



SCIENCES SUP

Cours et applications

Licence • Master • Écoles d'ingénieurs

PHYSIQUE DES PLASMAS

Préface de Bernard Bigot

Jean-Marcel Rax

DUNOD

PHYSIQUE DES PLASMAS

Cours et applications

Jean-Marcel Rax

Professeur à l'université de Paris XI
Directeur du laboratoire de physique
et technologie des plasmas
de l'École Polytechnique

Préface de

Bernard Bigot

Haut-commissaire à l'énergie atomique

DUNOD

Illustration de couverture : *Digital Vision*

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2005
ISBN 2 10 007250 1

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

À Andrée

Tenebris autem quæ sunt in luce tuemur

Préface

L'ouvrage sur la *physique des plasmas* que nous propose de découvrir le professeur Jean-Marcel Rax est particulièrement bienvenu.

Tout d'abord parce que ce domaine de la physique est un domaine passionnant, incontestablement trop peu enseigné actuellement dans nos universités et grandes écoles, et en conséquence trop largement méconnu, surtout quand on sait l'importance que représente cet état de la matière. Certes, ce n'est pas le plus familier et le plus accessible des quatre états (solide, liquide, gaz, plasma) sous lesquels nous savons désormais que la matière existe. Mais comment pourrions-nous continuer à l'ignorer sachant qu'à l'échelle cosmique il représente plus de 99,9 % de la matière visible de notre Univers et que la physique des plasmas est à la base de nombreuses technologies fortement innovantes et prometteuses dans plusieurs secteurs stratégiques (traitement de surfaces, production de nanomatériaux et de matériaux ultra-durs, production d'énergie par fusion thermonucléaire contrôlée, propulsion spatiale, microélectronique, armes de dissuasion...). Jusqu'à la publication de cet ouvrage, les manuels en français traitant de cette physique et accessibles aux étudiants comme aux chercheurs confirmés, et plus largement à tous ceux qui veulent comprendre le monde qui les entoure, étaient extrêmement rares et dataient de plus de 10 ans. Je ne doute pas que cet ouvrage sera rapidement considéré comme un ouvrage de référence, reflétant fidèlement l'état d'avancement de son sujet tel qu'il est au moment de sa publication.

Ensuite, parce que l'accueil en France à la fois du grand programme international de recherche ITER sur la fusion nucléaire deutérium-tritium sous confinement magnétique, et du programme national laser mégajoule (LMJ) sur la fusion nucléaire sous confinement inertiel, tout autant que le développement des nanotechnologies et de la microélectronique en réacteurs plasma, ou des travaux en astrophysique, vont fortement amplifier les besoins de formation en physique des plasmas. Ils vont positionner cette discipline parmi les disciplines physiques de base de la culture scientifique et

technique du XXI^e siècle, au même titre que la mécanique quantique avec ses déclinaisons que sont la physique atomique et la physique nucléaire, la physique statistique, la mécanique des fluides, la physique de la matière condensée...

Enfin, parce que l'intérêt de la physique des plasmas est qu'elle ouvre la voie à une vision complémentaire de la matière par comparaison avec celle que, de superbe manière, permet la seule mécanique quantique ou la seule mécanique des fluides ; en effet, cette physique autorise une approche plus globale qui intègre à la fois des aspects microscopiques, mésoscopiques et macroscopiques, des aspects quantiques et classiques, des aspects purement cognitifs et des aspects fortement appliqués.

Remarquablement conçu, écrit de manière très pédagogique, cet ouvrage s'adresse à tous ceux, étudiants, jeunes scientifiques ou chercheurs confirmés, ingénieurs, public avide de culture scientifique et technique, qui veulent participer activement à la création des connaissances, les utiliser de la meilleure manière possible, ou simplement en suivre la progression. Il bénéficie de l'exceptionnelle expérience pédagogique d'un professeur de grande qualité dont le contact continu depuis de nombreuses années avec des étudiants exigeants lui a permis d'affiner sa vision de la discipline et la dynamique de la présentation de ses grands concepts, et de choisir les exemples les plus parlants et l'articulation des arguments les plus démonstratifs. Il bénéficie aussi de sa longue pratique d'une recherche menée au meilleur niveau international. Jean-Marcel Rax a en effet travaillé aussi bien sur le tokamak Tore Supra du Commissariat à l'énergie atomique installé à Cadarache (France) que sur l'équipement européen JET localisé à Oxford (Angleterre) ou sur le TFTR de l'université de Princeton (États-Unis), sans parler de l'équipement dont son laboratoire, installé à l'École Polytechnique à Palaiseau (France), dispose. Cette expérience unique complétée par des collaborations suivies avec les équipes de l'université de Californie à Berkeley ou de l'Institut de physique appliquée de l'Académie des sciences de Russie qui travaillent sur l'interaction laser-plasma ou la physique des réacteurs plasma pour les nanotechnologies, est la meilleure garantie de la pertinence des choix thématiques et des exemples illustratifs qu'il a retenus. Il est en effet un des meilleurs spécialistes mondiaux susceptibles de nous proposer une vision cohérente, actualisée et complète de la discipline qui est la sienne.

Pour toute ces raisons, je souhaite la meilleure diffusion à cet ouvrage qui me semble pouvoir répondre pleinement à l'une de ses ambitions : éveiller et retenir l'intérêt et l'attention de quelques-uns des meilleurs esprits des futures générations d'étudiants qui voudront, au cours de ce siècle, participer aux formidables aventures scientifiques et techniques qui se profilent dans plusieurs domaines clés (énergie, matériaux innovants, nanotechnologies...) et qui auront un grand besoin de physiciens des plasmas de grande qualité.

Bernard Bigot
Haut-commissaire à l'énergie atomique

Avant-propos

Présenter un exposé synthétique et moderne, utilisable avec profit par les étudiants, de la physique des plasmas au stade actuel de son développement, est une entreprise assez périlleuse. Une telle entreprise nécessite un choix critique : (i) pour identifier, au-delà des modes, ce qui restera fondamental et fondateur au cœur de la discipline, (ii) pour se défaire, au-delà des routines, des sujets traditionnels que les développements récents ont rendu obsolètes ; pour finalement, ramasser et rassembler ce qui semble être l'essence et l'essentiel de la discipline. La délimitation d'un périmètre et le choix d'un centre doivent alors être menés avec le souci d'ordonner et d'équilibrer ces éléments ; en effet, si l'identité de la discipline est déterminée par son cœur, ce sont sur ses marges que se situe le mouvement, découvertes et inventions.

Les plasmas constituent l'essentiel de l'environnement terrestre au-delà de la haute atmosphère ; à l'échelle cosmique plus de 99,9 % de la matière visible se présente sous forme ionisée. Ainsi, la physique des plasmas est l'outil essentiel pour étudier notre environnement au-delà des couches basses de l'atmosphère ; en particulier, les structures et les processus tels que : les aurores boréales, le vent solaire, les queues de comètes, les bras galactiques, les magnétosphères, la couronne solaire, les éruptions solaires, les atmosphères et intérieurs stellaires, l'émission des nébuleuses et des pulsars, relèvent de la physique des plasmas.

Au-delà de son intérêt en tant qu'outil de référence pertinent pour l'étude des problèmes d'astrophysique et de physique spatiale, la physique des plasmas se situe en amont d'un vaste champ d'applications technologiques. Par exemple, dans les domaines des hautes technologies que sont les nanotechnologies et l'exploration spatiale. Plus de la moitié des opérations de fabrication des processeurs et mémoires sont effectuées dans des *réacteurs plasmas*, et les *propulseurs plasmas* sont actuellement considérés comme la seule option pour une mission habitée vers Mars. Au cours de ces dernières années la pénétration des *procédés plasmas* dans les processus industriels a augmenté de façon extrêmement rapide et les *technologies plasmas*

sont devenues indispensables aussi bien dans des domaines innovants comme les nouveaux matériaux, les composants électroniques, la propulsion spatiale et les technologies de dépollution, que dans des domaines plus classiques tels que l'éclairage, la sidérurgie ou la chimie.

Enfin, la physique des plasmas est l'outil essentiel pour concevoir et comprendre les différents systèmes mis en œuvre dans le cadre des programmes de recherche sur la fusion thermonucléaire : fusion inertielle et fusion par confinement magnétique dans les réacteurs tokamaks.

Il est ainsi d'usage de structurer la recherche en physique des plasmas en trois grandes communautés et de distinguer respectivement : (i) la physique des décharges et des gaz faiblement ionisés, (ii) la physique des plasmas thermonucléaires et (iii) la physique des plasmas naturels. Ces trois communautés de recherches ont en commun un ensemble d'outils, de méthodes et de résultats constituant la physique des plasmas.

Ce cours, à vocation généraliste, est construit autour de l'ensemble de ces connaissances et résultats communs ou connexes. Il peut être adopté comme manuel de base aux niveaux L3 et M1 ou comme monographie de référence au niveau M2 pour les ingénieurs et chercheurs confrontés à des problèmes de physique des plasmas.

Cet ouvrage s'adresse donc aux étudiants en Master et Licence (L3) ainsi qu'aux élèves des Écoles d'Ingénieurs. Il est issu d'un cours professé ces dernières années devant différents auditoires : à l'université de Paris XI (Magistère de physique fondamentale, M1 de physique appliquée, L3 de mécanique physique et M2 de physique des plasmas), à l'École Normale Supérieure de Cachan (L3 EEA), à l'École Polytechnique (M2 de physique des plasmas), à l'École Supérieure d'Électricité (L3) et à l'École Centrale Paris (M1 MAE et physique appliquée).

Les concepts et méthodes de la physique des plasmas sont présentés ici en cherchant à concilier deux objectifs différents : (i) d'une part, présenter aux élèves et étudiants qui en resteront là avec cette discipline, ce qu'est cette science et les sensibiliser à l'importance des plasmas qui sont aux traitements de l'énergie et des matériaux ce que les semi-conducteurs sont au traitement du signal ; (ii) d'autre part, donner une solide formation de base à ceux qui, dans la recherche, l'enseignement, ou l'industrie, seront amenés à pratiquer cette discipline, formation mettant en évidence les concepts centraux et leurs articulations décisives avec les méthodes spécifiques d'approche des problèmes en physique des plasmas. Ainsi deux lectures sont offertes, les sept premiers chapitres répondent au premier objectif et la totalité des dix au deuxième ; le premier chapitre étant essentiellement de nature descriptive et historique et le deuxième étant formé de rappels d'hydrodynamique, d'électrodynamique et de physique statistique.

Orsay, mai 2005

Table des matières

CHAPITRE 1 • ÉLECTRONS, IONS ET PLASMAS	1
1.1 Physique des plasmas	1
1.1.1 Environnement	2
1.1.2 Origines et histoire	7
1.1.3 Ordres de grandeur	10
1.2 Technologie des plasmas	15
1.2.1 Réacteurs	20
1.2.2 Tokamaks	24
1.2.3 Propulseurs	29
CHAPITRE 2 • CHAMPS, PARTICULES ET FLUIDES	36
2.1 Électrodynamique	37
2.1.1 Conduction et diffusion	40
2.1.2 Polarisation et magnétisation	48
2.2 Physique statistique	55
2.2.1 Fonctions de distribution	55
2.2.2 Hiérarchie de Bogolioubov	58
2.2.3 Distribution de Maxwell	61
2.3 Hydrodynamique	65
2.3.1 Théorème de Lagrange	66
2.3.2 Équation d'Euler	69
CHAPITRE 3 • PHÉNOMÈNES COLLECTIFS	74
3.1 Perturbation électronique	77
3.1.1 Fréquence de Langmuir	77
3.1.2 Éclatement coulombien	79

3.2	Écrantage électrique	81
3.2.1	Longueur de Debye	81
3.2.2	Sphère de Debye	85
3.3	Écrantage magnétique	86
3.3.1	Longueur de London	86
3.4	Perturbation magnétique	89
3.4.1	Vitesse d'Alfvén	89
3.4.2	Onde d'Alfvén	91
3.5	Perturbation ionique	93
3.5.1	Ondes acoustiques	93
3.5.2	Vitesse de Bohm	94
3.6	Relaxation électronique	96
3.6.1	Temps de Maxwell	96
3.6.2	Longueur de Kelvin	98
CHAPITRE 4 • COLLISIONS ET RÉACTIONS		102
4.1	Section efficace	102
4.1.1	Section efficace de réaction	102
4.1.2	Section efficace de diffusion	104
4.1.3	Libre parcours moyen	105
4.2	Collisions élastiques	108
4.2.1	Diffusion élastique	108
4.2.2	Diffusion Rutherford	112
4.2.3	Interaction électron-atome	118
4.3	Collisions inélastiques	124
4.3.1	Seuil de réaction	124
4.3.2	Ionisation et réactivité	125
4.4	Théorie du libre parcours moyen	134
4.4.1	Viscosité, mobilité, diffusion	134
4.4.2	Coefficients de Townsend	140
CHAPITRE 5 • INTERACTIONS CHAMPS-PARTICULES		147
5.1	Mouvement cyclotronique	148
5.1.1	Rayon de Larmor	148
5.1.2	Moment magnétique	150
5.1.3	Force diamagnétique	151
5.2	Dérives électromagnétiques	154
5.2.1	Dérives électriques	154
5.2.2	Dérives magnétiques	156
5.3	Force pondéromotrice	166
5.3.1	Champ longitudinal	166
5.3.2	Champ transverse	167
5.4	Invariants adiabatiques	168
5.4.1	Intégrale d'action	168
5.4.2	Invariant longitudinal	172
5.4.3	Invariant de flux	174

CHAPITRE 6 • DYNAMIQUE ET STRUCTURES ÉLECTRIQUES	179
6.1 Modèles cinétiques et fluides	180
6.1.1 Réduction fluide	180
6.1.2 Nombre de Knudsen	184
6.2 Mobilité, diffusion, ionisation	189
6.2.1 Mobilité et diffusion	189
6.2.2 Loi de Paschen	194
6.2.3 Ondes d'ionisation	202
6.3 Structures quasi-neutres	205
6.3.1 Diffusion ambipolaire	205
6.3.2 Modèles de Schottky	208
6.3.3 Modèle de Tonks-Langmuir	213
6.4 Gaines ioniques	215
6.4.1 Critère de Bohm	215
6.4.2 Lois de Child-Langmuir	217
CHAPITRE 7 • DYNAMIQUE ET STRUCTURES MAGNÉTIQUES	225
7.1 Magnétohydrodynamique	225
7.1.1 Réduction MHD	225
7.1.2 Pression magnétique	230
7.2 Diffusion magnétique	234
7.2.1 Nombre de Reynolds	234
7.2.2 Diffusion du plasma	236
7.2.3 Diffusion du champ	237
7.3 Théorèmes d'Alfvén	239
7.3.1 Théorème du flux	239
7.3.2 Théorème du gel	241
7.4 Équilibres MHD	245
7.4.1 Équilibre MHD	245
7.4.2 Équilibres cylindriques	246
7.5 Hélicité et topologie	250
7.5.1 Enlacement	250
7.5.2 Équilibres sans forces	254
CHAPITRE 8 • ONDES, OSCILLATIONS ET RÉSONANCES	258
8.1 Ondes électromagnétiques	258
8.1.1 Résonances hybrides	260
8.1.2 Vecteur de Poynting	265
8.1.3 Vitesse de groupe	276
8.2 Modes électroniques et ioniques	279
8.2.1 Photons, plasmons, phonons	280
8.2.2 Modes électroniques magnétisés	284
8.2.3 Modes ioniques magnétisés	291
8.2.4 Coupures et résonances	294

8.3	Irréversibilité et non-linéarités	297
8.3.1	Absorption Landau	297
8.3.2	<i>Bremsstrahlung</i> inverse	300
8.3.3	Absorption résonante	303
8.3.4	Génération de plasmons	305
CHAPITRE 9 • COLLISIONS, RELAXATION ET TRANSPORT		309
9.1	Systèmes markoviens	310
9.1.1	Probabilités de transition	310
9.1.2	Équation de Boltzmann	313
9.1.3	Équation de Fokker-Planck	316
9.2	Interaction particules-particules	321
9.2.1	Transfert d'énergie-impulsion	322
9.2.2	Équation de Landau	328
9.2.3	Équation de l'EEDF	331
9.3	Processus cinétiques	334
9.3.1	Ralentissements	334
9.3.2	Isotropisation	338
9.3.3	Alphas thermonucléaires	341
9.3.4	Électrons relativistes	344
9.4	Fluctuations et turbulence	346
9.4.1	Relation de Green-Kubo	346
9.4.2	Collisions et turbulence	348
CHAPITRE 10 • ADIABATICITÉ, RÉSONANCES ET CHAOS		353
10.1	Systèmes hamiltoniens	353
10.1.1	Équations de Hamilton	353
10.1.2	Intégrale d'action	358
10.1.3	Invariants de Poincaré	364
10.2	Intégrabilité	368
10.2.1	Transformations canoniques	368
10.2.2	Variables angles et actions	370
10.2.3	Relation d'Einstein	375
10.2.4	Interactions électromagnétiques	377
10.3	Adiabaticité	386
10.3.1	Perturbations adiabatiques	387
10.3.2	Dérives et forces séculaires	390
10.3.3	Confinement magnétique	394
10.4	Résonances	397
10.4.1	Résonances linéaires	397
10.4.2	Résonances Landau	399
10.4.3	Résonances cyclotron	403
10.5	Chaos	407
10.5.1	Critère de Chirikov	407
10.5.2	Transition vers le chaos	410
10.5.3	Équation quasi-linéaire	414
INDEX		423

Chapitre 1

Électrons, ions et plasmas

Salviati. - L'activité constante que vous autres vénitiens déployez dans votre célèbre arsenal est une source inépuisable d'interrogations et de recherches pour l'esprit curieux, spécialement les travaux impliquant la mécanique ;... Sagredo. - Tout à fait. Moi-même, curieux par nature, je visite souvent ce lieu pour le simple plaisir d'observer..

Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze,
G. Galilei

1.1 PHYSIQUE DES PLASMAS

La matière constituant notre environnement proche se présente essentiellement sous forme solide, liquide ou gazeuse. Au-delà de ces trois états, à haute et à basse températures, deux nouveaux types d'états, les « *gaz quantiques* » et les « *gaz ionisés* », se distinguent par l'apparition d'une grande diversité de phénomènes physiques nouveaux :

- à très basse température, les états supraconducteur, superfluide ainsi que les condensats de Bose-Einstein présentent une richesse de comportements associée aux corrélations et aux phénomènes d'échange et de cohérence quantiques ;
- à très haute température, la dissociation puis l'ionisation conduisent à la création de populations d'ions et d'électrons libres et ces charges libres induisent un comportement collectif, non-linéaire, chaotique et turbulent.

On appelle « *plasma* » ou « *gaz ionisé* » cet état exotique de la matière contenant une fraction significative de charges libres ; l'ensemble des concepts, méthodes et résultats propres à l'étude de cet état de la matière constitue la « *physique des plasmas* ». La physique des plasmas intègre les connaissances de nombreux autres domaines de la physique, tels que la physique statistique, la dynamique hamiltonienne, l'électrodynamique relativiste, les physiques atomique, moléculaire et nucléaire ; réciproquement, de nombreux concepts et méthodes, issus de recherches fondamentales en physique des plasmas, ont été intégrés par d'autres disciplines, plus particulièrement en physique non-linéaire, chaos et turbulence, interaction champs-particules et théories des instabilités.

1.1.1 Environnement

Les océans, les continents et l'atmosphère, ne sont pas des plasmas ; ils se présentent sous formes fluides et solides neutres. La croûte, le manteau et le noyau terrestre sont constitués principalement de fer, d'oxygène, de silicium et de magnésium sous forme solide et liquide. L'atmosphère terrestre est composée essentiellement d'azote et d'oxygène, sous forme gazeuse neutre et, en quantités minimes, de gaz rares. Enfin, pour ce qui concerne les océans, ils sont formés d'eau, contenant, en proportions minimes, des sels minéraux, principalement des halogénures alcalins et alcalino-terreux. Le tableau (1.1) rappelle l'abondance des principaux éléments présents dans notre environnement, les pourcentages se réfèrent à la masse total pour la terre et au volume totale pour l'atmosphère.

Tableau 1.1

Éléments	[%] de la masse	Éléments	[%] du volume
Fe	35 – 40	N ₂	78
O	28 – 30	O ₂	21
Si	15 – 17	Ar	0,93

Cette analyse rapide de notre environnement proche pourrait laisser croire que la phase *plasma* est totalement absente à l'état naturel ; au contraire, les plasmas constituent l'essentiel de notre environnement au delà de la haute atmosphère. En effet, à l'échelle cosmique, plus de 99,9% de la matière visible se présente sous forme ionisée, en phase plasma.

Une analyse plus fine de la constitution de l'atmosphère montre qu'une faible proportion d'ions libres est déjà présente au niveau des couches basses de l'atmosphère ; la proportion de cette composante chargée est variable, l'ordre de grandeur du nombre moyen d'ions par centimètre cube en fonction de l'altitude est donné dans le tableau (1.2).

Tableau 1.2

Altitude [km]	Ions positifs [cm ⁻³]	Ions négatifs [cm ⁻³]
0.5	~ 800	~ 700
2	~ 600	~ 500
5	~ 2500	~ 2000

Les agents énergétiques à l'origine de ce faible niveau d'ionisation sont : les rayons cosmiques, la radioactivité naturelle et les phénomènes d'électrisation atmosphérique, liés principalement aux processus triboélectriques ; ainsi que le reliquat de rayonnement solaire ultraviolet dur présent à basse altitude. Cependant, les couches basses de l'atmosphère ne constituent pas un plasma compte tenu de leur faible niveau d'ionisation ; en effet, un tel niveau n'induit pas un comportement collectif, ni une réactivité significative. La physique de l'atmosphère relève donc de la mécanique et de la thermique des fluides classiques. Par contre, à partir d'une altitude de l'ordre d'une centaine de kilomètres, le rayonnement ultraviolet du soleil entretient une structure ionisée dont l'étude relève de la physique des plasmas : l'ionosphère. À une telle altitude, la densité de particules chargées atteint des valeurs supérieures à plusieurs dizaines de milliers d'électrons et d'ions par centimètre cube ; ces charges libres constituent la population à l'origine des propriétés électromagnétiques et physico-chimiques originales de ces couches de la très haute atmosphère. Au-delà de l'ionosphère, c'est-à-dire à partir d'une altitude de l'ordre du millier de kilomètres, s'étend la magnétosphère : un plasma magnétisé structuré par le champ magnétique dipolaire terrestre et alimenté en espèces chargées par le vent solaire. Le comportement de l'ionosphère est dominé par une forte réactivité chimique et relève donc aussi de la physico-chimie des plasmas ; par contre, les phénomènes électrodynamiques et magnétohydrodynamiques sont au coeur de la dynamique de la magnétosphère.

Au-delà de la magnétosphère s'étend l'espace interplanétaire, rempli aussi par un plasma : le vent solaire, issu des couches externes du soleil ; le soleil est aussi une sphère de gaz ionisée structurée en différentes couches. Le tableau (1.3) présente l'ordre de grandeur des caractéristiques (très variables) de densité électronique, n_e , et de température électronique, T_e , de ces différents plasmas spatiaux.

Tableau 1.3

Plasmas spatiaux	n_e [cm ⁻³]	T_e [K]
Ionosphère	$10^3 - 10^6$	$10^2 - 10^3$
Couronne Solaire	$10^4 - 10^8$	$10^4 - 10^6$
Vent Solaire	$\sim 10^{1/2}$	$\sim 10^5$

Au-delà du système solaire, les étoiles, quels que soient leurs types, sont essentiellement des sphères de plasma et les espaces interstellaires et intergalactiques sont aussi remplis de particules chargées en interaction électromagnétique ; le tableau (1.4) présente quelques ordres de grandeurs typiques des paramètres densité et température de ces plasmas astrophysiques.

Tableau 1.4

Plasmas astrophysiques	n_e [cm^{-3}]	T_e [K]
Intérieurs stellaires	$10^{25} - 10^{32}$	$10^7 - 10^8$
Espaces Interstellaires	$10^{-3} - 1$	$10^2 - 10^3$
Espaces Intergalactiques	$\sim 10^{-6}$	$\sim 10^5$

En conclusion, bien que notre environnement proche soit formé de matière neutre sous forme liquide, solide et gazeuse ; à grande échelle, les plasmas constituent l'essentiel de l'environnement terrestre et la physique des plasmas s'impose comme l'outil de référence pour étudier cet environnement au-delà des couches basses de l'atmosphère. En particulier, les structures et les processus tels que : les aurores boréales, le vent solaire, les queues de comètes, les bras galactiques, les magnétosphères, la couronne solaire, les éruptions solaires, les atmosphères et intérieurs stellaires, l'émission électromagnétique des nébuleuses gazeuses et des pulsars, etc. relèvent de la physique des plasmas ; la figure 1.1 présente quelques données typiques de ces structures spatiales et astrophysiques.

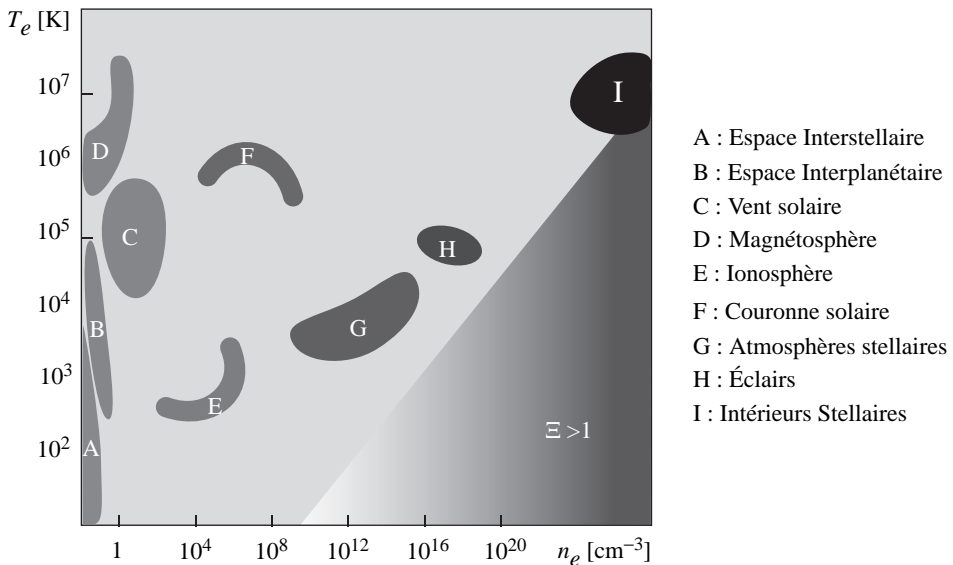


Figure 1.1 Densités et températures électroniques des principaux plasmas naturels.

Face à l'extrême diversité des conditions de densité et température de ces structures, il pourrait sembler difficile d'envisager l'étude de l'ionosphère, de la magnétosphère, du vent solaire, de la couronne solaire, des intérieurs stellaires, des atmosphères stellaires, etc. à l'aide d'un outil unique. Malgré cette difficulté apparente, la physique des plasmas se révèle pertinente pour l'étude de l'ensemble de ces objets et constitue un vaste champ de connaissances structuré autour d'un ensemble de concepts, méthodes et résultats fondamentaux permettant l'étude de systèmes aussi variés ; l'objectif de cet ouvrage est de présenter ces concepts, méthodes, outils et résultats.

Au-delà de son intérêt en tant qu'outil de référence pertinent pour l'étude des problèmes d'astrophysique et de physique spatiale, la physique des plasmas se situe aussi en amont d'un vaste champ d'applications technologiques ; par exemple, dans les domaines des hautes technologies que sont la micro-électronique et l'exploration spatiale : plus de la moitié des opérations de fabrication des processeurs et mémoires sont actuellement effectuées dans des *réacteurs plasmas* et les *propulseurs plasmas* sont considérés comme l'option la plus pertinente pour une mission habitée vers Mars.

Au cours de ces dernières années, la pénétration des *procédés plasmas* dans les processus industriels a augmenté de façon extrêmement rapide ; bien qu'elles ne soient pas encore identifiées en tant que secteur industriel spécifique, les *technologies plasmas* sont devenues indispensables aussi bien dans des domaines innovants comme les nouveaux matériaux, les nanotechnologies et la propulsion spatiale, que dans des domaines plus classiques tels que la sidérurgie, l'éclairage ou la chimie.

Enfin, au-delà des applications industrielles, la physique des plasmas est l'outil essentiel pour comprendre les différents systèmes expérimentaux mis en œuvre dans le cadre des programmes de recherche sur la fusion thermonucléaire ; la fusion nucléaire du deutérium et du tritium en phase plasma constituant la seule option, à long terme, pour palier à l'épuisement des ressources en énergie fossile. La figure 1.2 présente quelques valeurs typiques de densités et températures de ces plasmas thermonucléaires et industriels.

L'usage est de structurer les recherches en physique des plasmas en trois grandes communautés et de distinguer respectivement :

- la physique des plasmas industriels,
- la physique des plasmas thermonucléaires,
- la physique des plasmas naturels, spatiaux et astrophysiques.

Ces trois communautés de recherche ont en commun un ensemble d'outils, de méthodes et de résultats constituant la physique des plasmas. Cet ouvrage, à vocation généraliste, est construit autour de l'ensemble des connaissances et résultats communs à ces trois communautés.

Ces trois communautés ont aussi en commun une histoire, car l'état des connaissances actuelles en physique des plasmas résulte d'un processus de développement historique lié à l'évolution de notre compréhension de la structure de la matière et au développement de notre maîtrise des phénomènes électriques, magnétiques et optiques. La théorie des plasmas s'appuie donc sur la théorie électromagnétique des phénomènes électriques, magnétiques et optiques, ainsi que sur la théorie atomique de la structure de la matière.

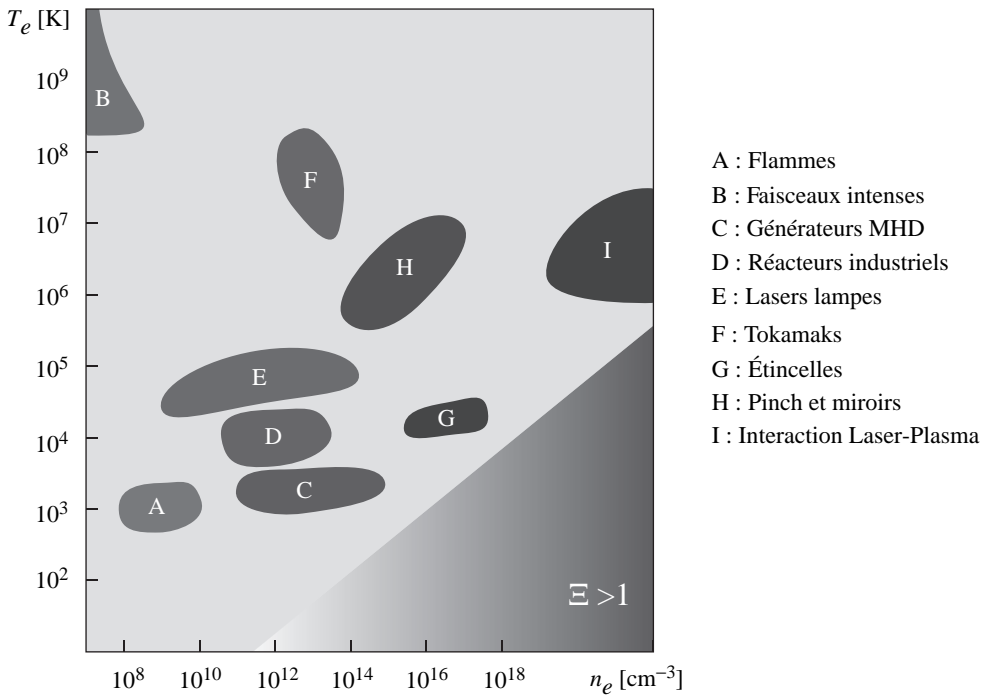


Figure 1.2 Densités et températures électroniques de quelques plasmas thermonucléaires et industriels.

L'achèvement de l'électrodynamique, à la fin du XIX^e siècle, et la construction du modèle atomique de la matière, au début du XX^e siècle, ont permis le développement de la physique des plasmas à travers un processus d'identification de problèmes, d'expérimentation, de modélisation, de découvertes et d'inventions étalé sur ces quatre-vingt dernières années ; ce processus est encore à l'œuvre et la physique des plasmas constitue aujourd'hui une discipline majeure, importante et productive, au sein de la physique moderne. Afin de préciser l'identité de cette discipline, rappelons les différentes étapes de la construction de l'électrodynamique et de la théorie atomique de la matière.

1.1.2 Origines et histoire

La publication, en 1600, du traité de magnétisme de Gilbert constitue l'acte fondateur de ce qui, trois siècles plus tard, allait devenir l'électromagnétisme. Dans ce traité, Gilbert explique l'orientation et la déclinaison de l'aiguille de boussole en assimilant la terre à un dipôle magnétique ; dans ce même traité, il utilise pour la première fois le mot *électricité* pour qualifier les phénomènes d'attraction et de répulsion associés à l'électrisation par triboélectricité. L'histoire ultérieure du développement de l'électrodynamique, au cours des XVII^e, XVIII^e et XIX^e siècles, verra successivement le développement de l'optique, de l'électrostatique, puis de la magnéto-statique et enfin de l'électrodynamique. L'unification de la description des phénomènes électriques, magnétiques et optiques, dans le cadre de l'électrodynamique de Maxwell, achève la construction de cette discipline dès la fin du XIX^e siècle. Les principales étapes de cette synthèse remarquable, étalée sur trois siècles, sont rappelées ici.

Dès 1609, Galilée en Italie et Kepler à Prague mettent au point la lunette astronomique. Cette invention est l'aboutissement des progrès constants des technologies de fabrication des lentilles optiques. Malgré l'impact de cette invention, son étude ne débouche pas sur la formulation des lois de la réfraction. Il faut attendre Descartes, en 1637, pour que soient enfin formulées les lois fondamentales de l'optique géométrique permettant de mettre en place la théorie des instruments d'optique. Descartes, afin d'interpréter les lois qui désormais portent son nom, construit une théorie corpusculaire de la lumière. C'est aussi une interprétation corpusculaire de la lumière que met en avant Newton, en 1672, lorsque, sur la base d'une série d'expériences de décomposition et de synthèse, il présente une théorie des couleurs et des phénomènes d'irisation associés à la dispersion dans les milieux transparents. Quelques années plus tard, en 1678, Huyghens propose une interprétation de la lumière en terme de vibrations et montre qu'un tel modèle permet de décrire correctement les phénomènes de propagation et de réfraction. Le XVII^e siècle s'achève sur la confrontation de ces deux théories de la lumière, corpusculaire et ondulatoire, en apparence contradictoires, mais que la physique moderne rendra complémentaires.

Les phénomènes optiques ayant trouvé une interprétation dans un (deux) cadre(s) théorique(s) durant le XVII^e siècle, l'effort des savants du XVIII^e siècle s'est principalement porté sur l'étude des phénomènes électriques. Ainsi, dès 1740, l'abbé Nollet publie son célèbre traité de physique et d'électricité présentant une classification de l'ensemble des phénomènes électriques identifiés à l'époque ; mais il faut attendre 1785 pour que ces phénomènes électrostatiques trouvent une interprétation dynamique en terme de charges électriques et de forces entre ces charges. En effet, Coulomb, à l'aide de la balance de torsion mise au point quelques années auparavant, établit la loi d'attraction et de répulsion des charges électriques en fonction de leur distance ; cette (électro)dynamique permet alors d'interpréter les phénomènes d'électrostatique des conducteurs et des isolants. Cependant, à cette époque, les générateurs électrostatiques, utilisant la triboélectricité, constituaient les seules sources de

courant et tension et les procédés de stockage des charges étaient essentiellement des condensateurs (les bouteilles de Leyde) de mauvaise qualité. Les performances médiocres de ces appareils limitaient toute perspective de développement expérimental pour explorer les propriétés des courants électriques.

Vers 1790, le physiologiste Italien Galvani, étudiant des phénomènes d'électrophysiologie associés à la contraction de cuisses de grenouilles, proposa une explication basée sur l'électricité atmosphérique ; mais c'est à Volta, en 1800, que revient le mérite de l'identification de l'origine de ces contractions. Volta remarqua que ces phénomènes nécessitent l'utilisation de deux métaux de nature différente.

Partant de cette observation, il construit la première pile électrique en empilant des rondelles de métaux différents séparées par des rondelles de drap imbibé de solution saline. Un tel dispositif, appelé « *pile* » de par sa constitution, présente alors naturellement un pôle positif et un pôle négatif entre lesquels s'écoule un courant électrique lorsque le circuit est fermé. Cette invention de la pile électrique allait permettre le développement d'expériences sur la dynamique des phénomènes électriques et magnétiques tout au long du XIX^e siècle.

En 1820, suivant en cela une intuition récurrente du lien entre électricité et magnétisme, le Danois Ørsted démontre, à l'aide d'une pile de Volta et d'une aiguille de boussole, que le passage d'un courant électrique engendre un champ magnétique ; l'année suivante Ampère met en place le formalisme permettant d'interpréter ce premier phénomène électrodynamique, réalisant ainsi la première synthèse théorique entre électricité et magnétisme. Puis, Faraday, en 1831, met en évidence le phénomène d'induction électromagnétique, démontrant que les champs magnétiques engendrent des champs électriques. L'unification de l'électricité et du magnétisme était ainsi achevée.

C'est à Maxwell que revient le mérite de parachever cet édifice en publiant en 1865 un système complet d'équations permettant d'interpréter et de modéliser l'ensemble des phénomènes électriques et magnétiques observés à l'époque. Cette synthèse finale, entre électricité et magnétisme, s'accompagne d'une unification encore plus vaste, englobant l'optique, puisque ces équations, dites de Maxwell, admettent des solutions décrivant des ondes se propageant à la vitesse de la lumière. En 1888, Hertz, utilisant un circuit électromagnétique oscillant (et une détection par plasma d'étincelle), produit et détecte de telles ondes, confirmant ainsi cette prédiction. Dès lors, la lumière est considérée comme une vibration transverse de nature électromagnétique et les résultats établis en 1815 par Fresnel, qui, pour construire une théorie dynamique de la réfraction et de la diffraction, avait utilisé l'hypothèse d'une vibration transverse de nature inconnue, se trouvent confirmés et précisés, la vibration transverse de Fresnel est donc de nature électrique.

Cette synthèse entre les phénomènes électriques, magnétiques et optiques, formalisée à travers le système des équations de Maxwell, est l'un des outils essentiels de la physique des plasmas.

La dynamique des plasmas ne se réduit pas à celle des champs électrique et magnétique, elle incorpore aussi l'étude du comportement des particules : électrons, ions, atomes et molécules. La construction du modèle atomique de la structure de la matière, permettant de comprendre les mécanismes de production des espèces chargées, est postérieure de plus d'un quart de siècle au développement de la théorie de l'électromagnétisme ; rappelons-en ici les principales étapes.

Bien que l'intuition atomiste ait été privilégiée de façon récurrente depuis l'Antiquité, il faut attendre 1785 pour que cette intuition soit formalisée dans le cadre de la construction d'une théorie opérationnelle du comportement de la matière ; en effet, à cette époque, Bernoulli construit une théorie cinétique des gaz où la notion de pression, clairement identifiée et formulée depuis Pascal et Torricelli, est interprétée dans un cadre mécaniste microscopique. Durant le XIX^e siècle la physique des milieux dilués progresse rapidement ; l'équation des gaz parfaits issue des travaux de Boyle, Mariotte et Gay Lussac trouve son interprétation mécanique dans le cadre d'une vision atomiste et constitue, durant la deuxième moitié du XIX^e siècle, le modèle de référence des développements de la thermodynamique.

Les progrès constants des techniques du vide et des technologies de soudure métal sur verre permettent alors l'étude des décharges électriques dans les gaz raréfiés emplissant des ampoules et tubes en verre et mènent naturellement vers l'étude de leur propriétés électriques et optiques. Le milieu du XIX^e siècle voit alors le développement de la physique des décharges électriques dans les gaz. Certes, les phénomènes d'étincelle et d'éclair, à pression atmosphérique, avaient été décrit depuis l'Antiquité, l'arc électrique inventé par Davy en 1813 et les décharges lumineuses décrites par Faraday en 1839 ; mais, les décharges électriques dans les gaz basse pression allait révéler, tout au long de la deuxième moitié du XIX^e siècle, l'essentiel des lois microscopiques régissant la structure de la matière, tout en permettant l'accumulation d'une phénoménologie extrêmement riche décrite par Hittorf, Geissler, Plücker, Crookes, Goldstein et bien d'autres. En effet, que ce soit la découverte de l'électron par J.J. Thomson en 1890, des rayons X par Röntgen en 1895, du rayonnement ultraviolet par Wiedemann la même année ou des séries spectrales de l'hydrogène à l'origine du modèle de Bohr, la physique, dite moderne, est principalement issue de l'effort d'interprétation du comportement et du rayonnement des décharges électriques dans les gaz basse pression.

En 1858, Plücker démontre expérimentalement la déflexion des rayons cathodiques par un champ magnétique ; ces études sont poursuivies en 1869 par Hittorf qui établit une classification systématique des décharges lumineuses. Dès 1871, Varley postule la nature particulière de ces rayons cathodiques. L'émission thermoionique est découverte par Edison en 1883 et, en 1886, Goldstein identifie la composante ionique des décharges ; enfin, en 1887, Hertz découvre l'effet photoélectrique. L'accumulation de données expérimentales sur les mécanismes d'émission électronique des surfaces métalliques et de production ionique dans les gaz basse pression génère

un intense débat sur la nature de ces particules et l'interprétation de leur comportement. En 1891, Stoney introduit le terme électron et progressivement les théories électroniques de Lorentz (1895) et J.J. Thomson (1897) s'imposent comme le cadre cohérent et opérationnel d'interprétation des propriétés des gaz ionisés dans les décharges électriques. La structure électronique de l'ensemble des phases de la matière est ensuite élucidée, d'abord dans le cadre du modèle de Bohr-Sommerfeld, puis de la mécanique quantique, permettant, à partir de 1927, non seulement l'interprétation des données accumulées à la fin du XIX^e et au début du XX^e siècle, mais aussi, l'élaboration d'un ensemble de prédictions sur les phases diluées et condensées, qui se verront confirmées durant la deuxième moitié du XX^e siècle.

Mais, il serait faux de croire que la physique des plasmas est issue de la seule tradition expérimentale de physique des décharges électriques dans les gaz. En effet, bien que Langmuir, dans le cadre d'études de physique des décharges, ait, en 1923, proposé pour la première fois le mot *plasma* pour désigner l'état ionisé de la matière, le développement historique de la physique des plasmas doit aussi beaucoup à l'astrophysique et à la physique spatiale ; en particulier, aux travaux de Alfvén au milieu du XX^e siècle et aux études sur l'environnement terrestre à haute altitude. En 1901, Marconi réussit la première expérience de télécommunication hertzienne transatlantique. L'interprétation de ce succès stimula les études sur les propriétés de la haute atmosphère, en particulier, sur leur propriété de réflexion des ondes électromagnétiques basse fréquence. Dès les années vingt, ces études amènent Heaviside et Kennelly à postuler l'existence d'une couche de gaz ionisé au delà de la stratosphère, puis les travaux de Appleton et Hartree confirment et précisent l'existence de cette couche : l'ionosphère. La magnétosphère sera ensuite étudiée à l'aide de satellites à la fin des années cinquante et la phase plasma est considérée comme le constituant essentiel de l'univers dès la deuxième moitié du XX^e siècle.

Enfin, l'identification de l'origine thermonucléaire de l'énergie solaire, proposée par Hootermans et Atkinson, rapidement acceptée grâce aux progrès de la physique nucléaire, conduisit, dès la fin des années cinquante, à la mise en place de vastes programmes de recherches, nationaux et internationaux, sur la fusion thermonucléaire contrôlée par confinement magnétique ; les progrès constants des systèmes de chauffage et de confinement thermonucléaires dans les configurations magnétiques de type tokamak trouvent aujourd'hui leur concrétisation ultime dans le projet de réacteur expérimental international ITER.

1.1.3 Ordres de grandeur

Suivant en cela les autres branches de la physique, les physiciens des plasmas n'utilisent pas le système international d'unités et ont développé un système d'unités plus adapté aux ordres de grandeur rencontrés dans les plasmas ; ainsi, l'unité d'énergie n'est pas le joule mais l'électron-volt : $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$. Deux constantes fondamentales s'expriment partiellement en joules : la constante de Boltzmann k ,

possédant la dimension d'une entropie, et la constante de Planck h , possédant la dimension d'une action,

$$\text{Entropie : } k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}, \quad \text{Action : } h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

l'électron-volt peut donc être converti en un temps ou en une température. Enfin, la vitesse de la lumière : $c = 2,99 \times 10^8 \text{ m/s}$, permet de convertir ce temps associé à l'électron volt en une longueur. La table de conversion de l'électron-volt, permettant de converser avec les autres disciplines, s'établit donc comme suit :

- Le thermodynamicien préfère exprimer une énergie à travers une température, la conversion s'effectue à l'aide de la constante de Boltzmann ; l'équivalent en température de l'électron-volt est donné par : $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} / k = 11\,604 \text{ K}$.
- L'opticien, quant à lui, quantifie les énergies en termes de longueur d'onde, la conversion s'établit à l'aide de la constante de Planck et de la vitesse de la lumière, le résultat est alors donné par l'équivalence : $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} / hc = 12\,398 \text{ \AA}^{-1}$.
- Le chimiste préfère raisonner sur l'énergie associée à une mole de matière, $N_A = 6,02 \times 10^{23}$ particules (Définition 2.19), et utilise plus volontiers les calories ; l'équivalent en calories par mole de l'électron-volt est alors donné par : $1 \text{ eV} = N_A \times 1,6 \times 10^{-19} / 4,18 = 23 \text{ kcal/mol}$.
- Enfin, le radio-électricien, plus accoutumé aux fréquences, travaille sur une telle échelle, la correspondance entre l'échelle d'énergie et l'échelle de fréquences étant donnée par l'équivalence : $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} / h = 242 \text{ THz}$.

La table de conversion de l'électron-volt s'établit donc suivant le tableau 1.5 :

Tableau 1.5

K	\AA^{-1}	kcal/mol	THz
11604	12398	23	242

Tout procédé de production de plasma nécessite un apport conséquent d'énergie pour induire une ionisation significative. La matière froide, liquide, solide, ou gazeuse, portée à haute température subit d'abord un processus de vaporisation (pour les phases denses), puis de dissociation (pour les vapeurs moléculaires) et finalement d'ionisation, conduisant ainsi à la création de populations d'ions et d'électrons libres. Le tableau (1.6) présente les valeurs des énergies minimum de dissociation et d'ionisation pour quelques gaz diatomiques usuels.

Sur la base de cet ordering entre dissociation et ionisation, une production significative de particules chargées par élévation de température, précédée par une dissociation, peut être envisagée à partir de quelques dizaines de milliers de Kelvin.

Les valeurs des énergies d'ionisation, pour quelques éléments des trois premières lignes de la classification périodique, sont rappelée dans le tableau (1.7).

Tableau 1.6

Molécule	Dissociation [eV]	Ionisation [eV]
CO	11, 1	14, 0
H ₂	4, 47	15, 4
O ₂	5, 11	12, 0

L'augmentation du potentiel de première ionisation lorsque l'on suit une ligne de la classification périodique de la gauche vers la droite, des alcalins, alcalino-terreux vers les halogènes et gaz rares, s'explique aisément sur la base des règles de construction et de stabilité des couches atomiques. En effet, un alcalin perdant un électron retrouve une configuration à 8 électrons de valence (2 pour Li), de même, un gaz rare perdant un électron ne possède plus que 7 électrons de valence.

Tableau 1.7

Élément	Z	E_I [eV]
Li	3	5,392
Be	4	9,322
F	9	17,422
Ne	10	21,564

Élément	Z	E_I [eV]
Na	11	5,139
Mg	12	7,646
Cl	17	12,967
Ar	18	15,759

L'élévation de température n'est pas le seul procédé permettant d'obtenir un gaz ionisé. La création d'un plasma peut être envisagée à partir de tout procédé couplant, efficacement et rapidement, de l'énergie, en quantité suffisante pour induire une ionisation significative au sein d'une population atomique ou moléculaire neutre. De nombreux autres procédés, tels que

- l'ionisation par impact d'électrons énergétiques,
- l'absorption de photons énergétiques,

sont aussi couramment mis en oeuvre pour la production de plasma. Comme tout problème de physique, le problème de l'ionisation doit être abordé sous deux aspects : un aspect énergétique et un aspect entropique, c'est-à-dire statistique. Ce deuxième aspect est, entre autre, décrit par le degré d'ionisation, α , défini comme le rapport de la densité électronique n_e sur la densité totale d'électrons et d'espèces (neutres) non ionisées n_n .

$$\alpha \equiv \frac{n_e}{n_e + n_n} = \frac{Zn_i}{Zn_i + n_n}$$

Ce paramètre permet de distinguer :

- les plasmas faiblement ionisés, $\alpha < 1$, par exemple les plasmas industriels et l'ionosphère,
- des plasmas fortement ionisés, $\alpha \approx 1$, par exemple les plasmas thermonucléaires et les plasmas stellaires.

Partant de la définition élémentaire d'un plasma comme un ensemble de charges positives et négatives en interactions coulombiennes mutuelles, une intuition physique primaire pourrait nous amener à conclure que la dynamique d'un tel ensemble doit être un simple collapse coulombien : la recombinaison des électrons avec les ions donnant un fluide neutre. Une telle image est totalement fautive et ne prend pas en compte deux éléments essentiels, contradictoires en apparence mais complémentaires en dernière analyse :

- une tendance au désordre due à l'agitation thermique,
- une tendance à l'organisation due à l'aspect dynamique et collectif de l'interaction coulombienne.

Nous verrons que l'agitation thermique et surtout la faible réactivité due à des contraintes cinématiques, expliquent la lenteur des recombinaisons ; le transport des espèces aux parois, pour les plasmas de laboratoire, ou le rayonnement, pour les plasmas astrophysiques, possèdent des échelles de temps beaucoup plus rapides ; la recombinaison dans de telles conditions n'est donc pas dominante. Le compromis entre une tendance au désordre, due à l'agitation thermique, et une tendance à l'organisation, due à l'aspect collectif de l'interaction coulombienne, peut être quantifié par un paramètre sans dimension, le *paramètre plasma* ou paramètre de couplage Ξ . Considérons un plasma de densité électronique n et de température électronique T . L'ordre de grandeur de la densité volumique d'énergie cinétique moyenne, $\langle E_c \rangle$, est donné par : $\langle E_c \rangle \approx 3nkT/2$. Ce premier nombre est une mesure de l'agitation thermique et du contenu en énergie incohérente. L'ordre de grandeur de la densité volumique d'énergie potentielle électrostatique, $\langle E_p \rangle$, a pour valeur $|\langle E_p \rangle| \approx ne^2/4\pi\epsilon_0 n^{-\frac{1}{3}} = n^{\frac{4}{3}}e^2/4\pi\epsilon_0$. Ce deuxième nombre est une mesure de l'énergie d'interaction coulombienne disponible dans le milieu pour organiser des structures ordonnées tel qu'un cristal ionique. Le rapport de ces deux nombres définit le paramètre de couplage Ξ ou paramètre plasma.

$$\Xi \equiv \frac{|\langle E_p \rangle|}{\langle E_c \rangle} \approx 10^{-5} \left[\frac{n}{10^{12} \text{cm}^{-3}} \right]^{\frac{1}{3}} \left[\frac{T}{10^6 \text{K}} \right]^{-1}$$

Ce paramètre permet de distinguer :

- les plasmas faiblement couplés, *cinétiques* ou *idéaux*, $\Xi \ll 1$, où le désordre domine,
- des plasmas fortement couplés ou *fortement corrélés*, $\Xi \geq 1$, dont la structure est de nature fluide voir cristalline, c'est-à-dire plus ou moins ordonnée.

L'essentiel des méthodes et résultats présentés dans cet ouvrage sont relatifs aux plasmas dits faiblement couplés, idéaux ou cinétiques, tels que $\Xi < 1$. La majorité des plasmas naturels, industriels et de laboratoire entre dans cette catégorie et vérifie le critère d'idéalité $\Xi < 1$ comme le montrent clairement les figures 1.1 et 1.2. La physique des plasmas dits fortement corrélés ($\Xi > 1$) relève de la physique des milieux condensés et est beaucoup moins riche en terme d'instabilités, de chaos et de turbulence, elle ne sera pas abordée dans ce cours et l'usage est d'entendre par physique des plasmas la physique des plasmas idéaux. Pour les plasmas idéaux, le fait que l'essentiel de l'énergie soit sous forme cinétique pourrait nous amener à conclure que la physique des plasmas n'est qu'une branche de la physique des gaz où le potentiel interparticulaire est coulombien. Ce n'est pas le cas, car, malgré l'agitation thermique, lorsque $\Xi < 1$, l'interaction coulombienne développe une tendance à l'auto-organisation à travers les phénomènes collectifs d'écrantage électromagnétique, d'onde, d'instabilité, de turbulence et de cinétique hors équilibre thermodynamique. La dynamique d'un plasma définit ainsi une discipline originale qui a été amenée à développer ses propres méthodes d'études.

Un système dynamique évolue souvent de manière à minimiser l'amplitude des forces qui l'entraînent (les exceptions à cette règle phénoménologique étant les instabilités). Compte tenu du très grand nombre de degrés de liberté d'un plasma, celui-ci pourra souvent se réarranger pour annuler la densité volumique de forces de Coulomb où la densité volumique de forces de Laplace. Le moyen le plus simple et le plus efficace pour annuler cette densité volumique de forces de Coulomb est simplement un réarrangement de charges tel que : $n_e = Zn_i$ où n_e est la densité électronique, n_i la densité ionique et Z l'état d'ionisation. Bien entendu, si la densité volumique de charges était identiquement nulle, sur toutes les échelles de longueur et sur toutes les échelles de temps, toutes les interactions électriques disparaîtraient et la physique des plasmas serait sans objet. Il faut donc considérer l'hypothèse de quasi-neutralité comme l'ordre le plus bas d'un développement asymptotique par rapport au petit paramètre ε :

$$\varepsilon \equiv \frac{n_e - Zn_i}{n_e + Zn_i}$$

Ce paramètre permet de distinguer :

- les plasmas quasi-neutres, $\varepsilon \ll 1$, où les phénomènes d'écrantage dominent l'interaction champ-plasma à basse fréquence,
- des plasmas non-neutres, $\varepsilon \leq 1$, tels que les faisceaux et les gaines, où le champ de charge d'espace contrôle la dynamique du milieu.

L'hypothèse de quasi-neutralité constitue l'un des concepts fondamentaux de la physique des plasmas et sera analysée dans le chapitre trois. Ce terme apparaît de manière récurrente dans l'argumentation physique qui précède la construction de nombreux modèles. Cette tendance des plasmas vers la quasi-neutralité va de pair avec une propension à l'écrantage électrique et magnétique. Cette universalité de

comportement est conforme au fait qu'un système de charges libres possède un caractère diélectrique : sous l'effet d'un champ électrique un tel système a tendance à organiser spatialement les charges afin de créer un champ opposé au champ appliqué (« *les effets s'opposent aux causes qui leur donnent naissance* »). Pour un métal, ce caractère diélectrique est même parfait puisque, dans le cadre d'un modèle de plasma froid non magnétisé, il est possible d'atteindre un équilibre correspondant à une polarisation où le champ appliqué et le champ dû à la séparation induite des charges s'annulent. Pour un plasma magnétisé, cette tendance à la minimisation des champs électriques sera aussi observée dans le cas de la magnétohydrodynamique, et se traduira par la nullité du champ électrique dans le repère au repos du plasma ; cette hypothèse, dite de la magnétohydrodynamique idéale, constitue l'un des modèles centraux de la magnétohydrodynamique et sera analysée dans le chapitre sept.

1.2 TECHNOLOGIE DES PLASMAS

Bien que la physique des plasmas soit un outil essentiel pour étudier les structures et les processus astrophysiques, son domaine d'application ne se restreint pas à la seule physique fondamentale ; depuis plusieurs dizaines d'années, la technologie des plasmas est devenue indispensable dans de nombreuses industries et la physique des plasmas constitue une branche extrêmement active et innovante de la physique appliquée.

Les activités industrielles peuvent être classifiées suivant différents schémas ; du point de vue de la physique appliquée, il est intéressant de considérer trois grands types d'activités et de distinguer respectivement :

- le traitement de l'information,
- le traitement de l'énergie,
- le traitement des matériaux.

Les technologies des plasmas sont au cœur des techniques de pointe mises en œuvre dans ces trois secteurs ; quelques exemples permettent de mesurer l'impact et le potentiel des procédés plasmas dans ces trois domaines.

Les technologies modernes de traitement de l'information utilisent des composants électroniques miniaturisés tels que les microprocesseurs et les mémoires. Ces composants ne peuvent être fabriqués que dans des réacteurs à plasma car la gravure de millions de motifs, possédant des détails de dimensions inférieures au millième de millimètre, est impossible avec les procédés mécaniques ou chimiques usuels ; mais elle devient possible avec les flux d'ions énergétiques issus de la zone périphérique des décharges électriques radiofréquence. Les *réacteurs plasmas radiofréquence*, conçus pour maîtriser et optimiser ces flux d'ions, permettent ainsi les opérations

de gravure et de dépôt sur les substrats de silicium et sont les outils essentiels des chaînes de fabrication des industries microélectronique.

Dans les sociétés industrielles modernes, entre un et quelques gigawatts de puissance électrique sont globalement nécessaires par million d'habitants ; ainsi, la consommation d'énergie annuelle mondiale atteint désormais un niveau de l'ordre de 10^{20} joules et le développement de l'humanité s'accompagne d'une demande énergétique toujours croissante ; elle excède depuis longtemps la satisfaction des besoins énergétiques primaires, c'est-à-dire une consommation minimale d'environ 3 GJ/homme/an qui correspond à une ration journalière de 2 400 kcal. En un siècle, la consommation est passée d'une moyenne de 20 GJ/homme/an en 1890 à 60 GJ/homme/an en 1990 avec de fortes disparités : 160 GJ/homme/an pour la France, 240 GJ/homme/an pour les États-Unis. D'ici un demi-siècle, on estime que la consommation globale va doubler ou quadrupler ; (i) une estimation basse : 8 milliards d'habitants sur Terre en 2050 et une consommation de 64 GJ/homme/an, conduisent à 16 GTep (1 Tep est égale à 42 GJ) ; (ii) une estimation haute, pour un scénario de croissances économique et démographique fortes : une population mondiale de 10 milliards d'habitants et une consommation de l'ordre de 147 GJ/homme/an conduisent à 35 GTep. Ainsi, quelque soit le scénario, la demande actuelle sera multipliée par un facteur deux à quatre. Les réserves estimées des principaux combustibles fossiles, pétrole, gaz et charbon, largement exploitées actuellement, sont limitées ; les réserves prouvées actuelles sont de : (i) 160 GTep pour le pétrole, (ii) 145 GTep pour le gaz et (iii) 530 GTep pour le charbon. Ces estimations sont approximatives et font l'objet de nombreux débats d'experts compte tenu de la difficulté à évaluer le potentiel de découverte de nouveaux gisements. L'impact sur l'environnement de l'utilisation de ces combustibles fossiles ne peut plus être négligé, l'émission de gaz à effet de serre conduit à des effets sur le climat que l'on commence à observer et évaluer ; en particulier, la concentration de CO_2 a augmenté de 30% depuis un siècle, et pourrait doubler d'ici la fin du siècle.

Compte tenu de la croissance de la demande et des contraintes écologiques, la fusion de noyaux légers de deutérium et tritium, suivant la réaction :



dans des réacteurs à fusion thermonucléaire contrôlée, est la seule option, à long terme, validant physiquement les schémas de développement envisagés pour les sociétés post-industrielles.

Un système thermonucléaire ne produit pas de dioxyde de carbone, génère des déchets radioactifs de faible activité et ne présente aucun risque d'emballlement. Le deutérium (D) se trouve en quantité inépuisable dans l'eau et le tritium (T) peut être produit dans la couverture du réacteur en utilisant le flux neutronique de la réaction de combustion $\text{D} + \text{T} \rightarrow \alpha + \text{n}$ suivant les schémas : $\text{n} + {}^6\text{Li} \rightarrow \alpha + \text{T} (+4,8 \text{ MeV})$ et $\text{n} + {}^7\text{Li} \rightarrow \alpha + \text{T} + \text{n} (-2,5 \text{ MeV})$. Le lithium (Li) se trouve aussi en quantité abondante

dans la croûte terrestre. Compte tenu des pertes radiatives, la réaction $D + T \rightarrow \alpha + n$ ne peut s'auto-entretenir en régime de combustion exothermique qu'à partir d'une température de l'ordre de 4 keV ; à de telles températures la matière est totalement ionisée et la problématique de la production d'énergie par fusion nucléaire se réduit donc aux problèmes complexes du chauffage et du confinement des plasmas. La solution de ces problèmes, jusqu'à présent non résolus, implique la compréhension et la maîtrise des instabilités et de la turbulence dans les plasmas thermonucléaires, qui constituent les objectifs majeurs des programmes de recherches en physique des plasmas thermonucléaires.

La production d'oxyde d'azote, d'acétylène et de carbure de calcium, par synthèse en phase plasma, dès le début du XX^e siècle, constitue les premières applications industrielles des plasmas dans le domaine de la synthèse et du traitement des matériaux. Les propriétés de hautes températures ($> 10^4\text{K}$) des plasmas d'arc de puissance sont utilisées en sidérurgie pour améliorer ou remplacer les procédés conventionnels des hauts fourneaux. Ces mêmes décharges plasma en régime d'arc, mais à plus faible puissance, constituent les éléments actifs des systèmes de découpe et de soudure dans les ateliers de mécanique en amont des industries nucléaire, aéronautique et spatiale. Les plasmas permettent aussi la production de film de diamant ou de couches minces de silicium ; enfin la phase plasma offre une voie unique pour la synthèse de matériaux ultra-durs n'existant pas à l'état naturel tel que le nitrure de carbone.

Au début de ce chapitre d'introduction et de présentation, nous avons considéré les plasmas comme la phase haute température de la matière. Cependant, la production de plasmas, dans les laboratoires et les ateliers, ne fait jamais appel à un procédé de chauffage classique par combustion ; en effet, les températures associées à la combustion chimique sont limitées à quelques milliers de kelvins et une ionisation significative requiert quelques dizaines de milliers de kelvins. Les champs électriques, qu'ils soient continus, basse fréquence, radiofréquence, micro-onde ou optiques, sont les principales sources d'énergie qui permettent la production de plasmas dans les dispositifs expérimentaux, thermonucléaires et industriels.

Considérons, par exemple, le cas des champs quasi-statiques, l'interaction des électrons avec ces champs résulte en une accélération ; les processus d'ionisation par impact électronique sont alors efficaces et permettent la production de la phase plasma ; compte tenu des pertes par excitation l'énergie moyenne nécessaire pour créer une paire électron-ion par impact électronique sur un atome, W_f , est supérieure à l'énergie d'ionisation, E_I . Pour un faisceau d'électrons interagissant avec un gaz W_f est de l'ordre du double de l'énergie de seuil E_I comme le montrent les valeurs du tableau (1.8).

Un électron thermique accéléré par un champ électrique perdra une fraction significative de son énergie dans des processus d'excitations atomiques et moléculaires, cette perte d'énergie rend le processus d'accélération statistique. Ainsi, l'énergie minimum pour créer une paire électron-ion dans une décharge électrique, W_s , est

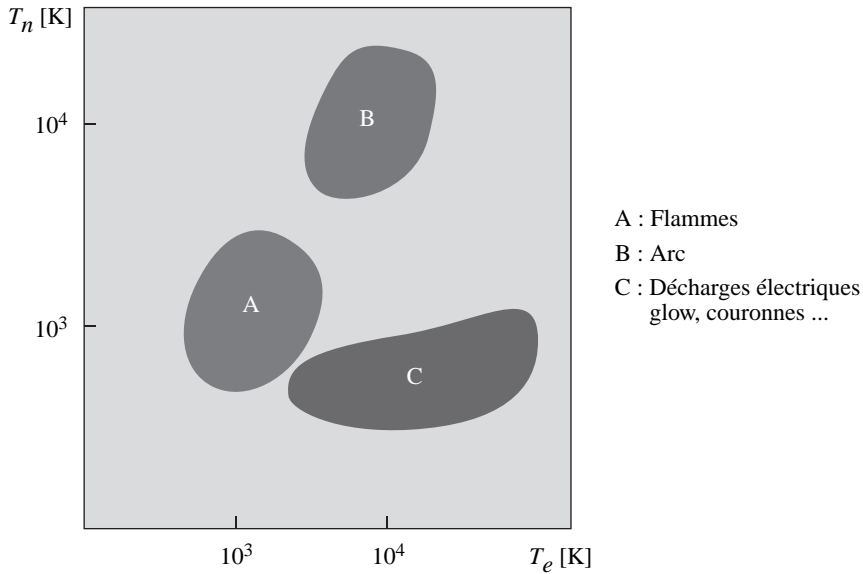


Figure 1.3 Régimes d'interaction dans les décharges électriques.

supérieure à l'énergie nécessaire pour ce processus lorsque l'on considère un faisceau, W_f ; W_s est de l'ordre du triple de l'énergie de seuil E_I comme le montrent les valeurs du tableau (1.8).

Tableau 1.8

Élément	E_I [eV]	W_f [eV]	W_s [eV]
Ar	15,8	26,4	45
Xe	12,1	22,0	38

Les décharges électriques continues, qui seront étudiées plus en détail dans le chapitre six, ont trouvées de nombreuses applications ; que ce soit les étincelles dans les systèmes d'allumage, les arcs dans les industries sidérurgiques, les décharges lumineuses (*glow*) dans les systèmes d'éclairage ou les décharges dites couronnes (*corona*) dans les systèmes de dépollution. Les propriétés électriques, thermiques, optiques et chimiques uniques de ces structures non-linéaires ont permis la mise au point de dispositifs fiables remplaçant avantageusement les flammes.

Deux types de décharges sont possibles selon les conditions de pression et la géométrie,

- les décharges thermiques, principalement l'arc, où le gaz neutre est à la même température que le plasma,
- les décharges non-thermiques où la température électronique est beaucoup plus élevée que la température des espèces lourdes, ions et neutres.

La figure 1.3 présente la température électronique comparée à la température du gaz pour ces différentes décharges générées par des champs électriques continus.

Les champs électriques radiofréquence, micro-onde et laser permettent aussi de produire des plasmas. En particulier, les décharges radiofréquences, capacitatives et inductives, à 13, 56 MHz (et ses harmoniques), sont largement utilisées dans les industries microélectroniques.

L'interaction de pulses électromagnétiques intenses, générés par des laser de puissance, avec des cibles solides ou gazeuses, engendre aussi des plasmas non stationnaires, dont la richesse de comportement est un sujet actif de recherches ; la figure 1.4 résume les différents régimes d'interaction laser-matière en fonction du flux de puissance et de la durée du pulse, l'interaction laser-plasma est dominante à haute énergie.

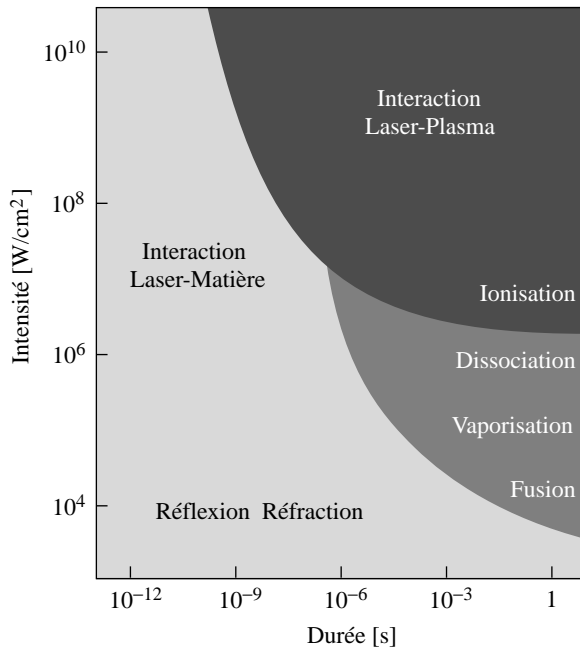


Figure 1.4 Régimes d'interaction laser-matière et production de plasma.

Une description exhaustive des applications industrielles des plasmas dans les domaines du traitement de l'information, du traitement de l'énergie et du traitement des matériaux nécessiterait une monographie entièrement dédiée à ce sujet ; dans cette fin de chapitre d'introduction nous renoncerons donc à un tel programme et nous présenterons et discuterons quelques réalisations telles que les réacteurs pour la microélectronique, les tokamaks et les propulseurs.

1.2.1 Réacteurs

Les réacteurs (à) plasma, parfois appelés générateurs (de) plasma ou sources plasma, sont des dispositifs permettant la production de plasma afin d'utiliser :

- la population électronique pour amorcer et entretenir une réactivité chimique en volume, généralement dans des conditions de non-équilibre thermodynamique,
- le flux d'ions en périphérie du plasma, dans la zone dite de gaines, afin de traiter des matériaux.

Si l'on excepte les décharges d'arc, la température électronique est en général de quelques eV et la température ionique beaucoup plus faible, mais, comme nous le verrons dans le chapitre six, dans la zone dite de pré-gaine et dans la zone de gaine, les électrons transfèrent, en régime non-linéaire, une fraction significative de leur énergie aux ions qui acquièrent ainsi une énergie suffisante pour induire des phénomènes de dépôt de couches minces, de gravure micrométrique (à travers un masque approprié) ou d'implantation ionique.

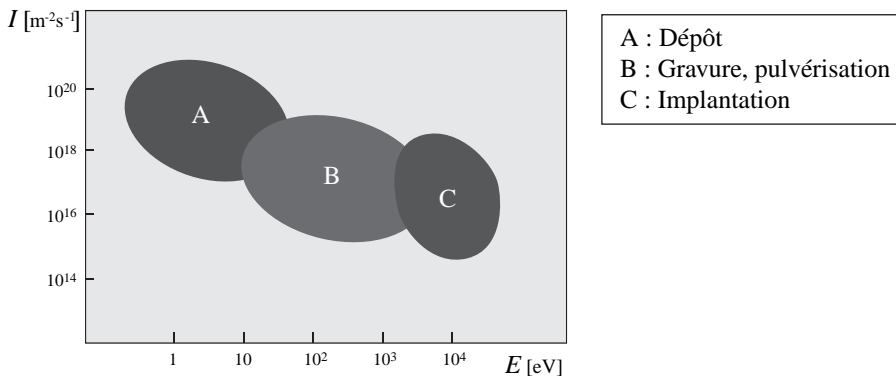


Figure 1.5 Principales applications des populations ioniques énergétiques.

Ces trois opérations ne résultent pas simplement de l'action mécanique du flux d'ions énergétiques sur le substrat, mais, de toute une physico-chimie, hors-équilibre thermodynamique, en volume et surface, qui constitue un sujet extrêmement actif de recherches compte tenu des enjeux industriels ; en effet, ces trois processus, dépôt, gravure et implantation, sont les opérations de base qui ont permis la mise au point des procédés de fabrication dans le domaine des nano-technologies. Un quatrième processus ionique, la pulvérisation ou *sputtering*, complète cette phénoménologie ionique. En 1852 Grove découvrit le phénomène de dépôt de couche mince par pulvérisation dans les décharges basse pression ; W. Thomson appela ce phénomène *spluttering* par analogie avec le phénomène de génération de gouttelette lors de l'impact d'une goutte sur un liquide, mais le mot *sputtering* fut imprimé à la suite d'une erreur typographique et fut adopté par la communauté scientifique.

La figure 1.5 présente des conditions typiques d'intensité ionique, I , et d'énergie ionique, E , pour ces quatre processus : dépôt, gravure, pulvérisation et implantation. La pulvérisation ou *sputtering*, permet de générer des vapeurs métalliques à basse température autorisant ainsi le dépôt de films minces sur des substrats fragiles. Pour ce dernier processus une vision mécanique plus physique que chimique est appropriée : le flux d'ion détruit progressivement la surface métallique par transfert d'énergie cinétique vers le réseau en surface.

Les populations électroniques énergétiques des plasmas possèdent aussi un vaste potentiel d'applications industrielles ; la figure 1.6 en présente quelques-unes en fonction de la puissance et de l'énergie ; à haute énergie les faisceaux issus des accélérateurs prennent le relais des sources (à) plasma usuelles.

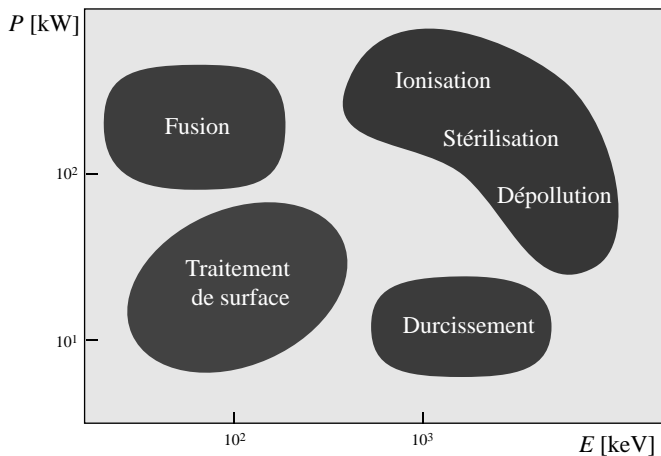


Figure 1.6 Principales applications des populations électroniques énergétiques.

Lorsque l'on aborde le sujet des réacteurs plasma, plusieurs classifications peuvent être établies ; il est, par exemple, possible de distinguer :

- les réacteurs basse pression, fonctionnant en dessous de la pression atmosphérique, entre quelque millitorr et quelque centaines de millitorr,
- des réacteurs haute pression, fonctionnant au voisinage de quelque dizaines de torr jusqu'à la pression atmosphérique (760 torr).

La fréquence du champ électromagnétique d'excitation peut aussi permettre de construire une classification des réacteurs, on distinguera alors :

- les décharges continues,
- des réacteurs radiofréquence (RF) et
- des réacteurs micro-onde fonctionnant à quelques gigahertz.

La nature de la structure de couplage de l'énergie constitue, enfin, un autre élément d'élaboration d'une classification, par exemple, pour les réacteurs RF, qui sont les plus courants dans les chaînes de fabrication des industries microélectroniques :

- les structures de couplage capacitives constituées de deux plaques polarisées permettent de générer des plasmas pour le dépôt et la gravure, viennent ensuite,
- les structures de couplage inductives permettent un transfert de puissance au plasma plus efficace et qui se substitue progressivement au réacteur capacitif dans de nombreuses applications ;
- enfin, les structures radiatives, de type antenne dans les réacteurs dits hélicon ou de type guide ouvert dans les réacteurs dits ECR, génèrent des modes propagatifs du plasma alors que les structures capacitives et inductives opèrent sur des modes évanescents.

Les réacteurs radiofréquence, malgré l'apparente simplicité de leur structure, sont des objets au comportement complexe qui présentent une grande diversité de régimes de fonctionnement et sont sujet à de nombreuses instabilités.

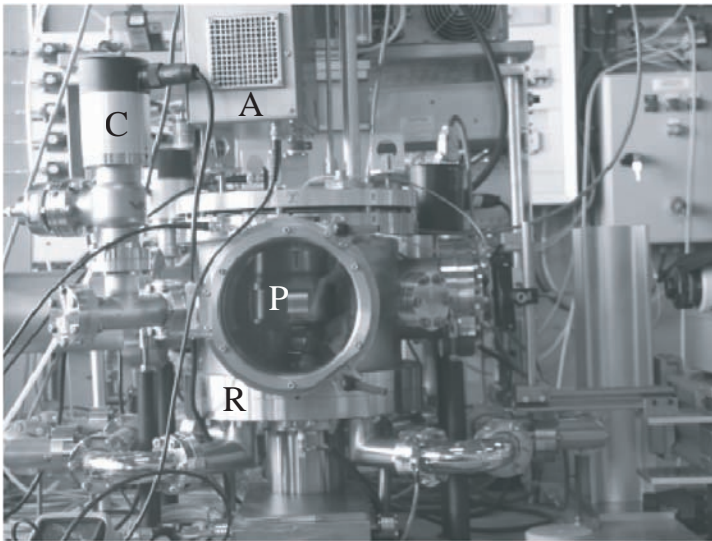


Figure 1.7 Réacteur radiofréquence capacitif du Laboratoire de Physique et Technologie des Plasmas de l'École Polytechnique.

La figure 1.7 présente la vue extérieure d'un réacteur capacitif en opération où un champ électromagnétique RF (13,56 MHz) entretient le plasma (P). Le système complet est composé de quatre éléments : le système de pompage et de contrôle des gaz neutres (C), le générateur RF et le système d'adaptation d'impédance (A), l'ensemble des diagnostics de la phase plasma et de la phase neutre et enfin la structure de couplage et la chambre à plasma (R). À basse pression, au voisinage de quelques

millitorrs, dans ces structures RF, les collisions sont insuffisantes pour expliquer l'absorption du champ électromagnétique par les électrons, un deuxième mécanisme de transfert d'énergie du champ vers la population électronique entre en jeu : le chauffage stochastique. Du point de vue du physicien, ce mécanisme est essentiellement un régime de couplage champ-particule en régime chaotique ; on voit donc que les réacteurs RF, comme beaucoup de systèmes de haute technologie, sont le lieu privilégié de rencontre entre la physique appliquée et la physique fondamentale.

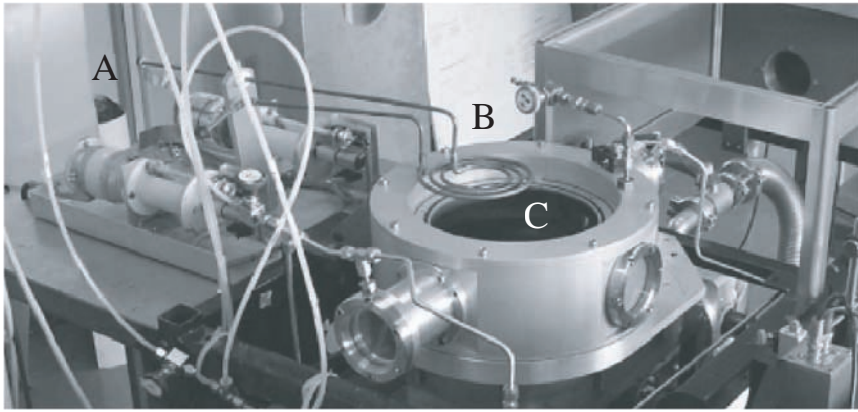


Figure 1.8 Réacteur radiofréquence inductif du Laboratoire de Physique et Technologie des Plasmas de l'École Polytechnique.

Le chauffage stochastique, les instabilités et les transitions entre régimes dans les réacteurs RF sont autant de sujets de recherches qui nécessitent la mise en oeuvre de l'ensemble des méthodes et outils théoriques et expérimentaux de la physique des plasmas. La physico-chimie des plasmas et plus particulièrement la compréhension et la maîtrise des cinétiques des espèces actives participant aux processus de dépôt et de gravure, constitue un deuxième sujet de recherches extrêmement actif, compte tenu de l'impact direct de ces études sur les procédés et opérations de fabrication des composants microélectroniques. La figure 1.8 présente un réacteur inductif ouvert, la chambre de confinement (C) du plasma est de même volume que dans le cas capacitif mais la structure de couplage (B) est ici de nature inductive et les problèmes de transfert de puissance nécessitent l'usage des techniques classiques d'adaptation d'impédance (A).

Avant de clore ce paragraphe d'introduction aux réacteurs, présentons les plus anciens réacteurs plasma industriels, les réacteurs de piégeage de poussières, dont les brevets datent du début du XX^e siècle. De nombreuses industries, telles que les cimenteries ou les centrales thermiques au charbon, rejettent des effluents gazeux très poussiéreux, les systèmes de filtrage classiques ne sont pas adaptés à la taille et aux flux de ces poussières et les procédés de dépoussiérage mis en place dans ces industries utilisent des réacteurs (à) plasma construits autour d'une décharge couronne.

La figure 1.9 présente le schéma de principe d'un tel réacteur de dépollution, le flux de gaz primaire arrive en haut du cylindre (G1) et le gaz dépollué (G2) est collecté en bas de ce même cylindre ; le cylindre constitue la chambre à plasma, une haute tension est maintenue entre la paroi intérieure du cylindre et un fil coaxial, cette tension génère un champ électrique radial (E) qui entretient une décharge électrique de type couronne.

Les ions de cette décharge chargent les poussières qui sont ainsi collectées en bas de la chambre cylindrique (C) par simple attraction électrostatique, à l'aide d'un système d'électrodes annexes.

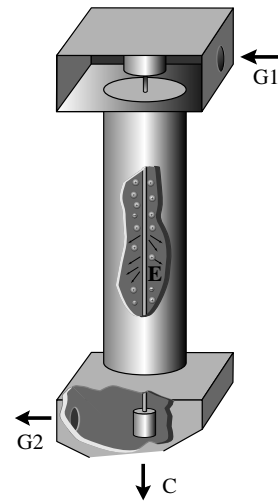


Figure 1.9 Schéma de principe d'un réacteur à décharge couronne pour la dépollution.

1.2.2 Tokamaks

Les réacteurs radiofréquence pour la gravure, le dépôt et l'implantation ionique génèrent des plasmas dont la fonction ultime relève du traitement des matériaux ; le traitement de l'énergie est aussi un vaste champ d'application des technologies plasma. En effet, que ce soit pour la production d'énergie dans les systèmes thermonucléaires tokamaks, ou pour la propulsion des systèmes spatiaux avancés, le potentiel des technologies plasmas permet d'envisager des modes de fonctionnement et des performances inaccessibles aux technologies de l'énergie actuelles.

La figure 1.10 résume les performances des systèmes énergétiques classiques et de quelques technologies plasma. Afin d'identifier la spécificité de ces technologies, considérons l'ensemble des milieux portés à haute température, ou à haute énergie, et représentons en abscisse l'énergie par nucléon E et en ordonnée le nombre de particules ainsi chauffées ou accélérées par unité de volume N .

- À haute énergie et basse densité les technologies classiques des accélérateurs permettent d'accélérer des faisceaux peu denses (A).
- À basse énergie et haute densité les technologies classiques des moteurs de fusées et des turbines permettent de chauffer et d'accélérer des flux de matière importants mais à des niveaux énergétiques modestes (M).
- Entre ces deux extrêmes, les technologies plasma (P) permettent de transférer une quantité significative d'énergie vers une quantité significative de matière.

Les plasmas offrent ainsi la possibilité de développer de nouvelles technologies inovantes, basées sur des principes physiques originaux, dont les performances sont supérieures aux moteurs et accélérateurs classiques. La zone W du diagramme est

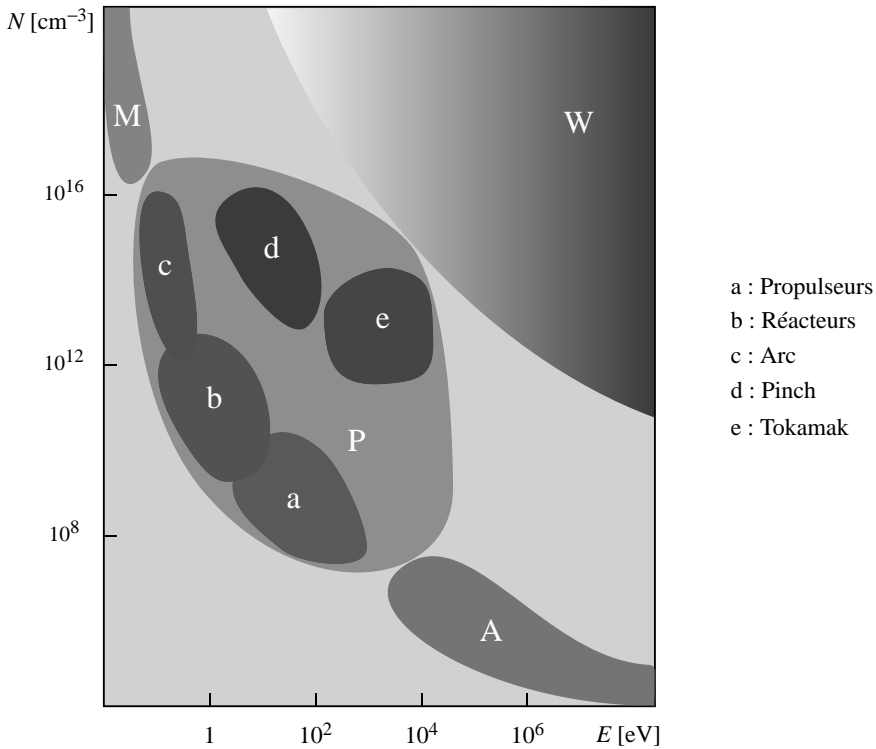


Figure 1.10 Énergétique des milieux dilués.

non physique et inaccessible, en effet un transfert important d'énergie vers une quantité importante de matière requiert, en régime stationnaire, des puissances impossibles à générer sur terre.

Ce positionnement original de la physique et de la technologie des plasmas, analysé sous l'angle de l'énergétique appliquée, se retrouve aussi du point de vue fondamental ; en effet, dans le tableau (1.9) nous avons rappelé l'*ordering* en énergie des excitations élémentaires dans un gaz moléculaire : la physico-chimie moléculaire s'intéresse aux excitations basse énergie (vibrations, rotations, électroniques) jusqu'à la dizaine d'eV et la physique nucléaire aux excitations et réactions des noyaux au niveau du MeV, les énergies typiques mises en jeu pour l'ionisation au sein des plasmas sont intermédiaires (a_0 et a_n sont les dimensions typiques de l'atome et du noyau).

Compte tenu des niveaux d'énergie stockés (des gigajoules), les tokamaks occupent une position originale dans les systèmes énergétiques avancés représentés sur la figure 1.10.

Les tokamaks sont des configurations magnétiques utilisées pour confiner et chauffer des plasmas en régime thermonucléaire ; en effet, la température d'amorçage et d'entretien d'une combustion thermonucléaire étant de l'ordre d'une centaine de millions

Tableau 1.9

Excitation/Réaction	Énergie	Ordre de grandeur [eV]
Nucléaires	$\frac{\hbar^2}{m_n a_n^2}$	$\sim 10^6$
Rotationnelles	$\frac{\hbar^2}{M a_0^2}$	$\sim 10^{-3}$
Vibrationnelles	$\frac{\hbar^2}{\sqrt{M m} a_0^2}$	$\sim 10^{-1}$
Électroniques	$\frac{\hbar^2}{m a_0^2}$	$\sim 1 - 10$
Ionisation	$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0}$	$\sim 10 - 10^2$

de kelvins, il n'existe aucun matériau pouvant supporter de telles températures. Il est donc nécessaire d'utiliser le principe du confinement magnétique qui sera étudié dans les chapitres cinq et dix. Le mouvement d'une particule chargée interagissant avec un champ magnétique statique est la combinaison d'une rotation autour des lignes de champ et d'une translation le long des lignes de champ ; ce comportement des systèmes de charges est à la base du principe du confinement magnétique : si les lignes de champ sont fermées ou restent dans un volume fini, comme c'est le cas dans la configuration tokamak, alors les particules restent confinées dans ce volume fini.

La réalité est plus complexe pour les configurations de type tokamak, car, en repliant des lignes de champ magnétique se créent nécessairement des inhomogénéités qui engendrent des dérives perpendiculaires aux lignes de champ (chapitre cinq et dix) ; il faut donc compenser ces dérives afin d'assurer un confinement orbital. Pour cela, un champ, dit poloïdal, généré par un courant (I) traversant l'anneau de plasma (quelques millions d'ampères dans un réacteur) est superposé au champ toroïdal (B) créé par le système de bobines distribuées autour du tore de plasma. Le résultat est donc une structure de champs complexes où les lignes de champ sont des hélices s'appuyant sur des tores emboîtés. La configuration tokamak, illustrée par la figure 1.11, offre ainsi un exemple de champs complexes où les différentes dérives sont compensées et le confinement orbital assuré. Afin de garantir la stabilité du tore de plasma des bobinages verticaux sont aussi nécessaires. Le confinement orbital est une condition nécessaire, mais ne constitue pas une condition suffisante pour assurer un bon confinement global du plasma ; en effet, le plasma génère des champs électrique et magnétique qui ont tendance à détruire le confinement. Ainsi, le tore de plasma d'une configuration tokamak doit être contrôlé en permanence, car il est l'objet de nombreuses instabilités et d'une intense activité turbulente résultant de couplages non-linéaires entre les champs et les particules.

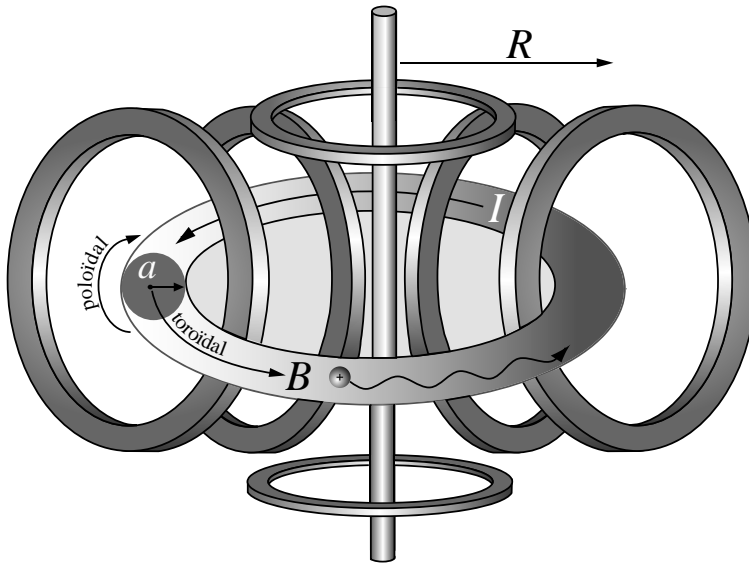


Figure 1.11 Configuration magnétique de type tokamak.

La figure 1.12 présente le tokamak du Laboratoire de Physique et Technologie des Plasmas, les bobines générant les champs toroïdal (B) et vertical sont visibles, ainsi que la chambre à plasma (T) et un ensemble de systèmes de contrôle (C), de chauffage (M) et de diagnostics qui complète ce dispositif expérimental. Dans le domaine de la physique des tokamaks il est d'usage de distinguer les grandes machines dont les performances s'approchent des performances d'un réacteur et dont les équipes regroupent plusieurs centaines de physiciens et ingénieurs, des petites machines telles que celle de la figure 1.12.

Les performances des grands tokamaks les placent loin devant tous les autres types de machines et de procédés qui ont été proposés jusqu'à présent pour amorcer et entretenir une combustion thermonucléaire ; ce succès fait des tokamaks un sujet de recherche particulièrement actif et de grands tokamaks, dédiés aux études de physique des plasmas thermonucléaires, ont été construits depuis plus de vingt ans : Tore Supra en France (TS, CEA Cadarache), JET en Angleterre (EURATOM), TFTR puis MSTX aux États-Unis (DoE Princeton) et JT60 au Japon. Enfin, le projet mondial ITER devrait permettre l'accès à la combustion thermonucléaire quasi-continu pour la prochaine décennie, ouvrant ainsi un vaste champ de recherches sur ce régime encore inexploré. Les principaux paramètres de ces grandes machines sont donnés dans le tableau (1.10) où les dimensions R et a sont définies sur la figure 1.11.

Les performances obtenues ces dernières années en termes de confinement, chauffage et contrôle des plasmas thermonucléaires dans ces grands tokamaks traduisent des avancées remarquables et l'extrapolation des lois d'échelles, issues des bases de données accumulées ces vingt dernières années, permet d'envisager avec confiance

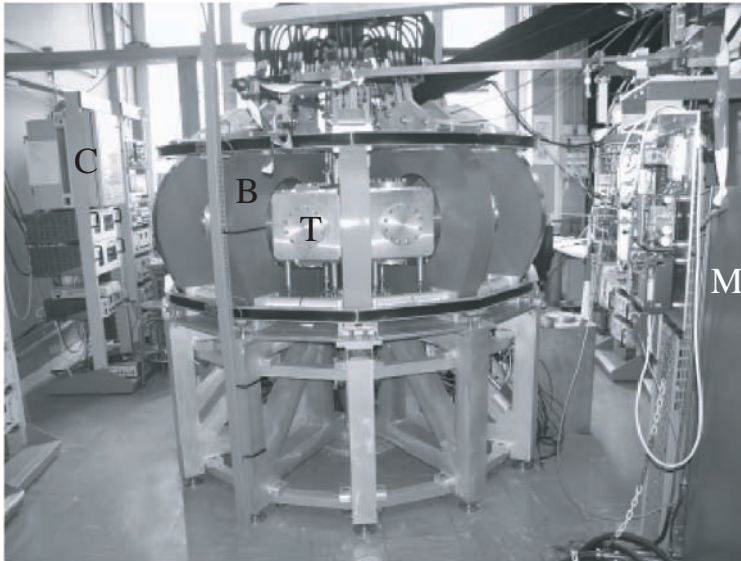


Figure 1.12 Le tokamak « TORIX » du Laboratoire de Physique et Technologie des Plasmas de l'École Polytechnique.

Tableau 1.10

Tokamak	R [m] / a [m]	B [T]	I [MA]
Alcator C	0,64/0,17	12	0,9
ASDEX U	1,65/0,5	3,9	1,0
DIID	1,67/0,67	2,1	0,8
JET	3,0/1,25	3,5	3,0
TS	2,37/0,8	4,5	2,0
TFTR	2,4/0,8	5,0	2,2
ITER	6,2/2,0	5,3	15,0

l'accès à l'ignition et l'entretien de la combustion thermonucléaire dans le réacteur ITER. Cependant, le programme tokamak se heurte actuellement à quatre grands problèmes qui constituent de solides verrous physiques et technologiques. Ces quatre questions-clés, scientifiques et techniques :

- la compréhension et le contrôle de l'interaction plasma-paroi,
- la compréhension et le contrôle de la turbulence,
- la génération et le contrôle du courant en régime continu,
- la maîtrise de la dynamique des populations suprathermiques en régime thermonucléaire,

conditionnent la mise au point d'un réacteur techniquement fiable et économiquement viable. En effet, dans un réacteur tokamak en régime de combustion continue :

- l'injection/extraction de puissance à la périphérie du plasma doit s'effectuer en respectant de sévères contraintes technologiques de tenue des matériaux aux flux intenses de rayonnements et particules,
- la turbulence et le transport doivent être diagnostiqués et contrôlés en temps réel et maintenus à un niveau compatible avec l'entretien de la combustion thermonucléaire,
- quelques dizaines de millions d'ampères doivent être entretenus en régime continu afin d'assurer le confinement orbital et l'accès à des profils de courants optimaux,
- la population de particules alpha d'origine thermonucléaire et les ions suprathermiques doivent être confinés, diagnostiqués et contrôlés afin d'assurer une combustion et un pilotage efficace.

La conception d'un réacteur thermonucléaire, techniquement fiable et économiquement viable, passe donc par l'étude approfondie des processus d'interaction plasma-paroi et des mécanismes de turbulence, ainsi que par l'identification de nouveaux procédés de diagnostic et de contrôle de la turbulence, du courant et des populations suprathermiques à l'origine de la réactivité thermonucléaire, c'est l'achèvement de ce vaste programme de physique, fondamentale et appliquée, qui constitue l'objectif des différentes grandes machines et du projet ITER.

1.2.3 Propulseurs

La propulsion des engins spatiaux est un autre secteur des hautes technologies où le potentiel des technologies plasma permet d'envisager la mise au point de systèmes originaux, présentant des performances supérieures aux systèmes existants. Les moteurs de fusées et les propulseurs pour le positionnement des satellites sont caractérisés par deux paramètres :

- la vitesse d'éjection des gaz ou des plasmas propulsifs,
- la poussée qui mesure la force développée par l'action propulsive des gaz ou des plasmas.

Ces deux paramètres sont également importants pour les raisons suivantes :

- pour quitter l'attraction de la terre une fusée doit développer une forte poussée, supérieure à son poids, et la vitesse d'éjection n'est pas critique,
- par contre, dans l'espace, loin de la terre, pour des missions d'exploration lointaines, la vitesse d'éjection doit être élevée pour minimiser la durée de la mission ; en effet, la loi de Tsiolkovski énonce que *la vitesse finale d'une fusée est proportionnelle à la vitesse d'éjection des gaz* ; la vitesse d'éjection contrôle donc la durée de la mission.

Les systèmes classiques chimiques, voire nucléaires ou électriques, où l'enthalpie est fournie à un gaz par des réactions nucléaires ou un chauffage électrique, développent de fortes poussées, mais, les performances, en terme de vitesse d'éjection, sont limitées par la vitesse du son ; le tableau (1.11) présente les paramètres typiques de poussées et de vitesses d'éjection de ces systèmes classiques.

Tableau 1.11

Système	Vitesse d'éjection [km/s]	Poussée [N]
Chimique solide	2 – 3	10^7
Chimique liquide	3 – 5	10^7
Nucléaire fission	5 – 9	10^6
Électrique thermique	1 – 10	10^1

Depuis plus de trente ans les physiciens des plasmas ont développé un certain nombre de propulseurs basés sur l'accélération des plasmas ; plusieurs types de force peuvent être utilisés :

- la force de Coulomb dans les propulseurs électrostatique et les SPT (Stationary Plasma Thruster),
- la force de Laplace dans les propulseurs magnétoplasmodynamique (MPD),
- la force diamagnétique d'une tuyère magnétique et le chauffage cyclotronique ionique (ICRH, ion cyclotron resonance heating) dans le système VASIMIR (Variable Specific Impulse Magnetoplasma Rocket) proposé par la NASA pour une mission habitée vers Mars.

Tableau 1.12

Propulseur	Vitesse d'éjection [km/s]	Poussée [mN]	Rendement [%]
Électrostatique	20 – 50	10^2	75
SPT	10 – 20	10^3	50
MPD	20 – 50	10^4	30
ICRH-VASIMIR	30 – 100	10^5	50

Le tableau (1.12) montre clairement que les performances de vitesse d'éjection sont un à deux ordres de grandeur supérieures à celles des propulseurs chimiques classiques, le rendement des propulseurs plasma est presque deux fois supérieur à celui de ces propulseurs chimiques, par contre, les développements actuels ont été limités aux applications nécessitant de faibles poussées.

La figure 1.13 présente la structure d'un SPT tel que ceux embarqués actuellement sur les satellites de télécommunications. Un système de deux cylindres coaxiaux, en nitrure de bore, constitue la chambre où le plasma est produit et accéléré. Un flux de

xénon alimente la base de ce système coaxial, ce flux de gaz interagit avec un anneau d'électrons piégés dans un champ magnétique radial (B), les impacts électroniques ionisent ce flux de xénon et les ions ainsi produits sont accélérés par un champ électrique axial (E). La fonction du champ magnétique radial est de ralentir les électrons afin qu'ils ne consomment pas l'essentiel de la chute de potentiel, comme c'est le cas dans les décharges classiques, et de les confiner afin d'entretenir le processus d'ionisation. Une cathode émissive, non représentée sur le schéma, permet de neutraliser le flux d'ions éjectés.

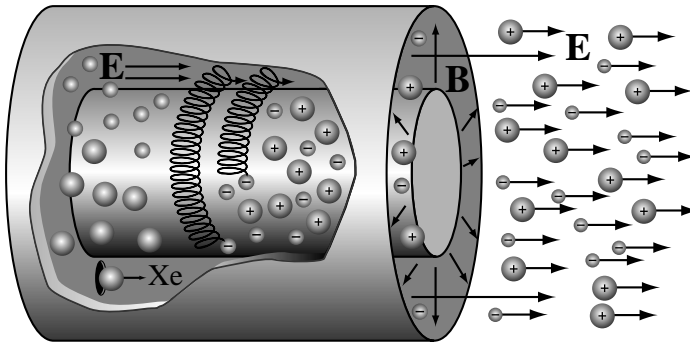


Figure 1.13 Schéma de principe et structures électrique et magnétique d'un propulseur SPT.

