la chance", on peut en plus calculer cette solution $(y(.), p(.))$, une condition nécessaire sur la commande $u$ est alors fournie par la condition de maximisation (5.6). Il faut cependant prendre garde au fait que le principe de Pontriaguine ne fournit que des conditions nécessaires d'optimalité. Autrement dit, même dans les cas "sympathiques" où le principe du maximum permet de déterminer une commande $u$, l'état correspondant $y$ et la variable adjointe $p$, rien n'assure que $u$ soit effectivement un contrôle optimal. Nous verrons à la fin du chapitre comment, en utilisant des idées de programmation dynamique et l'approche de Bellman, obtenir des conditions suffisantes d'optimalité. Ces dernières permettent souvent en pratique de vérifier si une solution fournie par le principe du maximum est bien un contrôle optimal.

Indiquons pour finir ce paragraphe que dans le cas *autonome* (où ni $L$ ni $f$ ne dépend du temps), alors pour toute solution $(x(.), p(.))$ du système Hamiltonien (5.7) la quantité $H(x(t), p(t))$ (i.e. le Hamiltonien) est conservée au cours du temps :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} H(x(t), p(t)) = \nabla_x H(x(t), p(t)).\dot{x}(t) + \nabla_p H(x(t), p(t)).\dot{p}(t) \\ &= \nabla_x H(x(t), p(t)).\nabla_p H(x(t), p(t)) - \nabla_p H(x(t), p(t)).\nabla_x H(x(t), p(t)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

on dit alors que le Hamiltonien $H$ est une intégrale première de (5.7).

## 5.3 Principe de la programmation dynamique

On définit la fonction valeur du problème de contrôle (5.3)

$$v(t,x) := \sup_u \left\{ \int_t^T L(s, y_u(s), u(s))ds + g(y_u(T)) : y_u(t) = x \right\} \tag{5.8}$$

Clairement $v$ vérifie la condition aux limites :

$$v(T,x) = g(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n \tag{5.9}$$

Le **principe de la programmation dynamique** dit que : “si un controle $u$ est optimal entre 0 et $T$ pour la condition initiale $x$ alors il est aussi optimal entre $t$ et $T$ avec la condition initiale $y_u(t)$ à cette date”. Ce principe se traduit ici par la relation suivante :

**Proposition 5.1** *La fonction valeur vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $t \in [0,T]$ :*

$$v(0,x) = \sup_u \{ \int_0^t L(s, y_u(s), u(s))ds + v(t, y_u(t)) : y(0) = x \} \tag{5.10}$$

## 5.4 Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman

En utilisant le principe de la programmation dynamique et en étudiant comment varie la valeur entre deux dates proches $t$ et $t + \Delta t$ et deux états proches, nous allons voir qu'une autre propriété de $v$ est qu'elle est solution d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre appelée équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman :

**Proposition 5.2** *Supposons $v$ régulière, alors $v$ est solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (H.J.B.) :*

$$\partial_t v(t,x) + H(t, x, \nabla_x v(t,x)) = 0. \tag{5.11}$$

*où $H$ est l'Hamiltonien défini par (5.5).*

**Preuve.** Pour simplifier, nous supposerons qu'il existe des commandes et des trajectoires optimales, i.e. que le sup dans (5.8) est atteint. Soit $[t, t+\Delta t] \subset [t,T]$, $v_0 \in V$ et soit $z(.)$ la solution de :

$$\begin{cases} \dot{z}(s) &= f(s, z(s), v_0) \\ z(t) &= x \end{cases}$$

$u(.)$ un contrôle optimal pour le problème $v(t+\Delta t, z(t+\Delta t))$. Considérons maintenant le contrôle $w(.)$ :

$$w(t) = \begin{cases} v_0 & \text{si} \quad t \in [t, t+\Delta t] \\ u(t) & \text{si} \quad t \in [t+\Delta t, T] \end{cases}$$

En notant $y_w$ la variable d'état correspondante valant $x$ à la date $t$ ($y_w = z$ sur $[t, t+\Delta t]$), on a d'abord :

$$y_w(t+\Delta t) = z(t+\Delta t) = x + f(t, x, v_0)\Delta t + o(\Delta t). \tag{5.12}$$

Il vient ensuite, par définition de la valeur $v$ :

$$\begin{aligned} v(t,x) \geq & \int_t^{t+\Delta t} L(s, y_w(s), v_0) ds + v(t+\Delta t, y_w(t+\Delta t)) \\ =& v(t,x) + \Delta t[L(t,x,v_0) + \partial_t v(t,x) + \nabla_x v(t,x).f(t,x,v_0) + o(1)] \end{aligned}$$

En divisant par $\Delta t$ et en faisant $\Delta t \to 0$, il vient :

$$\partial_t v(t,x) + L(t,x,v_0) + \nabla_x v(t,x).f(t,x,v_0) \leq 0$$

comme $v_0 \in V$ est arbitraire, en passant au sup en $V$, on obtient que $v$ est une sous-solution de (5.11) :

$$\partial_t v(t,x) + H(t,x,\nabla_x v(t,x)) \leq 0.$$

Soit maintenant $u(.)$ un contrôle optimal pour le problème $v(t,x)$, par le principe de la programmation dynamique, notons que $u(.)$ est aussi optimal pour $v(t+\Delta t, y_u(t+\Delta t))$ :

$$\begin{aligned} v(t,x) =& \int_t^T L(s, y_u(s), u(s)) ds + C(y_u(T)) \\ =& \int_t^{t+\Delta t} L(s, y_u(s), u(s)) ds + v(t+\Delta t, y_u(t+\Delta t) \\ =& v(t,x) + \Delta t[L(t,x,u(t)) + \partial_t v(t,x) + \nabla_x v(t,x).f(t,x,u(t)) + o(1)] \end{aligned}$$

En divisant par $\Delta t$ et en faisant $\Delta t \to 0$, il vient :

$$\partial_t v(t,x) + L(t,x,u(t)) + \nabla_x v(t,x).f(t,x,u(t)) = 0$$

ainsi, par définition de $H$, $v$ est aussi sur-solution (4.16) :

$$\partial_t v(t,x) + H(t,x,\nabla_x v(t,x)) \geq 0.$$

$\square$

Notons que la démonstration précédente est heuristique (voir les remarques faites dans le cas du calcul des variations) et que pour faire une théorie satisfaisante des équations d'Hamilton-Jacobi, il faut recourir à la notion de solutions de viscosité.

## 5.5 Contrôle en feedback et condition suffisante

Nous allons voir pour finir ce chapitre que si l'on connait une solution (régulière) du problème aux limites pour l'équation d'H-J-B :

$$\begin{cases} \partial_t w(t,x) + H(t,x,\nabla_x w(t,x)) = 0 \text{ sur } [0,T]\times\mathbb{R}^n \\ w(T,x) = g(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{5.13}$$

alors on peut en déduire une commande optimale *en feedback*. Une commande en feedback est une fonction qui ne dépend pas seulement du temps mais aussi de l'état du sytème, c'est donc une fonction $U$ de $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ à valeurs dans l'espace des contrôles $V$. Pour un contrôle en feedback $U(.,.)$, la dynamique de la variable d'état est régie par l'équation différentielle ordinaire :

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), U(t, y(t))),\ y(0) = x. \tag{5.14}$$

Notons qu'il est assez naturel de s'intéresser à des contrôles en feedback i.e. dépendant de l'état instantané du système : en pratique, on conduit sa voiture en fonction de sa position et de sa vitesse plutôt qu'en fonction de l'heure qu'il est...

On dira que le contrôle en feedback $U(.,.)$ est optimal pour (5.3) si le contrôle $u(t) = U(t, y(t))$ est optimal avec $y(.)$ solution du problème de Cauchy (5.14).

**Théorème 5.2** *Supposons que $w$ est une solution de classe $C^1$ du problème aux limites (5.13), et que pour tout $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$, il existe $U(t,x)\in V$ solution du problème :*

$$\sup_{u\in V}\{L(t,x,u) + \nabla_x w(t,x).f(t,x,u)\}$$

*alors $U$ est un contrôle optimal en feedback et donc si $y$ est solution de*

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), U(t, y(t))),\ y(0) = x. \tag{5.15}$$

*$y$ est une trajectoire optimale pour (5.3) et $u^*(t) = U(t, y(t))$ est un contrôle optimal. Enfin, $w$ est la fonction valeur du problème (5.3).*