Malgré sa simplicité apparente, un tel système présente différents régimes de fonctionnement, plusieurs types d'instabilités et des propriétés de transport électronique probablement turbulentes ; ces propulseurs sont l'objet de vastes programmes de recherche en physique appliquée.

L'objectif de ce chapitre d'introduction est de donner un aperçu de l'importance et de l'impact de la physique des plasmas ; le niveau de développement actuel des technologies plasma ne permet pas d'embrasser l'ensemble des applications en quelques pages, le choix, nécessairement arbitraire, qui a été fait de présenter succinctement les réacteurs, les tokamaks et les propulseurs ne doit pas occulter l'importance et l'impact des autres dispositifs à plasma ; par exemple, les détecteurs de particules, que ce soit les compteurs Geiger, les chambres à fils ou les chambres à étincelles, sont construits sur le principe de l'amplification électronique dans des décharges plasma en régime non autonome ; la figure 1.14 présente le schéma de principe d'un compteur Geiger. Une particule énergétique (R) traversant le gaz d'une enceinte cylindrique crée quelques paires électrons-ions par dépôt d'énergie dans le gaz, les électrons sont accélérés par le champ électrique radial résultant de la différence de potentiel appliqué entre un fil central et le cylindre. Cette population d'électrons énergétiques génère des paires électron-ion secondaires par ionisation par impact électronique, ces électrons secondaires sont accélérés, etc.

La collecte des charges ainsi générées donne lieu à un pulse de tension ou à un pulse de courant $S(t)$ suivant la nature du circuit extérieur, ce pulse signale le passage

de la particule et est ensuite traité par un système d'acquisition et de traitement de données.

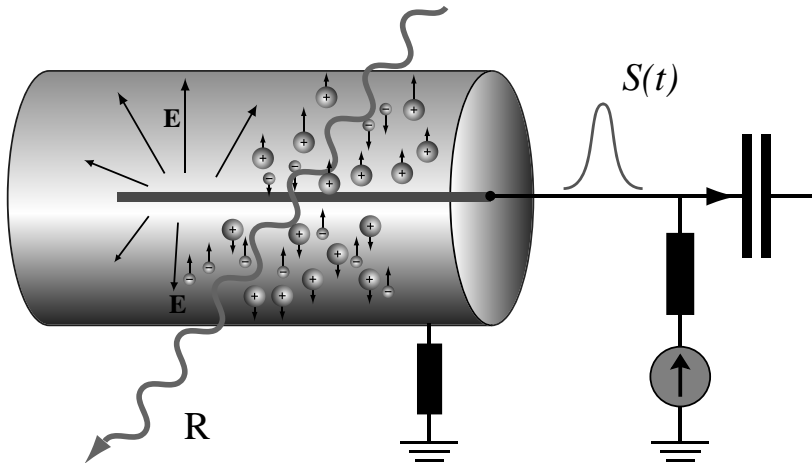


Figure 1.14 Principe de la détection par avalanche : tube Geiger.

BIBLIOGRAPHIE

Les manuels de physique des plasmas sont extrêmement nombreux et les sujets abordés dans les monographies divers et variés ; principalement aux États-Unis où la physique des plasmas constitue une discipline de référence particulièrement active. Face à un tel volume de publications un choix critique s'impose ; le développement historique de cette discipline et l'identification des différentes branches au stade actuel de son développement constituent un fil directeur pour déterminer et ordonner un choix d'ouvrages.

► Physique spatiale et astrophysique

- H. Alfvén et C.G. Fälthammar, *Cosmical Electrodynamics*, Oxford University Press, Oxford, UK, 1963.
- W. Baumjohann et R.A. Treumann, *Basic Space Plasma Physics*, Imperial College Press, London, UK, 1996.
- D.B. Melrose, *Plasma Astrophysics Non-thermal Processes in Diffuse Magnetized Plasmas*, Gordon and Breach, New-York, USA, 1980.
- G.K. Parks, *Physics of Space Plasmas An Introduction*, Addison-Wesley, USA, 1991.

► Traités généralistes de physique des plasmas

- T.J. Boyd et J.J. Sanderson, *Plasma Dynamics*, Nelson, UK, 1969.
- T.J. Boyd et J.J. Sanderson, *The Physics of Plasmas*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.
- S. Chandrasekhar, *Plasma Physics*, The University of Chicago Press, Chicago, USA, 1965.
- F. Chen, *Introduction to Plasma Physics*, Plenum Press, New York, USA, 1977.
- P.C. Clemmow et J.P. Dougherty, *Electrodynamics of Particles and Plasmas*, Addison-Wesley, USA, 1969.
- J.L. Delcroix, *Physique des Plasmas*, Tomes 1&2, Dunod, Paris, France, 1963.
- R.O. Dendy, *Plasma Dynamics*, Clarendon Press, Oxford, UK, 1990.
- A. von Engel, *Electric Plasmas : Their Nature and Uses*, Taylor & Francis Inc, New York, USA, 1983.
- V.E. Golant A.P. Zhilinsky et I.E. Sakharov, *Fundamentals of Plasma Physics*, John Wiley & Sons, New York, 1980.
- R.J. Goldston et P.H. Rutherford, *Introduction to Plasma Physics*, IOP, London, UK, 1995.
- R.D. Hazeltine et J.D. Meiss, *Plasma Confinement*, Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City, USA, 1992.
- S. Ichimaru, *Statistical Plasma Physics*, Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City, USA, 1992.
- R. Jancel et Th. Kahan, *Électrodynamique des Plasmas fondée sur la Mécanique statistique*, Dunod, Paris, 1963.
- N. A. Krall et A.W. Trivelpiece, *Principles of Plasma Physics*, Mc Graw-Hill, USA, 1973.
- B. Lehnert, *Dynamics of Charged Particles*, North-Holland, Amsterdam, 1964.
- J.G. Linhart, *Plasma Physics*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1960.
- C.L. Longmire, *Elementary Plasma Physics*, Intersciences Publishers John Wiley & Sons, New York, USA, 1963.
- D.R. Nicholson, *Introduction to Plasma Theory*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1983.
- G. Schmidt, *Physics of High Temperature Plasmas*, Academic Press, New York, USA, 1979.
- P.A. Sturrock, *Plasma Physics*, Cambridge University Press, UK, 1994.

- W.B. Thompson, *An Introduction to Plasma Physics*, Pergamon Press, Oxford, London, 1962.

► **Traité de physique des décharges**

- S.C. Brown, *Introduction to Electrical Discharges in Gases*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1966.
- F.F. Chen et J.P. Chang, *Lecture Notes on Principles of Plasma Processing*, Plenum Publishers, New York, USA, 2003.
- A. von Engel, *Ionized Gases*, AIP Press, New York, USA, 1994.
- R.N. Franklin, *Plasma Phenomena in Gas Discharges*, Clarendon Press, Oxford, UK, 1976.
- M.A. Lieberman et A.J. Lichtenberg, *Principles of Plasma Discharges and Materials Processing*, Wiley & Sons, New York, USA, 1994.
- E. Nasser, *Fundamentals of Gaseous Ionization and Plasma Electronics*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1971.
- R. Papoular, *Phénomènes Électriques dans les Gaz*, Dunod, Paris, France, 1963.
- F.M. Penning, *Décharges Électriques dans les Gaz*, Dunod, Paris, France, 1958.
- Y.P. Raizer, *Gas Discharge Physics*, Springer-Verlag, Berlin, RFA, 1997.
- B.M. Smirnov, *Physics of Ionized Gases*, John Wiley & Sons, New York, USA, 2001.

► **Fusion thermonucléaire par confinement magnétique**

- R.D. Hazeltine et F.L. Waelbroeck, *The Framework of Plasma Physics*, Perseus Books, USA, 1998.
- K. Miyamoto, *Plasma Physics for Nuclear Fusion*, MIT Press, USA, 1989.
- D.J. Rose et M. Clark, *Plasmas and Controlled Fusion*, MIT Press, USA, 1961.
- R.B. White, *The Theory of Toroidally Confined Plasma*, Imperial College Press, London, UK, 2001.

► **Physique des faisceaux de particules chargées et interaction laser-plasma**

- R.D. Davidson, *Physics of Nonneutral Plasmas*, Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City, USA, 1990.
- S. Eliezer, *The Interaction of High-Power Lasers with Plasmas*, IOP, UK, 2002.
- S. Humphries, *Principles of Charged Particle Acceleration*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1986.
- S. Humphries, *Charged Particle Beams*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1990.

- W.L. Kruer, *The Physics of Laser Plasma Interactions*, Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1988.
- J.T. Mendonça, *Theory of Photon Acceleration*, IOP, London, UK, 2001.
- R.B. Miller, *An Introduction to the Physics of Intense Charged Particle Beams*, Plenum Press, New York, USA, 1985.
- Yu.P. Raizer, *Laser-Induced Discharge Phenomena*, Consultant Bureau, New York, USA ; 1977.

Chapitre 2

Champs, particules et fluides

Hamlet. - Do you see yonder cloud that's almost in shape of a camel ?

Polonius. - By the mass, and'tis like a camel, indeed.

Hamlet. - Methinks it is like a weasel.

Polonius. - It is backed like a weasel.

Hamlet. - Or like a whale ?

Polonius. - Very like a whale.

La place et l'importance de la physique des plasmas étant clairement identifiées au sein de la physique fondamentale et de la physique appliquée, nous devons maintenant aborder le problème des outils et méthodes pour l'étude des plasmas. Dans ce deuxième chapitre, *champs, particules et fluides*, nous rappellerons donc quelques résultats fondamentaux de mécanique, d'électrodynamique et de physique statistique, nécessaires à la construction et à la pratique de la physique des plasmas.

La richesse de comportements des plasmas trouve son origine dans *la nature non-linéaire et auto-cohérente du couplage champs-plasmas* : les champs électrique et magnétique (\mathbf{E} , \mathbf{B}) engendrent les mouvements ioniques et électroniques ; à travers ces mouvements les ions et les électrons s'organisent en charges d'espace et courants électriques (ρ , \mathbf{J}) ; ces courants et charges sont les termes sources des équations de Maxwell et les champs électromagnétiques sont solutions de ces équations de Maxwell (Figure 2.1) ; ces champs électriques et magnétiques engendrent les mouvements ioniques et électroniques, etc.

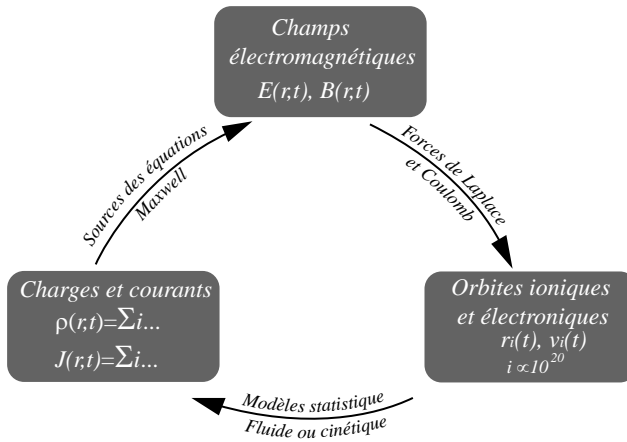


Figure 2.1 Interaction champs-plasmas.

La physique des plasmas est constituée d'une somme de résultats concernant la description des plasmas thermonucléaires, industriels et spatiaux ainsi que d'un ensemble de méthodes d'approximation permettant de résoudre ce problème central de l'interaction champs électromagnétiques/particules chargées. Avant d'entreprendre la présentation et l'étude des concepts et méthodes d'approximation permettant de résoudre le problème non-linéaire illustré par la figure 2.1, il convient de rappeler quelques résultats de mécanique, de physique statistique et d'électromagnétisme ; en effet, le calcul des orbites d'une particule chargée, $\mathbf{r}(t)$ et $\mathbf{v}(t)$, est essentiellement un problème de mécanique, le calcul des charges et courants, $\rho(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$, un processus de sommation relevant de la physique statistique et la résolution des équations de Maxwell se rattache à l'électromagnétisme.

2.1 ÉLECTRODYNAMIQUE

Quelque soit le niveau de description, macroscopique, mésoscopique (nous définirons cette échelle plus tard) ou microscopique, les forces mises en jeu dans un plasma sont essentiellement de nature électrique et magnétique. Au niveau de chaque particule il est donc nécessaire de considérer la force de Lorentz. La force de Lorentz \mathbf{F} [N] s'exerçant sur une particule de charge q et de vitesse \mathbf{v} est la somme de la force de Coulomb, d'origine électrique, et de la force de Laplace, d'origine magnétique : \mathbf{F} [N] = q [C] \mathbf{E} [$\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$] + q [C] \mathbf{v} [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$] \times \mathbf{B} [T]. Dans le cadre d'une description fluide cette force est distribuée en volume, ainsi que les charges et courants ; la description dynamique nécessite alors l'introduction de la densité volumique de force de Lorentz \mathcal{F} [$\text{N} \cdot \text{m}^{-3}$], proportionnelle aux densités volumiques de charge ρ et de courant \mathbf{J} : \mathcal{F} [$\text{N} \cdot \text{m}^{-3}$] = ρ [$\text{C} \cdot \text{m}^{-3}$] \mathbf{E} [$\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$] + \mathbf{J} [$\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$] \times \mathbf{B} [T]. Il apparaît clairement dans l'expression de cette densité volumique de force que le passage d'une description microscopique à une description macroscopique implique une

connaissance de la densité volumique de charges et de la densité volumique de courant. Dans le cadre de l'électrodynamique des milieux continus, la description des charges et courants est facilitée par l'introduction des concepts de *conductivité*, de *polarisation* et de *magnétisation* qui constituent les trois principales caractéristiques électrodynamiques d'un milieu continu.

La théorie de la conduction due aux charges libres permet de décrire les courants associés à la convection des charges et, en première approximation, la relation entre la densité volumique de courant \mathbf{J}_l et le champ électrique \mathbf{E} est linéaire : $\mathbf{J}_l = \eta \mathbf{E}$ (loi d'Ohm). Comme nous le verrons dans le paragraphe suivant, la conductivité η d'un milieu peut-être exprimée en fonction de la fréquence de collision des porteurs de charges ν , de la densité de ces porteurs de charge n , de leur masse m et de leur charge q : $\eta = nq^2/m\nu$ (formule de Drude-Lorentz). Par exemple, dans le cas des plasmas totalement ionisés nous obtenons la conductivité dite de Spitzer : $[\eta/1 \text{ S/m}] \approx 10^4 [T/1 \text{ eV}]^{\frac{3}{2}}$ où T est la température électronique. Pour un plasma d'hydrogène à 100 eV cette conductivité est de l'ordre de grandeur de celle de l'acier, pour une température de 1 keV elle devient comparable à la conductivité du cuivre. Cette formule de Spitzer peut sembler contraire à l'intuition physique, en effet, la conductivité y est indépendante de la densité de porteurs de charge et croît avec la température. Ce comportement s'explique aisément : (i) d'une part, dans un gaz totalement ionisé la probabilité de collision décroît avec la vitesse donc avec la température et (ii) d'autre part, la fréquence de collision est proportionnelle à la densité d'ions qui est égale à la densité d'électrons, le terme de densité au dénominateur dans la fréquence de collision ν élimine donc celui présent au numérateur dans la formule de Drude-Lorentz. Le cas d'un gaz faiblement ionisé est totalement différent et la conductivité est faiblement dépendante de la température et inversement proportionnelle à la densité du gaz ce qui constitue une dépendance conforme à l'intuition physique.

La conductivité électrique est un paramètre pertinent pour décrire le comportement de charges libres en présence d'un champ électrique basse fréquence. Lorsque la fréquence augmente, l'amplitude des oscillations électroniques et ioniques diminue et il est alors plus approprié de considérer ce mouvement de charges comme une polarisation oscillante plutôt que comme une convection périodique.

Une description diélectrique du comportement des charges à haute fréquence est donc plus adaptée ; par exemple, à très haute fréquence, la permittivité diélectrique relative d'un plasma ϵ_r s'exprime en fonction de la densité électronique n_e et de la pulsation ω comme : $\epsilon_r = 1 - n_e q^2 / \epsilon_0 m_e \omega^2$ où m_e est la masse d'un électron. À plus basse fréquence, lorsqu'un plasma est magnétisé et totalement ionisé, sa constante diélectrique s'exprime en fonction du champ magnétique B et de la masse des ions m_i comme : $\epsilon_r = 1 + n_e m_i / \epsilon_0 B^2$.

Enfin, un plasma fortement magnétisé doit être considéré aussi comme un milieu magnétique dont la perméabilité magnétique relative μ_r est donnée en fonction

de la température T_e et de la densité n_e par la formule : $\mu_r = 1 + \mu_0 n_e k T_e / B^2$ lorsque $B^2 \gg \mu_0 n_e k T_e$. Ces différents résultats, établis dans les chapitres suivants, démontrent la nécessité d'une bonne maîtrise des concepts de permittivité diélectrique et de perméabilité magnétique ainsi que d'une compréhension approfondie de l'origine physique de la loi d'Ohm : $\mathbf{J}_l = \eta \mathbf{E}$. Le paragraphe suivant est donc consacré à des rappels d'électrodynamique des milieux continus dont le problème central est d'établir les relations permettant d'exprimer charges et courants en fonction des champs : $\mathbf{J}(\mathbf{E}, \mathbf{B}), \rho(\mathbf{E}, \mathbf{B})$.

Partant du théorème de représentation de Helmholtz, qui s'énonce ainsi : *un champ de vecteur, différentiable presque partout et s'annulant suffisamment rapidement à l'infini, est entièrement déterminé par sa divergence et son rotationnel* (ce théorème n'est en fait qu'une généralisation « 3D » d'un autre théorème « 1D » bien connu : *une fonction s'annulant à l'infini est entièrement déterminée par sa dérivée*), il est d'usage de considérer les quatre équations de Maxwell sur un pied d'égalité. Les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère :

$$\text{Équation de Maxwell-Faraday} \quad : \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\text{Équation de Maxwell-Ampère} \quad : \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

pour les rotationnels et $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ pour les divergences. Deux de ces quatre équations ont un caractère dynamique et les deux autres ont un statut de contraintes initiales : les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère doivent être considérées comme un problème d'évolution où les deux autres équations sur les divergences sont des contraintes initiales. En effet, la conservation du nombre de particules conduit à la conservation de la charge ; complétée par la divergence de l'équation de Maxwell-Ampère, la conservation de la charge a pour conséquence la nullité de la dérivée temporelle de l'équation de Maxwell-Gauss.

$$\text{Équation de conservation de la charge} \quad : \quad \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) = 0$$

Ainsi, si l'équation de Maxwell-Gauss est vérifiée à l'instant initial, elle le demeure aux instants ultérieurs par simple conservation de la charge. De même la divergence de l'équation de Maxwell-Faraday implique : $\partial \nabla \cdot \mathbf{B} / \partial t = 0$; ainsi, si la divergence du champ magnétique est nulle à l'instant initial, elle le demeure ultérieurement. Les deux équations de Maxwell sur les divergences possèdent donc le statut de contraintes initiales sur la structure des champs et les deux équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday assurent le maintien de ces contraintes structurelles si la conservation de la charge est garantie à travers les équations décrivant la dynamique de la matière. L'expression des équations de Maxwell nécessite l'introduction de deux constantes fondamentales, la permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8,85 \text{ pF/m}$ et la perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 1,26 \text{ } \mu\text{H/m}$; lorsque l'on

résout ces équations de Maxwell dans le cadre de problèmes d'interactions champs-particules, ces deux constantes apparaissent souvent sous la forme de deux combinaisons : leur rapport et leur produit ; ces deux combinaisons ne sont autre que le carré de l'inverse de la vitesse de la lumière dans le vide c^2 et le carré l'impédance du vide η_0^2 : $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 2,99 \times 10^8$ m/s et $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 376,73 \Omega$.

Au-delà des propriétés dynamiques et structurelles des champs, les équations de Maxwell, complétées par le principe de relativité, vérifient aussi des propriétés de transformation entre deux référentiels inertiels en translation uniforme. Soit R un premier référentiel, où sont mesurés des champs électriques et magnétiques (\mathbf{E}, \mathbf{B}) . Soit R' un deuxième référentiel, en translation uniforme par rapport à R à la vitesse \mathbf{V} . Dans R' les champs mesurés sont $(\mathbf{E}', \mathbf{B}')$, l'expression de $(\mathbf{E}', \mathbf{B}')$ en fonction de \mathbf{E} et \mathbf{B} est donnée par la transformation de Lorentz :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \gamma \mathbf{E} + \gamma \mathbf{V} \times \mathbf{B} - \frac{\gamma - 1}{c^2} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{V} \xrightarrow{\gamma \rightarrow 1} \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' &= \gamma \mathbf{B} - \frac{\gamma}{c^2} \mathbf{V} \times \mathbf{E} - \frac{\gamma - 1}{c^2} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{V} \xrightarrow{\gamma \rightarrow 1} \mathbf{B}' = \mathbf{B} \end{aligned}$$

où nous avons introduit le facteur gamma : $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$. La limite non relativiste ($\mathbf{V}/c \rightarrow 0$, $\gamma \rightarrow 1$) se réduit donc à la description du champ d'induction de Lorentz :

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} \quad (2.1)$$

que nous retrouverons dans le contexte de la magnétohydrodynamique au chapitre sept.

2.1.1 Conduction et diffusion

Étudions le modèle de Lorentz d'un plasma ; dans le cadre de ce modèle un plasma est considéré comme un ensemble d'électrons en interaction avec une population de particules lourdes, qui peuvent être : (i) soit des ions, (ii) soit des atomes ou des molécules ; l'ensemble de ces phases constituant un milieu dilué, la dynamique d'un électron est donc une série de mouvements libres interrompues par des collisions (Figure 2.2).

Libre Parcours / Collision / Libre Parcours / Collision / Libre Parcours...

Afin de décrire cette dynamique aléatoire, introduisons une loi de probabilité décrivant la probabilité pour qu'un libre parcours ait une durée minimum t ; appelons cette loi de probabilité $p(t)$. Sur une durée infinitésimale dt la probabilité de collision est proportionnelle à dt et la probabilité de libre parcours (pas de collision) correspondant à l'événement complémentaire est donc donnée par 1 moins cette probabilité de collision ; en effet, il n'y a que deux possibilités, collision ou libre parcours.

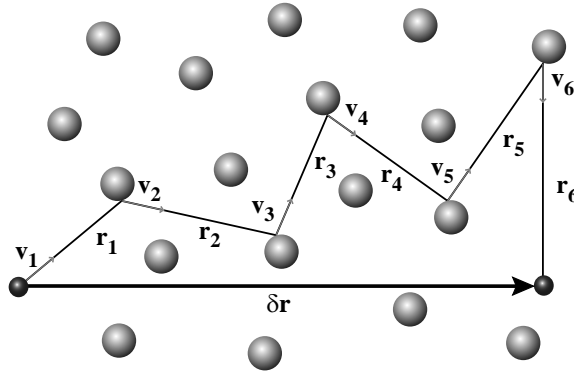


Figure 2.2 Marche aléatoire libre.

Indépendamment de toute considération dynamique sur la nature des collisions, $p(t)$ possède donc deux propriétés évidentes et certaines :

$$p(0) = 1, \quad p(dt) = \left[p(0) + \left. \frac{dp}{dt} \right|_{t=0} dt \right] = \left[1 - \frac{dt}{\tau} \right]$$

dt/τ peut être interprété comme la probabilité de collision durant une durée dt . La probabilité pour qu'un libre parcours, sans collision, ait une durée $dt_1 + dt_2 + dt_3$ est donnée par le produit $p(dt_1) p(dt_2) p(dt_3)$ car les différents sections de libre parcours constituent des événements indépendants.

$$p(dt_1 + dt_2 + dt_3) = \left[1 - \frac{dt_1}{\tau} \right] \left[1 - \frac{dt_2}{\tau} \right] \left[1 - \frac{dt_3}{\tau} \right]$$

Considérons maintenant une durée finie, t , et décomposons-la en une somme de K durées infinitésimales $dt : t = K dt$. Les arguments d'indépendance précédents permettent alors d'établir la loi de probabilité de la durée d'un libre parcours.

$$p(t) = \left[1 - \frac{t/K}{\tau} \right]^K \xrightarrow{K \rightarrow +\infty} \exp \left[-\frac{t}{\tau} \right]$$

Le temps moyen entre deux collisions, $\langle t \rangle$, s'exprime à partir de la loi de la probabilité comme la moyenne de t ; la dispersion des temps de libre parcours est donnée par la valeur moyenne du carré du temps de libre parcours $\langle t^2 \rangle$.

$$\langle t \rangle = \frac{\int_0^{+\infty} t p(t) dt}{\int_0^{+\infty} p(t) dt} = \tau, \quad \langle t^2 \rangle = \frac{\int_0^{+\infty} t^2 p(t) dt}{\int_0^{+\infty} p(t) dt} = 2\tau^2$$

La signification physique du coefficient τ est donc celle d'un temps moyen entre deux collisions : $\langle t \rangle = \tau$. Le résultat final est une loi de décroissance exponentielle s'exprimant à l'aide d'un seul paramètre physique : le temps moyen entre deux collisions,

τ , ou son inverse, la fréquence de collision ν .

$$p(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \exp(-\nu t) \quad (2.2)$$

Par exemple, dans un plasma totalement ionisé, cette fréquence de collision, ν_{ei} , s'exprime en fonction de la densité ionique n_i et de la température électronique T_e ; pour un plasma faiblement ionisé la dynamique des collisions électroniques est totalement différente et la fréquence de collision, ν_{en} , est alors fonction de la densité de neutres n_n .

$$\left[\frac{\nu_{ei}}{\text{Hz}}\right] \approx 10^{-5} \left[\frac{n_i}{\text{cm}^3}\right] \left[\frac{T_e}{\text{eV}}\right]^{-\frac{3}{2}}, \quad \left[\frac{\nu_{en}}{\text{Hz}}\right] \approx 10^{-8} \left[\frac{n_n}{\text{cm}^3}\right] \left[\frac{T_e}{\text{eV}}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.3)$$

Sur la base de cette loi de probabilité, il est aisé d'établir le comportement macroscopique d'une population d'électrons; nous allons ainsi démontrer que ce comportement peut être décrit par un courant macroscopique obéissant aux lois de Fick et Ohm. Considérons pour cela l'histoire d'un électron comme une succession de libres parcours et de collisions. D'un point de vue quantitatif, cette histoire est décrite par une série de temps aléatoires, $t_1/t_2/t_3/t_4/\dots/t_i/\dots$,

$$\underbrace{\text{Libre Parcours}}_{t_1} // \underbrace{\text{Libre Parcours}}_{t_2} // \dots // \underbrace{\text{Libre Parcours}}_{t_i} // \dots$$

correspondant à la durée de chaque libre parcours, les collisions, quant à elles, étant considérées comme des événements beaucoup plus courts que les libres parcours; le rapport d'un temps de libre parcours sur une durée de collision est donné par le rapport de la distance entre deux atomes sur la dimension d'un atome (Figure 2.2), l'ordering est donc fort et justifie l'approximation précédente.

Ces différents temps sont des variables aléatoires dont nous avons établi la loi de probabilité précédemment (2.2); en particulier, la moyenne $\langle t_i \rangle$ et la dispersion quadratique $\langle t_i^2 \rangle$ de ces temps sont données par :

$$p(t_i) = \exp\left(-\frac{t_i}{\tau}\right) \rightarrow \langle t_i \rangle = \tau, \quad \langle t_i^2 \rangle = 2\tau^2$$

Chaque libre parcours, entre deux collisions, est décrit par une vitesse, elle aussi aléatoire; la série des vitesses correspondant à l'histoire d'un électron est donc une série de vecteurs aléatoires : $\mathbf{v}_1/\mathbf{v}_2/\mathbf{v}_3/\mathbf{v}_4/\dots/\mathbf{v}_i\dots$ dont nous connaissons la loi de probabilité et dont les deux premiers moments peuvent être aisément établis. En effet, compte tenu du caractère isotrope du problème, la valeur moyenne de la vitesse entre deux collisions est nécessairement nulle et, si la population d'électrons est décrite par une température T , la valeur quadratique moyenne de la vitesse vaut $3kT/m$ où

m est la masse de l'électron. Les deux premiers moments sont donc donnés par :

$$P(\mathbf{v}_i) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m\mathbf{v}_i^2}{2kT}\right) \rightarrow \langle \mathbf{v}_i \rangle = \mathbf{0}, \quad \langle \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i \rangle = \frac{3kT}{m}, \quad \langle \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j \rangle_{i \neq j} = 0$$

Enfin, chaque libre parcours est décrit par un vecteur déplacement \mathbf{r}_i tel que $\mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i t_i$; l'ensemble des libres parcours est donc une série de vecteurs aléatoires décrivant la dynamique de l'électron considéré : $\mathbf{r}_1/\mathbf{r}_2/\mathbf{r}_3/\mathbf{r}_4/\dots/\mathbf{r}_i\dots$. La loi de probabilité de ces déplacements aléatoires est inconnue, mais, compte tenu des résultats précédents, nous pouvons exprimer les deux premiers moments de ces variables en fonction des données du problème.

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i t_i \rightarrow \langle \mathbf{r}_i \rangle = \mathbf{0}, \quad \langle \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i \rangle = \frac{3kT}{m} 2\tau^2, \quad \langle \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j \rangle_{i \neq j} = 0$$

Considérons maintenant une durée δt , beaucoup plus longue que le temps moyen entre deux collisions τ , et beaucoup plus courte que l'échelle caractéristique de temps associée à la dynamique macroscopique ; δt est ce que l'on appelle une échelle mésoscopique, intermédiaire entre les échelles microscopique et macroscopique.

Cet ordering, constitué de trois échelles, n'est pas restreint à l'analyse de ce problème mais peut être identifié pour un grand nombre de variables physiques (Figure 2.3). La hiérarchie des niveaux de description s'établit ainsi :

$$\begin{array}{l} \text{Microscopique : } \underbrace{t_1/t_2/t_3/t_4 \dots t_{n+1}/t_{n+2}/t_{n+3}/t_{n+4}}_{\text{Mésoscopique : } \delta t} \quad \underbrace{\dots}_{\delta t \dots} \quad (2.4) \\ \underbrace{\hspace{15em}}_{\text{Macroscopique : } t} \end{array}$$

L'ordering des temps, dans un plasma de laboratoire, étant du type : micro/méso/macro $\sim 10^{-7}\text{s}/10^{-5}\text{s}/10^{-3}\text{s}$, cette durée δt embrasse donc N collisions, N grand devant l'unité ; par exemple $N \sim 100$. Calculons la valeur moyenne du déplacement

mésoscopique d'un électron $\delta \mathbf{r} = \sum_{i=1}^{i=N} \mathbf{r}_i$ durant un intervalle de temps mésoscopique

$$\delta t = \sum_{i=1}^{i=N} t_i.$$

$$\delta t = \sum_{i=1}^{i=N} t_i \rightarrow \langle \delta t \rangle = N\tau, \quad \delta \mathbf{r}(\delta t) = \sum_{i=1}^{i=N} \mathbf{r}_i \rightarrow \langle \delta \mathbf{r}(\delta t) \rangle = \sum_{i=1}^{i=N} \langle \mathbf{r}_i \rangle = \mathbf{0}$$

Ce dernier résultat est conforme à l'intuition physique, en effet, les probabilités de déplacement vers le haut, vers le bas, vers l'avant, vers l'arrière, vers la gauche et vers la droite sont égales ; en conséquence, la moyenne de la somme de ces déplacements est nécessairement nulle.

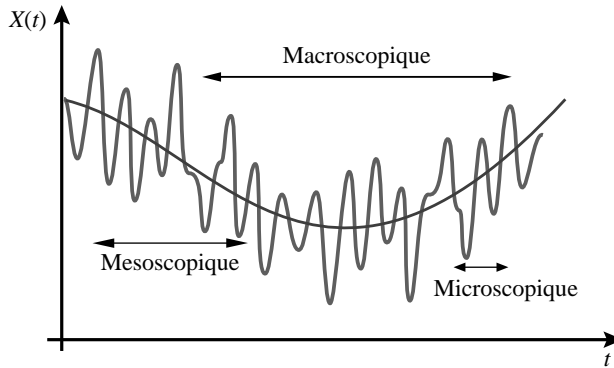


Figure 2.3 Échelles microscopique, mésoscopique, et macroscopique pour la variable physique $X(t)$.

Calculons maintenant l'écart quadratique moyen de ce déplacement.

$$\langle \delta \mathbf{r}(\delta t) \cdot \delta \mathbf{r}(\delta t) \rangle = \sum_{i=1}^{i=N} \langle \mathbf{r}_i^2 \rangle = 2N \frac{3kT}{m} \tau^2$$

Contrairement au déplacement moyen cette quantité n'est pas nulle et son rapport au temps mésoscopique moyen $\langle \delta t \rangle = N\tau$ définit le coefficient de diffusion D :

$$D \equiv \frac{\langle \delta \mathbf{r} \cdot \delta \mathbf{r} \rangle}{6 \langle \delta t \rangle} = \frac{\langle \delta x^2 \rangle}{2 \langle \delta t \rangle} = \frac{\langle \delta y^2 \rangle}{2 \langle \delta t \rangle} = \frac{\langle \delta z^2 \rangle}{2 \langle \delta t \rangle} = \frac{kT}{mv} \quad (2.5)$$

L'analyse précédente a permis d'établir les propriétés statistiques du déplacement mésoscopique d'un électron soumis à l'influence des collisions et de calculer ainsi le coefficient de diffusion D . En présence d'un champ électrique quasi-statique, $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, cette analyse, en terme de translations uniformes interrompues par des collisions :

Libre Parcours / Collision / Libre Parcours / Collision / Libre Parcours...

doit être modifiée, car, entre deux collisions, le mouvement n'est pas uniforme, mais uniformément accéléré sous l'action du champ électrique (Figure 2.4).

Accélération / Collision / Accélération / Collision / Accélération / Collision...

Considérons donc l'histoire d'un électron comme une suite de phases accélérées interrompues par des collisions de durée nulle.

$$\underbrace{\text{Accélération}}_{t_1} // \underbrace{\text{Accélération}}_{t_2} // \underbrace{\text{Accélération}}_{t_3} // \dots$$

La série des temps, $t_1/t_2/t_3/t_4/\dots/t_i/\dots$, décrivant la durée de ces phases d'accélération est de nature aléatoire, mais ses propriétés statistiques sont connues, en particulier les deux premiers moments : $\langle t_i \rangle = \tau$ et $\langle t_i^2 \rangle = 2\tau^2$.

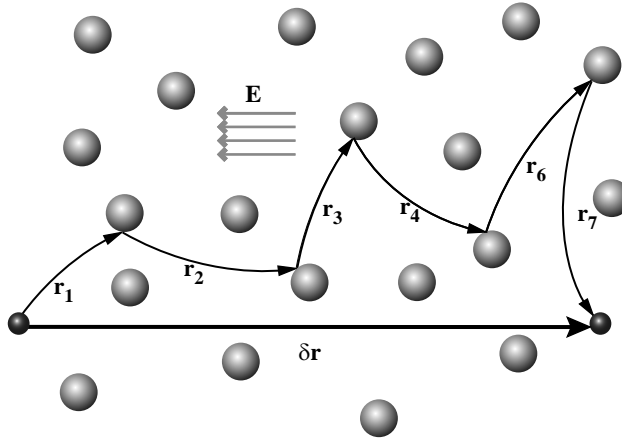


Figure 2.4 Marche aléatoire en présence d'un champ électrique.

La série des déplacements entre deux collisions : $r_1/r_2/r_3/r_4/\dots/r_i/\dots$ est considérablement modifiée par le champ électrique ; en effet, le mouvement entre deux collisions est uniformément accéléré et cette modification de la nature du mouvement se traduit par un déplacement mésoscopique moyen non nul.

$$r_i = v_i t_i + \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t_i^2 \rightarrow \langle \delta r \rangle (\delta t) = \sum_{i=1}^{i=N} \langle r_i \rangle = \frac{qE}{m} N \tau^2$$

où q et m sont respectivement la charge et la masse de l'électron. Ce dernier résultat peut-être exprimé en introduisant la vitesse $\langle \delta r \rangle / \delta \tau$ sur la durée mésoscopique moyenne $\langle \delta t \rangle = N \tau$ et permet ainsi de définir la vitesse moyenne des électrons et la mobilité électrique μ .

$$\mu \equiv \frac{\langle \delta x \rangle}{\langle \delta t \rangle E_x} = \frac{\langle \delta y \rangle}{\langle \delta t \rangle E_y} = \frac{\langle \delta z \rangle}{\langle \delta t \rangle E_z} = \frac{q}{mv} \quad (2.6)$$

L'ensemble de ces résultats concernant le déplacement mésoscopique moyen (2.6) et la moyenne du carré du déplacement mésoscopique (2.5) est suffisant pour construire une description macroscopique de la dynamique de la population électronique. L'équation d'évolution de la densité volumique macroscopique (moyenne) d'électrons $n(\mathbf{r}, t)$ en un point \mathbf{r} et à un instant t peut être établi comme suit. L'ordering entre les échelles micro/méso/macro étant de l'ordre de $10^{-4}/10^{-2}/1$, l'échelle mésoscopique peut être considérée comme infinitésimale à l'échelle macroscopique. Considérons donc, en un point \mathbf{r} et à un instant t , $n(\mathbf{r}, t)$ le nombre

moyen d'électrons contenus dans le volume $d\mathbf{r}$ autour de \mathbf{r} . Tous les électrons se trouvant en \mathbf{r} à l'instant $t + \delta t$ proviennent d'un voisinage situé en $\mathbf{r} - \delta\mathbf{r}(\delta t)$ à l'instant t où $\delta\mathbf{r}(\delta t)$ est le déplacement des électrons durant une durée infinitésimale δt (Figure 2.5). Cette condition, conséquence du principe de conservation du nombre de particules, s'exprime par l'identité :

$$n(\mathbf{r}, t + \delta t) = \int C(\delta\mathbf{r}, \delta t) n(\mathbf{r} - \delta\mathbf{r}, t) d\delta\mathbf{r} \quad (2.7)$$

ou $C(\delta\mathbf{r}, \delta t)$ est la probabilité qu'un électron effectue un déplacement $\delta\mathbf{r}$ durant un temps δt . Nous n'avons pas étudié cette loi de probabilité C , par contre, les expressions des trois premiers moments spatiaux de C , données par :

$$1 = \int C(\delta\mathbf{r}, \delta t) d\delta\mathbf{r}, \quad \langle \delta\mathbf{r} \rangle = \int \delta\mathbf{r} C(\delta\mathbf{r}, \delta t) d\delta\mathbf{r}, \quad \langle \delta\mathbf{r}\delta\mathbf{r} \rangle = \int \delta\mathbf{r}\delta\mathbf{r} C(\delta\mathbf{r}, \delta t) d\delta\mathbf{r} \quad (2.8)$$

ont été exprimés en fonction des caractéristiques des particules et du champ dans le cadre de la théorie du libre parcours moyen (2.6, 2.5). Compte tenu du caractère infinitésimal, à l'échelle macroscopique, des quantités mésoscopiques, l'identité (2.7), traduisant le principe de conservation du nombre de particules, peut-être développée en série de Taylor.

$$\delta t \frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = - \int C(\delta\mathbf{r}, \delta t) \left[\delta\mathbf{r} \cdot \frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\delta\mathbf{r}\delta\mathbf{r}}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right] d\delta\mathbf{r}$$

Les relations (2.5), (2.6) et (2.8) permettent alors d'obtenir la forme finale de l'équation de transport électronique ; le dernier terme de cette identité est de nature tensorielle, mais, compte tenu de l'isotropie du problème :

$$\langle \delta\mathbf{r}\delta\mathbf{r} \rangle = \langle \delta\mathbf{r} \cdot \delta\mathbf{r} \rangle \mathbf{I} / 3 = 2D \langle \delta t \rangle \mathbf{I},$$

où \mathbf{I} est le tenseur identité. La densité électronique obéit donc à une équation de diffusion-convection aussi appelée équation de Fokker-Planck.

Le taux de variation temporel de la densité est déterminé par des processus de transport diffusif et convectif, ces processus sont décrits par un vecteur densité de flux de particule Γ_l dont les deux composantes, convectives et diffusives, sont proportionnelles à la densité et à son gradient. Nous serons amenés à considérer, soit ce vecteur densité de flux de particules Γ_l , soit le vecteur densité de courant \mathbf{J}_l . L'équation de transport des électrons (et des autres espèces chargées) dans un plasma en présence d'un gradient de potentiel électrique $\nabla\phi$ et d'un gradient de densité ∇n est donc

donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= -\underbrace{\nabla \cdot \mu n \mathbf{E}}_{\text{Flux convectif}} + \underbrace{\nabla \cdot D \nabla n}_{\text{Flux diffusif}} = -\nabla \cdot \mathbf{\Gamma}_l \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \underbrace{\nabla \cdot \eta \nabla \phi}_{\text{loi d'Ohm}} + q \underbrace{\nabla \cdot D \nabla n}_{\text{loi de Fick}} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_l \end{aligned} \quad (2.9)$$

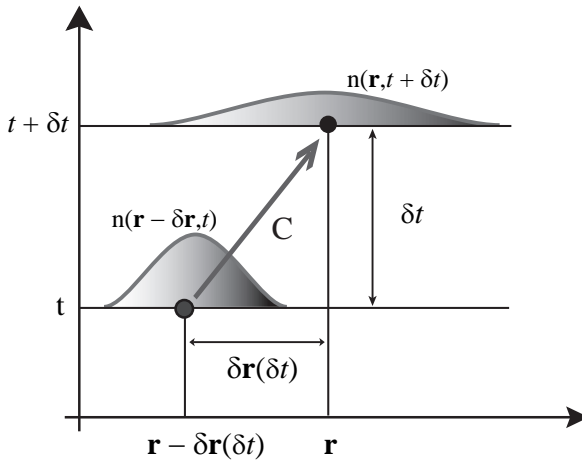


Figure 2.5 Variation de la densité électronique résultant de la marche aléatoire des électrons.

La conductivité d'un plasma, dans le cadre d'un modèle de Lorentz, est donnée par la formule classique, appelée parfois relation de Drude-Lorentz : $\eta = nq^2/mv$. Les plasmas obéissent ainsi aux lois de Fick et d'Ohm. Le coefficient de mobilité et le coefficient de diffusion ne sont pas indépendants et leur rapport vérifie la **relation d'Einstein** : $D/\mu = kT/q$. Enfin, en régime d'équilibre, lorsque la densité devient indépendante du temps et le flux macroscopique nul :

$$\mathbf{J}_l = \mathbf{0} \rightarrow n = n_0 \exp \left[-\frac{q\phi}{kT} \right]$$

nous reconnaissons ici la **distribution de Boltzmann** dont le développement de Taylor aux petits potentiels caractérise ce que l'on appelle parfois la réponse adiabatique de la population électronique : $n - n_0 = -n_0 q \phi / kT$.

La variation locale de la densité n'est, en général, pas uniquement générée par les processus de transport, qui tendent à établir une densité conforme à la distribution de Boltzmann ; l'ionisation, la recombinaison et l'attachement des électrons sont autant de termes de gains ou de pertes locales à prendre en compte. La prise en compte de ces phénomènes, lorsqu'ils sont significatifs, nécessite l'introduction d'un terme source (qui comptabilise un gain ou une perte selon son signe) : $S(\mathbf{r}, t)$. $S(\mathbf{r}, t)$ mesure le nombre d'électrons créés (perdus) par unité de volume et unité de temps.

La conservation de la charge et de la masse se formule alors comme :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \Gamma_I = S, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_I = qS \quad (2.10)$$

cette forme d'équations avec un terme source appartient à la classe des équations de réaction-diffusion.

En conclusion, les densités de flux, que ce soit de particules ou de courant, sont déterminées par deux processus, la conduction ohmique et la diffusion fickienne décrites par les coefficients de mobilité et de diffusion ; le tableau (2.1) résume ce résultat essentiel.

Tableau 2.1

Flux	Unité	Relation
Densité de flux de particules Γ_I	$m^{-2}.s^{-1}$	$\Gamma_I = n\mu E - D\nabla n$
Densité de flux de courant \mathbf{J}_I	$A.m^{-2}$	$\mathbf{J}_I = -\eta\nabla\phi - qD\nabla n$

Cet ensemble de résultats est pertinent pour élaborer des modèles décrivant la dynamique de charges libres ; mais, il est aussi courant, en physique des plasmas, d'avoir recours à un formalisme complémentaire issu de l'électrodynamique des milieux continus, celui des charges dipolaires et courants dipolaires ou liées. En effet, lorsque l'orbite d'un électron est limitée dans l'espace, par exemple lors d'une oscillation, il est intéressant de considérer le dipôle (oscillant) constitué par cet électron et un ion voisin ; de même, en présence d'un champ magnétique, la rotation des particules autour des lignes de champ génère des courants qui peuvent être décrits, de façon remarquablement pertinente, par un ensemble de dipôles magnétiques. Ces choix de descriptions, en termes de distributions de dipôles, nécessitent la maîtrise des concepts de polarisation et de magnétisation dont l'élaboration met à profit l'ordering micro/méso/macro pour les échelles spatiales.

2.1.2 Polarisation et magnétisation

Sous l'effet d'une perturbation, l'excursion des électrons (des ions) reste souvent limitée à un voisinage microscopique des positions (trajectoires) d'équilibre ; par exemple, lorsqu'ils oscillent sous l'influence d'un champ électrique. Un modèle de convection et diffusion de charges libres est alors inadapté pour la description des propriétés électriques ; en particulier, si les champs électromagnétiques appliqués ont une fréquence supérieure à la fréquence de collision. Le comportement des électrons doit être décrit dans le cadre du modèle de polarisation diélectrique présenté dans ce paragraphe.

Le potentiel coulombien d'une charge décroît comme l'inverse de la distance entre la position de la charge et le point de mesure du potentiel ; *deux charges, égales en*

valeurs absolues et de signes opposés, constituent un dipôle si leur distance relative est beaucoup plus petite que la distance à laquelle le champ est observé. Sous cette hypothèse, le potentiel, mesuré en un point de position \mathbf{R} , créé par un dipôle où les deux charges $+q$ et $-q$ sont situées en $\pm\mathbf{r}$, décroît à grande distance comme le carré de l'inverse de la distance $|\mathbf{R}|$; en effet, le développement de Taylor du potentiel généré par chaque particule est donné par :

$$\frac{1}{|\mathbf{R} \pm \mathbf{r}|} = \frac{1}{|\mathbf{R}|} \mp \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} + \dots$$

lorsque $|\mathbf{r}| < |\mathbf{R}|$. Il est aisé de voir que la somme des deux termes du premier ordre en $|\mathbf{R}|^{-1}$, pour une charge positive et une charge négative de même valeur absolue, est nulle. Par contre, la somme des deux termes du deuxième ordre, est non nulle et fait apparaître le moment dipolaire $\mathbf{p} = q\mathbf{r} + -q(-\mathbf{r})$; nous négligerons le troisième ordre et les suivants qui constituent des corrections multipolaires. Ce comportement du potentiel d'un système de charges, globalement neutre et spatialement localisé, permet de définir le moment dipolaire :

$$\sum q_i \mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{p} \equiv \int \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} d^3\mathbf{r}$$

pour toute distribution de charge $\rho(\mathbf{r})$ globalement neutre : $\int \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = 0$; le potentiel dipolaire à grande distance, $\varphi(\mathbf{R})$, s'exprime donc simplement comme :

$$\varphi(\mathbf{R}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (2.11)$$

Le volume d'intégration définissant $\mathbf{p} = \int \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} d^3\mathbf{r}$ est ici microscopique. La notion de champ dipolaire d'un dipôle microscopique ainsi défini, considérons un ensemble de dipôles microscopiques ou milieu dipolaire; la théorie des milieux diélectriques considère la matière, non pas comme un ensemble de charges électriques libres, mais comme un ensemble de dipôles électriques microscopiques. Il est donc nécessaire, pour décrire l'échelle macroscopique, dans le cadre d'une telle modélisation, d'introduire le vecteur polarisation \mathbf{P} définissant la densité volumique des dipôles.

Par définition, le moment dipolaire d'un élément de volume mésoscopique, c'est-à-dire infinitésimal à l'échelle macroscopique et suffisamment large à l'échelle microscopique, est égal au produit du vecteur polarisation \mathbf{P} multiplié par l'élément de volume mésoscopique $d^3\mathbf{r}$, $\mathbf{p} [\text{C} \cdot \text{m}] \equiv \mathbf{P} [\text{C} \cdot \text{m}^{-2}] d^3\mathbf{r} [\text{m}^3]$. Le vecteur polarisation représente donc la densité volumique de dipôle et le caractère mésoscopique du volume considéré permet de lisser les fluctuations microscopiques. Cette définition est conforme aux cadres et aux méthodes usuels de modélisation en mécanique et en électrodynamique des milieux continus où l'on considère des densités volumique de masse, de charge, de courant *etc.*

Une distribution volumique de dipôles dans un volume V délimité par une surface S , décrite par le vecteur polarisation $\mathbf{P}(\mathbf{u})$, générera donc en tout point \mathbf{r} un potentiel électrique, ϕ , égale à la superposition des potentiels élémentaires créés par les dipôles élémentaires mésoscopiques $\mathbf{P}d^3\mathbf{u}$ (Figure 2.6) constituant le milieu diélectrique considéré.

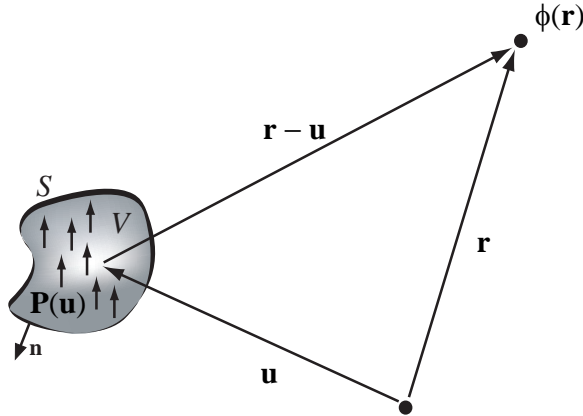


Figure 2.6 Potentiel macroscopique créé par une distribution continue de dipôles microscopiques.

$$\text{Dipôle électrique} : \phi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$\text{Milieu dipolaire} : \phi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{u})}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{u}|^3} d^3\mathbf{u}$$

Cette formule peut-être réarrangée en faisant apparaître le gradient de l'inverse de la distance entre les dipôles élémentaires et le point où le champ est calculé :

$$\int_V \mathbf{P}(\mathbf{u}) \cdot \nabla_{\mathbf{u}} |\mathbf{r} - \mathbf{u}|^{-1} d^3\mathbf{u}$$

Puis, compte tenu de l'identité :

$$\nabla \cdot (U\mathbf{V}) = U\nabla \cdot \mathbf{V} + \nabla U \cdot \mathbf{V}$$

et du théorème d'Ostrogradski, le potentiel créé par une distribution volumique de dipôles électriques se réarrange sous la forme finale :

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\nabla_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{u})}{|\mathbf{r} - \mathbf{u}|} d^3\mathbf{u} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{u}|} d^2s$$

\mathbf{n} étant le vecteur normal à la surface, orienté vers l'extérieur (Figure 2.6). Sous cette forme, on voit donc que le potentiel créé par une distribution volumique de dipôles électriques peut s'interpréter comme le potentiel d'une distribution volumique de

charges ρ_p , dites charges volumiques de polarisation, et d'une distribution surfacique de charges ρ_s , appelées charges surfaciques de polarisation.

$$\rho_s = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}, \quad \rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} \tag{2.12}$$

Cette identification des charges volumiques et surfaciques de polarisation n'est pas un simple artifice mathématique, elle correspond à une réalité physique ; en effet, considérons un ensemble de dipôles microscopiques distribués de façon homogène dans l'espace, en chaque point il y a autant de charges positives que de charges négatives, la superposition uniforme de dipôles ne génère donc pas de champ par absence de charge net. Par contre, si le milieu est limité, à l'interface avec le vide apparaîtra un surplus ou un déficit de charges résultant de la non compensation par une couche de dipôles voisins ; de façon similaire, si \mathbf{P} présente une non uniformité, apparaîtrons, en volume, des surplus ou des déficits de charges résultant de la non compensation par les dipôles voisins dont la densité diffère (Figure 2.7).

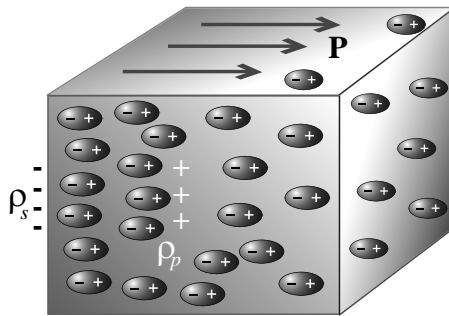


Figure 2.7 Charges de volume et de surface résultant d'une distribution inhomogène finie de dipôles électriques microscopiques.

La variation temporelle de la densité volumique de charges de polarisation engendre un courant électrique, la densité de courant de polarisation \mathbf{J}_p .

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \tag{2.13}$$

Ce courant vérifie le principe de conservation de la charge : $\nabla \cdot \mathbf{J}_p + \partial \rho_p / \partial t = 0$. Afin de faire apparaître uniquement les charges libres dans les équations de Maxwell, il est d'usage d'introduire le vecteur de déplacement électrique $\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$. Les équations de Maxwell- Gauss et de Maxwell-Ampère s'écrivent alors :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_l, \quad \nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{J}_l + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{2.14}$$

Cet ensemble de définitions et de résultats sera utilisé pour construire la théorie des ondes et oscillations dans les plasmas. Considérons maintenant le problème de la modélisation des courants microscopiques en terme de magnétisation.

Lorsqu'un plasma est magnétisé, les orbites des électrons et des ions sont des hélices s'enroulant autour des lignes de champ magnétique, les courants électriques associés à ces orbites hélicoïdales sont équivalents à de petites spires de courant. Ces spires possèdent un moment magnétique et la description d'un plasma magnétisé est facilitée par l'usage d'une description en terme de densité volumique de dipôles magnétiques microscopiques.

Rappelons d'abord la définition du moment magnétique d'une distribution de courants microscopiques. L'amplitude du potentiel vecteur généré par un courant décroît comme l'inverse de la distance mesuré depuis ce courant. Si nous considérons un courant fermé dont l'extension est limitée à une région de l'espace de taille plus petite que la distance à laquelle le champ est observé, alors le développement de Taylor de l'inverse de la distance :

$$\frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} = \frac{1}{|\mathbf{R}|} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} + \dots$$

où $|\mathbf{r}| < |\mathbf{R}|$, peut être utilisé dans l'intégrale définissant le potentiel vecteur. Pour un courant fermé, $\int \mathbf{j} d^3\mathbf{r} = \mathbf{0}$, ainsi le premier terme de ce développement est identiquement nul ; par contre, le deuxième terme engendre un potentiel vecteur non nul proportionnel au moment magnétique de la distribution de courant.

$$\mathbf{m} \equiv \int \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{j}}{2} d^3\mathbf{r} \quad (2.15)$$

Ainsi, le potentiel vecteur \mathbf{a} d'un dipôle magnétique \mathbf{m} décroît comme le carré de la distance R mesuré depuis le dipôle.

$$\mathbf{a}(\mathbf{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{R^3} \quad (2.16)$$

L'intégrale : $\int \mathbf{r} \times \mathbf{j} d^3\mathbf{r}/2$, définissant le moment dipolaire magnétique, est ici étendue à un volume microscopique. Dans le cadre de l'étude des plasmas magnétisés il est pertinent de décrire le plasma comme un ensemble de dipôles magnétiques microscopiques ; il est ensuite nécessaire, pour décrire l'échelle macroscopique, d'introduire le vecteur magnétisation \mathbf{M} définissant la densité volumique de dipôles.

Le moment magnétique associé à un élément de volume mésoscopique est défini comme le produit du vecteur magnétisation \mathbf{M} avec l'élément de volume mésoscopique $d^3\mathbf{r}$: $\mathbf{m} [\text{A} \cdot \text{m}^2] \equiv \mathbf{M} [\text{A} \cdot \text{m}^{-1}] d^3\mathbf{r} [\text{m}^3]$. Le potentiel vecteur \mathbf{A} créé par une distribution volumique (Figure 2.8) de moments dipolaires magnétiques microscopiques est donc obtenu en sommant la contribution de chaque élément de volume

mésoscopique.

$$\begin{aligned} \text{Dip\^ote magn\^etique} & : \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \mathbf{m} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} \\ \text{Milieu dipolaire} & : \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{u}) \times (\mathbf{r} - \mathbf{u})}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{u}|^3} d^3 \mathbf{u} \end{aligned}$$

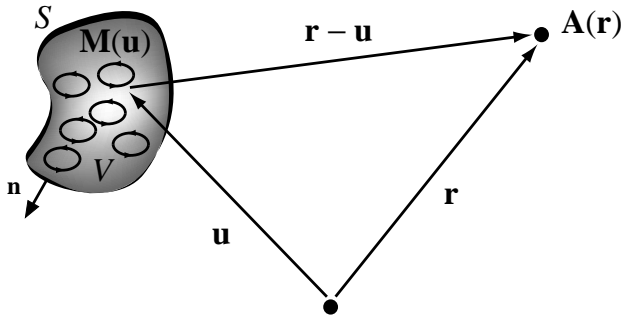


Figure 2.8 Potentiel vecteur macroscopique crée par une distribution continue de dip\^otes microscopiques.

Partant de cette représentation du potentiel vecteur \mathbf{A} génér par une distribution volumique de dip\^otes magnétiques, il est d'usage de faire apparaître le gradient de l'inverse de la distance entre le point où est  valu e le potentiel et le point source :

$$\int_V \mathbf{M}(\mathbf{u}) \times \nabla_{\mathbf{u}} |\mathbf{r} - \mathbf{u}|^{-1} d^3 \mathbf{u}$$

Puis, en utilisant les formules d'analyse vectorielle :

$$\nabla \times (U\mathbf{V}) = U\nabla \times \mathbf{V} + \nabla U \times \mathbf{V} \quad \text{et} \quad \int_V \nabla \times \mathbf{U} d^3 \mathbf{r} = - \iint_S \mathbf{U} \times d^2 \mathbf{s},$$

la relation précédente peut être réarrangée pour faire apparaître les contributions de deux types de courants : la densité volumique de courants de magnétisation \mathbf{J}_m et la densité surfacique de courants de magnétisation \mathbf{J}_s .

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\nabla_{\mathbf{u}} \times \mathbf{M}(\mathbf{u})}{|\mathbf{r} - \mathbf{u}|} d^3 \mathbf{u} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{M}(\mathbf{u}) \times \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{u}|} d^2 s$$

\mathbf{n} est le vecteur normal à la surface, orienté vers l'extérieur. L'identification de ces deux nouveaux types de courants n'est pas un artifice mathématique mais correspond à une réalité physique illustr e par la Figure 2.9.

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{M} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} \tag{2.17}$$

Si l'on assemble des dip\^otes magnétiques microscopiques de façon inhomogène (Figure 2.9) dans un volume fini, par exemple avec une densité plus forte sur la

gauche et plus faible sur la droite, alors on génère un courant volumique \mathbf{J}_m , car, pour une surface donnée, il y aura moins de courants descendant sur la gauche de la surface que de courants montant sur la droite. Ce type d'argumentation peut être aussi développé pour expliquer l'existence du courant surfacique \mathbf{J}_s à la frontière du milieu.

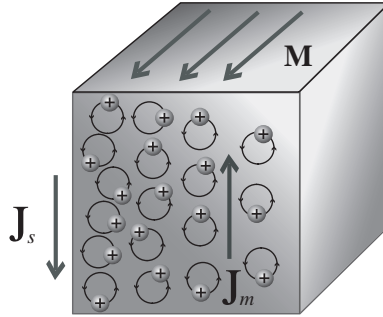


Figure 2.9 Courants volumiques et surfaciques résultant d'une distribution inhomogène finie de dipôles magétiques microscopiques.

L'origine de ces courants doit donc être recherchée dans la non-compensation des courants microscopiques dipolaires lorsque la distribution volumique est inhomogène. Afin de séparer les contributions dues aux courants des charges libres, \mathbf{J}_l , et aux courants d'origine dipolaire, il est d'usage d'introduire le vecteur champ magnétique \mathbf{H} : $\mu_0\mathbf{H} \equiv \mathbf{B} - \mu_0\mathbf{M}$, tel que l'équation de Maxwell-Ampère s'écrive :

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_l + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.18)$$

Cet ensemble de définitions et résultats sera particulièrement utile pour l'analyse physique des équilibres et écoulements magnétohydrodynamiques.

En résumé, l'analyse et le calcul des courants dans un plasma devront toujours être précédés par une discussion et une argumentation justifiant le choix de la description et du modèle : charges libres ou charges liées, courants libres ou courants liés ; cette discussion nécessite la construction d'un ordering permettant de séparer des échelles spatiales et temporelles, microscopiques, mésoscopiques et macroscopiques.

À l'échelle macroscopique, six types de courants peuvent être considérés (tableau 2.2) : les courants de conduction et diffusion (important en physique des décharges électriques), les courants de polarisation et magnétisation ainsi que les courants surfaciques de magnétisation (important dans l'étude des équilibres magnétohydrodynamiques) et le courant de déplacement $\partial\mathbf{E}/\partial t$ (utile en théorie des ondes).

Tableau 2.2

Densité de courant	Expression
Conduction	$\mathbf{J}_I = \eta \mathbf{E}$
Polarisation	$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$
Diffusion	$\mathbf{J}_I = -qD\nabla n$
Magnétisation	$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$
Surfacique	$\mathbf{J}_S = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$

Pour conclure, insistons sur le fait qu'à l'échelle microscopique un seul type de courant existe, le déplacement des charges ; les cinq types de courants dans les plasmas, identifiés ici, résultent d'un processus de sommation statistique et de filtrage spatial afin de réduire l'ensemble des mouvements microscopiques à leurs effets moyens macroscopiques, sources des champs macroscopiques. Enfin, notons qu'il est parfois nécessaire, pour résoudre des paradoxes ou lisser des singularités, de revenir à la nature microscopique des mouvements électroniques et ioniques en amont des modèles macroscopiques utilisant η , D , \mathbf{M} et \mathbf{P} .

2.2 PHYSIQUE STATISTIQUE

2.2.1 Fonctions de distribution

Un plasma, considéré comme un système dynamique, possède un très grand nombre de degrés de liberté. L'ordre de grandeur de ce nombre de degrés de liberté est donné par les nombres d'Avogadro ou de Loschmidt. Le nombre d'Avogadro N_A mesure le nombre d'atomes ou de molécules contenus dans une mole d'une espèce chimique donnée ; si cette espèce est sous forme gazeuse à pression atmosphérique et à température ordinaire elle occupe un volume de 22,4 litres. Le nombre Loschmidt N_L mesure le nombre d'atomes ou de molécules dans les mêmes conditions contenu dans un volume de 1 cm^3 .

$$N_A \equiv 6,02 \times 10^{23}, \quad N_L \equiv 2,69 \times 10^{19} \quad (2.19)$$

Compte tenu des facteurs de conversion : $1 \text{ atmosphère} = 101\,300 \text{ Pa} = 760 \text{ torr}$, à température ordinaire, la densité d'une espèce gazeuse n et sa pression P vérifient donc la relation :

$$\left[\frac{n}{1 \text{ cm}^{-3}} \right] = 3,3 \times 10^{16} \left[\frac{P}{1 \text{ torr}} \right]$$

Il serait illusoire de vouloir décrire les 10^{14} orbites des particules constituant un plasma de laboratoire typique de quelques dizaines de cm^3 ; non seulement un tel

volume de données serait inaccessible au traitement, mais il serait aussi inutile. En effet, les diagnostics nous renseignent sur les valeurs moyennes des quantités physiques, c'est donc ces valeurs moyennes que le physicien doit prédire et valider à l'aide de modèles opérationnels ; une approche statistique est donc préférable à une description mécanique exhaustive.

De nombreux phénomènes, en physique des plasmas, nécessitent l'utilisation de modèles statistiques construits à partir de l'étude des fonctions de distribution ; il convient donc de rappeler quelques résultats de base.

La densité de particules n est un concept de mécanique des milieux continus, c'est aussi une fonction de distribution spatiale ayant une interprétation en terme de densité de probabilité. Considérons N particules distribuées uniformément dans un volume V (Figure 2.10). Sous cette hypothèse d'uniformité, la probabilité de trouver une particule donnée dans un volume infinitésimal $dV = dx dy dz$ est définie par :

$$[\text{Probabilité de trouver une particule donnée dans le volume } dV] \equiv \frac{dV}{V} = \frac{dx dy dz}{V}$$

Nous avons utilisé le terme vague « trouver » pour résumer un processus de mesure de la position. Ce point de vue probabiliste est complémentaire du point de vue statistique dans le cadre duquel le nombre moyen de particules occupant ce volume infinitésimal $dV = dx dy dz$ est donné par :

$$[\text{Nombre moyen de particules dans le volume } dV \equiv NdV/V = ndV].$$

Si la densité $n(x, y, z)$ est inhomogène le nombre moyen de particules occupant ce volume infinitésimal est alors donné par :

$$[\text{Nombre moyen de particules dans le volume } dx dy dz \text{ au voisinage de } x, y, z] \equiv n dx dy dz$$

Ces concepts et définitions probabilistes peuvent être étendus aux autres variables dynamiques telles que la vitesse. Considérons un ensemble de particules possédant une distribution de vitesses. Considérons une particule parmi cet ensemble, soit un angle solide infinitésimal $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$; sous une hypothèse d'isotropie (Figure 2.10), la probabilité que la vitesse de cette particule pointe dans la direction $d\Omega$ est donnée par :

$$[\text{Probabilité que la vitesse de la particule pointe dans la direction } d\Omega] \equiv \frac{d\Omega}{4\pi}$$

Au-delà de la direction, l'information sur la valeur de la vitesse peut être précisée grâce à la fonction de distribution des vitesses $f(\mathbf{v})$.

$$[\text{Probabilité de trouver une particule dans le volume } d\mathbf{v} \text{ au voisinage de } \mathbf{v}] \equiv f(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \quad (2.20)$$

Enfin, la distribution dans l'espace des phases d'une particule (\mathbf{r}, \mathbf{p}) , est donnée par la fonction de distribution à un corps $F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ ou $F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ (\mathbf{p} est la quantité de mouvement) :

[Probabilité de trouver une particule dans le volume $d\mathbf{p}$

au voisinage de \mathbf{p} et dans le volume $d\mathbf{r}$ au voisinage de $\mathbf{r}] \equiv F(\mathbf{r}, \mathbf{p})d\mathbf{r}d\mathbf{p}$.

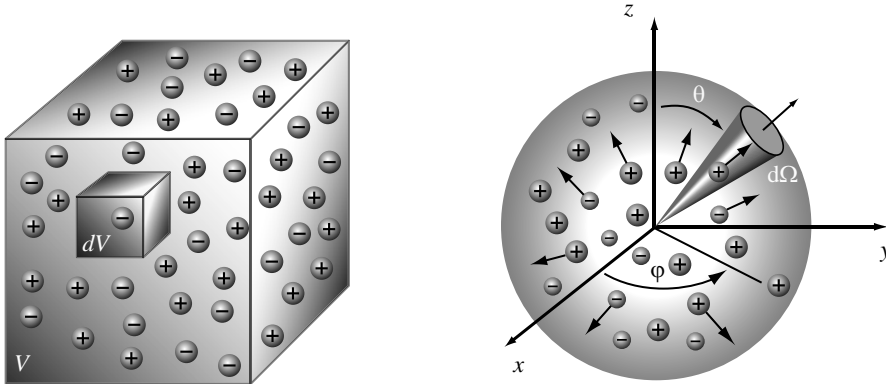


Figure 2.10 Distribution entre un volume fini et un volume infinitésimal et entre toutes les directions et un angle solide infinitésimal.

À l'équilibre thermodynamique cette fonction de distribution des vitesses et positions $F_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ doit être proportionnelle au facteur de Boltzmann qui détermine la probabilité relative d'occupation des états comme l'exponentielle de leur différence d'énergie ramenée à la température que multiplie la constante de Boltzmann. Pour les électrons et les ions d'un plasma, l'énergie est essentiellement sous formes cinétique et potentielle et nous obtenons ainsi la distribution de Maxwell-Boltzmann.

$$F_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = n(\mathbf{r}) f_0(\mathbf{v}) = n_0 \underbrace{\exp\left(\frac{-q\phi(\mathbf{r})}{kT}\right)}_{\text{Distribution de Boltzmann}} \underbrace{\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m\mathbf{v}^2}{2kT}\right)}_{\text{Distribution de Maxwell}} \quad (2.21)$$

Lorsque la fonction de distribution des vitesses $f(\mathbf{v})$ est isotrope, il est d'usage de considérer la fonction de distribution $f(v)$, décrivant la distribution du module de la vitesse, obtenue en sommant $f(\mathbf{v})$ sur les différentes directions dans un système de coordonnées sphériques : $f(v) = \int_0^{4\pi} d\Omega v^2 f(\mathbf{v})$. L'information sur la distribution du module de la vitesse est donc donnée par cette fonction de distribution réduite $f(v)$.

[Probabilité de trouver une particule dans l'intervalle $4\pi v^2 dv]$ $\equiv f(v) dv$

Ces définitions sont restreintes à l'étude d'une particule ; la description statistique la plus fine d'un système de N particules doit permettre d'évaluer les corrélations entre les différentes particules. Les fonctions de distribution, $F(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ ou $F(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, dites à un corps, ne permettent pas l'étude de ces corrélations entre particules ; il est donc parfois nécessaire de considérer la fonction de distribution à N corps.

Soit un ensemble de N électrons et ions étiquetés de 1 à N . La dynamique de cette population se développe dans l'espace des positions et impulsions $(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{p}_{N-1}, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N)$, l'espace des phases du système considéré. A chaque instant t , il est possible de définir la fonction de distribution à N corps : $\mathcal{F}(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{p}_{N-1}, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N)$. Cette fonction de distribution possède deux interprétations :

- une interprétation probabiliste, $\mathcal{F}d\mathbf{r}_1d\mathbf{p}_1\dots d\mathbf{r}_Nd\mathbf{p}_N$ mesure la probabilité que la première particule soit dans l'élément de volume $d\mathbf{r}_1d\mathbf{p}_1$ au voisinage de $\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1$, que la deuxième particule soit dans l'élément de volume $d\mathbf{r}_2d\mathbf{p}_2$ au voisinage de $\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2$, etc.
- une interprétation statistique, \mathcal{F} est aussi proportionnelle au nombre moyen de particules en \mathbf{r}_1 ayant l'impulsion \mathbf{p}_1 dans l'élément de volume $d\mathbf{r}_1d\mathbf{p}_1$, etc., cette moyenne étant une moyenne d'ensemble, mais pouvant tout aussi bien être une moyenne dans le temps conformément à l'hypothèse ergodique.

Dans les plasmas, à haute température, les corrélations sont peu relevantes et la fonction de distribution à une particule ou plus simplement fonction de distribution, $F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ ou $F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, contient souvent suffisamment d'informations pour appréhender l'essentiel des processus microscopiques à l'échelle cinétique : $\mathcal{F}(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{p}_{N-1}, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N) = F(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1)F(\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2)\dots F(\mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N)$.

2.2.2 Hiérarchie de Bogolioubov

Il est possible de développer un cadre de justifications plus convaincant que l'argument de l'extrême agitation thermique des hautes température pour expliquer la non pertinence des corrélations multiples en physique des plasmas : $\mathcal{F}(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{p}_{N-1}, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N) = F(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1)F(\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2)\dots F(\mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N)$, ce point de vue constitue l'hypothèse, dite de régression des corrélations, de Bogolioubov que nous présentons ici.

Toutes ces densités de probabilité, \mathcal{F} , F , f et n , sont évidemment fonction du temps t ; sur une échelle de temps longue la fonction de distribution à un corps F va relaxer vers une maxwellienne locale et une description fluide au voisinage de l'équilibre thermodynamique devient valide. La température T , la densité n et la vitesse d'écoulement sont alors des variables pertinentes pour la description de cet ensemble de particules ; puis sur une échelle de temps plus longue, l'écoulement tend vers une configuration au repos et le plasma devient homogène à l'équilibre thermodynamique.

Ce processus de relaxation vers l'équilibre thermodynamique est universel. Suivant en cela Bogolioubov, l'usage est d'introduire trois échelles de temps pour quantifier cette évolution d'un système de particules.

- L'échelle de temps *précinétique* qui est de l'ordre de grandeur du temps d'interaction entre deux particules, sa valeur est donc donnée par la longueur d'interaction entre deux particules que divise la vitesse moyenne de ces particules. Sur cette échelle de temps les corrélations sont significatives :

$$\mathcal{F}(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{p}_{N-1}, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N, t) \neq F(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t)F(\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2, t) \dots F(\mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N, t)$$

- L'échelle de temps *cinétique*, plus longue, est de l'ordre de grandeur du temps entre deux interactions d'une même particule, sa valeur est donc donnée par le libre parcours moyen que divise la vitesse moyenne ; sur cette échelle de temps la fonction de distribution à un corps contient l'information nécessaire pour l'étude physique du plasma :

$$\mathcal{F}(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{p}_{N-1}, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N, t) \rightarrow F(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t)F(\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2, t) \dots F(\mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N, t)$$

- L'échelle de temps *hydrodynamique* associée aux temps de relaxation des inhomogénéités des variables hydrodynamiques, sa valeur est de l'ordre de grandeur de la taille du système que divise la vitesse du son ; sur cette échelle de temps un modèle fluide est pertinent :

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \rightarrow n_0 \exp\left(-\frac{q\phi(\mathbf{r})}{kT}\right) (2\pi mkT(\mathbf{r}, t))^{-\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{[\mathbf{p}-m\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)]^2}{2mkT(\mathbf{r}, t)}\right]$$

- Enfin, asymptotiquement le système évolue à partir de cet état hydrodynamique d'équilibre thermodynamique local vers un état d'équilibre thermodynamique sans gradient : un état d'équilibre thermodynamique global.

$$n(\mathbf{r}, t) \rightarrow n, \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{0}, T(\mathbf{r}, t) \rightarrow T$$

Cette dernière étape ne présente pas un caractère universel et dépend de la nature des contraintes appliquées au système. Ces trois échelles universelles, dites de Bogolioubov, permettent de quantifier le scénario de relaxation vers l'équilibre thermodynamique ; en effet, les corrélations initiales du système décrites par la fonction de distribution à N corps \mathcal{F} disparaissent sur une échelle de temps précinétique, ensuite, sur une échelle de temps cinétique l'évolution de la fonction de distribution à un corps, $F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, peut être décrite dans le cadre de la théorie cinétique ; enfin, les équations de l'hydrodynamique, présentées dans le paragraphe suivant, permettent de suivre la dynamique finale des quantités macroscopiques telles que densité $n(\mathbf{r})$, vitesse hydrodynamique $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ et température $T(\mathbf{r})$. Par exemple, pour un litre d'air à pression atmosphérique et à une température de 300 K, ces trois échelles de temps sont données par les valeurs du tableau (2.3).

L'ordering de Bogolioubov entre trois échelles de temps permet de construire une hiérarchie de modèles adaptés aux différents processus ; ainsi, l'hydrodynamique peut être considérée comme une description réduite par rapport à la théorie cinétique

Tableau 2.3

Échelle	Précinétique	Cinétique	Hydrodynamique
τ	10^{-12} s	10^{-9} s	10^{-4} s
Description	$\mathcal{F}(r_1, p_1, r_2, \dots, p_N, t)$	$F(r, p, t)$	$n(r), V(r), T(r)$

et la théorie cinétique comme une description réduite par rapport à la physique statistique. La cohérence et le caractère opérationnel de ces modèles étant garanties par un ensemble de méthodes d'élimination des variables rapides et irrelevantes. La hiérarchie des différentes disciplines : physique statistique, théorie cinétique, mécanique des fluides, thermodynamique macroscopique de l'équilibre s'établit donc suivant le tableau (2.4).

Tableau 2.4

Modèles Statistiques : $\mathcal{F}(r_1, p_1, r_2, p_2, \dots, r_N, p_N, t)$
↓ Réduction cinétique : décorrélation ↓
Modèles Cinétiques : $F(r, p, t)$
↓ Réduction fluide : équilibre thermodynamique local ↓
Modèles Fluides : $n(r, t), V(r, t), T(r, t) \dots$
↓ Equilibre thermodynamique global ↓
Modèles thermodynamiques homogènes : $n, T \dots$

En physique des plasmas l'étude des corrélations de nature précinétique est sans intérêt et l'essentiel des méthodes et résultats concernent la théorie cinétique et l'hydrodynamique ; l'équilibre thermodynamique global étant rarement atteint.

Considérons par exemple une population électronique interagissant avec un gaz neutre dans un réacteur basse pression ; soit L la dimension du réacteur, λ le libre parcours moyen entre deux collisions, m la masse de l'électron, M la masse des atomes neutres, ν la fréquence de collision et a la taille typique d'un atome neutre. L'ordering de Bogolioubov peut être établi à partir de ces caractéristiques :

$$\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial t} \sim \frac{\lambda^2}{L^2} \nu \ll \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial t} \sim \frac{m}{M} \nu \ll \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial t} \sim a n^{\frac{1}{3}} \nu$$

La nature dynamique du processus de décorrélation et l'existence de l'ordering de Bogolioubov ne sont pas restreints à la physique des plasmas, mais se retrouvent aussi en physique des milieux dilués neutres et des phases condensées. Notons, pour conclure, que la hiérarchie introduite dans les paragraphes précédents entre échelle micro/meso/macro n'est pas universelle et n'est pas d'origine dynamique comme

l'ordering de Bogolioubov, elle dépend du problème considéré et est de nature plus structurale ; pour les problèmes de physique des plasmas, l'échelle microscopique est l'échelle cinétique et l'échelle macroscopique l'échelle hydrodynamique, l'échelle mésoscopique est intermédiaire entre l'hydrodynamique et le cinétique.

2.2.3 Distribution de Maxwell

Compte tenu de son caractère attracteur, à l'issue de la phase cinétique, la distribution de Maxwell des vitesses $f_0(v)$ (2.21) mérite une attention particulière ; établissons donc quelques-unes de ses propriétés. Dans ce paragraphe nous considérerons cette distribution $f_0(v)$ normalisée à l'unité,

$$\int_0^{+\infty} f_0(v) dv = 1,$$

et nous introduirons séparément la densité n , supposée uniforme, dans certains chapitres, ainsi que dans d'autres ouvrages, la distribution $f_0(v)$ est parfois normalisée à la densité

$$\int_0^{+\infty} f_0(v) dv = n$$

lorsque cette dernière est homogène. Un certain nombre de moments, particulièrement utiles, des distributions gaussiennes sont rappelés dans le tableau (2.5).

Tableau 2.5

n	$\int_0^{+\infty} x^{2n} \exp(-\beta x^2) dx$	$\int_0^{+\infty} x^{2n+1} \exp(-\beta x^2) dx$
0	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$	$\frac{1}{2\beta}$
1	$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\beta^3}}$	$\frac{1}{2\beta^2}$

Deux vitesses permettent de caractériser une distribution maxwellienne, la vitesse moyenne $\langle v \rangle$ et la vitesse quadratique moyenne $\langle v^2 \rangle$. Ces deux vitesses sont respectivement définies comme les premier et deuxième moments de la fonction de distribution $f_0(v)$ (tableau 2.6).

Pour les protons (p) et les électrons (e) les valeurs numériques de la vitesse moyenne sont données par les formules :

$$\langle v_e \rangle [\text{km} \cdot \text{s}^{-1}] = 671 \sqrt{\frac{T_e}{[1 \text{ eV}]}}, \quad \langle v_p \rangle [\text{km} \cdot \text{s}^{-1}] = 15 \sqrt{\frac{T_i}{[1 \text{ eV}]}} \quad (2.22)$$

Tableau 2.6

Quantité	Définition	Valeur
Vitesse moyenne	$\langle v \rangle = \int_0^{+\infty} v f_0(v) dv$	$\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$
Vitesse quadratique moyenne	$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\int_0^{+\infty} v^2 f_0(v) dv}$	$\sqrt{\frac{3kT}{m}}$

Ces vitesses caractéristiques permettent d'exprimer la température et la pression, ainsi que la densité d'énergie, le flux de particules et le flux d'énergie cinétique. Considérons d'abord la densité volumique d'énergie interne, ou énergie interne volumique, définie comme la somme sur toute la distribution de l'énergie cinétique : $u = nm \langle v^2 \rangle / 2$, où n est la densité de particules.

$$u = \frac{nm \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} nkT$$

Afin de calculer la densité de flux de particules ou flux Γ , suivant une direction de référence donnée, calculons le nombre de particules, $dN(v, \theta)$, par unité de volume dont la vitesse fait un angle θ avec la direction de référence et dont le module de vitesse est égal à v ; ce nombre est donné par la fonction de distribution des vitesses pondérée par le rapport de l'angle solide infinitésimal autour de θ ramené à l'angle solide total (Figure 2.11).

$$dN(v, \theta) = n \frac{2\pi \sin \theta d\theta}{4\pi} f_0(v) dv$$

Le nombre de particules traversant un élément de surface dS , dans le plan perpendiculaire à la direction de référence, durant un temps dt , sous un angle θ , est alors obtenu en multipliant dN par le volume accessible à l'élément de surface dS durant un temps dt : $dV = v \cos \theta dS dt \rightarrow dN(v, \theta) v \cos \theta dS dt$ (Figure 2.11).

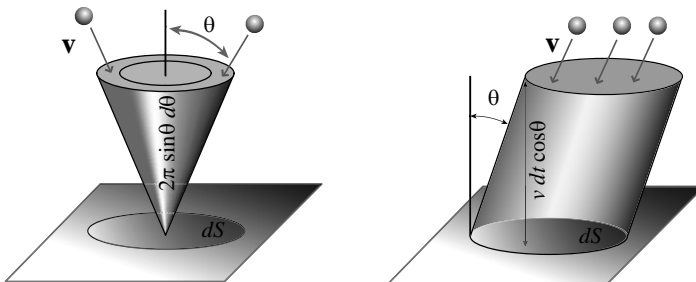


Figure 2.11 Flux de particules à travers une surface dS et volume accessible aux particules de vitesse v durant un instant dt .

Le flux infinitésimal de particules, $d\Gamma(v, \theta)$, (à travers la surface de référence) possédant un module de vitesse égal à v , est obtenu en divisant ce nombre de particules par l'unité de temps dt et l'élément de surface dS (Figure 2.11).

$$d\Gamma(v, \theta) = dN(v, \theta) v \cos \theta \rightarrow \frac{d\Gamma(v, \theta)}{d\theta dv} = \frac{1}{2} n v \cos \theta \sin \theta f_0(v)$$

Le nombre total de particules traversant une surface dS , par unité de temps, Γ , a pour valeur la somme des flux infinitésimaux lorsque l'angle θ varie de 0 à $\pi/2$ et le module de la vitesse v varie de 0 à $+\infty$.

$$\Gamma = n \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta \sin \theta}{2} d\theta \int_0^{+\infty} v f_0(v) dv = \frac{n}{4} \int_0^{+\infty} v f_0(v) dv = \frac{n \langle v \rangle}{4}$$

L'intégrale sur le module de la vitesse n'est autre que la définition de la vitesse moyenne, le résultat final est donc :

$$\Gamma = \frac{n \langle v \rangle}{4} = n \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} \quad (2.23)$$

Ce flux dirigé transporte non seulement de la masse et de la charge, mais aussi de l'impulsion ; le flux d'impulsion peut être caractérisé par un tenseur dont les éléments diagonaux décrivent la pression. Nous introduirons cette définition du tenseur de pression dans le chapitre six consacré aux structures électriques ; ici, nous allons calculer la pression cinétique sur la base d'un bilan de forces. Considérons un élément de paroi, immobile et impénétrable, de surface dS ; une particule de vitesse \mathbf{v} faisant un angle θ par rapport à la direction normale à l'élément de surface transférera une quantité de mouvement $2mv \cos \theta$ lors d'une réflexion sur cette paroi (Figure 2.12).

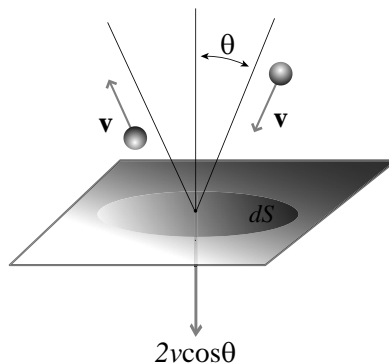


Figure 2.12 Pression et transfert d'impulsion sur un élément de surface.

La pression infinitésimale $dP(v, \theta)$ induite par les particules de vitesse v et d'angle θ est obtenue en multipliant par le flux infinitésimal incident sur la paroi.

$$dP(v, \theta) = 2mv \cos \theta d\Gamma(v, \theta) = nmv^2 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta f_0(v) dv$$

La pression totale générée par l'ensemble des particules à pour valeur la somme des pressions infinitésimales $dP(v, \theta)$ lorsque l'angle θ varie de 0 à $\pi/2$ et le module de la vitesse v varie de 0 à $+\infty$.

$$P = n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{+\infty} m v^2 f_0(v) dv = \frac{nm}{3} \int_0^{+\infty} v^2 f_0(v) dv = \frac{nm \langle v^2 \rangle}{3}$$

La pression cinétique totale s'exprime donc en fonction de la vitesse quadratique moyenne, et l'équation des gaz parfait, ou loi de Mariotte-Gay-Lussac-Boyle est ainsi retrouvée.

$$P = \frac{nm \langle v^2 \rangle}{3} = nkT \quad (2.24)$$

Enfin, la somme de l'énergie interne volumique u et de la pression P (2.24) définit l'enthalpie volumique : $h = P + u = \frac{5}{2}nkT$. Le tableau (2.7) résume cet ensemble de définitions et relations.

Tableau 2.7

Quantité	Définition	Valeur
Énergie interne volumique	$u = nm \langle v^2 \rangle / 2$	$\frac{3}{2}nkT$
Enthalpie volumique	$h = 5nm \langle v^2 \rangle / 6$	$\frac{5}{2}nkT$
Pression	$P = nm \langle v^2 \rangle / 3$	nkT

Ce formalisme cinétique de la dynamique des gaz permet d'identifier l'enthalpie comme la quantité mesurant le flux énergétique non dirigé. Considérons un gaz à l'équilibre thermodynamique local, en écoulement à la vitesse \mathbf{V} , décrit par la fonction de distribution des vitesses Maxwellienne :

$$f(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{V})^2}{2kT} \right)$$

Définissons le flux d'énergie cinétique dans la direction de l'écoulement :

$$\Gamma_c = n \int \frac{mv^2}{2} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{V} f(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = mnV \left[\frac{5}{3} \frac{\langle v^2 \rangle}{2} + \frac{V^2}{2} \right] = nV \left[\frac{5}{2}kT + \frac{mV^2}{2} \right]$$

Le flux d'énergie Γ_c n'est donc pas donné par $u\mathbf{V}$ plus le flux d'énergie cinétique de l'écoulement $nmV^2\mathbf{V}/2$, mais par $h\mathbf{V} + nmV^2\mathbf{V}/2$. L'énergie interne spécifique est transportée par le flux d'un vecteur somme de l'enthalpie spécifique et de l'énergie cinétique de l'écoulement. Il est aussi intéressant de calculer le flux de quantité de

mouvement pour un écoulement Γ_P .

$$\Gamma_c = \left[h + n \frac{mV^2}{2} \right] \mathbf{V}, \quad \Gamma_P = [P + nmV^2] \frac{\mathbf{V}}{V} \quad (2.25)$$

La distribution de Maxwell des vitesses d'un ensemble de particules permet donc d'évaluer les densités et flux décrivant le comportement macroscopique de cet ensemble. Les trois principaux flux, de particule, d'énergie et de quantité de mouvement sont résumés dans le tableau (2.8).

Tableau 2.8

Quantité	Définition	Valeur
Flux de particules	$\Gamma = \frac{n \langle v \rangle}{4}$	$n \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}$
Flux de quantité de mouvement	$\Gamma_P = P + nmV^2$	$nkT + nmV^2$
Flux d'énergie	$\Gamma_c = \left[h + n \frac{mV^2}{2} \right] V$	$\left[\frac{5}{2}kT + \frac{mV^2}{2} \right] nV$

Dans le cadre d'une modélisation hydrodynamique ces quantités obéissent à des équations de transport reliant la divergence des flux (Tableau 2.8) et la variation temporelle locale des densités (Tableau 2.7) ; dans le paragraphe suivant nous allons établir ces relations.

2.3 HYDRODYNAMIQUE

L'échelle de temps ultime, décrivant les processus lents, est donc l'échelle hydrodynamique ; sur une échelle de temps cinétique la fonction de distribution va relaxer vers une distribution de Maxwell locale :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = n(\mathbf{r}, t) \left(\frac{m}{2\pi kT(\mathbf{r}, t)} \right)^{\frac{3}{2}} \exp - \frac{m [\mathbf{v} - \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)]^2}{2kT(\mathbf{r}, t)}$$

mais, les caractéristiques de cette distribution seront inhomogènes dans l'espace. L'étude de la dynamique des variables hydrodynamiques $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$, $n(\mathbf{r}, t)$, $T(\mathbf{r}, t)$, décrivant cet équilibre thermodynamique local, relève de la mécanique des milieux continus. La modélisation de la dynamique d'un ensemble d'ions et d'électrons, considéré comme un milieu continu, pose le problème du choix de la représentation. En effet, en mécanique des milieux continus deux types de représentations sont utilisés :

- la représentation lagrangienne, et
- la représentation eulérienne.

La première est utilisée en théorie de l'élasticité et la deuxième en mécanique des fluides. L'étude des écoulements unidimensionnels en aérodynamique est simplifiée par une approche lagrangienne, qui n'est en fait que l'interprétation physique de la méthode des caractéristiques. En physique des plasmas, lorsqu'un modèle fluide s'avère nécessaire, il est d'usage de considérer un formalisme eulérien, mais, comme nous le verrons dans le chapitre suivant, un formalisme lagrangien peut, parfois, se révéler plus adapté à la formulation d'un certain nombre de problèmes unidimensionnels, ainsi qu'à l'étude des principes de stabilité magnétohydrodynamique. De même, dans le cadre de la théorie cinétique des plasmas, une approche lagrangienne, basée sur le théorème de représentation de Lagrange, permettra l'écriture des différentes équations cinétiques d'une manière particulièrement claire et efficace.

2.3.1 Théorème de Lagrange

La description lagrangienne du mouvement d'un fluide s'attache au suivi de la position et de la vitesse de chaque particule fluide. Une *particule fluide* est un ensemble mésoscopique d'électrons (d'ions) en nombre suffisamment grand pour que les fluctuations des variables dynamiques soient négligeables. La coordonnée lagrangienne permettant d'identifier cette particule fluide est sa position \mathbf{r}_0 à un instant, de référence, initial t_0 ; les variables lagrangiennes dynamiques sont alors la position $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \xi(\mathbf{r}_0, t)$ et la vitesse $\mathbf{V} = \partial\xi(\mathbf{r}_0, t)/\partial t$ de cette particule à un instant ultérieur t .

- L'avantage de cette description lagrangienne réside dans la simplicité de l'écriture du principe fondamental de la dynamique lorsque des particules de masse m et de charge q interagissent avec un champ électrique \mathbf{E} et un champ magnétique \mathbf{B} .

$$\frac{\partial^2 \xi(\mathbf{r}_0)}{\partial t^2} = \frac{q}{m} \mathbf{E}(\mathbf{r}_0 + \xi) + \frac{q}{m} \frac{\partial \xi(\mathbf{r}_0)}{\partial t} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_0 + \xi)$$

- L'inconvénient de cette description lagrangienne réside dans le fait que les équations de Maxwell s'expriment en fonction de termes sources correspondant à une description eulérienne du plasma : $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ et $n(\mathbf{r}, t)$.

Le point de vue eulérien ne s'attache pas à l'identité de chaque particule fluide mais à l'identité de chaque point de l'espace \mathbf{r} dans lequel est plongé le plasma. Les variables eulériennes décrivent la densité, $n(\mathbf{r}, t)$, et la vitesse du plasma, $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$, en chaque point de l'espace \mathbf{r} à chaque instant t .

Le point de vue lagrangien est actif et implique un repérage (\mathbf{r}_0) et un suivi (ξ) de chaque particule fluide, le point de vue eulérien est passif et s'attache à une description en chaque point de l'espace (\mathbf{r}) (Figure 2.13). Bien entendu ces deux représentations d'une réalité unique peuvent être aisément réconciliées.

$$\begin{array}{l} \mathbf{r} \\ \text{Position eulérienne} \end{array} \equiv \begin{array}{l} \mathbf{r}_0 \\ \text{Coordonnée lagrangienne} \end{array} + \begin{array}{l} \xi(\mathbf{r}_0, t) \\ \text{Déplacement lagrangien} \end{array} \quad (2.26)$$

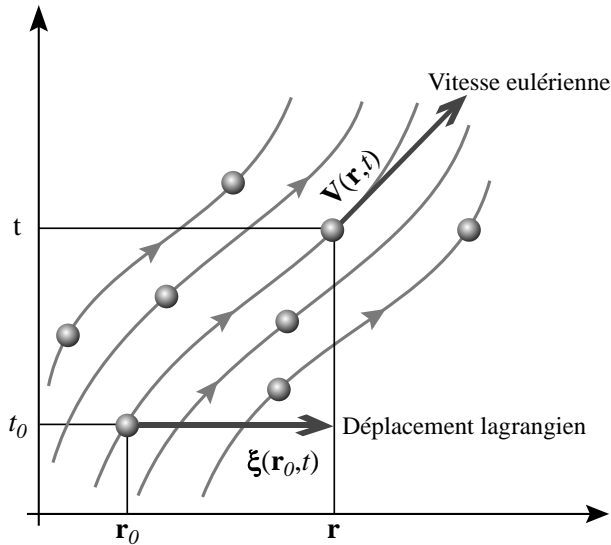


Figure 2.13 Orbites lagrangiennes et écoulement eulérien.

De même, la vitesse eulérienne en ce point \mathbf{r} , à l’instant t , peut être exprimée en fonction de la vitesse lagrangienne.

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\xi(\mathbf{r}_0,t)} \equiv \frac{\partial \xi(\mathbf{r}_0, t)}{\partial t} \tag{2.27}$$

Vitesse eulérienne
Vitesse lagrangienne

Cette dernière relation permet d’exprimer l’accélération d’une particule fluide en fonction de la vitesse eulérienne. Pour ce faire, comparons les vitesses eulériennes et lagrangiennes à deux instants voisins en deux points voisins par lesquels passe la particule lagrangienne.

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \xi(\mathbf{r}_0, t)}{\partial t}, \quad \mathbf{V}\left(\mathbf{r} + \frac{\partial \xi}{\partial t} dt, t + dt\right) = \frac{\partial \xi(\mathbf{r}_0, t + dt)}{\partial t}$$

La différence entre ces deux expressions permet d’exprimer l’accélération en coordonnées eulériennes.

$$\frac{\partial^2 \xi(\mathbf{r}_0, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \tag{2.28}$$

Accélération lagrangienne
Accélération eulérienne

Les deux termes du second membre étant respectivement appelés dérivée locale et dérivée convective. Cette dernière formule met en évidence l’un des inconvénients majeur de la formulation eulérienne : l’accélération est une fonction non linéaire de la vitesse.

Le cadre de la réconciliation des points de vues lagrangien et eulérien peut aussi être élaboré à l'aide du théorème de Lagrange. Le théorème de Lagrange (*Mem. de l'Acad. de Berlin XXIV, 1770*) n'est pas spécifique à la physique des plasmas. Il permet de développer une modélisation en terme de fonction de distribution (de densité) pour tout système dont la dynamique microscopique (lagrangienne) pour chaque particule est connue. Soit donc $F(\mathbf{x})$ une densité de particules dans un espace $[\mathbf{x}]$ quelconque (vitesse, position, énergie...), $F(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ est le nombre moyen de particules au voisinage de \mathbf{x} dans l'élément de volume $d\mathbf{x}$. Ce système n'est pas statique et son évolution dynamique se traduit par un déplacement lagrangien de chaque particule ; ainsi la particule qui se trouvait en \mathbf{x} est déplacée (ou se déplace) en $\mathbf{x} + \xi(\mathbf{x})$ (Figure 2.14).

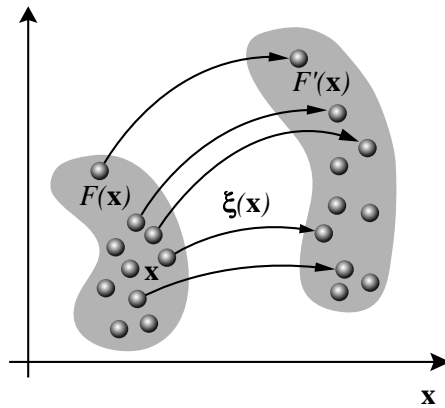


Figure 2.14 Déplacement lagrangien et distribution eulérienne.

Le problème est de calculer la nouvelle densité $F'(\mathbf{x})$ en tout point de l'espace des \mathbf{x} après la déformation due au déplacement de tous les points. La conservation du nombre de particules se traduit par l'identité :

$$F'(\mathbf{x}) = \int \delta[\mathbf{x} - (\mathbf{s} + \xi(\mathbf{s}))] F(\mathbf{s}) d\mathbf{s}$$

La déformation est supposée suffisamment petite pour permettre un développement de Taylor.

$$\delta[\mathbf{x} - \mathbf{s} - \xi(\mathbf{s})] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) - \xi(\mathbf{s}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) + \frac{1}{2} \xi(\mathbf{s}) \xi(\mathbf{s}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s})$$

Compte tenu de la parité de la distribution de Dirac, $\delta(a) = \delta(-a)$, les dérivés par rapport à la position finale \mathbf{x} peuvent être prises par rapport à la position générique initiale \mathbf{s} .

$$\delta[\mathbf{x} - \mathbf{s} - \xi(\mathbf{s})] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) + \xi(\mathbf{s}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) + \frac{1}{2} \xi(\mathbf{s}) \xi(\mathbf{s}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s})$$

La fonction de distribution F' , après la déformation décrite par le champ inhomogène $\xi(\mathbf{x})$, est donc donnée par :

$$F'(\mathbf{x}) = \int F(\mathbf{s}) [\delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) + \xi(\mathbf{s}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) + \frac{1}{2} \xi(\mathbf{s}) \xi(\mathbf{s}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s})] d\mathbf{s}$$

Le théorème d'intégration par partie est ensuite utilisé sur chaque terme pour éliminer toutes les dérivations de distributions de Dirac, permettant ainsi d'intégrer les sommes et d'obtenir le résultat final.

$$F'(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \xi(\mathbf{x}) F(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \xi(\mathbf{x}) \xi(\mathbf{x}) F(\mathbf{x})$$

Ce dernier résultat constitue le théorème de Lagrange. Si pendant une durée δt chaque particule subit un déplacement $\xi(\mathbf{x}, \delta t)$ alors le taux de variation temporel de la distribution est donné par :

$$\frac{\partial F(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left[\frac{\xi(\mathbf{x}, \delta t)}{\delta t} F(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\xi(\mathbf{x}, \delta t) \xi(\mathbf{x}, \delta t)}{2\delta t} F(\mathbf{x}, t) \right] \quad (2.29)$$

On reconnaît une forme de Fokker-Planck, mais ici les coefficients de mobilité, $\xi(\mathbf{x}, \delta t)/\delta t$ et diffusion $\xi(\mathbf{x}, \delta t)\xi(\mathbf{x}, \delta t)/2\delta t$ ne sont pas des moyennes statistiques mais des déformations données. Les applications du théorème de Lagrange en mécanique des milieux continus sont nombreuses, par exemple le bilan de matière dans un écoulement fluide sans diffusion peut être établi sur la base de ce théorème car les expressions des coefficients sont particulièrement simples.

$$\frac{\xi(\mathbf{r}, \delta t)}{\delta t} = \mathbf{V}(\mathbf{r}, t), \quad \frac{\xi(\mathbf{r}, \delta t)\xi(\mathbf{r}, \delta t)}{\delta t} = \mathbf{0}$$

L'équation (2.29) prend alors la forme de l'équation classique de conservation du nombre de particules pour un écoulement fluide.

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot [n(\mathbf{r}, t)\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)] = 0 \quad (2.30)$$

Les autres équations de la mécanique des fluides peuvent aussi être dérivées à partir du théorème de Lagrange, mais nous utiliserons la voie plus classique des bilans de forces et d'énergie.

2.3.2 Équation d'Euler

Considérons une distribution de pression non-uniforme, $P(x)$, où l'axe des x est pris suivant la direction d'inhomogénéité. Isolons, par la pensée, un élément de volume du fluide considéré : $dx dS$ (Figure 2.15). Cet élément de volume est un cylindre de génératrices parallèles à l'axe des x , d'épaisseur dx et les deux faces de ce cylindre ont une surface dS .

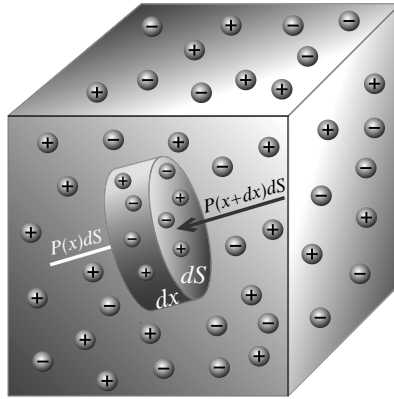


Figure 2.15 Pression sur un élément de volume et densité volumique de force de pression.

La pression exercée sur ces deux faces étant différente, ce cylindre est soumis à une force $\mathcal{F}dx dS$ (c'est à dire à une densité volumique de forces \mathcal{F}) égale à la résultante des forces de pression.

$$\mathcal{F}dx dS = P(x+dx)dS - P(x)dS = -dx dS \frac{dP}{dx}$$

Ainsi, la densité volumique de forces \mathcal{F} dans un fluide où règne une pression inhomogène est égale à l'opposé du gradient de pression.

$$\left[\frac{\mathcal{F}}{\text{N} \cdot \text{m}^{-3}} \right] = -\nabla \left[\frac{P}{\text{N} \cdot \text{m}^{-2}} \right] \quad (2.31)$$

Cette dernière formule permet de traduire le bilan d'impulsion lagrangien, c'est-à-dire la loi de Newton, en une équation eulérienne, l'équation d'Euler (2.32) ; identifions pour cela la densité volumique de force et la densité volumique d'accélération (2.28) que multiplie la masse d'une particule m .

$$nm \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] = -\nabla P + nq [\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}] \quad (2.32)$$

Nous obtenons ainsi un système de quatre équations, (2.30) et (2.32), pour cinq inconnues : n , \mathbf{V} et P ; il est donc nécessaire de compléter ce système par une équation supplémentaire pour obtenir une structure de problème bien posé. La stratégie la plus simple est de considérer une équation d'état algébrique reliant la pression P et la densité n .

En l'absence de processus de transport, ou de discontinuité, la pression scalaire vérifie une équation d'adiabatique. Le terme équation d'état utilisé ici n'est pas approprié, les relations dérivées sont des relations de transformation thermodynamique, l'équation d'état est $P = nkT$, mais nous pratiquerons l'abus de langage qui consiste

à appeler équation d'état toute relation algébrique entre variables d'états thermodynamiques.

- Pour un modèle isentropique, par abus de langage, adiabatique, la pression P et la densité n ne sont pas deux variables indépendantes et la relation traduisant la conservation de l'entropie, c'est-à-dire l'absence d'échange de chaleur dans une transformation réversible, est donnée par :

$$\text{Isentropique} : \frac{P}{n^\gamma} = \frac{P_0}{n_0^\gamma} \quad (2.33)$$

L'indice adiabatique γ est égal au rapport des capacités calorifiques c_p/c_v , qui pour un gaz parfait en dimension d est donné par : $\gamma = d + 2/d$. Cette équation (2.33) sera utilisée lorsque les processus de conduction de la chaleur seront beaucoup plus lents que le processus étudié, c'est-à-dire lorsque le processus dynamique étudié est très rapide.

- Par contre, lorsque les processus de conduction de la chaleur sont rapides à l'échelle du processus étudié (c'est à dire lorsque ce dernier est lent) et n'autorisent pas l'existence d'un gradient de température nous utiliserons une équation isotherme.

$$\text{Isotherme} : \frac{P}{n} = \frac{P_0}{n_0} \quad (2.34)$$

Enfin, dans certains cas, une équation d'état isochore (volume constant) ou isobare (pression constante) peut être considérée, $P = P_0$, $n = n_0$. Le système des trois équations fluides : équation de conservation du nombre de particules (2.30), équation d'Euler (2.32), et équation d'état (2.33), constitue un système de cinq équations scalaires décrivant les cinq variables hydrodynamiques, la densité de particules $n(\mathbf{r}, t)$, la vitesse eulérienne $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ et la pression $P(\mathbf{r}, t)$.

L'équation d'Euler peut être mise sous une forme qui est particulièrement bien adaptée à l'étude des écoulements unidimensionnels. Introduisons pour cela l'enthalpie \mathcal{H} et l'enthalpie libre massique \mathcal{G} ; considérons l'énergie interne par unité de masse $\mathcal{U} = u/nm$, l'entropie par unité de masse \mathcal{S} , l'enthalpie par unité de masse est alors donnée par $\mathcal{H} = \mathcal{U} + \frac{P}{nm} = h/nm$ et l'enthalpie libre par unité de masse par $\mathcal{G} = \mathcal{H} - T\mathcal{S}$. Les variations de ces variables intensives sont décrites par les formules classiques : $d\mathcal{H} = Td\mathcal{S} + dP/nm$ et $d\mathcal{G} = SdT + dP/nm$.

D'une part, le terme de pression $\nabla P/nm$ de l'équation d'Euler (2.32) peut donc être ramené à un gradient d'enthalpie, ou à un gradient d'enthalpie libre, dans les cas isentropiques ou isothermes.

$$\left. \frac{\nabla P}{nm} \right|_{\mathcal{S}} = \nabla \mathcal{H}, \quad \left. \frac{\nabla P}{nm} \right|_T = \nabla \mathcal{G}$$

D'autre part, le terme de dérivée convective peut être réarrangé de manière à faire apparaître la vortacité $\nabla \times \mathbf{V}$ et l'énergie cinétique de l'écoulement :

$$\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = \nabla V^2/2 + (\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V}.$$

Pour les écoulements stationnaires $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$, irrotationnels ($\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{0}$), non magnétisés ($\mathbf{E} = -\nabla\phi$, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$), isentropiques ou isothermes, l'équation d'Euler se réduit alors à une équation de conservation qui constitue une généralisation du théorème de Bernoulli.

$$\text{Isentropique} : \nabla \left[\frac{1}{2}V^2 + \mathcal{H} + \frac{q}{m}\phi \right] = \mathbf{0} \quad (2.35)$$

$$\text{Isotherme} : \nabla \left[\frac{1}{2}V^2 + \mathcal{G} + \frac{q}{m}\phi \right] = \mathbf{0}$$

Cette formulation de la dynamique, en terme d'invariant, est particulièrement bien adaptée à l'étude des écoulements ioniques et électroniques unidimensionnels.

BIBLIOGRAPHIE

Une bonne maîtrise des outils, méthodes et résultats (i) de la physique statistique, (ii) de la mécanique des fluides et (iii) de l'électrodynamique des milieux continus est nécessaire pour une pratique efficace et productive de la physique des plasmas.

► Mécanique des fluides

- G.K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1980.
- G. Birkhoff, *Hydrodynamics, a study in logic, fact and similitude*, Princeton University Press, Princeton, USA, 1960.
- R. Comolet, *Mécanique Expérimentale des Fluides*, Tomes 1&2, Masson, Paris, France, 1969.
- R. Courant et K.O. Friedrichs, *Supersonic Flow and Shock Waves*, Springer-Verlag, Berlin, RFA, 1991.
- C. Fediaevski, I. Voïtkounski et Y. Fadeev, *Mécanique des Fluides*, Éditions MIR, Moscou, URSS, 1974.
- H. Lamb, *Hydrodynamics*, Dover Publications, New York, USA, 1945.
- L. Landau et E. Lifchitz, *Mécanique des Fluides*, Éditions MIR, Moscou, URSS, 1971.
- L.M. Milne-Thomson, *Theoretical Hydrodynamics*, MacMilan, Glasgow, UK, 1972.

► **Problèmes de théorie cinétique**

- T.K. Bose, *High Temperature Gas Dynamics*, Springer Verlag, Berlin, RFA, 2004.
- T.I. Gombosi, *Gaskinetic Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, USA, 1994.
- C.V. Heer, *Statistical Mechanics Kinetic Theory and Stochastic Processes*, Academic Press, New York, USA, 1972.
- K. Huang, *Statistical Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1963.
- E. Lifchitz et L. Pitayevski, *Cinétique Physique*, Éditions Mir, URSS, 1990.
- L.E. Reichl, *A Modern Course in Statistical Physics*, Edward Arnold, Texas, USA, 1980.

► **Problèmes de dynamique des gaz raréfiés**

- A. Chambers, R.K. Fitch et B.S. Halliday, *Basic Vacuum Technology*, Institute of Physics Publishing, Bristol, UK, 1998.
- A. Kikoïne et I. Kikoïne, *Physique Moléculaire*, Éditions MIR, Moscou, URSS, 1979.
- J.F. O'Hanlon, *A User's Guide to Vacuum Technology*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1989.
- M. Sedlacek, *Electron Physics of Vacuum and Gaseous Devices*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1996.

► **Électrodynamique des milieux continus**

- J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1975.
- L. Landau et E. Lifchitz, *Électrodynamique des Milieux Continus*, Éditions MIR, Moscou, URSS, 1969.
- W.K.H. Panofsky et M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, Addison-Wesley, Reading, USA, 1977.
- Smythe, *Static and Dynamic Electricity*, Mac Graw-Hill Book Company, 1950.
- J.A. Stratton, *Théorie de l'Électromagnétisme*, Dunod, Paris, France, 1961.

Chapitre 3

Phénomènes collectifs

Il est également possible que si chacun, pâle d'enthousiasme, applaudit, bisse et se démène, c'est parce que les autres aussi se démènent et poussent des cris ; et il peut très bien arriver ainsi que, dans une salle de concert, nul ne soit directement enchanté, mais que tous manifestent leur enchantement parce que chacun se modèle sur ses voisins.

Ferdydurke, W. Gombrowicz.

L'extrême variété des conditions de température, degré d'ionisation, densité et champ magnétique, des plasmas spatiaux, thermonucléaires et industriels, illustrée par les figures 1.1 et 1.2, se traduit par une grande richesse de comportement physique. Afin de maîtriser cette diversité phénoménologique, la première étape d'un travail de modélisation est donc l'identification des différents paramètres caractéristiques (temps, longueurs, énergie...) associés à un plasma et aux processus considérés. Ce travail d'identification des paramètres caractéristiques implique, en premier lieu, un recensement de toutes les quantités dimensionnées (densité, masse de l'électron, température...) intervenant dans la description du plasma et des processus dynamiques ; puis, à partir de ces paramètres primaires, la construction d'un jeu de paramètres secondaires (fréquence de Langmuir, vitesse d'Alfvén, fréquence cyclotron...) d'usage plus courant et plus adapté à la discussion des différents régimes physiques.

C'est cet ensemble de paramètres secondaires, présenté dans ce chapitre, que nous appellerons échelles caractéristiques des phénomènes collectifs car ils sont caractéristiques d'un certain nombre de phénomènes génériques (écranage, quasi-neutralité, relaxation...) associés aux réponses collectives du plasma. La discussion

finale des différents régimes physiques pourrait s'effectuer en termes de nombres caractéristiques sans dimension (nombre de Mach, nombre de Reynolds, nombre de Knudsen,... en mécanique des fluides) construits à partir de ces échelles caractéristiques. Mais, en physique des plasmas, bien que certains de ces nombres sans dimension apparaissent dans des contextes particuliers (paramètre de Hall, paramètre bêta...), l'usage des nombres adimensionnés est beaucoup moins systématisé qu'en hydrodynamique et thermique.

La modélisation d'un plasma se présente toujours comme l'étude d'un problème de couplage champ électromagnétique-matière ionisée. En ce qui concerne la partie électrodynamique de ce type de problème l'électrodynamique classique possède déjà un système d'unités naturelles complet; en effet, la charge de l'électron e , sa masse m , ainsi que la vitesse de la lumière $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ et l'impédance du vide $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$, constituent un premier jeu de quatre paramètres dimensionnés et indépendants. Ces quatre constantes de l'électrodynamique classique peuvent être aisément ramenées à (i) une longueur : le rayon classique de l'électron, $r_e = e^2/4\pi\epsilon_0mc^2 = 2,8 \times 10^{-15}$ [m], (ii) une masse : la masse de l'électron, $m = 9,1 \times 10^{-31}$ [kg], (iii) un temps : $r_e/c = 9,4 \times 10^{-24}$ [s] et (iv) un courant : le courant d'Alfvén, $I_A = 4\pi\epsilon_0mc^3/e = 17$ [kA]. La description de la matière ionisée en termes de densité, température et champ magnétique... ainsi que la description des processus considérés en termes de longueurs et de temps typiques introduisent d'autres grandeurs caractéristiques. Compte tenu de la multiplicité de ces paramètres dimensionnés indépendants décrivant la matière, on conçoit donc aisément qu'une classification générale des différents régimes de la dynamique des plasmas soit impossible. Néanmoins, au cas par cas, la complexité des problèmes de physique des plasmas peut être appréhendée à l'aide d'un certain nombre d'échelles caractéristiques, qui apparaissent de manière récurrente dans nombre de problèmes classiques. Le choix de ces paramètres est donc dicté par l'usage et, pour un problème donné, ces échelles caractéristiques permettent d'établir un ordering permettant d'identifier les processus dominants et d'associer à cette hiérarchie de processus des méthodes d'approximation opérationnelles facilitant la construction d'un modèle pertinent. Cette discussion générale sur la nécessité d'organiser la construction d'un modèle et la solution d'un problème autour de l'ordering de quelques échelles caractéristiques prendra toute sa valeur pratique dans les chapitres consacrés aux processus cinétiques, aux structures électriques, aux structures magnétiques et aux ondes.

Un plasma est soumis à deux tendances :

- une tendance au désordre due à l'agitation thermique, et
- une tendance à l'organisation due à l'aspect collectif que peut manifester l'interaction coulombienne.

Ces deux tendances permettent aux plasmas de rester sous forme ionisée, tout en restant globalement neutre, en créant des conditions s'opposant à la séparation de

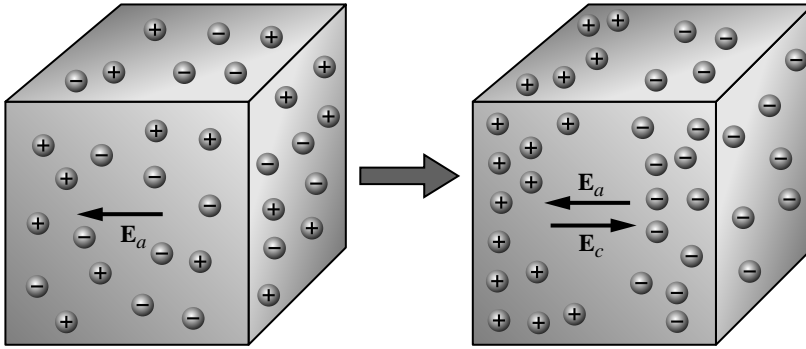


Figure 3.1 Écrantage électrique.

charges sur des distances supérieures à une échelle de longueur L et, pour des processus dynamiques, plus lents qu'une échelle de temps T . Une telle neutralité, dans un volume supérieur à L^3 et pour une durée supérieure à T est appelée quasi-neutralité car pour des volumes inférieurs à L^3 et une dynamique plus rapide que T une séparation de charges et un champ électrique peuvent apparaître.

Sur la base de cette définition de la quasi-neutralité, il convient maintenant d'identifier les deux échelles caractéristiques mésoscopiques L et T . Ces deux échelles caractéristiques sont en fait universelles pour tous les plasmas : ce sont la longueur de Debye et la fréquence de Langmuir ou fréquence plasma. La quasi-neutralité se décline aussi en terme d'écrantage électrique et magnétique et la quantification de ces phénomènes d'écrantage débouche sur les mêmes échelles caractéristiques de temps et longueur L et T .

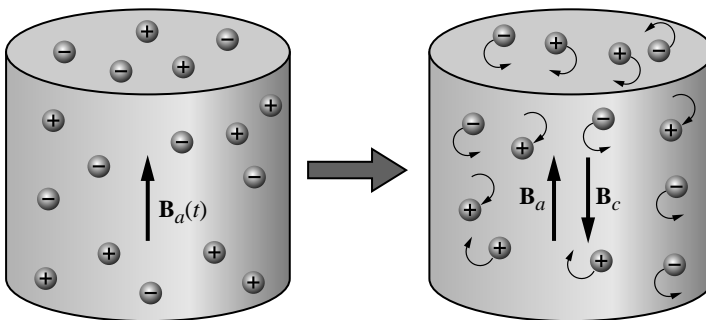


Figure 3.2 Écrantage magnétique.

Considérons un système de charges libres, globalement neutre, et appliquons un champ généré par des sources extérieures \mathbf{E}_a (Figure 3.1). La force de coulomb crée une séparation de charges et cette séparation est la source d'un champ, d'origine interne, \mathbf{E}_c . Un équilibre électrostatique est atteint lorsque $\mathbf{E}_a + \mathbf{E}_c \approx \mathbf{0}$. Le champ appliqué est ainsi écranté ; la description complète de ce processus passe par

la réponse à deux questions de nature dynamique et structurelle : (i) quelle est l'extension spatiale de la région où l'identité $\mathbf{E}_a + \mathbf{E}_c \approx \mathbf{0}$ est vérifiée ? et (ii) quel est le temps caractéristique d'établissement de cet équilibre électrostatique ?

Considérons toujours le même système de charges libres, globalement neutre. Appliquons, à l'aide de sources extérieures, un champ magnétique $\mathbf{B}_a(t)$ (Figure 3.2). Le champ électrique d'induction ainsi généré par la variation temporelle de ce champ magnétique met en mouvement les charges, et les courants résultant de ce mouvement engendrent un champ magnétique d'origine interne \mathbf{B}_c . Un équilibre est atteint lorsque $\mathbf{B}_a + \mathbf{B}_c \approx \mathbf{0}$: c'est le phénomène d'écrantage magnétique. La description complète de ce processus passe par la réponse à deux questions : (i) sur quelle échelle de longueur l'identité $\mathbf{B}_a + \mathbf{B}_c \approx \mathbf{0}$ est elle vérifiée ? et (ii) quel est le temps caractéristique d'établissement de cet écrantage magnétique ?

L'identification des échelles de temps associées à la quasi-neutralité et à l'écrantage répondra à ces questions fondamentales sur l'interaction champs-particules.

3.1 PERTURBATION ÉLECTRONIQUE

3.1.1 Fréquence de Langmuir

Cette tendance vers la quasi-neutralité peut être explorée à travers l'étude de la réponse électronique à une perturbation électrique interne : des processus rapides pourront briser la neutralité et induire une séparation de charges ; des processus lents laisseront au plasma le temps de se réorganiser afin de neutraliser la perturbation. La transition entre ces deux régimes définira l'échelle de temps recherchée. Nous allons étudier un modèle unidimensionnel de perturbation électronique permettant d'identifier la fréquence plasma, ou fréquence de Langmuir, qui définit cette échelle. Soit un plasma constitué d'ions, supposés infiniment lourds, donc au repos, et d'électrons mobiles de charge $-e$. À l'équilibre, la densité ionique et la densité électronique n_0 sont homogènes.

Considérons une perturbation unidimensionnelle, le long de l'axe des x , telle que tous les électrons appartenant au plan $x = x_0$ à l'équilibre soient déplacés dans le plan $x = x_0 + \xi(x_0, t)$ à l'instant t , les ions restant au repos et le mouvement thermique des électrons étant négligé devant le mouvement dû à la perturbation (Figure 3.3). ξ étant une fonction de la position au repos x_0 la densité devient inhomogène car les différentes tranches ne sont pas déplacées du même incrément. Ainsi, la séparation de charges résultante génère un champ électrique. Tous les électrons situés initialement entre le plan $x = x_0$ et le plan $x = x_0 + \xi$ sont déplacés vers des coordonnées $x > x_0 + \xi$ afin de préserver l'ordre initial entre les différentes couches d'électrons. On observe donc à l'instant t un déficit de charges négatives à gauche du plan $x = x_0 + \xi$ (Figures 3.3 et 3.4). La valeur de cette séparation de charges doit être évaluée afin d'appliquer

le théorème de Gauss pour calculer le champ électrique E ainsi créé en $x_0 + \xi$.

$$\text{Théorème de Gauss : } ES = \frac{n_0 e S \xi(x_0, t)}{\epsilon_0}$$

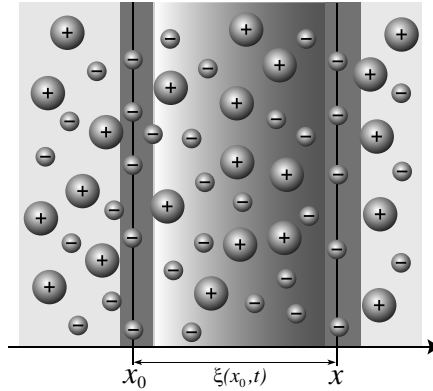


Figure 3.3 Perturbation électronique.

S est une surface quelconque parallèle au plan yOz . Ce champ électrique est la source d'une accélération et le principe fondamental de la dynamique fournit une deuxième relation entre E et ξ .

$$\text{Loi de Newton : } m_e \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -eE$$

L'élimination du champ électrique entre ces deux équations permet d'obtenir l'équation décrivant la dynamique du déplacement lagrangien $\xi(x_0, t)$.

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e} \xi = 0$$

L'échelle de temps associée à la réponse électronique est donc l'inverse de la pulsation plasma ou Langmuir ω_p définie comme :

$$\omega_p \equiv \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e}} \rightarrow \frac{\omega_p [\text{Hz}]}{2\pi} = 8981 \sqrt{n_0 [\text{cm}^{-3}]} \quad (3.1)$$

Cette échelle de temps traduit le caractère collectif des forces coulombiennes. L'équation précédente décrit une force de rappel linéaire, opérant sur une échelle de temps ω_p^{-1} . Bien que cette force de rappel ait tendance à restaurer la neutralité du plasma, elle ne peut y parvenir car à l'instant où la tranche de plasma x_0 regagne sa position initiale, $\xi = 0$, l'énergie potentielle du déplacement est convertie en énergie

cinétique et le résultat est une oscillation autour de la position assurant la neutralité.

$$\xi(x_0, t) = \xi_0(x_0) \cos [\omega_p t + \theta_0(x_0)]$$

$\xi_0(x_0)$ et $\theta_0(x_0)$ étant les conditions initiales de la perturbation. Tous les électrons situés initialement entre le plan $x = x_0$ et le plan $x = x_0 + dx_0$ sont déplacés entre les plans de coordonnées $x = x_0 + \xi(x_0, t)$ et $x = x_0 + dx_0 + \xi(x_0, t) + \partial\xi/\partial x_0 dx_0$. La conservation du nombre de particules se traduit donc par l'identité : $n_0 dx_0 = n(x, t) [dx_0 + \partial\xi/\partial x_0 dx_0]$. La densité électronique eulérienne $n(x, t)$ résultante peut ainsi être exprimée en fonction du déplacement lagrangien ξ .

$$\left. \frac{n(x, t)}{n_0} \right|_{x=x_0+\xi(x_0, t)} = \frac{1}{1 + \frac{\partial\xi}{\partial x_0}} \approx 1 - \frac{\partial\xi_0}{\partial x_0} \cos [\omega_p t + \theta_0] + \xi_0 \frac{\partial\theta_0}{\partial x_0} \sin [\omega_p t + \theta_0]$$

Ce modèle unidimensionnel permet d'identifier la fréquence de Langmuir comme l'échelle de temps caractéristique de la réponse électronique à une perturbation initiale et fait apparaître cette réponse comme une superposition d'oscillations.

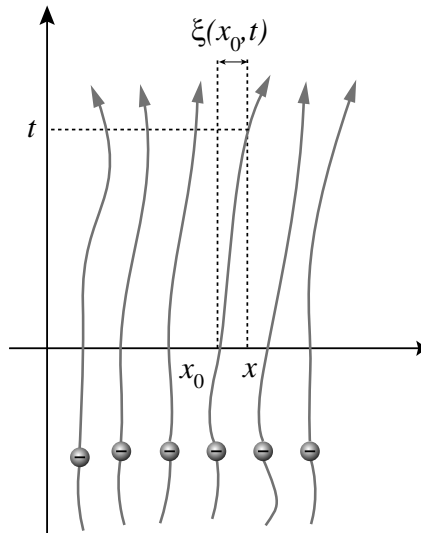


Figure 3.4 Déplacement lagrangien électronique.

3.1.2 Éclatement coulombien

La fréquence de Langmuir est aussi associée au phénomène d'éclatement coulombien des structure non-neutres, par exemple les faisceaux de particules chargées. L'éclatement coulombien est simplement dû au fait qu'un ensemble de particules de même charge non neutralisé a tendance à éclater sous l'effet des répulsions électrostatiques mutuelles. Soit donc un cylindre homogène, infini, constitué de particules

identiques de charge q et de masse m . Sous l'effet des forces de répulsion électrostatique ce cylindre va avoir tendance à éclater (Figure 3.5). À l'instant initial $t = 0$, le rayon de ce cylindre est R . On appelle $\xi(r, t)$ le déplacement radial à l'instant t des électrons de la couronne cylindrique de rayon initial r . À l'instant $t = 0$ on a donc $\xi(r, 0) = 0$ et $\partial\xi/\partial t = 0$. À l'instant $t > 0$ le théorème de Gauss appliqué à une surface cylindrique permet de calculer le champ électrique radial en un point de coordonnée $r + \xi$ et la force de Coulomb ainsi créée produit une accélération $\partial^2\xi/\partial t^2$.

$$E(r + \xi) = \frac{nq}{2\varepsilon_0} \frac{r^2}{r + \xi} \rightarrow \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{nq^2}{2\varepsilon_0 m} \frac{r^2}{r + \xi}$$

Une intégrale première, où l'on reconnaît l'énergie cinétique électronique et l'énergie potentielle d'une distribution cylindrique, permet d'abaisser l'ordre du problème d'un degré. L'intégration de cette équation du premier degré par quadrature fournit la relation implicite $t(\xi, r)$ décrivant l'éclatement coulombien du cylindre.

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 = \omega_p^2 r^2 \log\left[\frac{r + \xi}{r}\right] \rightarrow \omega_p t(\xi, r) = \int_1^{1+\frac{\xi}{r}} \frac{du}{\sqrt{\log u}}$$

Le temps de doublement du rayon du faisceau donne l'échelle caractéristique du phénomène d'éclatement coulombien.

$$t(R \rightarrow 2R) = \frac{1}{\omega_p} \int_1^2 (\log u)^{-\frac{1}{2}} du \quad (3.2)$$

L'échelle caractéristique de temps associée à l'éclatement coulombien est donc l'inverse de la pulsation plasma $\omega_p^2 = nq^2/\varepsilon_0 m$.

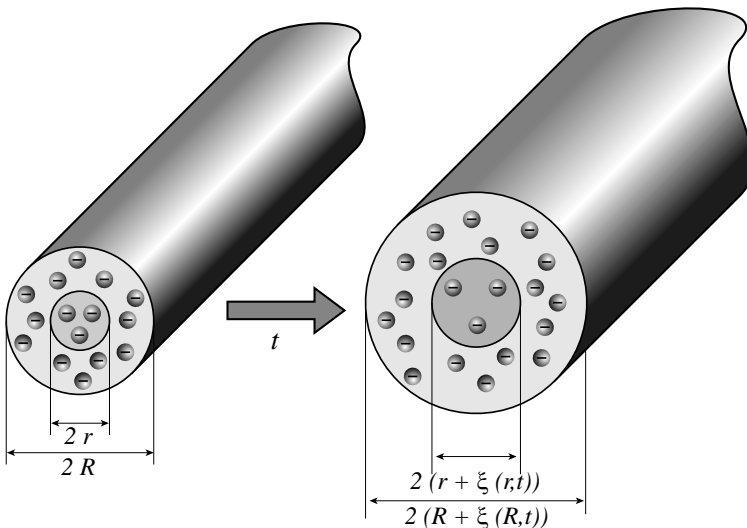


Figure 3.5 Éclatement coulombien d'un cylindre.

Ce phénomène oblige donc à neutraliser en charge les faisceaux lents si l'on souhaite les manipuler pendant un temps grand devant la période plasma. Pour les faisceaux rapides la force de Laplace due au champ magnétique généré par le faisceau s'oppose à l'éclatement coulombien et induit un phénomène de pincement (des charges de même signe se repoussent, mais des courant de même signe s'attirent) car le champ magnétique est proportionnel au courant donc à la vitesse.

3.2 ÉCRANTAGE ÉLECTRIQUE

3.2.1 Longueur de Debye

La longueur de Debye constitue l'échelle spatiale caractérisant l'hypothèse de quasi-neutralité et le phénomène d'écrantage électrique. Afin d'établir ce résultat nous allons d'abord étudier un modèle unidimensionnel d'écrantage électrique et nous expliquerons ensuite comment une structure d'écrantage peut être attachée à toutes les particules du plasma à travers le concept de sphère de Debye.

Soit un plasma décrit par une densité d'électrons n et une densité d'ions n_i . À l'intérieur du plasma, $n = n_i = N$. Ce plasma, semi-infini, occupe la région de l'espace $x \leq 0$. Les ions sont supposés infiniment lourds et sont donc au repos, les électrons possèdent une vitesse non nulle suivant l'axe des x . Cette vitesse permet aux électrons de s'éloigner de l'interface plasma-vide en $x = 0$, mais, ce faisant, les ions et les électrons ne se neutralisent plus mutuellement et créent, par séparation de charges, un champ électrique qui induit une force de rappel sur la population électronique. Les électrons rebroussement donc chemin au bout d'une distance λ (Figure 3.6).

Soit $v(x)\mathbf{e}_x$ la vitesse d'un électron à une distance x de l'interface $x = 0$. On a donc $v(x = \lambda) = 0$ et on pose $v(x = 0) = \pm V$. La densité d'électrons $n(x)$ à une distance x de l'interface $x = 0$ vérifie $n(x > \lambda) = 0$ et $n(x \leq 0) = N$ (Figure 3.6). On appelle $\phi(x)$ le potentiel électrostatique à une distance x de l'interface $x = 0$, ce potentiel électrostatique vérifie les conditions aux limites

$$\phi(x = 0) = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=\lambda} = 0.$$

En effet, pour $x > \lambda$ le champ électrique est nul car la somme totale des charges est nulle pour $x < \lambda$ (théorème de Gauss).

La longueur λ est donc la longueur caractéristique de brisure de la neutralité lorsque les électrons ont une vitesse V ; dans le paragraphe suivant nous étendrons ce modèle au cas plus réaliste d'une distribution thermique de vitesses. La valeur de λ s'obtient aisément en considérant la conservation de la charge et de l'impulsion ainsi que la relation de Poisson. Le principe de conservation de la charge, en régime stationnaire, s'exprime par la nullité de la divergence du flux électronique $d[n(x)v(x)]/dx = 0$.

Les trois inconnues de ce problème, $n(x)$, $v(x)$ et $\phi(x)$, vérifient donc un système de trois équations.

$$\begin{aligned} \text{Conservation de l'énergie} & : \frac{m}{2} v^2(x) - e\phi(x) = \frac{m}{2} V^2 \\ \text{Conservation de la charge} & : n(x)v(x) = NV \\ \text{Équation de Poisson} & : \frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{ne}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (3.3)$$

où $-e$ est la charge de l'électron et m sa masse. Les deux premières équations étant de nature algébrique et non différentielle, elles constituent naturellement le point de départ du processus d'élimination.

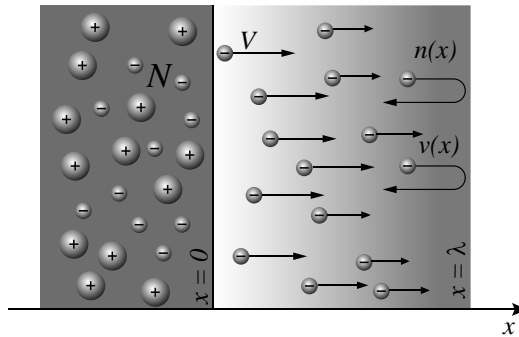


Figure 3.6 Séparation de charge inertielle.

Le théorème de conservation de l'énergie mécanique permet en effet d'exprimer $v(x)$ en fonction de $\phi(x)$. La densité électronique peut ensuite être exprimée en fonction du potentiel électrostatique en éliminant la vitesse dans l'équation de conservation de la charge.

$$v(x) = \sqrt{V^2 + \frac{2e\phi(x)}{m}} \rightarrow n(x) = \frac{NV}{\sqrt{V^2 + \frac{2e\phi(x)}{m}}}$$

Afin de faciliter la résolution finale et le calcul de λ , introduisons des variables normalisées de potentiel et de position : $\phi(x) \rightarrow \Phi(X)$ où

$$X = \sqrt{\frac{2Ne^2}{\epsilon_0 m V^2}} x, \quad \Phi = \frac{2e}{m V^2} \phi \quad (3.4)$$

Ces variables permettent de simplifier l'écriture de la relation de Poisson reliant potentiel et charges. Cette relation est semblable à l'équation décrivant un mouvement unidimensionnel dans un potentiel statique et admet donc une intégrale première qui, compte tenu des conditions aux limites sur la dérivée du potentiel, s'écrit :

$$\frac{d^2\Phi}{dX^2} = \frac{1}{\sqrt{1+\Phi}} \rightarrow \left(\frac{d\Phi}{dX}\right)^2 = 4\sqrt{1+\Phi}$$

Cette dernière équation s'intègre aisément et permet d'exprimer le potentiel en fonction de la distance à l'interface, le choix du signe étant dicté par la contrainte de croissance ou de décroissance à partir de $X = 0$.

$$d\Phi = \pm 2dX (1+\Phi)^{\frac{1}{4}} \rightarrow \Phi(X) = \left[1 - \frac{3X}{2}\right]^{\frac{4}{3}} - 1$$

La longueur caractéristique λ est donc donnée par $X = \frac{2}{3}$.

$$\lambda = \frac{V}{3} \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 m}{Ne^2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{V}{\omega_p} \quad (3.5)$$

Il est tentant de généraliser ce résultat au cas plus réaliste d'une distribution thermique de vitesse en remplaçant V par la vitesse moyenne et en considérant la longueur caractéristique ainsi obtenue comme une longueur d'écrantage au-delà de laquelle les densités de charges ioniques et électroniques sont égales. Cette conclusion est valide; nous allons démontrer que la longueur ainsi obtenue, la longueur de Debye, constitue effectivement la longueur d'écrantage d'un plasma à l'équilibre thermodynamique, c'est-à-dire l'échelle de longueur en dessous de laquelle la quasi-neutralité est brisée.

Considérons un plasma d'hydrogène, à l'équilibre thermodynamique, caractérisé par une densité d'électrons $n_e(x)$ et une densité d'ions $n_i(x)$; à l'équilibre $n_e = n_0 = n_i$. Ces deux populations sont maintenues à une température T , le plasma est infini, globalement neutre et le potentiel électrique ϕ étant uniforme peut être pris égal à zéro. En $x = 0$, introduisons une électrode plane et infinie, parallèle aux plans yOz . Étudions les perturbations de potentiel et de densité lorsque cette électrode est portée à un potentiel ϕ_0 . Le potentiel $\phi(x)$ en un point de coordonnées x vérifie l'équation de Poisson :

$$\text{Équation de Poisson : } \frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{n_e(x)q_e + n_i(x)q_i}{\varepsilon_0}$$

et satisfait aux conditions aux limites $\phi(-\infty) = \phi(+\infty) = 0$, $d\phi(-\infty)/dx = d\phi(+\infty)/dx = 0$ (champ et potentiel nuls à l'infini), $\phi(0) = \phi_0$.

En réponse au potentiel électrique les électrons vont avoir tendance à rechercher les zones de potentiel fort et les ions les zones de potentiel faible. Cette tendance est

atténuée par l'agitation thermique qui va étaler les distributions ionique et électronique dans les minima et les maxima du potentiel. Le compromis entre ces tendances à la minimalisation de l'énergie et à la maximalisation de l'entropie est obtenue pour une distribution boltzmanienne de la densité.

$$\text{Relation de Boltzmann : } n_e q_e + n_i q_i = n_0 q_e \exp \left[\frac{-q_e \phi}{kT} \right] + n_0 q_i \exp \left[\frac{-q_i \phi}{kT} \right]$$

où $q_e = -q_i = -e$. Cette distribution d'équilibre peut être obtenue, soit à partir de la mécanique statistique (2.21), soit à partir de la statique des fluides en considérant la densité volumique de force de pression $-\nabla P$ et la densité volumique de force électrique $-nq \nabla \phi$ dans le cadre d'un comportement isotherme $P = nkT$ des deux populations ionique et électronique. À l'équilibre ces deux densités de force ont une résultante nulle :

$$\frac{dnkT}{dx} + nq \frac{d\phi}{dx} = 0 \rightarrow \log n \sim -q\phi/kT.$$

La solution de l'équation de Poisson avec un terme source non-linéaire du type Boltzmann se simplifie en introduisant des variables normalisées de position et le potentiel : $\phi(x) \rightarrow \Phi(X)$ où

$$\Phi = \frac{e}{kT} \phi, \quad X = \sqrt{\frac{2n_0 e^2}{\epsilon_0 kT}} x \quad (3.6)$$

Ces grandeurs normalisées permettent une réécriture simplifiée de l'équation de Poisson-Boltzmann. Cette équation est semblable à celle décrivant un mouvement unidimensionnel dans un potentiel statique de type cosh. Elle admet donc une intégrale première qui, compte tenu des conditions aux limites sur la dérivée du potentiel, s'écrit :

$$\frac{d^2 \Phi}{dX^2} = \sinh \Phi \rightarrow \left(\frac{d\Phi}{dX} \right)^2 = 2 [\cosh \Phi - 1]$$

Compte tenu de l'identité $\cosh \Phi - 1 = 2 \sinh^2 \Phi/2$, cette dernière relation est ensuite ramenée à deux quadratures : $\int d\Phi/2 \sinh(\Phi/2) = \pm \int dX$. Le choix du signe est imposé par la contrainte de croissance ou de décroissance à partir de $X = 0$ selon le signe de ϕ_0 . Le résultat final est donné par :

$$\frac{e\phi}{2kT} = \log \frac{1 + \tanh \left| \frac{e\phi_0}{4kT} \right| \exp \left(-\sqrt{\frac{2n_0 e^2}{\epsilon_0 kT}} |x| \right)}{1 - \tanh \left| \frac{e\phi_0}{4kT} \right| \exp \left(-\sqrt{\frac{2n_0 e^2}{\epsilon_0 kT}} |x| \right)} \approx \frac{e\phi_0}{2kT} \exp \left(-\frac{|x|}{\lambda_D} \right)$$

L'étude de ce résultat montre clairement que pour des distances supérieures à $\lambda_D = \sqrt{\varepsilon_0 kT / n_0 e^2}$ le potentiel électrostatique est écranté et décroît exponentiellement vers zéro. Cette écrantage résulte de la réorganisation des électrons et des ions au voisinage de l'électrode, sous l'effet du champ appliqué, afin de créer un champ opposé. La longueur caractéristique d'écrantage de Debye λ_D est ainsi identifiée et définie.

$$\lambda_D \equiv \sqrt{\frac{\varepsilon_0 kT}{n_0 e^2}} \rightarrow \lambda_D [\text{cm}] = 743 \sqrt{\frac{T [\text{eV}]}{n [\text{cm}^{-3}]}} \quad (3.7)$$

En fait la polarisation d'un plasma au voisinage d'une paroi ou d'une électrode est un phénomène plus complexe qui sera étudié dans le chapitre traitant des structures électriques où nous introduirons le concept de gaines ; néanmoins, le modèle précédent permet d'identifier clairement la longueur de Debye comme l'échelle de longueur caractéristique en dessous de laquelle une séparation de charge statique donc une polarisation statique peut exister. Lorsque $x < \lambda_D$ la quasi-neutralité n'est plus assurée. Au voisinage des parois, ou lors de décharges dans le vide, les zones non neutres polarisées ont en général une structure plus complexe que celle prédite par l'équation précédente : de telles structures sont appelées gaines et constituent avec les faisceaux les deux grandes familles de plasmas où l'hypothèse de quasi-neutralité n'est pas vérifiée.

3.2.2 Sphère de Debye

Ce modèle peut être repris à une échelle microscopique au voisinage de chaque particule. Considérons, par exemple, un ion immobile de charge Ze dans un plasma de densité électronique n_0 et de densité ionique n_0/Z . Sous l'effet des forces coulombiennes cet ion va avoir tendance à attirer les électrons et à repousser les autres ions. Cette tendance est contrebalancée par l'agitation thermique qui tend à lisser toutes les accumulations de charges et un équilibre entre ces deux tendances antagonistes est obtenu pour une distribution de Boltzmann des électrons $n_0 \exp(e\phi/kT)$ où $\phi(r)$ est le potentiel électrostatique autour de l'ion et r la distance relative électrons-ion ; ϕ est solution de l'équation de Poisson-Boltzmann dans un plasma qui contrairement au cas du vide doit prendre en compte l'atmosphère électronique autour de l'ion.

$$\begin{aligned} \text{Vide} & : \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} \phi(r) = -Ze \frac{\delta(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ \text{Plasma} & : \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} \phi(r) = -Ze \frac{\delta(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \underbrace{\frac{n_0 e}{\varepsilon_0}}_{\text{Population ionique}} + \underbrace{\frac{n_0 e}{\varepsilon_0} \exp\left[\frac{e\phi(r)}{kT}\right]}_{\text{Population électronique}} \end{aligned}$$

Le premier terme du second membre décrit la charge ponctuelle ionique et les termes suivants les composantes ionique et électronique du plasma où nous avons supposé

les ions infiniment lourds, donc décrits par une densité homogène et imperturbable. Afin de résoudre cette équation nous supposons que l'énergie d'agitation thermique domine l'énergie potentielle d'interaction : $kT \gg e\phi$. Sous cette hypothèse, nous pouvons effectuer un développement limité du terme source non-linéaire et obtenir l'équation de Poisson-Boltzmann linéarisée décrivant la structure électronique au voisinage d'un ion.

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} \phi - \frac{\phi}{\lambda_D^2} = -Ze \frac{\delta(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Le potentiel électrostatique au voisinage de l'ion est donc donné par la solution :

$$\begin{aligned} \text{Vide} & : \phi(r) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r} \\ \text{Plasma} & : \phi(r) = \frac{Ze \exp\left[-\frac{r}{\lambda_D}\right]}{4\pi\epsilon_0 r} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Lorsque $r > \lambda_D$ on a $e\phi/kT < 1/n\lambda_D^3$, l'hypothèse de linéarisation est donc valide si le nombre $n\lambda_D^3 \gg 1$, c'est-à-dire si le nombre de particules dans la sphère de Debye ($r < \lambda_D$) autour de l'ion est grand devant un. Considérons des sphères de rayon λ_D centrées sur chaque ion du plasma. À l'extérieur de chacune de ces sphères le plasma est quasi-neutre car le potentiel est exponentiellement faible comme le démontre la solution précédente. Ce résultat est valable si le nombre d'électrons dans chaque sphère de Debye est très grand devant 1, $n\lambda_D^3 \gg 1$. Cette condition est semblable à la définition des plasmas idéaux donnée dans le chapitre précédent, $\Xi^{-1} \approx \epsilon_0 n^{-\frac{1}{3}} kT/e^2 \gg 1 \rightarrow n\lambda_D^3 \gg 1$. Lorsque $r < \lambda_D$, l'hypothèse de linéarisation n'est plus valide.

En conclusion, il faut noter que cette structuration du plasma en sphères de Debye n'a pas un caractère statique et ordonné mais une nature dynamique et statistique, un électron participant à plusieurs sphères de Debye et possédant lui-même une sphère ionique tout en évoluant dans l'espace sous l'effet de l'agitation thermique. Le statut physique de la longueur de Debye est celui d'une longueur de corrélation des fluctuations de densité, de même, la fréquence de Langmuir est l'inverse d'un temps de corrélation caractéristique des fluctuations de densité.

3.3 ÉCRANTAGE MAGNÉTIQUE

3.3.1 Longueur de London

Après avoir étudié et caractérisé les réponses électriques, il convient maintenant d'étudier et de caractériser le comportement d'un plasma en réponse à une perturbation magnétique. Dans ce cas aussi les effets vont s'opposer aux causes qui leur donnent naissance et les charges libres d'un plasma vont avoir un comportement diamagnétique.

Sous l'influence d'un champ magnétique appliqué les charges vont s'organiser en courants tendant à créer des champs opposés aux champs appliqués. La force créant ces courants est la force électromotrice d'induction due aux variations temporelles du champ magnétique.

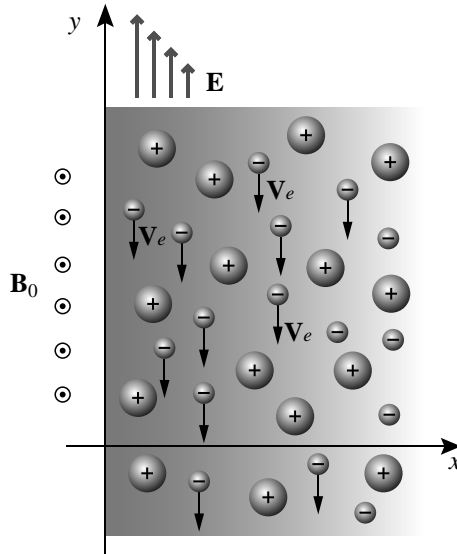


Figure 3.7 Effet de peau inertiel.

Considérons un plasma homogène, occupant le demi-espace $x > 0$, formé d'électrons, de densité n_e , et d'un fond neutralisant d'ions, supposés infiniment lourds donc immobiles. Le demi-espace $x < 0$ est vide et soumis à un champ magnétique homogène, dépendant du temps, dirigé suivant l'axe des z : $\mathbf{B}(t) = B_0(t) \mathbf{u}_z$. Les variations temporelles de ce champ induisent un champ électrique d'induction \mathbf{E} , dirigé suivant l'axe des y : $\mathbf{E} = E \mathbf{u}_y$ et ce champ est la source d'un mouvement électronique de vitesse : $\mathbf{V}_e = V_e \mathbf{u}_y$, donc d'un courant ; ce courant crée un champ magnétique de direction opposée à celui appliqué et sa valeur détermine le processus de pénétration magnétique dans le plasma (Figure 3.7). Ce processus est décrit par les équations de Maxwell-Faraday pour l'induction, de Maxwell-Ampère pour la génération de champ magnétique et de Newton pour la dynamique des électrons.

$$\text{Équation de Maxwell-Faraday} : \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\text{Équation de Maxwell-Ampère} : \nabla \times \mathbf{B} = -\mu_0 n_e e \mathbf{V}_e \quad (3.9)$$

$$\text{Loi de Newton} : m_e \frac{d\mathbf{V}_e}{dt} = -e \mathbf{E}$$

où e et m_e sont respectivement la charge et la masse de l'électron.

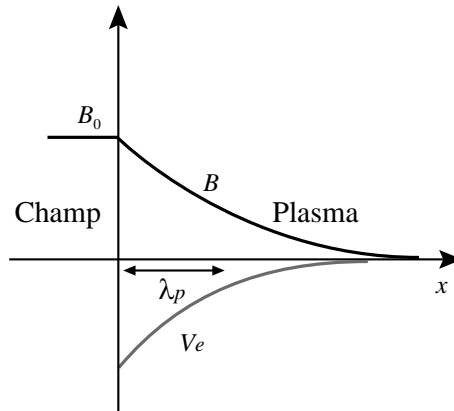


Figure 3.8 Pénétration magnétique inertielle.

Dans le cadre du modèle unidimensionnel précédent ce système se réduit à trois équations scalaires.

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad \frac{\partial B}{\partial x} = \mu_0 n_e e V_e, \quad \frac{\partial V_e}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} E$$

L'élimination du champ magnétique et de la vitesse entre ces trois équations permet d'établir l'équation décrivant la dynamique du champ électrique.

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\mu_0 n_e e^2}{m_e} E = \frac{\omega_p^2}{c^2} E = \lambda_p^{-2} E$$

où la longueur de London λ_p est définie comme le rapport de la vitesse de la lumière c sur la pulsation de Langmuir.

$$\lambda_p \equiv c \sqrt{\frac{\varepsilon_0 m_e}{n e^2}} = \frac{c}{\omega_p} \rightarrow \lambda_p [\text{m}] = \frac{5298}{\sqrt{n [\text{cm}^{-3}]}} \quad (3.10)$$

Compte tenu de la condition aux limites : $B(x < 0, t) = B_0(t)$ la solution décrivant le phénomène d'écrantage magnétique est donc donnée par :

$$B(x, t) = B_0(t) \exp\left[-\frac{x}{\lambda_p}\right], \quad E(x, t) = \lambda_p \frac{\partial B_0}{\partial t} \exp\left[-\frac{x}{\lambda_p}\right]$$

Le champ magnétique est exponentiellement faible et pénètre à l'intérieur du plasma sur une longueur appelée épaisseur de peau inertielle ou longueur de London (Figure 3.8).

Ce phénomène d'écrantage magnétique implique que des zones de plasma initialement magnétisées restent magnétisées et que des zones initialement non magnétisées restent non magnétisées, l'échange entre ces zones étant restreint à des interfaces

dont l'épaisseur est de l'ordre de la longueur de London. Dans le cadre de la magnétohydrodynamique cette propriété sera redémontrée et constituera le théorème du gel d'Alfvén.

3.4 PERTURBATION MAGNÉTIQUE

3.4.1 Vitesse d'Alfvén

Considérons toujours un plasma homogène, occupant le demi-espace $x > 0$, formé d'électrons et d'ions ; le demi espace $x < 0$ est vide et soumis à un champ magnétique homogène dirigé suivant l'axe des z : $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{u}_z$. Le modèle précédent est maintenant complété pour prendre en compte la dynamique ionique. Pour cela nous allons inclure la force magnétique induite sur la population électronique. Cette force génère un déplacement électronique supplémentaire, ce déplacement résulte en une séparation de charge et cette séparation électrons-ions crée un champ électrique supplémentaire $F \mathbf{u}_x$.

Ce champ électrique met en mouvement les ions, l'écoulement ionique ainsi obtenu est décrit par la vitesse eulérienne $\mathbf{V}_i = V_i \mathbf{u}_x$. Les ions accompagnent donc le mouvement des électrons suivant l'axe des x afin de préserver la quasi-neutralité (Figure 3.9). Cette dynamique étant lente à l'échelle de l'inertie des électrons (ω_p^{-1}) il est inutile de calculer le champ électrostatique dû à la séparation des charges suivant l'axe des x et il est légitime de faire l'hypothèse de quasi-neutralité : $n_e = n_i$. Nous devons donc résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \text{Équation de Maxwell-Ampère} & : \nabla \times \mathbf{B} = -\mu_0 n_e e \mathbf{V}_e \\ \text{Loi de Newton pour les électrons} & : m_e \frac{d\mathbf{V}_e}{dt} = -e\mathbf{E} - e\mathbf{V}_e \times \mathbf{B} \\ \text{Équation d'Euler pour les ions} & : m_i \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial t} + m_i \mathbf{V}_i \cdot \nabla \mathbf{V}_i = e\mathbf{E} \end{aligned} \quad (3.11)$$

où le champ électrique, $\mathbf{E} = E \mathbf{u}_y + F \mathbf{u}_x$, est la superposition d'une composante inductive E , résultant d'une variation de flux et d'une composante capacitive F , résultant d'une séparation de charges. L'hypothèse de quasi-neutralité se traduit par un mouvement commun des ions et des électrons. Cette dernière population se réajuste sur une échelle de temps inertielle rapide (ω_p^{-1}), ce réarrangement rapide permettant de préserver la quasi-neutralité. Comme nous étudions un processus lent, il est légitime de négliger le terme inertiel suivant x dans l'équation décrivant la dynamique électronique (Figure 3.9).

$$m_e \frac{d\mathbf{V}_e}{dt} \Big|_x = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{E} + \mathbf{V}_e \times \mathbf{B} \Big|_x = \mathbf{0}$$

La population ionique est entraînée par le champ de charge d'espace $F \mathbf{u}_x$ induit par le mouvement résultant de la force de Laplace électronique ; nous observons donc

un transfert d'inertie à travers un couplage électrostatique. Cette accélération des ions ne se traduit pas par une accélération individuelle de chaque ion mais par un mouvement convectif stationnaire du plasma.

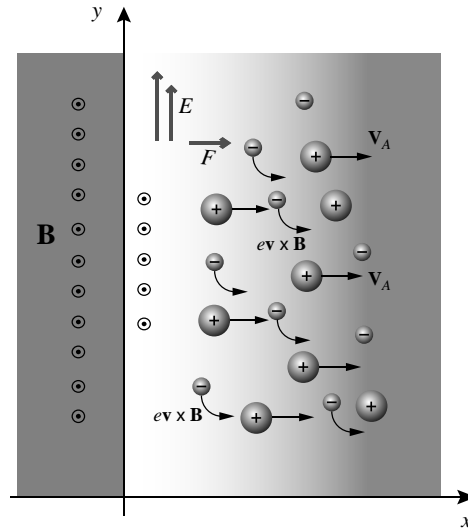


Figure 3.9 Perturbation magnétique, écrantage magnétique et force de Laplace.

En effet, l'équation traduisant la dynamique ionique, dans le cadre du modèle unidimensionnel stationnaire ($\partial/\partial t = 0$) considéré, se réduit à :

$$m_i \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial t} \Big|_x = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{V}_i \cdot \nabla \mathbf{V}_i = -\frac{e}{m_i} \mathbf{V}_e \times \mathbf{B} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{dV_i^2}{dx} \mathbf{u}_x = \frac{1}{\mu_0 n_e m_i} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$$

La vitesse caractéristique d'entraînement des ions en réponse à la perturbation magnétique est donc donnée par la vitesse d'Alfvén $V_A = B_0 / \sqrt{\mu_0 n_i m_i}$. La structure de l'écoulement ionique stationnaire ainsi obtenu est illustrée sur la figure 3.10.

$$\frac{dV_i^2}{dx} = -\frac{d}{dx} \frac{B^2}{\mu_0 n_i m_i} \rightarrow V_i^2 + \frac{B^2}{\mu_0 n_i m_i} = V_A^2$$

Il est important de noter que le problème stationnaire que nous venons de résoudre est assez irréaliste car il suppose qu'un réservoir de particules ré-alimente continûment le plasma en électrons et ions, au niveau de l'interface plasma-champ magnétique en $x = 0$, afin d'assurer la stationnarité de l'écoulement. La prise en compte de l'instationnarité conduirait à un problème plus réaliste, mais plus complexe, et la conclusion quant à la vitesse d'Alfvén comme vitesse de réponse du plasma serait inchangée.

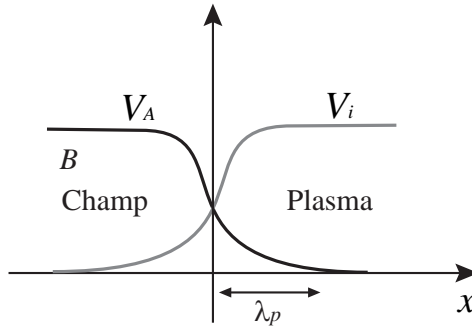


Figure 3.10 Perturbation magnétique et vitesse d'Alfvén.

La vitesse d'Alfvén V_A est donc la vitesse d'entraînement du plasma par une perturbation magnétique, lorsque cette perturbation cherche à pénétrer un plasma initialement non magnétisé. Le champ magnétique agit comme un piston dont la pression est donnée par la pression magnétique $B^2/2\mu_0$. En réponse à cette pression les ions répondent par un mouvement de recul à la vitesse d'Alfvén V_A .

$$V_A \equiv \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 n_i m_i}} \rightarrow \frac{V_A}{c} = 72758 \frac{B_0 [\text{T}]}{\sqrt{n_i [\text{cm}^{-3}]}} \quad (3.12)$$

La vitesse d'Alfvén apparaît aussi dans le contexte des plasmas initialement magnétisés comme la vitesse de propagation des ondes magnétiques.

3.4.2 Onde d'Alfvén

Afin de décrire les phénomènes d'ondes basses fréquences dans les plasmas magnétisés, considérons un plasma constitué d'ions, de charge e , de masse m_i et de densité n_{0i} et d'électrons, de charge $-e$, de masse m_e et de densité $n_{0e} = n_{0i} = n_0$. À l'équilibre les densités sont homogènes et le plasma est plongé dans un champ magnétique uniforme et statique $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{u}_z$. Nous étudions une perturbation unidimensionnelle le long de l'axe des x telle que tous les électrons, et tous les ions, appartenant à un plan $x = x_0$, à l'instant t_0 , soient déplacés dans le plan $x = x_0 + \xi(x_0, t)$, à l'instant t . La différence de comportement des électrons et des ions donne lieu à un courant, ce courant modifie le champ initial : $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{u}_z \rightarrow \mathbf{B}(x, t) = B(x, t) \mathbf{u}_z$ qui génère une force de Laplace sur les charges en mouvement ; cette force de Laplace réagit donc sur le mouvement initial de la perturbation *etc.* Tous les électrons et tous les ions situés initialement entre le plan $x = x_0$ et le plan $x = x_0 + dx_0$ sont déplacés entre les plans de coordonnées $x = x_0 + \xi(x_0, t)$ et $x = x_0 + dx_0 + \xi(x_0, t) + \partial\xi/\partial x_0 dx_0$, la conservation du nombre d'ions se traduit donc par l'identité :

$$n_0 = n_i \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x_0} \right)$$

La densité de force de Laplace $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ peut s'exprimer en fonction du champ magnétique grâce à l'équation de Maxwell-Ampère.

$$\frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\mu_0} \times \mathbf{B} = -\frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial B^2(x, t)}{\partial x} \mathbf{u}_x$$

Cette densité volumique de force divisée par la densité ionique est égale à l'accélération ionique que multiplie la masse ionique.

$$\text{Loi de Newton : } m_i \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{1}{2n_0\mu_0} \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x_0} \right) \frac{\partial B^2(x, t)}{\partial x}.$$

Nous avons deux inconnues : une inconnue lagrangienne et une inconnue eulérienne, le déplacement $\xi(x_0, t)$ et le champ $B(x, t)$. Il nous faut donc deux équations. Dans le repère propre de chaque élément de plasma, si la perturbation est plus lente que la période plasma, les électrons ont tendance à écranter le champ électrique sur une échelle de longueur plus grande que la longueur de Debye, il en résulte une quasi-nullité du champ électrique dans ce repère ; le champ électrique dans le repère au repos de chaque tranche de plasma est donné par la relation (2.1). Cette hypothèse d'écrantage dynamique, ou de réponse magnétohydrodynamique idéale, se traduit par :

$$\text{Écrantage dynamique} \quad : \quad \mathbf{E} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \mathbf{u}_x \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

$$\text{Équation de Maxwell-Faraday} \quad : \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Introduisons la vitesse d'Alfvén : $V_A = B_0 / \sqrt{\mu_0 n_i m_i}$, l'équation Maxwell-Faraday permet alors d'écrire un système différentiel fermé décrivant la dynamique d'une perturbation magnétique dans un plasma magnétisé.

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{1}{V_A^2} \frac{B_0^2}{B} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x_0} \right)^{-1}, \quad \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial x} B - \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial B}{\partial x}$$

Ce système non-linéaire peut être utilisé pour identifier et décrire des structures magnétique de type soliton. Nous considérons ici le cas de perturbations de faible amplitude et nous linéarisons donc ce système au premier ordre ξ pour obtenir :

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = V_A^{-2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \tag{3.13}$$

La vitesse d'Alfvén est donc, aussi, la vitesse caractéristique de propagation, perpendiculairement au champ statique, des perturbations magnétiques dans un plasma magnétisé. Nous verrons dans le chapitre sur les ondes que cette même vitesse décrit aussi le processus de propagation des perturbations magnétiques le long du champ statique.

3.5 PERTURBATION IONIQUE

3.5.1 Ondes acoustiques

Dans les gaz neutres, il est d'usage de définir la vitesse du son comme la vitesse des perturbations isentropiques de pression.

$$C_s \equiv \sqrt{\left. \frac{1}{m} \frac{\partial P}{\partial n} \right|_S} = \sqrt{\frac{\gamma k T}{m}}$$

La deuxième identité correspond au cas du gaz parfait. Dans un plasma, la température électronique est souvent supérieure à la température ionique et l'inertie d'un plasma, modélisé comme un fluide, est essentiellement ionique ; une généralisation de la définition de la vitesse du son serait :

$$C_s \equiv \sqrt{\frac{k T_e}{m_i}} \rightarrow C_s \text{ [m/s]} = 9789 \sqrt{T_e \text{ [eV]}} \quad (3.14)$$

Une question se pose donc naturellement : à quel processus physique correspond cette vitesse acoustique dans un plasma ? En effet, les plasmas sont souvent faiblement collisionnels et on voit mal comment un milieu avec un très faible niveau de collisions pourrait propager les surpressions et les dépressions qui constituent le son dans les gaz neutres. Malgré cet apparent paradoxe, les ondes acoustiques existent dans un plasma, mais ce ne sont pas de simples ondes acoustiques collisionnelles comme dans un fluide neutre ; pour les ondes acoustiques, dites ioniques, dans un plasma, c'est le champ électrique qui permet la propagation des surpressions et dépressions. L'élasticité d'un plasma trouve son origine dans la population électronique, à travers la température $T_e > T_i$, et l'inertie dans la population ionique car la masse ionique $m_i > m_e$. Afin d'étudier ce problème nous allons considérer à nouveau le cas d'une perturbation unidimensionnelle, le long de l'axe des x .

Considérons une perturbation, lente à l'échelle ω_{pe}^{-1} , le long de l'axe des x , telle que tous les ions appartenant à un plan $x = x_0$ à l'équilibre soient déplacés dans le plan $x = x_0 + \xi(x_0, t)$ à l'instant t . La perturbation est suffisamment lente pour que l'hypothèse de quasi-neutralité soit vérifiée. Cette hypothèse s'exprime par l'égalité des densités électronique et ionique, $n_e = n_i$. La lenteur du processus est telle que les électrons ont le temps de construire une distribution d'équilibre boltzmanienne dans le potentiel $\phi(x, t)$ induit par la perturbation. Sous cette hypothèse, un système fermé d'équations est obtenu en considérant l'équation décrivant la dynamique des ions sous l'influence du champ électrique $-\partial\phi(x, t)/\partial x$ ainsi que la conservation du nombre d'ions : tous les ions situés initialement entre le plan $x = x_0$ et le plan $x = x_0 + dx_0$ sont déplacés entre les plans de coordonnées $x = x_0 + \xi(x_0, t)$ et

$$x = x_0 + dx_0 + \xi(x_0, t) + \partial\xi/\partial x_0 dx_0.$$

$$\text{Loi de Newton pour les ions} : \frac{\partial^2 \xi(x_0, t)}{\partial t^2} = -\frac{e}{m_i} \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x}$$

$$\text{Relation de Boltzmann pour les électrons} : n_e(x, t) = n_0 \exp \left[\frac{e\phi(x, t)}{kT_e} \right]$$

$$\text{Conservation de la charge ionique} : n_i(x, t) = \frac{n_0}{1 + \frac{\partial \xi}{\partial x_0}} \quad (3.15)$$

Nous obtenons ainsi un système différentiel non-linéaire décrivant le déplacement ionique ξ . Sous sa forme non-linéaire ce système peut être utilisé pour décrire des structures ioniques non-linéaires. Nous considérons ici le cas de perturbations de faible amplitude, nous linéarisons donc ce système afin d'extraire l'échelle caractéristique de la réponse ionique.

$$\text{Quasi-neutralité} : n_e = n_i \rightarrow \frac{\partial \xi(x_0, t)}{\partial x_0} = \exp \left[-\frac{e\phi(x, t)}{kT_e} \right] - 1 \approx -\frac{e\phi(x, t)}{kT_e}$$

L'élimination du potentiel et la linéarisation mènent à l'écriture d'une équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 \xi(x_0, t)}{\partial x_0^2} = C_s^{-2} \frac{\partial^2 \xi(x_0, t)}{\partial t^2} \quad (3.16)$$

La réponse ionique est donc caractérisée, non pas par une échelle de temps ou de longueur, mais par une vitesse caractéristique, la vitesse acoustique ionique C_s . Les ondes acoustiques ioniques sont ainsi identifiées comme le processus de réponse quasi-neutre à une perturbation de pression, ou de vitesse, lente ; la prise en compte de la température ionique, dans les plasmas chauds, ne pose pas de problèmes et ne modifie pas l'ordre de grandeur de cette vitesse acoustique.

3.5.2 Vitesse de Bohm

La vitesse acoustique ionique est aussi appelée vitesse de Bohm dans le contexte de la théorie de Bohm de la transition plasma/gaine présentée dans le chapitre consacré aux structures électriques. Nous ne développerons pas cette théorie ici, nous démontrerons simplement que l'écoulement d'un plasma quasi-neutre présente une singularité lorsque la vitesse ionique est égale la vitesse de Bohm. Soit donc un écoulement décrit par la vitesse des ions v_i , la densité ionique n_i , et la pression ionique P_i . Ces ions sont générés à travers un mécanisme d'ionisation, dont nous ne précisons pas l'origine, mais seulement le taux de production par unité de temps et unité de volume S_i ; les ions étant créés au repos, ce terme, source de matière, est un terme de perte de quantité de mouvement car, si l'on considère un fluide de vitesse v_i , l'apparition d'ions au repos dans cet écoulement implique un transfert d'impulsion des autres ions en mouvement vers ces nouveaux ions au repos afin d'entretenir la vitesse de

l'écoulement au niveau v_i . Ainsi, les équations de conservation de la charge et de la quantité de mouvement prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \text{Conservation de la charge} & : \frac{d}{dx} [n_i v_i] = S_i \\
 \text{Équation d'Euler} & : m_i n_i v_i \frac{dv_i}{dx} = -\frac{dP_i}{dx} + en_i E - m_i v_i S_i \\
 \text{Relation de Boltzmann} & : n_e = n_0 \exp \left[\frac{e\phi}{kT_e} \right] \rightarrow en_e E = -kT_e \frac{dn_e}{dx} \\
 \text{Quasi-neutralité} & : n_e = n_i
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Les espèces chargées étant créées à vitesse nulle, leur transfert dans l'écoulement est un terme de perte pour l'équation de conservation de l'impulsion, alors qu'il est un terme source pour l'équation de conservation du nombre de particules. Le champ électrique $E = -d\phi/dx$ n'est pas appliqué de l'extérieur mais résulte de la séparation de charge induite par la différence d'inertie entre électrons et ions. Du fait de leur faible inertie les électrons ont une distribution d'équilibre dans le potentiel ϕ décrivant ce champ électrique E . Les hypothèses de quasi-neutralité $n_e = n_i$ et d'homogénéité des températures ionique et électronique permettent d'éliminer le potentiel dans l'équation du mouvement ionique.

$$n_i v_i \frac{dv_i}{dx} = -C_s^2 \frac{dn_i}{dx} - v_i S_i$$

où nous avons supposé $T_e > T_i$. Définissons le nombre de Mach comme le rapport de la vitesse ionique sur la vitesse acoustique ionique : $M = v_i/C_s$. Les équations de conservation de la charge et de l'impulsion sont alors données par :

$$\begin{aligned}
 \text{Conservation de la charge} & : M \frac{dn_i}{dx} + n_i \frac{dM}{dx} = \frac{S_i}{C_s} \\
 \text{Conservation de l'impulsion} & : n_i M \frac{dM}{dx} + \frac{dn_i}{dx} = -M \frac{S_i}{C_s}
 \end{aligned}$$

La densité ionique est ensuite éliminée entre ces équations de conservation de la charge et de l'impulsion, et le gradient de vitesse résultant de la génération des charges, peut être exprimé comme :

$$\frac{dM}{dx} = \frac{S_i}{n_i C_s} \frac{1 + M^2}{1 - M^2} \tag{3.19}$$

Cette dernière équation est tout a fait générale et ne présuppose pas un mécanisme particulier d'ionisation, son caractère universel permet de tirer une conclusion de portée générale sur les écoulements plasma dans une zone d'ionisation : lorsque $M = 1$, c'est-à-dire lorsque la vitesse ionique égale la vitesse de Bohm, le gradient

de vitesse devient singulier et cette singularité présente certaines analogies avec la transition subsonique-supersonique en aérodynamique. Nous reviendrons sur ce problème dans le cadre des études sur la transition entre un plasma quasi-neutre et une gaine.

L'ensemble des échelles caractéristiques associées aux réponses électroniques, ioniques et magnétiques d'un plasma est résumé dans le tableau (3.1).

Tableau 3.1

	Définition	Valeur
Longueur Debye	$\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 kT}{ne^2}}$	743 [cm] $\sqrt{\frac{T [\text{eV}]}{n [\text{cm}^{-3}]}}$
Fréquence de Langmuir	$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m_e}}$	8981 [Hz] $\sqrt{n_0 [\text{cm}^{-3}]}$
Longueur de London	$\lambda_p = c\sqrt{\frac{\varepsilon_0 m_e}{ne^2}}$	5298 [m] $\frac{1}{\sqrt{n [\text{cm}^{-3}]}}$
Vitesse d'Alfvén	$V_A = \sqrt{\frac{B^2}{\mu_0 n_i m_i}}$	72758 c $\frac{B [\text{T}]}{\sqrt{n_i [\text{cm}^{-3}]}}$
Vitesse de Bohm	$C_s = \sqrt{\frac{kT_e}{m_i}}$	9789 [m/s] $\sqrt{T_e [\text{eV}]}$

Ces échelles de temps, longueurs et vitesses permettent de développer la construction de modèles en s'appuyant sur l'ordering relatif entre les échelles caractéristiques d'un problème spécifique et ces échelles associées aux réponses collectives du plasma.

3.6 RELAXATION ÉLECTRONIQUE

3.6.1 Temps de Maxwell

La fréquence de collision (2.3) n'est pas la seule échelle caractéristique associée au processus de conduction dans un plasma ; il existe une deuxième échelle de temps, appelée *temps de relaxation de Maxwell*, décrivant le processus de disparition des charges libres sous l'effet de leurs répulsions mutuelles.

Considérons un plasma globalement chargé (négativement sur la figure 3.11), décrit par une densité volumique de charges $\rho(\mathbf{r}, t = 0)$ à un instant initial $t = 0$. Cette densité volumique de charges crée un champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et ce champ électrique met en mouvement les charges générant ainsi une densité volumique de courant $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$.

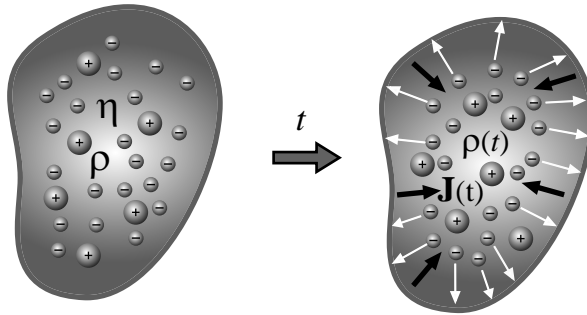


Figure 3.11 Relaxation électronique.

Nous avons ainsi trois inconnues ρ , \mathbf{E} , \mathbf{J} décrivant la dynamique de la relaxation de ces charges libres dans ce milieu conducteur. La loi d'Ohm et l'équation de Maxwell-Gauss, complétées par le principe de conservation de la charge, constituent un système de trois équations auxquelles obéissent ces trois inconnues ; ce problème de relaxation est donc parfaitement déterminé.

$$\begin{aligned}
 \text{Équation de Maxwell-Gauss} & : \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
 \text{Conservation de la charge} & : \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \\
 \text{Loi d'Ohm} & : \mathbf{J} = \eta \mathbf{E}
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Nous avons introduit η la conductivité du plasma résultant principalement des collisions électrons-ions ou électrons-neutres : $\eta = nq^2/m\nu$ suivant la formule de Drude-Lorentz où ν est la fréquence de collision (2.3). Le champ électrique et le vecteur densité de courant peuvent être éliminés et nous obtenons ainsi une équation décrivant la dynamique de la densité volumique de charges.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\eta}{\epsilon_0} \rho = 0 \rightarrow \rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t = 0) \exp\left(-\frac{t}{\tau_M}\right)$$

La relaxation des charges libres dans un plasma s'effectue donc suivant une loi exponentielle dont le temps caractéristique est donné par l'échelle de temps τ_M .

$$\tau_M \equiv \frac{\epsilon_0}{\eta} = \frac{\nu}{\omega_p^2} \tag{3.21}$$

Le temps caractéristique associé à cette décroissance exponentielle n'est pas l'inverse de la fréquence de collision mais l'inverse d'une combinaison de la fréquence de collision et de la fréquence plasma, c'est le temps de Maxwell. Ce processus est similaire à la décharge d'un condensateur chargé dans une résistance. L'équilibre électrostatique constitue la phase finale de cette relaxation, les charges excédentaires

sont alors distribuées en surface et le volume du plasma devient un volume équipotentiel.

3.6.2 Longueur de Kelvin

Le modèle qui nous a permis d'identifier la longueur de London λ_p était construit sous l'hypothèse d'un plasma sans collision. Il est donc pertinent pour la phase dynamique rapide, sur une échelle de temps plus courte que l'inverse de la fréquence de collision ν . Pour les temps longs, le système de Faraday-Ampère-Euler doit être modifié et un système du type Faraday-Ampère-Ohm devient pertinent pour la description de l'interaction champ-plasma.

$$\begin{aligned} \text{Équation de Maxwell-Faraday} & : \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{Équation de Maxwell-Ampère} & : \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \\ \text{Loi d'Ohm} & : \mathbf{J} = \eta \mathbf{E} \end{aligned} \quad (3.22)$$

L'équation de la dynamique des électrons est remplacée par la loi d'Ohm où η est la conductivité du plasma résultant principalement des collisions électrons-ions ou électrons-neutres : $\eta = nq^2/m\nu$.

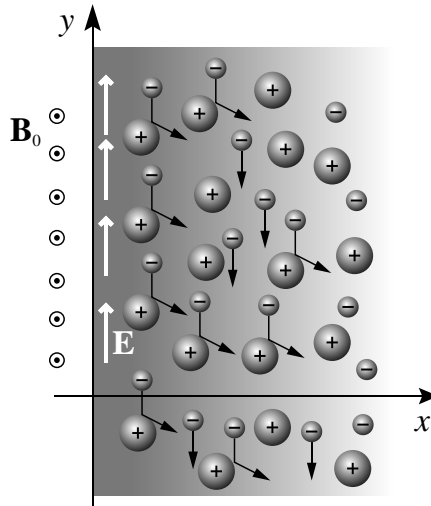


Figure 3.12 Effet de peau collisionnel.

Dans le cadre géométrique du modèle unidimensionnel décrit lors de l'étude de la longueur de London, modifié pour prendre en compte les collisions, ce système Faraday-Ampère-Ohm (Figure 3.12) se réduit à :

$$\frac{\partial E(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial B(x,t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial B(x,t)}{\partial x} = -\mu_0 \eta E(x,t)$$

L'élimination du champ électrique entre ces deux équations conduit à une équation de diffusion sur le champ magnétique.

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mu_0 \eta \frac{\partial B}{\partial t}$$

Ce phénomène de pénétration diffusive du champ magnétique (Figure 3.13) sera étudié plus en détail dans le chapitre consacré à la magnétohydrodynamique, sa caractéristique essentielle étant une pénétration d'une longueur L au bout d'un temps $t = L^2/D_M$ où D_M est le coefficient de diffusion magnétique.

$$D_M \equiv \frac{1}{\mu_0 \eta} = \lambda_p^2 \nu \quad (3.23)$$

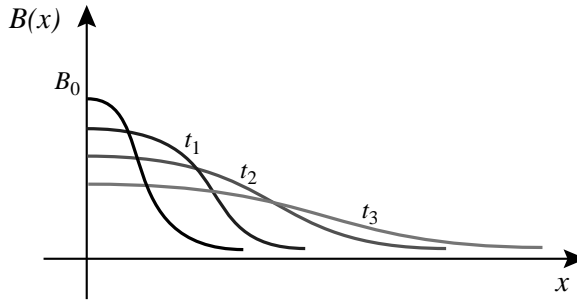


Figure 3.13 Pénétration magnétique collisionnelle.

Une situation couramment rencontrée est le cas d'un champ oscillant à la frontière d'un plasma semi-infini : $B(x < 0, t) = B_0 \exp(i\omega t)$ et $B(x > 0, t) = B(x) \exp(i\omega t)$.

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = i\mu_0 \eta \omega B \rightarrow B = B_0 \exp(i\omega t) \exp\left[-\frac{(1+i)}{\lambda_K} x\right]$$

Cette solution décrit une pénétration dans le plasma sur une longueur définissant l'épaisseur de peau résistive ou longueur de Kelvin λ_K .

$$\lambda_K \equiv \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \eta \omega}} = \lambda_p \sqrt{2 \frac{\nu}{\omega}} \quad (3.24)$$

Les phénomènes de relaxation électrique, d'écrantage et de diffusion magnétique, qui viennent d'être décrits ici, complètent l'ensemble des échelles caractéristiques associées aux réponses collectives d'un plasma (Tableau 3.1).

Les relaxations des charges et des courants ne sont pas caractérisées par la fréquence de collision ν mais par une combinaison des échelles collectives précédentes (ω_p et λ_p) et de la fréquence de collision ν .

Ces résultats fondamentaux sont résumés dans le tableau (3.2).

Tableau 3.2

	Inertiel	Résistif
Relaxation des charges	Langmuir : $\tau_p = \frac{1}{\omega_p}$	Maxwell : $\tau_M = \frac{\nu}{\omega_p^2}$
Relaxation des courants	London : $\lambda_p = \frac{c}{\omega_p}$	Kelvin : $\lambda_K = \lambda_p \sqrt{2 \frac{\nu}{\omega}}$

Lorsque l'on s'intéresse à l'électrodynamique d'un plasma, les régimes sans et avec collisions sont dénommés **inertiel et résistif**, car c'est l'inertie qui contrôle la dynamique des réponses en l'absence de collisions, et la dynamique des courants est ohmique en présence de collisions.

BIBLIOGRAPHIE

Trois types d'ouvrages peuvent être consultés pour aborder les effets collectifs dans les plasmas.

► Grands traités fondateurs de la discipline

- S. Chandrasekhar, *Plasma Physics*, The University of Chicago Press, Chicago, USA, 1965.
- J.G. Linhart, *Plasma Physics*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1960.
- C.L. Longmire, *Elementary Plasma Physics*, Intersciences Publishers John Wiley & Sons, New York, USA, 1963.
- W.B. Thompson, *An Introduction to Plasma Physics*, Pergamon Press, Oxford, London, 1962.

► Grands classiques

- T.J.M. Boyd et J.J. Sanderson, *Plasma Dynamics*, Nelson, UK, 1969.
- R.A. Cairns, *Plasma Physics*, Blackie & Son, London, UK, 1985.
- F. Chen, *Introduction to Plasma Physics*, Plenum Press, New York, USA, 1977.

- A. von Engel, *Electric Plasmas : Their Nature and Uses*, Taylor & Francis Inc, New York, USA, 1983.
- V.E. Golant A.P. Zhilinsky et I.E. Sakharov, *Fundamentals of Plasma Physics*, John Wiley & Sons, 1980.
- N. A. Krall et A.W. Trivelpiece, *Principles of Plasma Physics*, Mc Graw-Hill, USA, 1973.
- D.R. Nicholson, *Introduction to Plasma Theory*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1983.
- G. Schmidt, *Physics of High Temperature Plasmas*, Academic Press, New York, USA, 1979.
- J.L. Shohet, *The Plasma State*, Academic Press, New York, USA, 1971.

► **Textes généralistes plus récents**

- T.J.M. Boyd et J.J. Sanderson, *The physics of Plasmas*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.
- R.O. Dendy, *Plasma Dynamics*, Clarendon Press, Oxford, UK, 1990.
- R.J. Goldston et P.H. Rutherford, *Introduction to Plasma Physics*, IOP, London, UK, 1995.
- R.D. Hazeltine et F.L. Waelbroeck, *The Framework of Plasma Physics*, Perseus Books, USA, 1998.
- K. Nishikawa et M. Wakatani, *Plasma Physics, Basic Theory with Fusion Application*, Springer-Ferlag, Berlin, RFA, 1990.
- B.M. Smirnov, *Physics of Ionized Gases*, John Wiley & Sons, New York, USA, 2001.
- L.C. Woods, *Physics of Plasma*, Wiley-VCH, Weinheim, RFA, 2004.

Chapitre 4

Collisions et réactions

Le jour suivant, ils se mirent à regarder ensemble, se passant la longue-vue à tour de rôle. En réalité, on ne voyait rien d'autre que trois ou quatre minuscules taches qui se déplaçaient avec une grande lenteur.

Il deserto dei tartari, D. Buzzati.

4.1 SECTION EFFICACE

4.1.1 Section efficace de réaction

Au-delà des réponses collectives, les plasmas sont aussi des milieux où se développent souvent des processus réactifs loin de l'équilibre thermodynamique. Dans le chapitre précédent nous avons décrit un certain nombre de phénomènes collectifs et identifié leurs échelles caractéristiques. La dynamique d'un plasma est aussi contrainte par un deuxième type de processus : les interactions particule-particule. Ces interactions sont de nature variées et peuvent donner lieu à des réactions atomiques, moléculaires ou nucléaires, ou à de simples transferts élastiques d'impulsion et d'énergie. Les échelles caractéristiques associées aux interactions particule-particule, élastiques ou réactives, sont des surfaces, les *sections efficaces* de réaction ou de collision, définies à partir de modèles projectile-cible.

Considérons d'abord le modèle le plus simple d'interception de flux ; soit un flux, $n_A v_A$ [$\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$], de particules de type A où n_A [m^{-3}] est la densité de particules et v_A [$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$] la vitesse de ces particules. Le nombre de particules dN_A passant par

unité de temps dt à travers une surface S (Figure 4.1), l'intensité du flux, est donné par :

$$\frac{dN_A}{dt} = n_A v_A S$$

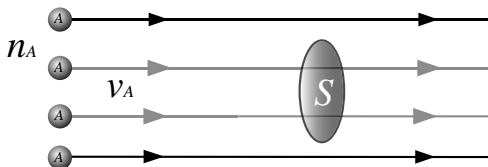


Figure 4.1 Intensité et flux de particules.

Analysons maintenant un modèle projectile-cible ; soit une réaction $A + B \rightarrow C + D$, les produits de réaction C et D pouvant être les espèces A et B après un simple échange d'énergie/impulsion. Considérons une cible au repos constituée de particules B et un flux d'espèces A , de vitesse v_A et densité n_A , donc de flux $n_A v_A$. Le nombre de réactions par unité de temps et unité de volume, $dN_A/dx dy dz dt = dn_A/dt$, dans une telle configuration projectile-cible (Figure 4.2), permet de définir la section efficace de réaction σ comme le coefficient de proportionnalité entre : (i) ce nombre de réactions par unité de temps et de volume, (ii) la densité de l'espèce cibles n_B que multiplie (iii) le flux d'espèces projectile $n_A v_A$. En effet, le nombre de réactions est nécessairement proportionnel aux quantités (ii) et (iii)

$$\frac{dn_A}{dt} = -n_A v_A n_B \sigma \quad (4.1)$$

σ peut s'interpréter comme la surface effective d'interaction $A + B \rightarrow C + D$ (Figure 4.2). Le signe moins signifie que toute réaction est comptabilisée comme une perte de l'espèce réactive incidente A , $dn_C/dt = +n_A v_A \sigma n_B$. La section efficace de la réaction $A + B \rightarrow C + D$ est donc donnée par le rapport d'un nombre de particules réagissant sur un flux incident lorsque la densité de particules cibles B est réduite à l'unité.

$$\sigma \equiv \frac{\left[\frac{\text{Nombre de particules } A \text{ tel que } A + B \rightarrow C + D}{\text{Par unité de temps } dt} \right]}{\left[\frac{\text{Nombre de particules } A \text{ incidentes}}{\text{Par unité de surface } dS \text{ et unité de temps } dt} \right]} \quad (4.2)$$

Le cas précédent d'une population projectile A , monocinétique en interaction avec une cible fixe B , doit être généralisé pour traiter des situations plus complexes.

La première généralisation doit prendre en compte la possibilité de voies de sortie multiples. Par exemple, dans de nombreux problèmes, la variable d'étude est l'énergie transférée à la cible, ou aux produits de réaction ; l'énergie transférée ε pouvant varier dans l'intervalle $[0, +\infty]$. Pour ce type de réaction avec une infinité de voies de

sortie, la généralisation de la section efficace de réaction nécessite la prise en compte d'une bande d'énergie infinitésimale $d\varepsilon$ et du nombre de particules $dn_C(\varepsilon)$ se trouvant après la réaction au voisinage de ε dans cette bande $d\varepsilon$: $A + B \rightarrow C(\varepsilon) + D$.

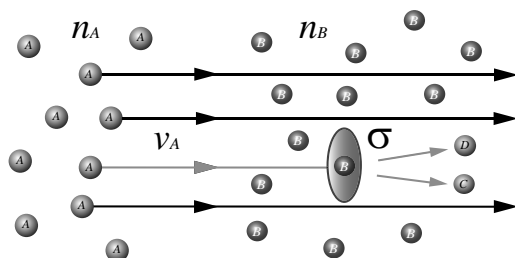


Figure 4.2 Section efficace de réaction.

La définition précédente est aisément généralisable pour ce cas en introduisant une section efficace *différentielle en énergie* $d\sigma/d\varepsilon$ pour la réaction $A + B \rightarrow C(\varepsilon) + D$.

$$\left. \frac{d^2 n_C(\varepsilon)}{dt d\varepsilon} \right|_{A+B \rightarrow C(\varepsilon)+D} = v_A n_A n_B \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$$

Ainsi la section efficace différentielle en énergie $d\sigma/d\varepsilon$ est définie par :

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} \equiv \frac{\left[\frac{\text{Nombre de particules } A \text{ tel que } A + B \rightarrow C(\varepsilon) + D \text{ à } d\varepsilon \text{ près}}{\text{Par unité de temps } dt \text{ et unité d'énergie } d\varepsilon} \right]}{\left[\frac{\text{Nombre de particule } A \text{ incidentes}}{\text{Par unité de surface } dS \text{ et unité de temps } dt} \right]} \quad (4.3)$$

Au-delà de l'aspect énergétique, la généralisation du concept de section efficace de réaction est aussi nécessaire lorsque l'on considère l'aspect géométrique d'une collision non réactive.

4.1.2 Section efficace de diffusion

Par exemple, considérons le cas d'une réaction élastique donnant lieu à un échange d'impulsion, la vitesse du projectile A , après réaction sur la cible B , est paramétrée par deux angles θ et φ décrivant la direction de sortie du projectile ; dans un repère sphérique centré sur la cible θ et φ prenant leurs valeurs dans l'intervalle $[0, \pi] \times [0, 2\pi]$: $A + B \rightarrow A(\theta, \varphi) + B$ (Figure 4.3). Pour ce type de réaction avec une infinité de voies de sortie la généralisation de la section efficace de réaction nécessite la prise en compte d'un angle solide élémentaire de diffusion $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ et du nombre de particules $d^2 n_A(\theta, \varphi)$ se trouvant après la réaction dans cet angle solide élémentaire $d\Omega$. La définition de la section efficace différentielle de diffusion

angulaire $d\sigma/d\Omega$ est ainsi donnée par :

$$\left. \frac{d^2 n_A(\theta, \varphi)}{dt d\Omega} \right|_{A+B \rightarrow A(\theta, \varphi)+B} = v_A n_A n_B \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

La définition précédente peut s'interpréter comme **le rapport du flux angulaire sortant sur le flux surfacique entrant**.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv \frac{\left[\begin{array}{l} \text{Nombre de particules A diffusés dans } d\Omega(\theta, \varphi) \\ \text{Par unité d'angle solide } d\Omega \text{ et unité de temps } dt \end{array} \right]}{\left[\begin{array}{l} \text{Nombre de particules A incidentes} \\ \text{Par unité de surface } dS \text{ et unité de temps } dt \end{array} \right]} \quad (4.4)$$

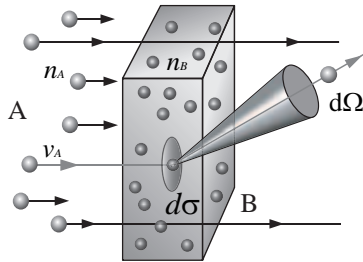


Figure 4.3 Section efficace de diffusion.

Le calcul, ou la mesure, des sections efficaces est une discipline à part entière qui relève de la physique des collisions atomiques, moléculaires et nucléaires ; le physicien des plasmas est un utilisateur de ce type de données, soit dans le cadre de codes numériques d'étude de la réactivité, soit dans le contexte de modèles analytiques cinétiques. Les quantités dérivées de la section efficace que sont le libre parcours moyen, la fréquence de collision et le taux de réactivité sont souvent plus pertinentes en physique des plasmas ; leurs relations avec les sections efficaces sont établies dans le paragraphe suivant.

4.1.3 Libre parcours moyen

Le libre parcours d'une particule test, interagissant avec une population de particules cibles, est défini comme la distance parcourue par cette particule test entre deux collisions ou réactions successives. Le libre parcours moyen est la valeur moyenne de cette quantité. La fréquence de collision est l'inverse du temps entre deux collisions ou réactions successives, par extension, sa valeur moyenne est aussi dénommée fréquence de collision.

Considérons un électron subissant un choc à l'instant $t = 0$ et qui, au temps $t > 0$, n'a pas subi de deuxième choc. Soit $p(t)$ la probabilité qu'il n'ait pas subi de

deuxième choc à l'instant t . De même, considérons un électron subissant un choc au point $x = 0$ et qui, en $x > 0$, n'a pas subi de deuxième choc. Soit $P(x)$ la probabilité qu'il ait parcouru la distance x sans subir de deuxième choc. D'une part, les chocs étant des événements indépendants la probabilité de choc durant l'intervalle $[t, t + dt]$, ou sur la distance $[x, x + dx]$, est indépendante de l'histoire de l'électron durant l'intervalle $[0, t]$, ou suivant le parcours $[0, x]$. D'autre part, compte tenu du caractère infinitésimal de l'instant dt , ou de la distance dx , la probabilité d'observer au moins un choc, durant $[t, t + dt]$ ou sur $[x, x + dx]$, est nécessairement proportionnelle à l'incrément de temps dt ou à la longueur dx .

Les probabilités de parcours sans choc $p(dt)$ et $P(dx)$ sont complémentaires de ces probabilités de choc, donc de la forme : $1 - (dt/\tau)$ et $1 - (dx/\lambda)$, où τ et λ sont des constantes qui seront déterminées a posteriori.

$$p(dt) = 1 - \frac{dt}{\tau}, \quad P(dx) = 1 - \frac{dx}{\lambda}$$

La loi de combinaison des probabilités d'événements indépendants permet d'énoncer : $p(t + dt) = p(t)p(dt)$ et $P(x + dx) = P(x)P(dx)$; ainsi, les lois de probabilité p et P sont solutions d'équations différentielles ordinaires linéaires et p et P suivent donc les lois classiques de décroissance exponentielle.

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{p}{\tau} \rightarrow p(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad \frac{dP}{dx} = -\frac{P}{\lambda} \rightarrow P(x) = \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)$$

L'inverse de la valeur moyenne du temps entre deux collisions et la valeur moyenne de la distance parcourue entre deux collisions définissent la fréquence de collision ν et le libre parcours moyen λ .

$$\nu \equiv \frac{\int_0^{+\infty} p(t) dt}{\int_0^{+\infty} t p(t) dt}, \quad \lambda \equiv \frac{\int_0^{+\infty} x P(x) dx}{\int_0^{+\infty} P(x) dx} \quad (4.5)$$

Le libre parcours moyen λ et la fréquence de collision ν peuvent être exprimés en fonction de la section efficace σ . Considérons, à nouveau, la réaction projectile sur cible : $A + B \rightarrow C + D$, les produits de réaction C et D pouvant être simplement les espèces A et B après un échange d'énergie-impulsion.

Pour une cible au repos constituée d'espèces B , de densité n_B , et un flux d'espèces A , de vitesse v , le nombre de réactions permet de définir la section efficace de réaction comme le coefficient de proportionnalité entre le nombre de réactions par unités de temps et de volume et le produit de la densité de cibles par le flux incident : équation (4.1) $\rightarrow dn_A = -\sigma n_A \nu n_B dt = -\sigma n_A n_B dx$.

Lorsque la déplétion de la cible peut être négligée, cette équation peut être intégrée par rapport au temps, ou par rapport à la distance x telle que $dx = v dt$.

$$\frac{dn_A}{n_A dt} = -\sigma \nu n_B \rightarrow \frac{n_A(t)}{n_A(0)} = \exp(-\nu t), \quad \frac{dn_A}{n_A dx} = -\sigma n_B \rightarrow \frac{n_A(x)}{n_A(0)} = \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)$$

Le libre parcours moyen de la réaction, λ , et la fréquence de collision, ν , sont donc reliés à la section efficace, σ , et à la densité de particules cibles à travers les relations :

$$\lambda = \frac{1}{\sigma n_B}, \quad \nu = \sigma \nu n_B, \quad K = \sigma \nu \quad (4.6)$$

Nous avons complété cet ensemble de résultats par la définition du taux de réaction K .

Enfin, lorsque la distribution des vitesses des projectiles n'est pas monocinétique, un bilan global sur l'ensemble des vitesses initiales possibles : $A(\mathbf{v}) + B(\mathbf{v}') \rightarrow C + D$, doit être réalisé. Pour cela, il est nécessaire d'introduire la fonction de distribution des vitesses $f(\mathbf{v})$ (2.20).

Par exemple, la définition du taux de réaction K_{AB} à partir d'une configuration projectile-cible peut se généraliser pour étudier les situations, plus réalistes en physique des plasmas, où les deux espèces possèdent des distributions de vitesses $f_A(\mathbf{v}_A)$ et $f_B(\mathbf{v}_B)$; il faut alors prendre la moyenne de la réactivité sur ces distributions en considérant la vitesse relative des deux espèces $\mathbf{v} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B$:

$$\langle K_{AB} \rangle = \int d\mathbf{v}_A d\mathbf{v}_B \sigma (|\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|) |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| f_A(\mathbf{v}_A) f_B(\mathbf{v}_B).$$

La même procédure de prise de moyenne sur une distribution de vitesse peut être appliquée aux deux autres coefficients λ_{AB} et ν_{AB} qui caractérisent l'interaction particule-particule dans les plasmas, pour une réaction donnée.

En conclusion, la réactivité résultant de l'interaction particule-particule peut être caractérisée par quatre grandeurs (Tableau 4.1).

Tableau 4.1

Quantité	Définition	Unité
Section efficace	$\sigma(\nu)$	m^2
Libre parcours moyen	$\lambda(\nu) = 1/\sigma n$	m
Fréquence de collision	$\nu(\nu) = \sigma \nu n$	s^{-1}
Taux de réactions	$K(\nu) = \sigma \nu$	$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$

La section efficace est une grandeur caractéristique primaire, c'est-à-dire issue de l'analyse microscopique de l'interaction; le libre parcours moyen, la fréquence de collision et le taux de réaction sont des grandeurs secondaires permettant d'établir des bilans macroscopiques d'espèces.

4.2 COLLISIONS ÉLASTIQUES

4.2.1 Diffusion élastique

Deux types de collisions doivent être considérés :

- les collisions élastiques, étudiées dans ce paragraphe, et
- les collisions inélastiques où la nature, ou l'état interne, des particules sont modifiés lors de la collision.

La théorie des collisions atomique et moléculaire constitue une discipline à part entière, le physicien des plasmas puise, parmi les nombreux résultats offerts par cette discipline, les données sur les sections efficaces nécessaires à la modélisation des processus cinétiques dans les plasmas ; mais, sans être spécialiste de physique des collisions, le physicien des plasmas doit néanmoins maîtriser l'ordering des différentes sections efficaces afin d'identifier les processus dominants. La formation d'une intuition relative à ces échelles caractéristiques de l'interaction particule-particule passe par une analyse des processus d'interaction électromagnétique à l'échelle atomique. L'électrodynamique possède trois échelles de longueur fondamentales rappelées dans le tableau (4.2).

Tableau 4.2

Longueur	Définition	Valeur [Å]
Rayon classique de l'électron	$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}$	$2,817 \times 10^{-5}$
Longueur d'onde Compton	$\lambda_c = \frac{\hbar}{m_e c}$	$3,861 \times 10^{-3}$
Rayon de Bohr de l'atome d'hydrogène	$a_o = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}$	0,529

Ces trois longueurs fondamentales ne sont pas indépendantes et peuvent être mises en relation à travers la constante de structure fine α .

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137} \quad (4.7)$$

En effet, le rayon classique de l'électron, la longueur d'onde Compton et le rayon de Bohr, s'ordonnent suivant les puissances de α : $r_e/\lambda_c/a_o \sim \alpha^2/\alpha/1$. Ces longueurs sont associées à deux sections efficaces fondamentales, la section efficace de Bohr σ_B et la section efficace de Thomson σ_T .

$$\sigma_B = \pi a_o^2 = 0,88 \times 10^{-16} \text{ cm}^2, \quad \sigma_T = \frac{8}{3} \pi r_e^2 = 6,65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2 \quad (4.8)$$

La première, σ_B , apparaîtra lors de l'étude des processus de collision électron-atome et la deuxième, σ_T , apparaît naturellement lors de l'étude des processus radiatifs, étude qui ne sera pas abordée ici. Le problème général des collisions élastiques doit être analysé en deux temps. La première partie de l'analyse est de nature cinématique (en fait la cinématique est restreinte à l'étude des positions et vitesses et ici les masses interviennent), sur la base de la conservation de l'énergie et de l'impulsion, il est possible d'établir un certain nombre de relations entre les vitesses des particules avant et après la collision. Mais, l'invariance globale de l'énergie et de l'impulsion ne détermine pas complètement l'état du système après la collision, en fonction de son état avant la collision. Une analyse dynamique doit compléter l'analyse cinématique ; par dynamique nous entendons une analyse prenant en compte la nature exacte du potentiel d'interaction qui était irrelevante dans la partie cinématique.

Cette deuxième phase de l'étude, malgré l'usage d'un cadre d'études relevant de la mécanique, est ultimement de nature statistique, car, le paramètre d'impact entre deux particules : \mathbf{b} (Figure 4.4), ne peut pas être contrôlé dans un plasma ; aussi, il est nécessaire d'éliminer ce paramètre \mathbf{b} . Une telle moyenne sur les caractéristiques incontrôlables de la collision fournit la section efficace différentielle de diffusion qui contient toute l'information sur la nature des échanges d'impulsion-énergie.

Considérons le cas d'une collision entre un projectile mobile, de masse m , de vitesse (loin de la cible) \mathbf{v} avec une cible infiniment lourde immobile. Lors de la collision, la vitesse (relative) \mathbf{v} subit une rotation ; cette rotation est entièrement quantifiée par un angle : l'angle de déflexion θ à l'infini (si le potentiel n'est pas isotrope deux angles sont nécessaires). Cette angle de déflexion (Figure 4.4), ou de diffusion, est fonction du paramètre d'impact \mathbf{b} et de la vitesse (relative) initiale \mathbf{v} .