**Preuve.** Montrons que $u^*(t) = U(t, y(t))$ fourni par le théorème est un contrôle optimal. Pour $(t,x,u)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n\times V$ posons :

$$F(t,x,u) := L(t,x,u) + \nabla_x w(t,x).f(t,x,u) + \partial_t w(t,x). \tag{5.16}$$

Comme $w$ est solution de (5.13)et par définition de $U$, on a :

$$0 = \max_u \{F(t, x, u)\} = F(t, x, U(t, x)). \tag{5.17}$$

Définissons pour tout contrôle $u$ la fonctionnelle :

$$K(u) := \int_0^T F(s, y_u(s), u(s))ds$$

Avec (5.17), il vient :

$$K(u^*) = 0 \geq K(v) \text{ pour tout contrôle } v(.). \tag{5.18}$$

Soit $v(.)$ un contrôle et $y_v(.)$ l'état asscoié, on a :

$$\begin{aligned}
K(v) &= \int_0^T F(s, y_v(s), v(s))ds \\
&= \int_0^T L(s, y_v(s), v(s))ds + \int_0^T \partial_t w(s, y_v(s))ds + \\
&\int_0^T \nabla_x w(s, y_v(s)).f(s, y_v(s), v(s))ds \\
&= J(v) - g(y_v(T)) + \int_0^T \frac{d}{dt}[w(s, y_v(s))]ds \\
&= J(v) - w(0, x).
\end{aligned}$$

Avec (5.18), il vient donc :

$$J(u^*) - J(v) = K(u^*) - K(v) \geq 0,$$

par conséquent $u^*$ est bien un contrôle optimal et :

$$v(0, x) = J(u^*) = K(u^*) + w(0, x) = w(0, x).$$

Par le même argument que précédemment en changeant la condition de Cauchy $(0, x)$ en $(t, x)$ on obtient de même $v(t, x) = w(t, x)$ si bien que $w$ est la fonction valeur. $\square$

En pratique le théorème précédent doit être vu comme une condition suffisante d'optimalité. Il permet en effet de vérifier si un candidat éventuel (fourni par le principe de Pontriaguine) est effectivement optimal.

# Troisième partie

# Problèmes et exercices

# Programmation dynamique en temps discret

## Horizon fini

**Exercice 1** *On considère le problème suivant :*

$$\sup_{(x_1,x_2,x_3)} \{f(x_1,x_0)+g(x_2,x_1)+h(x_3,x_2) \,:\, x_i \in \Gamma_{i-1}(x_{i-1}),\ i=1,2,3\}$$

*avec* $x_0 \geq 0$ *donnée,*

$$\Gamma_0(x_0) := [0, x_0^4+2x_0+3],\ \Gamma_1(x_1) := [\frac{x_1}{2}, x_1^2+x_1],\ \Gamma_2(x_2) := [0, \frac{x_2^2+4}{x_2^2}];$$

$$f(x_1,x_0) := 2x_1x_0 - x_1^2 + x_1,\ g(x_2,x_1) = -\frac{1}{2x_2} + x_2x_1 - \frac{1}{2}x_2^2$$

*et :*

$$h(x_3,x_2) := \sqrt{x_3} - \frac{1}{2}x_3x_2.$$

1. *Exprimer ici le principe de la programmation dynamique puis en déduire des relations reliant les fonctions valeurs aux différentes dates.*
2. *Calculer ces fonctions valeurs.*
3. *Calculer les politiques optimales.*

**Exercice 2** *Soit* $x \geq 0$*, on considère le problème*

$$\inf\{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \,:\, x_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{N} x_i = x\} \tag{5.19}$$

1. *Résoudre (5.19) en utilisant le théorème de Kuhn et Tucker.*
2. *Introduire la valeur* $V_N(x)$ *de (5.19), puis en utilisant un argument de programmation dynamique calculer* $V_N$ *et résoudre (5.19).*
3. *Comparer les deux méthodes et conclure.*

**Exercice 3** *Pour* $x \geq 0$ *et* $N$ *un entier* $N \geq 1$ *on définit :*

$$V_N(x) := \sup\{x_1 \times \cdots \times x_N \,:\, x_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{N} x_i = x\}$$