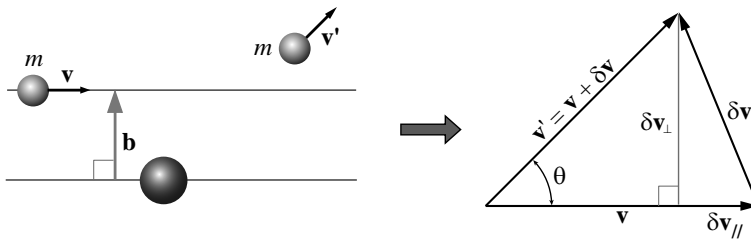


Figure 4.4 Collision élastique sur une cible fixe.

La collision sur une cible fixe $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v} + \delta\mathbf{v}(\mathbf{v}, \mathbf{b})$ conserve le module de la vitesse car l'énergie est conservée : $|\mathbf{v}| = |\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}|$; $\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}$ est la vitesse loin de la cible, après la collision (Figure 4.4) ; par *loin de la cible* nous entendons une région de l'espace où l'énergie potentielle d'interaction devient négligeable devant l'énergie cinétique. La rotation de la vitesse initiale peut être décrite par l'angle de déflexion θ ou par les variations de vitesse parallèlement à la vitesse initiale : $\delta\mathbf{v}_{\parallel}$, et perpendiculairement à cette vitesse initiale : $\delta\mathbf{v}_{\perp}$ (Figure 4.4).

$$\delta\mathbf{v} = \delta\mathbf{v}_{\parallel} + \delta\mathbf{v}_{\perp} \rightarrow \delta\mathbf{v}_{\parallel} = -(1 - \cos\theta)\mathbf{v}, \quad \delta\mathbf{v}_{\perp} = v \sin\theta \mathbf{b}$$

Pour les potentiels isotropes, les intégrales premières de l'énergie et du moment cinétique permettent de ramener l'évaluation de l'angle de déflexion θ à une quadrature. Pour cela, il est utile de considérer un système de coordonnées polaires (r, φ) dans le plan (\mathbf{v}, \mathbf{b}) . La conservation du moment cinétique mvb et la conservation de l'énergie $mv^2/2 + U(r)$ s'exprime alors par les deux relations :

$$vb = r^2 \frac{d\varphi}{dt}, \quad v^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{2}{m} U(r)$$

où $U(r)$ est l'énergie potentielle d'interaction, v la vitesse loin de la cible avant la collision et b le paramètre d'impact. Le facteur dt peut être éliminé entre ces deux intégrales premières afin d'exprimer l'équation polaire de la trajectoire $\varphi(r)$. L'angle de déflexion θ est alors obtenu en sommant les déflexions infinitésimales $d\varphi$ sur l'ensemble de la trajectoire.

$$d\varphi = \frac{\pm bdr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{2U(r)}{mv^2} - \frac{b^2}{r^2}}} \rightarrow \theta(b, v) = \pi - 2 \int_{r_m}^{+\infty} \frac{bdr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{2U(r)}{mv^2} - \frac{b^2}{r^2}}} \quad (4.9)$$

où r_m est le rayon minimal d'approche obtenu sur la base de la conservation de l'énergie $mv^2(1 - b^2/r_m^2) = 2U(r_m)$. Compte tenu : (i) de la valeur de l'angle solide de déflexion (Figure 4.5) $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi \rightarrow d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$ (ce deuxième cas est aussi restreint aux problèmes isotropes que nous considérerons dans la suite) et (ii) de la valeur de l'élément de surface d'interception correspondant (Figure 4.5) $dS = bdbd\varphi \rightarrow dS = 2\pi bdb$ (ce deuxième cas est aussi restreint aux problèmes isotropes que nous considérerons dans la suite), la conservation du nombre de particules permet d'établir la relation entre la section efficace et l'angle de déflexion. D'une part, la définition de la section efficace de diffusion angulaire (4.4) établit une première relation entre les nombres de particules incidentes dN_{in} et diffusées dN_{out} . D'autre part, la relation de conservation du nombre de particule implique : $dN_{in}|_{dS} = dN_{out}|_{d\Omega}$ (Figure 4.5).

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &\equiv \frac{\left[\frac{\text{Nombre de particules diffusés}}{\text{Par unité d'angle solide } d\Omega \text{ et unité de temps } dt} \right]}{\left[\frac{\text{Nombre de particule incidentes}}{\text{Par unité de surface } dS \text{ et unité de temps } dt} \right]} = \frac{\frac{dN_{out}}{d\Omega dt}}{\frac{dN_{in}}{dS dt}} \\ &= \frac{dS}{d\Omega} = \frac{2\pi bdb}{2\pi \sin\theta d\theta} = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{d\theta}{db} \right|^{-1} \end{aligned}$$

Pour la clarté du schéma, sur la figure 4.5 nous avons représenté un angle solide élémentaire $d\Omega = d\varphi \sin\theta d\theta$ et une surface $dS = d\varphi bdb$. Nous avons ainsi établi la formule classique donnant la section efficace différentielle classique en fonction de l'angle de déflexion. Le paramètre d'impact b étant exprimé en fonction de l'angle de déflexion et de la vitesse à partir de la relation $\theta(b, v)$ (4.9). Partant de ce résultat,

il est d'usage d'introduire la section efficace totale $\sigma_0(v)$.

$$\sigma_0(v) \equiv \int d\sigma = 2\pi \int \frac{d\sigma(v, \theta)}{d\Omega} \sin\theta d\theta \quad (4.10)$$

Cette quantité peut être interprétée comme la valeur de la surface de section d'un obstacle ayant le même effet que le centre diffuseur en terme d'interception de flux.

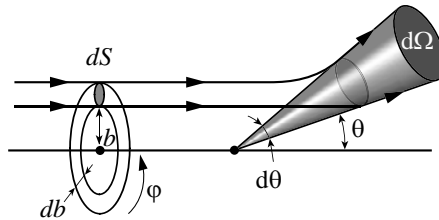


Figure 4.5 trajectoire classique et section efficace de diffusion.

Lors d'une collision, les variations de vitesse parallèlement et perpendiculairement à la vitesse initiale sont : $\delta v_{\parallel} = v(1 - \cos\theta)$ et $\delta v_{\perp} = v \sin\theta$ (Figure 4.4). La section efficace de transfert d'impulsion, $\sigma_1(v)$, est définie comme la moyenne du transfert relatif d'impulsion le long de la direction initiale du mouvement.

$$\sigma_1(v) \equiv \int \frac{\delta v_{\parallel}}{v} d\sigma = 2\pi \int \frac{d\sigma(v, \theta)}{d\Omega} (1 - \cos\theta) \sin\theta d\theta \quad (4.11)$$

Pour les collisions élastiques, deux types d'interactions peuvent être distinguées sur la base des valeurs relatives de σ_0 et σ_1 .

- Si $\sigma_0 \gg \sigma_1$ la diffusion est surtout vers l'avant et les transferts d'impulsion s'effectuent dans le régime dit des petits transferts d'impulsion, ou de la diffusion aux petits angles, c'est le cas des interactions électron-ions, ion-ions et électron-électrons.
- Si $\sigma_0 \approx \sigma_1$ la diffusion est isotrope, c'est le cas des collisions électrons-neutres.

Pour la plupart des collisions électrons-neutres, à des énergies de l'ordre de quelques eV, on observe expérimentalement que la relation $\sigma_0 \approx \sigma_1$ est vérifiée à quelques 10% près.

Pour les collisions électrons-ions la section efficace totale $\sigma_0 \rightarrow +\infty$, cette singularité sera étudiée dans le paragraphe suivant. Par exemple, considérons la dynamique des électrons dans l'hydrogène et l'hélium, ces deux cas ayant été particulièrement bien étudiés expérimentalement ; les données expérimentales permettent d'observer que

les relations $\sigma_0 \approx \sigma_1 \approx 10 \sigma_B$ à quelques eV d'énergie et $\sigma_0 \approx \sigma_1 \approx \sigma_B$ à quelques dizaines d'eV d'énergie fournissent des ordres de grandeurs pertinent pour évaluer ces quantité. La fréquence de collision, ν_1 , décrivant le taux de transfert d'impulsion, introduite dans le cadre de la théorie du libre parcours moyen (2.3) et utilisée lors de l'étude de la relaxation électronique (Tableau 3.2), peut maintenant être définie de façon précise.

$$\nu_1(v) \equiv n v \sigma_1(v) \quad (4.12)$$

où n est la densité de particules cibles. Cette fréquence donne la valeur du temps caractéristique d'isotropisation de la vitesse d'une particule test interagissant avec une population cible de densité n . L'application des méthodes classique (4.9) et quantique de calcul des sections efficaces des différents processus entre espèces d'un plasma s'avère laborieuse et constitue une discipline autonome ; le physicien des plasmas étudie plus particulièrement le comportement d'un ensemble macroscopique d'espèces à l'aide de la théorie cinétique développée dans le chapitre neuf ; il se contente donc d'utiliser les sections efficaces fournies le plus souvent par les expériences. Le développement d'une intuition physique sur l'ordering des interactions particule-particule dans un plasma s'appuiera essentiellement sur les ordres de grandeurs des sections efficaces obtenus en considérant que :

La zone d'interaction entre deux particules est réduite à la région où la valeur de l'énergie cinétique est comparable à la valeur de l'énergie potentiel, l'ordre de grandeur de la section efficace est alors donnée par surface de cette zone d'interaction effective.

Pour les collisions électron- neutre et ion-neutre nous considérerons donc :

$$\sigma_0(v) \approx \sigma_1(v) \approx \pi \rho^2 \Big|_{U(\rho)=\frac{1}{2}mv^2} \text{ ou } \sigma_0(v) \approx \sigma_1(v) \approx \pi \rho^2 \Big|_{\theta(v,\rho)=\frac{\pi}{2}} \quad (4.13)$$

Ces deux approximations seront utilisées pour étudier les interactions électron-neutre, mais, ces approximations ne sont pas valables pour les interactions coulombiennes qui nécessitent un traitement spécifique, cette étude spécifique est l'objet du paragraphe suivant.

4.2.2 Diffusion Rutherford

Dans un plasma, du fait de l'écrantage de Debye, l'interaction coulombienne charge-charge, ou diffusion Rutherford, est restreinte à l'intérieur de la sphère de Debye autour de chaque particule et devient singulière au voisinage immédiat des particules en raison de la divergence du potentiel coulombien.

Une deuxième échelle de longueur, la longueur de Landau, ou de de Broglie, permet de régulariser cette divergence et d'établir la valeur de la fréquence de collision coulombienne.

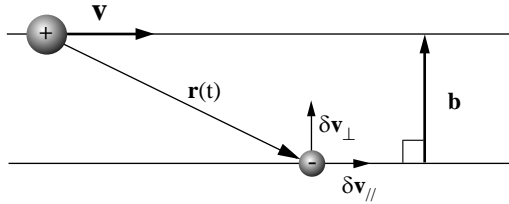


Figure 4.6 Ralentissement électronique d'un ion.

Nous allons étudier successivement :

- le ralentissement d'un ion rapide induit par les collisions sur une population électronique lente (Figure 4.6) et
- la déflexion d'un électron rapide due aux collisions sur une population ionique lente (Figure 4.8).

Commençons par l'étude du processus de ralentissement d'un ion sur une population d'électrons ; nous allons calculer l'énergie-impulsion cédée à un électron lors du passage d'un ion dans son voisinage (Figure 4.6) ; ensuite, nous effectuerons une sommation sur la population électronique entourant l'ion considéré (Figure 4.7). Pour effectuer ces calculs, nous allons supposer que la vitesse de l'ion n'est que peu perturbée par l'interaction avec les électrons : sa trajectoire demeure rectiligne et son mouvement uniforme.

Considérons donc un ion, de masse m_i de charge Ze , en translation uniforme à la vitesse v . Cet ion exerce une force coulombienne attractive sur un électron, de masse m_e et de charge $-e$, au repos, situé à une distance b de sa trajectoire rectiligne (Figure 4.6). Cette force transfère de l'impulsion de l'ion vers l'électron et ce transfert résulte en un ralentissement de l'ion. Après le passage de l'ion ($t = +\infty$), l'électron initialement ($t = -\infty$) au repos a acquis une vitesse δv . Ainsi, nous analysons, dans un cadre dynamique classique, la collision coulombienne : $[ion (v) + \text{électron} (0)] \rightarrow [ion (v) + \text{électron} (\delta v)]$ où nous supposons $\delta v \ll v$; un calcul quantique aboutirait au même résultat final. L'incrément total de vitesse δv est la somme des incréments infinitésimaux entre $t = +\infty$ et $t = -\infty$.

$$\delta \mathbf{v} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathbf{v}}{dt} dt = -\frac{1}{m_e} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Ze^2 \mathbf{r}(t)}{4\pi\epsilon_0 r^3(t)} dt = \delta v_{\perp} + \delta v_{\parallel}$$

où $r(t) = \sqrt{v^2 t^2 + b^2}$ est la distance ion-électron à l'instant t . La projection de l'accélération coulombienne parallèlement et perpendiculairement à la vitesse ionique \mathbf{v} permet d'exprimer les deux composantes $m_e \delta \mathbf{v}_{\parallel}$ et $m_e \delta \mathbf{v}_{\perp}$ de ce transfert d'impulsion.

$$\delta \mathbf{v}_{\parallel} = (\delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \frac{\mathbf{v}}{v^2} = -\frac{\mathbf{v}}{4\pi\epsilon_0 m_e} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Ze^2 t}{(v^2 t^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} dt = \mathbf{0} \quad (4.14)$$

$$\delta \mathbf{v}_{\perp} = \frac{\mathbf{v} \times (\delta \mathbf{v} \times \mathbf{v})}{v^2} = \frac{\mathbf{b}}{4\pi\epsilon_0 m_e} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Ze^2}{(v^2 t^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} dt = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 m_e b^2 v} \mathbf{b}$$

L'énergie $\delta \epsilon(v, b)$, transférée à l'électron, par l'ion, est donnée par la valeur de l'énergie cinétique associée à $\delta \mathbf{v}_{\perp}$.

$$\delta \epsilon(v, b) = \frac{1}{2} m_e \delta v_{\perp}^2 = \frac{Z^2 e^4}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m_e v^2 b^2} \quad (4.15)$$

Ce transfert d'énergie devient infini aux petites distances, lorsque b tend vers zéro, il convient donc de régulariser ce comportement.

Pour ce faire,

- introduisons la longueur de Landau λ_L telle que l'énergie transférée à l'électron soit égale à l'énergie de l'ion incident : $\delta \epsilon(v, \lambda_{Li}) = m_i v^2 / 2$; ou,
- considérons la longueur d'onde de Broglie λ_B associée au mouvement ionique : $\lambda_{Bi} = \hbar / m_i v_i$.

Ces deux choix délimitent des coupures en deçà desquelles le modèle précédent n'est plus valide. Au-dessous de la plus grande de ces deux longueurs, la formule (4.15) n'est plus valable ; nous définissons ainsi une longueur de coupure inférieure λ_C .

$$\lambda_C \equiv \max \left[\lambda_{Li}(v_i) = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{m_e m_i} v_i^2}, \lambda_{Bi}(v_i) = \frac{\hbar}{m_i v_i} \right] \quad (4.16)$$

Cette distance λ_C est donc une distance minimale d'approche.

Les interactions particule chargée-particule chargée seront à prendre en compte, au voisinage de chaque particule, à l'intérieur de la sphère de Debye et à l'extérieur de la sphère de Landau ou de la sphère de Broglie.

Durant un temps δt l'ion est en interaction avec les électrons contenus dans un volume cylindrique de hauteur $v \delta t$ (Figure 4.7).

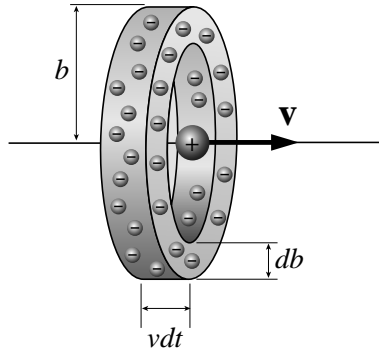


Figure 4.7 Volume d'interaction électrons-ion.

Dans ce volume seuls les électrons situés à une distance comprise entre la longueur de Debye λ_D et la longueur de coupure λ_C sont en interaction effective avec l'ion. La perte totale d'énergie de l'ion durant un temps δt est donnée par la somme des pertes $\delta\varepsilon(v, b)$ sur tous les électrons des volumes $v\delta t 2\pi b db$ représentés figure 4.7 ; b variant entre la longueur de coupure inférieure λ_C et la longueur de Debye λ_D .

$$\delta\varepsilon = \int_{\lambda_C}^{\lambda_D} \delta\varepsilon(v, b) n_e v \delta t 2\pi b db = -\delta t \frac{n_e Z^2 e^4}{4\pi\varepsilon_0^2 m_e v} \int_{\lambda_C}^{\lambda_D} \frac{db}{b}$$

où n_e est la densité électronique du plasma. Le passage à la limite, pour un temps infinitésimal dt , conduit à l'équation du ralentissement ionique (4.17).

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{n_e Z^2 e^4}{4\pi\varepsilon_0^2 m_e v} \log \left[\frac{\lambda_D}{\lambda_C} \right] = -v_{ie} \varepsilon \quad (4.17)$$

Cette dernière relation permet d'introduire la fréquence de collision ions-électrons $v_{ie}(v)$ (ion rapide-électrons froids) pour un ion de vitesse v .

$$v_{ie}(v) = \frac{n_e Z^2 e^4 \Lambda}{2\pi\varepsilon_0^2 m_e m_i v^3} \quad (4.18)$$

où nous avons introduit le logarithme coulombien $\Lambda = \log [\lambda_D/\lambda_C]$, typiquement $10 < \Lambda < 20$.

Plusieurs remarques doivent accompagner ce résultat : (i) il existe, non pas une fréquence de collision dans un plasma totalement ionisé, mais, un ensemble de fréquences de collisions correspondant aux interactions : ion-ion, électron-électron, électron-ion et aux processus tels que : le ralentissement, l'isotropisation et la thermalisation ; (ii) l'approximation $10 < \Lambda < 20$ n'est valable que pour les plasmas de température supérieure à 10 eV ; (iii) au-delà de la longueur de Debye, les interactions collisionnelles sont négligeables mais les interactions collectives doivent être prises en compte, ces interactions se manifestent, entre autres, par

l'émission spontanée d'ondes plasmas. Pour une particule se déplaçant à vitesse constante cette émission Cerenkov est responsable d'un ralentissement supplémentaire dont la dépendance fonctionnelle en les différents paramètres est similaire au cas collisionnel, ce terme supplémentaire se traduit donc uniquement par une faible modification du logarithme coulombien ; (iv) enfin, nous n'avons pas traité le cas des échanges d'énergie à l'intérieur de la sphère de Landau (ou de Broglie), ces interactions proches sont effectivement efficaces en terme de transfert d'énergie car la force coulombienne proche est conséquente, mais, le nombre de particules dans une sphère croît comme le cube de son rayon. Aussi, les collisions « lointaines » avec des particules situées entre la sphère de Debye et la sphère de Landau (ou de Broglie), sont largement plus nombreuses que les collisions « proches », le bilan global de transfert est dominé par les interactions et les quelques collisions « proches » peuvent être négligées.

Considérons maintenant le problème complémentaire, l'isotropisation des vitesses électroniques. Soit un ion, de masse m_i et de charge Ze , au repos, et un électron, de masse m_e et de charge $-e$, en translation uniforme, au voisinage de cet ion, à la vitesse \mathbf{v} (Figure 4.8). L'interaction coulombienne entre l'ion et l'électron induit une déflexion de la trajectoire électronique, déflexion quantifiée par l'angle de diffusion $\delta\theta$. Nous allons calculer le taux de déflexion, c'est-à-dire le taux de variation temporelle de la moyenne du carré de cet angle de déflexion, qui nous permettra d'identifier la fréquence de transfert d'impulsion électron-ion. Ainsi nous analysons, dans un cadre dynamique classique, la collision coulombienne : [électron (\mathbf{v}) + ion ($\mathbf{0}$)] \rightarrow [électron ($\mathbf{v}+\delta\mathbf{v}$) + ion ($\mathbf{0}$)] où nous supposons $\delta v \ll v$; un calcul quantique aboutirait au même résultat. Nous étudions le carré de la déflexion, car la valeur moyenne de cet angle est nécessairement nulle ; en effet, les probabilités de déflexion vers le haut et vers le bas (vers la droite et vers la gauche) sont égales lors de l'interaction avec un ensemble d'ions, la valeur moyenne de la déflexion est donc nulle.

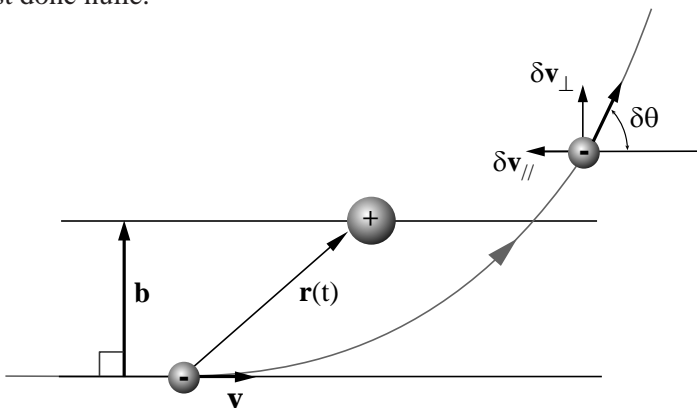


Figure 4.8 Déflexion ionique d'un électron, la déviation de la trajectoire électronique est exagérée pour la clarté du schéma ($\delta v_{\parallel} \sim 0$, $\delta v_{\perp} \ll v$ et $\delta\theta \ll \pi$).

Le calcul du transfert d'impulsion est similaire au cas ionique précédent (relations 4.14), ainsi la projection de l'accélération coulombienne parallèlement et perpendiculairement à \mathbf{b} permet d'exprimer les variations de vitesse de l'électron δv_{\parallel} et δv_{\perp} .

$$\delta v_{\parallel} = 0, \quad \delta v_{\perp} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{Ze^2 b}{4\pi\epsilon_0 m_e (v^2 t^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 m_e b v}$$

où $r(t) = \sqrt{v^2 t^2 + b^2}$ est la distance électron-ion à l'instant t (Figure 4.8).

L'angle de déflexion de la trajectoire électronique par rapport à sa direction initiale, $\delta\theta(v, b)$, est égal à $\delta v_{\perp}/v$.

$$\delta\theta^2(v, b) = \frac{Z^2 e^4}{4\pi^2 \epsilon_0^2 m_e^2 v^4 b^2} \quad (4.19)$$

Cet angle de diffusion devient infini aux petites distances, lorsque b tend vers zéro. Il convient donc de régulariser ce comportement en introduisant la longueur de Landau λ_{Le} , ou la longueur de Broglie λ_{Be} .

$$\lambda_C = \max \left[\lambda_{Le}(v_e) = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 m_e v_e^2} \approx \frac{10^{-9} [\text{m}]}{T_e [\text{eV}]}, \lambda_{Be}(v_e) = \frac{\hbar}{m_e v_e} \approx \frac{10^{-10} [\text{m}]}{\sqrt{T_e [\text{eV}]}} \right]$$

Cette distance λ_C est une distance minimale d'approche classique ; les interactions particule-particule sont à prendre en compte au voisinage de chaque électron à l'intérieur de la sphère de Debye et à l'extérieur de la sphère de Landau ou de la sphère de Broglie. Durant un temps infinitésimal δt l'électron est en interaction avec les ions contenus dans un volume cylindrique de hauteur $v\delta t$; la déflexion quadratique moyenne est obtenue en sommant sur tous les ions en interaction durant l'incrément de temps δt , ce nombre total d'ions est donné par $n_i \int_{\lambda_C}^{\lambda_D} v\delta t 2\pi b db$;

$$\delta\theta^2(v, \delta t) = \int_{\lambda_C}^{\lambda_D} \frac{Z^2 e^4}{4\pi^2 \epsilon_0^2 m_e^2 v^4 b^2} n_i v\delta t 2\pi b db \rightarrow \frac{d\theta^2}{dt} = \frac{n_i Z^2 e^4 \Lambda}{2\pi \epsilon_0^2 m_e^2 v^3} = v_{ei} \quad (4.20)$$

n_i est la densité ionique du plasma et nous avons introduit Λ , le logarithme coulombien pour les transfert d'impulsion électron-ion.

$$\begin{aligned} T_e \lesssim 50\text{eV} \\ T_e \gtrsim 50\text{eV} \end{aligned} \rightarrow \Lambda = \log [\lambda_D/\lambda_C] \approx \begin{array}{l} 23.4 \\ 25.3 \end{array} - 1, 15 \times \ln n_e [\text{cm}^{-3}] + \begin{array}{l} 3.45 \\ 2.30 \end{array} \times \ln T_e [\text{eV}]$$

Nous avons ainsi régularisé le calcul de la fréquence de transfert d'impulsion décrivant l'isotropisation des vitesses électroniques résultant de la diffusion Rutherford sur les ions. Cette fréquence est extrêmement importante en physique des plasmas complètement ionisés car elle détermine les conductivités électrique et thermique

électronique.

$$\nu_{ei}(v) = \frac{3Z^2\Lambda c^4}{v^4} n_i \sigma_T v \rightarrow \langle \nu_{ei} \rangle_v [\text{Hz}] \sim 5 \times 10^{-6} \Lambda \left[\frac{n_e}{\text{cm}^3} \right] \left[\frac{T_e}{\text{eV}} \right]^{-\frac{3}{2}} \quad (4.21)$$

La formule numérique correspond à une distribution maxwellienne. Le fait que cette fréquence diminue avec la température, c'est-à-dire avec l'agitation thermique des électrons, peut paraître contre intuitif en première analyse, mais une réflexion sur la nature des transferts lors d'une collision permet de préciser ce point. Le transfert d'impulsion dans une collision est proportionnel au temps d'interaction ; or, plus un électron est rapide, plus ce temps est court, donc la quantité de mouvement échangé diminue avec la vitesse, c'est-à-dire avec la température.

4.2.3 Interaction électron-atome

Nous avons introduit, au début de ce chapitre, la section efficace de Bohr, σ_B , qui est de l'ordre de grandeur de la section géométrique d'un atome d'hydrogène dans son état fondamental. Une vision géométrique simple de l'interaction électron-atome conduit à une estimation de la section efficace de cette interaction de l'ordre de σ_B ; c'est-à-dire à une fréquence de collision électron-atome de l'ordre de $n_n \sigma_B v$ (4.1).

$$\nu_B(v) = n_n \sigma_B v \rightarrow \langle \nu_B \rangle_v [\text{Hz}] \sim 6 \times 10^{-9} \left[\frac{n_n}{\text{cm}^3} \right] \left[\frac{T_e}{\text{eV}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.22)$$

L'expérience confirme la pertinence de cet ordre de grandeur, mais, cette estimation doit être affinée et un certain nombre de points reste à préciser, en particulier, l'origine de la dépendance de la section efficace de diffusion élastique en fonction de la vitesse de l'électron v .

Les deux relations (4.21) et (4.22) constituent les deux scaling de base en physique des plasmas pour évaluer les fréquences de collisions électron-ion et électron-neutre.

Pour cette deuxième interaction nous allons analyser plus en détail l'origine et la nature des transferts d'impulsion. Considérons, d'abord, le modèle le plus simple de diffusion électron-atome, la diffusion classique par une sphère dure (Figure 4.9).

Ce modèle simple permet d'illustrer l'interprétation de la section efficace comme la valeur de la surface de section d'un obstacle ayant le même effet que le centre diffuseur en terme d'interception de flux.

Soit une sphère (dure) de rayon a , au repos, en interaction avec une particule de vitesse v ; le paramètre d'impact de l'interaction est b , ainsi, si $b > a$, il n'y a pas de collision : $b > a \rightarrow \theta = 0$, et si $b < a$, l'angle de déflexion est indépendant de la

vitesse, il est uniquement déterminée par le rapport b/a (Figures 4.9 et 4.10).

$$b < a \rightarrow \cos \frac{\theta}{2} = \frac{b}{a} \rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{4}$$

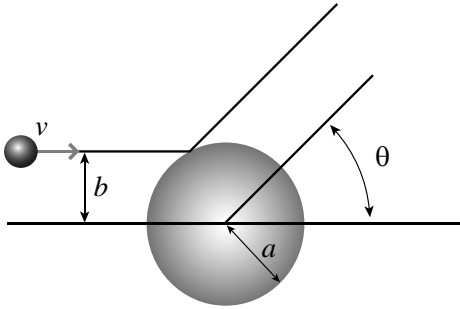


Figure 4.9 Diffusion par une sphère dure.

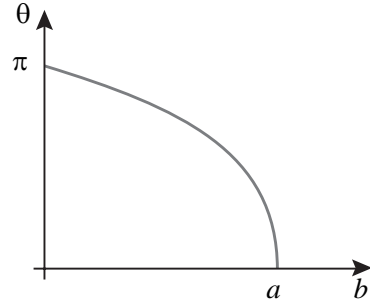


Figure 4.10 Angle de diffusion par une sphère dure.

La section efficace totale est donc donnée par l'expression particulièrement simple $\sigma_0 = \int d\sigma = \pi a^2$ confirmant l'interprétation géométrique de cette dernière. Le modèle de sphère dure classique permet donc d'évaluer la section efficace de diffusion élastique sur la base d'un rayon effectif a ; pour les espèces atomiques et moléculaires usuelles ces rayons effectifs présentent des valeurs de l'ordre de l'angström. Mais, les effets quantiques doivent être pris en compte, particulièrement à basse énergie. La théorie quantique de la diffusion par une sphère dure permet d'obtenir la valeur de σ_0 à basse et haute énergies en fonction du vecteur d'onde $k = 2\pi m v / \hbar$ et ces deux limites asymptotiques donnent :

$$\sigma_0|_{ka \rightarrow 0} \rightarrow 4\pi a^2, \quad \sigma_0|_{ka \rightarrow +\infty} \rightarrow 2\pi a^2 \quad (4.23)$$

Ces deux résultats ne coïncident pas avec la formule classique établie précédemment. Ceci est concevable à basse énergie où les effets ondulatoires sont dominants car la longueur d'onde de Broglie de la particule incidente est plus grande que la dimension de la cible ; mais, à haute énergie, lorsque l'ordering inverse est vérifié, un comportement classique est attendu. En fait, même si la longueur d'onde de Broglie du projectile est plus petite que la taille de la cible, les effets de diffraction ne peuvent pas être totalement négligés et sont responsables de la différence entre le résultat classique et le résultat quantique à haute énergie (4.23) ; en effet, la discontinuité du potentiel en $r = a$ engendre une échelle de longueur nulle qui demeure toujours plus petite que la longueur d'onde, même à haute énergie. Néanmoins, l'ordre de grandeur $\sigma_0 \sim \sigma_B$ est, en général, respecté malgré ces corrections quantiques, sauf à très basse énergie, si une échelle de longueur du potentiel est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde de Broglie de l'électron incident, alors les effets d'interférences

quantiques sont particulièrement significatif. C'est l'effet Ramsauer-Townsend, qui est un phénomène de résonance de diffusion, résultant de la transparence de la barrière de potentiel ; ainsi, à la résonance, la section efficace passe par un minimum prononcé. L'énergie d'apparition de ce minimum, E_R , et la valeur de la section efficace totale correspondante, σ_{0R} , sont données dans le tableau (4.3) pour les gaz rares, la première ligne de ce tableau présente la valeur de la section efficace résultant de l'interprétation des coefficients de transport expérimentaux sur la base d'un rayon effectif classique a .

Tableau 4.3

Atome	Ar	Kr	Xe
σ_0 [\AA^2]	5	6,5	9
E_R [eV]	0,32	0,6	0,7
σ_{0R} [\AA^2]	0,15	0,49	1,28

Mis à part ces effets de résonances, à basse énergie, nous retiendrons que le modèle de sphère dure conduit à estimer l'ordre de grandeur :

$$\sigma_0 \sim \sigma_1 \sim \sigma_B \quad (4.24)$$

Au-delà de ce modèle géométrique de la sphère dure et de ses corrections quantiques, il est nécessaire de prendre en compte la nature coulombienne de l'interaction entre un nuage électronique, atomique ou moléculaire, et un électron (un ion). Considérons donc maintenant des modèles dynamiques plus réalistes pour appréhender le comportement des sections efficaces en fonction de la vitesse et préciser la validité du modèle précédent. Lorsqu'un électron (ou un ion) de vitesse v interagit avec une espèce neutre, il déforme le nuage électronique et induit un moment dipolaire transitoire (Figure 4.11).

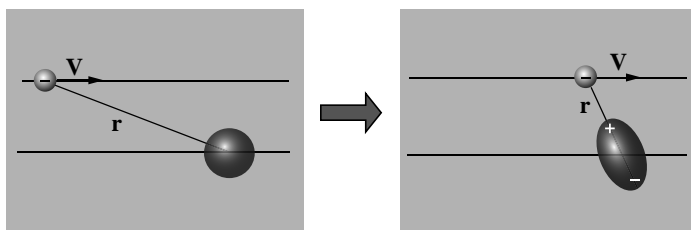


Figure 4.11 Interaction charge-dipôle induit.

Le moment dipolaire électrique d'une espèce neutre présente deux origines :

- pour certaines espèces moléculaires, il existe une polarisation permanente de moment dipolaire μ , par exemple au niveau de certaines liaisons hétéronucléaires,

- pour toutes les espèces neutres, un phénomène de polarisation induite apparaît en présence d'un champ électrique \mathbf{E} ; le nuage électronique se déforme induisant ainsi un moment dipolaire.

L'expression du moment dipolaire électrique, \mathbf{p} , d'une espèce neutre, atomique ou moléculaire, est donnée par la somme vectorielle de ces deux moments partiels,

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\mu} + \alpha_p \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (4.25)$$

où α_p est la polarisabilité de l'espèce et $\boldsymbol{\mu}$ son moment dipolaire permanent. Le tableau (4.4) illustre les valeurs typiques de ces deux caractéristiques des espèces neutres.

Tableau 4.4

Atome	α_p	Å^3	Liaison	$\boldsymbol{\mu}$ [D]	Molécule	α_p	Å^3
He	0,2		H ⁻ O	1,5	H ₂	0,9	
Ne	0,4		C ⁻ O	0,7	I ₂	10,2	
Ar	1,6		C ⁻ H	0,4	N ₂	1,7	
H	0,6		H ⁻ N	1,3	O ₂	1,6	
O	0,7		N ⁻ O	0,3	CH ₄	2,6	
N	1,0		H ⁻ Cl	1,0	SF ₆	4,3	

L'usage est d'utiliser le Debye comme unité de moment dipolaire microscopique : $1 \text{ [D]} = 3,336 \times 10^{-30} \text{ [C}\cdot\text{m]} \rightarrow 1e \times 1 \text{ [Å]} = 4,8 \text{ [D]}$. On voit donc que l'ordre de grandeur des moments permanents est donné par : $\boldsymbol{\mu} \approx ea_0/2$, nous utiliserons cette évaluation dans la suite de ce paragraphe. Considérons maintenant, successivement, le calcul de la section efficace de diffusion, $\sigma_0 \sim \sigma_1$, résultant de l'interaction :

- entre une charge et un neutre présentant un dipôle permanent, puis,
- entre une charge et un neutre développant un dipôle induit.

La valeur de l'énergie potentielle d'interaction, U , entre une charge e et un neutre polarisé générant un potentiel électrostatique φ , est donnée par $U \sim e\varphi(r)$ où les deux espèces sont séparées par une distance r . Le potentiel dipolaire décroît comme l'inverse du carré de la distance entre les deux espèces (relation 2.11), on a donc l'estimation :

$$\boldsymbol{\mu} \approx \frac{ea_0}{2} \rightarrow |U(r)| \approx \frac{e^2 a_0}{8\pi\epsilon_0 r^2}$$

où nous avons négligé l'effet de l'orientation relative entre la position de la charge et la direction du dipôle. Le potentiel décroissant rapidement en fonction de la distance, un transfert significatif d'impulsion ne peut être observé que si la distance entre la charge et le dipôle est petite. Il est possible de définir cette distance d'interaction effective en considérant que l'interaction des deux espèces est conséquente lorsque l'énergie cinétique initiale devient de l'ordre de grandeur de l'énergie potentielle

(4.13). Ce critère définit alors la distance effective d'interaction ρ comme :

$$|U(\rho)| \approx \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow \rho^2 \approx \frac{e^2 a_0}{4\pi\epsilon_0 mv^2}$$

L'ordre de grandeur de la section efficace totale de diffusion angulaire est alors donné par $\sigma_0 \sim \sigma_1 \sim \pi\rho^2$ (4.13) ; ainsi, pour les interactions entre une charge et une espèce neutre présentant une polarisation permanente, l'ordre de grandeur et le scaling des sections efficaces σ_0 et σ_1 sont donnés par :

$$\sigma_0(v) \sim \sigma_1(v) \sim \alpha^2 \frac{c^2}{v^2} \sigma_B \quad (4.26)$$

où α est la constante de structure fine (4.7).

Considérons maintenant l'interaction avec une espèce non polarisée, mais polarisable. L'ordre de grandeur de la polarisabilité α_p des espèce neutres est aisément établi sur la base du modèle de Thomson que nous présentons ici. Soit un atome d'hydrogène constitué d'un noyau ponctuel, de charge e , et d'un nuage électronique, assimilé à une sphère homogène de rayon a_0 , uniformément chargé en volume et de charge totale $-e$. Le champ électrique intérieur crée par ce nuage électronique est donné par la formule classique : $\mathbf{E}_e = -e\mathbf{r}/4\pi\epsilon_0 a_0^3$. Lorsque aucun champ extérieur n'est appliqué à l'atome, la position d'équilibre du noyau est tel que $\mathbf{E}_e(\mathbf{r}_0) = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$, c'est-à-dire au centre de la sphère. Lorsqu'un champ extérieur \mathbf{E}_a est appliqué à l'atome, cette position d'équilibre est déplacée par rapport au centre de la sphère électronique :

$$\mathbf{E}_e(\mathbf{r}_0) + \mathbf{E}_a = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{r}_0 = 4\pi\epsilon_0 a_0^3 \mathbf{E}_a / e.$$

La polarisabilité α_a de l'atome, dans le cadre du modèle de Thomson, a donc pour valeur :

$$e\mathbf{r}_0 = 4\pi\epsilon_0 a_0^3 \mathbf{E}_a \rightarrow \alpha_a = 4\pi a_0^3$$

Cette ordre de grandeur est confirmé par les valeurs expérimentales présentées dans le tableau (4.4). Lorsqu'un électron, ou un ion, de charge e et de vitesse \mathbf{v} (Figure 4.11), s'approche d'une espèce polarisable de polarisabilité α_a son champ coulombien induit un moment dipolaire électrique transitoire qui, en retour, génère une force au niveau de l'électron. Le potentiel d'interaction $U \sim e\phi(\mathbf{r})$ est de la forme (relation 2.11) :

$$\alpha_a = 4\pi a_0^3 \rightarrow |U(r)| \approx 4\pi a_0^3 \epsilon_0 \left[\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right]^2$$

Ce type de potentiel décroît rapidement en fonction de la distance et un transfert significatif d'impulsion ne peut être observé que si la distance entre la charge et l'atome est petite. Il est possible de définir cette distance d'interaction effective en considérant que l'interaction des deux particules est conséquente lorsque l'énergie

cinétique initiale devient de l'ordre de grandeur de l'énergie potentielle ; ce critère définit la distance d'interaction ρ .

$$|U(\rho)| \approx \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow \rho^2 \approx \frac{e}{4\pi\epsilon_0 v} \sqrt{\frac{2\alpha_p \epsilon_0}{m}}$$

L'ordre de grandeur de la section efficace totale de diffusion angulaire est donné par $\sigma_0 \sim \sigma_1 \sim \pi\rho^2$, ainsi, pour ce type d'interaction :

$$\sigma_0(v) \sim \sigma_1(v) \sim \alpha \frac{c}{v} \sigma_B \quad (4.27)$$

Cette section efficace dipolaire présente une dépendance en l'inverse de la vitesse, alors que pour une sphère dure elle est indépendante de la vitesse. Un tel comportement, caractéristique des interactions dipolaires, est effectivement observé pour les ions aux grandes vitesses mais un certain nombre de phénomènes, à basse énergie, ne peuvent pas être interprétés dans le cadre de ces modèles d'interaction classique (4.24, 4.26, 4.27). Néanmoins, ces trois modèles, 4.24, 4.26 et 4.27, permettent de construire une hiérarchie d'interactions, s'organisant autour de la loi de décroissance de l'interaction en fonction de la distance ; cette hiérarchie d'interaction correspond à une hiérarchie de section efficace. Le tableau (4.5) résume ces résultats et les éléments de cette correspondance.

Tableau 4.5

Interaction	Potentiel $U(r)$	Section efficace σ
Dipôle permanent	r^{-2}	$\alpha^2 \left(\frac{c}{v}\right)^2 \sigma_B$
Dipôle induit	r^{-4}	$\alpha^1 \left(\frac{c}{v}\right)^1 \sigma_B$
Sphère dure	$r^{-\infty}$	$\alpha^0 \left(\frac{c}{v}\right)^0 \sigma_B$

Notons, au vu des données expérimentales, qu'un modèle de dipôle induit apparaît pertinent pour l'hydrogène atomique au-dessus de 4 eV, et pour l'hélium au-dessus de 3 eV ; et un modèle de sphère dure pour l'hydrogène moléculaire en dessous de 4 eV et l'hélium en dessous de 3 eV.

En conclusion, le tableau (4.6) présente les résultats obtenus sur l'ensemble des quatre interactions étudiés, charge-charge et charge-neutre et présente les scaling des fréquences et libres parcours correspondants (Tableau 4.1).

Au-delà de l'analyse des types d'interactions et de la discussion sur la pertinence des modèles, trois résultats importants ont été établis :

- la fréquence de collision pour le transfert d'impulsion dans un plasma totalement ionisé décroît comme la puissance trois de l'inverse de la vitesse,
- les modèles d'interactions de type sphère dure dans les plasmas faiblement ionisés conduisent à des libres parcours moyens indépendants de la vitesse,

- les modèles d'interactions du type dipôle induit dans les plasmas faiblement ionisés sont caractérisés par des fréquences de collisions indépendantes de la vitesse.

Tableau 4.6

Interaction	$U(r)$	$\sigma(v)$	$\nu(v)$	$\lambda(v)$
Coulomb	r^{-1}	v^{-4}	v^{-3}	v^{-4}
Dipôle permanent	r^{-2}	v^{-2}	v^{-1}	v^{-2}
Dipôle induit	r^{-4}	v^{-1}	v^0	v^{-1}
Sphère dure	$r^{-\infty}$	v^0	v^{+1}	v^0

Ces deux derniers résultats seront mis à profit pour construire des modèles fluides et cinétiques complémentaires aux chapitres six et neuf.

Les deux modèles : fréquence de collision constante et libre parcours moyen constant, offrent ainsi la possibilité de borner, de manière relativement complète, l'influence des caractéristiques microscopiques de l'interaction sur la dynamique des modèles fluides et cinétiques.

4.3 COLLISIONS INÉLASTIQUES

4.3.1 Seuil de réaction

Les études précédentes ont été consacrées aux cas des collisions élastiques où l'état et la nature des espèces en interaction n'est pas modifié à l'issue de la collision. Lorsque l'état, ou la nature, des espèces est modifié, les collisions sont dites inélastiques. Dans les plasmas, quatre types d'espèces doivent être considérés, les électrons, les ions, les atomes et les molécules. Pour ces deux dernières espèces il faut aussi distinguer les différents états d'excitation. Les collisions inélastiques relèvent plus de la physico-chimie des plasmas que de la physique des plasmas, mais une connaissance des principaux types de réactions et de l'ordre de grandeur de leurs caractéristiques est néanmoins nécessaire au physicien des plasmas pour développer une intuition permettant de discriminer les processus dominant la dynamique du bilan d'espèces dans un plasma. Deux types de collisions inélastiques doivent être considérés,

- les collisions inélastiques où seul l'état interne des particules est modifié,
- les collisions réactives où la nature des particules est modifiée à l'issue de la collision.

La modification de l'état, ou de la nature, des particules s'opère en consommant une partie de l'énergie cinétique des particules incidentes et les produits de réaction apparaissent avec un certain contenu énergétique sous forme cinétique ; le bilan énergétique global permet de considérer deux classes de réactions ; (i) la réaction est

endothermique lorsque le bilan global d'énergie cinétique est négatif, (ii) dans le cas contraire lorsque la réaction produit de l'énergie cinétique elle est dite exothermique.

Il existe nécessairement un seuil de réaction correspondant à l'énergie nécessaire pour la transformation de la nature, ou de l'état, des particules incidentes. La relation entre ce seuil de réaction et l'énergie minimum requise pour la réalisation du processus inélastique doit prendre en compte l'aspect cinématique de la collision. En effet, lors d'une collision entre deux particules, l'énergie du système incident est la somme de l'énergie cinétique du centre de masse plus l'énergie cinétique de la particule fictive décrivant le mouvement relatif des espèces, l'énergie du centre de masse étant invariante seule l'énergie du mouvement relatif est donc disponible pour le changement d'état, ou de nature, des particules.

Considérons la réaction : $A + B \rightarrow C + D$, soit ΔU la différence d'énergie interne entre les particules incidentes et sortantes au repos : $\Delta U = U_C + U_D - U_A - U_B$. Lorsque la cible B est au repos la vitesse relative est égale à la vitesse du projectile A et l'énergie cinétique du mouvement relatif dans le repère du centre de masse est donné par : $2E_r = m_A m_B v_A^2 / (m_A + m_B)$; l'énergie disponible dans le repère du centre de masse E_r peut être exprimé en fonction de l'énergie cinétique du projectile dans le repère du laboratoire, $E_c = m_A v_A^2 / 2 \rightarrow E_r / E_c = m_B / (m_A + m_B)$. La valeur de l'énergie cinétique de seuil, E_S , nécessaire à la réaction est obtenue en identifiant ΔU et E_r .

$$E_S = \left(\frac{m_A + m_B}{m_B} \right) \Delta U \quad (4.28)$$

- Si le projectile est plus léger que la cible, $m_A \ll m_B$, le seuil est approximativement égale à la variation d'énergie interne, par contre,
- dans le cas contraire, $m_A \gg m_B$, le seuil est beaucoup plus élevé que la variation d'énergie interne car l'invariance de la vitesse du centre masse implique une faible disponibilité en énergie dans le repère du centre de masse. Ce comportement du seuil explique (en partie) la plus grande réactivité de la population électronique comparée aux populations ioniques.

4.3.2 Ionisation et réactivité

Un plasma faiblement ionisé est souvent le siège d'un très grand nombre de réactions, ioniques, atomiques et moléculaires ; la plus importante, car elle contraint le bilan de particules et contrôle ainsi l'existence du plasma, est l'ionisation par impact électronique : $e + A \rightarrow A^+ + 2e$. Il est donc nécessaire d'étudier en détail cette réaction. L'énergie de première ionisation de l'atome d'hydrogène $E_I = \alpha^2 m_e c^2 / 2 = 13,6$ eV donne l'ordre de grandeur du seuil de la réaction d'ionisation par impact électronique. Le tableau (4.7) présente les valeurs des potentiels de première (E_I) et deuxième (E_{II}) ionisation pour les éléments des deux premières lignes de la classification périodique et les métaux usuels.

Tableau 4.7

	E_I	E_{II}
Li	5,39	75,63
Be	9,32	18,21
B	8,29	25,15
C	11,26	24,38
N	14,53	29,60
O	13,61	35,11
F	17,42	34,97
Ne	21,56	40,96

	E_I	E_{II}
Na	5,13	47,28
Mg	7,64	15,03
Al	5,98	18,82
Si	8,15	16,34
P	10,48	19,72
S	10,36	23,33
Cl	12,96	23,81
Ar	15,75	27,62

	E_I	E_{II}
Ti	6,82	13,58
Fe	7,87	16,18
Cu	7,73	20,30
Rb	4,17	27,28
Ag	7,58	21,49
Cs	3,89	25,1
Au	9,23	20,5
Hg	10,43	18,76

L'augmentation du potentiel de première ionisation des alcalins, alcalino-terreux vers les halogènes et gaz rares s'explique par les règles de construction des couches atomiques. En effet, un alcalin perdant un électron possède une configuration électronique à 8 électrons de valence, de même un gaz rare ionisé perd une telle configuration ; enfin, les métaux usuels possèdent des potentiel de première ionisation situés typiquement entre 5 et 10 eV.

Pour aborder le problème de la section efficace d'ionisation il est instructif de reprendre le modèle classique proposé par Thomson. Soit un électron libre en translation uniforme (Figure 4.12), l'énergie cinétique associée à cette translation a pour valeur E , cet électron libre interagit avec un électron lié orbitant autour d'un proton sur la première orbite de Bohr (Figure 4.12). La distance entre la trajectoire de l'électron libre et le noyau de l'atome d'hydrogène est $b \gg a_0$.

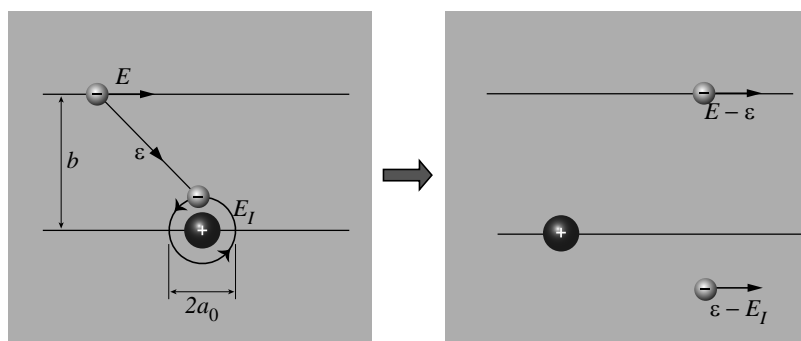


Figure 4.12 Ionisation par impact électronique.

Nous avons établi en début de chapitre l'expression de $\varepsilon(E, b)$ (4.15), l'énergie transférée depuis une particule chargée, en translation uniforme, d'énergie cinétique E , vers un électron situé à une distance b :

$$\varepsilon(E, b) = \frac{e^4}{16\pi^2\varepsilon_0^2Eb^2} = \frac{r_e^2 m^2 c^4}{b^2 E}$$

où nous avons introduit le rayon classique de l'électron r_e (4.2). La section efficace différentielle de transfert d'énergie :

$$\frac{d\sigma(E, \varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{\left[\frac{\text{Nombre d'électrons transférant entre } \varepsilon \text{ et } \varepsilon + d\varepsilon}{\text{Par unité d'énergie } d\varepsilon \text{ et unité de temps } dt} \right]}{\left[\frac{\text{Nombre d'électrons incidents}}{\text{Par unité de surface } dS \text{ et unité de temps } dt} \right]}$$

peut être évaluée en éliminant le paramètre d'impact b dans la dérivée $\frac{d\varepsilon}{db}$.

$$d\sigma = 2\pi b db \rightarrow \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{2\pi b}{\left| \frac{d\varepsilon}{db} \right|} \rightarrow \frac{d\sigma(E, \varepsilon)}{d\varepsilon} = 4\sigma_B \frac{E_I^2}{E\varepsilon^2}$$

L'énergie transférée doit être :

- au minimum, égale à l'énergie de seuil, c'est-à-dire au potentiel d'ionisation E_I , et peut,
- au maximum, être égale à l'énergie de l'électron incident E .

Il nous faut donc intégrer cette section efficace différentielle de transfert d'énergie, $d\sigma/d\varepsilon$, entre ces deux bornes, pour obtenir la section efficace totale d'ionisation $\sigma_I(E)$ par l'impact d'un électron d'énergie E .

$$\sigma_I(E) = \int_{E_I}^E \frac{d\sigma}{d\varepsilon} d\varepsilon = 4\sigma_B \frac{E_I^2}{E} \int_{E_I}^E \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2}$$

Ce résultat constitue la formule de Thomson illustrée par la figure 4.13.

$$\sigma_I(E) = 4\sigma_B \left[\frac{E_I}{E} - \frac{E_I^2}{E^2} \right] \quad (4.29)$$

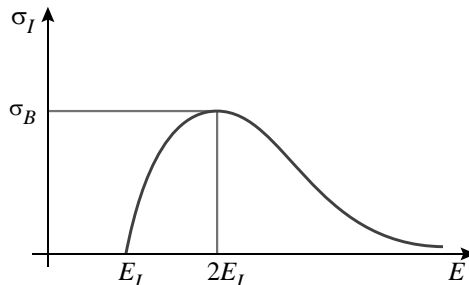


Figure 4.13 Section efficace d'ionisation de Thomson.

Cette section efficace présente un seuil en énergie, E_I , ainsi qu'un maximum pour l'énergie $E_{\max} = 2E_I = 27,2 \text{ eV}$, la valeur maximum de la section efficace est alors égale à la section de Born $\sigma(2E_I) = \sigma_B$. La figure 4.14 présente les données

expérimentales pour la section efficace d'ionisation, par impact électronique, de l'hydrogène dans son état fondamental. À basse énergie, le comportement observé expérimentalement au voisinage du seuil : $\sigma_I(E) \sim (E - E_I)/E_I$ est conforme à celui prédit par la formule de Thomson ; par contre, à haute énergie, la décroissance n'est pas purement algébrique et un comportement du type : $\sigma_I(E) \sim \log(BE)/E$ est observé expérimentalement et ne peut être interprété que dans le cadre d'un modèle quantique.

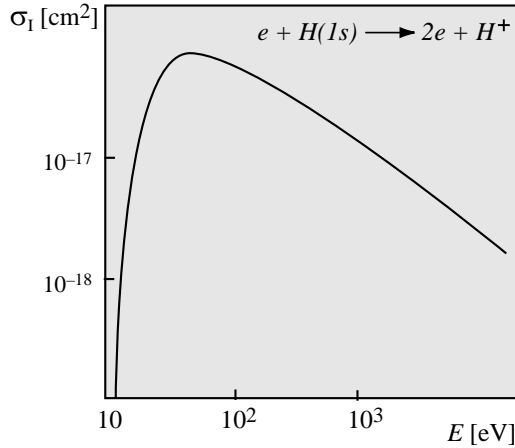


Figure 4.14 Section efficace d'ionisation par impact électronique pour l'atome d'hydrogène dans son état fondamental.

La formule de Thomson peut être améliorée pour obtenir un meilleur accord avec les données expérimentales. Partant de la forme : $\sigma_I(E) = 4\sigma_B F(E/E_I)$ construite à partir d'une fonction F dépendant uniquement du rapport de l'énergie de l'électron incident divisé par le seuil d'ionisation, il est possible d'identifier un ensemble de fonction F offrant un meilleur accord avec les données expérimentales. Le choix de $F_T(x) = (x - 1)/x^2$ permet de retrouver la formule de Thomson ; Smirnov a identifié une fraction rationnelle simple $F_S(x)$ améliorant la précision de la formule de Thomson ; cette dernière fonction ne constitue pas le résultat d'un modèle affiné mais une simple approximation algébrique de la courbe expérimentale, par contre, le choix de la fonction $F_G(x)$ proposé par Gryzinski, résulte de l'étude d'un modèle plus complet que le modèle de Thomson ;

$$F_T = \frac{x-1}{x^2}, F_S = \frac{10x-1}{x(x+8)}, F_G = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{1}{x} + \frac{2x-1}{3x^2} \log(2.7 + \sqrt{x-1})\right]$$

d'autres fonctions F , issues de modèles quantiques, sont aussi disponibles, mais, dans le domaine de la physique des plasmas les trois fonctions $F_T(x)$, $F_S(x)$ et $F_G(x)$ constituent une hiérarchie pertinente pour l'étude de l'ionisation. Ces trois formules, $\sigma_I(E) = 4\sigma_B F_{T,S,G}(E/E_I)$, peuvent être aisément étendues aux atomes

possédant plusieurs électrons de valence en multipliant la section efficace par le nombre d'électrons de valence.

Nous venons d'étudier le problème de l'ionisation par impact électronique pour un électron de vitesse initiale définie ; dans un plasma la population électronique est décrite par une distribution de vitesses électronique (2.20) ; aussi, pour construire une description de la dynamique de la densité électronique n_e , il est nécessaire de prendre la moyenne de la section efficace $\sigma_I(E)$ sur la distribution d'énergie E ou de vitesse v . Deux choix de description sont alors possibles, une description temporelle dans le cadre d'un problème aux conditions initiales ou une description spatiale dans le cadre d'un problème aux conditions aux limites ;

- dans le premier cas, nous introduirons la fréquence d'ionisation ν_i (4.1),
- dans le deuxième, nous introduirons le libre parcours moyen d'ionisation (4.1), qui en présence d'un champ électrique devient le *premier coefficient de Townsend* α_T .

$$\begin{aligned} \nu_i &= n_n \langle \sigma_I(v) v \rangle_v \rightarrow \left. \frac{dn_e}{dt} \right|_{\text{Ionisation}} = \nu_i n_e(t) \\ \alpha_T &= n_n \langle \sigma_I(v) \rangle_v \rightarrow \left. \frac{dn_e}{dx} \right|_{\text{Ionisation}} = \alpha_T n_e(x) \end{aligned} \quad (4.30)$$

où n_n est la densité de neutres. Le premier coefficient de Townsend, α_T , sera étudiée plus en détail à la fin de ce chapitre.

L'ionisation n'est pas l'unique réaction au sein d'un plasma, le tableau (4.8) présente un ensemble de réactions induites par impact électronique.

Tableau 4.8

Processus	Réaction
Ionisation par impact électronique	$e + A \rightarrow 2e + A^+$
Excitation par impact électronique	$e + A \rightarrow e + A^*$
Recombinaison radiative	$e + A^+ \rightarrow A^* + h\nu$
Recombinaison à trois corps	$e + A^+ + B \rightarrow B + A^*$
Détachement par impact électronique	$e + A^- \rightarrow 2e + A$
Attachement à trois corps	$e + A + B \rightarrow A + B^-$
Ionisation dissociative	$e + AB \rightarrow 2e + A + B^+$
Dissociation par impact électronique	$e + AB \rightarrow e + A + B$

Parmi ces réactions : (i) l'excitation par impact électronique est importante car les seuils se situent en dessous des seuils d'ionisation et (ii) la désexcitation radiative donne lieu à une émission lumineuse qui signe souvent l'existence d'un plasma.

La figure 4.15 présente les trois sections efficaces : élastique totale σ_0 , d'excitation σ_X et d'ionisation σ_I pour l'argon ; on notera, à très basse énergie, le minimum de

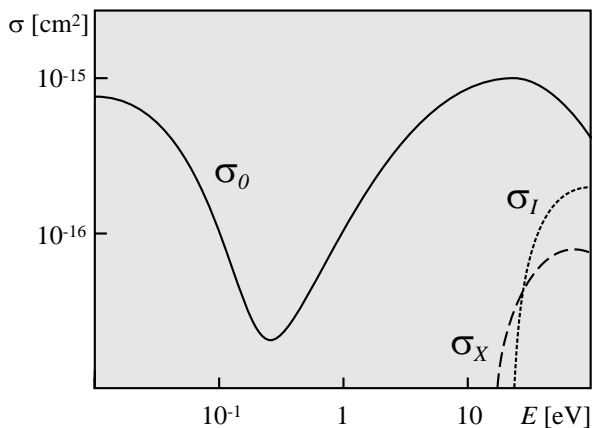


Figure 4.15 Sections efficaces élastique totale σ_0 , d'ionisation σ_I et d'excitation σ_X pour l'argon.

Ramsauer-Townsend du à une résonance de transmission. La section efficace d'excitation électronique : $e + A \rightarrow e + A^*$, reste faible au voisinage du seuil car l'électron cédant toute son énergie cinétique reste au repos après la collision et la condition de conservation du moment cinétique, impliquant que son apport en moment cinétique soit égale à la variation de moment cinétique orbitale de la transition induite, est, en général, difficile à réaliser. Au voisinage de ce seuil, la croissance de la section efficace est donc très lente, puis elle atteint un maximum vers une énergie de l'ordre de grandeur de quelque fois l'énergie de seuil ; ce maximum est de l'ordre de 10^{-16} cm^2 pour les transitions permises, et de l'ordre de 10^{-19} cm^2 pour les transitions interdites. Au-delà de ce maximum, la courbe de section efficace décroît comme $\log E/E$ pour les transitions permises et comme $1/E$ pour les transitions interdites.

Suivant les atomes, par ordre de complexité croissante, viennent ensuite les molécules. Malgré leur complexité apparente, ces systèmes peuvent être étudiés dans le cadre de l'ordering de Born-Oppenheimer. Cette ordering propose une hiérarchie entre les échelles de temps (c'est-à-dire entre les échelles d'énergie) associées aux différents degrés de liberté d'une molécule. En effet, pour une configuration nucléaire fixe les électrons de valence peuvent effectuer des transitions rapides, puis, sur une échelle de temps plus lente, l'ensemble du nuage électronique formant la liaison peut se déformer légèrement dans le cadre des mouvements nucléaires, enfin la molécule, dans son ensemble, peut être le siège d'un mouvement de rotation global (Figure 4.16). Afin d'établir l'ordering entre les échelles de temps associées aux reconfigurations électroniques, aux vibrations et aux rotations, considérons une molécule diatomique homonucléaire, la masse d'un noyau est notée M , la masse de l'électron m et la dimension caractéristique de la molécule a .

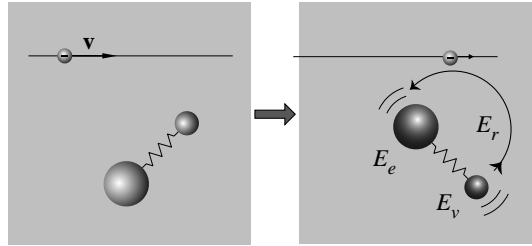


Figure 4.16 Excitation moléculaire par impact électronique.

D'une part, les électrons de valence étant localisés sur une distance de l'ordre de grandeur de quelques rayons atomiques, leur impulsion est donnée par \hbar/a ; l'énergie typique des processus d'excitation électronique est donc $E_e \sim \hbar^2/ma^2$. D'autre part, si ces électrons interagissent avec les noyaux, ces noyaux doivent aussi interagir avec une force du même ordre de grandeur afin d'assurer la stabilité de la structure moléculaire. En première approximation, ces forces peuvent être modélisées comme des interactions de type harmonique avec une constante d'élasticité k . Du point de vue électronique l'énergie associée à cette force de cohésion est de l'ordre de $\hbar\sqrt{k/m} \sim E_e$, du point de vue des noyaux l'énergie associée à cette force de cohésion est donnée par $\hbar\sqrt{k/M}$; l'énergie associée aux mouvements de vibration vérifie donc la relation : $E_v \sim \sqrt{m/M}E_e \sim \hbar^2/\sqrt{Mma^2}$. Enfin, le contenu énergétique du mouvement de rotation est donné par le rapport du carré du moment cinétique sur le moment d'inertie. Le moment cinétique est quantifié à l'échelle moléculaire et, pour le bas du spectre, vaut typiquement \hbar . Le moment d'inertie est de l'ordre de Ma^2 , l'énergie de rotation est donc donnée par : $E_r \sim \hbar^2/Ma^2 \sim (m/M) E_e$. L'ordering entre les trois types d'excitations moléculaires est donc adiabatique.

$$E_e/E_v/E_r \sim 1/\sqrt{\frac{m}{M}}/\frac{m}{M} \quad (4.31)$$

Les énergies typiques d'excitation électronique des molécules sont de l'ordre de quelques eV, les énergies d'excitation vibrationnelle de l'ordre d'une fraction d'eV et les énergies rotationnelles sont inférieures à 10^{-3} eV (sauf pour l'hydrogène et l'eau). L'ordering adiabatique de Born-Oppenheimer est vérifié expérimentalement, par exemple, pour les molécules diatomiques homonucléaires usuelles, l'énergie d'un état est la somme des énergies de configuration électronique, de vibration et de rotation.

$$E = \underbrace{E_e}_{E_e \text{ électronique}} + \underbrace{J(J+1)\hbar\Omega}_{E_r \text{ rotation}} + \underbrace{\left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega}_{E_v \text{ vibration}}$$

Les spectres des oscillateurs linéaires sont linéaires et caractérisés par un nombre quantique N , les spectres des rotateurs isotopes sont quadratiques et caractérisés

par un nombre quantique J ; les valeurs expérimentales des quantas de vibration et rotation, pour trois molécules courantes, sont présentées dans le tableau (4.9),

Tableau 4.9

Molécule	$\frac{\hbar\Omega}{k}$ [K]	$\frac{\hbar\omega}{k}$ [K]
H ₂	85,5	6320
O ₂	2,08	2260
N ₂	2,39	3380

où les énergies sont mesurées en kelvin. Notons une différence importante entre la physique des gaz moléculaires et la physique des plasmas moléculaires :

- dans un gaz moléculaire, non ionisé, à température ordinaire T_n , les états rotationnels sont excités mais les molécules restent en général dans l'état vibrationnel fondamental :

$$E_e \gg E_v \gg kT_n \gg E_r$$

- par contre, dans un plasma moléculaire, faiblement ionisé, à une température électronique T_e typique de quelque eV, l'excitation vibrationnelle constitue l'un des principaux mécanismes de perte d'énergie pour les électrons :

$$E_e \geq kT_e > E_v \gg E_r.$$

La population électronique ne possède pas le monopole de la réactivité dans un plasma ; les ions et les espèces neutres excitées sont aussi impliqués dans de nombreuses réactions dont l'étude relève de la physico-chimie des plasmas. Le tableau (4.10) présente quelques-unes de ces nombreuses réactions ioniques.

Tableau 4.10

Processus	Réaction
Échange de charge résonnant	$A + A^+ \rightarrow A^+ + A$
Échange de charge non résonnant	$B + A^+ \rightarrow B^+ + A$
Détachement réactif	$A + B^- \rightarrow AB + e$
Recombinaison dissociative	$AB^+ + e \rightarrow A^* + B$

Parmi cet ensemble, l'échange de charge est important, particulièrement s'il est résonnant, en effet, il participe au transport des ions de façon significative et parfois domine le transport par échange d'impulsion ; il crée aussi des neutres rapides et des ions lents à partir d'ions rapides et de neutres lents. Pour l'hydrogène la section efficace d'échange de charge résonnant, à basse énergie, est de l'ordre de : $10^{-15} \text{ cm}^2 \leq \sigma_{EC} \leq 10^{-14} \text{ cm}^2$. La recombinaison dissociative est elle aussi importante, à haute pression dans les décharges moléculaires, le taux de réaction K (4.1)

est de l'ordre de : $10^{-9} \text{ cm}^3\text{s}^{-1} \leq K_{RD} \leq 10^{-6} \text{ cm}^3\text{s}^{-1}$ et domine la recombinaison radiative (4.8) dans la majorité des décharges : $10^{-13} \text{ cm}^3\text{s}^{-1} \leq K_{RR} \leq 10^{-12} \text{ cm}^3\text{s}^{-1}$; la section efficace est ici particulièrement difficile à mesurer car les produits de réaction sont neutres et les sections efficaces faibles aux basses énergies, on a donc plus facilement accès au coefficient de recombinaison K .

Les neutres excités, où dans leurs états fondamentaux, présentent aussi une réactivité, le tableau (4.11) présente quelques-unes des ces réactions.

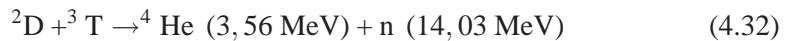
Tableau 4.11

Processus	Réaction
Réaction de Penning	$A^* + B \rightarrow e + A + B^+$
Ionisation associative	$A + B^* \rightarrow e + AB^+$
Réaction chimique	$A + B \rightarrow C + D$

Pour conclure ce paragraphe sur les réactivités atomique et moléculaire, signalons l'importance de la réaction de Penning qui est particulièrement significative lorsque l'excitation d'une espèce A excède le seuil d'une espèce B ; pour les métastables de l'hélium et du mercure les sections efficaces sont de l'ordre de : $10^{-15} \text{ cm}^2 \leq \sigma_p \leq 10^{-14} \text{ cm}^2$.

Enfin, la réactivité nucléaire est aussi présente dans les plasmas à très haute température ($\geq 10 \text{ KeV}$), mais l'obtention d'une combustion thermonucléaire est très difficile à réaliser. En effet, pour amener les noyaux chargés positivement aux distances où opèrent les forces assurant la réactivité nucléaire, il faut vaincre la répulsion électrostatique, intense et à longue portée. La réaction de fusion entre deux noyaux chargés positivement a lieu lorsque l'interaction forte domine la répulsion coulombienne, soit à une distance d'approche R de quelques fermi ; la hauteur de la barrière coulombienne est donc de l'ordre de $e^2/4\pi\epsilon_0 R$ c'est-à-dire plusieurs centaines de keV. La section efficace de fusion, présenté sur la figure 4.17, est de l'ordre de la surface des noyaux soit 10^{-30} à 10^{-28} m^2 .

Les réactions de fusion envisageables sont assez nombreuses, mais seulement un petit nombre sont utilisables en pratique, la plus favorable étant la réaction D-T.



Le tritium est un élément instable à courte durée de vie (12,6 ans), et n'existe pas dans la nature ; il est produit à un taux extrêmement faible par les rayons cosmiques, ou par capture neutronique dans les réacteurs à eau lourde, à un rythme de production trop faible pour être compatible avec les besoins d'un réacteur à fusion (50 kg/an).

On envisage de le fabriquer sur place à partir du lithium contenu dans la couverture du réacteur à cet effet, en utilisant les neutrons produits par la réaction de fusion : $\text{n} + {}^6\text{Li} \rightarrow {}^4\text{He} + \text{T} + 4,8 \text{ MeV}$ et $\text{n} + {}^7\text{Li} \rightarrow {}^4\text{He} + \text{T} + \text{n} - 2,5 \text{ MeV}$. Pour s'affranchir du tritium (qui est radioactif, certes à courte durée de vie, mais très pénétrant

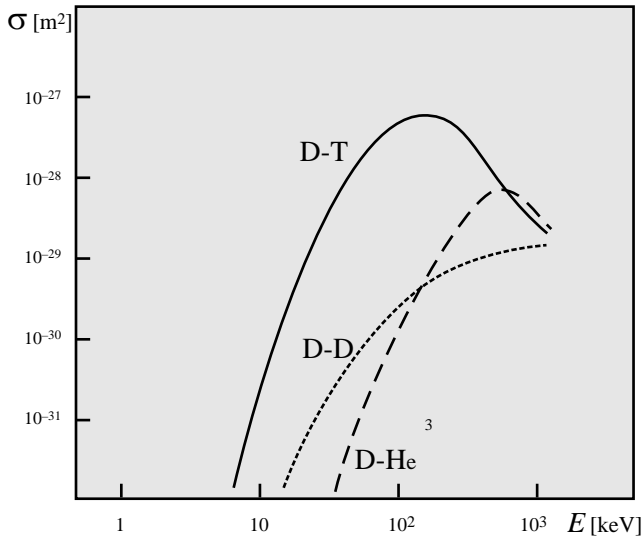


Figure 4.17 Sections efficaces des principales réactions de fusion des isotopes de l'hydrogène.

physiquement et réactif chimiquement), d'autres réactions sont envisageables, mais nécessitent des températures plus élevées car les sections efficaces de réaction sont beaucoup plus faibles (Figure 4.17) : $D+D \rightarrow {}^3\text{He}+n+3,27 \text{ MeV}$ et $D+D \rightarrow T+p+4,03 \text{ MeV}$. La combustion thermonucléaire D-D nécessite des températures de l'ordre de 100 keV, ce qui n'est pas envisageable actuellement. Enfin, si l'on veut aussi s'affranchir du problème des neutrons, responsables de l'activation des structures, on peut envisager, à très long terme, $D+{}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He}+p+18,34 \text{ MeV}$ dont l'impact radiologique serait quasi-nul, mais le principal obstacle est la rareté de l'hélium 3, quasi-inexistant sur Terre, abondant dans le sol de la Lune.

4.4 THÉORIE DU LIBRE PARCOURS MOYEN

4.4.1 Viscosité, mobilité, diffusion

Dans le cadre de la théorie des collisions, le concept de libre parcours moyen permet de développer une théorie simple du transport et de l'ionisation dans les plasmas. Dans ce paragraphe, nous allons dériver, successivement, les expressions des coefficients de viscosité, de diffusion et de mobilité dans un plasma faiblement ionisé afin d'illustrer les concepts et méthodes de la théorie du libre parcours moyen.

Considérons un écoulement électronique (ou ionique) possédant, au voisinage du plan $z = 0$, un gradient de **vitesse macroscopique** (moyenne) non nulle ; à l'échelle macroscopique cette vitesse moyenne des électrons (ou ions), suivant la direction y , est donc une fonction de la coordonnée z : $V_y(z)$. Ainsi, les vitesses moyennes des différentes couches de fluide sont fonctions de leurs distances au plan $z = 0$ et ces

différentes tranches de fluide échangent de l'impulsion au niveau microscopique à travers l'agitation thermique et les collisions des électrons (ions) (Figure 4.18). Cet échange d'impulsion induit une (densité volumique de) force à l'échelle macroscopique qui caractérise la viscosité du plasma.

La tranche de fluide située dans le plan $z = 0$ subit, de la part des tranches fluides contiguës, une force F par unité de surface $dxdy$, suivant la direction du gradient de vitesse, définissons la viscosité ζ comme le rapport de cette force surfacique sur le gradient de vitesse.

$$\frac{F}{dxdy} \equiv -\zeta \left. \frac{dV_y}{dz} \right|_{z=0}$$

En effet, les particules des tranches adjacentes sont transportées, à travers l'agitation thermique et les collisions, vers le plan $z = 0$ (Figure 4.18). De part et d'autre de ce plan $z = 0$ arrivent donc des particules de vitesse moyenne $V_y(z) \neq V_y(0)$. On note n la densité électronique, e et m la charge et la masse de l'électron et $\langle v \rangle$ la vitesse moyenne d'agitation thermique (2.6).

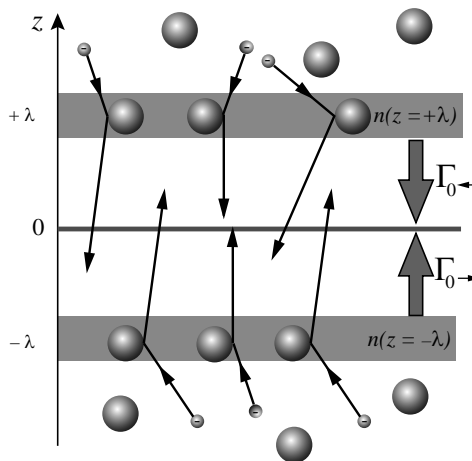


Figure 4.18 Flux collisionnels, les vitesses macroscopiques des électrons ne sont pas représentées.

Le terme source du transport d'impulsion à son origine dans la dernière collision d'une particule avant son passage en $z = 0$ (Figure 4.18); il se situe donc dans les plans $z = +\lambda$ et $z = -\lambda$ où λ est le libre parcours moyen (4.6). Le flux de particules se dirigeant du plan $z = \lambda$ vers le plan $z = 0$ est égal à $\Gamma_{0\leftarrow} = -n \langle v \rangle / 4$ d'après la relation (2.23), chaque particule transportant l'impulsion $mV_y(z = \lambda)$; le flux de particules se dirigeant du plan $z = -\lambda$ vers le plan $z = 0$ est égal à $\Gamma_{0\rightarrow} = n \langle v \rangle / 4$. Le flux total d'impulsion est donc donné par le bilan entre ces deux flux partiels. Si la longueur de gradient est plus grande que le libre parcours moyen, ce bilan peut

être approché par le premier terme de son développement de Taylor.

$$\frac{F}{dxdy} = \frac{n \langle v \rangle}{4} m V_y (-\lambda) - \frac{n \langle v \rangle}{4} m V_y (+\lambda) \approx -\frac{nm \langle v \rangle \lambda}{2} \frac{dV_y}{dz} \Big|_0$$

Le coefficient de viscosité est donc proportionnel au libre parcours moyen et à la vitesse microscopique d'agitation thermique moyenne.

$$\zeta = nm\lambda \left\langle \frac{v}{2} \right\rangle \quad (4.33)$$

Le même type d'analyse peut être appliqué au transport de particules en présence d'une densité non homogène $n(z)$. Le flux de particules, au voisinage du plan $z = 0$, a son origine dans la dernière collision d'une particule avant son passage en $z = 0$ (Figure 4.18) ; il se situe donc dans les plans $z = +\lambda$ et $z = -\lambda$ où λ est le libre parcours moyen. Le flux de particules se dirigeant du plan $z = \lambda$ vers le plan $z = 0$ est égale à $\Gamma_{0\leftarrow} = -n(+\lambda) \langle v \rangle / 4$, le flux de particules se dirigeant du plan $z = -\lambda$ vers le plan $z = 0$ est égale à $\Gamma_{\rightarrow 0} = n(-\lambda) \langle v \rangle / 4$; comme la densité de particules est différente de part et d'autre du plan $z = 0$, le flux de particules résultant, obtenu comme la somme de ces deux flux partiels, est non nul. Si la longueur de gradient est plus petite que le libre parcours moyen, ce bilan de flux peut être approché par le premier terme de son développement de Taylor.

$$\Gamma = \Gamma_{0\leftarrow} + \Gamma_{\rightarrow 0} = \frac{n(-\lambda) \langle v \rangle}{4} - \frac{n(+\lambda) \langle v \rangle}{4} \approx -\frac{\lambda \langle v \rangle}{2} \frac{dn}{dz} \Big|_0$$

Le coefficient de diffusion, D , déjà identifié à l'issue de l'analyse des courants de conduction et de diffusion est donc égal à :

$$D = \lambda \left\langle \frac{v}{2} \right\rangle \quad (4.34)$$

La présence d'un gradient de potentiel électrostatique $d\phi/dz$ est aussi une source de transport de charges sous les influences combinées de l'accélération électrique et des collisions. Soit une population de particules chargées plongée dans un champ électrique $E = -d\phi/dz$ dirigé suivant l'axe des z . Sur un libre parcours λ l'énergie $\frac{1}{2}mv^2(z) + e\phi(z)$ est conservée.

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{2}mv^2(z) + e\phi(z) \right]_{z \leq \lambda} = 0 \rightarrow \frac{dv^2(z)}{dz} \Big|_{z \leq \lambda} = \frac{2e}{m} E$$

La vitesse microscopique, sur une distance z plus petite que le libre parcours moyen, a donc pour expression :

$$v(z) \approx v(0) + z \left. \frac{dv}{dz} \right|_0 \rightarrow v(z) - v(0) \approx \frac{ez}{mv(0)} E \Big|_{z \leq \lambda}$$

La vitesse macroscopique est obtenue comme la moyenne de la somme des vitesses microscopiques $v(z)$. Le flux microscopique se dirigeant du plan $z = \lambda$ vers le plan $z = 0$ donne une contribution $v_{0\leftarrow}(0) \approx v(\lambda) - e\lambda E/mv$ et le flux de particules se dirigeant du plan $z = -\lambda$ vers le plan $z = 0$ une contribution $v_{\rightarrow 0}(0) \approx v(-\lambda) + e\lambda E/mv$; ainsi la vitesse résultante dans le plan $z = 0$ est obtenue comme la moyenne de ces deux flux :

$$\langle v(0) \rangle = \langle v_{\rightarrow 0}(0) - v_{0\leftarrow}(0) \rangle = \frac{2e\lambda}{m} \left\langle \frac{1}{v} \right\rangle E$$

en effet, $\langle v(-\lambda) \rangle = \langle v(+\lambda) \rangle$. L'effet des collisions est donc d'inhiber le développement d'une accélération constante et de ramener le mouvement macroscopique à une translation uniforme proportionnelle au champ électrique. Le coefficient de proportionnalité entre champ et vitesse définit la mobilité, μ , de l'espèce considérée.

$$\mu = \frac{e}{m} \lambda \left\langle \frac{2}{v} \right\rangle \quad (4.35)$$

Le calcul du coefficient de mobilité, qui vient d'être présenté ici, suppose implicitement que le champ électrique perturbe faiblement la population de particules chargées, c'est-à-dire que *la vitesse de dérive engendrée par le champ est plus faible que la vitesse moyenne d'agitation thermique*.

$$\mu_i E \ll 15 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \times \sqrt{\frac{T_i}{[1 \text{ eV}]}} \quad \mu_e E \ll 671 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \times \sqrt{\frac{T_e}{[1 \text{ eV}]}}$$

La figure 4.19 présente les vitesses de dérive des électrons et des ions en fonction du champ électrique que divise la pression : E/P , les bandes ionique et électronique correspondent à la dispersion des valeurs due à la prise en compte de l'ensemble des gaz atomique et moléculaire usuels. La dispersion est plus faible pour les électrons et pour les ions ; la borne supérieure correspond aux éléments légers tel que l'hydrogène et l'hélium, la borne inférieure aux éléments lourds tels que le mercure ou le xénon. On voit, sur cette figure 4.19, que la condition de perturbation faible est violée pour des valeurs du paramètre E/P supérieures à 10 [V/cm×torr] pour les ions et supérieures à 1 [V/cm×torr] pour les électrons ; à partir de ces valeurs, la pente de la courbe apparaît plus infléchie, une analyse quantitative de cette tendance confirme cette observation et indique qu'une vitesse de dérive proportionnelle à la racine carré du champ est plus appropriée pour décrire l'effet des champs forts, ou des faibles pressions. Un critère permettant de discriminer les régimes de champs faibles des

régimes de champs forts peut être établi comme suit. L'énergie gagnée par une particule entre deux collisions est de l'ordre de $eE\lambda$, cette énergie doit être petite par rapport à l'énergie cinétique moyenne kT de la particule. Adoptons donc, comme critère de validité de la théorie précédente en champ faible :

$$eE\lambda < kT \rightarrow \frac{eE}{\sigma_1 n_n} < kT$$

où σ_1 est la section efficace de transfert d'impulsion et n_n la densité de neutres. La densité et la température des particules neutres sont reliées par l'équation d'état des gaz parfaits : $P = n_n k T_n$ et la section efficace de transfert d'impulsion est de l'ordre de la section de Bohr σ_B ; le critère de champ faible est donc donné par :

$$\frac{E}{P} < \frac{\sigma_B T}{e T_n} \sim 10^{-1} \left[\frac{\text{V}}{\text{cm} \times \text{torr}} \right] \frac{T}{T_n} \quad (4.36)$$

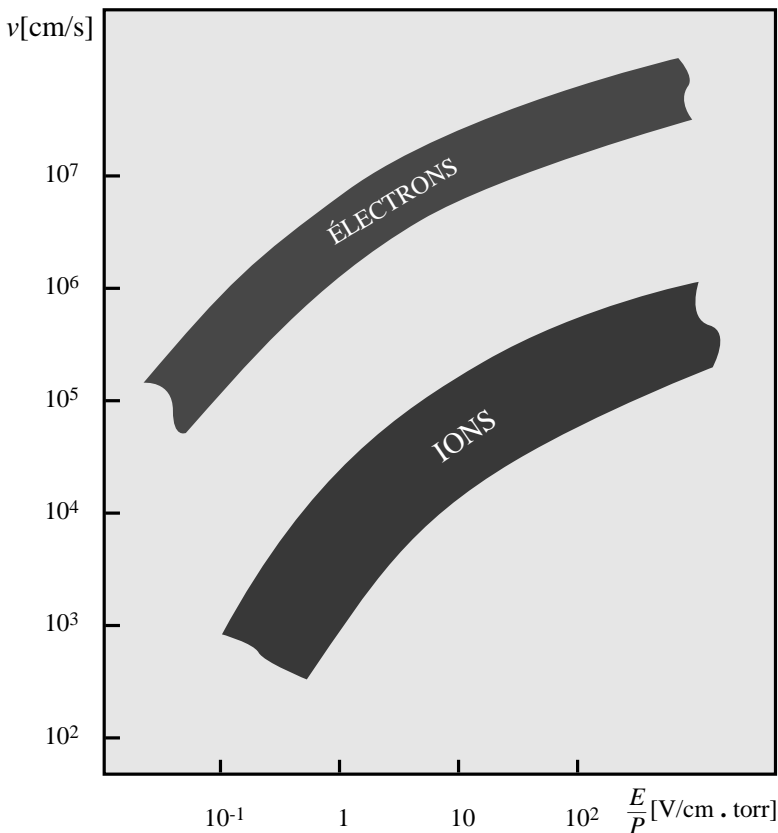


Figure 4.19 Vitesses de dérive électrique, électronique et ionique, pour l'ensemble des éléments usuels.

En régime de champ fort, $E/P > T\sigma_B/T_n e$, deux nouveaux phénomènes apparaissent :

- la mobilité devient une fonction du champ électrique et
- le champ électrique induit une forte ionisation par impact électronique.

Le comportement de la mobilité en champ fort peut être modélisé en supposant qu'à chaque collision une fraction de l'énergie de la particule est perdue ; ainsi, en régime stationnaire, un équilibre entre gains et pertes d'énergie s'établit. Durant un temps mésoscopique, $\delta t > \langle v \rangle / \lambda$, l'énergie acquise par une particule de charge q et de vitesse moyenne $\mu(E)E$ (suivant la direction du champ électrique) a donc pour valeur :

$$q\mu E^2 \delta t = \frac{\lambda q^2}{m} \left\langle \frac{2}{v} \right\rangle E^2 \delta t$$

Durant ce temps δt la particule subit $\langle v \rangle \delta t / \lambda$ collisions, et à chaque collision perd une fraction ξ de son énergie. Lors d'une collision entre une particule projectile de masse m incidente sur une particule cible de masse M au repos, l'expression de la fraction moyenne d'énergie transférée à la cible $\langle \xi \rangle$ est établie au chapitre neuf (9.19).

$$\langle \xi \rangle = \frac{2mM}{(m+M)^2} \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \approx 2 \frac{m}{M}$$

L'énergie perdue durant le temps δt vaut donc : $m^2 \langle v^2 \rangle \langle v \rangle \delta t / \lambda M$. En régime stationnaire les gains doivent compenser les pertes.

$$\frac{2\lambda q^2}{m} \left\langle \frac{1}{v} \right\rangle E^2 \delta t = \frac{m^2}{M} \langle v^2 \rangle \frac{\langle v \rangle}{\lambda} \delta t \rightarrow \frac{\langle v \rangle \langle v^2 \rangle}{\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle} = \frac{2\lambda^2 q^2 M}{m^3} E^2$$

En régime de champs fort la vitesse de dérive V étant supérieure à la vitesse d'agitation thermique on peut faire l'approximation $\langle v \rangle \langle v^2 \rangle / \left\langle \frac{1}{v} \right\rangle \approx V^4$.

$$V \approx \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{q\lambda}{m}} E \quad (4.37)$$

La mobilité effective devient alors proportionnelle à l'inverse de la racine carrée du champ électrique. Ce modèle de mobilité non linéaire est loin d'être définitif ; en effet, les hypothèses implicites et les approximations ne sont pas totalement satisfaisantes. Une théorie cinétique plus complète, basée sur les équations cinétiques, permet d'obtenir le comportement en \sqrt{E} de manière plus rigoureuse ; enfin, pour le cas des ions, il est par exemple connu depuis longtemps que ce comportement en \sqrt{E} est commun lorsque l'échange de charge domine le transfert d'impulsion et n'est pas imputable à un mécanisme de chauffage en champ fort.

4.4.2 Coefficients de Townsend

L'effet le plus remarquable du régime de champ fort n'est pas la modification de la loi d'Ohm ($J \approx E \rightarrow J \approx \sqrt{E}$) mais l'intensification de l'ionisation. En effet, en l'absence de champ électrique les électrons énergétiques d'un plasma peuvent produire des paires électron-ion par ionisation par impact électronique, pour peu que leur énergie cinétique soit supérieure à l'énergie de seuil d'ionisation. Dans une décharge, où la température est de quelques eV, seule une fraction exponentiellement faible de la queue de fonction de distribution peut participer à l'ionisation, ce phénomène est donc négligeable. Par contre, en présence d'un champ électrique fort, la fraction d'électrons énergétiques n'est plus exponentiellement faible et l'ionisation est amplifiée par le champ électrique. Ce phénomène d'intensification de l'ionisation est caractérisé par un coefficient : le premier coefficient de Townsend, $\alpha(E, P)$, défini comme le nombre moyen de paires électron-ion créés, par unité de longueur, par un électron soumis au champ électrique E sous une pression de neutres P . Nous avons précédemment (4.30) noté ce coefficient α_T pour ne pas le confondre avec la constante de structure fine, dans la suite nous nous conformerons à l'usage de la physique des plasmas où ce coefficient est noté α .

$$\alpha(E, P) \equiv \frac{[\text{Nombre d'ionisations par unité de longueur}]}{[\text{Nombre d'électrons}]} \quad (4.38)$$

Le premier coefficient de Townsend décrit donc la génération d'une avalanche électronique élémentaire (Figure 4.20) :

$$1 \text{ électrons} \rightarrow 2 \text{ électrons} \rightarrow 4 \text{ électrons} \rightarrow 8 \text{ électrons} \rightarrow \dots$$

Le modèle de libre parcours moyen permet d'évaluer ce premier coefficient d'ionisation comme suit.

Un électron pourra ioniser un atome si son énergie cinétique est supérieure à l'énergie d'ionisation E_I . Dans les plasmas dont la température est trop faible pour qu'une fraction non négligeable de la population électronique satisfasse cette condition, l'énergie nécessaire à la création d'une paire électron-ion est donc fournie par l'accélération due au champ électrique. Entre deux collisions un électron parcourant une distance x doit acquérir une énergie E_I , on a donc la condition d'ionisation : $eEx > E_I$. La dynamique de l'électron est une série de mouvements libres interrompus par des collisions :

Libre Parcours / Collision / Libre Parcours / Collision / Libre Parcours

Afin de décrire cette dynamique, introduisons une loi de probabilité décrivant la probabilité pour qu'un libre parcours ait une longueur minimum x ; appelons cette probabilité $p(x)$. Sur un parcours infinitésimal dx la probabilité de collision est proportionnelle à dx et la probabilité de non collision, correspondant à l'événement

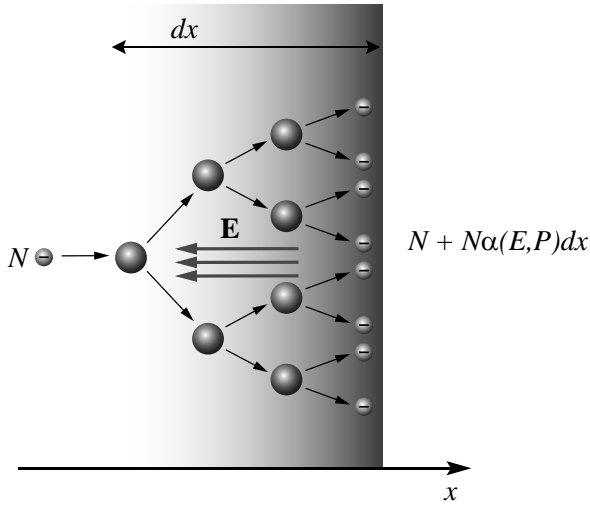


Figure 4.20 Multiplication électronique par avalanche.

complémentaire, est donc donnée par 1 moins cette probabilité de collision ; en effet, il n'y a que deux possibilités : collision ou libre parcours. Indépendamment de toute considération dynamique sur la nature exacte des collisions $p(x)$ est donc de la forme : $p(dx) = 1 - (dx/\lambda)$ où λ est le libre parcours moyen. La probabilité d'un libre parcours sans collision de longueur $dx_1 + dx_2 + dx_3$ est donnée par le produit $p(dx_1) p(dx_2) p(dx_3)$ car les différentes sections de ce libre parcours constituent des événements indépendants.

$$p(dx_1 + dx_2 + dx_3) = \left[1 - \frac{dx_1}{\lambda} \right] \left[1 - \frac{dx_2}{\lambda} \right] \left[1 - \frac{dx_3}{\lambda} \right]$$

Considérons maintenant une longueur finie x et décomposons la en une somme de K segments infinitésimaux $dx : x = Kdx$. Les arguments précédents permettent alors d'établir la loi de probabilité des libres parcours.

$$p(x) = \left[1 - \frac{x}{K\lambda} \right]^K \xrightarrow{K \rightarrow +\infty} \exp \left[-\frac{x}{\lambda} \right]$$

Le résultat final est donc une loi de décroissance exponentielle. Pour acquérir une énergie cinétique égale à l'énergie d'ionisation, et induire ainsi une réaction, un électron doit être accéléré sur une longueur $x = E_1/eE$. La probabilité, dP , de réalisation d'un libre parcours de longueur $x = E_1/eE$, suivie d'une collision ionisante, est le produit de la probabilité d'un libre parcours d'accélération $x = E_1/eE$ que multiplie la probabilité d'une collision dans la section finale du parcours dx ; les

deux événements étant indépendants.

$$dP = \underbrace{\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)\Big|_{x=\frac{E_I}{eE}}}_{\text{Probabilité de libre parcours } x} \times \underbrace{\frac{dx}{\lambda}}_{\text{Probabilité de collision}} \quad (4.39)$$

En toute rigueur il serait nécessaire de distinguer le libre parcours pour le transfert d'impulsion et le libre parcours pour l'ionisation, mais ces deux quantités sont du même ordre de grandeur pour les électrons de quelques dizaines d'eV. Considérons maintenant N électrons entrant dans une tranche dx du plasma ; une fraction significative de ces électrons a été accélérée au-dessus du seuil d'ionisation E_I et va donc déclencher une avalanche électronique. À la sortie de la tranche dx le nombre d'électrons sera $N + dN$ ou $dN = NdP$. Le processus de multiplication électronique en présence d'un champ électrique est donc décrit par la relation :

$$\frac{dN}{dx} \equiv \alpha N = N \frac{dP}{dx} \rightarrow \alpha = \frac{\exp\left(-\frac{E_I}{\lambda eE}\right)}{\lambda}$$

définissant ainsi le premier coefficient de Townsend. L'usage est d'exprimer le libre parcours moyen en fonction de la pression P , $\lambda \sim 1/P$, et de définir les constantes A et B telles que :

$$\frac{\alpha}{P} = A \exp\left(-\frac{B}{E/P}\right) \quad (4.40)$$

Malgré la simplicité du modèle construit pour élaborer cette formule, ce type de dépendance fonctionnelle est effectivement observée expérimentalement ; la figure 4.21 présente un ensemble de données pour les gaz rares conforme à la formule (4.40).

Les constantes A et B constituent les données de base pour étudier les processus d'ionisation dans les décharges électriques ; quelques-unes de ces données sont présentées dans le tableau (4.12).

Tableau 4.12

	A [torr \times cm] ⁻¹	B [V/torr \times cm]	$\frac{E}{P}$ [V/torr \times cm]
He	3	34	20-200
Ne	4	100	100-400
Kr	17	240	100-1000
Xe	26	350	200-800
H ₂	5	130	100-600
Air	15	365	100-800

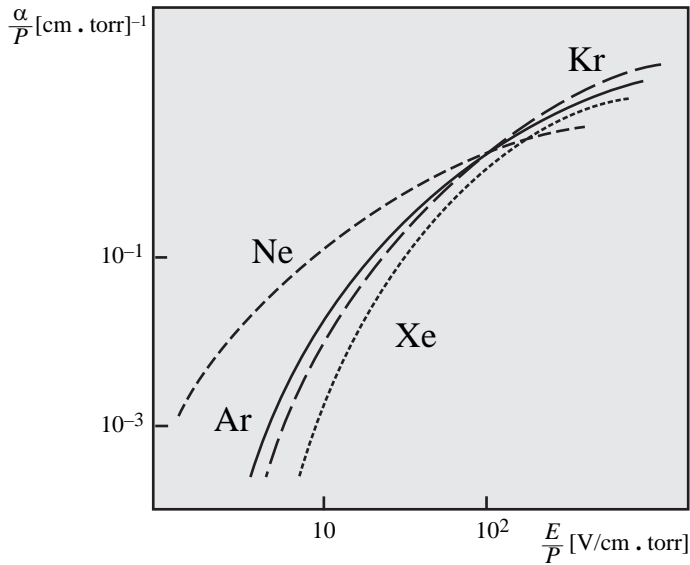


Figure 4.21 Premier coefficient de Townsend.

Le premier coefficient de Townsend permet de quantifier le phénomène d'amplification de l'ionisation induite par un champ électrique ; c'est-à-dire d'avalanche résultant d'un électron, mais il ne permet pas d'expliquer l'existence de décharges stationnaires autonomes en régime continu.

En effet, en plus d'un phénomène d'amplification, un phénomène de régénération est nécessaire à l'entretien d'une décharge dans un volume fini car les charges sont ultimement collectées à l'anode et à la cathode. Ce phénomène de régénération existe et est décrit par le deuxième coefficient de Townsend γ . Considérons une décharge entre une cathode et une anode, lorsque un ion arrive sur la cathode il peut expulser un électron secondaire par conversion de ses énergies cinétique et potentiel, le nombre d'électrons secondaires pour un ion incident définit le coefficient γ (Figure 4.22).

$$\gamma \equiv \frac{[\text{Nombre d'électrons secondaires}]}{[\text{Nombre d'ions incidents}]} \quad (4.41)$$

Ce deuxième coefficient de Townsend est uniquement fonction de la nature de la cathode, par exemple pour une cathode en tungstène les valeurs de γ sont comprises entre 0,1 et 0,3 à des énergies de quelques eV.

Les deux coefficients d'ionisation de Townsend α et γ permettent d'établir les conditions d'entretien d'une décharge comme suit.

Chaque électron quittant la cathode induit une avalanche décrite par $N(x)$ le nombre d'électrons à une distance x de la cathode : $N(x) = \exp \alpha x$. Au niveau de l'anode

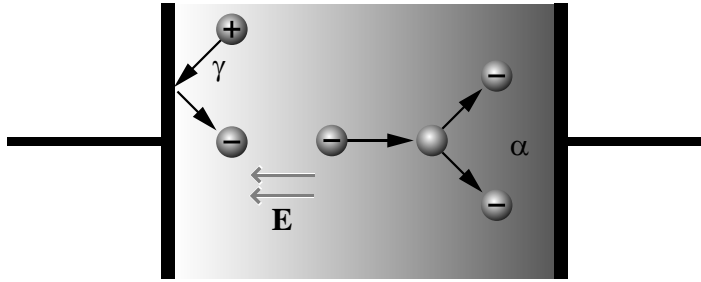


Figure 4.22 Processus d'émission et d'ionisation dans une décharge électrique.

($x = d$) arrivent donc $\exp \alpha d$ électrons. Chaque électron quittant la cathode, et terminant son transit sur l'anode, génère ainsi $\exp \alpha d - 1$ électrons et ions. Les $\exp \alpha d - 1$ ions ainsi générés arrivent sur la cathode et en extraient $\gamma (\exp \alpha d - 1)$ électrons secondaires. Cette deuxième génération d'électrons issues de la cathode va développer un processus d'avalanche. L'électron unique initialement issu de la cathode est donc la source d'une multiplicité de générations :

$$1 \rightarrow \underbrace{\exp \alpha d - 1}_{\text{Première génération}} \rightarrow \underbrace{\gamma (\exp \alpha d - 1) \exp \alpha d}_{\text{Deuxième génération}} \rightarrow \underbrace{\gamma^2 (\exp \alpha d - 1)^2 \exp \alpha d}_{\text{Troisième génération}} \rightarrow \dots$$

Cette série géométrique décrivant la filiation d'un électron unique issue de la cathode peut être sommée ($1 + u + u^2 + u^3 + \dots = 1 / (1 - u)$).

$$1 \rightarrow 1 + (\exp \alpha d - 1) + \gamma (\exp \alpha d - 1) \exp \alpha d + \gamma^2 (\exp \alpha d - 1)^2 \exp \alpha d + \dots$$

Le résultat final donne le coefficient d'amplification de la décharge compte tenu des processus primaires α et secondaires γ .

$$1 \rightarrow \frac{\exp \alpha d}{1 - \gamma (\exp \alpha d - 1)} \tag{4.42}$$

Lorsque le dénominateur devient nul, on est en présence d'un phénomène de claquage c'est-à-dire de transition entre une phase faiblement conductrice vers un plasma bon conducteur : $1 \text{ électron} \rightarrow +\infty \text{ électrons}$; le courant dans la décharge n'est limité que par la résistance extérieure et aucun apport de charges extérieures n'est nécessaire à l'entretien de la décharge. La condition d'auto-entretien de la décharge, ou condition de Townsend, s'écrit donc :

$$\text{Condition de Townsend : } \alpha (E, P) d = \log \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) \tag{4.43}$$

Nous reprendrons cette étude des décharges électriques autonomes dans le chapitre consacré aux structures électriques.