1. *Que vaut* $V_1$ *?*
2. *Montrer que :*

$$V_N(x) = \sup\{yV_{N-1}(x-y) \,:\, y \in [0,x]\}$$

3. *Montrer que :*
$$V_N(x) = \frac{x^N}{N^N}$$
4. *En déduire l'inégalité arithmético géométrique :*
$$(|x_1| \cdots |x_N|)^{1/N} \leq \frac{|x_1| + \cdots + |x_N|}{N}$$
*Quand a-t-on égalité ?*

**Exercice 4** *On se propose ici de démontrer le fameux (et utile) résultat connu sous le nom de Théorème de l'enveloppe. On se donne une fonction continue $V$ de $\mathbb{R} \times A$ dans $\mathbb{R}$ où $A$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^N$. On définit alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ :*
$$f(x) := \sup_{y \in A} V(x, y)$$

1. *Montrer que le sup dans la définition de $f$ est un max.*
2. *Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.*
3. *("Théorème" de l'enveloppe) On suppose en outre que $V$ est dérivable par rapport à sa première variable, soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in A$ tel que $f(x) = V(x, y)$, montrer que si $f$ est dérivable en $x$ alors on a :*
$$f'(x) = \frac{\partial V}{\partial x}(x, y).$$

## Horizon infini

**Exercice 5** *Soit $\beta \in ]0, 1[$, $V$ une fonction continue et bornée de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, $a$ et $b$ deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ avec $a \leq b$, on définit alors pour toute fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ la fonction $Tf$ par :*
$$Tf(x) := \sup\{V(y, x) + \beta f(y) \; : y \in [a(x), b(x)]\}$$

1. *Montrer que $T$ est monotone : $f \leq g \Rightarrow Tf \leq Tg$.*
2. *Calculer $T(f + c)$ avec $c$ une constante.*
3. *Montrer que si $f$ est continue et bornée il en est de même de $Tf$.*
4. *Montrer qu'il existe au plus une fonction continue bornée $f$ telle que $f = Tf$.*
5. *Montrer que si $V$ est croissante (resp. décroissante) par rapport à sa seconde variable alors $Tf$ est croissante (resp. décroissante).*
6. *Quelles sont les applications possibles des résultats précédents à la programmation dynamique ?*

7. *Proposer une méthode effective pour calculer ou approcher la valeur du problème :*

$$\sup_{(x_t)}\{\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t V(x_{t+1},x_t)\ :\ x_0=x,\ x_{t+1}\in[a(x_t),b(x_t)]\}$$

*puis pour en déterminer les solutions.*

**Exercice 6** *On s'intéresse au problème suivant :*

$$\sup_{(k_t)}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t \mathrm{Log}(k_t^{\alpha}-k_{t+1}) \tag{5.20}$$

*sous les contraintes : $k_0=k>0$ donnée et $k_{t+1}\in[0,k_t^{\alpha}]$ pour tout $t\geq 0$. On note $W(k)$ (pour $k>0$) la valeur de ce problème, enfin $\alpha$ et $\beta$ sont deux constantes appartenant à $]0,1[$.*

1. *Donner la motivation économique de (5.20).*
2. *Soit $v$ définie pour $k>0$ par :*

$$v(k):=\frac{\alpha\mathrm{Log}(k)}{1-\alpha\beta}$$

   *montrer que $W\leq v$.*
3. *Montrer que $W$ est solution de l' équation de Bellman : $f=Tf$ avec $T$ l'opérateur défini par*

$$Tf(x):=\sup_{y\in[0,x^{\alpha}]}\mathrm{Log}(x^{\alpha}-y)+\beta f(y)$$

   *pour tout $x>0$.*
4. *Pourquoi ne peut on pas affirmer ici directement que $W$ est l'unique solution de l'équation de Bellman.*
5. *Montrer que $Tv=v+c$ avec $c$ une constante négative à déterminer.*
6. *Calculer les itérées $T^n v$ pour $n\in\mathbb{N}$, montrer que cette suite converge vers une limite $v_\infty$ que l'on explicitera. Montrer enfin que $Tv_\infty=v_\infty$.*
7. *Montrer que $W\leq v_\infty$.*
8. *Montrer que $W\geq v_\infty$ (plus difficile) et conclure.*
9. *Montrer que le problème (5.20) admet une solution unique que l'on calculera, on notera $(k_t^*)$ cette politique optimale.*
10. *Etudier la dynamique optimale $k_t^*$ (monotonie, convergence) et conclure.*