En conclusion, dans la deuxième partie de ce chapitre consacrée aux collisions et réactions, nous avons confirmé les résultats sur la mobilité et diffusion obtenus dans le cadre de l'étude de la conduction des plasmas au chapitre deux ; nous avons étendu ces modèles de libre parcours moyen à l'étude de la viscosité, de la mobilité non-linéaire et à l'analyse de l'ionisation. Le tableau (4.13) résume l'ensemble des résultats ainsi obtenus.

Tableau 4.13

Processus	Gradient	Loi	Coefficient
Diffusion	$\frac{dn}{dx}$	Fick	$D = \frac{\langle v \rangle}{2} \lambda$
Viscosité	$\frac{dV_y}{dz}$	Newton	$\zeta = nm \frac{\langle v \rangle}{2} \lambda$
Mobilité	$\frac{d\phi}{dx}$	Ohm	$V = \frac{q}{m} \lambda \left\langle \frac{2}{v} \right\rangle E$
Mobilité	$\frac{d\phi}{dx}$	Mobilité non-linéaire	$V = \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{q\lambda}{m}} E$
Ionisation	$\frac{d\phi}{dx}$	Townsend	$\alpha = \frac{\exp \left[\frac{E_f}{q\lambda E} \right]}{\lambda}$

Cet ensemble de résultats fondamentaux sera utilisé pour construire les modèles fluides décrivant les structures électrique dans le chapitre six.

BIBLIOGRAPHIE

L'études des phénomènes de collision dans les plasmas peut être abordée sous différents angles.

► Du point de vue de la physique des collisions

- N.F. Mott et H.S.W. Massey, *The Theory of Atomic Collisions Volume I & II*, Oxford University Press, New York, USA, 1987.
- J.N. Murrell et S.D. Bosanac, *Introduction to the Theory of Atomic and Molecular Collisions*, John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1989.

► Du point de vue de la physique des plasmas

- E. Badareu et I. Popescu, *Gaz Ionisés, Décharges Électriques dans les Gaz*, Dunod, Paris, France, 1968.
- M. Bayet, *Physique Électronique des Gaz et des Solides*, Masson, Paris, France, 1958.

- L.M. Biberman, V.S. Vorob'ev et I.T. Yakubov, *Kinetics of Nonequilibrium Low-Temperature Plasmas*, Consultants Bureau, New York, USA, 1987.
- T.K. Bose, *High Temperature Gas Dynamics*, Springer Verlag, Berlin, RFA, 2004.
- S.C. Brown, *Introduction to Electrical Discharges in Gases*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1966.
- S.C. Brown, *Basic Data of Plasma Physics*, AIP Press, New York, USA, 1994.
- B. Chapman, *Glow Discharge Processes*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1980.
- B.E. Cherrington, *Gaseous Electronics and Gas Lasers*, Pergamon Press, Oxford, UK, 1980.
- F.F. Chen et J.P. Chang, *Lecture Notes on Principles of Plasma Processing*, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, USA, 2003.
- J.D. Cobine, *Gaseous Conductors*, Dover Publications, New York, USA, 1958.
- A. von Engel, *Electric Plasmas : Their Nature and Uses*, International Publications Service Taylor & Francis Inc, New York, USA, 1983.
- A. von Engel, *Ionized Gases*, AIP Press, New York, USA, 1994.
- R.N. Franklin, *Plasma Phenomena in Gas Discharges*, Clarendon Press, Oxford, UK, 1976.
- MA. Lieberman et A.J. Lichtenberg, *Principles of Plasma Discharges and Materials Processing*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1994.
- E. Nasser, *Fundamentals of Gaseous Ionization and Plasma Electronics*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1971.
- R. Papoular, *Phénomènes Électriques dans les Gaz*, Dunod, Paris, France, 1963.
- F.M. Penning, *Décharges Électriques dans les Gaz*, Dunod, Paris, France, 1958.
- Y.P. Raizer, *Gas Discharge Physics*, Springer-Verlag, Berlin, RFA, 1997.
- B.M. Smirnov, *Physics of Ionized Gases*, John Wiley & Sons, New York, USA, 2001.
- **Problèmes d'interaction avec les surfaces**
 - A.W. Adamson et A.P. Gast, *Physical Chemistry of Surfaces*, Intersciences Publishers John Wiley & Sons, New York, USA, 1997.
 - A. Chambers R.K. Fitch et B.S. Halliday, *Basic Vacuum Technology*, Institute of Physics Publishing, Bristol, UK, 1998.
 - L.N. Dobretsov et M.V. Gomoyunova, *Emission Electronics*, Israel Program for Scientific Translations, Jérusalem, Israel, 1971.
 - T.I. Gombosi, *Gaskinetic Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, USA, 1994.

Chapitre 5

Interactions champs-particules

L'orgueil et l'analyse mathématique s'étaient si étroitement unis en lui qu'il se flattait de voir les astres obéir à ses calculs ; et de fait, il semblait en être ainsi.

Il Gattopardo, G.T. Di Lampedusa.

Dans ce chapitre nous allons étudier le mouvement des particules chargées dans des champs électromagnétiques donnés. La difficulté ne sera pas l'auto-cohérence du problème d'interaction champs-particules (Figure 2.1), mais, le caractère non-linéaire des équations du mouvement prenant en compte les forces de Coulomb et Laplace. En effet, l'équation du mouvement d'une particule, de charge q et de masse m , plongée dans un champ électromagnétique, possède un caractère intrinsèquement non-linéaire dès lors que les champs ne sont pas homogènes.

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} - q \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - q \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}$$

L'étude des orbites dans des champs inhomogènes peut néanmoins être menée à bien dans le cadre de la théorie des dérives, élaborée par Alfvén, présentée dans ce chapitre. Le formalisme le plus adapté à l'étude des orbites des particules chargées est la mécanique hamiltonienne présentée au chapitre dix.

5.1 MOUVEMENT CYCLOTRONIQUE

5.1.1 Rayon de Larmor

Soit une particule, de masse m et de charge q , plongée dans un champ magnétique statique uniforme $\mathbf{B} = B\mathbf{b}$, où \mathbf{b} est un vecteur unitaire. L'écriture de l'équation du mouvement de la particule se réduit à la prise en compte de la force de Laplace.

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{q}{m} \mathbf{V} \times \mathbf{B}$$

La vitesse \mathbf{V} de cette particule peut être décomposée en une composante parallèle au champ magnétique, \mathbf{V}_{\parallel} , plus une composante perpendiculaire au champ magnétique, \mathbf{V}_{\perp} .

$$\mathbf{V}_{\parallel} = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b}, \quad \mathbf{V}_{\perp} = \mathbf{b} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{V} = \mathbf{V}_{\parallel} + \mathbf{V}_{\perp}$$

Afin d'étudier l'orbite décrite par cette particule, introduisons la variable complexe : $\mathcal{Z} = V_{\perp x} + jV_{\perp y}$ où x et y constituent un système de coordonnées cartésiennes dans le plan perpendiculaire au champ magnétique, système de coordonnées associé à la base orthonormée directe : $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{b})$.

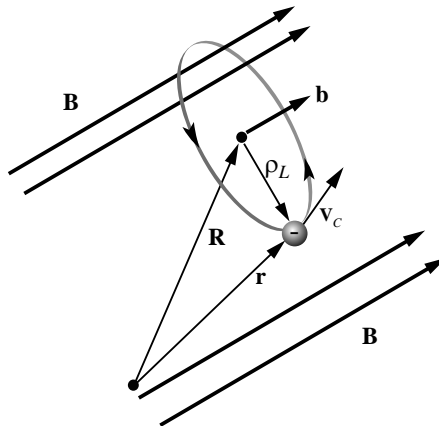


Figure 5.1 Rotation cyclotronique autour des lignes de champ, rayon de Larmor et vitesse cyclotronique.

Ce changement de variables conduit à un système d'équations différentielles ordinaires linéaires dont la solution décrit un mouvement hélicoïdal autour de la direction du champ magnétique.

$$\frac{d\mathbf{V}_{\parallel}}{dt} = 0, \quad \frac{d\mathcal{Z}}{dt} + j\omega_c \mathcal{Z} = 0 \rightarrow \mathcal{Z}(t) = \mathcal{Z}_0 \exp(-j\omega_c t)$$

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique, uniforme et statique, est donc composé d'une rotation uniforme autour des lignes de champ et d'une

translation uniforme le long des lignes de champ.

$$\mathbf{V}(t) = \underbrace{V_{\parallel} \mathbf{b}}_{\text{Translation}} + \underbrace{\mathbf{V}_c(t)}_{\text{Rotation cyclotronique}} \quad (5.2)$$

Le mouvement de rotation uniforme autour des lignes de champ est appelé **mouvement cyclotronique** (Figure 5.1), la vitesse le long de l'orbite cyclotronique est appelée **vitesse cyclotronique** $\mathbf{V}_c(t)$.

$$\mathcal{Z}(t) = \mathcal{Z}_0 \exp(-j\omega_c t) \rightarrow \mathbf{V}_{\perp} = \mathbf{V}_c(t) = V_c \cos(\omega_c t) \mathbf{u}_x - V_c \sin(\omega_c t) \mathbf{u}_y \quad (5.3)$$

Cette rotation est caractérisée, par la **pulsation cyclotronique** : $\omega_c = qB/m$. Pour les électrons et les protons ces deux pulsations cyclotrons (par abus de langage *fréquences cyclotrons*) sont respectivement dans les domaines micro-onde et radio-fréquence.

$$\omega_c = \frac{qB}{m} \rightarrow \frac{|\omega_{ce}|}{2\pi} [\text{GHz}] = 28 B [\text{T}], \quad \frac{\omega_{cp}}{2\pi} [\text{MHz}] = 15 B [\text{T}] \quad (5.4)$$

Le sens des rotations cyclotroniques est tel que le courant créé par la charge génère un champ opposé à celui appliqué. Des charges libres ont donc un comportement diamagnétique ; on retrouve ici la tendance qu'ont les effets à s'opposer aux causes qui leur donnent naissance.

Une intégration par rapport au temps de la relation (5.3) permet d'exprimer la position de la particule. Cette position peut être décomposée en la position du centre de rotation, le centre guide \mathbf{R} , plus le rayon de l'orbite cyclotronique qui définit le **rayon de Larmor** $\rho_L(t)$ de la particule (Figure 5.1).

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \rho_L(t) = \underbrace{\mathbf{r}_0 + V_{\parallel} t \mathbf{b}}_{\text{Centre guide}} + \underbrace{\rho_L \sin[\omega_c t] \mathbf{u}_x + \rho_L \cos[\omega_c t] \mathbf{u}_y}_{\text{Rayon de Larmor}} \quad (5.5)$$

Dans un champ donné, le rayon de Larmor est fonction du contenu énergétique du mouvement cyclotronique : $\mathcal{W}_c = mV_c^2/2$; pour les électrons et les protons nous obtenons :

$$\rho_L = \frac{V_c}{\omega_c} \rightarrow \rho_{Le} [\text{cm}] = 2,75 \frac{\sqrt{\mathcal{W}_c [\text{eV}]} }{B [\text{G}]}, \quad \rho_{Li} [\text{m}] = 1,18 \frac{\sqrt{\mathcal{W}_c [\text{eV}]} }{B [\text{G}]} \quad (5.6)$$

Une population de particules sera dite magnétisée lorsque les échelles de temps et de longueur des processus qui sont étudiés sont plus longues et plus grandes que la période cyclotron et le rayon de Larmor. Il faut noter l'existence de situations où les électrons peuvent être magnétisés et les ions non magnétisés.

5.1.2 Moment magnétique

Il est d'usage, et cet usage est particulièrement pertinent pour analyser et résoudre de nombreux problèmes, d'introduire le moment magnétique orbital de la particule μ (2.15).

$$\mu \equiv \int \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{j}}{2} d^3\mathbf{r} \rightarrow \mu = \frac{\rho_L(t) \times q \mathbf{V}_c(t)}{2} = -\mu \mathbf{b}$$

Cette définition est conforme à la définition habituelle du moment magnétique d'une distribution de courant. Le moment magnétique est donc le rapport du contenu énergétique cyclotronique \mathcal{W}_c divisé par le champ B .

$$\mu \equiv \frac{q}{2} \rho_L V_c = \frac{q |\omega_c|}{2} \rho_L^2 = \frac{m}{2B} V_c^2 = \frac{\mathcal{W}_c}{B} \quad (5.7)$$

Le moment magnétique d'une particule dans un plasma magnétisé possède une propriété d'invariance en présence d'évolutions temporelles lentes ou de variations spatiales faibles du champ magnétique. Dans le cas d'une évolution temporelle lente, ce résultat peut être établi en considérant l'échange d'énergie entre le champ électrique d'induction, résultant de la variation du champ magnétique, et la particule. La lenteur de la variation constitue l'**hypothèse d'adiabaticité** : $\partial \mathbf{B} / \partial t \ll |\omega_c| \mathbf{B}$.

Soit $\mathcal{W}_c = m V_c^2 / 2$ l'énergie cinétique cyclotronique. Sa variation durant une période cyclotronique $2\pi / |\omega_c|$: $\delta \mathcal{W}_c$, résulte du travail du champ électrique d'induction le long du cercle de Larmor (Figure 5.2).

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{W}_c &= q \oint \mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{V}_c(t) dt = -|q| \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = |q| \int \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\ &\approx \frac{|q| |\omega_c|}{2\pi} \delta \mathbf{B} \cdot \int \int d\mathbf{S} = \frac{|q| |\omega_c|}{2} \frac{V_c^2}{\omega_c^2} \delta B = \frac{\mathcal{W}_c}{B} \delta B \end{aligned}$$

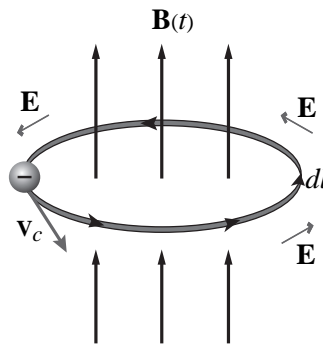


Figure 5.2 Travail du champ électrique d'induction le long de l'orbite cyclotronique.

Le quatrième membre de cette série d'égalités est une conséquence de l'hypothèse de variation lente du champ à l'échelle de la période cyclotronique ; c'est-à-dire

de l'adiabaticité de l'évolution du champ : $\partial \mathbf{B} / \partial t \approx \delta \mathbf{B} |\omega_c| / 2\pi$. L'intégrale de surface est proportionnelle au carré du rayon de Larmor, lui-même proportionnel à l'énergie cyclotronique. La variation d'énergie cyclotronique induite par un champ lentement variable vérifie donc :

$$\delta \mathcal{W}_c = \frac{\mathcal{W}_c}{B} \delta B \rightarrow \delta \left(\frac{\mathcal{W}_c}{B} \right) = \delta \mu = 0$$

Le moment magnétique orbital d'une particule est un invariant adiabatique, c'est-à-dire un invariant sous l'hypothèse d'adiabaticité de la variation temporelle du champ. Reformulée en terme de vitesse cyclotronique, ce résultat s'exprime par la relation : $\mathbf{V}_c^2(t)/B(t) = \mathbf{V}_c^2(t_0)/B(t_0)$. La variation temporelle du champ magnétique se traduit par un ajustement continu du mouvement cyclotronique afin de préserver le moment magnétique ; ajustement contrôlé par le champ électrique d'induction.

5.1.3 Force diamagnétique

Intéressons-nous maintenant au cas d'une variation spatiale du champ magnétique. Considérons un champ magnétique stationnaire possédant une symétrie de rotation autour de l'axe des z et étudions le mouvement d'un électron, de masse m et de charge q , au voisinage de cet axe de symétrie. Afin de simplifier l'étude de ce mouvement, effectuons un développement de Taylor du champ, à partir d'un point de référence sur l'axe des z , au voisinage de l'axe des z ; l'équation de Maxwell : $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ permet d'exprimer les dérivés du champ suivant z en fonction des dérivés suivant x et y où x et y constituent un système de coordonnées orthogonales dans le plan perpendiculaire au champ magnétique. Ainsi, la forme générale, au voisinage de l'axe, d'un champ possédant une symétrie de révolution, est donnée par :

$$B \left(1 + \frac{z}{L} \right) \mathbf{u}_z - B \frac{x}{2L} \mathbf{u}_x - B \frac{y}{2L} \mathbf{u}_y$$

où B est la valeur du champ sur l'axe au point de référence du développement, $L = B / \partial B / \partial z$ est une longueur caractérisant la convergence ou la divergence des lignes de champ voisines de l'axe et $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$ est une base cartésienne orthonormée directe. L'équation de Newton se réduit à l'identité entre l'accélération et la force de Laplace que divise la masse.

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \omega_c \mathbf{V} \times \mathbf{u}_z + \omega_c \mathbf{V} \times \left(\frac{z}{L} \mathbf{u}_z - \frac{x}{2L} \mathbf{u}_x - \frac{y}{2L} \mathbf{u}_y \right)$$

où \mathbf{V} est la vitesse de la particule et $\omega_c = qB/m$ la pulsation cyclotronique. Nous allons résoudre cette équation dans le cadre d'une méthode perturbative, le petit paramètre du développement perturbatif est donné par le rapport du rayon de Larmor au voisinage de l'axe divisé par la longueur L . À l'ordre le plus bas ($L = \pm\infty$), le champ est considéré comme homogène et le mouvement est la combinaison d'une translation uniforme le long des lignes de champ et d'une rotation uniforme autour

des lignes de champ, c'est le mouvement cyclotronique identifié et étudié au paragraphe précédent.

$$L = \pm\infty \rightarrow \frac{dV_{\parallel}}{dt} = 0, \mathbf{V}_{\perp} = \mathbf{V}_c(t)$$

Abordons maintenant le premier ordre prenant en compte la finitude de la longueur L et introduisons la variable complexe $Z = x + jy$. L'équation de Newton se réécrit :

$$\begin{aligned} \frac{dV_{\parallel}}{dt} &= -\frac{\omega_c}{2L} \operatorname{Im} \left[Z \frac{dZ^*}{dt} \right] \\ \frac{d^2 Z}{dt^2} + j\omega_c \frac{dZ}{dt} &= -j\omega_c \frac{z}{L} \frac{dZ}{dt} - j\omega_c \frac{V_{\parallel}}{2L} Z \end{aligned} \quad (5.9)$$

La construction du schéma perturbatif est particulièrement aisée pour l'équation décrivant la dynamique suivant la direction du champ ; en effet, nous substituons simplement la solution en champ homogène dans l'équation (5.9) :

$$\mathbf{V}_{\perp} = \mathbf{V}_c(t) \rightarrow Z(u) = j \frac{V_c}{\omega_c} \exp(-j\omega_c u), \quad \frac{dZ}{du} = V_c \exp(-j\omega_c u)$$

Le résultat de cette substitution est donné par :

$$m \frac{dV_{\parallel}}{dt} = -\mu \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\mu \cdot \nabla B \quad (5.10)$$

La présence d'une convergence, ou d'une divergence, des lignes de champ induit donc une force le long de la direction du champ, force proportionnelle au moment magnétique μ et au gradient de l'amplitude du champ ; cette force est appelée force « *mugradB* » ou force diamagnétique.

Son origine physique peut être discutée comme suit. Considérons un champ inhomogène, présentant un faisceau de lignes de champ convergent. Ce champ inhomogène peut être décomposé en la somme d'un champ homogène \mathbf{B} et d'un champ perturbateur \mathbf{p} (Figure 5.3). À l'ordre zéro une particule effectue un mouvement de rotation cyclotronique \mathbf{v}_c autour de la direction de \mathbf{B} . Ce faisant, cette particule intercepte le champ \mathbf{p} et la force de Laplace engendrée par ce champ perturbateur : $q\mathbf{v}_c \times \mathbf{p}$, est dirigée suivant \mathbf{B} et garde un signe constant sur une rotation (Figure 5.3). Cette force n'est autre que la force diamagnétique (5.10).

Notons que le signe de la force diamagnétique est indépendant du signe de la charge. Si nous considérons, non pas une particule unique, mais une population de particules chargées de densité n , le plasma ainsi constitué subit une densité volumique de force

« $mugradB$ » : \mathcal{F}_d .

$$\mathcal{F}_d = -n \frac{q^2 \rho_L^2}{2m} \mathbf{B} \cdot \nabla B = -\frac{1}{2} \frac{\rho_L^2}{\lambda_p^2} \mathbf{b} \cdot \nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) \quad (5.11)$$

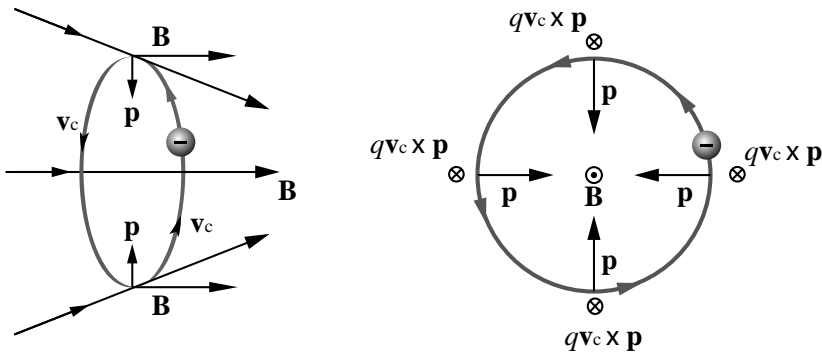


Figure 5.3 Origine physique de la force diamagnétique.

L'existence de cette force diamagnétique garantit l'invariance adiabatique du moment magnétique μ dans un champ magnétique inhomogène. En effet, la conservation de l'énergie d'une particule chargée interagissant avec un champ magnétique statique, et l'accélération diamagnétique « $mugradB$ » le long des lignes de champ, permettent d'établir une relation entre la variation de l'énergie cyclotronique et la translation le long des lignes de champ.

$$\frac{d}{dt} \left[V_c^2(t) + V_{\parallel}^2(t) \right] = 0 \rightarrow \frac{dV_c^2}{dt} = 2V_{\parallel} \frac{\mu}{m} \frac{\partial B}{\partial s}$$

où s est l'abscisse curviligne le long de la ligne de champ considérée comme axe de la rotation cyclotronique. Or, la dérivée de l'abscisse curviligne par rapport au temps, ds/dt , n'est autre que la vitesse parallèle V_{\parallel} et $\mu = mV_c^2/2B$.

$$\frac{dV_c^2}{dt} = \frac{V_c^2}{B} \frac{dB}{dt} \rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{mV_c^2(t)}{2B(r,t)} \right] = \frac{d\mu}{dt} = 0 \quad (5.12)$$

Le moment magnétique est donc un invariant adiabatique quelle que soit la nature de la variation du champ, spatiale ou temporelle, pourvu que les hypothèses d'adiabaticité soient vérifiées : $B(\mathbf{r}, t)$ lentement variables à l'échelle d'une rotation cyclotronique et faiblement inhomogène à l'échelle d'un rayon de Larmor.

5.2 DÉRIVES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

5.2.1 Dérives électriques

Afin de développer la théorie du mouvement des particules chargées dans les champs électromagnétiques, considérons d'abord la configuration de champs la plus simple (ne réduisant pas le problème au problème classique de l'accélération par un champ électrique statique homogène ou au problème du mouvement cyclotronique) : un champ électrique, homogène et dépendant du temps, $\mathbf{E}(t)$, plus un champ magnétique homogène et stationnaire, $\mathbf{B} = B\mathbf{b}$. Une telle configuration de champs est appelée configuration de **champs croisés**. L'équation du mouvement est donnée par :

$$m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = q\mathbf{E}(t) + q\mathbf{V} \times \mathbf{B}$$

où \mathbf{V} est la vitesse de la particule. La vitesse \mathbf{V} et le champ électrique \mathbf{E} peuvent être décomposés en une composante parallèle au champ magnétique et une composante perpendiculaire au champ magnétique.

$$\mathbf{E}_{\parallel} = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}, \mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{b} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{E}_{\parallel}$$

- Dans la direction du champ magnétique, la particule subit une accélération semblable à celle qu'elle subirait en l'absence de champ magnétique et le mouvement est une translation non uniforme. La solution de la projection de l'équation de Lorentz suivant \mathbf{b} se ramène donc à une quadrature.

$$m \frac{d\mathbf{V}_{\parallel}}{dt} = q\mathbf{E}_{\parallel}(t) \rightarrow \mathbf{V}_{\parallel}(t) = \mathbf{V}_{\parallel}(t_0) + \frac{q}{m} \int_{t_0}^t \mathbf{E}_{\parallel}(u) du$$

- Dans le plan perpendiculaire au champ magnétique, la force électrique n'induit pas une accélération mais une vitesse de dérive qui se superpose au mouvement cyclotronique. Afin d'étudier ce type d'orbite, introduisons les deux variables complexes \mathcal{Z} et \mathcal{E} .

$$\mathbf{V}_{\perp} = V_x \mathbf{u}_x + V_y \mathbf{u}_y \rightarrow \mathcal{Z}(t) = V_x(t) + jV_y(t)$$

$$\mathbf{E}_{\perp} = E_x \mathbf{u}_x + E_y \mathbf{u}_y \rightarrow \mathcal{E}(t) = \frac{q}{m} E_x(t) + j \frac{q}{m} E_y(t)$$

$(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{b})$ est une base cartésienne orthonormée directe et x et y constituent un système de coordonnées cartésiennes dans le plan perpendiculaire au champ magnétique. Ce changement de variables conduit à l'équation :

$$\frac{d\mathcal{Z}(t)}{dt} + j\omega_c \mathcal{Z}(t) = \mathcal{E}(t)$$

où ω_c est la fréquence cyclotron de la particule. La solution de cette équation peut être exprimée comme la somme d'une solution de l'équation sans second membre

$\mathcal{E}(t)$, plus une solution particulière de l'équation avec second membre $\mathcal{E}(t)$.

$$\mathcal{Z}(t) = \underbrace{\mathcal{Z}(t_0) \exp[-j\omega_c(t-t_0)]}_{\mathbf{V}_c(t)} + \int_{t_0}^t \exp[-j\omega_c(t-u)] \mathcal{E}(u) du$$

Le premier terme du second membre de cette relation décrit le mouvement cyclotronique autour des lignes de champ magnétique en l'absence de champ électrique. Le deuxième terme décrit l'effet du champ électrique et peut être analysé en terme de vitesses de dérive. Considérons une situation où le champ électrique varie de manière significative sur une échelle de temps plus longue que l'inverse de la fréquence cyclotron, et telle que $\mathcal{E}(t = -\infty) = 0$ et $d\mathcal{E}(t = -\infty)/dt = 0$. L'intégrale décrivant l'effet du champ électrique peut être sommée deux fois par partie afin de faire apparaître un développement en $d^n \mathcal{E}/dt^n \mathcal{E} \omega_c^n$, qui, compte tenu de la lenteur de l'évolution du champ $\mathcal{E}(t)$ à l'échelle de la fréquence cyclotron, est un petit paramètre approprié pour un développement perturbatif.

$$\int_{-\infty}^t \exp(j\omega_c u) \mathcal{E}(u) du = \left[\frac{\exp(j\omega_c u)}{j\omega_c} \mathcal{E}(u) \right]_{-\infty}^t + \left[\frac{\exp(j\omega_c u)}{\omega_c^2} \frac{d\mathcal{E}(u)}{du} \right]_{-\infty}^t + \dots$$

L'hypothèse d'évolution lente au regard de l'échelle cyclotronique est aussi appelée hypothèse d'adiabaticité. Sous cette hypothèse d'adiabaticité, nous obtenons donc le développement en puissance du petit paramètre $\frac{d^n \mathcal{E}}{\mathcal{E} \omega_c^n dt^n}$:

$$\int_{-\infty}^t \exp[-j\omega_c(t-u)] \mathcal{E}(u) du = \frac{\mathcal{E}(t)}{j\omega_c} + \frac{1}{\omega_c^2} \frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} + \dots$$

Le premier terme de ce développement est appelé **dérive électrique de champs croisés**, \mathbf{V}_E ; le deuxième terme est appelé **dérive de polarisation**, \mathbf{V}_P , car, contrairement au premier terme, des espèces de charges différentes ont des vitesses différentes, ce qui induit une polarisation du plasma.

$$\mathbf{V}_E(t) = \frac{\mathbf{E}_\perp \times \mathbf{B}}{B^2}, \quad \mathbf{V}_P(t) = \frac{1}{B} \frac{1}{\omega_c} \frac{d\mathbf{E}_\perp}{dt} \quad (5.13)$$

Ces deux dérives électriques, champs croisés et polarisation, se superposent au mouvement cyclotronique décrit précédemment. Le mouvement d'une particule chargée est donc donné par :

$$\mathbf{V}_\perp(t) = \mathbf{V}_c(t) + \mathbf{V}_E(t) + \mathbf{V}_P(t) + \dots \quad (5.14)$$

La figure 5.4 illustre la nature des orbites en présence d'une dérive de champs croisés ; la combinaison d'une rotation et d'une translation dessine une cycloïde, on voit ainsi que le vieux problème de la roulette de Pascal est aussi d'intérêt en physique des plasmas.

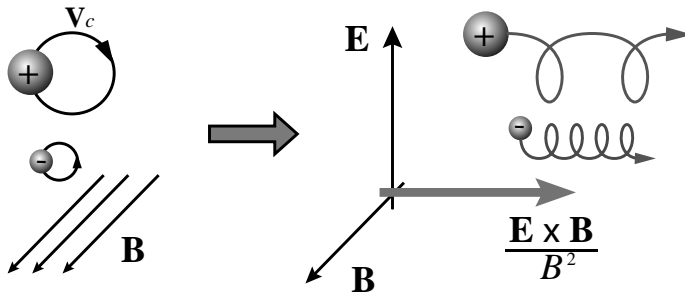


Figure 5.4 Dérives de champs croisés pour les ions et les électrons.

La dérive de polarisation est à l'origine de la valeur élevée de la constante diélectrique d'un plasma magnétisé soumis à un champ électrique basse fréquence. Lorsque l'hypothèse d'adiabaticité n'est plus vérifiée, l'échelle de temps du champ devenant de l'ordre de grandeur de l'inverse de la période cyclotronique, les formules précédentes ne sont plus valables ; l'analyse du mouvement révèle des résonances. Le cadre approprié à l'étude de telles résonances est la mécanique hamiltonienne présentée au chapitre dix. On remarquera que la dérive de polarisation est proportionnelle à la masse, les courants qui en résulte sont donc principalement ioniques.

Les méthodes qui ont été utilisées pour résoudre les problèmes précédents peuvent être appliquées à n'importe quel type de champ de force vérifiant l'hypothèse d'adiabaticité. Soit $\mathbf{F}(t)$ un tel champ de force, non électrique, à variations lentes. L'équation du mouvement d'une particule peut être traitée par les méthodes précédentes et la solution se présente comme la somme du mouvement cyclotronique et des différentes dérives.

$$m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F} + q\mathbf{V} \times \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{V}_{\perp} = \mathbf{V}_c + \mathbf{V}_E(\mathbf{F}) + \mathbf{V}_P(\mathbf{F}) + \dots$$

Si la force n'est pas proportionnelle à la charge, la dérive \mathbf{V}_E devient polarisante car elle dépend alors du signe de la charge. La dérive \mathbf{V}_P reste fonction de la masse, mais devient indépendante du signe de la charge.

$$\mathbf{V}_E(\mathbf{F}) = \frac{\mathbf{F}_{\perp} \times \mathbf{B}}{qB^2}, \quad \mathbf{V}_P(\mathbf{F}) = \frac{1}{qB\omega_c} \frac{d\mathbf{F}_{\perp}}{dt} \quad (5.15)$$

Deux cas de champs de forces non électriques, courants en physique des plasmas, les forces inertielles et la force de gravitation peuvent être ainsi étudiés sous l'hypothèse d'adiabaticité.

5.2.2 Dérives magnétiques

Un deuxième type de dérives existe dans un plasma magnétisé, les dérives dues aux inhomogénéités du champ magnétique. Il nous faut donc étudier les caractéristiques

du mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique statique inhomogène $\mathbf{B}(\mathbf{r})$.

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = q \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

Afin de résoudre ce problème, nous supposons que les échelles des variations spatiales du champ vérifient un ordering adiabatique.

Le rayon de Larmor sera supposé plus petit que les longueurs de gradient caractéristiques dans le plan perpendiculaire au champ, et le rapport de la vitesse parallèle au champ sur la fréquence cyclotron plus petit que la longueur de gradient parallèle.

Si le champ est représenté par une amplitude B et un vecteur directeur unitaire \mathbf{b} , $\mathbf{B}(x, y, z) = B(x, y, z)\mathbf{b}(x, y, z)$, dans un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) associé à une base orthonormée directe $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$ où l'axe des z est choisi tangent à la ligne de champ à l'origine : $\mathbf{b}(x = 0, y = 0, z = 0) = \mathbf{u}_z$ et $B(x = 0, y = 0, z = 0) = B$, alors les hypothèses d'adiabaticité se traduisent par :

$$\rho_L \frac{\partial B}{\partial x} \ll B, \quad \rho_L \frac{\partial B}{\partial y} \ll B, \quad V_{\parallel} \frac{\partial B}{\partial z} \ll \omega_c B$$

Sous ces hypothèses, le champ apparaît localement (presque) homogène à la particule qui effectue un grand nombre de rotations cyclotroniques avant d'explorer, sur des échelles de temps longues, les variations spatiales du champ en accumulant de petites déviations du mouvement cyclotronique dues à ces variations ; nous étudions donc ce que les mécaniciens célestes nomment des **effets séculaires** : une légère déviation (par exemple 1%) d'un mouvement périodique, qui, par accumulation sur un grand nombre de périodes (par exemple 100), induit un effet significatif ($100 \times 1\% = 1$).

La figure 5.5 présente la décomposition d'un champ inhomogène en la somme d'un champ homogène plus un ensemble d'inhomogénéités canoniques que nous allons identifier et étudier. Au voisinage d'un point $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, pris comme référence, le champ peut être développé en une série de Taylor :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) + \delta\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{B}|_{\mathbf{r}} + \delta\mathbf{r} \cdot \nabla \nabla \mathbf{B}|_{\mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{r} + \dots$$

La matrice des dérivées partielles $\nabla \mathbf{B}|_{\mathbf{r}}$ décrit la structure local du champ.

$$\mathbf{B} = B\mathbf{u}_z + \begin{bmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} + \dots$$

Compte tenu de la relation $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, il existe, a priori, $9 - 1 = 8$ longueurs de gradients indépendantes caractérisant l'inhomogénéité du champ. Ce résultat doit être mis en correspondance avec une analyse géométrique afin de dégager la signification des différents éléments de matrice et des différentes longueurs de gradient pour réduire le problème à l'identification de quatre types d'inhomogénéités, dites canoniques, que nous étudierons séparément : le gradient, la courbure, la divergence/convergence et le cisaillement.

Considérons successivement les différents éléments de la matrice $\nabla \mathbf{B}$ et mettons en correspondance ces éléments de matrice avec des configurations canoniques de champs illustrées par les figures 5.5 et 5.7.

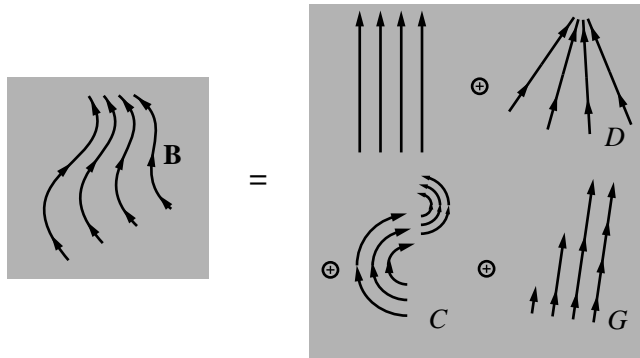


Figure 5.5 Décomposition canonique d'un champ quelconque, gradient (G), courbure (C) et divergence/convergence (D).

- Gradient : les lignes de champ restent parallèles à \mathbf{u}_z et B ne dépend que de x ou y ; cette configuration est caractérisée par deux nombres, les longueurs de gradient suivant x et y : L et D .

$$\left[0, 0, B \left(1 + \frac{x}{L} \right) \right], \left[0, 0, B \left(1 + \frac{y}{D} \right) \right] \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ BL^{-1} & BD^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

C'est la composante (G) sur la figure 5.5.

- Courbure : les lignes de champ sont des arcs de cercles concentriques dans les plans x ou y ; cette configuration est caractérisée par deux nombres, les deux rayons de courbure suivant x ou y : R et S .

$$\left[B \frac{z}{R}, 0, B \right], \left[0, B \frac{z}{S}, B \right] \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & BR^{-1} \\ 0 & 0 & BS^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

C'est la composante (C) sur la figure 5.5. Le lien entre ces deux éléments de matrice et la courbure des lignes de champ peut être établi en considérant l'équation des lignes de champ : $dz/dx = R/z \rightarrow x = z^2/2R$, qui est semblable au développement de l'équation du cercle de rayon R tangent au champ au point de référence : $(x - R)^2 + z^2 = R^2 \rightarrow x \approx z^2/2R$; la figure 5.6 illustre cette relation géométrique.

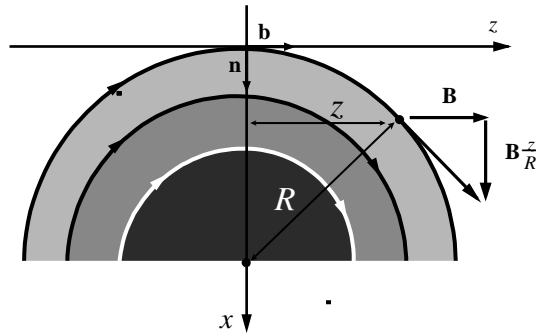


Figure 5.6 Courbure des lignes de champ.

- Convergence/divergence : la ligne de champ passant par l'origine coïncide avec l'axe des z et les lignes de force voisines convergent (divergent) vers (depuis) cette ligne de référence ; cette configuration est caractérisée par les deux nombres. En effet, considérons un tube de flux de section circulaire en $z = 0$, sa surface de section en $z \neq 0$ est une ellipse caractérisée par la longueur de ses deux axes.

$$\left[B \frac{x}{U}, 0, B \left(1 - \frac{z}{U} \right) \right], \left[0, B \frac{y}{V}, B \left(1 - \frac{z}{V} \right) \right] \rightarrow \begin{bmatrix} BU^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & BV^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -B(U^{-1} + V^{-1}) \end{bmatrix}$$

La description de ce type de configuration magnétique semble nécessiter un troisième paramètre car la section circulaire se transforme en une ellipse, mais, en général, les axes de cette ellipse tournent lorsque l'on s'éloigne du point de référence et possèdent donc une orientation quelconque, l'angle entre ces axes et une direction de référence semble donc nécessaire pour caractériser la configuration magnétique ; en fait, cet angle est une fonction de U et V et cette relation n'est autre que la traduction géométrique de la relation $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Nous venons d'identifier la composante (D) sur la figure 5.5.

Deux paramètres indépendants caractérisent le gradient, deux la courbure, deux (trois dépendants) la convergence ou la divergence des lignes de champ, au total sept paramètres de la matrice gradient peuvent être interprétées géométriquement.

- Cisaillement : les huitième et neuvième paramètres sont associés au cisaillement des lignes de champ lorsque les lignes de champ sont rectilignes, parallèles entre elles et s'organisent en familles de plans parallèles (Figure 5.7) ; le passage d'un plan au plan voisin s'effectue à travers une rotation, une telle configuration de champ est caractérisée par deux nombres : le pas de l'hélice ainsi identifiée, H ou K , suivant x ou y .

$$B \left[\frac{y}{H}, 0, 1 \right], B \left[0, \frac{x}{K}, 1 \right] \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & BH^{-1} & 0 \\ BK^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

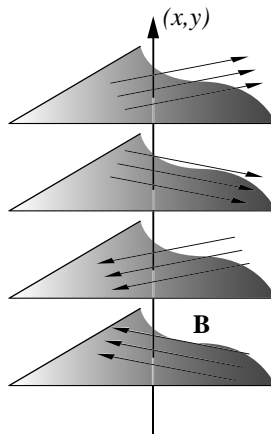


Figure 5.7 Configuration magnétique présentant un cisaillement des lignes de champ.

Afin de résoudre le problème de la dynamique d'une particule chargée dans un champ magnétique inhomogène caractérisé localement par les 8 paramètres L , D , R , S , H , K , U et V ,

- supposons que ces échelles de variations spatiales du champ vérifient un ordering adiabatique par rapport au rayon de Larmor : L , D , R , S , H , K , U , $V \gg \rho_L$; puis,
- décomposons la vitesse perpendiculaire en la somme d'une rotation cyclotronique plus une vitesse de dérive \mathbf{V}_D : $\mathbf{V}_\perp(t) = \mathbf{V}_c(t) + \mathbf{V}_D$; enfin,
- analysons la position comme la somme de la position du centre guide plus le rayon de Larmor : $\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) + \rho_L(t)$.

Ces hypothèses et décompositions correspondent à un ordering de la dynamique ainsi séparée en mouvements lent et rapide, $\mathbf{V}_c = d\rho_L/dt$ et ρ_L sont la partie cyclotronique rapide, $\mathbf{V}_D = d\mathbf{R}/dt$ et \mathbf{R} les mouvements lents induits par les inhomogénéités du champ ; le caractère lent, à l'échelle cyclotronique, de ces composantes permet de définir $\mathbf{V}_D = \langle \mathbf{V}_\perp \rangle$ la moyenne étant ici une moyenne temporelle sur une période cyclotronique.

Le cas de la divergence/convergence des lignes de champ (D) a déjà été traité dans le paragraphe précédent, et la force diamagnétique, résultant de ce type d'inhomogénéité, identifiée et analysée (5.9, 5.10). Considérons maintenant les cas du gradient (G) et de la courbure (C); les équations de Newton (5.16), où ω_c est la fréquence cyclotron de la particule en $(0, 0, 0)$, peuvent être résolues sur la base d'un schéma perturbatif.

$$\begin{aligned} \text{Gradient} & : \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \omega_c \mathbf{V} \times \mathbf{u}_z + \omega_c \mathbf{V} \times \frac{x}{L} \mathbf{u}_z \\ \text{Courbure} & : \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \omega_c \mathbf{V} \times \mathbf{u}_z + \omega_c \mathbf{V} \times \frac{z}{R} \mathbf{u}_x \end{aligned} \quad (5.16)$$

À l'ordre zéro, si la longueur de gradient L et le rayon de courbure R sont infinis, c'est-à-dire si le champ est homogène, la solution n'est autre que la combinaison d'une translation uniforme le long des lignes de champ et d'une rotation cyclotronique uniforme autour des lignes de champ.

$$L, R = \pm\infty \longrightarrow \frac{d\mathbf{V}_{\parallel}}{dt} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{V}_{\perp} = \mathbf{V}_c(t)$$

Afin de calculer l'ordre suivant introduisons la variable complexe \mathcal{Z} :

$$\mathbf{V}_{\perp} = V_x \mathbf{u}_x + V_y \mathbf{u}_y \rightarrow \mathcal{Z} = V_x + jV_y.$$

Les équations de Newton s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \text{Gradient} & : \frac{d\mathcal{Z}}{dt} + j\omega_c \mathcal{Z} = -j\omega_c \mathcal{Z} \frac{x}{L} \\ \text{Courbure} & : \frac{d\mathcal{Z}}{dt} + j\omega_c \mathcal{Z} = j\omega_c V_{\parallel} \frac{z}{R} \end{aligned}$$

Les solutions de ces deux équations différentielles sont aussi solutions des deux équations intégrales :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(t) & = \underbrace{\mathcal{V}_c \exp[-j\omega_c t]}_{\mathbf{V}_c(t)} - j\frac{\omega_c}{L} \exp(-j\omega_c t) \int_0^t \exp(j\omega_c u) \mathcal{Z}(u) x(u) du \\ \mathcal{Z}(t) & = \underbrace{\mathcal{V}_c \exp[-j\omega_c t]}_{\mathbf{V}_c(t)} + j\frac{\omega_c}{R} \exp(-j\omega_c t) \int_0^t \exp(j\omega_c u) V_{\parallel}(u) z(u) du \end{aligned}$$

Les premiers termes des membres de droite décrivent le mouvement cyclotronique; les termes suivant décrivent les effets d'inhomogénéité, à l'ordre un nous y substituons la solution à l'ordre zéro : $\mathcal{Z}(u) = \mathcal{V}_c \exp(-j\omega_c u)$, $x(u) = \frac{V_c}{\omega_c} \sin(\omega_c u)$,

$y(u) = \frac{V_c}{\omega_c} \cos(\omega_c u)$ et $z(u) = V_{\parallel} u$, ainsi, nous obtenons les solutions approchées :

$$\mathcal{Z}(t) = V_c \exp[-j\omega_c t] + \underbrace{j \frac{V_c V_c}{\omega_c L} \exp[-j\omega_c t] [\cos[\omega_c t] - 1]}_{\langle \rangle \rightarrow \mathbf{V}_{DG}} + O\left(\frac{\rho_L}{L}\right)^2$$

$$\mathcal{Z}(t) = V_c \exp[-j\omega_c t] + \underbrace{j \frac{V_{\parallel}^2}{\omega_c R} [1 - \exp[-j\omega_c t] - j\omega_c t]}_{\langle \rangle \rightarrow \mathbf{V}_{DC}} + O\left(\frac{\rho_L}{R}\right)^2$$

La superposition d'un mouvement rapide de rotation cyclotronique et d'une dérive lente perpendiculaire aux lignes de champ est ainsi clairement identifiée, l'expression de ces deux dérives magnétiques est obtenue en prenant la valeur moyenne $\langle \rangle$, sur une rotation cyclotronique, des termes inhomogènes : $\mathbf{V}_{\perp} = \mathbf{V}_c + \langle \mathbf{V}_{\perp} \rangle$.

$$\begin{aligned} \text{Gradient} & : \mathbf{V}_{\perp} = \mathbf{V}_c(t) + \frac{V_c^2}{2\omega_c L} \mathbf{u}_y \\ \text{Courbure} & : \mathbf{V}_{\perp} = \mathbf{V}_c(t) + \frac{V_{\parallel} z}{R} \mathbf{u}_x + \frac{V_{\parallel}^2}{\omega_c R} \mathbf{u}_y \end{aligned} \quad (5.18)$$

L'étude du cas de la courbure nécessite une analyse plus détaillée ; le deuxième terme du membre de droite de l'identité (5.18) ne décrit pas une dérive perpendiculaire aux lignes de champ mais simplement le fait que, sous les hypothèses d'adiabaticité, le mouvement de translation suit les lignes de champ même si ces dernières sont courbées ; en effet (Figure 5.6) :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{V_{\parallel} z}{R} \rightarrow \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dz}{dt}} = \frac{z}{R} = \frac{B_x}{B_z}$$

Le troisième terme du membre de droite constitue la dérive de courbure.

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique statique, présentant une courbure et un gradient, est donc la superposition du mouvement cyclotronique et de deux mouvements de dérive, les dérives de gradient et de courbure, $\mathbf{V}_{\perp} = \mathbf{V}_c(t) + \mathbf{V}_{DG} + \mathbf{V}_{DC}$, dont les expressions sont données par :

$$\mathbf{V}_{DG} = \frac{V_c^2}{2\omega_c} \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2}, \quad \mathbf{V}_{DC} = \frac{V_{\parallel}^2}{\omega_c} \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{n}}{R} \quad (5.19)$$

où $\mathbf{n}(= \mathbf{u}_x)$ est le vecteur unitaire normal aux lignes de champ (Figure 5.6).

L'origine physique de la dérive de gradient est une lente accumulation de faibles déviations, non compensées, du rayon de Larmor entre la zone de champ fort et la zone de champ faible.

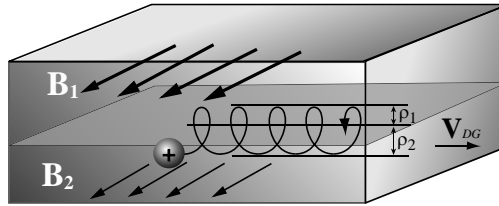


Figure 5.8 Origine physique de la dérive de gradient.

Ce phénomène peut être illustré à l'aide d'un modèle de champs qui prend deux valeurs, $B_1 \mathbf{b}$ dans le demi-espace supérieur $x > 0$ et $B_2 \mathbf{b}$ dans le demi espace inférieur $x < 0$ (Figure 5.8). Si $B_1 > B_2$, alors les rayons de Larmor sont plus petits dans la partie 1 de la trajectoire, et plus grand dans la partie 2 : $\rho_1 < \rho_2$; ainsi, le raccordement de grands cercles, dans la partie inférieure de l'orbite, avec de petits cercles, dans la partie supérieure, implique nécessairement une dérive lente, sur le côté, la dérive de gradient \mathbf{V}_{DG} (Figure 5.8).

De même, l'identification de l'origine physique de la dérive de courbure ne présente aucune difficulté ; une particule qui suit, à l'ordre zéro, une ligne de champ courbe subit une force centrifuge \mathbf{F}_c (Figure 5.9) et la dérive de champs croisés (5.15), $\mathbf{F}_c \times \mathbf{B} / qB^2$ générée par cette force centrifuge, n'est autre que la dérive de courbure \mathbf{V}_{DC} (Figure 5.9). Enfin, notons que le cisaillement des lignes de champ ne génère aucun effet séculaire au premier ordre.

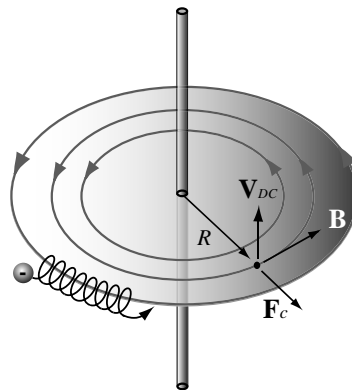


Figure 5.9 Origine physique de la dérive de courbure.

Le sens de ces deux dérives est fonction du signe de la charge de la particule. Ces dérives créent donc des courants et des séparations de charges, donc des champs électriques et magnétiques. Ces courants de dérive s'écoulent dans la direction perpendiculaire au champ ; on notera que les courants de dérive ne sont ni diamagnétiques, ni paramagnétiques, en général, ils ont simplement tendance à lisser les gradients ou les courbures. Compte-tenu de l'ordering adiabatique, l'essentiel de l'énergie se trouve dans le mouvement cyclotronique et le mouvement parallèle, le mouvement

de dérive ne contenant qu'une faible fraction de l'énergie totale. Si le mouvement de la particule a lieu dans une zone éloignée des sources du champ, ou si, comme nous le verrons dans le chapitre sept, la pression du plasma est beaucoup plus faible que la pression magnétique, alors, il est possible de considérer le champ \mathbf{B} comme irrotationnel, c'est-à-dire : $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$. On a donc : $\nabla \times (B\mathbf{b}) = \mathbf{0} = B\nabla \times \mathbf{b} - \mathbf{b} \times \nabla B$, et l'équation : $\nabla \mathbf{b}^2 = \mathbf{0} = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{b})$ permet d'établir l'identité :

$$\mathbf{b} \times \nabla B / B = \mathbf{b} \times (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{n} / R ;$$

la somme de la dérive de gradient et de la dérive de courbure dans le vide est donc égale à :

$$\mathbf{V}_{DG} + \mathbf{V}_{DC} = \frac{2V_{\parallel}^2 + V_c^2}{2\omega_c} \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2} = \left(V_{\parallel}^2 + \frac{V_c^2}{2} \right) \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{n}}{R\omega_c} \quad (5.20)$$

Les différents résultats qui viennent d'être établis sur les dérives dans des champs variables permettent d'analyser les conditions de confinement dans le problème du confinement des plasmas thermonucléaires, et d'identifier les ondes et instabilités en régime basse fréquence. La plupart de ces dérives engendrent des courants, et ces courants réagissent sur les champs appliqués : soit en établissant les conditions d'un retour à l'équilibre et l'apparition d'oscillations associées à une onde, soit en amplifiant la perturbation responsable de la dérive, déclenchant ainsi une instabilité. Le bilan des courants basses fréquences dans un plasma magnétisé doit aussi prendre en compte les courants Ampériens de magnétisation (2.17). En effet, un plasma magnétisé, quasi-neutre, de densité électronique $n_e = Zn_i$, se comporte comme un milieu magnétique présentant un vecteur magnétisation \mathbf{M} .

$$\mathbf{M} = -n_e \langle \mu_e \rangle \mathbf{b} - n_i \langle \mu_i \rangle \mathbf{b}$$

Le signe moins étant une conséquence du caractère diamagnétique des mouvements cyclotroniques. La moyenne $\langle \mu_{e,i} \rangle$ étant prise sur la distribution des vitesses cyclotroniques. Dans un plasma localement à l'équilibre thermodynamique cette moyenne de l'énergie cinétique cyclotronique est reliée à la pression P par la relation : $2P = n_e m_e \langle V_{ce}^2 \rangle + n_i m_i \langle V_{ci}^2 \rangle$. De même, la moyenne de la vitesse parallèle est reliée à la pression par la relation :

$$P = n_e m_e \langle V_{\parallel e}^2 \rangle + n_i m_i \langle V_{\parallel i}^2 \rangle.$$

Pour établir ces relations il suffit d'appliquer l'équation d'état des gaz parfaits et de se rappeler que chaque degré de liberté possède une énergie moyenne $kT/2$. D'une part, sur la base de ces relations, il est possible d'exprimer les courants de dérive en fonction de la pression.

$$\mathbf{J}_{DG} + \mathbf{J}_{DC} = \frac{P}{B^2} \mathbf{b} \times \nabla B + \frac{P}{B} \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{n}}{R}$$

D'autre part, les courants de magnétisation, résultant de l'inhomogénéité de la distribution des orbites cyclotroniques, sont donnés par (2.17) :

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = -\nabla \times \frac{P}{B} \mathbf{b} = -\nabla P \times \frac{\mathbf{b}}{B} - \frac{P}{B^2} \mathbf{b} \times \nabla B - \frac{P}{B} \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{n}}{R}$$

La somme des courants de dérive et des courants de magnétisation est telle que le courant de dérive de gradient annule le deuxième terme du courant de magnétisation, et le courant de dérive de courbure annule le troisième terme ; ainsi, le courant total, appelé courant diamagnétique \mathbf{J}_{DM} , a pour valeur :

$$\mathbf{J}_{DM} \equiv \mathbf{J}_{DG} + \mathbf{J}_{DC} + \mathbf{J}_m = -\frac{\nabla_{\perp} P}{B} \times \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{J}_{DM} \times \mathbf{B} = \nabla P \quad (5.21)$$

Ce résultat sera confirmé dans le contexte de la modélisation magnétohydrodynamique des plasmas.

En conclusion, le mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique adiabatique est la combinaison du mouvement cyclotronique, des dérives de gradient et courbure, perpendiculaires aux lignes de champ, du mouvement parallèle aux lignes de champ, qui peut être décéléré ou accéléré selon la convergence ou la divergence des lignes de champ, et des dérives de champs croisés et de polarisation.

Les expressions de ces quatre principales dérives sont rappelées dans le tableau (5.1).

Tableau 5.1

Vitesse de dérive	Expression
Champs croisés	$\mathbf{V}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}$
Polarisation	$\mathbf{V}_P = \frac{1}{B\omega_c} \frac{d\mathbf{E}}{dt}$
Gradient	$\mathbf{V}_{DG} = \frac{V_c^2}{2\omega_c} \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2}$
Courbure	$\mathbf{V}_{DC} = \frac{V_c^2}{\omega_c} \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{n}}{R}$

Nous venons de traiter le problème du mouvement des particules chargées dans des champs électromagnétiques basses fréquences. Un autre type de problème, très courant en physique des plasmas, est celui du mouvement de particules chargées dans des champs hautes fréquences. Lorsque ces champs, généralement associés à des ondes ou à des instabilités, ont des amplitudes homogènes la solution est obtenue par linéarisation et la réponse de la particule est une oscillation à la fréquence du champ.

5.3 FORCE PONDÉROMOTRICE

Lorsque l'amplitude d'un champ oscillant est inhomogène, l'aller et le retour d'une oscillation ne se compensent pas exactement. La somme de ces petites différences, sur plusieurs oscillations, engendre une dérive qui est similaire à la dérive de gradient, c'est aussi un effet séculaire. En fait, cette non-compensation d'oscillations légèrement biaisées par l'inhomogénéité de l'amplitude du champ ne se traduit pas en termes de vitesse, mais en termes d'accélération. Le résultat final est une force : la force pondéromotrice. Deux cas doivent être distingués : le cas des oscillations électriques longitudinales quasi-électrostatiques et le cas des oscillations transverses.

5.3.1 Champ longitudinal

Soit une particule chargée, de charge q et de masse m , interagissant avec une oscillation électrique longitudinale inhomogène $E(x, t)$.

$$E(x, t) = E \left[1 + \frac{x}{L} \right] \cos(\omega t)$$

L'équation de son mouvement est donnée par :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{qE}{m} \cos(\omega t) + \frac{qE}{mL} x(t) \cos(\omega t)$$

L'échelle de variation de l'amplitude du champ, L , est supposée grande devant l'amplitude des oscillations linéaires $qE/m\omega^2$: $|qE/m\omega^2| \ll |L|$. Cet ordering permet d'introduire le petit paramètre $\varepsilon = qE/m\omega^2 L$, et de chercher ensuite une solution de l'équation du mouvement sous la forme d'un développement perturbatif en ε : $x(t) = x_0(t) + x_1(t) + O[\varepsilon^2]$ Sur la base de ce petit paramètre ε , l'amplitude du champ peut aussi être développée et l'équation du mouvement devient alors une hiérarchie d'équations ordonnées par les puissances de ε .

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = \frac{qE}{m} \cos(\omega t), \quad \frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{qE}{mL} x_0(t) \cos(\omega t), \dots$$

La solution à l'ordre zéro donne l'oscillation linéaire dans un champ d'amplitude constante, et l'équation à l'ordre un fait apparaître la superposition d'un terme constant et d'une oscillation à l'harmonique deux.

$$\begin{aligned} x_0(t) &= -\frac{qE}{m\omega^2} \cos(\omega t) \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} &= -\frac{q^2 E^2}{m^2 \omega^2 L} \cos^2(\omega t) = -\frac{q^2 E^2}{2m^2 \omega^2 L} [1 + \cos(2\omega t)] \end{aligned}$$

Le terme constant du troisième membre de cette deuxième identité décrit une dérive uniformément accélérée de la particule. Cette dérive est induite par la force dite pondéromotrice (ou diélectrique) longitudinale \mathbf{F}_p .

$$\mathbf{F}_p = -\frac{q^2}{4m\omega^2} \nabla E^2 \quad (5.22)$$

Le cas d'un champ transverse est légèrement différent car l'existence de la force pondéromotrice est due, pour partie, au champ magnétique.

5.3.2 Champ transverse

Soit une particule, de charge q et de masse m , interagissant avec une onde électromagnétique transverse inhomogène de champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ et de champ magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$. L'échelle de variation des amplitudes, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, est supposée grande devant l'amplitude des oscillations linéaires et la longueur d'onde $2\pi/k$. L'équation du mouvement est donnée par :

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{q}{m} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) + \frac{q}{m} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

Pour des ondes dont la vitesse de phase est de l'ordre de grandeur de la vitesse de la lumière et des particules dont les vitesses sont non relativistes, le terme de Laplace est petit devant le terme de Coulomb. En première approximation le mouvement est donc une oscillation entretenue par le champ électrique.

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1 + \dots \rightarrow \mathbf{r}_0(t) = -\frac{q}{m\omega^2} \mathbf{E} \cos(\omega t)$$

Le terme suivant doit prendre en compte l'inhomogénéité du champ électrique et la force de Laplace magnétique.

$$\frac{m}{q} \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{r}_0(t) \cdot \nabla \mathbf{E} \cos(\omega t) + \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} \times \mathbf{B} \cos(\omega t)$$

Compte tenu de l'identité $(\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} = \nabla \frac{E^2}{2} + \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, la moyenne sur la phase rapide ωt de l'équation précédente permet d'obtenir un résultat similaire au cas précédent.

$$\left\langle \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} \right\rangle = -\frac{q^2}{4m^2 \omega^2} \nabla E^2$$

Ainsi l'expression de la force pondéromotrice d'un champ transverse est identique à celle d'un champ longitudinal ; **la particule est poussée des zones de champ fort vers les zones de champ faible**. La densité volumique de force pondéromotrice, \mathcal{F}_p , est égale à la force (5.22) que multiplie la densité de particules n , faisant ainsi

apparaître la densité électrostatique d'énergie $\varepsilon_0 E^2/2$ et la fréquence plasma ω_p .

$$\mathcal{F}_p = -\frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \nabla \left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \right) \quad (5.24)$$

Cette force est importante en théorie des instabilités car elle permet un couplage non-linéaire entre les branches hautes fréquences et basses fréquences d'un spectre de modes propres à travers le phénomène de battement qui module les enveloppes des modes et génère ainsi une interaction pondéromotrice avec les particules.

L'analyse dynamique d'un plasma ne se restreint donc pas à la prise en compte des forces de Coulomb et Laplace ; les forces diélectriques et diamagnétiques, de nature séculaire, constituent souvent les sources principales des échanges d'impulsion entre le champ et les particules. En effet, les forces hautes fréquences, non séculaires, lorsque elles ne sont pas résonantes, ne donnent lieu qu'à des échanges de puissance réactive et non active.

Tableau 5.2

Force	Densité volumique de force [N/m ³]
Électrique/Coulomb	$\rho \mathbf{E}$
Magnétique/Laplace	$\mathbf{J} \times \mathbf{B}$
Diamagnétique/« mugradB »	$-\frac{1}{2} \frac{\rho_f^2}{\lambda_p^2} \mathbf{b} \cdot \nabla \left(\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right)$
Diélectrique/pondéromotrice	$-\frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \nabla \left(\frac{\varepsilon_0 \mathbf{E}^2}{2} \right)$

Le tableau (5.2) rappelle les expressions des quatre forces électromagnétiques identifiées dans le cadre de l'analyse de l'interaction champs-particules dans un plasma.

5.4 INVARIANTS ADIABATIQUES

5.4.1 Intégrale d'action

L'étude de la dynamique d'un système peut être entreprise de différentes manières. La plus courante consiste à exprimer les variables physiques en fonction du temps. Une autre approche consiste à rechercher des combinaisons de variables indépendantes du temps. En effet, malgré l'évolution du système, il n'est pas exclu que certaines combinaisons de variables puissent être construites de manière à compenser mutuellement leur variations temporelles ; l'exemple le plus connu étant l'énergie dans un système conservatif. Cette recherche d'invariants du mouvement peut

être formalisée et systématisée dans le cadre de la mécanique hamiltonienne où les actions constituent de tels invariants, cette approche sera étudiée dans le dernier chapitre. Enfin, notons que l'existence d'invariants est garantie pour les systèmes possédant un groupe de symétrie continu, cette garantie constitue le théorème de Noether.

Les invariants adiabatiques, que nous allons construire ici, ne sont pas associés aux symétries d'un système conservatif, mais à l'existence de trois échelles de temps bien séparées, c'est-à-dire à l'existence d'un ordering séparant les composantes lentes et rapides du mouvement.

Ces échelles permettent de décomposer le mouvement en trois dynamiques découplées, chacune possédant les caractéristiques d'un oscillateur.

Pour un oscillateur linéaire à un degré de liberté X ($d^2X/dt^2 + \Omega^2(t)X(t) = 0$) le rapport de l'énergie à la fréquence est un invariant adiabatique, parfois appelé invariant d'Erhenfest. Ce terme signifie que lorsque Ω varie lentement, $d\Omega/dt \ll \Omega^2$, le rapport de l'énergie sur la pulsation reste approximativement constant. L'erreur commise en le considérant comme constant est exponentiellement petite. Ce résultat se généralise aisément au cas des oscillateurs non-linéaires ($d^2X/dt^2 + F(X, t) = 0$). L'oscillateur non linéaire le plus simple illustrant cette propriété d'invariance adiabatique est constitué par une particule rebondissant entre deux murs distants d'une longueur $2D$; ces murs se rapprochant lentement à la vitesse $U = -\delta D/\delta t$ (Figure 5.10).

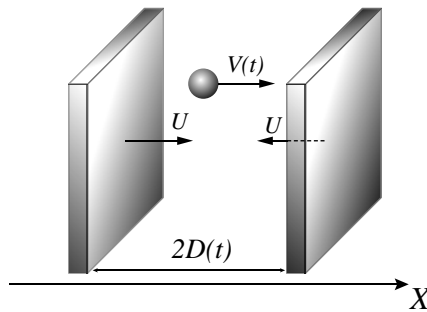


Figure 5.10 Oscillateur non-linéaire en régime adiabatique.

La vitesse de la particule sera notée V et l'hypothèse d'adiabaticité se traduit par $U \ll V$. Après une collision sur l'un des murs en mouvement, la particule subit une variation de vitesse $\delta V = 2U$ et le temps entre deux collisions est donné par $\delta t = \frac{2D}{V}$; on obtient donc :

$$\frac{\delta V}{\delta t} = \frac{UV}{D} = -\frac{\delta D}{\delta t} \frac{V}{D} \rightarrow \delta(VD) = 0 \rightarrow \delta \left[\oint V dX \right] = 0$$

La généralisation de ce résultat sera présentée dans un cadre hamiltonien au chapitre dix : pour tout mouvement périodique, $X(t)$, l'action $J \equiv \frac{m}{2\pi} \oint \frac{dX}{dt} dX$, où l'intégrale doit être prise sur une période complète de l'oscillation, constitue un invariant adiabatique.

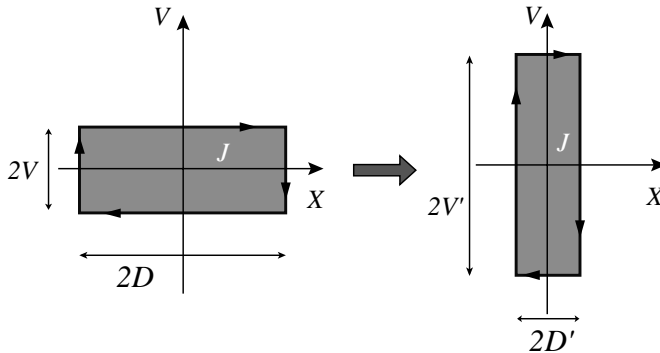


Figure 5.11 Invariance de l'action dans l'espace des phases.

Une interprétation géométrique de l'invariance de l'intégrale d'action peut être construite dans l'espace des phases (X, V) ; dans cet espace l'aire $(\oint V dX)$ sous tendu par une orbite fermée est proportionnelle à l'action J et l'invariance de l'action implique l'invariance de l'aire, la figure 5.11 illustre ce résultat (dans le cas de la figure 5.10) dont nous démontrerons le caractère universel dans le dernier chapitre. L'intégrale d'action pour un système à un degré de liberté peut être généralisée aux systèmes à plusieurs degrés de liberté, en particulier, lorsque ces différents degrés évoluent sur des échelles de temps très différentes. En présence d'un champ magnétique, dérivant du potentiel vecteur \mathbf{A} , le moment canoniquement conjugué à la position doit être pris en compte dans le calcul de l'action.

$$J \equiv \frac{1}{2\pi} \oint m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \rightarrow J \equiv \frac{1}{2\pi} \oint (m\mathbf{v} + q\mathbf{A}) \cdot d\mathbf{r}$$

Considérons le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique, champ et particule vérifiant les hypothèses d'adiabaticité. Le mouvement le plus rapide correspond au mouvement cyclotronique. Puis, sur une échelle de temps plus longue, la particule oscille le long d'une ligne de champ (ce point va être précisé dans la suite de ce paragraphe), et enfin, sur échelle de temps plus longue, elle explore la configuration magnétique à travers les dérives de gradient et de courbure. Ce dernier mouvement peut être aussi périodique et définir ainsi une surface de dérive fermée.

Nous allons d'abord identifier l'invariant associé à l'oscillation cyclotronique. Le mouvement cyclotronique dans un champ magnétique homogène \mathbf{B} , dérivant d'un

potentiel vecteur $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{r}/2$, est décrit par l'évolution de la vitesse et de la position :

$$\mathbf{r} = \rho_L [\cos(\omega_c t) \mathbf{u}_x - \sin(\omega_c t) \mathbf{u}_y] \quad \text{et} \quad \mathbf{V}_c = -V_c [\sin(\omega_c t) \mathbf{u}_x + \cos(\omega_c t) \mathbf{u}_y].$$

L'intégrale d'action associée à cette oscillation est donnée par :

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint \left(m\mathbf{V}_c + q \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{r}}{2} \right) \cdot d\mathbf{r} = \frac{m}{q} \mu$$

Le moment magnétique μ défini précédemment est donc un invariant adiabatique et la théorie générale de l'invariance adiabatique des actions confirme les résultats précédents. Cette invariance a comme conséquence l'existence de points miroirs le long d'une ligne de champ. En effet, l'énergie cinétique et le moment magnétique sont conservés ; il existe donc deux relations entre l'état du système à l'instant t et son état antérieur à l'instant t_0 :

$$\begin{aligned} \text{Invariance de l'énergie} & : \quad \mathbf{V}_c^2(t) + \mathbf{V}_{\parallel}^2(t) = \mathbf{V}_c^2(t_0) + \mathbf{V}_{\parallel}^2(t_0) \\ \text{Invariance du moment magnétique} & : \quad \frac{V_c^2(t)}{B(\mathbf{r}(t))} = \frac{V_c^2(t_0)}{B(\mathbf{r}(t_0))} \end{aligned}$$

Éliminons la vitesse cyclotronique pour exprimer la vitesse parallèle en fonction du champ et des caractéristiques de la particule à l'instant de référence t_0 .

$$\mathbf{V}_{\parallel}^2(t) = \mathbf{V}_{\parallel}^2(t_0) - \mathbf{V}_c^2(t_0) \left[\frac{B(\mathbf{r}(t)) - B(\mathbf{r}(t_0))}{B(\mathbf{r}(t_0))} \right]$$

Ainsi, si le rapport de la vitesse parallèle initiale $\mathbf{V}_{\parallel}(t_0)$ sur la vitesse cyclotronique initiale $\mathbf{V}_c(t_0)$ est petit, il existe un point \mathbf{r} ($B(\mathbf{r}(t)) > B(\mathbf{r}(t_0))$) le long de la ligne de champ où la vitesse parallèle s'annule, $\mathbf{V}_{\parallel}^2(t) = 0$, une analyse plus poussée montre que la particule est réfléchiée par cette zone de champ fort ; c'est essentiellement la force diamagnétique (5.10) qui est à l'oeuvre ici et ce point est appelé point miroir. L'usage est d'introduire le « *pitch angle* » θ de la particule : $|\mathbf{V}_{\parallel}| = V \cos \theta$, $|\mathbf{V}_c| = V \sin \theta$. Une particule de pitch angle initial θ_0 en un point où le champ a la valeur B_0 subira une réflexion en un point où le champ a la valeur B si : $\sin \theta_0 = \sqrt{B_0/B}$. Toutes les particules de pitch angle supérieur seront réfléchies avant d'atteindre le point B . Ce processus est utilisé comme principe de base des pièges thermonucléaires de type miroirs magnétiques. Ce processus est aussi présent dans la magnétosphère terrestre où il assure le confinement des électrons et des ions issus du vent solaire.

5.4.2 Invariant longitudinal

De nombreuses configurations magnétiques permettent de réaliser des lignes de champ possédant deux points miroirs entre lesquels certaines particules peuvent être piégées.

Le résultat du piégeage entre les points miroirs étant une oscillation le long des lignes de champ où μB joue le rôle d'un potentiel confinant représenté sur la figure 5.12. On peut alors se poser la question de l'existence d'un invariant adiabatique associé à cette oscillation longitudinale. La réponse est obtenue en appliquant la formule générale exprimant l'action de cet oscillateur ; cette formule permet de définir l'invariant longitudinal J d'une particule chargée dans une configuration magnétique comme :

$$J \equiv \oint (mV_{\parallel} + qA_{\parallel}) ds = \int_{s_1}^{s_2} mV_{\parallel} ds, \quad (5.25)$$

où s est l'abscisse curviligne le long de la ligne de champ et (s_1, s_2) sont les deux points miroirs entre lesquels oscille la particule. Dans le troisième membre de cette identité nous avons négligé l'intégrale donnant la circulation du potentiel vecteur car elle est égale au flux du champ magnétique à travers la trajectoire fermée qui est nulle car le centre guide se déplace le long des lignes de champ. Nous verrons que pour le troisième invariant adiabatique la situation est complémentaire et ce troisième invariant est dominé par le terme de flux magnétique et non par le terme cinétique.

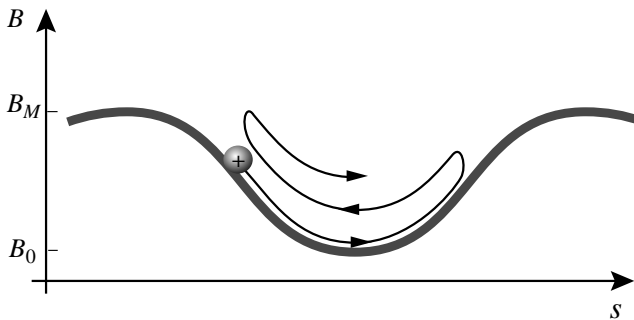


Figure 5.12 Oscillation longitudinale entre deux points miroirs du potentiel μB en fonction de l'abscisse curviligne le long de la ligne de champ.

Afin de démontrer l'invariance de J nous allons considérer séparément le cas d'un champ inhomogène statique et le cas d'un champ dépendant du temps. Soit donc un champ magnétique statique $\mathbf{B}(s, \mathbf{r}_{\perp})$ et deux éléments de lignes de champ voisins de longueur ds et ds' , de rayon de courbure respectif \mathcal{R} et \mathcal{R}' ; cette configuration locale est illustrée par la figure 5.13. Ces deux éléments de longueur sont vus sous un angle commun et possèdent un vecteur normal unitaire commun \mathbf{n} . Par ailleurs,

les deux éléments de longueur et leurs rayons de courbure respectifs sont reliés par les relations :

$$\frac{ds'}{\mathcal{R}'} = \frac{ds}{\mathcal{R}} \rightarrow \frac{ds - ds'}{ds} = \frac{\mathcal{R} - \mathcal{R}'}{\mathcal{R}}$$

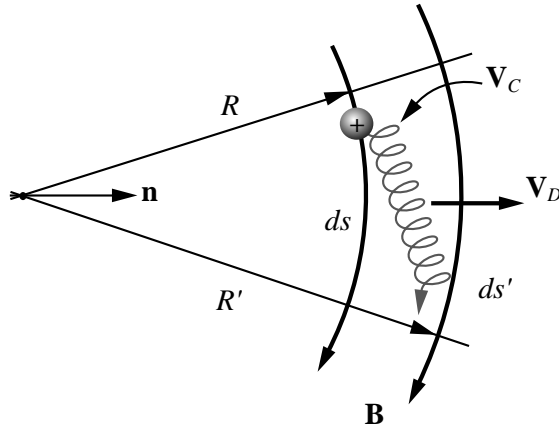


Figure 5.13 Invariance de l'élément $V_{\parallel} ds$.

Une particule chargée suit les lignes de champ et dérive à travers ces lignes. Il est donc nécessaire d'évaluer la variation de la quantité $V_{\parallel} ds$ résultant des dérives magnétiques $\mathbf{V}_D = d\mathbf{r}_{\perp}/dt$ pendant une durée δt : $\delta(V_{\parallel} ds) = ds\delta V_{\parallel} + V_{\parallel}\delta(ds)$. La variation du rayon de courbure est due à la dérive perpendiculaire aux lignes de champ. Pendant un temps δt on peut donc évaluer la variation de l'élément de longueur :

$$\frac{\delta(ds)}{ds} = \frac{ds - ds'}{ds} = \frac{\mathcal{R} - \mathcal{R}'}{\mathcal{R}} = \frac{\mathbf{V}_D \cdot \mathbf{n} \delta t}{\mathcal{R}}$$

Pendant la même durée δt la vitesse parallèle aux lignes de champ a varié de la quantité δV_{\parallel} qui peut être évaluée à l'aide de la conservation de l'énergie $\mu B + mV_{\parallel}^2/2$.

$$\delta \left(m \frac{V_{\parallel}^2}{2} + \mu B \right) = m V_{\parallel} \delta V_{\parallel} + \mu \mathbf{V}_D \delta t \cdot \nabla B = 0$$

Le moment magnétique μ étant constant, la variation de champ magnétique possède ici un caractère essentiellement convectif et résulte du mouvement de la particule. La somme des deux variations précédentes s'exprime en fonction des vitesses de dérive de gradient et de courbure (5.19) et le résultat final est une variation $\delta(V_{\parallel} ds)$ nulle.

$$\frac{\delta(ds)}{ds} + \frac{\delta V_{\parallel}}{V_{\parallel}} = \frac{V_c^2 \delta t}{2\omega_c} \frac{\mathbf{b} \times \nabla B}{B} \cdot \frac{\mathbf{n}}{\mathcal{R}} - \frac{\mu \delta t}{m\omega_c} \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{b}}{\mathcal{R}} \cdot \nabla B = 0$$

Les variations de l'intégrand sont donc nulles, $\delta(V_{\parallel} ds) = 0$; les variations de l'intégrale ne peuvent provenir que des bornes d'intégrations constituées par les deux points miroirs. La vitesse parallèle s'annulant en ces deux points, la variation de l'intégrale aussi, ainsi $dJ/dt = 0$. Considérons, à présent, le cas d'un champ $\mathbf{B}(s, t)$ où les inhomogénéités transverses sont négligées et où la dépendance temporelle est prise en compte.

$$J = \int_{s_1(t)}^{s_2(t)} \sqrt{\frac{2}{m} (\mathcal{W}(t) - \mu B(s, t))} ds \quad (5.26)$$

L'énergie \mathcal{W} n'est pas conservée car la variation temporelle du champ magnétique induit un champ électrique d'induction. La variation temporelle de l'intégrale d'action est donc la somme de trois termes,

$$\frac{dJ}{dt} = \left. \frac{\partial J}{\partial t} \right|_{\mathcal{W}, s_{1,2}} + \left. \frac{\partial J}{\partial \mathcal{W}} \right|_{s_{1,2}, t} \frac{d\mathcal{W}}{dt} + \left. \frac{\partial J}{\partial s_{1,2}} \right|_{\mathcal{W}, t} \frac{ds_{1,2}}{dt}$$

Comme la vitesse curviligne s'annule aux points miroirs, le troisième terme est nul.

$$\frac{dJ}{dt} = \int_{s_1}^{s_2} -\frac{\mu}{mV_{\parallel}} \frac{\partial B}{\partial t} ds + \left(mV_{\parallel} \frac{dV_{\parallel}}{dt} + \mu \frac{\partial B}{\partial t} + \mu V_{\parallel} \frac{\partial B}{\partial s} \right) \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{V_{\parallel}} ds$$

Compte tenu de la force diamagnétique le premier et le troisième terme, à l'intérieur de la parenthèse du deuxième membre de cette relation, se compensent. Sous l'hypothèse d'adiabaticité les variations temporelles du champ sont lentes à l'échelle de la période d'oscillation entre les deux points miroirs. Le terme de dérivée temporelle du champ par rapport au temps peut donc être sorti de l'intégrale, il annule alors le deuxième terme de l'équation précédente. La variation temporelle de J est donc nulle. Cette intégrale d'action est un invariant adiabatique, l'invariant longitudinal. L'invariance du moment magnétique est associée au mouvement de rotation cyclotronique, celle de l'invariant longitudinal au mouvement le long des lignes de champ.

5.4.3 Invariant de flux

Un troisième invariant, lié au mouvement de dérive à travers les lignes de champ, peut être identifié lorsque ce mouvement est quasi périodique : c'est l'invariant dit de flux. Soit une configuration magnétique telle que le mouvement de dérive perpendiculairement aux lignes de champ soit quasi-périodique. L'intégrale d'action associée à ce mouvement est donnée par :

$$\Phi \equiv \frac{1}{2\pi} \oint (m\mathbf{V}_D + q\mathbf{A}) \cdot d\mathbf{r}$$

Contrairement à l'invariant longitudinal, dominé par le terme cinétique, la valeur de l'invariant de flux provient presque essentiellement du terme magnétique, d'où son

nom d'invariant de flux. La démonstration de l'invariance de Φ est facilitée par le fait que le terme cinétique est petit devant le terme magnétique. Afin d'établir ce résultat, considérons le rapport du premier terme sur le deuxième où R est le rayon de section de la surface entourée par la dérive : mRV_D/qR^2B . Ce rayon est de l'ordre de grandeur du rayon de courbure, ou de la longueur de gradient, de la configuration magnétique. Ce rapport du terme cinétique sur le terme magnétique est négligeable compte tenu de l'ordering adiabatique. L'invariant de flux peut donc être exprimé comme le flux enlacé par l'orbite de dérive.

$$\frac{mRV_D}{qR^2B} \approx \left(\frac{\rho_L}{R}\right)^2 \rightarrow \Phi \approx \frac{q}{2\pi} \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

Rappelons que le flux à travers une section de surface magnétique est indépendant de la section car $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Considérons maintenant une variation temporelle de champ magnétique et montrons que l'invariant de flux reste conservé. Un champ magnétique dépendant du temps induit un champ électrique : $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$; ce champ électrique génère une dérive électrique \mathbf{V}_E (5.13) des particules chargées. Par ailleurs la variation de l'invariant de flux doit prendre en compte la variation intrinsèque du champ et la déformation du circuit à travers lequel est calculé le flux. Ce deuxième terme est un effet de bord qui se réduit à une circulation.

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{q}{2\pi} \iint \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \frac{q}{2\pi} \oint \mathbf{B} \cdot (\mathbf{V}_E \times d\mathbf{l})$$

L'équation de Maxwell-Faraday et le théorème de Stokes permettent d'exprimer la première intégrale comme une circulation.

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{q}{2\pi} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \frac{q}{2\pi} \oint \left(\mathbf{B} \times \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \right) \cdot d\mathbf{l} \rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = 0 \quad (5.27)$$

Le champ d'induction \mathbf{E} étant perpendiculaire au champ magnétique \mathbf{B} , la somme précédente est donc nulle et le flux est un invariant adiabatique.

Ces trois invariants permettent une description du mouvement des particules chargées dans des champs lentement variables à l'échelle de la fréquence cyclotronique et faiblement inhomogènes à l'échelle du rayon de Larmor.

Pour garantir l'existence de ces invariants, les trois périodes associées aux trois mouvements \mathbf{V}_c , \mathbf{V}_\parallel , \mathbf{V}_D doivent être différentes afin d'éviter toute brisure d'invariance associée à des résonances entre degrés de liberté. Une particule est donc repérée par un jeu de trois invariants (μ , J , Φ) et trois angles associés à ces actions. Ces trois angles sont respectivement la phase cyclotronique, un paramétrage entre $[0, 2\pi]$ de l'oscillation entre les deux points miroirs le long des lignes de champ, et l'angle de rotation autour de la surface magnétique.

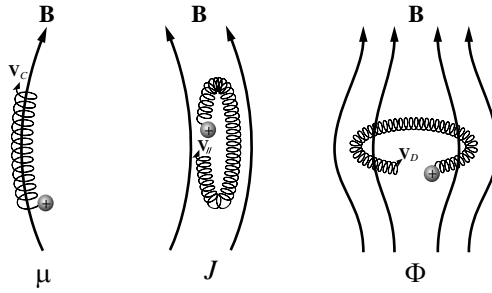


Figure 5.14 Les trois invariants adiabatiques dans un piège magnétique.

Ces trois angles effectuent trois rotations dont les périodes respectives sont la période cyclotron : T_μ . La période d’aller et retour entre les deux points miroirs le long des lignes de champ : T_J , et la période de rotation autour de la surface magnétique : T_Φ (Figure 5.14).

$$T_\mu = \oint \frac{ds_c}{V_c} = \frac{2\pi}{\omega_c}, \quad T_J = 2 \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds_{||}}{V_{||}}, \quad T_\Phi = \oint \frac{ds_D}{V_D} \quad (5.28)$$

L’invariance de (μ, J, Φ) étant garantie sous la condition $T_\mu \ll T_J \ll T_\Phi$. Le tableau (5.3) résume l’ensemble des définitions introduites dans ce paragraphe. Le contenu énergétique associé à l’intégrale d’action pour μ est à la fois cinétique et magnétique, pour J il est principalement cinétique et pour Φ essentiellement magnétique.

Tableau 5.3

Vitesse	Invariant	Définition	Période
V_c	Moment magnétique : μ	$\frac{m V_c^2}{2 B}$	$T_\mu = \oint \frac{ds_c}{V_c}$
$V_{ }$	Longitudinal : J	$m \int_{s_1}^{s_2} V_{ } ds$	$T_J = \oint \frac{ds_{ }}{V_{ }}$
V_D	Flux : Φ	$\frac{1}{2\pi} \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$	$T_\Phi = \oint \frac{ds_D}{V_D}$

L’invariant de flux est moins utile que les deux précédents, car son existence n’est garantie que pour les perturbations extrêmement lentes. Les situations réelles où il pourrait s’avérer utile pour la description du mouvement sont souvent le siège d’une turbulence basse fréquence (préservant le premier et le deuxième invariant) à des fréquences plus petites que la fréquence cyclotron et la fréquence d’oscillation entre les points miroirs, mais de l’ordre de grandeur de la fréquence d’oscillation autour de la surface de dérive. Une brisure de l’invariance adiabatique donne lieu à un transfert d’énergie du champ vers les particules. Dans le cas du premier invariant, c’est par exemple le chauffage cyclotron et dans le cas du deuxième invariant, le chauffage stochastique de Fermi.

BIBLIOGRAPHIE

► Étude des orbites des particules chargées dans les champs électromagnétiques

- T.J.M. Boyd et J.J. Sanderson, *Plasma Dynamics*, Nelson, UK, 1969.
- T.J.M. Boyd et J.J. Sanderson, *The physics of Plasmas*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.
- R.A. Cairns, *Plasma Physics*, Blackie & Son, London, UK, 1985.
- S. Chandrasekhar, *Plasma Physics*, The University of Chicago Press, Chicago, USA, 1965.
- F. Chen, *Introduction to Plasma Physics*, Plenum Press, New York, USA, 1977.
- P.C. Clemmow et J.P. Dougherty, *Electrodynamics of Particles and Plasmas*, Addison-Wesley, USA, 1969.
- V.E. Golant A.P. Zhilinsky et I.E. Sakharov, *Fundamentals of Plasma Physics*, John Wiley & Sons, 1980.
- R.J. Golston et P.H. Rutherford, *Introduction to Plasma Physics*, IOP, London, UK, 1995.
- R.D. Hazeltine et F.L. Waelbroeck, *The Framework of Plasma Physics*, Perseus Books, USA, 1998.
- N. A. Krall et A.W. Trivelpiece, *Principles of Plasma Physics*, Mc Graw-Hill, USA, 1973.
- B. Lehnert, *Dynamics of Charged Particles*, North-Holland, Amsterdam, 1964.
- A.J. Lichtenberg, *Phase-space Dynamics of Particles*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1969.
- A.J. Lichtenberg et M.A. Lieberman, *Regular and Stochastic Motion*, Springer-Ferlag, New York, USA, 1983.
- J.G. Linhart, *Plasma Physics*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1960.
- C.L. Longmire, *Elementary Plasma Physics*, Intersciences Publishers John Wiley & Sons, New York, USA, 1963.
- D.R. Nicholson, *Introduction to Plasma Theory*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1983.
- T.G. Northrop, *The Adiabatic Motion of Charged Particles*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1963.
- G. Schmidt, *Physics of High Temperature Plasmas*, Academic Press, New York, USA, 1979.

- P.A. Sturrock, *Plasma Physics, an introduction to the theory of Astrophysical, Geophysical, and Laboratory plasmas*, Cambridge University Press, UK, 1994.
- **Fusion par confinement magnétique**
- K. Miyamoto, *Plasma Physics for Nuclear Fusion*, The MIT Press, USA, 1989.
- K. Nishikawa et M. Wakatani, *Plasma Physics Basic Theory with Fusion Application*, Springer-Verlag, Berlin, RFA, 1990.
- R.B. White, *The Theory of Toroidally Confined Plasma*, Imperial College Press, London, UK, 2001.

Chapitre 6

Dynamique et structures électriques

Distiller est une belle chose. Avant tout, parce que c'est une opération pleine de lenteur, philosophique et silencieuse, qui vous occupe mais vous laisse le temps de penser à autre chose, un peu comme aller à bicyclette. C'est aussi qu'elle comporte une métamorphose...

Il sistema periodico, P. Levi.

En physique des plasmas, la réduction à un modèle fluide, suivant la hiérarchie de Bogolioubov (Tableau 2.3), peut être abordée en deux étapes.

- Une première étape consiste à considérer la dynamique d'un fluide ionique couplée à la dynamique d'un fluide électronique, puis à suivre l'évolution des différentes variables hydrodynamiques de chaque population en calculant les courants et charges sources des équations de Maxwell, résolvant ainsi la dynamique champ-matière d'une manière self-consistante. Ces modèles à deux fluides sont particulièrement bien adaptés à l'étude des structures électriques telles que les plasmas de décharges électriques et les gaines.
- Il est souvent possible d'envisager une deuxième étape et de pousser la réduction de la description en considérant un fluide unique dont l'inertie serait essentiellement due aux ions et la conductivité électrique aux électrons. C'est le modèle *magnétohydrodynamique* qui sera présenté et construit dans le chapitre suivant. Ce modèle est pertinent pour tous les phénomènes magnétiques lents et à grande échelle, il est souvent surprenant de constater que ses prédictions sont vérifiées expérimentalement même lorsque sa validité n'est que marginalement garantie.

Dans ce chapitre nous allons établir les équations fluides régissant l'évolution d'un plasma, ensuite nous étudierons des modèles fluides quasi-neutres et non-neutres.

6.1 MODÈLES CINÉTIQUES ET FLUIDES

6.1.1 Réduction fluide

Considérons la fonction de distribution à une particule $F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, puis, sur la base de cette fonction, appliquons-nous à l'étude des phénomènes rapides possédant une échelle de temps plus courte, que le temps de collision. Sur cette échelle de temps courte, la dynamique du plasma est dominée par l'effet des champs électromagnétiques : $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Chaque particule subissant la force de Lorentz résultant de l'interaction avec ces champs, le problème est de transcrire cette dynamique microscopique en terme d'évolution de la fonction de distribution $F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. Pour ce faire, calculons les déplacements lagrangiens infinitésimaux dans l'espace des phases pendant une durée δt .

$$\frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} = \mathbf{v}, \quad \frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t} = \frac{q}{m} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{q}{m} \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$

Lorsque l'incrément de temps δt tend vers zéro les termes de diffusion, $\delta \mathbf{r} \delta \mathbf{r} / \delta t$ et $\delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} / \delta t$, tendent vers zéro et l'équation aux dérivées partielles vérifiée par F peut être établie conformément à l'équation de Fokker-Planck (2.29) :

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} F - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left(\frac{q}{m} \mathbf{E} + \frac{q}{m} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) F$$

Cette dernière expression, qui exprime la variation temporelle de F comme la divergence d'un flux, est ensuite réarrangée compte tenu de l'identité

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

pour obtenir la forme classique de l'équation dite de Vlasov.

$$\text{Équation de Vlasov : } \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (6.1)$$

Soit une population de particules chargées, de masse m et de charge q , décrite par la fonction de distribution en position et vitesse $F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$; cette fonction peut être interprétée dans un cadre statistique comme le nombre moyen de particules dans un élément $d\mathbf{r}d\mathbf{v}$ autour du point \mathbf{r}, \mathbf{v} . Sur la base de cette interprétation les variables hydrodynamiques sont aisément définies. Tout d'abord, la densité de particule $n(\mathbf{r}, t)$ et la densité volumique de masse $\rho(\mathbf{r}, t) = mn(\mathbf{r}, t)$. Ensuite, le moment d'ordre un permet de définir la vitesse eulérienne du fluide $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$, qui est la vitesse moyenne de l'ensemble des particules se trouvant en \mathbf{r} à l'instant t . Enfin, le tenseur de pression $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ mesure l'écart quadratique, entre cette vitesse moyenne et les vitesses particulières.

$$\begin{aligned}
 \text{Densité : } n(\mathbf{r}, t) &\equiv \int F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \\
 \text{Vitesse : } \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) &\equiv \frac{\int \mathbf{v} F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}}{n(\mathbf{r}, t)} \\
 \text{Pression : } \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) &\equiv m \int [\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}] [\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}] F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Des moments d'ordre supérieur peuvent être définis, tels que le flux de chaleur qui est un moment d'ordre trois. Dans ce cours nous étudierons la dynamique des moments d'ordre zéro, un et deux. Nous considérons que le plasma obéit à une équation d'état isentropique (2.33) ou isotherme (2.34) reliant pression, densité et température.

Partant de l'équation de Vlasov, il est possible d'intégrer cette équation sur la variable de vitesse et de faire ainsi apparaître des couplages dynamiques entre moments.

Malheureusement, la dynamique du moment d'ordre zéro est couplée à celle du moment d'ordre un, celle du moment d'ordre un au moment d'ordre deux, etc.

C'est le problème, courant en physique, des hiérarchies d'équations couplées. Il faut donc élaborer une stratégie de coupure.

Nous considérerons que le tenseur de pression et la densité sont reliés entre eux à travers une équation locale, isotherme sous l'hypothèse d'un transport de chaleur rapide ou adiabatique sous l'hypothèse d'un transport de chaleur lent.

L'équation de continuité et l'équation du mouvement forment alors, avec l'équation d'état, un système possédant autant d'équations que d'inconnues. Nous allons donc établir successivement les équations de continuité et du mouvement ; pour ce qui concerne l'état thermodynamique cette dernière relation a été discutée à la fin du chapitre deux. Abordons, en premier lieu, le problème de l'équation de continuité ; pour ce faire, intégrons l'équation de Vlasov sur la vitesse dans l'espace des phases.

$$\int \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} \right) d\mathbf{v} = 0$$

Cette intégration fait apparaître les différentes variables hydrodynamiques conformément aux définitions précédentes. La vitesse et la position étant deux variables indépendantes, le deuxième terme de l'équation de Vlasov devient :

$$\int \mathbf{v} \cdot \frac{\partial F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{v} = \frac{\partial n(\mathbf{r}, t) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}}$$

Quant au troisième terme, il peut être réécrit sous la forme de l'intégrale de volume d'une divergence dans l'espace des phases. Le théorème d'Ostrogradsky permet de transformer cette dernière intégrale en une intégrale de flux à l'infini. La distribution de vitesse s'annule à l'infini, ce troisième terme est donc nul.

$$\int (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = \int \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot [(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) F] d\mathbf{v} = 0$$

L'équation de continuité ainsi obtenue s'écrit :

$$\text{Équation de continuité : } \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{V}) = 0 \quad (6.3)$$

Cette équation traduit la conservation du nombre de particules, de la charge et de la masse. Une deuxième équation fluide est obtenue à partir du moment d'ordre un de l'équation de Vlasov :

$$\int \mathbf{v} \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} \right) d\mathbf{v} = 0$$

Compte-tenu de la définition de la vitesse eulérienne du plasma, le premier terme s'exprime aisément comme un terme d'accélération locale, Le deuxième terme se réduit à une accélération convective et à une force de pression en exprimant le tenseur $\mathbf{v}\mathbf{v}$ comme

$$\mathbf{v}\mathbf{v} = (\mathbf{v} - \mathbf{V})(\mathbf{v} - \mathbf{V}) - \mathbf{V}\mathbf{V} + \mathbf{v}\mathbf{V} + \mathbf{V}\mathbf{v}.$$

Le calcul du moment d'ordre un

$$\int \mathbf{v}\mathbf{v} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \int \mathbf{v}\mathbf{v} F d\mathbf{v}$$

se ramène alors à l'évaluation d'un gradient de variables hydrodynamiques ; compte tenu des définitions de la vitesse et du tenseur de pression :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \int [(\mathbf{v} - \mathbf{V})(\mathbf{v} - \mathbf{V}) - \mathbf{V}\mathbf{V} + \mathbf{v}\mathbf{V} + \mathbf{V}\mathbf{v}] F d\mathbf{v} = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{m} + n\mathbf{V}\mathbf{V} \right)$$

Enfin, le dernier terme peut être intégré par parties dans l'espace des vitesses, faisant ainsi apparaître la divergence de la variable vitesse.

$$\int \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot [(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) F] d\mathbf{v} = -n(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})$$

Le résultat final est donc l'équation du mouvement, ou équation d'Euler :

$$\frac{\partial n\mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{V}\mathbf{V}) + \frac{1}{m} \nabla \cdot \mathbf{P} - \frac{q}{m} n(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) = 0$$

Cette forme de l'équation d'Euler traduit la conservation du flux d'impulsion $n\mathbf{V}\mathbf{V}$. Les forces électromagnétiques et de pression constituent un terme source de cette équation. L'équation de continuité relative à la densité permet une réécriture plus classique.

$$\text{Équation d'Euler : } \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{nm} + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (6.4)$$

Cette deuxième forme s'interprète aisément en terme de relation fondamentale de la dynamique pour une particule fluide. En général, le tenseur de pression est non diagonal ; une première approximation consiste à considérer le cas isotrope : $\mathbf{P} = P\mathbf{I}$. Lorsque le champ magnétique est tel que la pression magnétique est beaucoup plus grande que la pression cinétique, l'équation d'état couple non seulement la pression et la densité mais les trois variables : pression, densité et champ magnétique. Dans de telles situations, lorsque les collisions ne sont pas efficaces pour assurer une isotropisation rapide des vitesses, le tenseur de pression est anisotrope et la pression le long des lignes de champ est différente de la pression perpendiculairement au champ.

$$\mathbf{P} = P_{\perp} \mathbf{I} + (P_{\parallel} - P_{\perp}) \frac{\mathbf{B}\mathbf{B}}{B^2}$$

L'équation d'état adiabatique des plasmas magnétisés fait usage des deux premiers invariants adiabatiques (Tableau 5.3) et est appelée équation d'état *adiabatique double*. En effet, le moment magnétique de chaque particule, $mV_c^2/2B$, est un invariant lors des transformations lentes (adiabatiques) à l'échelle de la fréquence cyclotronique et la pression perpendiculaire est définie par : $P_{\perp} = nm \langle V_c^2 \rangle / 2$, ainsi P_{\perp}/nB est constant. L'équation d'état relative à la pression parallèle est obtenue en considérant un tube de flux, de longueur l et de section S . Le flux à travers la section de ce tube est constant : $d(BS) = 0$, le nombre de particules dans le volume du tube est aussi constant : $d(nSl) = 0$ (ceci est une conséquence des théorèmes d'Alfvén démontrés à la fin du chapitre suivant). Enfin, l'invariant longitudinal garanti l'invariance du produit de la vitesse parallèle par la longueur d'une ligne de champ $d(V_{\parallel}l) = 0$. Compte tenu de la définition de la pression parallèle, $P_{\parallel} = nm \langle V_{\parallel}^2 \rangle$, lorsque les dimensions du tube de flux sont éliminées entre ces trois équations nous obtenons les adiabatiques magnétisées.

$$\begin{aligned} \text{Adiabatique classique : } & \frac{P}{n^{\gamma}} = \frac{P_0}{n_0^{\gamma}} \\ \text{Adiabatiques magnétisées CGL : } & \frac{P_{\perp}}{nB} = \frac{P_{\perp 0}}{n_0 B_0}, \quad \frac{P_{\parallel} B^2}{n^3} = \frac{P_{\parallel 0} B_0^2}{n_0^3} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Les deux dernières relations sont dues à Chew, Goldberg et Low et sont aussi appelées adiabatiques CGL.

6.1.2 Nombre de Knudsen

Les équations fluides précédentes ont été établies sous une hypothèse d'absence de collisions et d'ionisation ; en présence de collisions et d'ionisation, des termes supplémentaires, sources de particules et de transport d'énergie et d'impulsion, sont nécessaires. En particulier, l'étude des écoulements fluides nécessite la prise en compte du transport non convectif d'impulsion associé à la viscosité (4.33) ; bien que les effets de viscosité ne soit pas dominants en physique des plasmas nous allons rappeler dans ce paragraphe la classification des différents types d'écoulements et identifier les nombres de Knudsen, Mach et Reynolds qui permettent de classifier les régimes cinétiques et fluides.

L'équation d'Euler et l'équation de continuité ne constituent pas un système fermé car le terme de pression est inconnu. Afin d'exprimer l'équation à laquelle obéit la pression, il est possible de calculer les moments d'ordre trois de l'équation de Vlasov et de définir un tenseur de flux de chaleur, mais cette équation introduira de nouvelles inconnues. Une stratégie plus efficace a donc été adoptée ; elle consiste à considérer que la valeur du tenseur de pression est le résultat d'un processus de transport de chaleur asymptotique : ce processus est soit infiniment lent (adiabatique), soit infiniment rapide (isotherme). Alors la relation pression-densité devient locale et algébrique et nous avons à faire à une équation d'état permettant de fermer le système des équations fluides. En fait, parmi les deux équations d'état, isentropique et isotherme, seule l'isentropique est recevable en l'absence de collision et toute modélisation utilisant d'autres hypothèses thermodynamiques implique l'existence de collisions.

Nous avons établi l'équation de continuité et l'équation du mouvement sur la base de l'équation cinétique de Vlasov sans collision ; il est maintenant nécessaire de s'intéresser aux couplages supplémentaires introduits par les collisions. En ce qui concerne l'équation de continuité, comme elle décrit la conservation du nombre de particules, elle reste valide avec ou sans collisions si il n'y a pas de processus d'ionisation et si il y a un phénomène d'ionisation elle doit être complétée par un terme source. Lors du processus de réduction, de la théorie cinétique vers l'hydrodynamique, il est possible d'inclure le terme de collisions de Landau (9.20), ou de Boltzmann (9.6, 9.7), dans l'équation cinétique afin d'évaluer les modifications de l'équation d'Euler ; une telle démarche est lourde et assez décevante, indiquons simplement le résultat, que nous avons déjà rencontré dans le paragraphe dédié à la théorie du libre parcours (4.33) : la prise en compte du transport collisionnel d'impulsion conduit à l'équation de Navier-Stokes,

$$nm \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + nm (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla P + nq (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \zeta \Delta \mathbf{V} \quad (6.6)$$

où ζ est le coefficient de viscosité caractérisant la diffusion de l'impulsion. En régime stationnaire, l'équation de Navier-Stokes traduit l'équilibre entre les forces de pression, d'inertie et de viscosité : $nm (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla P + \zeta \Delta \mathbf{V}$. Soit un écoulement

stationnaire caractérisé par une pression caractéristique P_0 , une vitesse typique V_0 et une densité de référence n_0 , prises en un point de référence de l'écoulement ; normalisons la pression P , la vitesse \mathbf{V} , la densité n et les longueurs \mathbf{r} , à la pression de référence P_0 , à la vitesse de référence V_0 , à la densité de référence n_0 et à une longueur caractéristique de l'écoulement L , la dimension du conduit ou de l'obstacle selon la situation :

$$P^* = \frac{P}{\gamma P_0}, n^* = \frac{n}{n_0}, \mathbf{V}^* = \frac{\mathbf{V}}{V_0}, \mathbf{r}^* = \frac{\mathbf{r}}{L}.$$

L'équation de Navier-Stokes ainsi normalisée fait apparaître deux nombres sans dimension.

$$\begin{aligned} \text{Nombre de Mach} & : M_a \equiv \frac{V_0}{\sqrt{\frac{\gamma P_0}{n_0 m}}} \approx \sqrt{\frac{[\text{Énergie cinétique}]}{[\text{Énergie interne}]}} \\ \text{Nombre de Reynolds} & : R_e \equiv \frac{mn_0 V_0 L}{\zeta} \approx \frac{[\text{Convection de l'impulsion}]}{[\text{Diffusion de l'impulsion}]} \end{aligned}$$

Les trois termes (d'inertie, de pression et de viscosité) de l'équation de Navier-Stokes, en régime stationnaire, sont donc dans les rapports $1/M_a^{-2}/R_e^{-1}$.

$$(\mathbf{V}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{V}^* + M_a^{-2} \nabla^* P^* - R_e^{-1} \Delta^* \mathbf{V}^* = \mathbf{0}$$

Nous avons démontré dans les chapitres précédents que la viscosité peut s'exprimer en fonction du libre parcours moyen λ et de la densité n par la formule (4.33) $\zeta \approx \lambda n m \langle v \rangle$ ou $\langle v \rangle$ est la vitesse d'agitation thermique ; de même nous avons établi que la pression possède une interprétation cinétique et que sa valeur est donnée par $P \approx nm \langle v^2 \rangle$. Ces deux expressions permettent alors d'exprimer le rapport du nombre de Reynolds sur le nombre de Mach comme le rapport de la dimension caractéristique de l'écoulement L sur le libre parcours moyen λ , l'inverse de ce nombre est appelé nombre de Knudsen.

$$\text{Nombre de Knudsen} : K_n \equiv \frac{M_a}{R_e} \approx \frac{\lambda}{L} = \frac{[\text{Libre parcours moyen}]}{[\text{Dimension du conduit ou de l'obstacle}]} \quad (6.7)$$

Le nombre de Mach quantifie les effets de compressibilité ; les écoulements à petit nombre de Mach peuvent être considérés comme incompressibles et les écoulements à grand nombre de Mach sont dominés par les effets de compressibilité ; ainsi, distingue-t-on les écoulements :

- subsonique : $M_a < 0,8$,
- transsonique et supersonique : $0,8 < M_a < 5$ et
- hypersonique : $M_a > 5$.

Le nombre de Reynolds quantifie la compétition entre les effets d'inertie et de viscosité. Le nombre de Reynolds étant une mesure des effets d'inertie, c'est-à-dire de l'importance du terme non-linéaire de convection de la vitesse, $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$, il constitue donc le paramètre de contrôle de la transition entre les écoulements laminaires et turbulents. Les écoulements à grand nombre de Reynolds sont dominés par l'inertie et décrit par l'équation (non-linéaire) d'Euler, les écoulements à petit nombre de Reynolds sont dominés par les phénomènes de viscosité ; ainsi, distingue-t-on :

- les écoulements en régime de Stokes : $R_e < 10$,
- les écoulements laminaires : $10 < R_e < 2000$ et
- les écoulements turbulents : $R_e > 2000 - 3000$.

Lorsque le nombre de Knudsen est plus grand que 1, l'approximation hydrodynamique, qui suppose un fort couplage entre les particules, n'est plus valable et un recours à la théorie cinétique est nécessaire pour traiter l'interaction entre les particules et les parois ainsi que les couplages faibles entre particules. Une analyse plus fine met en évidence l'existence d'un régime intermédiaire entre les régimes cinétique et hydrodynamique pour les nombres de Knudsen inférieurs à 10 mais supérieurs à 0,1. Trois régimes d'écoulements (gazeux) sont donc à considérer :

- les écoulements continus : $K_n < 10^{-1}$,
- le régime de transition : $10^{-1} < K_n < 10$ et
- le régime moléculaire : $10 < K_n < +\infty$.

La classification des écoulements stationnaires est en fait plus simple, et plus subtile, que ces vingt-sept cas ($3 \times 3 \times 3$ au maximum), car certaines de ces inégalités sont incompatibles et l'ordering de classification fait aussi intervenir l'épaisseur des couches limites où se manifeste la viscosité. Pour établir une classification globale des écoulements, considérons les différentes échelles de longueurs associées à un écoulement et identifions les frontières d'inversion des ordering dans le plan (M_a, R_e) représenté sur la figure 6.1. Dans ce plan, le régime moléculaire correspond à la région A où $K_n = M_a/R_e \approx \lambda/L > 1$. Considérons maintenant un écoulement libre en régime continu autour d'un obstacle de dimension caractéristique L (cette longueur peut aussi être la taille d'un conduit pour un écoulement forcé), la viscosité se manifeste au voisinage de cet obstacle sur une épaisseur de l'ordre de grandeur de la taille de la couche limite $\delta \sim L/\sqrt{R_e}$. Pour que le milieu soit considéré comme continu il faut que le libre parcours moyen soit plus petit que l'épaisseur de la couche limite, cette condition se traduit par $M_a < \sqrt{R_e}$ et définit la zone C. Le régime de Stokes est un régime d'écoulement continu, donc $\lambda < L$, mais, où la viscosité domine l'inertie, c'est-à-dire $\delta > L$; la région D du diagramme 6.1 est donc définie par : $R_e < 1$, $M_a < R_e$.

La région B, telle que $\delta < L$, $\lambda < L$, $\lambda > \delta$, est intermédiaire entre les régimes fluide continu et cinétique ; cette région B se distingue par un transfert d'impulsion

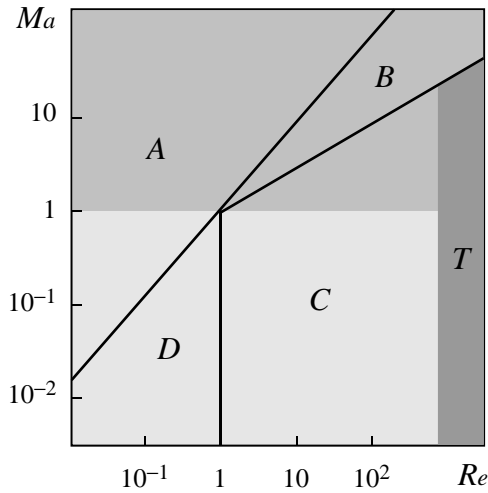


Figure 6.1 Régimes fluides et cinétiques en hydrodynamique et aérodynamique.

cinétique dans la couche limite, la description de ce régime nécessite l'introduction de coefficients d'accommodation et de transfert spécifiques et l'on parle alors de glissement. Enfin nous avons aussi reporté la zone turbulente T . Les zones claires et sombres correspondent aux régimes subsonique et supersonique. Le tableau (6.1) résume les frontières et domaines de cette classification.

Tableau 6.1

Régimes	δ, λ, L	Ma, Re, Kn
Moléculaire : A	$\lambda > L$	$Kn > 1, Ma > Re$
Glissement : B	$\delta < L, \lambda < L, \lambda > \delta$	$Re > 1, \sqrt{Re} < Ma < Re$
Continue : C	$\delta < L, \lambda < L, \lambda < \delta$	$Kn < 1, Re > 1, Ma < \sqrt{Re}$
Stokes : D	$\delta > L, \lambda < L$	$Re < 1, Ma < Re$
Turbulent : T	$\delta < L, \lambda < L, \lambda < \delta$	$Re > 2000 - 3000$

Les trois équations de base d'un modèle hydrodynamique sont donc :

- l'équation de conservation du nombre de particules, traduisant aussi la conservation de la masse et de la charge (2.30, 6.3),
- l'équation de conservation de l'impulsion, Euler ou Navier-Stokes (2.32, 6.4, 6.6), et
- l'équation d'état thermodynamique (6.5).

Mais, en physique des plasmas, nous avons à faire à un modèle à deux fluides et un terme supplémentaire, le transfert d'impulsion entre le fluide électronique et le fluide ionique, $-nm(\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i)$, caractérisé par la fréquence de

transfert d'impulsion ν (4.21), est plus important que les transferts dus à la viscosité.

En effet $\langle v \rangle / \nu \approx \lambda$ le libre parcours moyen et $\zeta \approx \lambda n m \langle v \rangle$ (4.33), ainsi :

$$nm\nu |\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i| \approx nm\nu V = \frac{nm \langle v \rangle V}{\lambda} \gg \frac{nm \langle v \rangle V}{\lambda} K_n^2 = \frac{nm \langle v \rangle V \lambda}{L^2} = \zeta \frac{V}{L^2} \approx \zeta |\Delta \mathbf{V}|$$

Bien entendu, si les deux populations électronique et ionique évoluent à la même vitesse, $\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i = \mathbf{0}$, alors, la friction électron-ion disparaît et la viscosité, principalement d'origine ionique, ou la conductivité thermique, principalement d'origine électronique, deviennent les processus collisionnels (irréversibles, dissipatifs) dominants.

Nous avons déjà étudié l'interaction électron-ion dans le chapitre consacré aux collisions, et établi la relation $\nu = n\sigma_1 v$. Compte tenu de ce résultat, il est inutile d'évaluer les moments de l'équation cinétique collisionnelle et nous pouvons directement inclure le terme de friction électron-ion comme une densité volumique de forces supplémentaires dans chacune des équations du mouvement.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}_e}{\partial t} + (\mathbf{V}_e \cdot \nabla) \mathbf{V}_e &= -\frac{\nabla P_e}{n_e m_e} - \frac{e}{m_e} (\mathbf{E} + \mathbf{V}_e \times \mathbf{B}) - \nu (\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i) \quad (6.8) \\ \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial t} + (\mathbf{V}_i \cdot \nabla) \mathbf{V}_i &= -\frac{\nabla P_i}{n_i m_i} + \frac{Ze}{m_i} (\mathbf{E} + \mathbf{V}_i \times \mathbf{B}) - \nu (\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_e) \end{aligned}$$

Ces deux équations du mouvement, électronique et ionique, achèvent la construction du modèle fluide d'un plasma totalement ionisé. En fait, dans le cas fortement ionisé il est plus pratique de travailler avec la somme et la différence de ces deux équations ; ce modèle à un fluide magnétohydrodynamique sera développé dans le chapitre suivant.

Dans le cas d'un plasma faiblement ionisé, si les collisions ion-neutre et électron-neutre dominent les collisions électron-ion (ce qui est souvent le cas), la friction est due à la population neutre.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}_e}{\partial t} + (\mathbf{V}_e \cdot \nabla) \mathbf{V}_e &= -\frac{\nabla P_e}{n_e m_e} - \frac{e}{m_e} (\mathbf{E} + \mathbf{V}_e \times \mathbf{B}) - \nu_{en} (\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_n) \quad (6.9) \\ \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial t} + (\mathbf{V}_i \cdot \nabla) \mathbf{V}_i &= -\frac{\nabla P_i}{n_i m_i} + \frac{Ze}{m_i} (\mathbf{E} + \mathbf{V}_i \times \mathbf{B}) - \nu_{in} (\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_n) \end{aligned}$$

Lorsque les gradients de vitesse ou de température sont importants, il est nécessaire d'inclure des processus de transport d'énergie et d'impulsion par diffusion.

Mais, l'effet principal des collisions, dans le cadre de la modélisation fluide des plasmas, demeure le terme de friction entre les populations ionique, électronique et neutre.

Il peut sembler, en première analyse, que les modèles fluides possèdent un potentiel descriptif et prédictif restreint à des situations particulières ; en fait, hormis pour les cas des résonances ondes-particules et des grands nombres de Knudsen, les modèles fluides sont souvent suffisants en physique des plasmas.

6.2 MOBILITÉ, DIFFUSION, IONISATION

Les termes $\partial \mathbf{V} / \partial t$ dans (6.9) sont pertinents pour l'étude des phénomènes transitoires et instationnaires, par contre, pour l'analyse des phénomènes quasi-stationnaires ces termes peuvent être négligés, et la description fluide des flux de matière dans les plasmas faiblement ionisés se réduit alors à la prise en compte des phénomènes de diffusion et mobilité. Ces phénomènes ont déjà été identifiés dans le paragraphe consacré à la théorie de la conduction de Lorentz (2.9) et dans le paragraphe dédié à la théorie du libre parcours moyen (4.34) ; nous allons dériver ces équations de transport de matière dans un cadre fluide, ainsi la convergence de ces résultats, quelque soit le modèle, fluide, cinétique ou phénoménologique, leur assure un très large domaine de validité.

6.2.1 Mobilité et diffusion

Considérons la dynamique lente d'une population d'électrons (d'ions), de charge q et de masse m , couplée à une population neutre, ce couplage étant décrit par la fréquence de transfert d'impulsion ν . La vitesse des neutres, \mathbf{V}_n , est prise égale à zéro. Le terme inertiel $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$ dans l'équation (6.9) peut être négligé en régime subsonique continu car la vitesse \mathbf{V} vérifie alors $V \ll \langle v \rangle / K_n$, et :

$$\nu V = \frac{\langle v \rangle V}{\lambda} \gg \frac{V^2}{\lambda} K_n = \frac{V^2}{L} \approx |(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}|$$

Ainsi, en l'absence de champ magnétique, nous obtenons le bilan des densités volumiques de forces : $-\nabla P + nq\mathbf{E} - nm\nu\mathbf{V} = \mathbf{0}$, qui traduit l'équilibre entre les forces de pression, de Coulomb et de friction. La vitesse du fluide électronique est donc la somme de deux termes : $\mathbf{V} = q\mathbf{E}/m\nu - \nabla P/nm\nu$. L'échelle de temps étant longue devant l'échelle collisionnelle une équation d'état isotherme est appropriée : $P = nkT$. La vitesse de la population considérée est la somme d'un terme de conduction plus un terme de diffusion :

$$\mathbf{V} = \mu\mathbf{E} - D\frac{\nabla n}{n}$$

où nous avons introduit le coefficient de mobilité μ et le coefficient de diffusion D .

$$\mu = \frac{q}{mv}, \quad D = \frac{kT}{mv} \quad (6.10)$$

Ces deux coefficients sont reliés par la relation d'Einstein :

$$\mu = \frac{q}{kT} D \quad (6.11)$$

L'équation de continuité (pour les temps longs) peut alors être mise à profit pour exprimer la dynamique de la densité.

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\mu \nabla \cdot n \mathbf{E} + D \nabla^2 n \quad (6.12)$$

Nous avons supposé que le coefficient de mobilité et le coefficient de diffusion étaient indépendants de la position. La densité $n(\mathbf{r}, t)$ obéit donc à une équation de Fokker-Planck, le terme de diffusion est appelé loi de Fick. Il est d'usage de parler d'équation de mobilité-diffusion plutôt que d'équation de Fokker-Planck. L'importance relative des termes de mobilité et de diffusion permet de distinguer deux régimes d'écoulements collisionnels dans les plasmas.

- Lorsque (q fois) la chute de potentiel caractéristique du plasma est plus importante que l'énergie d'agitation thermique, $q\delta\phi > kT$, alors le terme de mobilité est dominant comparé au terme de diffusion qui peut donc être négligé. Ce type de modélisation sera utilisé dans l'étude des décharges électriques en régime basse pression.
- Si (q fois) la chute de potentiel caractéristique du plasma est plus petite que l'énergie d'agitation thermique, $q\delta\phi < kT$, alors le processus de diffusion domine le transport de charge et la mobilité est négligeable.

$$\text{Mobilité} : q\delta\phi > kT \rightarrow \frac{\mu\delta\phi}{L} > \frac{D}{L} \rightarrow -\mu\nabla\phi > D\frac{\nabla n}{n} \rightarrow \mathbf{V} = \mu\mathbf{E}$$

$$\text{Diffusion} : q\delta\phi < kT \rightarrow \frac{\mu\delta\phi}{L} < \frac{D}{L} \rightarrow -\mu\nabla\phi < D\frac{\nabla n}{n} \rightarrow \mathbf{V} = -D\frac{\nabla n}{n}$$

Considérons l'équation (6.12) en régime stationnaire, $\partial n/\partial t = 0$, pour un champ électrique dérivant du potentiel ϕ ; la solution de cette équation, présentant un flux nul, est donnée par :

$$\mu n \nabla \phi + D \nabla n = 0 \rightarrow \frac{n(\mathbf{r})}{n(\mathbf{r}')} = \exp \left[-q \frac{\phi(\mathbf{r}') - \phi(\mathbf{r})}{kT} \right]$$

cette solution n'est autre qu'une distribution Boltzmannienne de densité (2.21).

Les relations qui viennent d'être établies concernent les situations où le plasma n'est pas magnétisé. Lorsqu'un champ magnétique statique est appliqué au plasma il nous

faut considérer l'influence du terme de Laplace :

$$-\nabla P + nq\mathbf{E} + nq\mathbf{V} \times \mathbf{B} - nm\nu\mathbf{V} = \mathbf{0}.$$

Ce bilan des forces auquel est soumis le fluide électronique, ou ionique, permet d'étudier les phénomènes de mobilité et diffusion magnétisées et d'établir ainsi l'équation de transport de la matière en présence d'un champ statique. Une telle étude est intéressante car elle permet de préciser les conditions du confinement par un champ magnétique. La relation $-\nabla P + nq\mathbf{E} + nq\mathbf{V} \times \mathbf{B} - nm\nu\mathbf{V} = \mathbf{0}$ peut être considérée comme une équation algébrique d'inconnu \mathbf{V} .

$$\mathbf{V} = \mu\mathbf{E} + \mu\mathbf{V} \times \mathbf{B} - D\frac{\nabla n}{n} \quad (6.13)$$

Formons les produits scalaire et vectoriel de la vitesse \mathbf{V} avec le champ magnétique \mathbf{B} .

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \times \mathbf{B} &= \mu\mathbf{E} \times \mathbf{B} + \mu(\mathbf{V} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} - \mu B^2\mathbf{V} - D\frac{\nabla n}{n} \times \mathbf{B} \\ \mathbf{V} \cdot \mathbf{B} &= \mu\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} - D\frac{\nabla n}{n} \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

Ces deux équations permettent d'exprimer le produit vectoriel du deuxième membre de l'équation (6.13) et, ainsi, d'obtenir la vitesse fluide \mathbf{V} en fonction des champs électrique et magnétique et du gradient de densité.

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \frac{\mu}{1 + \frac{\omega_c^2}{\nu^2}}\mathbf{E} + \frac{\omega_c}{\nu} \frac{\mu}{1 + \frac{\omega_c^2}{\nu^2}}\mathbf{E} \times \mathbf{b} + \frac{\omega_c^2}{\nu^2} \frac{\mu}{1 + \frac{\omega_c^2}{\nu^2}}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b} \\ &\quad - \frac{D}{1 + \frac{\omega_c^2}{\nu^2}} \frac{\nabla n}{n} - \frac{\omega_c}{\nu} \frac{D}{1 + \frac{\omega_c^2}{\nu^2}} \frac{\nabla n}{n} \times \mathbf{b} - \frac{\omega_c^2}{\nu^2} \frac{D}{1 + \frac{\omega_c^2}{\nu^2}} \left(\frac{\nabla n}{n} \cdot \mathbf{b} \right) \mathbf{b} \end{aligned}$$

où $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ et $\omega_c = qB/m$ (5.4). Il est d'usage d'exprimer $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\parallel} + \mathbf{V}_{\perp}$ en fonction des composantes parallèles et perpendiculaires du champ électrique : $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp}$ et du gradient de densité : $\nabla = \nabla_{\parallel} + \nabla_{\perp}$, la direction du champ magnétique \mathbf{b} étant prise comme axe de référence : $\mathbf{E}_{\parallel} = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}$, $\mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{b} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{b})$, $\nabla_{\parallel} = \mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \nabla)$, $\nabla_{\perp} = -\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \times \nabla)$, $\mathbf{V}_{\parallel} = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}$, $\mathbf{V}_{\perp} = \mathbf{b} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{b})$.

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\parallel} &= \mu_{\parallel}\mathbf{E}_{\parallel} - D_{\parallel}\frac{\nabla_{\parallel}n}{n} \\ \mathbf{V}_{\perp} &= \mu_{\perp}\mathbf{E}_{\perp} - D_{\perp}\frac{\nabla_{\perp}n}{n} + \mu_{\times}\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{b} - D_{\times}\frac{\nabla_{\perp}n}{n} \times \mathbf{b} \quad (6.14) \end{aligned}$$

La vitesse d'écoulement d'un plasma magnétisé résulte donc de la combinaison de six processus de transport dans trois directions de référence : (i) la mobilité et la diffusion le long des lignes de champ magnétique (\parallel) qui ne sont pas altérées par la force

de Laplace, (ii) la mobilité et la diffusion dans la direction du champ électrique et perpendiculairement au champ magnétique (\perp) et (iii) la mobilité et la diffusion dans la direction mutuellement perpendiculaire aux champs électrique et magnétique (\times), ce dernier terme n'est autre que l'effet Hall ; le facteur $\frac{\omega_c}{\nu}$ est appelé le paramètre de Hall.

$$\begin{aligned}
 \text{Parallèle} & : \mu_{\parallel} = \mu = \frac{q}{m\nu}, & D_{\parallel} = D = \frac{kT}{m\nu} \\
 \text{Perpendiculaire} & : \mu_{\perp} = \frac{1}{1 + \frac{\omega_c^2}{\nu^2}} \mu, & D_{\perp} = \frac{1}{1 + \frac{\omega_c^2}{\nu^2}} D \\
 \text{Hall} & : \mu_{\times} = \frac{1}{\frac{\nu}{\omega_c} + \frac{\omega_c}{\nu}} \mu, & D_{\times} = \frac{1}{\frac{\nu}{\omega_c} + \frac{\omega_c}{\nu}} D \quad (6.15)
 \end{aligned}$$

Le transport de matière dans un plasma magnétisé peut apparaître complexe, aussi, une analyse de l'origine physique des différents termes est nécessaire. L'origine des termes de Hall est à rechercher dans la théorie des orbites développée au chapitre cinq. En effet, dans ce chapitre nous avons identifié la vitesse de dérive de champ croisé \mathbf{V}_E (5.13) et le courant diamagnétique (5.21), $\mathbf{J}_{DM} = -\nabla_{\perp} P \times \mathbf{b}/B$, qui permet de définir la vitesse diamagnétique : $\mathbf{V}_{DM} \equiv \mathbf{J}_{DM}/nq$.

$$\mathbf{V}_E \equiv \frac{\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{b}}{B}, \quad \mathbf{V}_{DM} \equiv -\frac{kT}{qB} \frac{\nabla_{\perp} n}{n} \times \mathbf{b}$$

La vitesse diamagnétique \mathbf{V}_{DM} , associé au courant diamagnétique \mathbf{J}_{DM} , résulte de la non compensation des courants cyclotroniques en présence d'un gradient de densité ou d'un gradient de température ; cet effet est illustré par la figure 6.2.

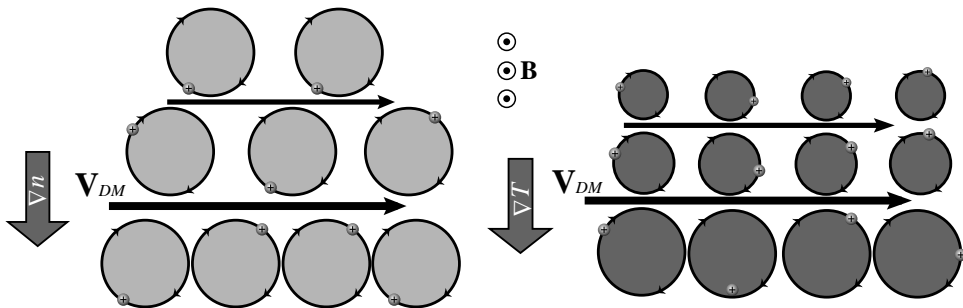


Figure 6.2 Origine du flux de Hall dans un champ magnétique.

Les termes croisés de mobilité et de diffusion peuvent être exprimés en fonction des effets de dérive et de magnétisation ; la vitesse fluide s'exprime alors comme :

$$\mathbf{V}_\perp = \frac{1}{1 + \frac{\omega_c^2}{\nu^2}} \left(\mu \mathbf{E}_\perp - D \frac{\nabla_\perp n}{n} \right) + \frac{1}{1 + \frac{\nu^2}{\omega_c^2}} (\mathbf{V}_E + \mathbf{V}_{DM}) \quad (6.16)$$

Cette forme met en lumière l'origine physique des termes de Hall ; ces termes de Hall ne représentent pas un nouvel effet, mais simplement la modification par les collisions d'effets orbitaux et diamagnétiques étudiés précédemment.

L'origine du terme $\mu \mathbf{E}_\perp - D \nabla_\perp n/n$ est illustré par la figure 6.3, les collisions modifient la dérive de champ croisé et ainsi une particule suit soit le champ électrique \mathbf{E}_\perp soit la direction $\mathbf{E}_\perp \times \mathbf{b}$, la pondération relative de ces deux tendances est donnée par le paramètre de Hall.

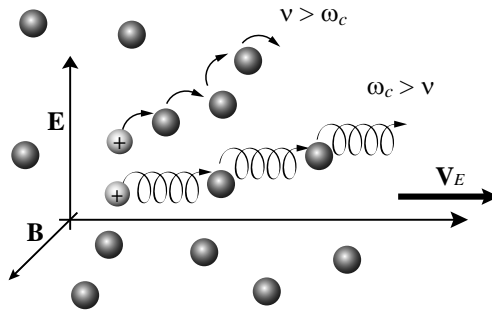


Figure 6.3 Origine du flux transverse dans un champ magnétique.

Il est particulièrement instructif de considérer les deux limites de forte et faible collisionnalité, $\omega_c \ll \nu$ et $\omega_c \gg \nu$. À champ magnétique donné, c'est-à-dire à fréquence cyclotronique fixée, ces deux limites : $\nu \rightarrow +\infty$ et $\nu \rightarrow 0$, conduisent à des comportements isotropes et quasi orbitaux :

- lorsque $\nu \rightarrow +\infty$: $\mu_\times \rightarrow 0$, $\mu_\perp \rightarrow \mu$, $D_\times \rightarrow 0$ et $D_\perp \rightarrow D$. La réponse du plasma redevient isotrope et l'effet des collisions domine l'effet du champ magnétique. Le plasma se comporte comme un fluide isotrope et l'effet du champ magnétique est négligeable.

$$\mathbf{V} \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} \mu \mathbf{E} - D \frac{\nabla n}{n} \quad (6.17)$$

- lorsque $\nu \rightarrow 0$: $\mu_\perp \rightarrow 0$ et $D_\perp \rightarrow 0$; la valeur du flux de Hall se rapproche de la valeur de la vitesse de dérive de champ croisé et de la vitesse diamagnétique.

$$\mathbf{V}_\perp \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} \mathbf{V}_E + \mathbf{V}_{DM} \quad (6.18)$$

Ce régime de faible collisionnalité est donc conforme aux résultats établis lors de l'étude des orbites en régime adiabatique.

6.2.2 Loi de Paschen

Jusqu'à présent nous avons considéré la dynamique d'un plasma déjà formé et nous avons ignoré les processus d'ionisation dans l'équation de continuité. Dans ce paragraphe, nous allons étudier les décharges électriques où l'ionisation et le transport de charges s'effectuent de concert, sous l'effet d'un champ électrique appliqué statique.

La figure 6.4 illustre les principales caractéristiques d'une décharge électrique ; dans un récipient, fermé (souvent transparent pour observer, voire utiliser, les effets lumineux annexes), un gaz est maintenu à une faible pression P et un champ électrique est généré à l'aide d'un générateur de tension, entre une cathode et une anode séparées par une distance d . La physique des décharges électriques s'attache à l'analyse de l'ensemble des phénomènes électriques se déroulant dans le récipient et en particulier à l'étude la relation courant-tension $U(I)$. Cette relation dépend de la nature du gaz, de sa pression P et de la distance entre les électrodes d ; néanmoins, l'allure de la caractéristique $U(I)$ est universelle.

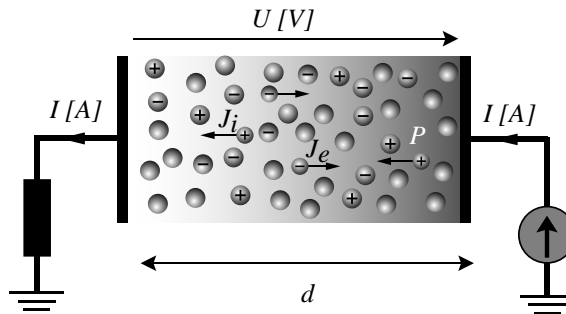


Figure 6.4 Paramètres d'une décharge électrique.

La figure 6.5 présente cette caractéristique courant-tension universelle pour les décharges électriques dans des conditions typiques (quelques dizaines de centimètres pour l'espace inter-électrodes, un gaz usuel et des pressions inférieures à la pression atmosphérique). Plusieurs zones doivent être distinguées :

- La partie très basse tension, A, où le début de la courbe correspond à une simple collecte des charges déjà présentes dans le gaz et renouvelées par les agents énergétiques naturels de l'environnement (1.2) ; la faible croissance du courant en fonction de la tension sature rapidement car le courant est limité par la production d'espèces chargées par ces agents énergétiques. Puis, à plus haute tension, sous l'effet de l'accélération électrique, le phénomène d'ionisation par impact électronique entre en jeu et résulte en une multiplication des charges, donc en une

croissance du courant, les deux processus de Townsend α et γ , identifiés au chapitre quatre (4.38, 4.41), sont alors responsables d'une croissance exponentielle du courant I en fonction de la tension U .

- Cette production massive d'ions et d'électrons par accélération électrique et impact sur les atomes de gaz, atteint ensuite un seuil car les effets de charges d'espace et d'écrantage étudiés au chapitre trois deviennent dominant, c'est la zone B , électriquement instable, donc représentée par une bande sombre, le phénomène observé est appelé *transition de la décharge sombre de Townsend vers la décharge luminescente*.
- En effet, la zone C présente les caractéristiques d'**une décharge haute tension bas courant** et se singularise par une forte émissivité dans les domaines optique et ultra-violet, ainsi est définie la décharge luminescente ou *glow*, sa structure spatiale est complexe et ses applications multiples.
- Enfin, une transition vers l'arc électrique est observée pour les fort courants, c'est la zone D ; l'arc est une **décharge électrique basse tension fort courant** (E). La *transition glow-arc* trouve son origine dans les phénomènes thermiques, au niveau de la cathode où l'émission thermoionique prend le relais de l'émission secondaire et une tendance à l'équilibre thermodynamique entre le gaz neutre et le plasma apparaît. Les applications de la décharge d'arc sont aussi nombreuses et variées.

Il n'existe pas de modèle global décrivant analytiquement cette caractéristique universelle, nous allons construire des modèles fluides et présenter un ensemble de résultat relatif à la partie A de cette caractéristique.

Nous allons étudier une hiérarchie de modèles de décharges électriques de complexité croissante ($\alpha = 0$ & $\gamma = 0$ puis $\alpha \neq 0$ & $\gamma = 0$ et $\alpha \neq 0$ & $\gamma \neq 0$); dans les trois modèles décrits et analysés le champ électrique appliqué sera supposé tel que la chute de potentiel typique soit plus grande que l'énergie d'agitation thermique : $q\phi \gg kT \rightarrow \mu\phi/L \gg D/L \rightarrow -\mu\mathbf{E} \gg D\nabla n/n$; nous négligerons donc les processus de diffusion et les courants électroniques ($-$) et ioniques ($+$) seront essentiellement des courants de conduction. Le champ et la mobilité étant supposés constants l'inconnue sera la distribution spatiale de ces courants électronique $J_-(x)$ et ionique $J_+(x)$ dans le plasma. Pour déterminer ces deux inconnues nous utiliserons deux équations du type (2.10) : $\nabla \cdot \mathbf{J}_\pm = S_\pm(\mathbf{r}, t)$, traduisant le bilan de charges en régime stationnaire compte tenu de l'ionisation.

Soit une décharge électrique constituée d'un système de deux électrodes sous tension, une cathode située en $x = 0$ et une anode située en $x = d$ (Figure 6.6). Un processus d'ionisation, la photoionisation induite par un rayonnement ultra-violet par exemple, génère entre ces deux électrodes, de façon uniforme dans l'espace et continue dans le temps, une densité volumique de charges électroniques par unité de temps : $S_- = -J_e/d$ ($[C \cdot m^{-3} \cdot s^{-1}]$, coulombs par mètre cube et par seconde) et une densité volumique de charges ioniques par unité de temps :

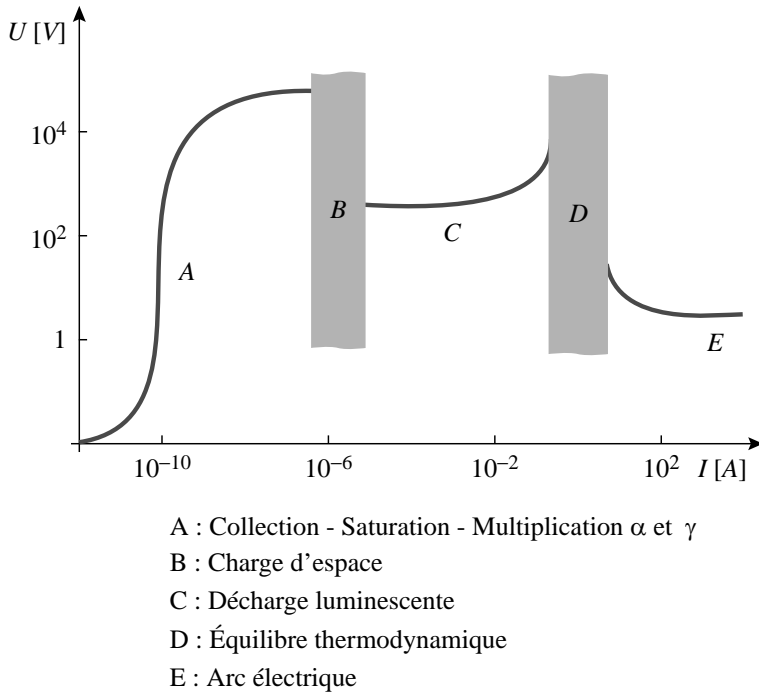


Figure 6.5 Caractéristique $U(I)$ d'une décharge électrique.

$S_+ = J_e/d$ ($[C \cdot m^{-3} \cdot s^{-1}]$, coulombs par mètre cube et par seconde). Ces charges sont collectées par les électrodes car le champ électrique transporte les ions vers la cathode et les électrons vers l'anode.

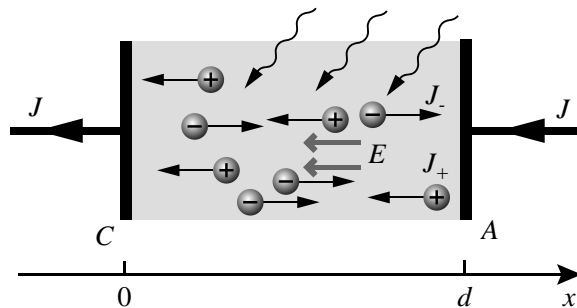


Figure 6.6 Collection de charges, sans multiplication.

Un courant $\mathbf{J}(x) = -J(x)\mathbf{e}_x = -J_-(x)\mathbf{e}_x - J_+(x)\mathbf{e}_x$ se développe ainsi (nous avons défini $J(x)$ ainsi pour obtenir $J_{\pm}(x) > 0$ tout en prenant le mouvement électronique suivant \mathbf{e}_x comme sens de référence). Ce modèle décrit donc le phénomène de collection de charges, sans multiplication, sans charge d'espace, résultant d'une production en volume. Les courants électronique et ionique obéissent à l'équation de

continuité complétée par les termes sources : S_- et S_+ .

$$\frac{dJ_-}{dx} = \frac{J_e}{d}, \quad \frac{dJ_+}{dx} = -\frac{J_e}{d}$$

Les conditions aux limites au niveau de la cathode et de l'anode sont données par : $J_-(0) = 0$, $J_+(d) = 0$. La distribution de courant est alors obtenue par simple quadrature.

$$J_-(x) = J_e \frac{x}{d}, \quad J_+(x) = J_e \left(1 - \frac{x}{d}\right) \rightarrow J = J_-(x) + J_+(x) = J_e$$

Le courant total dans la décharge est constant car le régime est stationnaire et il ne peut y avoir d'accumulation de charges ; mais, il est de *nature ionique au niveau de la cathode et de nature électronique au niveau de l'anode* (Figure 6.7). Notons que, si le processus d'ionisation disparaît : $S_- = 0$, le courant s'annule : $J_e = 0 \rightarrow J = 0$; en conséquence, cette décharge est non-autonome car une source d'ionisation extérieure est nécessaire à l'entretien du courant.

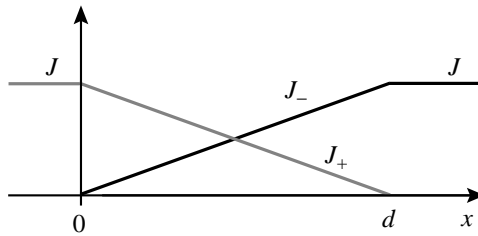


Figure 6.7 Courants ionique et électronique dans une décharge en régime de collection.

Reprenons le même problème, mais, supposons le champ électrique suffisamment intense pour induire une ionisation du type α (4.38, 4.30), c'est-à-dire une multiplication électronique significative (Figure 6.8).

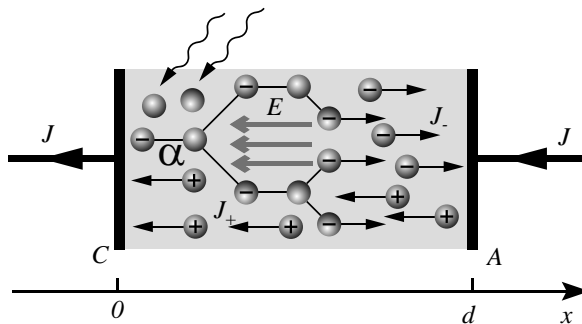


Figure 6.8 Collection avec multiplication α dans une décharge non-autonome.

Les conditions aux limites ne sont pas modifiées par la multiplication électronique : $J_-(0) = 0$, $J_+(d) = 0$. Par contre, les équations de conservation et production

des courants ionique et électronique doivent prendre en compte la multiplication électronique décrite par le premier coefficient de Townsend α (4.38).

$$\frac{dJ_-}{dx} = \alpha J_-(x) + \frac{J_e}{d}, \quad \frac{dJ_+}{dx} = -\alpha J_-(x) - \frac{J_e}{d} \quad (6.19)$$

La distribution spatiale des courants ionique et électronique n'est plus linéaire mais exponentielle (Figure 6.9).

$$J_-(x) = \frac{J_e}{\alpha d} [\exp(\alpha x) - 1], \quad J_+(x) = \frac{J_e}{\alpha d} [\exp(\alpha d) - \exp(\alpha x)]$$

Néanmoins, la décharge reste non-autonome car si le processus d'ionisation extérieur disparaît, le courant s'annule : $J_e = 0 \rightarrow J = 0$:

$$J = J_-(x) + J_+(x) = J_e \left(\frac{\exp(\alpha d) - 1}{\alpha d} \right)$$

Compte tenu de la différence de mobilité entre électrons et ions, la densité ionique doit être supérieure à la densité électronique car la vitesse ionique est inférieure à la vitesse électronique (Figure 6.9) ; il serait donc nécessaire, pour valider ce modèle, d'étudier l'impact des courants de diffusion au voisinage de l'anode ainsi que l'effet de la charge d'espace positive.

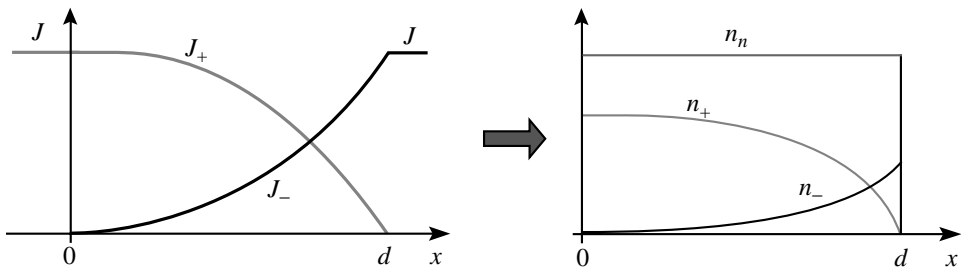


Figure 6.9 Courants et densités ionique et électronique dans une décharge non-autonome avec multiplication électronique ; n_+ , n_- et n_0 sont respectivement les densités des ions, des électrons et des neutres.

Considérons, enfin, l'effet de l'émission secondaire induite par les impacts ioniques au niveau de la cathode, ce processus est décrit par le deuxième coefficient de Townsend γ , défini par la relation (4.41). Dans ce modèle de décharge, prenant en compte la collection, la multiplication α et l'émission secondaire γ avec une production primaire en volume $S_{\pm} = \pm J_e/d$, les courants obéissent au bilan de charge de l'équation (6.19) ; par contre les conditions aux limites sont modifiées : $J_-(0) = \gamma J_+(0)$,

$J_+(d) = 0$. La structure spatiale des écoulements ioniques et électronique reste exponentielle,

$$J_-(x) = \frac{J_e}{\alpha d} [\exp(\alpha x) - 1] + \gamma J_+(0) \exp(\alpha x)$$

$$J_+(x) = \frac{J_e}{\alpha d} [\exp(\alpha d) - \exp(\alpha x)] + \gamma J_+(0) [\exp(\alpha d) - \exp(\alpha x)]$$

mais, le courant total dans la décharge présente une singularité :

$$J = J_-(x) + J_+(x) = \frac{J_e [1 + \gamma] [\exp(\alpha d) - 1]}{\alpha d [1 - \gamma [\exp(\alpha d) - 1]}}$$

en effet, le dénominateur $1 - \gamma [\exp(\alpha d) - 1]$ peut s'annuler.

Si tel est le cas la décharge devient autonome car si le processus d'ionisation extérieur disparaît, le courant ne s'annule pas : $J_e = 0 \rightarrow J \neq 0$, la condition d'autonomie d'une décharge constitue le critère de Townsend : $\exp \alpha d \geq 1 + \frac{1}{\gamma}$ déjà identifié dans le chapitre consacré aux collisions (4.43).

Avant d'entreprendre l'analyse de ce critère, résumons l'apport de l'étude de ces modèles. Nous avons successivement étudié les cas : $\alpha = 0$ & $\gamma = 0$, puis : $\alpha \neq 0$ et $\gamma = 0$, et enfin : $\alpha \neq 0$ et $\gamma \neq 0$; cet ensemble de modèles est pertinent pour comprendre la partie bas courant de la caractéristique universelle des décharges électriques (Figures 6.5 et 6.10) ; la partie décrivant la croissance du courant de collection en fonction de la tension (U) nécessiterait un modèle prenant en compte explicitement le transport des charges, mais la partie révélant la saturation et la multiplication peut être comprise sur la base des modèles précédents.

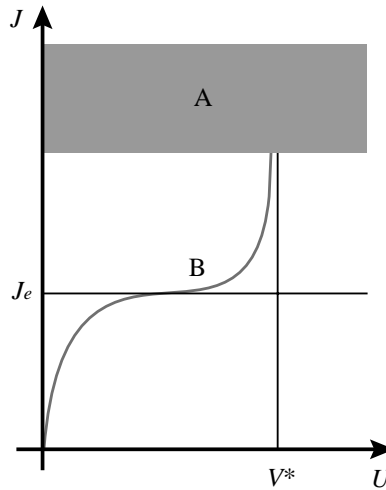
Le troisième modèle ($\alpha \neq 0$ et $\gamma \neq 0$) révèle l'existence d'un potentiel disruptif $U = V^*$ correspondant au critère de Townsend $\exp [\alpha (V^*/d) d] = 1 + \frac{1}{\gamma}$; au-delà de ce seuil les effets de charge d'espace modifient considérablement la nature des modèles et la compréhension de la transition vers la décharge luminescente est un problème complexe qui ne sera pas abordé ici.

En résumé, nous avons identifié et étudié quatre régimes de décharges, le tableau (6.2) reprend la hiérarchie de ces modèles, lorsque le critère (la condition) de Townsend est satisfait (vérifiée) la décharge est qualifiée d'autonome et le courant est alors limité par le circuit extérieur.

Attachons-nous maintenant à l'étude des dépendances paramétriques du critère de Townsend. En effet, nous avons obtenu l'expression du coefficient α en fonction de la pression des neutres P et du champ électrique V/d au chapitre quatre, identité (4.40). Sur la base de cette expression du premier coefficient de Townsend il est

possible d'exprimer la tension de claquage en fonction du produit Pd .

$$\alpha (V/d, P) d = \log \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) \rightarrow APd \exp \left(-\frac{BPd}{V} \right) = \log \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right)$$



A : Charge d'espace
B : Collection, Saturation, Multiplication

Figure 6.10 Partie A de la figure 6.5.

Tableau 6.2

Régimes	Courants J/J_e
Collection	~ 1
α Multiplication électronique	$\sim \exp(\alpha d)$
α, γ Multiplication et émission secondaire	$\sim \exp(\alpha d) / 1 - \gamma [\exp(\alpha d) - 1]$
Autonome : $\exp \alpha d \approx 1 + \frac{1}{\gamma}$	Contrôlé par le circuit extérieur

L'usage est d'introduire le potentiel minimum de claquage V^* et le produit pression \times longueur critique $(Pd)^*$:

$$V^* = B \exp(1) \log \left(1 + 1/\gamma \right) / A \quad \text{et} \quad (Pd)^* = \exp(1) \log \left(1 + 1/\gamma \right) / A,$$

afin d'exprimer la tension de claquage sous une forme universelle.

$$\frac{V}{V^*} = \frac{\frac{Pd}{Pd^*}}{1 + \log \frac{Pd}{Pd^*}} \quad (6.20)$$

La représentation graphique de cette loi, dites de Paschen, est appelée courbe de Paschen ; la courbe de Paschen universelle est représentée sur la figure 6.11 et les valeurs spécifiques des deux coefficients V^* et $(Pd)^*$ pour les gaz usuels sont données dans le tableau (6.3).

Tableau 6.3

	V^* [V]	$(Pd)^*$ [torr·cm]
He	156	4,0
A	137	0,9
H ₂	273	1,15
N ₂	251	0,67
O ₂	450	0,7
Air	327	0,56

L'existence d'un minimum, appelé minimum de Paschen, fut historiquement une surprise car une dépendance monotone en fonction de la pression, ou en fonction de la distance inter-électrode, est conforme à l'intuition physique.

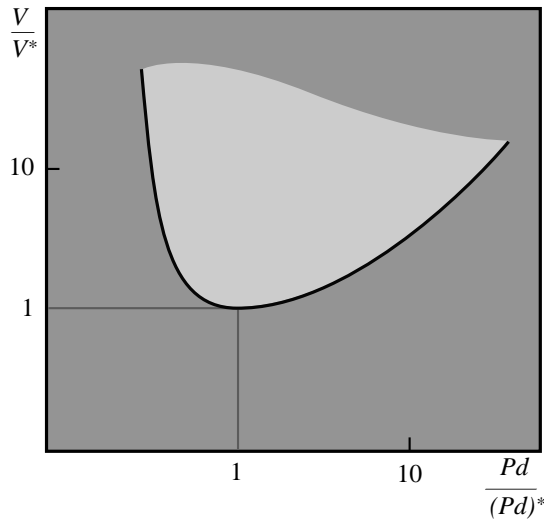


Figure 6.11 Courbe de Paschen.

L'existence d'un minimum s'interprète aisément en remarquant qu'à distance inter-électrodes et tension données, à basse pression, le libre parcours des électrons est très long et les probabilités de collisions ionisantes donc très faibles,

par contre, à haute pression, les électrons ne peuvent acquérir l'énergie d'ionisation entre deux collisions ; entre ces deux extrêmes, défavorables au développement de l'ionisation, il est possible de trouver un compromis optimal assurant le claquage.

Expérimentalement, le minimum de Paschen dépend peu de la nature des électrodes. Nous venons d'établir un certain nombre de résultats fondamentaux sur les décharges électriques stationnaires ; la physique des décharges instationnaires est un domaine nettement moins développé parce que beaucoup plus complexe. Nous allons étudier ici un modèle (trop) simple d'onde d'ionisation mettant en lumière le rôle de la charge d'espace que nous avons négligée jusqu'à présent.

6.2.3 Ondes d'ionisation

La théorie des décharges instationnaires est un domaine extrêmement complexe, et encore peu exploré, car le processus de génération d'ions et d'électrons par impacts électroniques est non-linéaire. En effet, il est décrit par le premier coefficient de Townsend mesurant la multiplication électronique par unité de longueur ; ce coefficient est une fonction non-linéaire du champ électrique E : $\alpha(E) = \exp(-E^*/E) / \lambda$ et le champ électrique est déterminé par la distribution des ions et électrons ainsi créés à travers l'équation de Poisson. Le système d'équations couplées, champs/fluides électronique et ionique, décrivant la génération de particules chargées par le champ et la génération de champ par les particules est donc non-linéaire et résiste aux méthodes analytiques classiques.

Afin d'obtenir des classes de solutions pour construire une description fluide des structures électrique transitoires dans les plasmas, tels que les éclairs, les étincelles, les streamers, etc. Il est nécessaire de s'inspirer des outils théoriques utilisés en physique de la combustion. La théorie de la combustion, qui a pour objectif la description et la compréhension des flammes, des fronts de combustion, des chocs, des explosions, etc. est confrontée à des problèmes non-linéaires similaires car le taux de réaction est donné par un facteur d'Arrhenius dont la dépendance en fonction de la température est semblable à la forme fonctionnelle du premier coefficient de Townsend. Afin de résoudre les équations de la combustion les transformations de Frank-Kamenetski offrent une méthode d'approche pour les problèmes simples.

Cette méthode consiste à rechercher des formes fonctionnelles non-linéaires équivalentes au facteur d'Arrhenius, valables sur plus d'un ordre de grandeur et présentant une dépendance analytique permettant d'intégrer les équations du modèle considéré. La transformation de référence est une loi de puissance ; c'est cette transformation de Frank-Kamenetski que nous mettrons à profit et nous utiliserons donc dans ce problème la forme fonctionnelle : $\alpha(E) = (E/E_0)^\beta / L$ pour représenter le premier coefficient de Townsend en fonction du champ électrique E . L est une longueur

caractéristique donnée, fonction de la nature du gaz et E_0 un champ caractéristique donné, fonction de la nature du gaz.

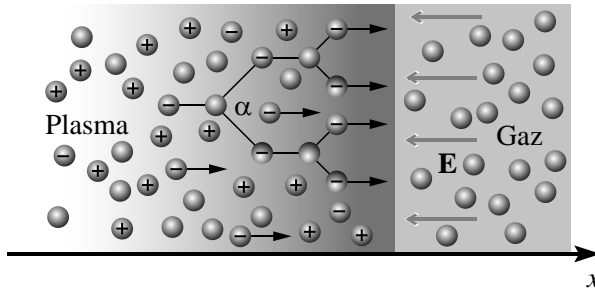


Figure 6.12 Onde d'ionisation.

La description fluide d'un processus d'ionisation instationnaire nécessite la connaissance de la dynamique temporelle de quatre inconnues : la densité électronique n , la vitesse électronique \mathbf{v} , le champ électrique \mathbf{E} et le champ magnétique \mathbf{B} . Ces quatre inconnues obéissent aux trois équations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Transport électronique} & : \quad \mathbf{v} = -\mu\mathbf{E} \\ \text{Conservation de la charge} & : \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = |\mathbf{v}| n\alpha(E) \\ \text{Équation de Maxwell-Ampère} & : \quad \nabla \times \mathbf{B} = -\mu_0 n q \mathbf{v} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (6.21) \end{aligned}$$

où $-\mu$ ($\mu > 0$) est la mobilité électronique et $-q$ ($q > 0$) la charge de l'électron. Afin de simplifier le modèle supposons que n , \mathbf{v} et \mathbf{E} ne dépendent que de la coordonnée x et du temps t (Figure 6.12) ; introduisons un vecteur unitaire \mathbf{e}_x suivant cette direction x et considérons le cas purement électrostatique : $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, $\mathbf{E} = -E(x, t)\mathbf{e}_x$. Cet ensemble d'hypothèses permet de réécrire les équations (6.21) décrivant l'ionisation et la génération de champ électrostatique :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial x} (nE) = \frac{\mu}{L} n E \left(\frac{E}{E_0} \right)^\beta, \quad \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{q\mu}{\varepsilon_0} n E = 0$$

Pour résoudre ce système de deux équations à deux inconnues, n et E , introduisons un système de variables et d'inconnues normalisées :

$$[n(x, t), E(x, t)] \rightarrow [N(X, T), F(X, T)],$$

où les variables normalisées de position, X , de temps, T , de densité, N , et de champ électrique, F , sont définies par :

$$X = \frac{x}{L}, \quad T = \frac{\mu E_0}{L} t, \quad N = \frac{Lq n}{\varepsilon_0 E_0}, \quad F = \frac{E}{E_0}$$

Le système de deux équations différentielles vérifié par $N(X, T)$ et $F(X, T)$ est alors donné par :

$$\frac{\partial N}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X}(NF) = NF^{\beta+1}, \quad \frac{\partial F}{\partial T} + NF = 0$$

L'existence de solutions, du type onde, dépendant uniquement de la variable $\xi = X - VT$, où V est une vitesse normalisée inconnue, peut être explorée par substitution de cette variable dans le système précédent.

$$-V \frac{dN}{d\xi} + \frac{d}{d\xi}(NF) = NF^{\beta+1}, \quad V \frac{dF}{d\xi} - NF = 0$$

Ce système possède un invariant, c'est-à-dire une combinaison de N et F indépendante de ξ .

$$\frac{d}{d\xi} \left[FN - VN - V \frac{F^{\beta+1}}{\beta+1} \right] = 0 \quad (6.22)$$

Cet invariant permet de raccorder les solutions décrivant des conditions aux limites correspondant à une transition entre un état conducteur plasma et un état isolant gazeux.

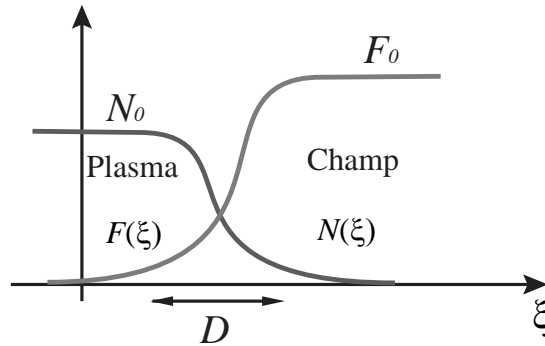


Figure 6.13 Transition plasma/gaz et front d'ionisation.

Considérons les conditions aux limites suivantes :

- $N(X = -\infty, T) = N_0$ et $F(X = -\infty, T) = 0$, cet état asymptotique décrit un plasma de densité N dans lequel le champ est écranté,
- $N(X = +\infty, T) = 0$ et $F(X = +\infty, T) = F_0$, cet état asymptotique correspond à un champ dans le vide sans plasma (Figure 6.13).

$$\text{Plasma} \quad : \quad [N \approx N_0, F \approx 0]$$

$$\text{Gaz} \quad : \quad [N \approx 0, F \approx F_0]$$

Le raccordement de ces deux états asymptotiques (6.22) permet d'établir une relation entre la densité plasma asymptotique et le champ dans le gaz : $(\beta + 1) N_0 = F_0^{\beta+1}$.

La structure de l'interface entre le plasma et le gaz est alors donnée par la solution de l'équation :

$$(\beta + 1) \frac{dF}{d\xi} = \frac{F^{\beta+2} - FF_0^{\beta+1}}{F - V}$$

L'épaisseur D de la zone de transition (Figure 6.13) entre l'état plasma conducteur [$N \approx N_0, F \approx 0$] et l'état gazeux isolant [$N \approx 0, F \approx F_0$] est définie par :

$$\left. \frac{dF}{d\xi} \right|_{F=\frac{F_0}{2}} \equiv \frac{F_0}{D}$$

La vitesse de propagation V est donc une fonction de l'épaisseur du front d'ionisation D , c'est-à-dire dépend fortement des conditions initiales ; ce type de problème non-linéaire n'offre donc pas la possibilité de classer les solutions indépendamment des conditions initiales malgré la simplicité des hypothèses. La physique des décharges électriques en régime instationnaire, en présence de charge d'espace, constitue un domaine extrêmement riche et encore peu exploré du point de vue théorique. Nous avons longuement insisté dans les chapitres précédents sur la tendance à l'écrantage et la quasi-neutralité dans les plasmas, la physique des structures quasi-neutres est beaucoup plus avancée car les équations de Maxwell sont remplacées par une équation algébrique.

6.3 STRUCTURES QUASI-NEUTRES

6.3.1 Diffusion ambipolaire

En l'absence de champ électrique et de champ magnétique appliqués, ou dans la direction perpendiculaire au champ électrique appliqué, le transport de matière est, en première analyse, purement diffusif ; mais, compte tenu de la grande différence de masses entre les électrons et les ions, le flux électronique est beaucoup plus important que le flux ionique. Cette différence crée donc une charge d'espace, cette charge d'espace génère un champ électrique \mathbf{E} et ce champ a tendance à freiner les électrons et à accélérer les ions pour assurer la quasi-neutralité du plasma (Figure 6.14). Il nous faut donc évaluer le champ auto-coherent \mathbf{E} ainsi créé en résolvant le système :

$$\text{Conservation des électrons} \quad : \quad \frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot \Gamma_e = S_e$$

$$\text{Conservation des ions} \quad : \quad \frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot \Gamma_i = S_i$$

$$\text{Équation de Maxwell-Gauss} \quad : \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{\varepsilon_0} (n_i - n_e)$$

où $S_e = S_i = S$ sont les sources d'espèces chargées résultant de l'ionisation.

L'hypothèse de quasi-neutralité permet de simplifier le problème ; cette hypothèse est recevable pour les phénomènes plus lents que les oscillations plasma, à la fréquence

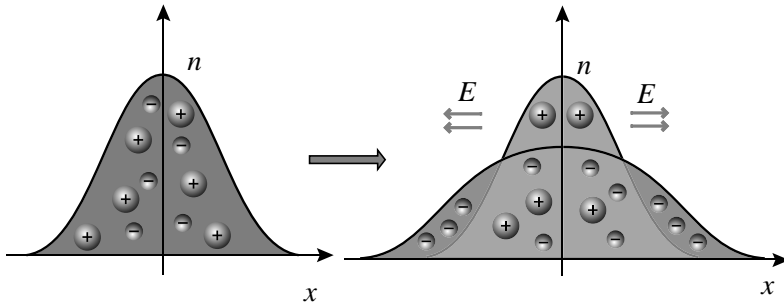


Figure 6.14 Séparation diffusive de charges et génération d'un champ E régulant les flux.

de Langmuir, et sur des échelles de longueur plus grandes que la longueur de Debye.

$$\text{Quasi-neutralité : } n_e = n_i = n$$

Sous cette hypothèse les flux ionique et électronique sont donnés par :

$$\begin{aligned} \text{Flux électronique} & : \Gamma_e = -n\mu_e \mathbf{E} - D_e \nabla n \\ \text{Flux ionique} & : \Gamma_i = n\mu_i \mathbf{E} - D_i \nabla n \end{aligned} \quad (6.23)$$

Compte tenu des valeurs des coefficients de diffusion ionique et électronique, en l'absence de champ électrique appliqué le flux électronique est beaucoup plus grand que le flux ionique : $\mathbf{E} = \mathbf{0} \rightarrow \Gamma_e \gg \Gamma_i$. Cette différence de flux crée une séparation de charges qui génère un champ, le champ ambipolaire \mathbf{E}_a ; ce champ assure la régulation des flux et leur égalité qui permet le maintien de la quasi-neutralité.

$$\Gamma_e(\mathbf{E}_a) = \Gamma_i(\mathbf{E}_a) \rightarrow \mathbf{E}_a = \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \frac{\nabla n}{n}$$

Si nous éliminons le champ ambipolaire de l'expression de la valeur commune des deux flux (6.23), le transport apparaît purement diffusif.

$$\Gamma_e = \Gamma_i = \Gamma_a = -\frac{\mu_e D_i + \mu_i D_e}{\mu_i + \mu_e} \nabla n \rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} + D_a \nabla^2 n = S$$

Le coefficient de diffusion D_a ainsi identifié est appelé ambipolaire et permet de décrire le transport lent d'un plasma quasi-neutre, D_a résulte d'un transfert d'inertie entre électrons et ions à travers le champ ambipolaire \mathbf{E}_a qui assure un couplage fort entre les deux populations.

$$D_a \equiv \frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e} \approx D_i \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right) \quad (6.24)$$

Si les températures électronique et ionique sont du même ordre de grandeur, compte tenu de la relation d'Einstein, le coefficient ambipolaire est de l'ordre de grandeur de

deux fois le coefficient ionique. La chute de potentiel ambipolaire est de l'ordre de grandeur de l'énergie d'agitation thermique kT_e .

$$\left| \frac{\nabla n}{n} \right| \approx L^{-1} \rightarrow E_a \approx \frac{kT_e}{qL}$$

Mais, un plasma ne peut pas assurer la quasi-neutralité des densités et l'ambipolarité des flux dans l'intégralité de son volume.

En effet, considérons un modèle de plasma quasi-neutre, négligeons l'inertie électronique, et introduisons : (i) un terme source de particules $S(n_e) > 0$, décrivant la génération d'espèces chargées, et (ii) un terme de perte d'énergie-impulsion $F(n_i, v_i) > 0$ décrivant la dissipation, ces deux termes étant, à priori, inconnus, afin d'assurer l'universalité des conclusions, sans référence particulière à un modèle spécifique. Les équations de ce modèle unidimensionnel universel :

$$\begin{aligned} \text{Conservation de la charge ionique} & : \frac{d}{dx} [n_i v_i] = S(n_e) \\ \text{Conservation de l'énergie/impulsion} & : \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} n_i v_i^2 \right] + n_i \frac{d}{dx} \left[\frac{e\phi}{m_i} \right] = -F(n_i, v_i) \\ \text{Quasi-neutralité et adiabaticité} & : n_i = n_e = n_0 \exp \left(\frac{e\phi}{kT_e} \right) \end{aligned}$$

permettent d'exprimer les gradients de densité et de vitesse en éliminant le potentiel ambipolaire ϕ .

$$\frac{dn_i}{dx} = -\frac{F + 2v_i S}{C_s^2 - v_i^2} < 0, \quad n_i \frac{dv_i}{dx} = \frac{v_i F + S(C_s^2 + v_i^2)}{C_s^2 - v_i^2} > 0 \quad (6.25)$$

Ainsi, quelque soit la nature des processus de génération de charge S et de dissipation de l'énergie F , la décroissance de la densité et la croissance de la vitesse, à partir d'une région central où $v_i = 0$, deviennent singulières lorsque $C_s = v_i$, au niveau de cette transition supersonique le modèle quasi-neutre doit être abandonné et un modèle de gaine non-neutre construit et raccordé au modèle de plasma quasi-neutre (Figure 6.15).

La description des décharges électriques dans les gaz ionisés s'articule donc autour de la séparation entre une zone dite de plasma quasi-neutre et une zone de gaine au voisinage des parois.

La description complète d'une décharge nécessite le raccord de ces deux types de solutions. Le problème de ce raccord est complexe et donne lieu à l'énoncé du critère de Bohm. Avant d'aborder l'étude des gaines, nous allons analyser l'impact de la

nature du transport ionique sur les paramètres plasmas au seuil de la transition supersonique. Pour ce faire, nous allons étudier trois modèles de plasmas quasi-neutres tels que la vitesse ionique v_i obéisse à des relations du type :

$$v_i = \sqrt{-2e\phi/m_i}, \quad v_i = eE/m_i v_c \quad \text{et} \quad v_i = \sqrt{e\lambda_c E/m_i}.$$

La première de ces relations correspond à ce que nous appellerons un modèle inertiel où les collisions sont négligées et les deux autres à des modèles collisionnels standards ou en champ fort tels que nous les avons étudiés au chapitre quatre (4.37).

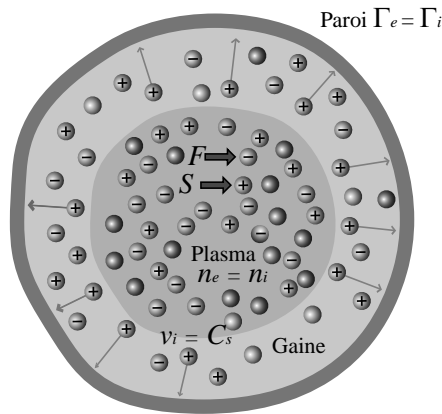


Figure 6.15 Brisure de la quasi-neutralité et transition plasma-gaine.

6.3.2 Modèles de Schottky

La diffusion et la convection sont les deux processus dynamiques des différents modèles d'écoulements quasi-neutres utilisés pour décrire les plasmas faiblement ionisés. Selon les régimes de collisionnalité, différents types de réponses ioniques et électroniques doivent être considérés, pour cela nous allons étudier trois modèles classiques. Tout d'abord nous considérerons deux régimes collisionnels asymptotiques : (i) en champ faible et (ii) en champ fort (ou à haute et basse pressions puisque le paramètre de contrôle est le rapport E/P), ce sont les modèles de Schottky. Ensuite, un modèle permettant d'appréhender le comportement des décharges à basse pression, en régime non-collisionnel ou inertiel, sera étudié, c'est le modèle de Tonks-Langmuir. Malgré leurs différences tous ces modèles ont en commun l'existence d'une densité critique où s'effectue une transition subsonique/supersonique. Au niveau de cette transition l'hypothèse de quasi-neutralité cesse d'être valable et un modèle de gaine doit être construit pour achever la description du plasma dans l'intégralité du volume de la décharge.

Considérons d'abord une décharge collisionnelle où les ions seront traités comme un fluide collisionnel sans inertie et les électrons comme une population sans inertie

à l'équilibre en régime boltzmannien. La conservation du nombre d'ions, de l'impulsion ionique et l'hypothèse d'équilibre électronique se traduisent par le système d'équations :

$$\begin{aligned}
 \text{Conservation de la charge ionique} & : \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}) = \nu_i n_e \\
 \text{Transport ionique} & : \mathbf{v} = \mu \mathbf{E} - D \frac{\nabla n_i}{n_i} \\
 \text{Relation de Boltzmann électronique} & : n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right) \quad (6.26)
 \end{aligned}$$

où n_e et n_i sont respectivement les densités électronique et ionique, \mathbf{v} est la vitesse ionique, n_0 la densité au centre de la décharge, ϕ est le potentiel électrostatique, μ le coefficient de mobilité ionique, $-e$ la charge de l'électron, T_e la température électronique et D le coefficient de diffusion ionique, ν_i est la fréquence d'ionisation, $\nu_i n_e$ est le nombre d'ions créés par unité de volume et unité de temps ; en général, ce processus de génération est dû à l'impact électronique, afin de préserver la généralité des résultats nous ne précisons pas la nature exact du mécanisme d'ionisation et nous considérerons cette fréquence d'ionisation comme une constante, donnée de base du modèle.

Nous disposons donc de trois équations qui ne permettent pas de déterminer les quatre inconnues, n_e , n_i , \mathbf{v} et ϕ ; une hypothèse supplémentaire est nécessaire, la quasi-neutralité : $n_e = n_i = n$. Le modèle étant restreint à l'étude des écoulements unidimensionnels suivant l'axe des x , le système décrivant la structure des couplages dynamiques se réduit à :

$$\begin{aligned}
 \text{Plasma} & : \frac{d}{dx} [nv] = \nu_i n, \quad nv = -\mu n \frac{d\phi}{dx} - D \frac{dn}{dx} \\
 \text{Champ} & : \frac{d\phi}{dx} = \frac{kT_e}{en} \frac{dn}{dx} \quad (6.27)
 \end{aligned}$$

Introduisons ν_c la fréquence de transfert d'impulsion ionique qui permet d'exprimer les coefficients de mobilité et diffusion ionique en fonction de la masse des ions m_i et de leur température T_i .

$$\mu = \frac{e}{m_i \nu_c}, \quad D = \frac{kT_i}{m_i \nu_c}$$

Afin de résoudre le système de trois équations à trois inconnues (6.27) introduisons un système de variables et d'inconnues normalisées :

$$[n(x), v(x), \phi(x)] \rightarrow [N(X), V(X), \Phi(X)]$$

où les variables de position, densité, vitesse et potentiel normalisés sont définies par :

$$X = \frac{\sqrt{\nu_i \nu_c}}{C_s} x, \quad N = \frac{n}{n_0}, \quad V = \frac{v}{C_s}, \quad \Phi = \frac{e\phi}{kT_e}$$

La vitesse acoustique ionique C_s est donnée par $C_s = \sqrt{kT_e/m_i}$ (3.14). Les conditions aux limites sur la densité, la vitesse et le potentiel sont : $N(X=0) = 1$, $V(X=0) = 0$, $\Phi(X=0) = 0$. Supposons $T_e \gg T_i$, effectuons les approximations qui résultent de cette hypothèse et éliminons le potentiel électrostatique du système (6.27); le système de deux équations différentielles du premier ordre, vérifié par $N(X)$ et $V(X)$, ainsi obtenu,

$$\frac{d}{dX} [NV] = \sqrt{\frac{v_i}{v_c}} N, \quad \frac{dN}{dX} = -\sqrt{\frac{v_c}{v_i}} NV$$

s'intègre aisément et les profils de vitesse et densité s'expriment simplement en fonction de X .

$$N = \cos X, \quad V = \sqrt{\frac{v_i}{v_c}} \tan X$$

La condition aux limites sur la paroi $N = 0$ est singulière car la vitesse de l'écoulement devient infinie : $N = 0 \rightarrow V = +\infty$. Afin de régulariser ce comportement singulier nous considérerons que le modèle quasi-neutre, $n_e = n_i = n$, cesse d'être valable lorsque la vitesse devient supersonique; ainsi définissons le point de coordonnée $X^* = \arctan \sqrt{\frac{v_c}{v_i}}$ tel que $V(X^*) = 1 \rightarrow N(X^*) = 1/\sqrt{1+v_c/v_i}$ et $\Phi(X^*) = -\log \sqrt{1+v_c/v_i}$. Ce point marque le seuil d'entrée de la zone de raccordement entre le plasma quasi-neutre et la gaine non-neutre. Le potentiel de seuil ϕ_s et la densité de seuil n_s en ce point sont donc donnés par :

$$n_s = \frac{n_0}{\sqrt{1 + \frac{v_i}{v_c}}}, \quad \phi_s = -\frac{kT_e}{2e} \log \left[1 + \frac{v_i}{v_c} \right] \quad (6.28)$$

Les profils de densité, potentiel et vitesse sont représentés sur la Figure 6.16. Nous démontrerons que l'allure général de ces profils et les valeurs au seuil de transition sont indépendantes du modèle et universelles.

Nous verrons que l'épaisseur de la gaine est de quelques longueurs de Debye, aussi, peut-on considérer que le plasma occupe tout le récipient; si la dimension d'extension du récipient est égale à l alors, en $x = l$, la condition $N = \cos X \approx 0 \rightarrow \pi/2 = \sqrt{v_i v_c} l / C_s$; cette condition impose une contrainte qui peut sembler difficile à satisfaire, comme la vitesse acoustique ionique, C_s , la fréquence d'ionisation, v_i , et la fréquence de collision, v_c , sont des données de base du modèle et non des paramètres libres. En fait, ces trois paramètres sont fonctions de la température électronique, T_e , et l'équation $l \approx \pi C_s / 2\sqrt{v_i v_c}$ fixe la température de la décharge. Dans une décharge électrique le bilan de particules détermine la température (et le bilan d'énergie la densité mais nous ne considérerons pas ce problème ici).

$$C_s(T_e) \approx l \sqrt{v_i(T_e) v_c(T_e)} \rightarrow T_e$$

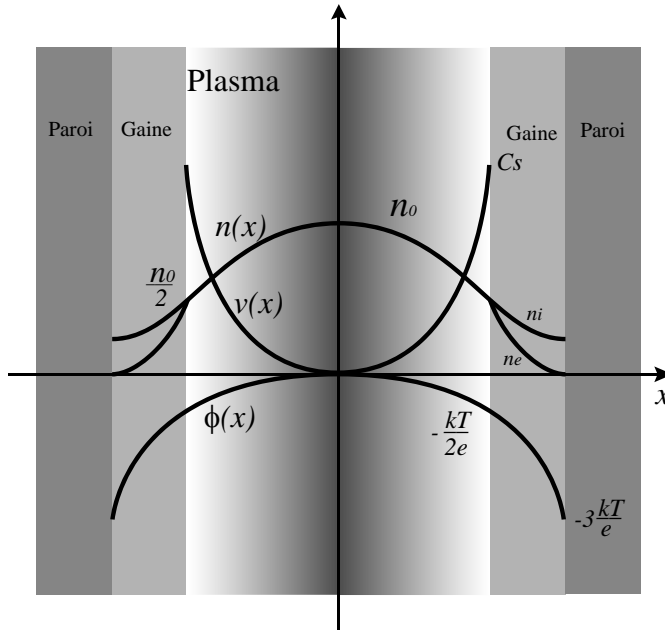


Figure 6.16 Structure typique d'un plasma de décharge.

L'interprétation physique de cette dernière relation est directe. Soit λ_i et λ_c les libres parcours d'ionisation et de transfert d'impulsion.

Le critère d'existence de la décharge peut-être formulée en exprimant la condition que chaque électron, avant de quitter la décharge, se reproduise une fois et génère ainsi au moins un deuxième électron par ionisation par impact électronique.

D'une part, le transport électronique étant diffusif, un électron effectue une marche aléatoire et rencontre la paroi au bout de N pas : $l^2 \approx N\lambda_c^2$; d'autre part, la condition de reproduction s'exprime par la relation : $\lambda_i \approx N\lambda_c$. Éliminons N entre ces deux identités et nous obtenons la condition dites de Schottky :

$$\text{Condition de Schottky : } l \approx \sqrt{\lambda_i(T_e)\lambda_c(T_e)}$$

qui n'est autre que la condition $C_s \approx l\sqrt{v_i v_c}$.

Considérons, maintenant, le cas des champs forts, c'est-à-dire lorsque le paramètre $E/P > \sigma_B T/eT_n$ (4.36); introduisons λ_c un libre parcours moyen effectif, supposé constant, qui permet d'exprimer les coefficients de mobilité et diffusion ionique en fonction de la masse des ions m_i et de leur température T_i .

$$\mu = \frac{e\lambda_c}{m_i v}, \quad D = \frac{kT_i \lambda_c}{m_i v}$$

Afin de résoudre le système de trois équations à trois inconnues (6.27) introduisons un système de variables et d'inconnues normalisées :

$$[n(x), v(x), \phi(x)] \rightarrow [N(X), V(X), \Phi(X)]$$

où les variables normalisées sont définies par :

$$X = v_i (C_s^2 \lambda_c v_i)^{-\frac{1}{3}} x, \quad N = \frac{n}{n_0}, \quad V = v (C_s^2 \lambda_c v_i)^{-\frac{1}{3}}, \quad \Phi = \frac{e\phi}{kT_e}$$

Les conditions aux limites sur la densité la vitesse et le potentiel sont :

$$N(X=0) = 1, \quad V(X=0) = 0, \quad \Phi(X=0) = 0.$$

Supposons $T_e \gg T_i$; les deux équations différentielles ordinaires du premier ordre vérifiées par $N(X)$ et $V(X)$ deviennent :

$$\frac{d}{dX} [NV] = N, \quad \frac{dN}{dX} = -NV^2$$

Ainsi, $dV/dX = 1 + V^3$ et une quadrature permet d'exprimer la position X en fonction de la vitesse V .

$$X = \frac{1}{6} \log \left[\frac{1+2V+V^2}{1-V+V^2} \right] + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left[\frac{2V-1}{\sqrt{3}} \right] + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}, \quad N^3 = \frac{1}{1+V^3}$$

Définissons X^* , le point où la vitesse devient supersonique :

$$V(X^*) = 1 \rightarrow N(X^*) = 2^{-1/3}, \quad \Phi(X^*) = -(\log 2)/3.$$

Nous obtenons ainsi les expressions des densité et potentiel de seuil en régime de champ fort :

$$n_s = n_0 2^{-\frac{1}{3}}, \quad \phi_s = -\frac{kT_e}{3e} \log [2] \quad (6.29)$$

Les profils représentés sur la figure 6.16 sont aussi pertinents pour ce modèle, ainsi que les différents ordres de grandeur caractéristiques.

Si la collisionnalité devient extrêmement faible, alors l'inertie est dominante et la construction d'un modèle non-dissipatif s'impose, le modèle de Tonks-Langmuir.

6.3.3 Modèle de Tonks-Langmuir

Le type de décharges que nous allons étudier maintenant est complémentaire des précédents en terme de description de régime. En effet, les ions sont considérés ici en régime inertiel, sans collision, et les électrons à l'équilibre en régime boltzmannien. La conservation du nombre d'ions, de l'énergie/impulsion ionique et l'hypothèse d'équilibre électronique se traduisent par le système d'équations :

$$\begin{aligned} \text{Conservation de la charge ionique} & : \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}) = \nu_i n_e \\ \text{Conservation de l'énergie} & : \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} m_i v^2 + e\phi \right] = 0 \\ \text{Relation de Boltzmann} & : n_e = n_0 \exp \left(\frac{e\phi}{kT_e} \right) \end{aligned}$$

où n_e et n_i sont respectivement les densités électronique et ionique, n_0 la densité au centre de la décharge, ν_i est la fréquence d'ionisation. Nous disposons donc de trois équations qui ne permettent pas de déterminer les quatre inconnues ; une hypothèse supplémentaire est nécessaire, la quasi-neutralité : $n_e = n_i = n$. Le modèle étant restreint à l'étude des écoulements unidimensionnels, le système décrivant cet écoulement basse pression se réduit à :

$$\begin{aligned} \text{Plasma} & : \frac{d}{dx} (nv) = \nu_i n, \quad v^2 = -\frac{2e\phi}{m_i} \\ \text{Champ} & : \frac{d\phi}{dx} = \frac{kT_e}{ne} \frac{dn}{dx} \end{aligned}$$

Afin de résoudre ce système de trois équations à trois inconnues introduisons un système de variables et d'inconnues normalisées :

$$[n(x), v(x), \phi(x)] \rightarrow [N(X), V(X), \Phi(X)] .$$

$$X = \frac{x\nu_i}{C_s}, \quad \Phi = \frac{e\phi}{kT_e}, \quad V = \frac{v}{C_s}, \quad N = \frac{n}{n_0}$$

Les équations normalisées deviennent :

$$\frac{d}{dX} [NV] = N, \quad V^2 = -2 \log N$$

Ainsi, $d \left[N \sqrt{-2 \log N} \right] / dX = N$ qui peut être aisément ramené à une quadrature afin d'exprimer X en fonction de N ; la solution implicite du système précédent est

donc donnée par :

$$X = [-2 \log N]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} [-2 \log N]^{\frac{3}{2}}, \quad X = V - \frac{1}{3} V^3$$

Soit X^* le point où la vitesse devient supersonique :

$$V(X^*) = 1 \rightarrow N(X^*) = \exp(-1/2), \quad \Phi(X^*) = -1/2.$$

Ce point marque le seuil d'entrée dans la gaine non-neutre, en ce point la densité et le potentiel prennent les valeurs caractéristiques suivantes :

$$n_s = n_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\right), \quad \phi_s = -\frac{kT_e}{2e} \quad (6.30)$$

Ce dernier modèle de Tonks-Langmuir présente quelques faiblesses, car, si le fluide ionique est en régime inertiel, le bilan de particules ne peut pas être traduit par une équation locale ; mais doit être décrit par une convolution spatiale. Historiquement, Tonks et Langmuir ont décrit et analysé ce problème plus complexe de transport non-local. Pour simplifier la présentation, nous avons fait le choix d'une description locale qui ne modifie pas l'ordre de grandeur des résultats de Tonks et Langmuir.

Chacune de ces trois études spécifiques considérée séparément est de peu d'intérêt, c'est la comparaison des trois résultats qui permet de comprendre l'universalité de la transition subsonique/supersonique.

En effet, les valeurs de seuil, résumées dans le tableau (6.4), sont remarquablement voisines compte tenu de la grande différence entre les hypothèses de construction des trois modèles.

Tableau 6.4

Modèle	Vitesse ionique	n_s/n_0	$-e\phi_s/kT_e$
Schottky linéaire ($v_i = v_c$)	$\frac{e}{m_i v_c} E$	$1/\sqrt{2}$	$\log(2)/2$
Schottky non-linéaire (v_i, λ_c)	$\sqrt{\frac{e\lambda_c}{m_i}} E$	$1/\sqrt[3]{2}$	$\log(2)/3$
Tonks-Langmuir (v_i)	$\sqrt{-\frac{2e\phi}{m_i}}$	$1/\sqrt{e}$	$\log(e)/2$

Les valeurs reproduites sur la figure 6.16 sont donc universelles et faiblement dépendantes du détail des conditions de la décharge (on ne confondra pas la charge de l'électron e et $e = 2,718$).

6.4 GAINES IONIQUES

6.4.1 Critère de Bohm

Une gaine est une structure non-neutre, à la frontière du plasma, qui permet de préserver la quasi-neutralité à l'intérieur du plasma en régulant les flux à sa périphérie.

La transition plasma-gaine n'est pas brutale mais implique l'existence d'une deuxième structure : la pré-gaine. Le rôle de cette pré-gaine est d'assurer un transfert d'impulsion, de la population électronique vers la population ionique, afin que la vitesse d'entrée des ions dans la gaine soit de l'ordre de grandeur de la vitesse acoustique ionique (3.14).

Au seuil de la gaine la densité chute d'un facteur ~ 2 et le potentiel de la quantité $\sim \frac{kT_e}{2e}$ (Figure 6.16 et tableau 6.4). Nous avons aussi démontré que, dans le plasma, la vitesse de l'écoulement ionique devait rester inférieure à la vitesse acoustique ionique (Relations 6.25) ; nous allons montrer maintenant, qu'à l'entrée de la gaine, la vitesse ionique doit être supérieure à cette vitesse acoustique ionique ou vitesse de Bohm (6.32).

La conclusion de ces deux études est donc que la vitesse ionique à l'entrée de la gaine est la vitesse acoustique ionique, c'est le critère de Bohm.

Considérons la figure 6.16, partant du centre du plasma, quasi-neutre et ambipolaire, pris comme référence de potentiel $\phi \approx 0$, la vitesse croît mais l'écoulement reste subsonique : $v_i < C_s$, puis, au seuil de la gaine le potentiel atteint une valeur caractéristique relativement indépendante de la nature du modèle :

$$v_i \approx C_s \rightarrow \phi_s \approx -kT_e \log(2)/2e \times [1/0, 66/0, 69]$$

et la densité, décroissante depuis le centre de la décharge, atteint une valeur de l'ordre de la moitié de sa valeur maximale n_0 :

$$v_i \approx C_s \rightarrow n_s \approx n_0 \times [0, 71/0, 79/0, 61] .$$

Dans la gaine non-neutre le potentiel continue à décroître afin d'assurer l'accélération des ions : $d\phi/dx < 0$, ainsi, sur la paroi, le potentiel atteint une valeur $\phi_f < \phi_s$, appelée potentiel flottant si le récipient n'est pas polarisé. À l'intérieur de la gaine, les électrons constituent une population isotherme à l'équilibre, suivant une distribution de Boltzmann traduisant le compromis entre la décélération électrique et l'agitation thermique. Les ions sont supposés en régime inertiel car l'épaisseur de la gaine est en général plus petite que le libre parcours moyen, cette dernière hypothèse sera révisée au paragraphe suivant. Les conditions de densité et de vitesse à l'entrée de la gaine sont données par : $n_e|_{\phi=\phi_s} \approx n_i|_{\phi=\phi_s} \approx n_s$ et $v_i|_{\phi=\phi_s} = V_i$, V_i est une inconnue que nous allons borner. Les densités électronique n_e et ionique n_i sont déterminées par

la distribution de potentiel ϕ , en régime d'équilibre pour les électrons et en régime inertiel pour les ions.

$$n_e(\phi, T_e) = n_s \exp \left[\frac{e(\phi - \phi_s)}{kT_e} \right], \quad n_i(\phi, V_i) = n_s / \sqrt{1 - \frac{2e(\phi - \phi_s)}{m_i V_i^2}} \quad (6.31)$$

Il n'existe pas de solution analytique de l'équation de Poisson avec un second membre prenant en compte ces densités électronique et ionique dans la gaine : $e[n_e(\phi, T_e) - n_i(\phi, V_i)] / \epsilon_0$. Néanmoins, il est possible d'établir un critère d'existence de la gaine comme suit. Au seuil de la gaine les densités et le potentiel sont décroissants (Figure 6.16) et les dérivés des densités par rapport au potentiel ont pour valeurs :

$$\left. \frac{dn_e}{d\phi} \right|_{\phi=\phi_s} = \frac{n_s e}{kT_e}, \quad \left. \frac{dn_i}{d\phi} \right|_{\phi=\phi_s} = \frac{n_s e}{m_i V_i^2}$$

À l'intérieur de la gaine, afin de maintenir la décroissance du potentiel (qui garantit l'égalité des flux ionique et électronique sur la paroi à travers l'accélération des ions et la décélération des électrons), la densité ionique doit être supérieure à la densité électronique : $n_i|_{\phi < \phi_s} > n_e|_{\phi < \phi_s}$; cette contrainte se traduit par le critère : $V_i > C_s$ (6.32).

$$\left[n_i|_{\phi=\phi_s} \approx n_e|_{\phi=\phi_s}, \quad n_i|_{\phi < \phi_s} > n_e|_{\phi < \phi_s}, \quad \frac{d\phi}{dx} < 0 \right] \quad (6.32)$$

$$\downarrow$$

$$\left. \frac{dn_e}{d\phi} \right|_{\phi=\phi_s} > \left. \frac{dn_i}{d\phi} \right|_{\phi=\phi_s} \rightarrow m_i V_i^2 > kT_e \rightarrow V_i > C_s$$

Nous venons d'identifier la condition d'existence d'un écoulement ionique non-neutre dans une zone de potentiel monotone décroissant ; si cette condition est satisfaite, alors, la régulation du flux des espèces chargées au voisinage de la paroi, afin de préserver la quasi-neutralité en amont, est possible. Le flux électronique Γ_e et le flux ionique Γ_i sont donnés par :

$$\Gamma_e(\phi, T_e) = \sqrt{\frac{kT_e}{2\pi m_e}} n_e(\phi, T_e), \quad \Gamma_i(\phi, V_i) = n_s V_i = n_s C_s \quad (6.33)$$

et doivent être égaux au niveau de la paroi. La chute de potentiel dans la gaine n'est donc pas arbitraire mais égale à l'énergie d'agitation thermique que multiplie le logarithme du rapport des masses ionique et électronique (Figure 6.16).

$$\Gamma_i(\phi_f, V_i) = \Gamma_e(\phi_f, T_e) \rightarrow \phi_f - \phi_s = -\frac{kT_e}{2e} \log \left[\frac{m_i}{2\pi m_e} \right]$$

Enfin, la densité électronique étant exponentiellement faible, nous pouvons négliger la charge d'espace électronique dans la gaine et résoudre l'équation de Poisson décrivant l'écoulement limité par la charge d'espace ionique, ainsi nous sommes confrontés au problème de Child-Langmuir analysé dans le paragraphe suivant ; anticipant cette étude et son résultat, nous pouvons alors évaluer l'épaisseur de la gaine d_g .

$$\Gamma_i \approx \frac{J_c(\phi_f, d_g)}{e} = \frac{4}{9} \varepsilon_0 \sqrt{\frac{2e}{m_i}} \frac{(-\phi_f)^{\frac{3}{2}}}{d_g^2} \rightarrow d_g \approx \lambda_D \left(-\frac{e\phi_f}{kT_e} \right)^{\frac{3}{4}}$$

où le courant de Child-Langmuir J_{CL} est donné par la relation (6.36) au paragraphe suivant. L'épaisseur de gaine est donc de quelques longueurs de Debye. Le tableau (6.5) présente un résumé des caractéristiques d'une gaine.

Tableau 6.5

Caractéristiques	Ordre de grandeur
Potentiel de seuil	$\phi_s \approx -\frac{kT_e}{2e}$
Potentiel flottant	$\phi_f \approx \phi_s \log \left[\frac{m_i}{m_e} \right]$
Épaisseur de gaine	$d_g \approx \left(\log \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \right)^{\frac{3}{4}} \lambda_D$
Courant de gaine	$e\Gamma_i \approx \frac{1}{2} en_0 C_s$

Cette étude de la structure des gaines doit maintenant être complétée par l'analyse des courants limités par charge d'espace : les écoulement de Child-Langmuir.

6.4.2 Lois de Child-Langmuir

Nous allons étudier successivement :

- l'écoulement de Child-Langmuir limité par charge d'espace en régime inertiel, puis,
- l'écoulement de Child-Langmuir limité par charge d'espace et collisions.

Considérons un écoulement ionique, non neutre, unidimensionnel suivant l'axe des x et stationnaire, entre le plan $x = 0$, l'anode A , et le plan $x = l$, la cathode C (Figure 6.17). Les ions de charge q et de masse m sont décrits par la densité $n(x)$ et par la vitesse $v(x)$. La différence de potentiel entre les électrodes est égale à U : $\phi(x = 0) = 0$, $\phi(x = l) = -U < 0$. En régime stationnaire, la vitesse $v(x)$ et la densité $n(x)$ obéissent à l'équation de continuité et à l'équation du mouvement (équivalente à l'équation de conservation de l'énergie dans ce cas inertiel) ; l'équation d'état de la population ionique est une isentropique (2.33). Ces trois équations

peuvent être exprimées sous la forme de trois invariants ; introduisons pour cela la vitesse $v_0 = v(x = 0)$, la densité de courant entre les deux électrodes j (qui est constante) et la pression $P_0 = P(x = 0)$. Nous obtenons alors un système algébrique de trois équations à quatre inconnues, n , v , P et ϕ le potentiel ; une quatrième équation, l'équation de Poisson, complète ce système.

$$\begin{aligned}
 \text{Conservation de la charge} & : nqv = j \\
 \text{Conservation de l'énergie} & : \frac{m}{2}v^2 + \frac{3P}{2n} + q\phi = \frac{m}{2}v_0^2 + \frac{3P_0qv_0}{2j} \\
 \text{Conservation de l'entropie} & : Pn^{-3} = P_0 \left(\frac{j}{qv_0} \right)^{-3} \\
 \text{Équation de Poisson} & : \frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{q}{\epsilon_0}n
 \end{aligned} \tag{6.34}$$

Ce système de quatre équations met en jeu deux tendances opposées, une tendance à l'écoulement suivant la chute de potentiel et une tendance s'opposant à cette chute de potentiel à travers la création d'une charge d'espace. La densité peut être exprimée en fonction du potentiel en éliminant la vitesse et la pression dans le système (6.34) pour obtenir une équation algébrique unique sur n .

$$n^4 \frac{3P_0}{2} \left(\frac{j}{qv_0} \right)^{-3} + n^2 \left(q\phi - \frac{mv_0^2}{2} - \frac{3P_0qv_0}{2j} \right) + \frac{mj^2}{2q^2} = 0$$

Ainsi $n(\phi, j, v_0, P_0)$ peut être exprimée pour établir une équation de Poisson non-linéaire. En général, les énergies associées à la vitesse initiale v_0 et à la température sont négligeables devant la différence de potentiel U ; on peut donc simplifier l'équation du quatrième degré précédente.

$$P_0 = 0, v_0 = 0 \rightarrow n(\phi, j) = \frac{j}{q} \sqrt{-\frac{m}{2q\phi}}$$

Le problème de l'écoulement d'une espèce chargée entre deux électrodes polarisées se ramène donc à l'analyse de l'équation de Poisson non-linéaire :

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{j}{\epsilon_0} \sqrt{-\frac{m}{2q\phi}} \tag{6.35}$$

compte tenu des conditions aux limites, $\phi(x = 0) = 0$ et $\phi(x = l) = -U$.

Introduisons une mesure du champ électrique sur l'anode, le paramètre F tel que :

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=0} \equiv -F \frac{U}{l}$$

Ce paramètre offre la possibilité d'étudier les caractéristiques du flux limité par charge d'espace en fonction du champ sur l'anode ; en particulier, il permet d'identifier pour quelle valeur optimale du champ (à la frontière de la gaine pour les décharges), le flux est maximum : $\partial j(F, U, l) / \partial F = 0 \rightarrow F = F_M \rightarrow j_M(F_M, U, l)$. Le flux maximum ainsi identifié, j_M , n'est autre que le courant limite de Child-Langmuir : $j_M(F_M, U, l) = J_{CL}(U, l)$ défini par :

$$J_{CL}(U, l) \equiv \frac{4}{9} \varepsilon_0 \sqrt{\frac{2q}{m}} \frac{U^{\frac{3}{2}}}{l^2} \quad (6.36)$$

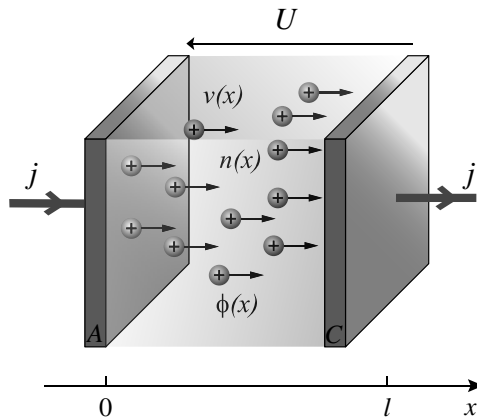


Figure 6.17 Écoulement de Child-Langmuir en régime inertiel.

Pour établir ce résultat fondamental et analyser le problème de Child-Langmuir (6.35), introduisons les variables normalisées X et Φ : $[\phi(x)] \rightarrow [\Phi(X)]$ et le paramètre de contrôle R .

$$X = \frac{x}{l}, \quad \Phi = -\frac{\phi}{U}, \quad R = \frac{j}{J_{CL}}$$

L'ordre de l'équation de Poisson (6.35) normalisée peut être abaissé en multipliant de part et d'autre du signe égal par la dérivée de Φ .

$$\frac{d^2\Phi}{dX^2} = \frac{4}{9} \frac{R}{\sqrt{\Phi}} \rightarrow \frac{d\Phi}{dX} = \sqrt{F^2 + \frac{16R}{9} \sqrt{\Phi}}$$

Définissons $S = 3F/4\sqrt{R}$, après intégration la relation implicite entre potentiel Φ et position X :

$$X = 2 \frac{S^3}{\sqrt{R}} + \frac{\sqrt{\Phi} - 2S^2}{\sqrt{R}} \sqrt{\sqrt{\Phi} + S^2} \quad (6.37)$$

offre le point de départ d'une discussion physique. Compte tenu de la condition aux limites en $X = 1$: $\Phi(1) = 1$, la densité de courant $j = RJ_{CL}$ est donc une fonction

du champ électrique normalisé en $X = 0 : F$; ainsi, $\sqrt{R} = 2S^3 + (1 - 2S^2) \sqrt{1 + S^2}$. La fonction implicite $R(F)$ ainsi définie par cette relation est monotone décroissante entre ($R = 1, F = 0$) et ($R = 0, F = 1$). Le premier point correspond à l'optimum de courant pouvant être écoulé entre les deux électrodes : le courant de Child-Langmuir défini par (6.36) ; le deuxième point correspond à un courant nul, la chute de tension s'effectuant dans le vide, linéairement entre les deux électrodes.

$$\text{Courant nul, champ maximum} \quad : \quad R = 0, F = 1 \rightarrow \phi(x) = -U \left(\frac{x}{l} \right)$$

$$\text{Courant maximum, champ nul} \quad : \quad R = 1, F = 0 \rightarrow \phi(x) = -U \left(\frac{x}{l} \right)^{\frac{4}{3}}$$

Le courant maximum qui peut être extrait d'un plasma ($R = 1, F = 0$) est donc donné par la formule de Child-Langmuir (6.36). Les formules précédentes révèlent une singularité de densité en $x = 0$. Une telle singularité peut être aisément régularisée en incluant des effets de vitesse initiale v_0 et de pression P_0 qui modifient peu le résultat final concernant le courant maximum.