# Calcul des variations

**Exercice 7** *On s'intéresse au problème suivant :*

$$\inf_{x(.)} J(x) := \int_0^1 t\dot{x}^2(t)dt \; : x(0) = 1, \; x(1) = 0$$

1. *Calculer* $J(x_N)$ *avec* $x_N$ *la fonction valant* $1$ *sur* $[0, 1/N[$ *et*

$$x_N(t) = -\frac{\operatorname{Log}(t)}{\operatorname{Log}(N)}$$

   *pour* $t \in [1/N, 1]$.

2. *Montrer que l'infimum du problème est* $0$.
3. *Cet infimum est-il atteint ?*
4. *Conclure.*

**Exercice 8** *Résoudre le problème :*

$$\inf_{x(.)} J(x) := \int_0^1 [\dot{x}^2(t) + x^2(t)]dt$$

*dans les cas suivants :*

1. *Sans conditions aux limites,*
2. *Avec les conditions* $x(0) = 0$, $x(1) = 1$.
3. *Avec la condition* $x(0) = 1$.

**Exercice 9** *Résoudre le problème :*

$$\inf_{x(.)} J(x) := \int_0^1 [\dot{x}^2(t) + tx(t)]dt + x^2(1)$$

*dans les cas suivants :*

1. *Sans conditions aux limites,*
2. *Avec la condition* $x(0) = 1$.

**Exercice 10** *Soit* $f$ *une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *de classe* $C^2$ *telle que* $f'' > 0$.

1. *Montrer que le problème*

$$\inf\{\int_0^1 f(\dot{x}(t))dt \; : x(0) = x_0, \;\; x(1) = 1\}$$

   *admet une solution unique que l'on calculera. Conclure.*

*2. Redémontrer le résultat précédent en utilisant l'inégalité de Jensen.*

**Exercice 11** *Après avoir fait un changement astucieux de fonction inconnue, résoudre le problème :*

$$\inf\{\int_0^1 [\frac{\dot{x}^2(t)}{x^2(t)} - \mathrm{Log}(x^2(t))]dt : x(0) = 1,\ x(1) = e\}.$$

**Exercice 12** *On s'intéresse à la manière optimale de manger un gateau (ou une glace) entre les dates $t = 0$ et $t = T$. Initialement le gateau est de taille $1$, et l'objectif du consommateur (le mangeur) est d'avoir consommé le gateau à la date $T$ de manière la plus satisfaisante possible, ce degré de satisfaction est supposé mesuré par la quantité :*

$$V(c) := \int_0^T \exp(-\delta t)U(c(t))dt$$

*Avec $c(t)$ la consommation instantanée ($c(.)$ est la fonction inconnue ici), $\delta > 0$ un taux de dépréciation et $U$ une fonction d'utilité statique, strictement concave, croissante et de classe $C^1$.*

1. *Donner une relation (sous forme intégrale) entre la taille du gateau au cours du temps $x(.)$ et la consommation $c(.)$ au cours du temps.*
2. *Mettre le problème du consommateur du gateau sous la forme d'un problème de calcul des variations.*
3. *Montrer que $V$ est strictement concave.*
4. *Ecrire l'équation d'Euler (on oubliera provisoirement la contrainte de positivité sur la consommation) du problème.*
5. *Résoudre le problème entièrement et rigoureusement dans le cas $U(c) = \mathrm{Log}(c)$.*

# Contrôle optimal

**Exercice 13** *On s'intéresse ici au modèle de croissance optimale de Ramsey dans le cas d'un seul secteur de production. Par souci de simplicité on se limitera à un horizon fini $T > 0$. On notera $c(t)$ la consommation instantanée d'un ménage représentatif dont la satisfaction est supposé mesurée par la quantité*

$$\int_0^T \exp(-\delta t)U(c(t))dt$$

*la consommation doit satisfaire* $c(t) \geq 0$, $\delta > 0$ *est donné ainsi que* $U$ *supposée strictement concave croissante et dérivable. On notera par ailleurs* $y(t)$, $k(t)$ *et* $i(t)$ *la production, le capital et l'investissment dans l'économie au temps* $t$, *on a alors*

$$y(t) = c(t) + i(t),\ i(t) = \dot{k}(t) \text{ et } y(t) = f(k(t))$$

*avec* $f$ *une fonction de production supposée strictement concave, croissante et dérivable.*