La problématique des écoulements ioniques non-neutres présente la même richesse que la problématique des écoulements plasmas quasi-neutres ; en particulier, il est nécessaire de distinguer et d'étudier les trois régimes de dynamique ionique : inertiel, $v_i = \sqrt{-2e\phi/m_i}$ et collisionnel, $v_i = eE/m_i v_c$ et $v_i = \sqrt{e\lambda_c E/m_i}$. Nous allons maintenant aborder ce problème de l'impact des collisions sur la structure et les propriétés des gaines. Nous allons redériver la formule de Child-Langmuir inertielle puis nous étudierons les régimes collisionnels linéaire et non-linéaire.

Considérons un écoulement ionique, non-neutre, unidimensionnel suivant l'axe des x et stationnaire, entre le plan $x = 0$, l'anode A , et le plan $x = l$, la cathode C (Figure 6.17). Les ions de charge q et de masse m sont décrits par la densité $n(x)$ et la vitesse $v(x)$. Le champ électrique $e(x)$ créé par la charge d'espace $qn(x)$ dérive du potentiel électrostatique $\phi(x)$. La différence de potentiel entre les électrodes est égale à U : $\phi(x = 0) = 0, \phi(x = l) = -U < 0$; nous considérerons le cas optimum identifié précédemment : $e(x = 0) = 0$. Afin de résoudre l'équation de Poisson non-linéaire, introduisons un système de variables et d'inconnues normalisées : $[\phi(x)] \rightarrow [\Phi(X)]$:

$$X = \frac{x}{l}, \quad J = \frac{j}{J_A}, \quad \Phi(X) = -\frac{q\phi(x)}{mc^2}$$

où le courant limite d'Alfvén J_A est défini par :

$$J_A \equiv \varepsilon_0 \frac{mc^3}{ql^2} \quad (6.38)$$

Éliminons la vitesse entre l'équation de conservation de la charge et l'équation de conservation de l'énergie pour exprimer la densité (Relations 6.34 avec

$v_0 = 0, P_0 = 0$) en fonction du potentiel dans l'équation de Poisson qui s'intègre alors aisément.

$$\frac{d^2\Phi}{dX^2} = \frac{J}{\sqrt{2\Phi}} \rightarrow \Phi = \frac{3^{4/3} 2^{1/3}}{4} X^{4/3} J^{2/3}$$

La relation courant-tension en régime inertiel peut ainsi être établie :

$$U(j) = 3^{4/3} 2^{-5/3} \epsilon_0^{-2/3} m^{1/3} q^{-1/3} l^{4/3} j^{2/3}.$$

Considérons maintenant le même problème mais en régime collisionnel (Figure 6.18), la vitesse ionique v est une fonction du champ électrique e suivant l'une des deux lois établies au chapitre quatre (Tableau 4.13).

$$\begin{aligned} \text{Mobilité linéaire} & : v = \frac{q}{mv} e \\ \text{Mobilité non-linéaire} & : v = \sqrt{\frac{q\lambda}{m}} e \end{aligned}$$

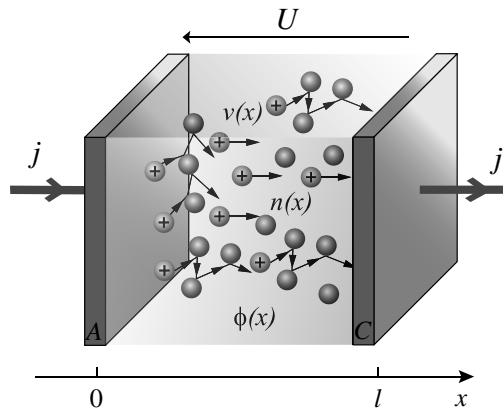


Figure 6.18 Écoulement de Child-Langmuir en régime collisionnel.

La conservation de la charge et la relation de Maxwell-Gauss complètent le système décrivant le comportement de cet écoulement ionique collisionnel.

$$\begin{aligned} \text{Conservation de la charge} & : j = nqv \\ \text{Équation de Maxwell-Gauss} & : \frac{de}{dx} = \frac{nq}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Introduisons un système de variables et d'inconnues normalisées : $[e(x), \Phi(x)] \rightarrow [E(X), \Phi(X)]$ tel que :

$$X = \frac{x}{l}, \Phi(X) = -\frac{q\Phi(x)}{ml^2v^2}, E(X) = \frac{qe(x)}{mlv^2}$$

$$X = \frac{x}{\lambda}, \Phi(X) = -\frac{q\Phi(x)}{mc^2}, E(X) = \frac{qe(x)\lambda}{mc^2}$$

Les échelles caractéristiques de densité de courant dans les deux cas, linéaire et non-linéaire, sont données par :

$$\text{Mobilité linéaire} : J_h = \frac{\varepsilon_0 ml v^3}{q} \rightarrow J = \frac{j}{J_h}$$

$$\text{Mobilité non-linéaire} : J_b = \frac{\varepsilon_0 mc^3}{q\lambda^2} \rightarrow J = \frac{j}{J_b}$$

L'élimination de la densité et du potentiel permet d'établir une équation unique sur le champ normalisé. L'intégration finale est aisée et permet d'exprimer les caractéristiques courant-tension $U(j)$ de ces deux écoulements collisionnels limités par charge d'espace.

$$\text{Mobilité linéaire} : \frac{dE}{dX} = \frac{J}{E} \rightarrow \Phi = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3} X^{\frac{3}{2}} J^{\frac{1}{2}} \rightarrow U = \frac{2^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}}}{3 \varepsilon_0^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}} j^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Mobilité non-linéaire} : \frac{dE}{dX} = \frac{J}{\sqrt{E}} \rightarrow \Phi = \frac{3^{\frac{5}{3}}}{2^{\frac{2}{3}} 5} X^{\frac{5}{3}} J^{\frac{2}{3}} \rightarrow U = \frac{3^{\frac{5}{3}} \lambda^{\frac{4}{3}} m^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}} 5 \varepsilon_0^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{3}}} j^{\frac{2}{3}}$$

Contrairement aux caractéristiques de seuil d'un plasma quasi-neutre, les caractéristiques de gaine ne sont pas indépendantes de la nature du transport ionique.

Les lois $U(J, l)$, présentées dans le tableau (6.6) dépendent fortement du régime de transport ionique.

Tableau 6.6

Modèle	Vitesse ionique	$U(j)$
Mobilité linéaire	$\frac{e}{mv} E$	$0,94 \times \varepsilon_0^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} j^{\frac{1}{2}}$
Mobilité non-linéaire	$\sqrt{\frac{e\lambda}{m}} E$	$0,79 \times \varepsilon_0^{-\frac{2}{3}} m^{\frac{1}{3}} q^{-\frac{1}{3}} \lambda^{\frac{4}{3}} j^{\frac{2}{3}}$
Écoulement inertiel	$\sqrt{-\frac{2e\Phi}{m}}$	$1,36 \times \varepsilon_0^{-\frac{2}{3}} m^{\frac{1}{3}} q^{-\frac{1}{3}} l^{\frac{4}{3}} j^{\frac{2}{3}}$

Cette dernière étude des écoulements (gainés) ioniques clos ce chapitre sur les structures électriques, dans ce chapitre nous avons essentiellement utilisé des modèles fluides, l'analyse de la dynamique électrique, que ce soit pour des champs faibles du type ambipolaire ou fort du type gaine, peut aussi être menée dans le cadre d'un formalisme cinétique qui permet de révéler d'autres structures non-linéaires électriques.

BIBLIOGRAPHIE

► Problématique des structures électriques

- E. Badareu et I. Popescu, *Gaz Ionisés, Décharges Électriques dans les Gaz*, Dunod, Paris, France, 1968.
- E.M. Bazelyan et Y.P. Raizer, *Spark Discharge*, CRC Press, Boca Raton, USA, 1998.
- E.M. Bazelyan et Y.P. Raizer, *Lightning Physics and Lightning Protection*, Institute of Physics Publishing, Bristol, UK, 2000.
- S.C. Brown, *Introduction to Electrical Discharges in Gases*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1966.
- B. Chapman, *Glow Discharge Processes*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1980.
- B.E. Cherrington, *Gaseous Electronics and Gas Lasers*, Pergamon Press, Oxford, UK, 1980.
- F.F. Chen et J.P. Chang, *Lecture Notes on Principles of Plasma Processing*, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, USA, 2003.
- F. Chen, *Introduction to Plasma Physics*, Plenum Press, New York, USA, 1977.
- J.D. Cobine, *Gaseous Conductors*, Dover Publications, New York, USA, 1958.
- A. von Engel, *Ionized Gases*, AIP Press, New York, USA, 1994.
- R.N. Franklin, *Plasma Phenomena in Gas Discharges*, Clarendon Press, Oxford, UK, 1976.
- M.A. Lieberman et A.J. Lichtenberg ; *Principles of Plasma Discharges and Materials Processing*, Wiley & Sons, New York, USA, 1994.
- M. Mitchner et C.H. Kruger, *Partially Ionized Gases*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1973.
- E. Nasser, *Fundamentals of Gaseous Ionization and Plasma Electronics*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1971.
- R. Papoular, *Phénomènes électriques dans les gaz*, Dunod, Paris, France, 1963.
- F.M. Penning, *Décharges Électriques dans les Gaz*, Dunod, Paris, France, 1958.

- Y.P. Raizer, *Gas Discharge Physics*, Springer-Verlag, Berlin, RFA, 1997.
- B.M. Smirnov, *Physics of Ionized Gases*, John Wiley & Sons, New York, USA, 2001.
- P.C. Stangeby, *The Plasma Boundary of Magnetic Fusion Devices*, Institute of Physics Publishing, Londres, UK, 2000.
- J.F. Waymouth, *Electric Discharge Lamps*, The MIT Press, Cambridge, USA, 1971.

► **Problème de l'émission en surface des solides**

- A.W. Adamson et A.P. Gast, *Physical Chemistry of Surfaces*, Intersciences Publishers John Wiley & Sons, New York, USA, 1997.
- M. Bayet, *Physique Électronique des Gaz et des Solides*, Masson, Paris, France, 1958.
- S.C. Brown, *Basic Data of Plasma Physics*, AIP Press, New York, USA, 1994.
- L.N. Dobretsov et M.V. Gomoyunova, *Emission Electronics*, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, Israel, 1971.

Chapitre 7

Dynamique et structures magnétiques

Il n'y avait rien compris, si ce n'est que cette théorie sèche et poussiéreuse appartenait exclusivement à un petit nombre d'esprits mesquins dont le vocabulaire copieux était inintelligible.

Martin Eden, J. London.

7.1 MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUE

7.1.1 Réduction MHD

Les modèles à deux fluides, électronique et ionique, constituent une description réduite par rapport aux modèles cinétiques. Ces modèles à deux fluides sont particulièrement bien adaptés aux situations où :

- l'écart à l'équilibre thermodynamique est faible, mais où
- l'écart à la quasi-neutralité peut être important : c'est le cas des structures électriques du type gaine traitées précédemment.

Lorsque l'écart à l'équilibre thermodynamique local *et* l'écart à la quasi-neutralité sont faibles, le fluide ionique et le fluide électronique sont fortement couplés par le champ électrique ambipolaire et la densité électronique suit l'évolution de la densité

ionique. L'évolution d'un plasma dans un tel régime peut être décrite par la dynamique d'un fluide unique dont l'inertie est principalement due aux ions et la mobilité aux électrons.

La *magnétohydrodynamique*, MHD, est construite en premier lieu à partir de l'hypothèse de quasi-neutralité qui n'autorise pas le développement de champ électrique à caractère potentiel : $n_e - n_i \ll n_e + n_i$. En fait, l'hypothèse de quasi-neutralité est à reconsidérer en présence de champs inductifs ; en présence de tels champs le réarrangement des charges s'effectue pour écranter la force électrique dans le repère au repos du fluide (2.1) : $e\mathbf{E} + e\mathbf{V} \times \mathbf{B}$. Nous verrons que l'hypothèse supplémentaire de la MHD *idéale* viendra naturellement confirmer ce point de vue.

Dans ce chapitre nous considérerons un plasma d'hydrogène, c'est-à-dire tel que $Z = 1$, et les fréquences cyclotroniques (5.4) seront prise égales à leurs valeurs absolues : $\omega_{ce,ci} = |\omega_{ce,ci}|$. La première étape de la construction du modèle MHD consiste à définir un jeu de variables réduites ; en premier lieu la densité volumique de masse du fluide MHD : $\rho \equiv n_e m_e + n_i m_i$ où n_i et n_e sont les densités ionique et électronique, et m_i et m_e les masses ionique et électronique. Compte tenu du rapport de masse $m_e/m_i \ll 1$, cette densité volumique de masse est dominée par l'inertie ionique : $\rho \approx n_i m_i$. De même, la vitesse moyenne du fluide MHD, \mathbf{V} , est approximativement égale à la vitesse de l'écoulement ionique.

$$\mathbf{V} \equiv \frac{n_e m_e \mathbf{V}_e + n_i m_i \mathbf{V}_i}{n_e m_e + n_i m_i} \approx \mathbf{V}_i \quad (7.1)$$

Pour achever la description MHD, le système de deux variables, ρ et \mathbf{V} , doit être complété par une variable thermodynamique, la pression totale P , et une variable électrodynamique, la densité de courant \mathbf{J} .

$$P \equiv P_e + P_i, \quad \mathbf{J} \equiv n_i e \mathbf{V}_i - n_e e \mathbf{V}_e \quad (7.2)$$

Ce jeu de huit variables MHD, $[P, \rho, \mathbf{V}, \mathbf{J}]$, doit satisfaire un système de huit équations. Ces équations sont obtenues à partir des équations du modèle à deux fluides eulériens. En particulier, les deux équations décrivant l'évolution des vitesses ionique et électronique, \mathbf{V}_e et \mathbf{V}_i (6.8) :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}_e}{dt} &= -\frac{\nabla P_e}{n_e m_e} - \frac{e}{m_e} (\mathbf{E} + \mathbf{V}_e \times \mathbf{B}) - \nu (\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i) \\ \frac{d\mathbf{V}_i}{dt} &= -\frac{\nabla P_i}{n_i m_i} + \frac{e}{m_i} (\mathbf{E} + \mathbf{V}_i \times \mathbf{B}) - \nu (\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_e) \end{aligned} \quad (7.3)$$

$(d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{V} \cdot \nabla)$ permettent d'obtenir deux relations sur les variables \mathbf{V} et \mathbf{J} en effectuant respectivement une somme puis une différence comme suit. Effectuons d'abord la somme des deux équations précédentes. Compte tenu de la quasi-neutralité et de l'identité des transferts d'impulsion ions-électrons et électrons-ions, nous obtenons une équation du mouvement où *le fluide MHD apparaît uniquement*

soumis aux forces de pression et de Laplace.

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla P + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (7.4)$$

D'autre part, il est possible d'exprimer la friction électrons-ions, $\nu(\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i)$, en fonction de la densité volumique de courant \mathbf{J} : $\nu(\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_e) = \nu\mathbf{J}/en_e$; puis, de réécrire l'équation d'Euler électronique (7.3) sous la forme :

$$\frac{d\mathbf{V}_e}{dt} = -\frac{\nabla P_e}{n_e m_e} - \frac{e}{m_e} (\mathbf{E} + \mathbf{V}_e \times \mathbf{B}) + \frac{\nu}{n_e e} \mathbf{J} \quad (7.5)$$

afin d'établir une relation portant principalement sur \mathbf{J} . Pour ce faire, il convient aussi d'exprimer la vitesse électronique \mathbf{V}_e en fonction des variables MHD \mathbf{J} et \mathbf{V} : $\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_i - \mathbf{J}/n_e e \approx \mathbf{V} - \mathbf{J}/n_e e$, et de réécrire le membre de droite de l'équation électronique (7.5) en substituant cette dernière relation, pour obtenir la loi d'Ohm dite généralisée :

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} - \frac{m_e \nu}{n_e e^2} \mathbf{J} - \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{n_e e} + \frac{\nabla P_e}{n_e e} + \frac{m_e}{e} \frac{d\mathbf{V}_e}{dt} = \mathbf{0} \quad (7.6)$$

Le terme $d\mathbf{V}_e/dt$ est appelé terme d'inertie électronique et n'est significatif que sur des longueurs de l'ordre de grandeur de la longueur de London qui est toujours inférieure à la longueur de Kelvin associée à la pénétration résistive du champ magnétique. Cette dernière longueur est décrite par le terme $\nu\mathbf{J}/n_e e$; ce terme $d\mathbf{V}_e/dt$ sera donc négligé dans la suite. Le terme électronique ∇P_e décrit la génération de courant diffusif due aux gradient de densité électronique ; ce processus a été étudié dans le chapitre précédent. Ce terme ne devient important que lorsque les gradients macroscopiques sont de l'ordre de grandeur du rayon de Larmor (5.6). Ce terme est donc négligeable à l'échelle d'un modèle fluide.

Introduisons la conductivité η , dite de Spitzer, définie par la relation :

$$\eta \equiv \frac{n_e e^2}{m_e \nu} \approx 10^4 \times \left[\frac{T_e}{1 \text{ eV}} \right]^{\frac{3}{2}} \left[\frac{\text{S}}{\text{m}} \right]$$

Pour un plasma d'hydrogène à 100 eV cette conductivité est de l'ordre de grandeur de celle de l'acier, pour une température de 1 KeV elle devient comparable à la conductivité du cuivre à température ordinaire. Les deux derniers termes de l'équation précédente étant négligeables, la loi d'Ohm généralisée devient :

$$\mathbf{J} + \underbrace{\frac{\omega_{ce}}{\nu}}_{\text{Hall}} (\mathbf{J} \times \mathbf{b}) = \underbrace{\eta}_{\text{Ohm}} \mathbf{E} + \underbrace{\eta}_{\text{Faraday}} \mathbf{V} \times \mathbf{B} \quad (7.7)$$

Les trois termes restants sont associés à l'effet Hall, que nous avons identifié au chapitre précédent (6.15), à la composante inductive du champ électrique et à la loi d'Ohm, identifiée au chapitre deux (2.9). Cette relation est en fait une équation

linéaire sur \mathbf{J} qui peut être aisément résolue. Ainsi \mathbf{J} peut être exprimé en fonction des composantes parallèle et perpendiculaires du champ électrique en prenant la direction du champ magnétique comme axe de référence : $\mathbf{E}_{\parallel} = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b}$ et $\mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{b} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{b})$.

$$\mathbf{J}(\mathbf{V}, \mathbf{E}, \mathbf{B}) = \eta_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel} + \eta_{\perp} (\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \eta_{\times} \mathbf{b} \times (\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (7.8)$$

L'anisotropie induite par le champ magnétique se manifeste donc à travers le caractère tensoriel de la conductivité. Le terme de Spitzer η_{\parallel} doit être complété par η_{\perp} , parfois appelée conductivité de Pedersen, et η_{\times} la conductivité de Hall.

$$\eta_{\parallel} = \eta = \frac{n_e e^2}{m_e \nu}, \quad \eta_{\perp} = \frac{\eta}{1 + \frac{\omega_c^2}{\nu^2}}, \quad \eta_{\times} = \frac{\eta}{\frac{\nu}{\omega_c} + \frac{\omega_c}{\nu}}$$

Par exemple, dans l'ionosphère, ces trois conductivités peuvent être du même ordre de grandeur à une altitude de l'ordre de 150 km comme le montre la figure 7.1.

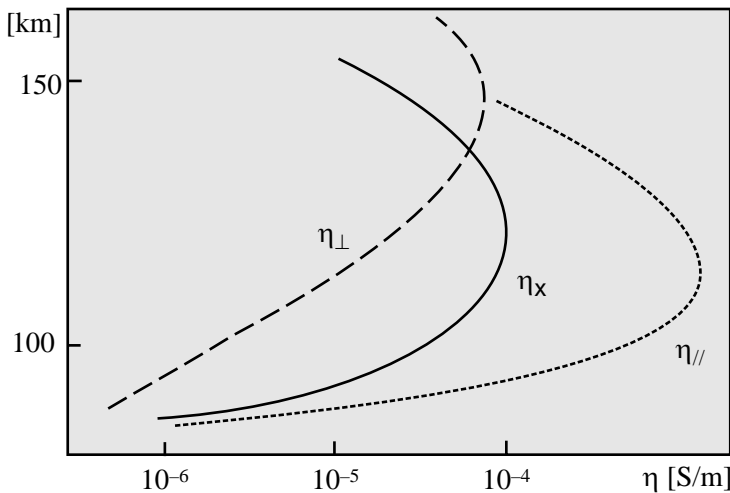


Figure 7.1 Conductivité de l'ionosphère en fonction de l'altitude.

Deux limites asymptotiques peuvent être considérées :

- un fluide MHD fortement collisionnel, tel que $\omega_c \ll \nu$; alors, la loi d'Ohm devient isotrope.

$$\mathbf{J} = \eta (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (7.9)$$

- un fluide MHD faiblement collisionnel, tel que $\nu \rightarrow 0$ ($\Rightarrow \eta \rightarrow +\infty$), mais magnétisé, tel que le rapport ω_c/ν reste fini ; alors, la relation dite de la MHD idéale :

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (7.10)$$

est valide car la finitude du courant \mathbf{J} et la loi d'Ohm généralisée (7.7) : $\mathbf{J} = -\omega_c (\mathbf{J} \times \mathbf{b}) / \nu + \eta (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})$, doivent être satisfaites simultanément.

L'interprétation de cette relation fondamentale du modèle MHD idéale est directe : cette relation exprime le fait que le champ électrique dans le repère en mouvement avec le fluide, où il doit être corrigé du terme d'induction $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$, est nul.

Ceci est dû au fait que l'hypothèse de conductivité infinie autorise un réajustement instantané des charges pour annuler les champs électriques, que leur origine soit potentielle ou inductive, conformément à la tendance générale à l'écrantage et à la quasi-neutralisation.

La loi d'Ohm (7.9) ou la relation de la MHD idéale (7.10) et l'équation du mouvement (7.4) doivent être complétées par les équations décrivant l'évolution des champs électriques et magnétiques. Pour ce qui concerne l'équation de Maxwell-Gauss elle est remplacée par l'hypothèse de quasi-neutralité.

Les 14 inconnues du modèle MHD, $[P, \rho, \mathbf{V}, \mathbf{J}, \mathbf{B}, \mathbf{E}]$, satisfont donc à un système de 14 équations décrivant respectivement la conservation de la masse, la conservation de l'impulsion, l'équation d'état, la loi d'Ohm généralisée et les équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère.

Ce système d'équations décrit l'évolution (et l'équilibre) des plasmas lorsque la dynamique est lente, c'est-à-dire lorsque les échelles de temps caractéristiques sont plus longues que la période cyclotronique ionique et lorsque les échelles caractéristiques de longueur sont plus grandes que le rayon de Larmor ionique ρ_{Li} .

Plusieurs simplifications supplémentaires peuvent être considérées telles que les écoulements stationnaires, $\mathbf{V} \neq 0$, $\partial/\partial t = 0$, et les équilibres statiques, $\mathbf{V} = 0$, $\partial/\partial t = 0$. Une situation particulièrement répandue est celle des plasmas chauds tels que la conductivité de Spitzer puisse être considérée comme infinie, $\eta \rightarrow \infty$. Une telle situation est appelée modèle MHD idéale et pour de tels plasmas les variables électriques, magnétiques et cinématiques sont simplement reliées par la relation algébrique (7.10) ; cette hypothèse de conductivité infinie permet d'écrire le système des équations de la MHD idéale comme un système couplé de 8 équations à 8 inconnues : $[P, \rho, \mathbf{V}, \mathbf{B}]$. Pour ce qui concerne l'équation de Maxwell-Ampère, le courant de déplacement est beaucoup plus petit que le courant de conduction. En effet, soit L l'échelle de longueur caractéristique du problème considéré et soit V l'échelle de vitesse caractéristique, alors $\nabla \times \mathbf{B} \approx B/L$ et dans la limite idéale (7.10) $\eta \rightarrow \infty \Rightarrow \mu_0 \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t \approx V^2 \mathbf{B} / Lc^2$; le rapport $|\nabla \times \mathbf{B} / \mu_0 \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t|$ est donc de l'ordre de V^2/c^2 . Les vitesses d'écoulement étant non relativistes, il en résulte $\mathbf{J} \gg \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$.

Les huit équations de la MHD idéale sont donc données par :

$$\begin{aligned}
 \text{Conservation de la masse} & : \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \rho \mathbf{V} \\
 \text{Équation d'état} & : \frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right) = 0 \\
 \text{Équation d'Euler} & : \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} - \frac{\nabla P}{\rho} + \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\rho \mu_0} \times \mathbf{B} \\
 \text{Équation de Maxwell-Faraday} & : \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (7.11)
 \end{aligned}$$

Les problèmes de MHD diffèrent totalement des problèmes d'électrodynamique des milieux continus (EMC) car ici le champ magnétique est une variable primaire permettant d'évaluer le champ électrique et les sources, alors que dans un problème d'EMC le champ électrique est la source de la dynamique permettant d'évaluer le comportement des charges et courants, l'expression de ces courants débouche ensuite sur le calcul du champ magnétique.

Afin de conclure ce paragraphe sur le modèle MHD il est nécessaire d'établir le lien entre ce modèle fluide et la théorie des dérives qui a été développée dans le cadre d'un ordering adiabatique, similaire à celui de la MHD, au chapitre cinq. Nous avons établi, dans le cadre de la théorie des dérives (Tableau 5.1) l'existence de vitesses de dérives superposées aux rotations cyclotroniques : $\mathbf{V}_\perp = \mathbf{V}_c + \mathbf{V}_{DG} + \mathbf{V}_{DC} + \mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$. A l'ordre zéro le terme de dérive se réduit au terme électrique et les dérives électriques ioniques et électroniques s'ajoutent. Ce résultat est similaire à la relation champ-vitesse de la MHD idéale : $\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{V}_\perp = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$. Mais, les dérives électriques ne génèrent pas de courant, car elles sont indépendantes du signe de la charge. L'ordre suivant est donc nécessaire pour calculer les courants de dérives (5.21) : $\mathbf{J}_\perp = \mathbf{J}_{DG} + \mathbf{J}_{DC} + \mathbf{J}_m = -\nabla P \times \mathbf{B}/B^2$. Ce résultat est conforme à l'équation de l'équilibre MHD ($\mathbf{V} = \mathbf{0}$) : $-\nabla P + \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{J}_\perp = -\nabla P \times \mathbf{B}/B^2$. Les termes d'accélération ne peuvent être comparés car il ont été négligés dans la théorie adiabatique des trajectoires. Ainsi, en régime adiabatique, la dynamique des particules décrite par la théorie des dérives et la dynamique du fluide MHD offrent deux cadres complètement cohérents entre eux.

7.1.2 Pression magnétique

Un équilibre MHD, ou un écoulement MHD, résultent de l'action de deux forces, la force de Laplace : $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$, et la force de pression cinétique : $-\nabla P$. Il est instructif de réécrire la force de Laplace en fonction du champ magnétique seul et d'interpréter les deux termes ainsi obtenus comme des pressions et tensions exercées par le champ sur le plasma.

$$\mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{B} \times \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla B^2$$

La force de Laplace est donc la somme du gradient d'une pression magnétique P_B ,

$$P_B \equiv \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (7.12)$$

et d'une tension magnétique $\mathbf{T}_B \equiv (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} / \mu_0$. L'interprétation de la pression en terme de densité volumique d'énergie magnétique est directe. Le terme de tension peut être réécrit pour faire apparaître le rayon de courbure des lignes de champ magnétique \mathcal{R} . Soit \mathbf{b} le vecteur unitaire tangent aux lignes de champ : $\mathbf{B} = B\mathbf{b}$, considérant l'abscisse curviligne s le long d'une ligne de champ,

$$\mathbf{T}_B = \frac{B \frac{d}{ds}(B\mathbf{b})}{\mu_0} = \frac{d}{ds} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) \mathbf{b} + \frac{B^2}{\mu_0} \frac{\mathbf{n}}{\mathcal{R}}$$

où \mathbf{n} est la normale à la ligne de champ. La composante parallèle de la tension annule donc la composante parallèle du gradient de pression, l'expression finale de la force de Laplace est donc :

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\nabla_{\perp} P_B + \frac{2P_B}{\mathcal{R}} \mathbf{n} \quad (7.13)$$

Le plasma a donc tendance à être repoussé par les zones de champ fort et vers l'extérieur des lignes de champ courbes. La décomposition en pression et tension magnétique permet de considérer les lignes de champ comme des objets dynamiques possédant une élasticité. Cette interprétation mécaniste implique l'existence d'ondes se propageant parallèlement et perpendiculairement à ces lignes. Ces ondes existent effectivement et sont les ondes d'Alfvén et les ondes magnéto-soniques (8.41, 8.42).

Dans un équilibre, ou un écoulement, la dynamique du champ peut être asservie à la dynamique du plasma ou réciproquement. Afin d'identifier de tels régimes il est nécessaire d'introduire le paramètre β défini comme le rapport de la pression cinétique sur la pression magnétique.

$$\beta \equiv \frac{P}{P_B} \approx \frac{[\text{Énergie interne du plasma}]}{[\text{Énergie magnétique du champ}]} \quad (7.14)$$

- Lorsque $\beta < 1$, l'essentiel de l'énergie est sous forme magnétique et le plasma se contente de suivre la dynamique magnétique.
- Lorsque $\beta > 1$, l'essentiel de l'énergie est sous forme cinétique et le champ magnétique est asservi aux mouvements de la matière.

Le modèle d'interaction et d'équilibre champ-plasma de Chapman-Ferraro illustre la notion de pression magnétique et permet d'étudier les caractéristiques des zones $\beta \approx 1$.

Dans le cadre de ce modèle, un flux de particules chargées, de charge q et de masse m , interagit avec un champ magnétique et cette interaction est traitée de façon cohérente : les orbites des particules chargées génèrent un champ magnétique et la force de Laplace associée à ce champ modifie ces orbites.

Cette population mobile est neutralisée par un fond continu de particules infiniment massives de charge opposée et de densité identique en tout point. On utilisera un système de coordonnées cartésiennes $[x, y, z]$ associé à une base orthonormée directe $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z]$. Le plasma est situé dans la région des x négatifs où le champ magnétique $b(x) \mathbf{e}_z$ est quasiment nul ; ce champ magnétique a une valeur constante dans la zone des x positifs grands où la densité devient nulle (Figure 7.2). On note $n(x)$ et $v_x(x)$ la densité et la vitesse suivant x des particules se dirigeant vers l'interface champ/particules ($x \approx 0$) à partir de $x = -\infty$. En $x = -\infty$ l'écoulement vers l'interface possède une vitesse $v_0 \mathbf{e}_x$: $v_x(x = -\infty) = v_0$ (il existe également un écoulement de retour possédant une densité égale et une vitesse opposée). On note $v_y(x)$ la vitesse suivant l'axe des y ; en $x = -\infty$: $v_y(x = -\infty) = 0$, la densité $n(x = -\infty) = n_0$ et le champ magnétique est nul : $b(x = -\infty) = 0$. En $x = +\infty$ la densité de particules est nulle $n(x = +\infty) = 0$ et le champ magnétique atteint la valeur constante $b(x = +\infty) = b_0$ (Figures 7.2 et 7.3). Le champ magnétique $b(x)\mathbf{e}_z$ dérive d'un potentiel vecteur $a(x) \mathbf{e}_y$: $b(x) = da/dx$ tel que $a(x = -\infty) = 0$. Au voisinage de l'interface champ/particules ($x \approx 0$) la force de Laplace incurve les trajectoires des particules et génère une composante de vitesse suivant l'axe des y . Cette composante est à l'origine d'un courant (J_y sur la figure 7.2) et ce courant est la source d'un champ magnétique qui permet d'annuler le champ dans la zone occupée par le plasma. La force de Laplace induit un retour des particules et empêche le plasma de pénétrer dans la zone occupée par le champ.

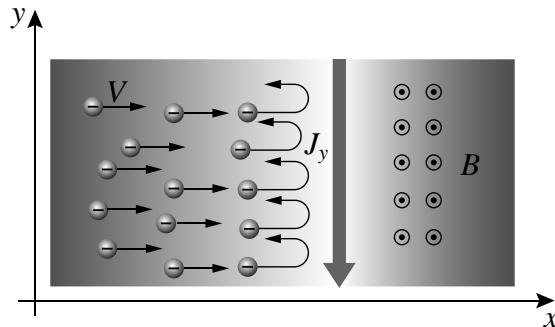


Figure 7.2 Modèle de Chapman-Ferraro.

Il s'établit ainsi un équilibre dynamique entre le champ et la matière de part et d'autre de l'interface.

Nous allons calculer les caractéristiques de cette interface et la condition de l'équilibre champ-fluide.

En régime stationnaire la dynamique des quatre inconnues décrivant le fluide et le champ, $[n(x), v_x(x), v_y(x), b(x)]$, est déterminée par les quatre équations :

$$\begin{aligned} \text{Équations d'Euler} & : m v_x \frac{d v_x}{d x} - q v_y b = 0, m v_x \frac{d v_y}{d x} + q v_x b = 0 \\ \text{Équation de continuité} & : \frac{d}{d x} [n v_x] = 0 \\ \text{Équation de Maxwell-Ampère} & : \frac{d b}{d x} + q \mu_0 n v_y = 0 \end{aligned} \quad (7.15)$$

Afin de résoudre ce système de quatre équations à quatre inconnues introduisons un système de variables et d'inconnues normalisées :

$$[n(x), v_x(x), v_y(x), b(x), a(x)] \rightarrow [N(X), V(X), W(X), B(X), A(X)]$$

où la variable de position normalisée X et les densité, vitesse et champs normalisés sont définis par :

$$N = \frac{n}{n_0}, V = \frac{v_x}{v_0}, W = \frac{v_y}{v_0}, B = \frac{b}{b_0}, A = \frac{q a}{m v_0}$$

et $X = q b_0 x / m v_0 = x / \rho_{L0}$ où ρ_{L0} est le rayon de Larmor associé à la vitesse v_0 dans le champ de référence b_0 . Le système des cinq équations différentielles vérifiées par $N(X), V(X), W(X), B(X)$ et $A(X)$ est donc donné par :

$$\begin{aligned} \text{Fluide} & : V \frac{d V}{d X} = W B, \quad V \frac{d W}{d X} + V B = 0, \quad \frac{d N V}{d X} = 0 \\ \text{Champ} & : \frac{d B}{d X} + \frac{\beta}{2} N W = 0, \quad \frac{d A}{d X} = B \end{aligned}$$

où nous avons défini β , le *paramètre bêta de l'écoulement* : $\beta = 2 \mu_0 n_0 m v_0^2 / b_0^2$. Ce système d'équations permet de construire trois invariants traduisant (i) la conservation de l'énergie, (ii) du nombre de particules et (iii) du moment canonique suivant la direction des y : $W + A = 0, V^2 + A^2 = 1, N V = 1$. L'équation de Maxwell-Ampère peut alors être exprimée en fonction du potentiel normalisé A .

$$\frac{d^2 A}{d X^2} = \frac{\beta}{2} \frac{A}{\sqrt{1 - A^2}} \rightarrow \frac{d A}{d X} = \sqrt{\beta} \sqrt{1 - \sqrt{1 - A^2}}$$

Dans la zone d'écoulement posons : $A(X) = \sin 2\phi$ et $0 \leq \phi \leq \pi/4$. La relation de Maxwell-Ampère peut être intégrée pour exprimer X en fonction de ϕ et le profil du

champ normalisé B établi en fonction de ϕ :

$$B(\phi) = \sqrt{2\beta} \sin \phi, \quad X(\phi) = \sqrt{\frac{2}{\beta}} \log \left| \tan \frac{\phi}{2} \right| + 2\sqrt{\frac{2}{\beta}} \cos \phi$$

où nous avons utilisé $\int^x \frac{du}{\sin u} = \ln(\tan |x/2|)$. L'allure typique des profils du champ et des vitesses au voisinage de l'interface champ-fluide est représentée sur la figure 7.3.

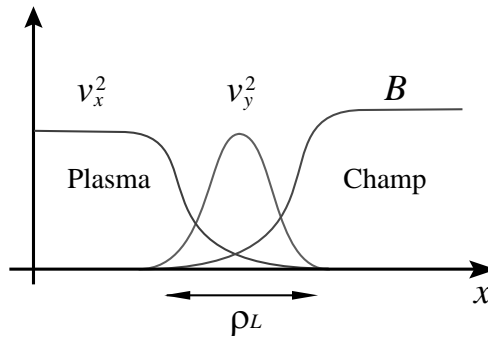


Figure 7.3 Profils du champ et des vitesses du modèle de Chapman-Ferraro.

Le point d'arrêt du plasma est défini par $V = 0$ c'est-à-dire $\phi = \pi/4$, en ce point : $A = 1$ et $B = 1$.

Sur l'interface champ-fluide le paramètre β prend donc la valeur 1, cette relation $\beta = 1$ exprime la condition d'équilibre mécanique entre la pression cinétique et la pression magnétique. L'échelle de longueur caractérisant la dimension de l'interface est quant à elle donnée par le rayon de Larmor de référence $\rho_{L0} = mv_0/qb_0$.

7.2 DIFFUSION MAGNÉTIQUE

7.2.1 Nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds magnétique permet de quantifier l'importance relative de la convection du champ par la matière par rapport à la diffusion du champ dans la matière. Considérons un écoulement MHD décrit par la vitesse fluide \mathbf{v} donnée.

$$\text{Équation de Maxwell-Faraday} \quad : \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\text{Équation de Maxwell-Ampère} \quad : \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

$$\text{Loi d'Ohm} \quad : \quad \mathbf{J} = \eta(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Éliminons le courant et le champ électrique entre ces trois équations pour obtenir l'équation de transport du champ magnétique.

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{\mu_0 \eta} \Delta \mathbf{B} \quad (7.16)$$

Le transport du champ apparaît comme la combinaison du terme convectif, $\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$, que nous décrirons plus en détail à l'aide des théorèmes d'Alfvén, et du terme de diffusion magnétique, identifié précédemment dans le cadre de l'étude de la relaxation électronique (3.23). L'ordre de grandeur du rapport de ces deux termes permet d'introduire le nombre de Reynolds magnétique. Si nous normalisons les vitesses à une vitesse caractéristique V et les longueurs à une longueur caractéristique L : $\mathbf{V} = \mathbf{v}/V$ et $\mathbf{X} = \mathbf{x}/L$, l'équation de transport magnétique en régime stationnaire se réécrit sous forme normalisée :

$$\Delta \mathbf{B} + \mathcal{R}_M \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) = \mathbf{0} \quad (7.17)$$

Ainsi, nous faisons apparaître le nombre de Reynolds magnétique $\mathcal{R}_M = \mu_0 \eta V L$ comme paramètre de contrôle de l'équation du transport magnétique stationnaire.

$$\mathcal{R}_M \equiv \frac{[\text{Convection du champ magnétique}]}{[\text{Diffusion du champ magnétique}]} \approx \mu_0 \eta V L = \frac{V L}{D_M} = \frac{V}{c} \frac{\omega_p}{v} \frac{L}{\lambda_p} \quad (7.18)$$

- Lorsque la conductivité $\eta \rightarrow +\infty$ alors $\mathcal{R}_M \rightarrow +\infty$ et le mélange diffusif champ-plasma est extrêmement lent car $D_M \rightarrow 0$ (3.23) ; le terme de convection est alors dominant et la dynamique du fluide MHD est idéale. Dans ce cas, il est possible de construire des invariants quantifiant l'impossibilité de mélanger ou de séparer le champ et le plasma. Nous allons construire ces invariants de la dynamique MHD idéale dans le paragraphe suivant.
- Lorsque $\mathcal{R}_M \lesssim 1$, la dynamique du plasma est contrôlée par sa résistivité et la diffusion devient dominante.

Il est instructif d'étudier le phénomène de pénétration diffusive et convective en présence d'un écoulement perpendiculaire aux lignes de champ magnétique. Afin d'illustrer les caractéristiques de cette diffusion forcée par un écoulement, considérons une structure simple d'écoulement et de champ : $\mathbf{V} = V(z)\mathbf{u}_x$ et $\mathbf{B} = b(z)\mathbf{u}_x + B\mathbf{u}_z$, illustrée par la figure 7.4.

En régime stationnaire, la dynamique du champ \mathbf{B} subissant l'influence d'un écoulement donné \mathbf{V} est décrite par l'équation (7.17) :

$$\mu_0 \eta B \frac{dV}{dz} = -\frac{d^2 b}{dz^2} \rightarrow \mu_0 \eta B V = -\frac{db}{dz} \quad (7.19)$$

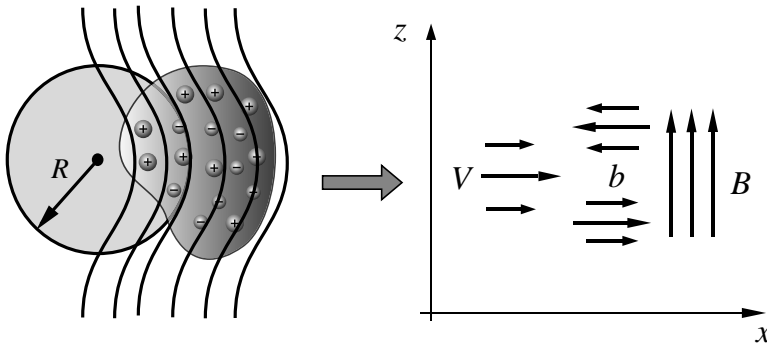


Figure 7.4 Pénétration diffusive et convective du champ magnétique.

Cette dernière relation permet d'établir l'équation des lignes du champ en présence de l'écoulement.

$$\frac{dx}{dz} = \frac{b(z)}{B} \rightarrow \frac{d^2x}{dz^2} = -\mu_0\eta V(z)$$

D'autre part, le rayon de courbure \mathcal{R} des lignes de champ est défini par : $d^2x/dz^2 = 1/\mathcal{R}(z)$.

La vitesse du plasma et le rayon de courbure des lignes de champ, qui constitue la seule échelle de longueur du problème, sont donc reliés par :

$$V(z)\mathcal{R}(z)\mu_0\eta = -1 \rightarrow \mathcal{R}_{\mathcal{M}} = 1$$

Le nombre de Reynolds magnétique est donc de l'ordre de un dans un écoulement perpendiculaire à un champ donné. Si η est grand le champ est fortement déformé par l'écoulement car les conditions sont voisines de la MHD idéale et le système doit générer une longueur de gradient petite en déformant les lignes de champ, ainsi \mathcal{R} diminue pour abaisser la valeur de $\mathcal{R}_{\mathcal{M}} \approx \mu_0\eta V\mathcal{R}$.

Il y a donc une forme de synergie entre le transport convectif et le transport diffusif. Le terme convectif déforme les lignes de champ afin que l'écoulement génère une zone à petite échelle de longueur telle que $\mathcal{R}_{\mathcal{M}} \approx 1$ pour assurer la pénétration ultime du champ par diffusion.

7.2.2 Diffusion du plasma

Les processus lents développant des vitesses faibles, le nombre de Reynolds magnétique $\mathcal{R}_{\mathcal{M}} \approx \mu_0\eta VL$ est alors petit et la diffusion domine. Deux cas peuvent alors être distingués : (i) le champ diffuse dans la matière et (ii) la matière diffuse dans le champ. Nous allons voir que la transition entre ces deux régimes est contrôlée par le paramètre β .

Considérons d'abord une situation où le champ magnétique est maintenu constant et où le plasma est en quasi-équilibre avec ce champ magnétique en l'absence de champ

électrique et de mouvement le long des lignes de champ : $\mathbf{V} \cdot \mathbf{B} = 0$ (Figure 7.5). L'équation d'équilibre entre les forces de pression et la force de Laplace ainsi que la loi d'Ohm déterminent le comportement de ce modèle.

$$\begin{aligned} \text{Équilibre magnétohydrostatique} & : -\nabla P + \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \\ \text{Loi d'Ohm} & : \mathbf{J} = \eta(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

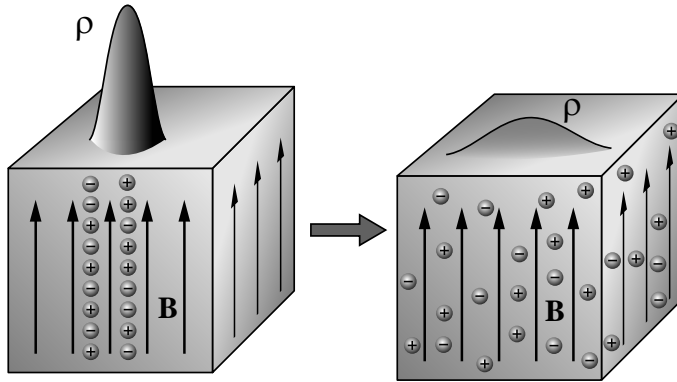


Figure 7.5 Diffusion quasi-statique du plasma dans le champ.

L'existence d'un tel quasi-équilibre implique le développement d'un flux lent de matière tel que : $\mathbf{V} = -\nabla P / \eta B^2$. D'autre part, la conservation de la masse se traduit par l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = \frac{\rho \Delta P}{\eta B^2}$$

Dans un plasma isotherme $P = \rho kT / m_i$, l'équation précédente décrit alors un processus de diffusion, $\partial \rho / \partial t = D_P \Delta \rho$, où le coefficient de diffusion du fluide MHD D_P est donné par :

$$D_P = \frac{\rho kT}{m_i \eta B^2} \approx \rho_L^2 \nu \quad (7.20)$$

Notons que cette expression est conforme aux résultats obtenus dans le cadre du modèle à deux fluides (6.15) : $D_{\perp} \approx \nu_c^2 D / \omega_c^2 = \rho_L^2 \nu_c$.

7.2.3 Diffusion du champ

Étudions maintenant le problème complémentaire de la diffusion du champ magnétique dans un plasma infini au repos (Figure 7.6).

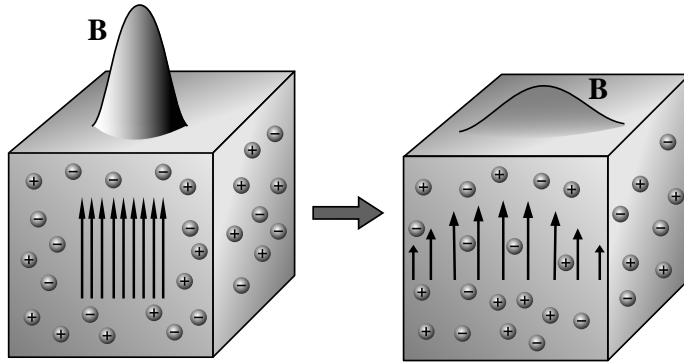


Figure 7.6 Diffusion quasi-statique du champ dans le plasma.

Ce problème a été résolu dans le troisième chapitre (3.23). Les équations de Maxwell-Faraday, Maxwell-Ampère et Ohm décrivant ce phénomène,

$$\begin{aligned} \text{Équation de Maxwell-Faraday} & : \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{Équation de Maxwell-Ampère} & : \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \\ \text{Loi d'Ohm} & : \mathbf{J} = \eta \mathbf{E} \end{aligned}$$

permettent d'obtenir une équation de diffusion pour le champ magnétique par élimination du champ électrique : $-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \Delta \mathbf{B} = \mu_0 \eta \partial \mathbf{B} / \partial t$. Le coefficient de diffusion du champ magnétique dans la matière est donc donné par :

$$D_M = \frac{1}{\mu_0 \eta} \approx \lambda_p^2 \nu \quad (7.21)$$

La question est maintenant d'identifier le phénomène dominant dans une situation où le plasma et le champ sont libres : **la matière diffuse-t-elle plus vite dans le champ que le champ dans la matière** ? La réponse est donnée par la valeur du rapport des coefficients de diffusion.

$$\frac{D_P}{D_M} = \frac{\beta}{2} \approx \left(\frac{\rho_L}{\lambda_p} \right)^2 \quad (7.22)$$

Dans les plasmas à faible β il nous faudra prendre en compte la diffusion du champ dans la matière et dans les plasmas à fort β la diffusion de la matière dans le champ.

7.3 THÉORÈMES D'ALFVÉN

Les deux théorèmes que nous allons démontrer ici caractérisent le régime non dissipatif de la MHD où $\mathcal{R}_M \gg 1$.

7.3.1 Théorème du flux

Soit un fluide MHD idéal de vitesse \mathbf{V} donnée, dont la dynamique magnétique est contrainte par l'équation de Maxwell-Faraday et la loi d'Ohm.

$$\begin{aligned} \text{Loi d'Ohm en MHD idéal} & : \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \\ \text{Équation de Maxwell-Faraday} & : \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

Considérons une courbe fermée, $\mathcal{C}(t)$, plongée dans ce fluide et attachée à ce fluide. Soit $\mathcal{S}(t)$ une surface orientée s'appuyant sur $\mathcal{C}(t)$. Cette courbe est entraînée par l'écoulement du fluide et se déforme sous l'effet de l'inhomogénéité de l'écoulement (Figure 7.7).

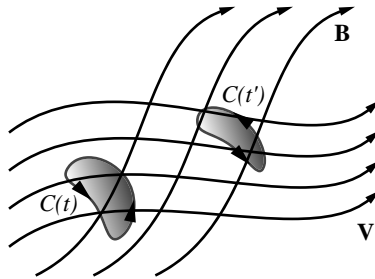


Figure 7.7 Théorème du flux : entraînement du circuit $\mathcal{C}(t)$.

De même, à travers les équations précédentes, cet écoulement modifie la valeur du champ magnétique.

Malgré ces variations de champ et l'évolution de la surface \mathcal{S} le flux du champ magnétique Φ à travers la courbe \mathcal{C} reste constant.

Pour démontrer ce théorème du flux considérons la variation temporelle du flux $\Phi(t)$ durant un temps dt .

$$\begin{aligned} d\Phi &= \iint_{\mathcal{S}(t+dt)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t+dt) \cdot d\mathbf{s} - \iint_{\mathcal{S}(t)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} \\ &= \iint_{\mathcal{S}(t+dt)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} - \iint_{\mathcal{S}(t)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} + \iint_{\mathcal{S}(t+dt)} dt \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \end{aligned}$$

Le flux du champ magnétique à travers toute surface fermée étant nul, la somme des deux premiers termes du deuxième membre est égale aux flux de \mathbf{B} à travers

la surface balayée par la courbe pendant la durée infinitésimale dt . Le flux à travers cette surface latérale infinitésimale peut être exprimé comme la circulation le long de la courbe de l'élément de surface latérale engendré par le mouvement de la courbe : $d\mathbf{l} \times \mathbf{V}dt$ (Figure 7.8).

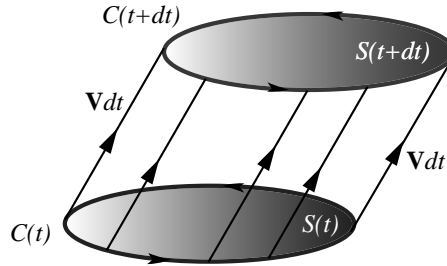


Figure 7.8 Théorème du flux : flux latéral.

La variation de flux précédente se réécrit donc :

$$\frac{d\Phi}{dt} = - \oint_{C(t)} \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{V}) + \iint_{S(t)} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} + O(dt^2)$$

Le produit mixte du premier terme du deuxième membre peut être réarrangé pour faire apparaître la circulation du champ $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ ($= -\mathbf{E}$) le long de la courbe C ; quant au deuxième terme il peut être exprimé en fonction du champ électrique à travers l'équation de Maxwell-Faraday. Nous obtenons ainsi la différence entre deux termes que le théorème de Stokes rend égaux et la variation de flux est donc nulle.

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= - \oint_{C(t)} (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} + \iint_{S(t)} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \\ &= \oint_{C(t)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \iint_{S(t)} \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \end{aligned}$$

Ce résultat constitue le premier théorème d'Alfvén ou théorème du flux.

$$\frac{d}{dt} \Phi [\mathbf{B}(\mathbf{r}, t), C(\mathbf{r}, t)] = 0 \quad (7.23)$$

Cette propriété étant vraie pour un circuit quelconque, elle implique un très fort couplage entre le fluide et le champ et permet de dégager un image physique où **le fluide et le champ sont attachés dans une évolution commune**, le deuxième théorème d'Alfvén confirme et complète cette image. Ce résultat est à rapprocher de l'invariance adiabatique de l'invariant de flux établie lors de l'étude des orbites de particules chargées dans des champs non stationnaires et inhomogènes (5.3).

7.3.2 Théorème du gel

Nous avons considéré, lors de la modélisation MHD, que le fluide ionique et le fluide électronique étaient fortement couplés à travers l'hypothèse de quasi-neutralité. Le deuxième théorème d'Alfvén, dit théorème du gel, complète cette image en identifiant un couplage fort supplémentaire entre le champ magnétique et le fluide MHD. Dans le cadre de la MHD idéale, à champ de vitesse donné \mathbf{V} , le fluide entraîne le champ magnétique à travers l'équation $\nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) = \partial \mathbf{B} / \partial t$ et, pour un champ magnétique donné \mathbf{B} , le champ entraîne le fluide à travers l'équation $\rho \partial \mathbf{V} / \partial t + \rho (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla P + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} / \mu_0$. Ces deux phénomènes sont en fait suffisamment efficaces pour que l'on puisse considérer le champ et la matière comme gelés ensemble lors de l'évolution dynamique. **Les particules fluides situées sur une même ligne de champ restent au cours de l'évolution MHD idéale.** Ceci constitue l'une des formulations du théorème du gel que nous allons maintenant démontrer.

Soient deux points voisins M_1 et M_2 situés sur une même ligne de champ à l'instant $t = 0$. Soit \mathbf{L} le vecteur reliant ces deux points : $\mathbf{L} = \overrightarrow{M_1 M_2}$. \mathbf{L} est donc un vecteur tangent à une ligne du champ à l'instant $t = 0$. Le fluide s'écoulant, les points M_1 et M_2 vont se déplacer et le vecteur \mathbf{L} évoluer. Nous allons démontrer que cette évolution maintient \mathbf{L} tangent aux lignes du champ, justifiant ainsi l'énoncé du théorème du gel précédent. À l'instant $t = 0$: $\mathbf{L}(t = 0) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t = 0) = \mathbf{0}$. Démontrons que cette propriété est conservée par la dynamique MHD idéale.

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{L}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] = \mathbf{L}(t) \times \frac{d\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{dt} + \frac{d\mathbf{L}(t)}{dt} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$

Les variations de $\mathbf{L}(t)$ sont induites par les mouvements des points M_1 et M_2 et les variations de $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ se calculent à partir de l'évolution locale et de l'évolution convective.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \mathbf{V}(M_2) - \mathbf{V}(M_1) = (\mathbf{L} \cdot \nabla) \mathbf{V} \\ \frac{d\mathbf{B}}{dt} &= \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{V} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{V}) \end{aligned}$$

La variation de $\mathbf{L} \times \mathbf{B}$ est donc donnée par :

$$\frac{d(\mathbf{L} \times \mathbf{B})}{dt} = \mathbf{L} \times (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{V} - \mathbf{L} \times \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \mathbf{B} \times (\mathbf{L} \cdot \nabla) \mathbf{V}$$

Le deuxième terme du deuxième membre est nul par hypothèse et les deux termes restants sont égaux et de signe opposé. L'équation d'évolution se réduit donc à : $d(\mathbf{L} \times \mathbf{B}) / dt = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{L} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$, le vecteur \mathbf{L} reste donc tangent aux lignes de champ. Le gel entre le champ et la matière ainsi que la conservation du flux impliquent un certain nombre de contraintes topologiques sur les écoulements MHD

idéaux. En particulier, ces théorèmes garantissent la continuité des déformations des tubes de champs magnétiques et l'impossibilité du déchirement de tels tubes.

Un plasma initialement non magnétisé le restera au cours de son évolution et s'il rencontre un champ magnétique il le déformera afin de maintenir un champ nul en son intérieur (Figure 7.9). De même un plasma initialement magnétisé le restera et, s'il est entraîné par une force il entraînera avec lui le champ magnétique en le déformant (Figure 7.9).

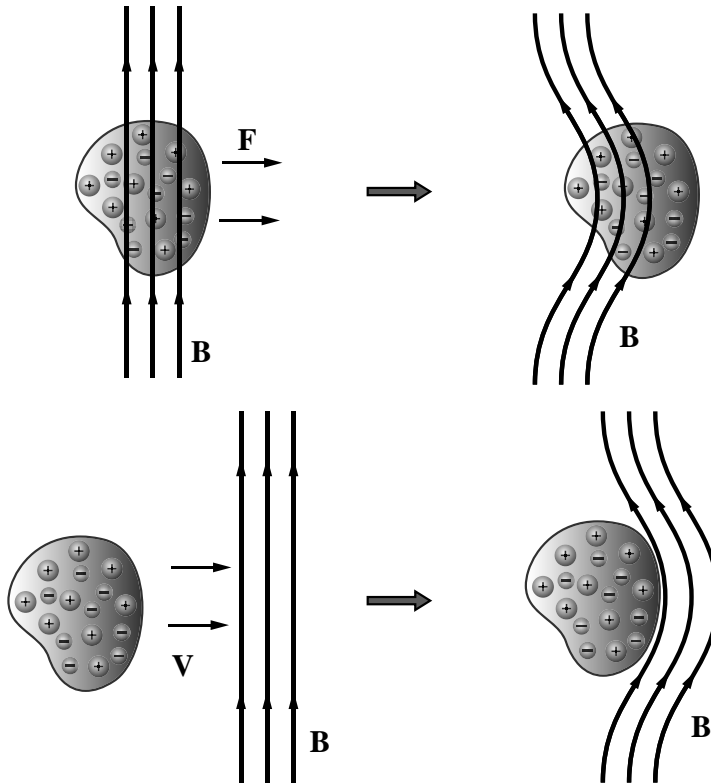


Figure 7.9 Théorème du gel.

Les deux situations présentées sur la figure 7.9 en régime de MHD idéale peuvent être interprétées dans le cadre des théories des dérives et de la magnétisation. Considérons la figure 7.10, un champ déformé \mathbf{B} peut être décomposé en un champ homogène \mathbf{B}_0 plus un champ de déformation \mathbf{d} . Ce champ de déformation est généré par des courants \mathbf{J} qui ne sont autres que les courants résultant de la dérive $\mathbf{F} \times \mathbf{B} / qB^2$ ou \mathbf{F} est la force qui est mise à profit pour extraire le plasma du champ dans le premier cas de la figure 7.9, ou pour pousser le plasma dans le champ dans le deuxième cas de la figure 7.9 ; ces courants étant supplémentés par les courants de magnétisation résultant de l'inhomogénéité du plasma.

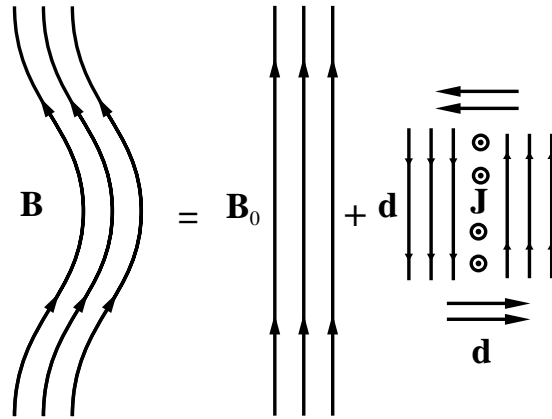


Figure 7.10 Déformation résultant des courants J assurant le gel champ-plasma.

Pour conclure ce paragraphe sur le gel du champ dans la matière il est instructif d'étudier le phénomène de pénétration en présence d'un écoulement et de calculer la longueur de pénétration dynamique δ qui avec λ_p et λ_K (3.2) constituent les trois longueurs caractéristiques d'interaction entre un champ magnétique et un plasma, selon la situation. Considérons, en régime stationnaire, un écoulement $\mathbf{V} = V \cos(z/L) \mathbf{u}_x$ interagissant avec un champ magnétique $\mathbf{B} = b(z)\mathbf{u}_x + B\mathbf{u}_z$ (Figure 7.11).

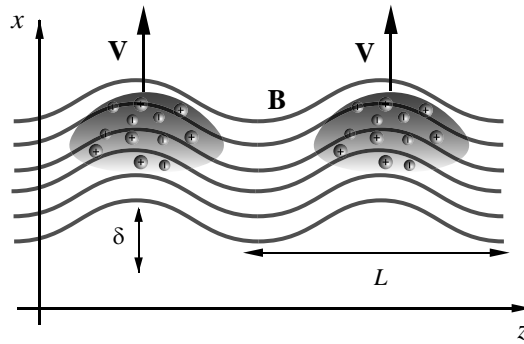


Figure 7.11 Longueur de pénétration δ et périodicité de l'écoulement.

Le champ obéit à l'équation du transport magnétique :

$$\Delta \mathbf{B} + \mu_0 \eta \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) = \mathbf{0} \rightarrow \frac{d^2 b}{dz^2} = \mathcal{R}_M \frac{B}{L^2} \sin\left(\frac{z}{L}\right)$$

où $\mathcal{R}_M = \mu_0 \eta V L$. L'équation des lignes de champ, $x(z)$, est donc donnée par :

$$\frac{dx}{dz} = \frac{b(z)}{B} = -\mathcal{R}_M \sin \frac{z}{L} \rightarrow x(z) = L \mathcal{R}_M \cos\left(\frac{z}{L}\right)$$

L'amplitude de la déformation des lignes de champ définit la longueur de pénétration δ .

$$\delta = \mathcal{R}_M L \quad (7.24)$$

- Si $\mathcal{R}_M \gg 1$, c'est-à-dire pour les faibles dissipations et les grandes vitesses, nous retrouvons le théorème du gel et l'écoulement enfonce le champ mais ne diffuse pas à l'intérieur de la zone magnétisée.
- Si $\mathcal{R}_M \ll 1$, il n'y a pas de déformation des lignes de champ et le champ diffuse dans la zone magnétisée.

Dans le cadre de l'hydrodynamique, nous avons établi au chapitre précédent la classification des régimes d'écoulements d'un fluide neutre (6.1) sur la base de la normalisation de l'équation de Navier-Stokes qui fait ainsi apparaître les nombres de Mach M_a et Reynolds R_e comme les deux seuls paramètres de contrôle de la dynamique.

$$nm \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -nm \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} - \nabla P + \zeta \Delta \mathbf{V} \rightarrow \begin{aligned} M_a &\approx \sqrt{\left| \frac{nm \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}}{\nabla P} \right|} \\ R_e &\approx \left| \frac{nm \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}}{\zeta \Delta \mathbf{V}} \right| \end{aligned}$$

En magnétohydrodynamique, nous avons aussi identifié deux paramètres de contrôles : le paramètre bêta β et le nombre de Reynolds magnétique \mathcal{R}_M .

$$\text{Plasma} : \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \frac{\nabla \times \mathbf{B} \times \mathbf{B}}{\rho \mu_0} \rightarrow \beta \approx \left| \frac{\nabla P}{\nabla \times \mathbf{B} \times \mathbf{B} / \mu_0} \right|$$

$$\text{Champ} : \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \frac{\Delta \mathbf{B}}{\mu_0 \eta} \rightarrow \mathcal{R}_M \approx \left| \frac{\nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B})}{\Delta \mathbf{B} / \mu_0 \eta} \right|$$

Ainsi, l'ensemble des études précédentes sur le paramètre β et le nombre de Reynolds magnétique \mathcal{R}_M permet de construire une classification des régimes d'écoulement MHD, classification résumée dans le tableau (7.1).

Tableau 7.1

	$\mathcal{R}_M \gg 1$	$\mathcal{R}_M \ll 1$
$\beta \gg 1$	Le champ est convecté par le plasma	Le plasma diffuse dans le champ
$\beta \ll 1$	Le plasma est convecté par le champ	Le champ diffuse dans le plasma

Enfin, notons que le paramètre β peut être évalué sur la base de la pression cinétique, tel que nous l'avons défini initialement par la relation (7.14), mais nous pouvons aussi considérer la pression équivalente associée à un écoulement en calculant la densité volumique d'énergie résultant du mouvement macroscopique.

7.4 ÉQUILIBRES MHD

7.4.1 Équilibre MHD

Le problème de l'existence d'équilibres magnétohydrodynamiques est l'un des principaux sujets d'études des programmes de recherches sur le confinement magnétique des plasmas thermonucléaires. De tels équilibres MHD existent et possèdent un certain nombre de propriétés que nous allons étudier ici. En régime statique, $\partial/\partial t = 0$, $\mathbf{V} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{0}$, les équations de la MHD se réduisent à l'équilibre entre les forces de pression et la force de Laplace, équilibre contraint par l'équation de Maxwell-Ampère.

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \times \mathbf{B} &= \nabla P \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (7.25)$$

Une première conséquence de ces équations concerne l'organisation respective du champ magnétique \mathbf{B} , de la densité de courant \mathbf{J} et du gradient de pression ∇P : $\mathbf{J} \cdot \nabla P = 0$, $\mathbf{B} \cdot \nabla P = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. Le gradient de pression est normal aux surfaces isobares, les lignes de courants sont tangentes en tout point aux surfaces isobares, de même, les lignes de champ sont tangentes en tout point aux surfaces isobares (Figure 7.12).

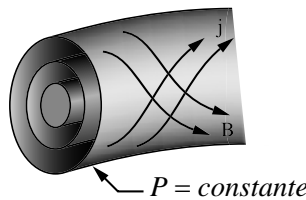


Figure 7.12 Équilibre MHD, surfaces magnétiques et isobares.

Les lignes de courant et les lignes de champ ne sont pas identiques. Les surfaces isobares sont aussi des surfaces magnétiques. Une surface magnétique est une surface $\mathbf{r}(u, v)$ telle que le champ magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ soit tangent en tout point à cette surface.

$$\text{Surface magnétique } \mathbf{r}(u, v) : \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$$

Cette identité entre surfaces isobares et surfaces magnétiques ne garantit pas l'existence des surfaces magnétiques. En effet, le champ de pression ne peut être fixé *a priori* et résulte des processus de transport qui sont contrôlés par le champ magnétique, les collisions et/ou la turbulence. Il faut donc assurer en premier lieu l'existence de surface magnétique pour obtenir un équilibre. Ce problème de l'existence de surfaces magnétiques est techniquement équivalent au problème de l'intégrabilité

d'un système hamiltonien de dimension $3/2$. L'intégrabilité d'un tel système n'est pas une propriété générique et nécessite des hypothèses supplémentaires (Chapitre 10). Néanmoins, en imposant des propriétés de symétrie, il est possible de trouver des solutions d'équilibre au système d'équations décrivant l'équilibre MHD. Nous allons étudier de telles solutions sous l'hypothèse de symétries continues de translation et rotation.

7.4.2 Équilibres cylindriques

Sur la base de la décomposition de la force de Laplace en pression et tension magnétiques (7.13), deux types d'équilibres cylindriques peuvent être considérés. En effet, la condition d'équilibre $\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \nabla P$ peut s'écrire :

$$\nabla P + \nabla_{\perp} P_B = \frac{2P_B}{\mathcal{R}} \mathbf{n}$$

Il est donc possible de considérer des configurations droites, sans courbure :

$$\mathcal{R} = +\infty \rightarrow \nabla P + \nabla_{\perp} P_B = \mathbf{0}$$

et des configurations courbes où la tension magnétique joue un rôle. La plus simple des configurations droites, appelée θ -pinch, est constituée par une colonne de plasma cylindrique plongée dans un champ magnétique de direction constante (Figure 7.13). La direction du champ magnétique est choisie comme l'axe d'un système de coordonnées cylindriques et $(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{\theta}, \mathbf{u}_z)$ est une base cylindrique d'axe z .

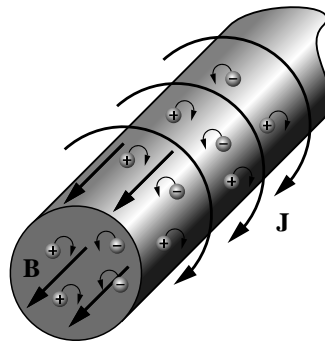


Figure 7.13 Configuration θ -pinch.

La structure du champ et du courant sont donc déterminées par les composantes axiale et orthoradiale $B(r)$ et $J(r)$:

$$\mathbf{B} = B(r)\mathbf{u}_z, \mathbf{J} = J(r)\mathbf{u}_{\theta}.$$

L'équation d'équilibre suivant la direction radiale, $d(P + P_B)/dr = 0$, s'intègre directement pour donner la relation :

$$P(r) + \frac{B^2(r)}{2\mu_0} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \quad (7.26)$$

où $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{u}_z$ est le champ magnétique à l'extérieur du plasma où la pression s'annule. Un tel équilibre peut être réalisé à l'aide d'un système de bobinages créant un champ magnétique uniforme, puis en plongeant un cylindre de plasma dans un tel champ.

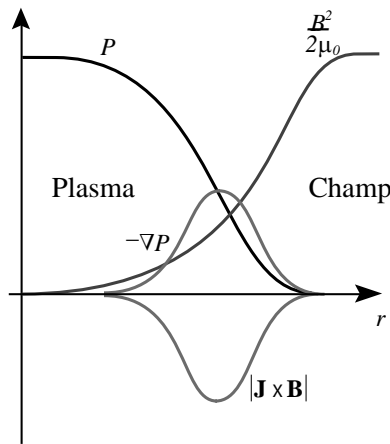


Figure 7.14 Équilibre d'une configuration θ -pinch.

Le champ à l'intérieur du plasma est plus petit qu'à l'extérieur car la pression cinétique prend le relais de la pression magnétique (Figure 7.14). Les courants dans le plasma sont donc globalement diamagnétiques. Il est instructif d'identifier la nature exacte de ces courants, en particulier, de distinguer s'il sont dûs aux mouvements de dérives ou aux mouvements cyclotroniques. Dans le chapitre traitant des dérives nous avons établi l'expression générale des différents courants (5.21), qui, pour le cas d'une configuration θ -pinch, sont donnés par : $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{DG} + \mathbf{J}_m$,

$$\mathbf{J}_{DG} = \frac{P}{B^2} \mathbf{b} \times \nabla B, \quad \mathbf{J}_m = -\frac{\nabla P \times \mathbf{b}}{B} - \frac{P}{B^2} \mathbf{b} \times \nabla B$$

La somme de ces deux types de courants assure l'équilibre en développant une force de Laplace s'opposant à la détente du plasma : $[\mathbf{J}_{DG} + \mathbf{J}_m] \times \mathbf{B} = \nabla P$; l'importance relative des mouvements de dérives et des rotations cyclotroniques peut être exprimée en fonction du paramètre β .

$$\beta = \frac{P}{B^2/2\mu_0} = \frac{B_0^2 - B^2}{B^2} \rightarrow \beta \mathbf{J}_m + (\beta + 2) \mathbf{J}_{DG} = \mathbf{0}$$

Ainsi, trois régimes d'équilibres sont identifiés :

$$\beta \ll 1 \rightarrow B \sim B_0 \rightarrow \beta \sim 2 \frac{B_0 - B}{B_0} \rightarrow J_m \gg J_{DG} \rightarrow J \sim J_m$$

$$\beta \sim 1 \rightarrow B \sim \frac{\sqrt{2}}{2} B_0 \rightarrow J_{DG} + J_m = J \sim -2J_{DG} \sim \frac{2}{3} J_m$$

$$\beta \gg 1 \rightarrow B < B_0 \rightarrow \beta \sim \frac{B_0^2}{B^2} \rightarrow J_{DG} + J_m \sim 0 \rightarrow J \sim J_s$$

On voit donc que, pour les équilibres à faible β , ce sont les courants de magnétisation qui assurent l'équilibre, alors que, pour les équilibres à fort β , les courants de dérives deviennent comparables aux courants de magnétisation et ce sont les courants surfaciques de magnétisation J_s qui assurent l'équilibre. Ce résultat n'est pas surprenant compte tenu de la tendance naturelle à l'écrantage des plasmas.

Un deuxième type d'équilibre cylindrique se rencontre communément en physique des décharges à haute densité d'énergie, les Z-pinch. Dans ces décharges, le courant est purement axial et le champ purement azimuthal (Figure 7.15). Dans ce type d'équilibre, la pression cinétique est à la fois équilibrée par la pression magnétique et la tension magnétique. La direction du courant est choisie comme l'axe d'un système de coordonnées cylindriques : $\mathbf{B} = B(r)\mathbf{u}_\theta$, $\mathbf{J} = J(r)\mathbf{u}_z$ où $(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_z)$ est une base cylindrique d'axe z . La condition générale d'équilibre pour cette configuration possédant une symétrie de rotation se traduit par :

$$\nabla P = -\nabla_\perp P_B + \frac{2P_B}{\mathcal{R}} \mathbf{n} = -\nabla_\perp P_B - 2 \frac{P_B}{\mathcal{R}} \mathbf{u}_r \rightarrow \frac{dP}{dr} = -\frac{B}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rB)$$

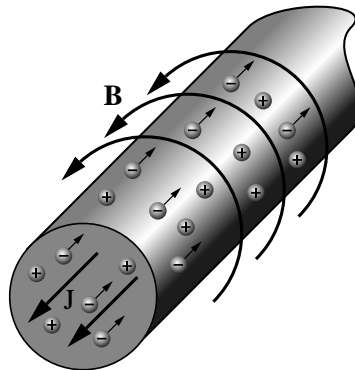


Figure 7.15 Z-pinch.

Cette dernière relation peut être intégrée pour obtenir une condition intégrale d'équilibre, **la condition de Bennett**.

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{dP}{dr} r^2 dr &= -\frac{1}{\mu_0} \int_0^R r B \frac{dr B}{dr} dr \rightarrow [r^2 P]_0^R - 2 \int_0^R r P dr \\ &= -\frac{1}{2\mu_0} \int_0^R \frac{d}{dr} (r^2 B^2) \\ P(R) &= 0 \rightarrow 2 \int_0^R r P dr = \frac{R^2 B^2(R)}{2\mu_0} = \frac{\mu_0}{8\pi^2} I^2 \end{aligned} \quad (7.27)$$

où I est le courant axial total et R le rayon du plasma. Nous allons réécrire cette condition de Bennett, $4\pi^2 R^2 B^2 = \mu_0^2 I^2$, sous une forme mettant en lumière son origine et sa signification physique.

Considérons l'équilibre de type Z -pinch d'un faisceau de particules neutralisé par un fond continu de particules de signe opposé, au repos et froides. Ce faisceau est décrit par la fonction de distribution des vitesses $f(v_x, v_y, v_z)$ et la densité $n(r)$, la pression, le courant et la vitesse axiale constituent un ensemble de moments caractéristiques de cette distribution de vitesse (6.2) : $P(r) = n(r) \frac{m}{2} \langle v_x^2 + v_y^2 \rangle$,

$$I = q \int_0^R 2\pi r n(r) \langle v_z \rangle dr.$$

$$\langle v_z \rangle = \int v_z f(v_x, v_y, v_z) d\mathbf{v}, \quad \langle v_x^2 + v_y^2 \rangle = \int (v_x^2 + v_y^2) f(v_x, v_y, v_z) d\mathbf{v}$$

Introduisons le courant limite, non relativiste, d'Alfvén I_A (6.38).

$$I_A \equiv \frac{4\pi\epsilon_0 m_e c^3}{q} = 17 \text{ kA} \quad (7.28)$$

La condition de Bennett (7.27) s'exprime alors de manière remarquablement simple et peut être interprété comme un critère d'anisotropie de la distribution de vitesse.

$$\frac{\langle v_x^2 + v_y^2 \rangle}{\langle v_z \rangle} = c \frac{I}{I_A} \quad (7.29)$$

Ainsi, deux situations sont possibles hors équilibre MHD :

- $\langle v_x^2 + v_y^2 \rangle > \langle v_z \rangle c I / I_A$ le faisceau éclate sous l'effet des forces de pression,
- $\langle v_x^2 + v_y^2 \rangle < \langle v_z \rangle c I / I_A$ le faisceau collapse sous l'effet des forces de Laplace.

Ce type de relation entre (i) le rapport d'une température sur une vitesse dirigée, et (ii) le rapport du courant au courant d'Alfvén, est très général et se rencontre dans toutes les instabilités d'anisotropie magnétique fluide ou cinétique. Son interprétation physique est basée sur le fait que des courants de même sens ont tendance à s'attirer,

donc les densités volumiques de courants développent une tendance à la contraction (c'est le phénomène universel de pincement (pinch) magnétique) qui doit être équilibrée par la tendance à la détente générée par l'agitation thermique. Pour éviter le collapse magnétique une force de pression est nécessaire, d'où la relation entre température et courant. Pour des vitesses axiales relativistes la dernière formulation de la condition d'équilibre (7.29) peut se traduire à travers la notion de courant limite d'Alfvén : **le courant peut, au maximum, être égal au courant d'Alfvén** si le contenu énergétique des différents degrés de liberté est du même ordre de grandeur ($\langle v_x^2 + v_y^2 \rangle \sim \langle v_z \rangle c \sim c^2$). D'un point de vue dynamique, ce courant limite d'Alfvén est similaire au courant limite de Child-Langmuir (J_{CL} , 6.36), mais la limite est ici de nature magnétique.

Ces deux limites, Alfvén et Child-Langmuir, sont dues à la rétro-action des champs sur les sources (électriques (J_{CL}) ou magnétiques (I_A)).

7.5 HÉLICITÉ ET TOPOLOGIE

7.5.1 Enlacement

L'hypothèse idéale en MHD, $\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$, implique un couplage fort champ-matière, elle implique aussi une *conservation de la complexité topologique du champ magnétique*. Pour démontrer ce résultat, introduisons une mesure de cette complexité topologique : l'hélicité magnétique. Soit un champ magnétique \mathbf{B} , dérivant d'un potentiel vecteur \mathbf{A} , l'hélicité K de cette configuration magnétique, contenue dans un volume \mathcal{V} , est définie comme l'intégrale du produit scalaire $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ étendu au volume \mathcal{V} . Le volume \mathcal{V} est tel que la composante du champ normal à la surface délimitant \mathcal{V} soit nulle.

$$K \equiv \iiint_{\mathcal{V}} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \quad (7.30)$$

Partant de cette définition, nous allons d'abord vérifier qu'elle est invariante de jauge, puis, démontrer qu'elle constitue une mesure de l'enlacement des lignes de champ et tubes de flux, et enfin, établir sont invariance lors de l'évolution MHD idéale.

Considérons donc une transformation de jauge : $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\chi$ et calculons l'hélicité associée à cette nouvelle représentation potentielle du champ magnétique.

$$K = \iiint_{\mathcal{V}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} d\mathbf{r} + \iiint_{\mathcal{V}} \nabla\chi \cdot \mathbf{B} d\mathbf{r}$$

Compte tenu de l'identité : $\nabla\chi \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \chi\mathbf{B}$, la deuxième intégrale peut être ramenée au calcul d'un flux sur la surface délimitant \mathcal{V} . Or, sur cette surface, le flux de \mathbf{B} est nul ; la définition de l'hélicité est donc invariante de jauge. Une fois cette invariance de jauge garantie, il convient de donner un sens physique à cette quantité.

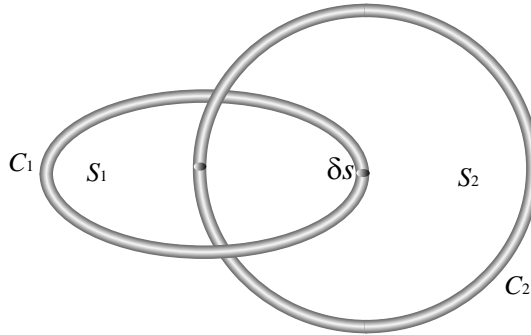


Figure 7.16 Enlacement de deux tubes de flux magnétique.

L'hélicité est un invariant de jauge, c'est-à-dire une quantité physique défini et mesurable, mais quelle est sa signification physique ? Nous allons répondre à cette question et démontrer que l'hélicité magnétique mesure l'enlacement des lignes de champ. Considérons pour cela la figure 7.16 représentant deux tubes de flux magnétique, C_1 et C_2 , enlacés, c'est-à-dire topologiquement liés. Une mesure de l'enlacement de deux courbes est fourni par le nombre N d'intersections entre la première courbe et une surface S s'appuyant sur la deuxième courbe.

$$N \equiv \oint_{C_2} d\mathbf{l}_2(\mathbf{r}_2) \cdot \iint_{S_1} d\mathbf{s}_1(\mathbf{r}_1) \delta[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2] = \oint_{C_1} d\mathbf{l}_1(\mathbf{r}_1) \cdot \iint_{S_2} d\mathbf{s}_2(\mathbf{r}_2) \delta[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2] \tag{7.31}$$

Cette définition peut être transformée et N peut être exprimé sous la forme plus usuelle de l'intégrale de Gauss associée aux deux courbes.

$$N \equiv \frac{1}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \times d\mathbf{l}_2 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \tag{7.32}$$

Démontrons l'identité entre les deux expressions de N (7.32) et (7.31). Le théorème de Stokes est d'abord mis à profit pour transformer l'intégrale curviligne sur C_1 en une intégrale sur une surface S_1 s'appuyant sur C_1 .

$$4\pi N = \oint_{C_1} d\mathbf{l}_1 \cdot \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} = \iint_{S_1} d\mathbf{s}_1 \cdot \nabla_1 \times \nabla_1 \times \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

L'identité : $\nabla \times \nabla \times \mathbf{V} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla^2 \mathbf{V}$ permet ensuite de calculer le double rotationnel, l'une des deux composantes de l'expression étant nulle car le rotationnel d'un gradient est identiquement nul.

$$\nabla_1 \cdot \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = - \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} = - \iint_{S_2} d\mathbf{s}_2 \cdot \nabla_2 \times (\nabla_2 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^{-1})$$

La deuxième composante n'est autre que l'expression 7.31.

$$- \iint_{S_1} d\mathbf{s}_1 \nabla_1^2 \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \iint_{S_1} d\mathbf{s}_1 \oint_{C_2} d\mathbf{l}_2 4\pi\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

Considérons une configuration magnétique composée de deux tubes de flux fins enlacés, 1 et 2 contenant les flux Φ_1 et Φ_2 , tels que ceux représentés sur la figure 7.16. Calculons l'hélicité associée au volume \mathcal{V}_1 délimité par le tube 1 que nous considérerons comme le volume engendré par une surface δS le long d'une ligne de champ fermée C_1 . Introduisons ensuite le flux $\Phi_1 = B\delta S$ caractérisant le tube de flux 1. Compte tenu de la relation de Stokes l'intégrale curviligne le long de C_1 peut s'exprimer comme un flux à travers toute surface S_1 s'appuyant sur C_1 .

$$K = \iiint_{\mathcal{V}_1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} d^3\mathbf{r} = \iiint_{\mathcal{V}_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} B \delta S = \Phi_1 \oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \Phi_1 \iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

Le flux $\iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ ne peut provenir que du champ créé par le tube de flux 2 :

$$\iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{S_1} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{s}.$$

L'expression de l'hélicité K peut donc s'écrire : $K = \Phi_1\Phi_2$ et, si nous considérons des configurations plus enlacées, le résultat devient :

$$K = N\Phi_1\Phi_2 \quad (7.33)$$

où nous avons introduit N le nombre d'enlacements entre les tubes 1 et 2 défini par les relations (7.32) et (7.31). On voit donc que $K/\Phi_1\Phi_2$ est un indicateur de la complexité topologique de la configuration magnétique. Mais l'indicateur utilisé ici est un invariant topologique d'ordre faible, qui, en comptabilisant les enlacements de manière algébrique ne permet pas de distinguer si deux tubes de flux sont topologiquement libres ou liés. En effet, la configuration représentée sur la figure 7.17 possède une hélicité K nulle alors que les deux tubes ne peuvent être séparés sans coupure.

Néanmoins, l'hélicité possède une propriété d'invariance dynamique qui la rend fort utile dans de nombreux problèmes.

L'hélicité d'une configuration magnétique est conservée aux cours de l'évolution d'un fluide MHD idéal.

Soient un écoulement MHD et un volume \mathcal{V} tel que $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ et $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$ où \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à la surface S délimitant le volume \mathcal{V} . La variation temporelle du potentiel vecteur peut être obtenue à partir de l'équation de Maxwell-Faraday en

régime de MHD idéale.

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \rightarrow \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{V} \times \mathbf{B}$$

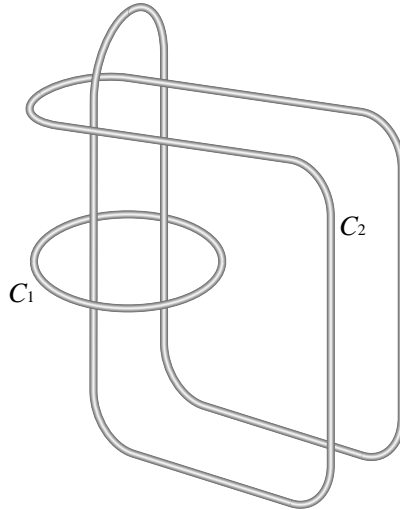


Figure 7.17 Deux tubes de flux magnétique topologiquement liés mais d'hélicité nulle.

Cette expression nous permet d'évaluer la variation temporelle de l'hélicité magnétique.

$$\frac{dK}{dt} = \iiint_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] d\mathbf{r}$$

Le premier terme du membre de droite fait apparaître un produit mixte identiquement nul. La variation d'hélicité peut donc être réécrite comme :

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \iiint_{\mathcal{V}} \left[\mathbf{A} \cdot \left(\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \right] d\mathbf{r} \\ &= \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \left[\mathbf{A} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \left[\mathbf{A} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned}$$

Compte tenu des conditions aux limites sur la surface \mathcal{S} cette dernière intégrale de surface est nulle. L'hélicité magnétique est donc conservée lors de l'évolution MHD idéale.

$$\frac{d}{dt} K [\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] = 0 \quad (7.34)$$

Nous avons vu que la conservation du flux est garantie par le premier théorème d'Alfvén (7.23) et que l'hélicité est égale au produit des flux des différents tubes de champ que multiplie le nombre d'enlacements de ces tubes. Nous pouvons donc conclure

que l'évolution MHD idéale préserve ce nombre d'enlacements et que des lignes de champ initialement liées le restent au cours de l'évolution de la configuration magnétique.

$$\frac{dN}{dt} = 0$$

Lorsque la conductivité n'est pas infinie, le champ et la matière ne sont plus couplés fortement et la diffusion magnétique permet au champ de pénétrer des zones initialement non magnétisées. Les effets de résistivité autorisent donc un accès à des topologies plus simples mais sur des échelles de temps résistives qui peuvent être longues à l'échelle de l'évolution MHD. Ces résultats permettent d'appréhender quelques propriétés universelles et globales des écoulements MHD idéaux.

7.5.2 Équilibres sans forces

Parmi toutes les solutions du problème de l'équilibre MHD, une classe particulière se trouve souvent réalisée pour les équilibres à petit β , ce sont les équilibres dits sans force où le courant est colinéaire au champ magnétique : $\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$. L'équation de Maxwell-Ampère permet d'éliminer le courant dans la relation d'équilibre à pression nulle. Ainsi nous obtenons une relation unique sur le champ.

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \rightarrow [\nabla \times \mathbf{B}] \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \rightarrow \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \lambda[\mathbf{r}, \mathbf{B}(\mathbf{r})] \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (7.35)$$

Cette équation, en apparence simple, décrit en fait des configurations souvent complexes et possédant une hélicité élevée. Nous allons d'abord étudier les raisons qui rendent ce type d'équilibre sans force répendu, et illustrer ensuite le fait que de tels équilibres sont nécessairement topologiquement complexes. Puis, nous étudierons le cas des équilibres sans force linéaires. Nous montrerons que la relaxation énergétique d'une configuration à hélicité constante s'opère vers un équilibre sans force, ce dernier résultat constituant le théorème de Woltjer.

Soit θ l'angle entre le vecteur densité de courant \mathbf{J} et le vecteur champ magnétique \mathbf{B} . Supposons que la longueur de gradient de la pression et la longueur de gradient du champ magnétique soient du même ordre de grandeur. Alors l'ordre de grandeur de θ est donné par

$$\sin \theta = \frac{|\mathbf{J} \times \mathbf{B}|}{JB} = \frac{|\nabla P| \mu_0}{|\nabla \times \mathbf{B}| B} \approx \frac{P \mu_0}{B^2} \approx \beta$$

Pour les équilibres à faible β , la configuration est donc souvent proche d'une configuration sans force $\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$.

Les équilibres sans force ont en général une structure topologique complexe et une hélicité élevée. En particulier, il est impossible qu'une famille de lignes de champ fermées constitue une surface magnétique. Démontrons ce résultat par l'absurde :

soit un champ sans force et une famille de lignes de champ fermées sur une surface magnétique et soit \mathcal{C} une ligne particulière (Figure 7.18). La circulation de \mathbf{B} le long de cette courbe \mathcal{C} est égale au flux du courant à travers la partie de la surface magnétique \mathcal{S} s'appuyant sur \mathcal{C} .

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS \quad (7.36)$$

Or le courant est colinéaire au champ ; donc $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$ car \mathcal{S} est une surface magnétique et $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$. L'intégrale $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ est strictement positive et l'intégrale $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS$ exactement nulle. La proposition de départ est donc fautive : il est impossible qu'une famille de lignes de champ fermées appartiennent à une même surface magnétique. Ce qui implique en général un enlacement des lignes, donc une hélicité élevée.

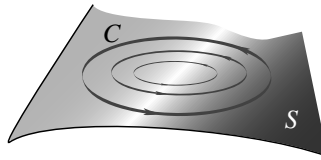


Figure 7.18 Surface magnétique \mathcal{S} et lignes de champ magnétique \mathcal{C} .

Une classe particulière d'équilibres sans force est constituée par les équilibres dits sans force *linéaires* et plus particulièrement ceux où le coefficient de proportionnalité courant-champ λ est constant :

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \lambda [\mathbf{r}, \mathbf{B}(\mathbf{r})] \mathbf{B}(\mathbf{r}) \rightarrow \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \lambda(\mathbf{r}) \mathbf{B}(\mathbf{r}) \rightarrow \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \lambda \mathbf{B}(\mathbf{r}).$$

Compte tenu de l'identité : $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$, une condition nécessaire, mais non suffisante, pour obtenir une solution sans force linéaire est simplement donnée par l'équation de Helmholtz : $\nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}) + \lambda^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$. Le plus simple des équilibres sans force est donc la solution triviale :

$$\mathbf{B} = B_0 \sin(\lambda z) \mathbf{u}_x + B_0 \cos(\lambda z) \mathbf{u}_y, \quad \mathbf{A} = \frac{B_0}{\lambda} \sin(\lambda z) \mathbf{u}_x + \frac{B_0}{\lambda} \cos(\lambda z) \mathbf{u}_y$$

illustrée par la figure (5.7).

Le paramètre λ est proportionnel à l'inverse de la densité volumique d'hélicité $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. Cette solution possède une énergie infinie car elle occupe tout l'espace de manière périodique. Elle peut être régularisée en considérant une solution de type onde évanescente le long de l'axe des z . Ce type de défaut est commun à nombre de solutions d'équilibre sans force linéaires. En général, la construction d'un équilibre physiquement recevable nécessite le raccordement d'une solution sans force localisée, avec une solution avec force qui s'annule suffisamment rapidement à l'infini.

Recherchons maintenant la solution d'équilibre MHD à hélicité donnée qui minimise l'énergie magnétique, c'est-à-dire l'énergie totale à faible β . Nous allons démontrer que la solution à ce problème variationnel est un équilibre sans force. Utilisons pour cela la méthode des multiplicateurs de Lagrange et évaluons la variation de la combinaison linéaire de l'énergie magnétique et de l'hélicité.

$$\delta \left[\int \mathbf{B}^2 d\mathbf{r} - \lambda \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} d\mathbf{r} \right] = \int 2\mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{B} d\mathbf{r} - \lambda \int \mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{A} d\mathbf{r} - \lambda \int \delta\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} d\mathbf{r}$$

où λ est le multiplicateur de Lagrange. Cette expression peut être réécrite :

$$2 \int \nabla \cdot (\delta\mathbf{A} \times \mathbf{B}) d\mathbf{r} + 2 \int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \delta\mathbf{A} d\mathbf{r} - 2\lambda \int \mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{A} d\mathbf{r} - \lambda \int \nabla \cdot (\delta\mathbf{A} \times \mathbf{A}) d\mathbf{r}$$

Les deux termes de divergence peuvent être ramenés à un flux :

$$2 \int \mathbf{n} \cdot (\delta\mathbf{A} \times \mathbf{B}) dS + 2 \int (\nabla \times \mathbf{B} - \lambda\mathbf{B}) \cdot \delta\mathbf{A} d\mathbf{r} - \lambda \int \mathbf{n} \cdot (\delta\mathbf{A} \times \mathbf{A}) dS$$

Les composantes normales du champ de vitesse et du champ magnétique sont prises égales à zéro sur la surface d'intégration, et les variations de potentiel vecteur sont contraintes par l'hypothèse de transformation idéale $\delta\mathbf{A} = \mathbf{V} \times \mathbf{B} \delta t$. Les deux flux sont donc nuls et la solution minimisant l'énergie à hélicité donnée est un champ sans force linéaire : $\nabla \times \mathbf{B} - \lambda\mathbf{B} = \mathbf{0}$. Ce résultat constitue le théorème de Woltjer.

BIBLIOGRAPHIE

► Traités généralistes de physique des plasmas abordant en profondeur certaines problématiques MHD

- P.C. Clemmow et J.P. Dougherty, *Electrodynamics of Particles and Plasmas*, Addison-Wesley, USA, 1969.
- V.E. Golant A.P. Zhilinsky et I.E. Sakharov, *Fundamentals of Plasma Physics*, John Wiley & Sons, 1980.
- R.J. Golston et P.H. Rutherford, *Introduction to Plasma Physics*, IOP, London, UK, 1995.
- N. A. Krall et A.W. Trivelpiece, *Principles of Plasma Physics*, Mc Graw-Hill, USA, 1973.
- D.G. Samaras, *Theory of Ion Flow Dynamics*, Prentice-Hall, NJ, USA, 1962.
- G. Schmidt, *Physics of High Temperature Plasmas*, Academic Press, New York, USA, 1979.

► **Monographies exclusivement dédiées à la MHD**

- G. Bateman, *MHD Instabilities*, The MIT Press, USA, 1978.
- D. Biskamp, *Nonlinear Magnetohydrodynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1993.
- T.G. Cowling, *Magnétohydrodynamique*, Dunod, Paris, France, 1960.
- V.C.A. Ferraro et C. Plumpton, *Magneto-Fluid Mechanics*, Clarendon Press, Oxford, UK, 1962.
- A. Hasegawa et C. Uberoi, *The Alfvén Wave*, Technial Information Center U.S. Department of Energy, Springfield Virginia, USA, 1982.
- A. Jeffrey, *Magnetohydrodynamics*, Intersciences Publishers John Wiley & Sons, New York, USA, 1964.
- L.E. Kalikhman, *Elements of magnetogasdynamics*, Saunders Company, Philadelphia, USA, 1967.
- A.G. Kulikovskiy et G. S. Lyubimov, *Magnetohydrodynamics*, Addison-Wesley, Reading Massachussetts, USA, 1965.

► **Manuels consacrés aux problèmes du confinement magnétique**

- J.P. Freidberg, *Ideal Magnetohydrodynamics*, Plenum Press, New York, USA, 1987.
- R.D. Hazeltine et J.D. Meiss, *Plasma Confinement*, Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City, USA, 1992.
- K. Miyamoto, *Plasma Physics for Nuclear Fusion*, The MIT Press, USA, 1989.
- R.B. White, *The Theory of Toroïdally Confined Plasma*, Imperial College Press, London, UK, 2001.

Chapitre 8

Ondes, oscillations et résonances

Susanna. - Ed hai coraggio di trattar scherzando un negozio si serio ?

8.1 ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

Lorsque l'on s'intéresse à l'interaction champs-plasmas à haute fréquence, deux types de problèmes doivent être considérés :

- les problèmes de rayonnement où une structure radiative, telle qu'une antenne ou un faisceau, génère des ondes électromagnétiques, ce type de problème nécessite l'étude du bilan de puissance spatio-temporel entre les sources et les récepteurs,
- les problèmes d'ondes où l'on s'intéresse exclusivement à la structure spatio-temporelle des solutions des équations linéarisées du champ et du plasma, loin des sources et récepteurs, sans préciser la nature de la source engendrant cette solution et le destin ultime de l'énergie ainsi considérée, ce deuxième type de problème est plus simple et doit être résolu avant d'aborder le problème du rayonnement des structures dans les plasmas.

Ce chapitre est consacré au vaste sujet des ondes électromagnétiques dans les plasmas. Rappelons d'abord quelques résultats d'électrodynamique des milieux continus. Dans un milieu homogène, isotrope, de permittivité ε et de perméabilité μ , les

équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère,

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu}, \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\nabla \times \mathbf{H}}{\varepsilon} \quad (8.1)$$

décrivent les phénomènes : (i) de génération de champ électrique par induction et (ii) de génération de champ magnétique par les courants de déplacement et de polarisation ; ces équations sont satisfaites, entre autres, par une classe de solution représentant des structures spatio-temporelles de champs électromagnétiques appelées ondes.

Plutôt que ce concept vague d'onde, on préférera parler de couplage radiatif ; en effet, on peut distinguer :

- le couplage capacitif entre deux objets, dû à une connexion par des lignes de champ électrique entre les deux objets,
- le couplage inductif, résultant de l'enlacement de deux structures par une ligne de champ magnétique commune,
- le couplage radiatif dû à un phénomène de propagation, le champ électrique ou magnétique issu d'une source génère un champ magnétique ou électrique (8.1), ce dernier engendre alors un champ électrique ou magnétique (8.1), etc. Ce phénomène de propagation, étudié ici dans le cadre de la théorie des ondes, est illustré par la figure 8.1. Loin des sources, les champs ont une structure qui peut être analysée en termes d'ondes.

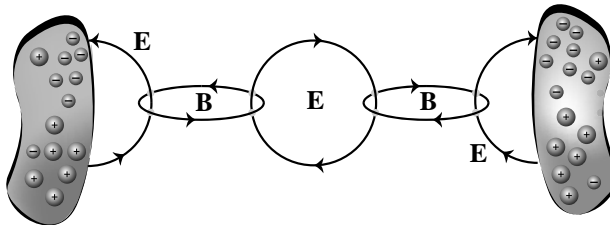


Figure 8.1 Couplage radiatif.

Les ondes monochromatiques (OM) périodiques dans le temps, de pulsation ω : $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp j\omega t$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}) \exp j\omega t$, sont une sous classe bien identifiée de la famille des ondes. Viennent ensuite les ondes planes monochromatiques homogènes (OPMH) telles que l'amplitude complexe soit périodique dans l'espace :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0 \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (8.2)$$

La périodicité temporelle, caractérisée par la pulsation ω , et la périodicité spatiale, décrite par le vecteur d'onde \mathbf{k} , ne sont pas des variables indépendantes et pour ces OPMH, ces deux quantités sont reliées par une relation de dispersion : $\mathbf{k}(\omega)$ ou $\omega(\mathbf{k})$.

De même, les champs électrique et magnétique ne sont pas des variables indépendantes. Le rapport de la composante transverse de \mathbf{E} sur la composante transverse de \mathbf{H} est égal à l'impédance de l'onde, les directions de ces deux vecteurs définissant la polarisation de l'onde qui ne doit pas être confondue avec la polarisation diélectrique du plasma. Pour les milieux linéaires homogènes isotropes considérés ici, la relation de dispersion $\omega(\mathbf{k})$ peut être établie en reportant la solution (8.2) dans le système d'équations (8.1).

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega\mu\mathbf{H}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega\varepsilon\mathbf{E} \rightarrow k^2 = \mu\varepsilon\omega^2 \quad (8.3)$$

Les champs \mathbf{E} , \mathbf{H} et le vecteur d'onde \mathbf{k} forment donc un trièdre orthogonal direct, le rapport du champ électrique sur le champ magnétique est donné par l'impédance $\sqrt{\mu/\varepsilon}$ et cette structure électromagnétique se propage à la vitesse $1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ (Figure 8.2).