1. *Mettre le modèle sous la forme d'un problème de contrôle optimal, dire quelle est la variable de contrôle et celle d'état.*
2. *Former le hamiltonien du problème et écrire les conditions nécessaires fournies par le principe de Pontriaguine.*
3. *Définir la fonction valeur du problème et écrire l'équation aux dérivées partielles ainsi qu'une condition aux limites qu'elle vérifie.*
4. *Donner une condition suffisante d'optimalité.*

**Exercice 14** *Pour* $x > 0$ *donné et* $T > 0$, *on s'intéresse au problème de contrôle optimal :*

$$\inf\{x(T) : x(0) = x, \dot{x}(t) = -u(t)x(t) + \frac{1}{2}u^2(t),\ u(t) \in \mathbb{R}\}$$

1. *Former le pré-Hamiltonien* $\underline{H}(t, x, u, p)$ *du problème et calculer le Hamiltonien* $H(t, x, p) = \inf_u H(t, x, u, p)$.
2. *Ecrire les conditions nécessaires fournies par le principe de Pontriaguine. A quelle difficulté a-t-on à faire ici ?*
3. *Trouver une solution* $(x^*, p^*)$ *du système Hamiltonien fourni par le principe de Pontriaguine, calculer aussi* $u^*$ *le contrôle associé , calculer enfin* $x^*(T)$.
4. *Reprendre les deux questions précédentes pour le problème avec instant initial* $0 < t < T$ *et état initial* $x > 0$.
5. *Donner l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman du problème. Puis déterminer rigoureusement la valeur optimale* $V(t, x)$ *associée à la condition initiale* $x$ *à l'instant initial* $t$ *(*$x > 0$ *et* $0 < t < T$*).*
6. *Calculer un contrôle optimal en rétroaction (ou feedback).*
7. *En utilisant les résultats précédents, dire si* $u^*$ *est un contrôle optimal. Est-ce le seul ?*

**Exercice 15** *On considère le système Hamiltonien :*

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(x,p),\ \ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x,p)$$

*un tel système (avec $H$ ne dépendant pas de $t$) est dit autonome.*

1. *Montrer que pour toute solution $(x(.), p(.))$ la fonction $t \mapsto H(x(t), p(t))$ constante.*
2. *En déduire que si $H$ est coercif i.e.*

$$\lim_{\|(x,p)\| \to +\infty} H(x,p) = +\infty$$

   *alors toutes les trajectoires de ce système hamiltonien sont bornées.*

3. *Appliquer ces résultats au problème de contrôle :*

$$\inf\{\int_0^T [\frac{1}{2}u^2 + V(x)],\ \ \dot{x} = u,\ \ x(0) = x_0\}$$

   *avec $V$ une fonction convexe coercive de classe $C^1$. Donner une interprétation de ces résultats.*

**Exercice 16** *Pour $x \in \mathbb{R}$ donné, on s'intéresse au problème de contrôle optimal :*

$$\inf\{\int_0^T \frac{1}{2}u^2(s)ds + x(T) : x(0) = x,\ \ \dot{x}(t) = x(t) + u(t),\ \ u(t) \in \mathbb{R}\}$$

1. *Former le pré-Hamiltonien $\underline{H}(t,x,u,p)$ du problème et calculer le Hamiltonien $H(t,x,p) := \inf_u H(t,x,u,p)$.*
2. *Ecrire le système d'équations différentielles et les conditions aux limites satisfaites par une trajectoire optmale et la variable adjointe associée.*
3. *Résoudre le système précédent on notera $(x^*, p^*)$ sa solution.*
4. *Donner une équation aux dérivées partielles et une condition aux limites vérifiées par la valeur du problème.*
5. *Trouver une solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman précédente (avec la même condition aux limites).*
6. *Montrer que $x^*$ est une trajectoire optimale, donner un contrôle optimal $u^*$, donner également un contrôle optimal en feedback (i.e. sous la forme $v(t,x)$).*
7. *Résoudre le problème initial en utilisant le formalisme du calcul des variations.*

**Exercice 17** *Soit $T > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. On s'intéresse au problème de minimisation suivant*

$$V(0,x) = \inf\left\{\frac{1}{2}\int_0^T \Big(u^2(s)+x^2(s)\Big)ds, x(0) = x, \forall t \in [0,T], x'(t) = 2x(t)+u(t), u(t) \in \mathbb{R}\right\}.$$

1. *.a. Calculer le Hamiltonien $H(t,x,p)$ associé à ce problème.*
   *b. En déduire que la valeur $V(t,x)$ au temps $t$ est solution de :*

$$\begin{cases} \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}, \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + 2x\frac{\partial V(t,x)}{\partial x} - \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\Big)^2 + \frac{x^2}{2} = 0, \\ V(T,x) = 0. \end{cases}$$

2. *.a. On suppose que la valeur $V$ s'écrit sous la forme*

$$\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}, V(t,x) = v(t)x^2.$$

   *Montrer que la fonction $v$ est solution de l'équation de Riccati*

$$\begin{cases} \forall t \in [0,T], v'(t) + 4v(t) - 2v(t)^2 + \frac{1}{2} = 0, \\ v(T) = 0. \end{cases}$$

   *.b. . Déterminer une solution de l'équation de Riccati.*
   *Indication. On pourra poser*

$$\forall t \in [0,T], f(t) = \frac{1}{v(t) - 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}}.$$

   *c. En déduire une expression de $V$, ainsi que celle d'un contrôle optimal en rétroaction.*

**Exercice 18** *Contrôle optimal en dimension infinie. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on définit :*

$$v(x) := \inf_{u(.)\in K} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} L(y_{x,u}(s), u(s))ds$$

*avec $\lambda > 0$ un taux d'escompte et $y_{x,u}(.)$ la solution du problème de Cauchy*

$$\dot{y}(t) = f(y(t), u(t)),\ t > 0\ y(0) = x$$

*(on suppose que $f$ vérifie des hypothèses de Lipschitzianité assurant existence et unicité de telles trajectoires pour tout temps et que l'ensemble des contrôles $K$ est un métrique compact).*

1. *Montrer que pour tout $x/in\mathbb{R}^d$ et $t>0$ on a :*

$$v(x)=\inf_{u(.)\in K}\{\int_0^t e^{-\lambda s}L(y_{x,u}(s),u(s))ds+e^{-\lambda t}v(y_{x,u}(t)\}$$

2. *En supposant $v$ de classe $C^1$ établir l'équation d'HJB satisfaite par $v$.*

**Exercice 19** *Soit $H$ une fonction continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, $\Omega$ la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^d$ et $v_1$, $v_2$ deux fonctions de classe $C^1$ sur $\Omega$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, continues sur $\overline{\Omega}$ telles que :*

$$v_1(x)+H(\nabla v_1(x))\leq 0,\ v_2(x)+H(\nabla v_2(x))\geq 0,\ \forall x\in\Omega$$

*et $v_1(x)=v_2(x)$, pour tout $x\in\partial\Omega$. Montrer que $v_1\leq v_2$ sur $\overline{\Omega}$. Qu'en conclure ?*

# Bibliographie

[1] V. Alexéev, S.V. Fomine, V.M. Tikhomirov, *Commande Optimale*, MIR, Moscou (1982).

[2] V. Alexéev, E. Galéev, V.M. Tikhomirov, *Recueil de problèmes d'optimisation*, MIR, Moscou (1987).

[3] G. Barles, *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, Springer-Verlag (1994).

[4] R. E. Lucas Jr, N. Stokey, *Recursive Methods in Economics Dynamics*, Harvard University Press (1989).

[5] I. Ekeland, R. Temam, *Convex Analysis and Variational Problems*, North-Holland (1972).

[6] L. C. Evans, *An introduction to the Mathematical Optimal Control Theory*, téléchargeable : `http ://math.berkeley.edu/~evans`.

[7] W.H. Fleming, R.W. Rishel, *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer-Verlag, New-York (1975).

[8] A.D. Ioffe, V.M. Tikhomirov, *Theory of Extremal Problems*, North-Holland (1979).

[9] M. Kamien, N. Schwartz, *Dynamic Optimization*, North-Holland (1981).