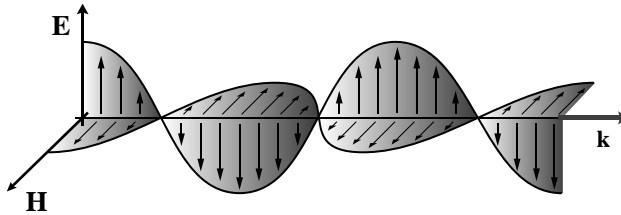


Figure 8.2 Structure d'une OPMH dans un milieu homogène isotrope.

Les OPMH ne constituent pas une simple classe de solutions particulières des équations de Maxwell ; le théorème de représentation de Fourier leur confère un statut de base et toute solution peut être décomposée et analysée comme une superposition d'OPMH. Cette superposition doit être restreinte aux ondes satisfaisant la relation de dispersion (8.3) pour représenter une onde propagative et à tout l'espace (ω, \mathbf{k}) si des ondes évanescentes et des champs quasi-statiques doivent être représentés.

8.1.1 Résonances hybrides

La relation de dispersion dans un milieu non-dispersif $k = \pm\sqrt{\mu\varepsilon}\omega$ est extrêmement simple, mais, dans un plasma, la dispersion est radicalement différente car les courants de polarisation générés par les mouvements électronique et ionique modifient la polarisation des OPMH ainsi que leur dispersion. Différentes branches de dispersion, ou modes, $\omega(\mathbf{k})$ apparaissent ; par exemple, dans un plasma magnétisé à l'équilibre thermodynamique, à une température non nulle, il existe une infinité discrète de modes se propageant perpendiculairement au champ magnétique. L'étude et la classification des modes électromagnétiques dans un plasma s'établit branche par branche en considérant des directions particulières de propagation et des cas particuliers de polarisation ; il est important :

- de distinguer les oscillations, $\omega = \omega_0$, lorsque la pulsation est indépendante du vecteur d'onde,
- de comprendre l'origine des résonances, lorsque $k \rightarrow +\infty$ pour une pulsation ω gardant une valeur finie,
- d'identifier les coupures, lorsque $k = 0$ pour une pulsation ω gardant une valeur finie.

Ces concepts d'oscillations, de coupures et de résonances (Figure 8.3) permettent de développer une classification des modes et sont cruciaux pour analyser le comportement des modes dans des plasmas inhomogènes. Les coupures apparaissent au seuil des transitions entre un comportement propagatif et un comportement évanescent, les résonances correspondent à des modes d'oscillation électrostatiques du plasma dus à la combinaison des effets de charge d'espace et de rotation cyclotronique synchrone.

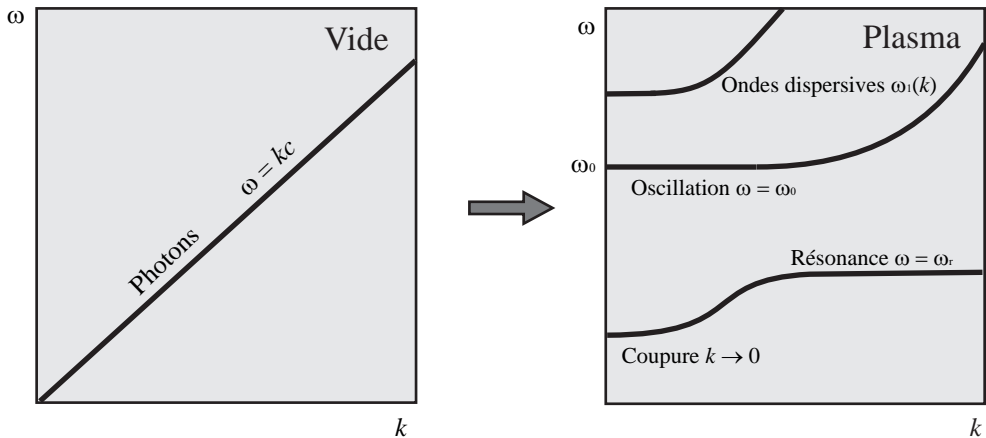


Figure 8.3 Dispersion des OPMH dans les plasmas : résonances et coupures.

Dans un mode plasma, l'énergie est répartie sous quatre formes :

- l'énergie électrique,
- l'énergie magnétique,
- l'énergie cinétique d'oscillation des électrons et
- l'énergie cinétique d'oscillation des ions.

À l'approche d'une résonance, la composante magnétique devient faible et une grande partie de l'énergie apparaît stockée sous forme cinétique et électrique, et est dissipée si des mécanismes supplémentaires de déphasage entre courants et champs sont présents. Nous reviendrons sur le problème des coupure et résonance dans les

paragraphes suivants, dans ce paragraphe nous allons identifier les quatre résonances principales d'un plasma magnétisé : les résonances cyclotroniques et les résonances dites hybrides.

Nous avons déjà identifié l'existence de l'oscillation de Langmuir dans le chapitre consacré aux effets collectifs (3.1) ; de même, dans le chapitre consacré à l'interaction champ-particule, nous avons étudié la rotation cyclotronique qui est aussi une oscillation lorsqu'elle est projetée suivant un axe (5.4). Les résonances hybrides sont les modes électrostatiques propres d'un plasma magnétisé résultant de la combinaison de ces deux types d'oscillations.

Considérons un plasma d'hydrogène, constitué d'électrons et d'ions, plongé dans un champ magnétique statique homogène \mathbf{B}_0 . Caractérisons ce plasma par ses pulsations (fréquences par abus de langage) plasma électronique ω_{pe} , plasma ionique ω_{pi} , cyclotron électronique ω_{ce} et cyclotron ionique ω_{ci} .

$$\omega_{pe}^2 = \frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e} \gg \omega_{pi}^2 = \frac{n_i e^2}{\epsilon_0 m_i}, \quad \omega_{ce} = \frac{e B_0}{m_e} \gg \omega_{ci} = \frac{e B_0}{m_i}$$

Étudions ce plasma au voisinage de son état d'équilibre quasi-neutre ; les ions et les électrons développent une vitesse \mathbf{v} et une accélération $d\mathbf{v}/dt$ en réponse à un champ électrique \mathbf{E} et ce champ électrique trouve son origine dans la séparation de charges résultant de ce mouvement. Vitesse et accélération sont donc solutions des équations de Newton, et le champ satisfait l'équation de Maxwell-Ampère en régime électrostatique : $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$.

$$\text{Loi de Newton} \quad : \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0$$

$$\text{Équation de Maxwell-Ampère} \quad : \quad \nabla \times \mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (8.4)$$

Projetées suivant la direction du champ électrique, perpendiculairement au champ magnétique, ces équations déterminent complètement la structure des résonances ; en effet, on obtient ainsi un système de trois équations et trois inconnues : v_e la composante de la vitesse électronique le long du champ électrique, v_i la composante de la vitesse ionique le long du champ électrique et E le champ électrique.

$$\frac{d^2 v_e}{dt^2} = -\omega_{ce}^2 v_e - \frac{e}{m_e} \frac{\partial E}{\partial t}, \quad \frac{d^2 v_i}{dt^2} = -\omega_{ci}^2 v_i + \frac{e}{m_i} \frac{\partial E}{\partial t}$$

Les oscillations ionique et électronique sont supposées électrostatiques, c'est-à-dire ne génèrent pas de champ magnétique ainsi : $\partial E / \partial t = e(n_e v_e - n_i v_i) / \epsilon_0$. L'élimination du champ électrique entre ces trois équations permet d'obtenir un système de deux équations décrivant les dynamiques électronique et ionique couplées par le

champ au voisinage de l'équilibre quasi-neutre.

$$\begin{aligned} \text{Électrons} & : \frac{d^2 v_e}{dt^2} = -\omega_{ce}^2 v_e - \omega_{pe}^2 (v_e - v_i) \\ \text{Ions} & : \frac{d^2 v_i}{dt^2} = -\omega_{ci}^2 v_i - \omega_{pi}^2 (v_i - v_e) \end{aligned} \quad (8.5)$$

Le comportement des populations électronique et ionique au voisinage de l'équilibre est donc semblable à celui d'un système de deux oscillateurs harmoniques couplés ; les vitesses ionique et électronique obéissent à un système linéaire homogène dont les solutions sont des combinaisons linéaires des deux modes d'oscillations propres obtenus en annulant le déterminant caractéristique.

$$\begin{vmatrix} \omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2 - \omega^2 & -\omega_{pe}^2 \\ -\omega_{pi}^2 & \omega_{ci}^2 + \omega_{pi}^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Les deux fréquences propres sont solutions d'une équation du deuxième degré par rapport à l'inconnu ω^2 . Compte tenu de l'ordering : $\omega_{pe} \gg \omega_{pi}$ et $\omega_{ce} \gg \omega_{ci}$, les deux solutions de cette équation sont données par :

$$2\omega^2 = \omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2 \pm \sqrt{(\omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2)^2 - 4\omega_{ce}^2 (\omega_{ci}^2 + \omega_{pi}^2)}.$$

L'ordering : $\omega_{pe} \gg \omega_{pi}$ et $\omega_{ce} \gg \omega_{ci}$ permet de séparer (i) une solution haute fréquence, la *fréquence hybride haute* : $\omega_{UH} > \omega_{ce}$ et (ii) une solution basse fréquence, la *fréquence hybride basse* : $\omega_{ci} < \omega_{LH} < \omega_{ce}$.

$$\omega_{UH} \approx \sqrt{\omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2}, \quad \omega_{LH} \approx \omega_{ce} \sqrt{\frac{\omega_{ci}^2 + \omega_{pi}^2}{\omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2}} \quad (8.6)$$

Dans la direction perpendiculaire aux lignes de champ, un plasma possède donc deux fréquences propres de résonance. La résonance hybride haute correspondant à une oscillation purement électronique, cette oscillation est la version magnétisée (Figure 8.4) de l'oscillation plasma à la fréquence de Langmuir (3.1). La résonance hybride basse est de nature à la fois ionique et électronique. Les électrons répondent au champ de charge d'espace par un mouvement dont la composante principale est une dérive de champs croisés dans la direction $\mathbf{E} \times \mathbf{B}_0$ plus une dérive de polarisation dans la direction du champ électrique, les ions répondent au champ de charge d'espace par une oscillation électrique dans la direction du champ \mathbf{E} , les ions ne sont pas magnétisés à cette fréquence (Figure 8.4).

Les orbites électronique et ionique pour les résonances hybride haute et hybride basse peuvent être obtenues à partir du système d'équation (8.5) et sont représentées sur la figure 8.4. Ces résonances, ou oscillations, permettent de stocker de l'énergie sous forme cinétique et sous forme électrique et dans un plasma inhomogène lorsque

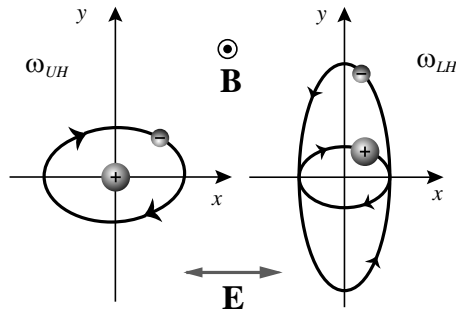


Figure 8.4 Orbites électronique et ionique pour les résonances hybride haute et hybride basse.

une onde électromagnétique s'approche du voisinage de ces résonances, l'énergie transportée par cette onde subit une conversion entre les formes magnétique et cinétique/électrique.

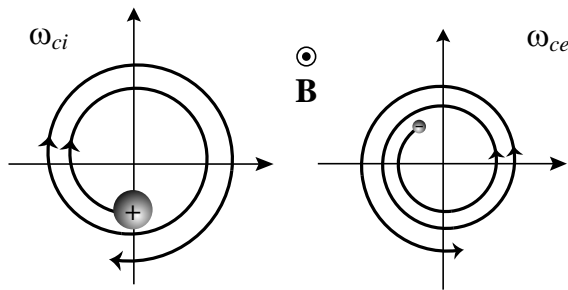


Figure 8.5 Résonances cyclotroniques ionique et électronique.

Les fréquences cyclotrons (5.4) sont aussi des fréquences de résonance lorsque l'on considère la propagation d'ondes le long des lignes de champ (Figure 8.5). Le tableau (8.1) résume cet ensemble de résultats sur les résonances perpendiculairement et parallèlement aux lignes de champ magnétique.

Tableau 8.1

Résonances
Cyclotron électronique : $\omega_{ce} = \frac{ q_e B}{m_e}$
Cyclotron ionique : $\omega_{ci} = \frac{q_i B}{m_i}$
Hybride basse : $\omega_{LH} \approx \sqrt{\omega_{ce} \omega_{ci}}$
Hybride haute : $\omega_{UH} \approx \sqrt{\omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2}$

Loin de ces résonances hybrides et cyclotrons, le transport d'énergie électromagnétique est dit adiabatique et l'outil de description de sa dynamique est le vecteur de Poynting.

8.1.2 Vecteur de Poynting

Une première identification du vecteur décrivant le flux d'énergie électromagnétique peut être menée dans le cadre d'un modèle fluide MHD telle que celui étudié au chapitre précédent. Considérons un modèle MHD isentropique. Le comportement du plasma est décrit par les trois équations de conservation de la quantité de mouvement, de la masse et de l'entropie.

$$\begin{aligned} \text{Équation d'Euler} & : \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla P + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \\ \text{Conservation de la masse} & : \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} = 0 \\ \text{Conservation de l'entropie} & : \frac{d}{dt} (P \rho^{-\gamma}) = 0 \end{aligned}$$

Le champ électromagnétique obéit aux équations de Maxwell-Ampère et de Maxwell-Faraday et le couplage champs-plasma s'opère à travers la loi d'Ohm.

$$\begin{aligned} \text{Équation de Maxwell-Faraday} & : \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{Équation de Maxwell-Ampère} & : \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \\ \text{Loi d'Ohm} & : \mathbf{J} = \eta (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

Transformons l'équation d'Euler pour faire apparaître $\nabla \times \mathbf{V}$ la vorticité : $\rho \partial \mathbf{V} / \partial t + \rho [\nabla \mathbf{V}^2 / 2 + (\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V}] = -\nabla P + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$. Formons ensuite le produit scalaire de cette dernière équation avec le vecteur vitesse \mathbf{V} et exprimons le dernier terme de l'identité ainsi obtenue en fonction du champ magnétique.

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2} \frac{\partial V^2}{\partial t} + \frac{\rho}{2} \mathbf{V} \cdot \nabla V^2 & = -\mathbf{V} \cdot \nabla P + \mathbf{V} \cdot \mathbf{J} \times \mathbf{B} \\ \mathbf{V} \cdot \mathbf{J} \times \mathbf{B} & = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{V} \times \mathbf{B} = -\frac{J^2}{\eta} + \frac{\nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}}{\mu_0} \end{aligned}$$

L'identité vectorielle $\nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ permet alors de faire apparaître la densité volumique d'énergie magnétique $B^2 / 2\mu_0$ en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday. Enfin, le gradient de pression ∇P peut être éliminé en développant l'équation de conservation de la masse et l'équation d'état isentropique : $\partial P / \partial t + \mathbf{V} \cdot \nabla P + \gamma P \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$. La forme finale du résultat ainsi obtenu permet d'identifier l'énergie interne massique $\mathcal{U} \equiv kT / m (\gamma - 1)$, l'enthalpie massique

$\mathcal{H} \equiv \gamma kT/m(\gamma - 1)$ et la dissipation Ohmique J^2/η .

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{2} V^2 + \rho \mathcal{U} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{\rho}{2} V^2 + \rho \mathcal{H} \right) \mathbf{V} + \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} \right] = -\frac{J^2}{\eta} \quad (8.7)$$

Cette relation finale peut être analysée et interprétée comme une équation de bilan énergétique où les variations des densités locales d'énergie sont en relation avec des flux de puissance. Introduisons, pour obtenir ce bilan taux/flux, la densité volumique d'énergie magnétique u , la densité volumique de puissance dissipée w et le vecteur de Poynting \mathbf{S} .

$$u \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3} \right] = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad w \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right] = -\frac{J^2}{\eta}, \quad \mathbf{S} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0}$$

La forme (8.7) est bien celle d'une relation de conservation, le taux de variation temporelle locale de la somme de l'énergie cinétique plus l'énergie interne plus l'énergie magnétique est égal à (i) la divergence d'un flux où l'on reconnaît la somme du flux d'énergie du fluide plus le vecteur de Poynting \mathbf{S} et (ii) aux pertes locales par effet Joule w .

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{2} V^2 + \rho \mathcal{U} + u \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{\rho}{2} V^2 + \rho \mathcal{H} \right) \mathbf{V} + \mathbf{S} \right] = w$$

Ce cas particulier du bilan énergétique en régime MHD peut être généralisé pour tous les régimes dynamiques des plasmas. Dans ce chapitre nous allons développer la théorie du transport et de la dissipation de l'énergie électromagnétique dans les plasmas en régime adiabatique et linéaire :

- par régime adiabatique nous entendons la restriction à une bande de fréquence ne contenant pas de fréquences de résonances hybrides ou cyclotrons ;
- par régime linéaire nous exprimons le fait que l'analyse du bilan énergétique dans sa forme la plus achevée sera restreinte au cas d'une réponse linéaire du plasma.

La construction d'un champ électrique potentiel dans le vide nécessite le travail d'un opérateur qui est amené à séparer des charges de signes opposés ou à rassembler des charges de même signe pour générer le champ, ces opérations impliquent une dépense de travail de la part de l'opérateur ; cette dépense peut être interprétée comme une énergie potentielle ainsi stockée (ou extraite) dans (de) la structure charges-champ. En effet, on démontre que le travail quasi-statique ainsi mis en œuvre ne dépend pas du chemin suivi, il est donc une fonction d'état indépendante de l'histoire du système.

De façon similaire, la construction d'un champ magnétique nécessite l'établissement d'un courant, or, durant l'allumage d'un champ magnétique, un champ électromoteur d'induction va s'opposer au passage du courant, l'opérateur en charge de l'allumage

est donc amené à fournir un travail pour contrer cette opposition due au champ d'induction, ce travail est indépendant de l'histoire du système et ne dépend que de l'état magnétique ; c'est donc aussi une énergie potentielle.

On construit ainsi la densité volumique d'énergie électromagnétique u , dont l'intégrale de volume mesure le coût énergétique total de la séparation de charges et du lancement des courants qui ont permis la construction des champs ; charges et courants étant les sources des champs.

En présence de courant de conduction \mathbf{J}_l (Tableau 2.2), de polarisation \mathbf{J}_p (2.13) et de magnétisation \mathbf{J}_m (2.17) le champ électrique ainsi établi et maintenu peut travailler et transférer une partie de son énergie de façon continue au plasma, c'est-à-dire développer une puissance w par un unité de volume.

$$u \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3} \right] \equiv \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}, \quad w \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right] \equiv -\mathbf{J}_l \cdot \mathbf{E} - \mathbf{J}_p \cdot \mathbf{E} - \mathbf{J}_m \cdot \mathbf{E} \quad (8.8)$$

Il serait particulièrement intéressant d'établir une relation entre la perte d'énergie du champ par unité de temps et unité de volume $\partial u / \partial t$ et la puissance échangée avec la matière w , une telle relation entre u et w constituerait le point de départ de l'énergétique de l'interaction champs-plasma.

Pour établir cette relation considérons les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday (2.14 et 2.18) :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_l + \partial \mathbf{D} / \partial t.$$

L'identité $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$ permet alors d'exprimer :

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{J}_l \cdot \mathbf{E} \quad (8.9)$$

Le troisième terme du membre de droite représente le transfert de puissance vers les courants de conduction ; le deuxième terme :

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\epsilon_0 \mathbf{E}^2}{2} \right] + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\epsilon_0 \mathbf{E}^2}{2} \right] + \mathbf{J}_p \cdot \mathbf{E}$$

est constitué de la somme de la variation d'énergie électrique, plus le transfert de puissance vers les courants de polarisation. Enfin, le premier terme :

$$\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right] - \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

peut être réarrangé pour exprimer l'interaction avec les courants de magnétisation. Cette transformation nécessite l'utilisation de l'identité vectorielle :

$$-\mathbf{M} \cdot \partial \mathbf{B} / \partial t = \mathbf{M} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{M}) + \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{M}).$$

Le résultat final s'établit comme :

$$\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right] + \mathbf{J}_m \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{M})$$

La relation (8.9) permet alors d'exprimer la variation locale d'énergie électromagnétique comme résultant de deux phénomènes : (i) un phénomène de transport de puissance décrit par \mathbf{S} le vecteur de Poynting, et (ii) un phénomène de transfert de puissance vers les courants de conduction, de polarisation et de magnétisation décrit par w .

$$\mathbf{S} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \equiv \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = w \quad (8.10)$$

Le signe de ce couplage entre le champ électrique et les courants peut être positif ou négatif selon l'état d'excitation du plasma. Ce premier théorème de Poynting est qualifié de *général* car il est valable :

- quel que soit la dépendance temporelle de la polarisation, de la magnétisation et des champs et courants,
- quel que soit les relations entre polarisation et magnétisation d'une part et champ électrique et magnétique d'autre part : $\mathbf{P}(\mathbf{E}, \mathbf{H})$, $\mathbf{M}(\mathbf{H}, \mathbf{E})$, c'est-à-dire en régime non-linéaire. Le tableau (8.2) résume l'ensemble des définitions permettant d'étudier l'énergétique de l'interaction champs-plasma.

Tableau 8.2

Quantité	Expression
Densité d'énergie électrique	$u \equiv \frac{\varepsilon_0 \mathbf{E}^2}{2} \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3} \right]$
Densité d'énergie magnétique	$u \equiv \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3} \right]$
Densité de puissance électromagnétique	$w \equiv - [\mathbf{J}_J \cdot \mathbf{E} + \mathbf{J}_P \cdot \mathbf{E} + \mathbf{J}_M \cdot \mathbf{E}] \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right]$
Flux de puissance électromagnétique	$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$

L'étude des ondes dans les plasmas, présentée ici, sera restreinte au régime linéaire et au cas harmonique, c'est-à-dire aux cas où la polarisation et la magnétisation sont des fonctions linéaires des champs et où les dépendances temporelles sont périodiques et monochromatiques, il convient donc d'adapter le théorème de Poynting pour ce régime.

Le comportement d'un plasma en régime linéaire est entièrement caractérisé par χ_E et χ_M les susceptibilités électrique et magnétique : $\mathbf{P} = \chi_E \varepsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{M} = \chi_M \mathbf{H}$.

Ces susceptibilités permettent de définir la permittivité diélectrique relative ε_r :

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_E) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E},$$

et la perméabilité magnétique relative μ_r :

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \chi_M \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 \mu_r} = \frac{\mathbf{B}}{\mu};$$

ainsi que les permittivité et perméabilité absolues ε et μ .

Lorsque la dynamique des spins est ignorée, les plasmas sont essentiellement décrits par la susceptibilité diélectrique. Les définitions que nous venons de donner sont de nature statique ou quasi-statique, en général, la réponse d'un plasma en régime linéaire n'est pas instantanée et les réponses électrique et magnétique à un instant donné sont fonction, non seulement de la valeur des champs à cet instant, mais aussi de l'histoire passée récente des champs.

$$\mathbf{D}(t) = \varepsilon_1 \mathbf{E}(t) + \varepsilon_2 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \varepsilon_3 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \varepsilon_4 \frac{\partial^3 \mathbf{E}}{\partial t^3} + \dots \quad (8.11)$$

On parle alors de dispersion temporelle et nous verrons qu'un plasma est toujours temporellement dispersif. La dispersion peut aussi être de nature spatiale, c'est le cas des plasmas chauds, la valeur de la polarisation en un point est alors fonction des valeurs du champ dans un voisinage de ce point.

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon_1 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \varepsilon_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{r}} + \varepsilon_3 \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{r}} + \varepsilon_4 \cdot \frac{\partial^3 \mathbf{E}}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{r} \partial \mathbf{r}} + \dots$$

Un plasma magnétisé est un milieu anisotrope et la permittivité est de nature tensorielle, traduisant ainsi la différence de comportement dans les différentes directions.

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

On voit donc, en régime linéaire, que la forme générale des relations entre la polarisation (ou le déplacement) et le champ est un *produit de convolution tensorielle*.

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int dt' d\mathbf{r}' \varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') \quad (8.12)$$

Ce régime linéaire est valable pour les champs faibles, les effets non-linéaires nécessitent de prendre en compte les réponses quadratique, cubique...

$$\mathbf{D} = \varepsilon_1 \mathbf{E} + \varepsilon_2 \mathbf{E}^2 + \varepsilon_3 \mathbf{E}^3 + \dots$$

Quelques effets non-linéaires, caractéristiques de l'interaction laser-plasma, seront étudiés dans le dernier paragraphe de ce chapitre. La théorie des ondes dans les plasmas présentée ici sera restreinte aux effets de dispersion temporelle qui sont dominants. Pour étudier ces effets, il est plus simple de considérer le régime harmonique ; en effet la transformée de Fourier d'un produit de convolution tel que (8.12) est égale au produit des transformées de Fourier.

Pour mener à bien l'étude de l'électrodynamique des milieux continus en régime linéaire dans l'espace de Fourier des champs, qui n'est autre que l'ensemble des OPMH, il est nécessaire d'introduire la permittivité complexe. Considérons donc un champ électrique du type $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \varphi_E)$. La représentation complexe de champs est défini par la convention :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \varphi_E) + j\mathbf{E}(\mathbf{r}) \sin(\omega t + \varphi_E)] = \text{Re} [\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \exp(j\omega t)]$$

Le champ complexe ainsi défini, $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(j\varphi_E)$, est d'un usage plus aisé. En général, lorsque un champ du type $\mathbf{E} \cos(\omega t + \varphi_E)$ est appliqué à un plasma, le déplacement électrique \mathbf{D} présente deux composantes, une composante en phase avec l'excitation et une composante en quadrature de phase :

$$\mathbf{E} \cos(\omega t + \varphi_E) \rightarrow \mathbf{D} = \varepsilon'(\omega) \cdot \mathbf{E} \cos(\omega t + \varphi_E) + \varepsilon''(\omega) \cdot \mathbf{E} \sin(\omega t + \varphi_E) ;$$

$\varepsilon'(\omega)$ et $\varepsilon''(\omega)$ étant des coefficients réels. Introduisons la permittivité complexe $\tilde{\varepsilon}(\omega)$.

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon'(\omega) - j\varepsilon''(\omega) \quad (8.13)$$

L'intérêt d'une telle définition réside dans la possibilité de relier les représentations complexes du champ électrique et du déplacement électrique par la relation : $\tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\varepsilon}(\omega) \cdot \tilde{\mathbf{E}} \rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} [\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}) \exp(j\omega t)]$. Les courants de polarisation $\mathbf{J}_p = \partial \mathbf{P} / \partial t$ admettent aussi une représentation complexe et la conductivité complexe $\tilde{\sigma}_p(\omega)$ peut être définie à partir de la permittivité complexe $\tilde{\varepsilon}_r(\omega)$.

$$\tilde{\mathbf{J}}_p = j\omega(\tilde{\varepsilon}(\omega) - \varepsilon_0) \cdot \tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\sigma}_p(\omega) \cdot \tilde{\mathbf{E}} \quad (8.14)$$

De façon similaire, les propriétés magnétiques peuvent être décrites à partir d'une représentation complexe des champs et de la perméabilité. Un champ harmonique $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \varphi_H)$ peut donc être considéré comme la partie réelle d'un champ complexe : $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) \exp(j\omega t) \right]$; la réponse magnétique étant composée d'une partie en phase et d'une partie en quadrature de phase : $\mathbf{H} \cos(\omega t + \varphi_H) \rightarrow \mathbf{B} = \mu'(\omega) \cdot \mathbf{H} \cos(\omega t + \varphi_H) + \mu''(\omega) \cdot \mathbf{H} \sin(\omega t + \varphi_H)$. La perméabilité complexe $\tilde{\mu}(\omega) = \mu'(\omega) - j\mu''(\omega)$ permet de décrire ce comportement par la relation : $\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mu}(\omega) \cdot \tilde{\mathbf{H}}$. Que ce soit la permittivité, ou la perméabilité, les parties réelles de ces coefficients décrivent les phénomènes de réfraction, si l'on parle le langage de l'opticien, ou de puissance réactive, si l'on parle le langage de l'électronicien; les parties imaginaires, quant à elles, décrivent les phénomènes d'absorption ou de puissance active. La représentation complexe est particulièrement bien adaptée à l'étude de la dispersion temporelle. Introduisons la représentation complexe de la formule (8.11) : $\partial/\partial t \rightarrow j\omega$, $\partial^2/\partial t^2 \rightarrow -\omega^2$, $\partial^3/\partial t^3 \rightarrow -j\omega^3$. Les dérivés impaires correspondent à des échanges réactifs de puissance et les dérivés paires à des échanges actifs; les dérivés paires forment la partie réelle de la permittivité, et les dérivés impaires, la partie imaginaire.

$$\tilde{\mathbf{D}} = \underbrace{[\varepsilon_1 - \omega^2 \varepsilon_3 + \dots]}_{\varepsilon'(\omega)} \tilde{\mathbf{E}} - j \underbrace{[-\omega \varepsilon_2 + \omega^3 \varepsilon_4 + \dots]}_{\varepsilon''(\omega)} \tilde{\mathbf{E}}$$

Une OPMH, ou un champ harmonique, n'ont pas de sens physique car un problème bien posé doit toujours comporter des conditions initiales et des conditions aux limites; en effet, les champs doivent être allumés dans le passé et décroître à grande distance afin de satisfaire aux contraintes de finitude du contenu énergétique et des échanges de puissance. Dans l'analyse énergétique des ondes dans les plasmas on ne peut donc se satisfaire des OPMH et une enveloppe spatiale et temporelle doivent être considérée afin de garantir un sens physique aux quantités introduites. L'étude de champs quasi-monochromatiques du type :

$$E(t) = E_0(t) \exp(j\omega t), \quad \frac{\partial E_0}{\partial t} \ll \omega E_0 \quad (8.15)$$

décrivant l'allumage et l'extinction d'une vibration, ainsi réduite à une durée finie, est donc nécessaire. L'existence de l'enveloppe $E_0(t)$ modifie les relations classiques de correspondance de Fourier. Considérons une composante J d'un courant excité en régime linéaire par une composante E du champ électrique. Courant, champ et conductivité linéaire σ sont définis dans le temps et représentés dans l'espace des fréquences (pulsations) par leur transformée de Fourier.

$$\begin{pmatrix} J(t) \\ E(t) \\ \sigma(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int \begin{pmatrix} \tilde{J}(\omega) \\ \tilde{E}(\omega) \\ \tilde{\sigma}(\omega) \end{pmatrix} \exp(j\omega t) d\omega$$

La relation courant-champ est un produit dans l'espace de Fourier et une convolution dans le temps.

$$\tilde{J}(\omega) = \tilde{\sigma}(\omega) \tilde{E}(\omega) \leftrightarrow J(t) = \int dt' \sigma(t-t') E(t')$$

Effectuons un développement de Taylor de l'enveloppe de la vibration $E_0(t')$ au voisinage de t ; compte tenu de l'ordering (adiabatique) fort entre l'échelle caractéristique de variation de l'enveloppe et la fréquence de la composante monochromatique $\partial E_0/\partial t \ll \omega E_0$ (8.15).

$$J(t) \approx \exp(j\omega t) E_0(t) \int \sigma(t-t') \exp[-j\omega(t-t')] dt' \\ - j \exp(j\omega t) \frac{\partial E_0}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \omega} \int \sigma(t-t') \exp[-j\omega(t-t')] dt' + \dots$$

Il est ainsi possible d'exprimer la réponse à une excitation quasi-monochromatique du type (8.15) en fonction de la conductivité harmonique $\sigma(\omega)$ et de sa dérivée.

$$J(t) = \sigma(\omega) E_0(t) \exp(j\omega t) - j \frac{\partial \sigma(\omega)}{\partial \omega} \frac{\partial E_0}{\partial t} \exp(j\omega t) \quad (8.16)$$

Appliqué au cas de la polarisation et du déplacement électrique cette dernière relation permet d'établir la relation entre déplacement $\mathbf{D}(t)$ et champ électrique $\mathbf{E}_0(t) \exp(j\omega t)$ en régime quasi-monochromatique.

$$\mathbf{D}(t) = \varepsilon'(\omega) \cdot \mathbf{E}_0(t) \exp(j\omega t) - j \varepsilon''(\omega) \mathbf{E}_0(t) \exp(j\omega t) \\ - j \frac{\partial \varepsilon'(\omega)}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} \exp(j\omega t) \quad (8.17)$$

Des relations similaires peuvent être établies entre \mathbf{H} et \mathbf{B} , \mathbf{J} et \mathbf{E} , \mathbf{P} et \mathbf{E} . La construction de la représentation complexe en régime monochromatique et son adaptation au régime quasi-monochromatique (8.15) permettent d'aborder la question de l'énergétique en régime harmonique. Rappelons quelques résultats sur la moyenne des produits de quantités oscillantes ; définissons la valeur moyenne d'une fonction A périodique, de période T :

$$\langle A \rangle = \int_t^{t+T} A(u) du / T.$$

Compte tenu de l'identité :

$$2 \langle \cos(\omega u + \varphi_1) \cos(\omega u + \varphi_2) \rangle = \text{Re} [\exp(j\omega t + \varphi_1) \exp(-j\omega t - \varphi_1)]$$

les valeurs moyennes des produits scalaire et vectorielle de deux vecteurs vibrants sont donc données par :

$$\langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \rangle = \text{Re} \left(\tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{B}}^* \right) / 2, \quad \langle \mathbf{A} \times \mathbf{B} \rangle = \text{Re} \left(\tilde{\mathbf{A}} \times \tilde{\mathbf{B}}^* \right) / 2.$$

L'analyse du bilan de puissance en électrodynamique des milieux continu, en régime harmonique, est construite à partir des bilans des variations de l'énergie électrique δU_E et de l'énergie magnétique δU_M résultant d'une variation des distributions de charge $\delta \rho$ et de potentiel vecteur $\delta \mathbf{A}$.

$$\delta U_E = \iiint V(\mathbf{r}, t) \delta \rho(\mathbf{r}, t) d^3 \mathbf{r}, \quad \delta U_M = \iiint \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \delta \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) d^3 \mathbf{r}$$

La première formule exprime la variation d'énergie électrostatique due à l'apport (ou au retrait) de charges en interaction avec un potentiel V ; sous forme infinitésimale ce bilan ne préjuge en rien de l'interdépendance ou de l'indépendance entre les distributions de charges et le potentiel. Les charges étant en général la source du potentiel. L'expression de la variation d'énergie magnétique possède les mêmes propriétés génériques ; le champ d'induction étant la dérivée temporelle du potentiel vecteur on reconnaît sous l'intégrant l'opposé du travail de ce champ. Le taux de variation temporelle des énergies électrique et magnétique s'exprime uniquement en fonction des champs ; pour établir cette expression utilisons : (i) les deux formules d'analyse vectorielle $\nabla \cdot V \delta \mathbf{D} = V \nabla \cdot \delta \mathbf{D} + \delta \mathbf{D} \cdot \nabla V$ et $\nabla \cdot (\delta \mathbf{A} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \delta \mathbf{A} - \delta \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{H}$, (ii) les équations de Maxwell (2.14 et 2.18), (iii) ainsi que le théorème d'Ostrogradski, sous l'hypothèse d'une décroissance des champs à l'infini plus rapide que l'inverse du carré de la distance. La somme des deux expressions précédentes se présente alors sous la forme d'un bilan temporel.

$$\frac{\partial U_E}{\partial t} + \frac{\partial U_M}{\partial t} = \iiint \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} + \iiint \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}$$

Cette forme permet d'identifier la densité volumique d'énergie électromagnétique u et de définir la valeur moyenne $\langle u \rangle$ de cette densité volumique d'énergie électromagnétique.

$$u_E(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbf{D}(s)}{\partial s} \cdot \mathbf{E}(s) ds \rightarrow \langle u_E \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbf{D}(s)}{\partial s} \cdot \mathbf{E}^*(s) ds \right]$$

$$u_M(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbf{B}(s)}{\partial s} \cdot \mathbf{H}(s) ds \rightarrow \langle u_M \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbf{B}(s)}{\partial s} \cdot \mathbf{H}^*(s) ds \right]$$

où nous avons supposé que les champs étaient générés dans le passé lointain à partir d'une valeur nulle. Cette condition initiale peut être prise en compte en considérant des champs quasi-monochromatiques possédant des enveloppes évoluant sur des échelles de temps lentes comparées à la période des oscillations. Pour ces champs présentant deux échelles de temps, la relation linéaire entre déplacement, induction

et champs a été établie par la formule (8.17) et sa dérivée temporelle permet d'exprimer :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= j\omega \varepsilon' \cdot \mathbf{E} \exp(j\omega t) + \frac{\partial \omega \varepsilon'}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \exp(j\omega t) \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= j\omega \mu' \cdot \mathbf{H} \exp(j\omega t) + \frac{\partial \omega \mu'}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \exp(j\omega t)\end{aligned}$$

où nous avons négligé la dissipation décrite par la partie imaginaire de la permittivité et de la perméabilité. L'énergie stockée, en moyenne sur une oscillation, dans les champs ($\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}$), par le plasma (ε') et à travers l'interaction champ-plasma, est donc finalement égale à :

$$\langle u \rangle \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3} \right] \equiv \frac{1}{4} \tilde{\mathbf{E}} \cdot \frac{\partial \omega \varepsilon'}{\partial \omega} \cdot \tilde{\mathbf{E}}^* + \frac{1}{4} \tilde{\mathbf{H}} \cdot \frac{\partial \omega \mu'}{\partial \omega} \cdot \tilde{\mathbf{H}}^* \quad (8.18)$$

Dans cette formule sont comptabilisées toutes les formes d'énergie associées à l'oscillation ; non seulement, le travail de construction des champs, mais aussi des dipôles élémentaires constituant le milieu ; ce bilan d'énergie prend donc aussi en compte l'énergie cinétique associée aux oscillations du plasma. Cette énergie décrit la puissance réactive stockée dans l'onde plasma.

Un plasma peut aussi échanger de l'énergie de façon irréversible avec le champ, le terme de dissipation décrivant la densité volumique de puissance électrique dissipée $\langle w_E \rangle$ est donné par : $\langle w_E \rangle = -\text{Re} \left[\tilde{\mathbf{J}}_p \cdot \tilde{\mathbf{E}}^* \right] / 2 = -\omega \tilde{\mathbf{E}} \cdot \varepsilon'' \cdot \tilde{\mathbf{E}}^* / 2$. Dans le cas magnétique, l'échange d'énergie et le transfert de puissance champ-plasma W_M doivent être évalués à partir du travail fourni au courant de magnétisation par le champ électrique d'induction :

$$W_M = \iiint \mathbf{J}_m \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} d\mathbf{r} = \iiint \nabla \times \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} d\mathbf{r}$$

Cette relation est ensuite transformée en appliquant la formule d'analyse vectorielle : $\nabla \cdot (\partial \mathbf{A} / \partial t \times \mathbf{M}) = \mathbf{M} \cdot \nabla \times \partial \mathbf{A} / \partial t - \partial \mathbf{A} / \partial t \cdot \nabla \times \mathbf{M}$; l'intégrale de volume sur le terme de divergence est ramenée à une intégrale de surface avec le théorème d'Ostrogradski et la décroissance à l'infini des champs permet conclure à sa nullité. L'intégrale de volume restante permet l'identification directe d'une densité volumique de puissance magnétique en régime harmonique : $\langle w_M \rangle = \text{Re} \left[j\omega \tilde{\mathbf{M}} \cdot \tilde{\mathbf{B}}^* \right] / 2 = \text{Re} \left[j\omega \mu_0 \tilde{\mathbf{M}} \cdot \tilde{\mathbf{H}}^* \right] / 2 = -\omega \tilde{\mathbf{H}} \cdot \mu'' \cdot \tilde{\mathbf{H}}^* / 2$. La densité de puissance moyenne $\langle w \rangle$ transférée irréversiblement du champs vers le plasma est donc donnée par :

$$\langle w \rangle \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right] \equiv -\frac{1}{2} \omega \tilde{\mathbf{E}} \cdot \varepsilon'' \cdot \tilde{\mathbf{E}}^* - \frac{1}{2} \omega \tilde{\mathbf{H}} \cdot \mu'' \cdot \tilde{\mathbf{H}}^* \quad (8.19)$$

Nous avons donc établi les expressions (i) de la densité volumique moyenne d'énergie stockée dans le champ et (ii) le plasma en régime harmonique et de la densité volumique moyenne de puissance transférée irréversiblement entre le plasma et le champ ; une relation dynamique entre ces deux quantités doit maintenant être établie pour traduire la conservation de l'énergie globale du champ et du plasma. En effet, le champ se propageant, l'énergie perdue localement par le champ n'est pas seulement gagnée par le plasma mais elle est aussi rayonnée au loin, l'identification d'un flux de puissance en régime harmonique est donc nécessaire. Comme dans le cas général, considérons l'identité :

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \mathbf{H}^* \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}^*) = -\mathbf{H}^* \cdot \partial \mathbf{B} / \partial t - \mathbf{E} \cdot \partial \mathbf{D}^* / \partial t$$

et calculons les dérivées temporelles du déplacement électrique \mathbf{D} et de l'induction magnétique \mathbf{B} pour un champ de durée finie décrit par une enveloppe lentement variable.

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = j\omega \varepsilon' \cdot \mathbf{E} \exp(j\omega t) + \omega \varepsilon'' \cdot \mathbf{E} \exp(j\omega t) + \frac{\partial \omega \varepsilon'}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \exp(j\omega t)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = j\omega \mu' \cdot \mathbf{H} \exp(j\omega t) + \omega \mu'' \cdot \mathbf{H} \exp(j\omega t) + \frac{\partial \omega \mu'}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \exp(j\omega t)$$

Ces deux expressions étant ensuite substituées dans l'expression de la divergence du produit vectoriel des champs électrique et magnétique, les densités d'énergies et de puissances apparaissent alors,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \operatorname{Re} \left[\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \right] &= -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \omega \varepsilon'}{\partial \omega} \cdot \mathbf{E}^* \right) - \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \omega \mu'}{\partial \omega} \cdot \mathbf{H}^* \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \omega \mathbf{E} \cdot \varepsilon'' \cdot \mathbf{E}^* - \frac{1}{2} \omega \mathbf{H} \cdot \mu'' \cdot \mathbf{H}^* \end{aligned}$$

Ainsi, la définition du flux d'énergie électromagnétique moyen comme la partie réelle du vecteur de Poynting en régime harmonique : $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* / 2$ conduit à l'équation de conservation (ou de transport) pour l'énergie électromagnétique dans un plasma :

$$\tilde{\mathbf{S}} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \equiv \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \rightarrow \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \operatorname{Re} \tilde{\mathbf{S}} = \langle w \rangle \quad (8.20)$$

Cette relation est conforme à l'intuition physique : le taux de variation temporelle de l'énergie électromagnétique moyenne stockée dans un champ harmonique interagissant avec un plasma en régime harmonique est égal aux flux du vecteur de Poynting et aux transferts irréversibles champ-plasma qui peuvent être positif ou négatif selon la nature du problème : ondes amorties ou instabilités. Il serait intéressant et instructif de considérer la partie imaginaire du vecteur de Poynting complexe $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* / 2$.

En effet, cette partie imaginaire décrit la puissance réactive transportée par le champ \mathbf{c} 'est-à-dire l'écart à l'équipartition entre énergie électrique et énergie magnétique.

Ce deuxième théorème de Poynting est restreint :

- au régime harmonique de la dépendance temporelle $\exp(j\omega t)$,
- au régime linéaire des relations entre polarisation \mathbf{P} et magnétisation \mathbf{M} d'une part et champs électrique \mathbf{E} et magnétique \mathbf{H} d'autre part. Le tableau (8.3) résume l'ensemble des définitions introduites pour analyser le bilan énergétique en régime harmonique linéaire.

Tableau 8.3

Quantité	Expression
Densité d'énergie électrique	$\langle u_E \rangle = \frac{1}{4} \tilde{\mathbf{E}} \cdot \frac{\partial \omega \varepsilon'}{\partial \omega} \cdot \tilde{\mathbf{E}}^* \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3} \right]$
Densité d'énergie magnétique	$\langle u_M \rangle = \frac{1}{4} \tilde{\mathbf{H}} \cdot \frac{\partial \omega \mu'}{\partial \omega} \cdot \tilde{\mathbf{H}}^* \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3} \right]$
Densité de puissance électrique absorbée	$\langle w_E \rangle = -\frac{1}{2} \omega \tilde{\mathbf{E}} \cdot \varepsilon'' \cdot \tilde{\mathbf{E}}^* \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right]$
Densité de puissance magnétique absorbée	$\langle w_M \rangle = -\frac{1}{2} \omega \tilde{\mathbf{H}} \cdot \mu'' \cdot \tilde{\mathbf{H}}^* \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right]$
Flux de puissance électromagnétique active	$\text{Re } \tilde{\mathbf{S}} = \text{Re} \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$
Flux de puissance électromagnétique réactive	$\text{Im } \tilde{\mathbf{S}} = \text{Im} \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$

8.1.3 Vitesse de groupe

L'identification du vecteur de Poynting complexe $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*/2$ comme le vecteur flux décrivant le transport de l'énergie électromagnétique en régime harmonique nous amène à poser la question de la vitesse de ce transport d'énergie. Cette question peut être abordée en considérant le cas général d'une OPMH dans un plasma dispersif sans préciser la branche de dispersion $\mathbf{k}(\omega)$: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp(-j\mathbf{k}(\omega) \cdot \mathbf{r})$, $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0 \exp(-j\mathbf{k}(\omega) \cdot \mathbf{r})$. Pour ce mode, définissons d'abord la vitesse de phase \mathbf{V}_p de l'onde comme la vitesse à laquelle un observateur en translation uniforme : $\mathbf{r}(t) = \mathbf{V}_p t$, doit se déplacer pour mesurer un champ constant, c'est-à-dire la vitesse à laquelle doit se déplacer un observateur pour que :

$$\frac{d[j\omega t - j\mathbf{k}(\omega) \cdot \mathbf{r}(t)]}{dt} = 0 \rightarrow \mathbf{V}_p = \frac{\omega \mathbf{k}}{k k}$$

Cette vitesse de phase ne renseigne en rien sur la vitesse de propagation de l'énergie ou vitesse de groupe \mathbf{V}_g . Pour identifier cette dernière quantité, dérivons les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday, en régime harmonique, par rapport à la pulsation.

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial \omega} = j \frac{\partial \omega \boldsymbol{\mu}}{\partial \omega} \cdot \mathbf{H}^* + j \omega \boldsymbol{\mu} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial \omega}, \quad \nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial \omega} = -j \frac{\partial \omega \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \omega} \cdot \mathbf{E}^* - j \omega \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial \omega}$$

Puis, considérons toujours la même identité vectorielle :

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$$

afin d'exprimer la densité volumique d'énergie.

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial \omega} \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial \omega} \right) = \left(j \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \omega \boldsymbol{\mu}}{\partial \omega} \cdot \mathbf{H}^* + j \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \omega \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \omega} \cdot \mathbf{E}^* \right) = 4j \langle u \rangle$$

Dans le cas particulier des OPMH dispersives : $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp(-j\mathbf{k}(\omega) \cdot \mathbf{r})$, $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0 \exp(-j\mathbf{k}(\omega) \cdot \mathbf{r})$, le premier terme de cette identité peut être aisément évalué.

$$\frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial \omega} \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial \omega} = j \left(\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \omega} \cdot \mathbf{r} \right) (\mathbf{E}_0^* \times \mathbf{H}_0 + \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*)$$

La divergence du vecteur de Poynting en régime harmonique $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*/2$ peut alors être introduite.

$$\nabla \cdot \left[\left(\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \omega} \cdot \mathbf{r} \right) \text{Re}(\tilde{\mathbf{S}}) \right] = \langle u \rangle \rightarrow \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \omega} \cdot \text{Re} \tilde{\mathbf{S}} = \langle u \rangle \rightarrow \text{Re} \tilde{\mathbf{S}} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \langle u \rangle$$

Le rapport du flux de puissance à la densité volumique d'énergie offre une première définition de la vitesse de propagation de l'énergie \mathbf{V}_g .

$$\mathbf{V}_g \equiv \frac{\text{Re} \tilde{\mathbf{S}}}{\langle u \rangle} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \quad (8.21)$$

L'inclusion des termes de dissipation ε'' et μ'' ne modifie pas ce dernier résultat si les courants (actifs) associés à cette dissipation sont petits devant les courants (réactifs) sources de la dispersion. La vitesse de groupe ainsi définie ne nous renseigne pas uniquement sur la vitesse de transport de l'énergie mais aussi sur la vitesse de transport de l'information. Pour transmettre de l'information il est nécessaire de définir un code et de coder en conséquence un onde dite porteuse (d'information) soit en modulant son enveloppe (AM) soit en modulant sa fréquence (FM). Dans le cas de la modulation de l'enveloppe nous allons démontrer que cette modulation d'amplitude se propage à une vitesse égale à la vitesse de groupe.

Considérons la propagation du champ électrique \mathbf{E} d'une OPMH dans un plasma développant des courants \mathbf{J} de nature variée, polarisation (2.13), conduction (8.14),

etc. L'élimination du champ magnétique entre les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday permet d'établir une équation d'onde inhomogène.

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \quad (8.22)$$

Intéressons-nous à des solutions quasi-monochromatiques, c'est-à-dire à des OPMH régularisées pour prendre en compte les conditions initiales et aux limites :

$$\mathbf{E}(z, t) = E(z, t) \exp j [\omega t - k(\omega) z] \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{J}(z, t) = J(z, t) \exp j [\omega t - k(\omega) z] \mathbf{e}_x$$

et vérifiant l'hypothèse d'adiabaticité : $\partial E / \partial t \ll \omega E$, $\partial J / \partial t \ll \omega J$. Définissons la vitesse de propagation de l'enveloppe V_g comme la vitesse d'un observateur en translation uniforme qui mesure une amplitude constante $E(z, t) = C^{te}$ dans son repère propre.

$$E(z, t) = C^{te} \rightarrow \frac{\partial E}{\partial z} dz + \frac{\partial E}{\partial t} dt = 0 \rightarrow V_g = \left. \frac{dz}{dt} \right|_{E=C^{te}} = - \frac{\frac{\partial E}{\partial t}}{\frac{\partial E}{\partial z}}$$

L'expression de la transformée de Fourier de l'équation d'onde inhomogène (8.22) nécessite l'évaluation du terme source $\partial J / \partial t$ suivant la relation 8.16.

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial t} &= -\omega^2 (\varepsilon'(\omega) - \varepsilon_0) E \exp j [\omega t - k(\omega) z] \\ &\quad + j \frac{\partial \omega^2 (\varepsilon'(\omega) - \varepsilon_0)}{\partial \omega} \frac{\partial E}{\partial t} \exp j [\omega t - k(\omega) z] \end{aligned}$$

Cette expression et le champ quasi-monochromatique sont ensuite substitués dans l'équation d'onde inhomogène (8.22); les parties réelle et imaginaire de l'identité ainsi obtenue doivent être vérifiées séparément.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) E &= -\mu_0 \omega^2 (\varepsilon' - \varepsilon_0) E \rightarrow k^2 = \mu_0 \omega^2 \varepsilon' \\ 2k \frac{\partial E}{\partial z} + 2 \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} &= -\mu_0 \frac{\partial \omega^2 (\varepsilon' - \varepsilon_0)}{\partial \omega} \frac{\partial E}{\partial t} \rightarrow 2k \frac{\partial E}{\partial z} = - \frac{\partial k^2}{\partial \omega} \frac{\partial E}{\partial t} \end{aligned}$$

Ainsi, la vitesse de groupe définie comme la vitesse de propagation de l'enveloppe est-elle égale à la vitesse de groupe définie comme la vitesse de propagation de l'énergie.

$$\mathbf{V}_g \equiv \left. \frac{dz}{dt} \right|_{E=C^{te}} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (8.23)$$

La relation de dispersion ($\mathbf{k}(\omega)$ ou $\omega(\mathbf{k})$) détermine les vitesses de propagation de la phase, de l'énergie et de l'information, ces deux dernières quantités définissent la vitesse de groupe $\mathbf{V}_g \equiv \partial\omega/\partial\mathbf{k}$.

Tableau 8.4

Vitesse	Définition	Expression
Phase	$\left. \frac{dz}{dt} \right _{\omega t - kz = C^{te}}$	$\frac{\omega}{k} \frac{\mathbf{k}}{k}$
Énergie	$\frac{\text{Re } \tilde{S}}{\langle u \rangle}$	$\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}$
Information	$\left. \frac{dz}{dt} \right _{E = C^{te}}$	$\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}$

Le tableau (8.4) résume cet ensemble de concepts et définitions. La représentation graphique de la relation de dispersion est appelée diagramme de Brillouin. Au-delà des vitesses de l'énergie et de l'information, le diagramme de Brillouin est une relation entre l'impulsion et l'énergie d'un mode et il est particulièrement utile pour discuter les couplages de modes qui doivent vérifier la conservation de l'énergie et de l'impulsion. Cette remarque plaide pour une étude détaillée de la dispersion $\omega(\mathbf{k})$ et du diagramme de Brillouin, nous allons donc nous attacher à établir et analyser la relation de dispersion pour les perturbations électromagnétiques électronique et ionique dans un plasma.

8.2 MODES ÉLECTRONIQUES ET IONIQUES

Les modes (ondes) électromagnétiques se propageant dans un plasma sont des perturbations électromagnétiques couplées aux mouvements électroniques et ioniques. Dans ce paragraphe nous analyserons les modes dits fluides dans un plasma, l'ensemble des hypothèses d'adiabaticité qui valide ce modèle s'établit comme suit.

- Le modèle est dit fluide car nous utiliserons l'équation d'Euler (linéarisée) pour décrire les dynamiques ionique et électronique ; ce choix est pertinent si la vitesse de phase de l'onde est plus grande que la vitesse thermique des espèces chargées : $k \langle v \rangle \ll \omega$, en présence d'un champ magnétique cet ordering est modifié et devient : $k_{\parallel} \langle v_{\parallel} \rangle \ll \omega$ et $k_{\perp} \langle v_{\perp} \rangle \ll \omega_c$ où les directions parallèle et perpendiculaire se réfèrent à la direction du champ magnétique.
- Nous nous placerons dans l'approximation linéaire, la perturbation électromagnétique sera telle que le contenu énergétique de l'onde $\langle u \rangle$ restera plus petit que la densité d'énergie thermique $\langle u \rangle \ll nm \langle v^2 \rangle$.
- Nous considérerons uniquement les modes faiblement amortis, c'est-à-dire tels que $\varepsilon'' \ll \varepsilon'$.

Les cinq équations de base de ce modèle fluide sont les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday qui permettent d'exprimer les champs en fonction des courants ; ainsi que l'équation d'Euler, l'équation de continuité et l'équation d'état isentropique qui permettent de calculer le courant en fonction des champs.

$$\begin{aligned}
 \text{Équation de Maxwell-Faraday} & : \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\
 \text{Équation de Maxwell-Ampère} & : \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_i + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\
 \text{Équation de continuité} & : \frac{\partial N}{\partial t} + \nabla \cdot (N \mathbf{V}) = 0 \\
 \text{Équation d'Euler} & : \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \frac{q}{m} \mathbf{E} + \frac{q \mu_0}{m} \mathbf{V} \times \mathbf{H} \\
 \text{Équation d'état} & : \left. \frac{\partial P}{\partial N} \right|_s = \gamma k_B T
 \end{aligned} \tag{8.24}$$

où k_B est la constante de Boltzmann que l'on ne confondra pas avec le vecteur d'onde k . Ce système admet des solutions somme d'une solution d'équilibre statique (\mathbf{B}_0 si le plasma est magnétisé, P la pression au repos si le plasma est chaud et N la densité au repos) plus une perturbation harmonique, le mode plasma recherché.

$$\begin{aligned}
 \text{Champ magnétique} & : \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} + \mathbf{H} \exp j [\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] \\
 \text{Champ électrique} & : \mathbf{0} + \mathbf{E} \exp j [\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] \\
 \text{Courants ionique et électronique} & : \mathbf{0} + \mathbf{J} \exp j [\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] \\
 \text{Pressions ionique et électronique} & : P + p \exp j [\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] \\
 \text{Densités électronique et ionique} & : N + n \exp j [\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}]
 \end{aligned} \tag{8.25}$$

Lorsque ces solutions (8.25) sont substituées dans le système (8.24) les produits de deux quantités perturbatrices sont négligés conformément au protocole de linéarisation, en particulier, les termes linéarisés associés à $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$ et $\mathbf{V} \times \mathbf{H}$ sont identiquement nuls. Les résultats sont exprimés en fonction des fréquences plasma et cyclotron du plasma à l'équilibre :

$$\omega_{pe}^2 = N_e q_e^2 / \varepsilon_0 m_e, \quad \omega_{pi}^2 = N_i q_i^2 / \varepsilon_0 m_i, \quad \omega_{ce} = |q_e| B_0 / m_e \text{ et } \omega_{ci} = q_i B_0 / m_i.$$

8.2.1 Photons, plasmons, phonons

Considérons, en premier lieu, le cas des plasmas non magnétisés. Négligeons la réponse ionique et les effets de compressibilité dus à la pression électronique, injectons des solutions du type (8.25) dans (8.24) et calculons l'amplitude du courant électronique \mathbf{J}_e solution de l'équation d'Euler linéarisée. Ce courant est fonction

de l'amplitude du champ harmonique \mathbf{E} , qui est lui même fonction de \mathbf{H} à travers l'équation de Maxwell-Faraday, enfin, \mathbf{H} est fonction de \mathbf{E} et \mathbf{J}_e à travers l'équation de Maxwell-Ampère ; ainsi, les amplitudes complexes sont solutions d'un système d'équations algébriques.

$$\mathbf{J}_e = -j \frac{\omega_{pe}^2}{\omega} \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{H} = j \mathbf{J}_e - \omega \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

L'élimination du courant \mathbf{J}_e puis du champ magnétique \mathbf{H} entre ces trois équations permet d'établir l'équation linéaire vérifiée par l'amplitude du champ électrique \mathbf{E} .

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{k} - k^2 \mathbf{E} = \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \mathbf{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} \quad (8.26)$$

Cette équation est satisfaite par deux types de modes. Un mode transverse tel que le champ électrique soit perpendiculaire au vecteur d'onde \mathbf{k} , les photons, dont la relation de dispersion est modifiée par le plasma aux fréquences voisines et inférieures à la fréquence de Langmuir, et dont la partie asymptotique haute fréquence se raccorde aux OPMH dans le vide.

$$\text{Photons : } \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \rightarrow \omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2 \quad (8.27)$$

Ce mode devient évanescents en dessous de la fréquence de Langmuir qui constitue ainsi une coupure pour ce mode, les photons basses fréquences ne peuvent pas se propager dans un plasma, à une interface vide/plasma la coupure ω_{pe} donne alors lieu à un phénomène de réflexion.

Un deuxième mode, longitudinal, tel que le champ électrique soit parallèle au vecteur d'onde, satisfait l'équation (8.26), les plasmons, qui ne sont autres que les oscillations de Langmuir identifiées lors de l'étude des phénomènes collectifs.

$$\text{Plasmons : } \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \rightarrow \omega^2 = \omega_{pe}^2 \quad (8.28)$$

La figure 8.6 présente le diagramme de Brillouin pour ces deux modes électroniques. On notera que la vitesse de groupe des plasmons est nulle, en fait, les effets de compressibilité électronique modifient cette conclusion et autorisent les plasmons à transporter de l'énergie. Pour étudier ce phénomène il est nécessaire : (i) de considérer un modèle de fluide chaud possédant une pression finie et (ii) de supposer que les perturbations sont isentropiques. La linéarisation de l'équation d'Euler (chaude),

de l'équation de continuité et de l'équation d'état isentropique donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}_e}{\partial t} + (\mathbf{V}_e \cdot \nabla) \mathbf{V}_e &= -\frac{q}{m_e} \mathbf{E} - \frac{\nabla P}{nm_e} \Big|_S \rightarrow j\omega \mathbf{J}_e = \omega_{pe}^2 \varepsilon_0 \mathbf{E} - j \frac{q}{m_e} \mathbf{k} p_e \\ \frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{V}_e) &= 0 \rightarrow q\omega n_e + \mathbf{k} \cdot \mathbf{J}_e = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial n} \Big|_S &= \gamma k_B T_e \rightarrow p_e = n_e \gamma k_B T_e \end{aligned} \quad (8.29)$$

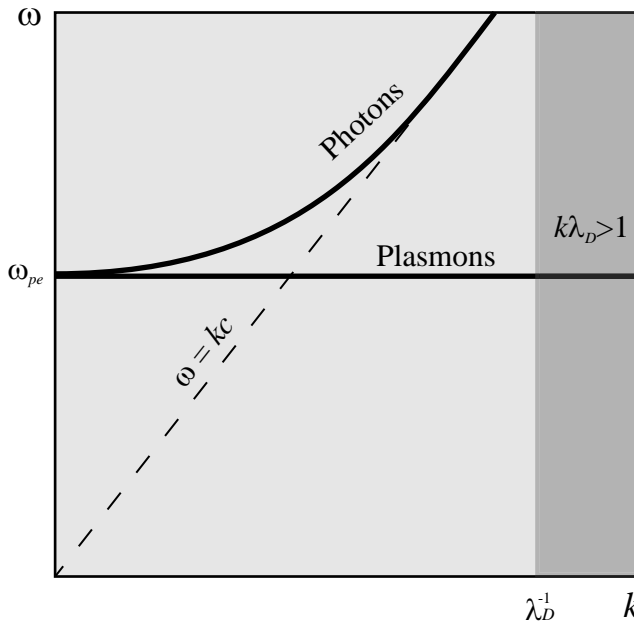


Figure 8.6 Diagramme de Brillouin pour les photons et les plasmons.

La pression et la vitesse peuvent être éliminées dans ce système algébrique pour exprimer le courant en fonction du champ.

$$\mathbf{J}_e = -j \frac{\omega_{pe}^2}{\omega} \frac{\varepsilon_0 \mathbf{E}}{1 - \frac{k^2 \gamma k_B T_e}{\omega^2 m_e}} \quad (8.30)$$

La limite froide $T_e = 0$ redonne le courant inertiel précédent $\mathbf{J}_e = -j \omega_{pe}^2 \varepsilon_0 \mathbf{E} / \omega$; la modification du courant due aux effets de compressibilité se traduit par une altération de la relation de dispersion et le mode ainsi modifié est dénommé Mode de Bohm-Gross (BG) ; sa dispersion est donnée par :

$$\text{Mode de Bohm-Gross BG : } \omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 \frac{\gamma k_B T_e}{m_e} \quad (8.31)$$

À basse fréquence, en dessous de la fréquence de Langmuir, il n'existe pas de mode purement électronique, par contre, la prise en compte de la dynamique ionique révèle l'existence d'un nouveau mode basse fréquence. Les électrons participent à ce mode ionique, non pas de manière inertielle mais à travers une réponse adiabatique ; à l'échelle de temps électronique (ω_p^{-1}) ce mode est suffisamment lent pour que la population électronique ait le temps de se mettre à l'équilibre thermodynamique dans le potentiel électrique. On peut donc utiliser la relation de Boltzmann linéarisée ou bien l'équilibre entre force de pression et force de Coulomb qui donne le même résultat.

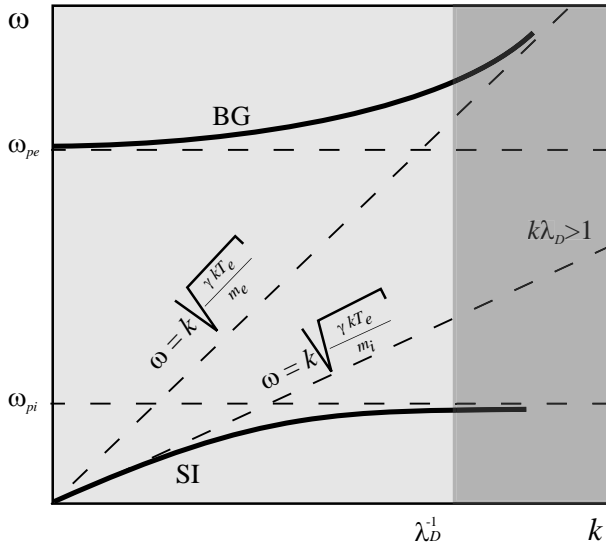


Figure 8.7 Modes de Bohm-Gross et onde acoustique ionique dans un plasma chaud.

Ces bilans de forces, entre pression et force électrique pour les électrons, et entre force électrique et inertie pour les ions, ont déjà été établis pour la relation (8.30). La traduction de l'hypothèse adiabatique consiste à négliger l'inertie ($k^2 k_B T_e > \omega^2 m_e$) pour obtenir le courant électronique \mathbf{J}_e . Le courant ionique \mathbf{J}_i est, quant à lui, purement inertielle sous l'hypothèse d'ions froids ($k^2 k_B T_i < \omega^2 m_i$).

$$\mathbf{J}_e = j \frac{\omega_{pe}^2}{\omega} \frac{\epsilon_0}{k^2 \gamma k_B T_e} \mathbf{E}, \quad \mathbf{J}_i = -j \frac{\omega_{pi}^2}{\omega} \epsilon_0 \mathbf{E}$$

La partie très basse fréquence de ce mode est nécessairement une perturbation quasi-neutre car les hypothèses de quasi-neutralité sont vérifiées, ainsi, il n'est pas nécessaire d'utiliser les équations de Maxwell pour établir la dispersion très basse fréquence de ce mode ionique, l'hypothèse de quasi-neutralité est suffisante.

$$\text{Quasi-neutralité : } \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_i = \mathbf{0} \rightarrow \omega = k \sqrt{\frac{\gamma k_B T_e}{m_i}}$$

Introduisons la vitesse acoustique ionique $C_s^2 = \gamma k_B T_e / m_i$ (3.14), nous venons d'identifier les phonons dans un plasma, ou son ionique (SI). Un tel mode propage de l'énergie grâce à l'inertie ionique et à la compressibilité électronique.

$$\text{Phonons SI : } \omega = k C_s \quad (8.32)$$

Cette relation de dispersion linéaire ne peut pas être valable à haute fréquence, la prise en compte de l'inertie électronique,

$$\mathbf{J}_e = -j \frac{\omega_{pe}^2}{\omega} \frac{\epsilon_0}{1 - \frac{k^2 \gamma k_B T_e}{\omega^2 m_e}} \mathbf{E}, \quad \mathbf{J}_i = -j \frac{\omega_{pi}^2}{\omega} \epsilon_0 \mathbf{E}$$

et l'abandon de l'hypothèse de quasi-neutralité, remplacée par l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\text{Équation de Maxwell-Ampère : } \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_i + j \omega \epsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{0} \rightarrow \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 \frac{m_e}{m_i} - k^2 C_s^2} = 1$$

permettent d'établir la relation de dispersion du mode ionique, l'onde acoustique ionique dont la partie très basse fréquence a été identifiée précédemment.

$$\text{Onde Acoustique Ionique : } \omega = \omega_{pi} \frac{k C_s}{\sqrt{\omega_{pi}^2 + k^2 C_s^2}}$$

La figure 8.7 présente les diagrammes de Brillouin pour les modes de Bohm-Gross et les ondes acoustiques ioniques. La relation de dispersion de ce dernier mode devient $\omega = \omega_{pi}$ lorsque le vecteur d'onde tend vers l'infini, c'est-à-dire pour les petites longueurs d'ondes ; malgré ce comportement, il n'existe pas d'oscillations plasma ionique semblables à l'oscillation plasma électronique $\omega = \omega_{pe}$. En effet, pour ces valeurs de vecteurs d'onde la condition $k \sqrt{k_B T / m} \ll \omega$ est violée et le modèle fluide tombe en défaut, physiquement l'absorption Landau (que nous traiterons dans le dernier paragraphe) amortit fortement le mode acoustique ionique lorsque la dispersion devient $\omega \approx \omega_{pi}$. L'effet de l'inertie et de la séparation de charge n'est pas la création d'un plasmon ionique mais se restreint à un effet de courbure de la dispersion linéaire du son ionique. Les conclusions que nous venons d'énoncer sur la non pertinence du modèle fluide aux petites longueurs d'ondes sont aussi recevables pour le mode de Bohm-Gross.

8.2.2 Modes électroniques magnétisés

Nous allons maintenant développer la théorie des ondes et oscillations dans les plasmas magnétisés. Comme dans le cas sans champ magnétique, les modes basses fréquences sont dominés par la dynamique ionique et les modes hautes fréquences

par la dynamique électronique. Compte tenu de l'anisotropie créée par le champ magnétique, une attention particulière devra être portée à la spécification de la polarisation du champ électrique et de la direction de propagation. En particulier, nous parlerons de composantes *transverse* \mathbf{E}_t et *longitudinale* \mathbf{E}_l du champ électrique par référence à la direction de propagation : $\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + \mathbf{E}_l \rightarrow \mathbf{E}_l = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} / k^2$, $\mathbf{E}_t = \mathbf{k} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{k}) / k^2$ et nous considérerons les composantes *parallèle* et *perpendiculaire* de ce même champ par référence à la direction du champ magnétique : $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp} \rightarrow \mathbf{E}_{\parallel} = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{B}_0 / B_0^2$, $\mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{B}_0 \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}_0) / B_0^2$. En présence d'un champ magnétique statique \mathbf{B}_0 les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère ne sont pas modifiées : $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu_0 \mathbf{H}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \mathbf{D}$, par contre, l'équation d'Euler doit prendre en compte la force de Laplace générée par le champ magnétique statique.

$$\text{Équation d'Euler : } \frac{\partial \mathbf{V}_e}{\partial t} + (\mathbf{V}_e \cdot \nabla) \mathbf{V}_e = \frac{q_e}{m_e} \mathbf{E} + \frac{q_e \mu_0}{m_e} \mathbf{V}_e \times \mathbf{H} + \frac{q_e}{m_e} \mathbf{V}_e \times \mathbf{B}_0$$

La linéarisation de l'équation d'Euler électronique conduit à une équation algébrique pour le courant \mathbf{J}_e : $j\omega \mathbf{J}_e = \omega_{pe}^2 \varepsilon_0 \mathbf{E} - \omega_{ce} \mathbf{J}_e \times \mathbf{b}$ où $\mathbf{b} = \mathbf{B}_0 / B_0$. Cette équation linéaire, d'inconnue \mathbf{J}_e , peut être résolue en formant les produits scalaire et vectoriel : $j\omega \mathbf{J}_e \cdot \mathbf{b} = \omega_{pe}^2 \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{b}$ et $j\omega \mathbf{J}_e \times \mathbf{b} = \omega_{pe}^2 \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{b} + \omega_{ce} \mathbf{J}_e - \omega_{ce} (\mathbf{J}_e \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b}$, du courant avec le champ statique afin de substituer l'expression du produit vectoriel $\mathbf{J}_e \times \mathbf{b}$ en fonction du champ électrique \mathbf{E} . Le résultat final est donné par :

$$\mathbf{J}_e = -j \frac{\omega_{pe}^2 \omega}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} \left[\varepsilon_0 \mathbf{E} + j \frac{\omega_{ce}}{\omega} \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{b} - \frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2} (\varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b} \right] \quad (8.33)$$

La permittivité diélectrique, reliant le champ électrique et le déplacement électrique, est donc de nature tensorielle.

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \frac{\mathbf{J}_e}{j\omega} = \varepsilon_0 \varepsilon_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel} + \varepsilon_0 \varepsilon_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} + j \varepsilon_0 \varepsilon_{\times} \mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{b} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & -j \varepsilon_{\times} & 0 \\ j \varepsilon_{\times} & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{E}$$

L'anisotropie induite par le champ magnétique se manifeste à travers le caractère tensoriel de la permittivité relative $\varepsilon(\omega)$.

$$\varepsilon_{\parallel}(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}, \quad \varepsilon_{\perp}(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2}, \quad \varepsilon_{\times}(\omega) = \frac{\omega_{ce}}{\omega} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2}$$

L'élimination du champ magnétique et du courant (de la vitesse) entre les équations de Maxwell-Faraday, Maxwell-Ampère et Euler permet d'exprimer le champ électrique comme la solution de l'équation linéaire homogène :

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (8.34)$$

Il est nécessaire de distinguer la propagation parallèle au champ statique et la propagation perpendiculaire à ce champ.

Commençons par l'étude du premier cas et projetons la relation (8.34) sur une base orthonormée directe ($\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z$) associée à un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) tel que : $\mathbf{b} = (0, 0, 1)$ et $\mathbf{k} = (0, 0, k_{\parallel})$.

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp} - k_{\parallel}^2 & -j \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\times} & 0 \\ j \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\times} & \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp} - k_{\parallel}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les modes plasmons peuvent se propager le long des lignes de champ car $\varepsilon_{\parallel}(\omega) = 0$ et ($E_x = 0, E_y = 0, E_z \neq 0$) constitue une solution dont la relation de dispersion est donnée par $\omega = \omega_p$. Deux modes transverses peuvent aussi se propager le long des lignes de champ ; ils sont solutions du système linéaire homogène :

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp} - k_{\parallel}^2 & -j \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\times} \\ j \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\times} & \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp} - k_{\parallel}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le mode gauche ou L (pour left) et le mode droit ou R (pour right), présentent tous deux une polarisation circulaire et leurs relations de dispersion sont obtenues en annulant le déterminant du système linéaire : $k_{\parallel}^2 c^2 = \omega^2 (\varepsilon_{\perp} \pm \varepsilon_{\times})$.

$$\text{Mode gauche L : } k_{\parallel}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + \omega_{ce})} \right] \quad (8.35)$$

$$\text{Mode droit R : } k_{\parallel}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - \omega_{ce})} \right] \quad (8.36)$$

On notera, en rétablissant la dépendance temporelle réelle, que le mode R tourne dans le sens direct (trigonométrique) : $E_x/E_y = j$ et que le mode L tourne dans le sens indirect (des aiguilles d'une montre) : $E_x/E_y = -j$. Le mouvement de rotation cyclotronique des électrons étant aussi dans le sens direct, le couplage onde R/électrons devient résonnant lorsque $\omega \approx \omega_{ce}$. C'est effectivement le cas et le vecteur d'onde k_{\parallel} présente une résonance pour $\omega = \omega_{ce}$, cette valeur n'est atteinte que pour un vecteur d'onde infini (Figures 8.8 et 8.9).

La figure 8.8 présente le diagramme de Brillouin pour les modes électroniques transverses en propagation parallèle dans un plasma fortement magnétisé tel que $\omega_{ce} > \omega_{pe}$; la figure 8.9 présente le diagramme de Brillouin pour les modes

électroniques transverses en propagation parallèle dans un plasma dense tel que $\omega_{pe} > \omega_{ce}$.

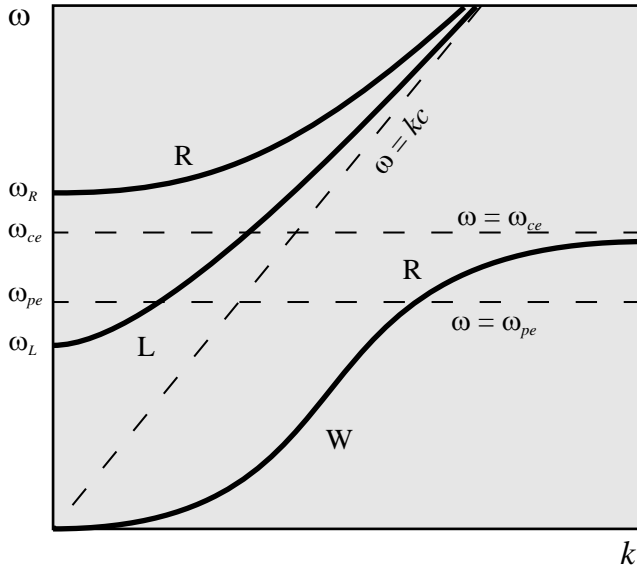


Figure 8.8 Dispersion des modes R et L électroniques dans un plasma tel que $\omega_{ce} > \omega_{pe}$.

La partie basse fréquence de la branche R correspond à un mode très répandu dans les plasmas de l’environnement terrestre et les plasmas de laboratoires, le mode *Whistler*; ce nom provient des conditions historiques de l’identification de ce mode W dans le domaine audio-fréquence. En effet, la relation de dispersion :

$$\text{Mode Whistler W : } \omega = k_{\parallel}^2 c^2 \frac{\omega_{ce}}{\omega_{pe}^2} \tag{8.37}$$

présente une vitesse de groupe proportionnelle à la racine carré de la fréquence : $\partial\omega/\partial k_{\parallel} \sim \sqrt{\omega}$, cette propriété implique que les basses fréquences arrivent après les hautes fréquence pour des impulsions spectralement riches telles que celles émises par les éclairs, le déferlement harmonique ainsi obtenu s’apparente à un sifflement dans le domaine audio-fréquence.

Les modes R et L présentent deux coupures, la coupure droite ω_R et la coupure gauche ω_L (Figures 8.8 et 8.9).

$$\omega_R = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \frac{\omega_{ce}^2}{4}} + \frac{\omega_{ce}}{2}, \quad \omega_L = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \frac{\omega_{ce}^2}{4}} - \frac{\omega_{ce}}{2} \tag{8.38}$$

Considérons une onde transverse, polarisée linéairement, se propageant dans le vide ; si cette onde transverse pénètre dans un plasma magnétisé en se propageant dans le direction du champ magnétique, alors, comme les seuls modes propres du plasma

sont les modes L et R, nous devons décomposer la polarisation linéaire en une superposition de polarisations circulaires R et L. Les ondes R et L possédant des vitesses de phase différentes, à la sortie du plasma le plan de polarisation linéaire de l'onde aura tourné par accumulation de déphasage entre les composantes R et L, c'est l'effet Faraday.

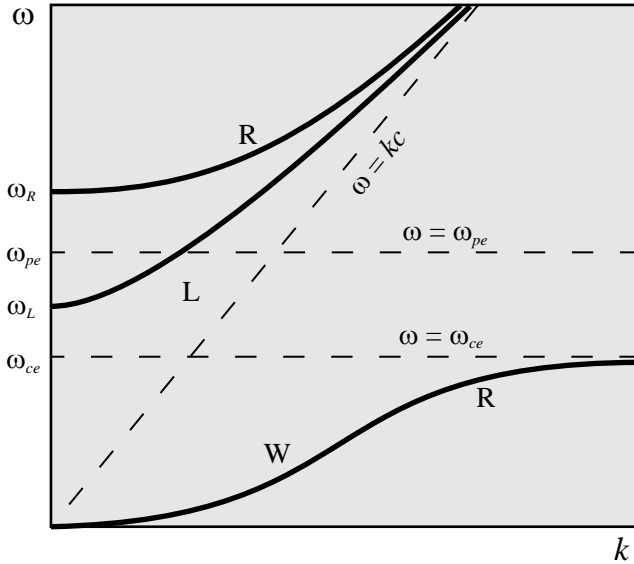


Figure 8.9 Dispersion des modes R et L électroniques dans un plasma tel que $\omega_{pe} > \omega_{ce}$.

De façon similaire, les conditions de propagation dans la direction perpendiculaire au champ, $\mathbf{b} = (0, 0, 1)$, $\mathbf{k} = (k_{\perp}, 0, 0)$, s'établissent sur la base de l'équation (8.34).

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\perp} & -j \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\times} & 0 \\ j \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\times} & \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\perp} - k_{\perp}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\parallel} - k_{\perp}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'analyse de ces conditions de propagation conduit à distinguer deux modes : le mode ordinaire (O) et le mode extraordinaire (X). Le mode ordinaire possède une polarisation droite parallèle au champ magnétique statique \mathbf{B}_0 , il est obtenu comme la solution de l'équation réduite : $\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\parallel} - k_{\perp}^2 = 0$ et $(E_x = 0, E_y = 0, E_z \neq 0)$, du système linéaire homogène précédent.

$$\text{Mode ordinaire O : } \omega^2 = \omega_{pe}^2 + k_{\perp}^2 c^2 \tag{8.39}$$

Lorsque le champ électrique est parallèle au champ magnétique statique la dispersion des photons (Relation 8.27) n'est donc pas modifiée, en effet, l'oscillation électronique étant suivant la direction du champ statique, elle n'est pas couplée au mouvement cyclotronique.

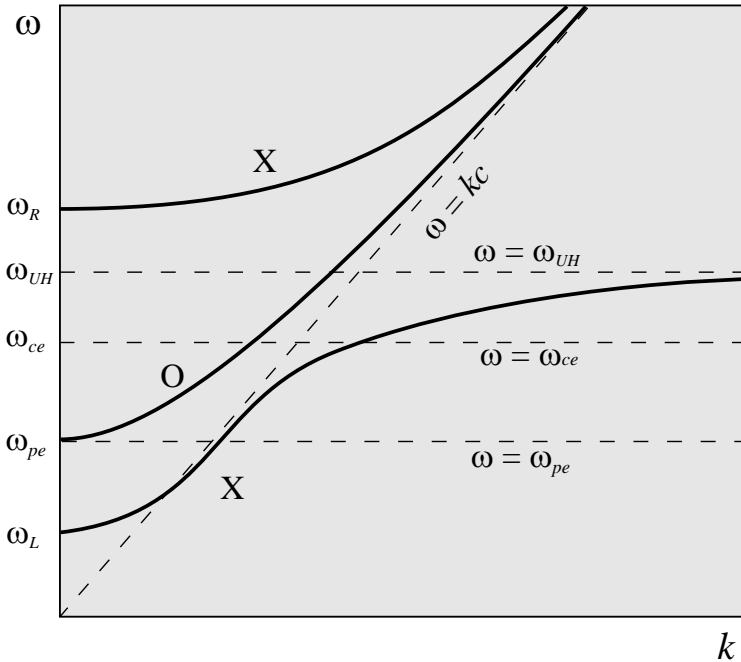


Figure 8.10 Dispersion des modes O et X électroniques dans un plasma tel que $\omega_{ce} > \omega_{pe}$.

Le mode extraordinaire possède une polarisation élliptique et n'est pas purement transverse : $(E_x \neq 0, E_y \neq 0, E_z = 0)$; il est solution du système réduit :

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\perp} & -j \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\times} \\ j \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\times} & \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\perp} - k_{\perp}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sa dispersion est donc donnée par : $k_{\perp}^2 c^2 = \omega^2 (\epsilon_{\perp} - \epsilon_{\times}^2 / \epsilon_{\perp})$, l'introduction des pulsations de coupure droite et gauche permet finalement d'exprimer la relation de dispersion :

$$\text{Mode extraordinaire X : } k_{\perp}^2 c^2 = \frac{(\omega^2 - \omega_R^2) (\omega^2 - \omega_L^2)}{(\omega^2 - \omega_{UH}^2)} \tag{8.40}$$

Les figures 8.10 et 8.11 présentent les diagrammes de Brillouin en propagation perpendiculaire pour les plasmas fortement magnétisés $\omega_{ce} > \omega_{pe}$ et les plasmas denses $\omega_{pe} > \omega_{ce}$.

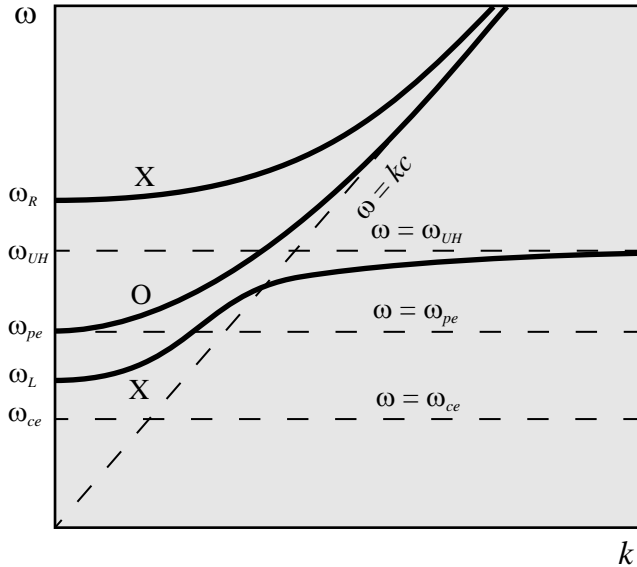


Figure 8.11 Dispersion des modes O et X électronique dans un plasma tel que $\omega_{ce} < \omega_{pe}$.

La liste des modes transverses ou quasi-transverses dans les plasmas magnétisés en propagations parallèle et perpendiculaire au champ magnétique statique s'établit donc suivant le tableau (8.5).

Tableau 8.5

Modes	Dispersion
Ordinaire O	$k_{\perp} c = \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$
Extraordinaire X	$k_{\perp} c = \sqrt{\frac{(\omega^2 - \omega_R^2)(\omega^2 - \omega_L^2)}{\omega^2 - \omega_{UH}^2}}$
Droit R	$k_{\parallel} c = \omega \sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - \omega_{ce})}}$
Gauche L	$k_{\parallel} c = \omega \sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + \omega_{ce})}}$

Le cas de la propagation sous incidence oblique sera abordé dans le paragraphe suivant, avant cela nous allons étudier la question de l'impact de la dynamique ionique sur la partie basse fréquence des ces différents modes.

8.2.3 Modes ioniques magnétisés

L'expression des courants ioniques dans un plasma froid magnétisé peut être établie de façon similaire au cas électronique à partir de l'équation d'Euler ionique linéarisée, le résultat est obtenu directement par analogie avec l'expression (8.33).

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_e &= -j\omega_{pe}^2 \frac{\omega \varepsilon_0}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} \left[\mathbf{E} + j \frac{\omega_{ce}}{\omega} \mathbf{E} \times \mathbf{b} - \frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b} \right] \\ \mathbf{J}_i &= -j\omega_{pi}^2 \frac{\omega \varepsilon_0}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} \left[\mathbf{E} - j \frac{\omega_{ci}}{\omega} \mathbf{E} \times \mathbf{b} - \frac{\omega_{ci}^2}{\omega^2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b} \right] \end{aligned}$$

Les éléments du tenseur diélectrique sont modifiés pour prendre en compte la polarisation ionique.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\parallel} &= 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}, & \varepsilon_{\perp} &= 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2}, \\ \varepsilon_{\times} &= \frac{\omega_{ce}}{\omega} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} - \frac{\omega_{ci}}{\omega} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} \end{aligned}$$

À haute fréquence l'impact du mouvement des ions est négligeable compte tenu de leur inertie, par contre, à basse fréquence l'étude des dérives électriques nous a appris que, malgré leur masse élevée, les ions pouvaient être la source de courants dominants dans un plasma (5.1) ; aussi, nous considérerons ce cas asymptotique $\omega \rightarrow 0$. Suivant cette limite, les éléments du tenseur diélectrique approchent les valeurs suivantes : $\varepsilon_{\parallel} \rightarrow -\omega_{pe}^2/\omega^2$, $\varepsilon_{\perp} \rightarrow 1 + c^2/V_A^2$, $\varepsilon_{\times} \sim \omega$ où nous avons introduit la vitesse d'Alfvén, $V_A/c = \omega_{ci}/\omega_{pi}$, identifiée au chapitre trois (3.12). En régime de propagation parallèle, $\mathbf{b} = (0, 0, 1)$, $\mathbf{k} = (0, 0, k_{\parallel})$, à très basse fréquence, la relation de dispersion des modes R et L se simplifie : $k_{\parallel}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_{\perp} \pm \varepsilon_{\times}) \rightarrow k_{\parallel}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp}$ et présente une dégénérescence car les deux solutions se confondent pour donner l'onde d'Alfvén.

$$\text{Onde d'Alfvén A : } \omega = k_{\parallel} \frac{V_A}{\sqrt{1 + \frac{V_A^2}{c^2}}} \approx k_{\parallel} V_A \quad (8.41)$$

Les effets d'inertie ionique finie permettent de lever cette dégénérescence et de séparer deux branches ioniques basses fréquences correspondant aux modes L et R hautes fréquences.

$$\text{Mode L : } \omega = k_{\parallel} V_A \sqrt{1 - \frac{\omega}{\omega_{ci}}}, \quad \text{Mode R : } \omega = k_{\parallel} V_A \sqrt{1 + \frac{\omega}{\omega_{ci}}}$$

La figure 8.12 présente la structure des branches basses fréquences en propagation parallèle.

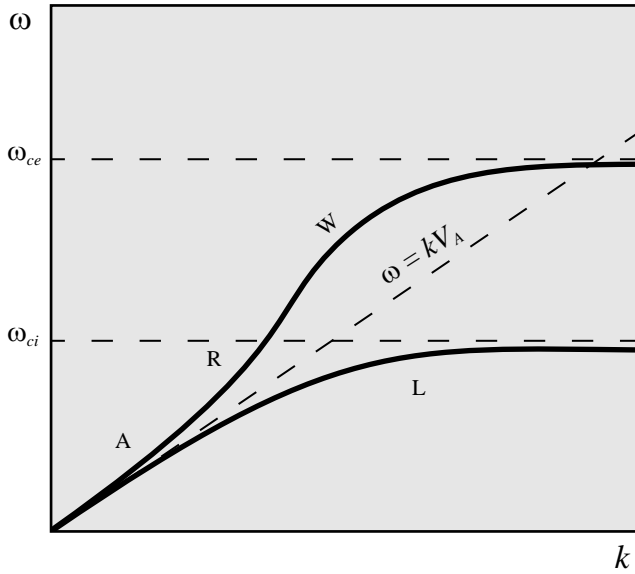


Figure 8.12 Modes R et L ioniques : onde d’Alfvén.

On notera l’apparition d’une résonance à la fréquence cyclotronique ionique ω_{ci} pour la branche gauche, en effet, le sens de rotation cyclotronique des ions est indirect (sens des aiguilles d’une montre). Pour ce qui concerne l’impact de la dynamique ionique sur le régime basse fréquence des modes se propageant perpendiculairement au champ magnétique, $\mathbf{b} = (0, 0, 1)$, $\mathbf{k} = (k_{\perp}, 0, 0)$, la relation (8.40) est modifiée et présente une nouvelle résonance, la résonance hybride basse ω_{LH} identifiée au début de ce chapitre (8.1).

$$\text{Mode extraordinaire X : } \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2} = \frac{(\omega^2 - \omega_R^2)(\omega^2 - \omega_L^2)}{(\omega^2 - \omega_{LH}^2)(\omega^2 - \omega_{UH}^2)}$$

La limite très basse fréquence pour le mode extraordinaire :

$$k_{\perp}^2 c^2 = \omega^2 (\epsilon_{\perp} - \epsilon_x^2 / \epsilon_{\perp}) \rightarrow \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\perp}$$

conduit à l’identification du mode d’Alfvén compressionnel. Notons que la dénomination de ce mode prend tout son sens si nous considérons les effets de compressibilité ; par opposition à la compression, le mode d’Alfvén parallèle est aussi appelé mode torsionnel compte tenu de son effet sur les lignes de champ magnétique.

$$\text{Onde d’Alfvén compressionnelle AC : } \omega = k_{\perp} \frac{V_A}{\sqrt{1 + \frac{V_A^2}{c^2}}} \approx k_{\parallel} V_A \tag{8.42}$$

La figure 8.13 présente le diagramme de Brillouin basse fréquence corrigé des effets ioniques. Le mode ordinaire, quant à lui, ne peut pas se propager à basse fréquence car il n'est pas couplé aux mouvements cyclotroniques.

Les ondes d'Alfvén sont aussi appelées ondes magnétohydrodynamiques, en effet leur propagation modifie la structure du champ magnétique statique à travers des ondulations et compressions de lignes de champ et une partie significative de l'énergie est sous forme magnétique.

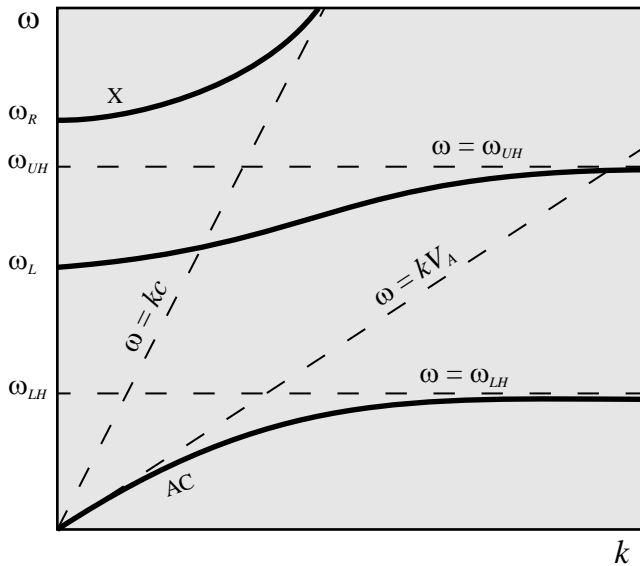


Figure 8.13 Modes X ioniques : onde d'Alfvén compressionnelle.

Explorons maintenant l'impact des effets de compressibilité sur ces branches ioniques. L'équation d'Euler en champ magnétique, avec un terme de pression, une fois linéarisée, permet de calculer les courants comme solution de l'équation :

$$\mathbf{J} = -j \frac{\omega_p^2}{\omega} \varepsilon_0 \mathbf{E} + j \frac{\omega_c}{\omega} \mathbf{J} \times \mathbf{b} + \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\gamma k_B T}{m} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}) \mathbf{n}$$

Ainsi, à basse fréquence, le long des lignes du champ magnétique statique, la prise en compte de la compressibilité électronique et de l'inertie ionique, au voisinage de la résonance cyclotronique ionique, se traduit par :

$$\mathbf{J}_e = j \omega \frac{\omega_{pe}^2 m_e}{k^2 \gamma k_B T_e} \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{J}_i = -j \omega_{pi}^2 \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

L'hypothèse de quasi-neutralité : $\mathbf{J}_e + \mathbf{J}_i = \mathbf{0}$, conduit alors à l'identification du mode cyclotronique ionique :

$$\text{Onde cyclotronique ionique CI : } \omega^2 = \omega_{ci}^2 + k^2 C_s^2 \quad (8.43)$$

La compressibilité modifie aussi la branche compressionnelle car la compression des lignes de champ, compte tenu du théorème du gel, est nécessairement fortement couplée à la compression du plasma. Pour résumer l'étude des effets de compressibilité, nous rappelons dans le tableau (8.6) la dispersion des trois modes électroniques et ioniques où ces effets sont dominants.

Tableau 8.6

Modes	Dispersion
Bohm-Gross	$\omega = \sqrt{\omega_p^2 + k^2 C_s^2}$
Onde acoustique ionique	$\omega = k C_s \left(1 + \frac{k^2 C_s^2}{\omega_{pi}^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$
Onde cyclotronique ionique	$\omega = \sqrt{\omega_{ci}^2 + k^2 C_s^2}$

Jusqu'à présent nous nous sommes contentés d'étudier et d'analyser les modes électroniques et ioniques se propageant le long et perpendiculairement au champ magnétique statique \mathbf{B}_0 , l'étude des ondes dans les plasmas magnétisés sous incidence quelconque se mène de façon similaire, nous nous contenterons d'analyser les phénomènes de coupure et de résonance pour le cas de l'incidence quelconque sans présenter le détail de l'analyse, branche par branche, de la relation de dispersion.

8.2.4 Coupures et résonances

Pour une onde de vecteur d'onde $(k_\perp, 0, k_\parallel) = (k \sin \theta, 0, k \cos \theta)$, l'équation du champ électrique (8.34) se ramène à la recherche des conditions d'annulation du déterminant Λ .

$$\Lambda(\omega, k, \theta) = \text{Det} \begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_\perp - k_\parallel^2 & -j \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_\times & k_\perp k_\parallel \\ j \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_\times & \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_\perp - k_\parallel^2 - k_\perp^2 & 0 \\ k_\perp k_\parallel & 0 & \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_\parallel - k_\perp^2 \end{pmatrix} = 0$$

Introduisons les coefficients :

$$a(\theta) = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{k} / k^2 = \varepsilon_\perp \sin^2 \theta + \varepsilon_\parallel \cos^2 \theta, \quad b(\theta) = \varepsilon_\perp \varepsilon_\parallel (1 + \cos^2 \theta) + (\varepsilon_\perp^2 - \varepsilon_\times^2) \sin^2 \theta$$

et

$$c = \varepsilon_{\parallel} (\varepsilon_{\perp}^2 - \varepsilon_{\times}^2)$$

alors la relation de dispersion $\Lambda = 0$ conduit à l'étude de l'équation :

$$a \left(\frac{kc}{\omega} \right)^4 - b \left(\frac{kc}{\omega} \right)^2 + c = 0$$

Le module du vecteur d'onde k peut donc être exprimé en fonction de la pulsation ω et de l'angle de propagation par rapport au champ statique θ , c'est la relation étudiée initialement par Appleton et Hartree dans le cadre de leur théorie magnéto-ionique :

$$k(\theta, \omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\left(b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \right) / 2a}$$

Sous cette forme les résonances et coupures sont aisément identifiables.

$$\text{Résonances} : k \rightarrow +\infty \Rightarrow a(\theta, \omega) \rightarrow 0$$

$$\text{Coupures} : k \rightarrow 0 \Rightarrow c(\omega) \rightarrow 0$$

L'identification des coupures est donc relativement aisée et conforme aux résultats précédents pour $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$. La liste des coupures dans un plasma magnétisé, analysé dans le cadre d'un modèle fluide, s'établit suivant le tableau (8.7).

Tableau 8.7

Coupures
Plasma : $\omega_{pe} = \sqrt{\frac{nq_e^2}{\varepsilon_0 m_e}}$
Droite : $\omega_R = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \frac{\omega_{ce}^2}{4}} + \frac{\omega_{ce}}{2}$
Gauche : $\omega_L = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \frac{\omega_{ce}^2}{4}} - \frac{\omega_{ce}}{2}$

Par contre, l'analyse des résonances révèle une dépendance en la direction de propagation qui nécessite l'introduction du concept de cône de résonance ; en effet, la condition de résonance $a(\omega, \theta) = 0$ peut être écrite :

$$\tan^2(\theta) = -\frac{\varepsilon_{\parallel}(\omega)}{\varepsilon_{\perp}(\omega)} \quad (8.44)$$

et le lieu géométrique des directions satisfaisant cette condition de résonance est un cône. Les résonances définissent une relation entre ω et θ ; cette relation est représentée sur la figure 8.14 où l'on peut vérifier que les résonances parallèle et perpendiculaire sont ainsi retrouvées.

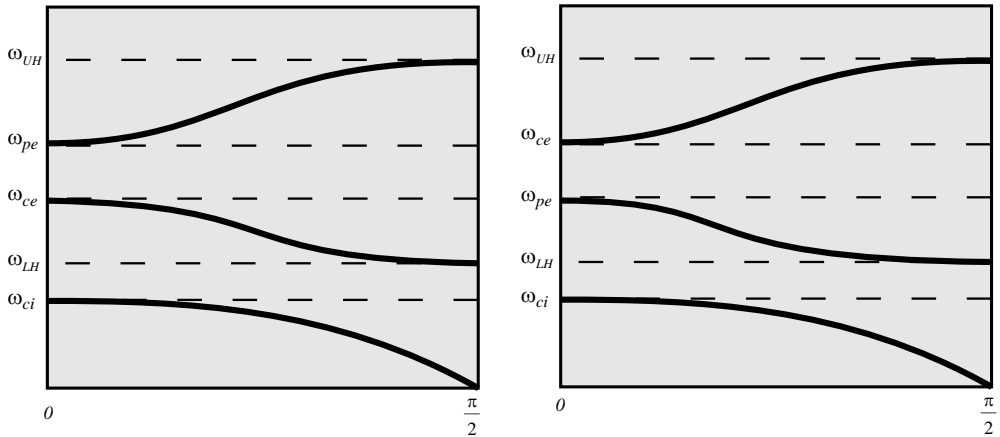


Figure 8.14 Fréquences de résonance ω en fonction de l'angle θ pour les plasmas denses $\omega_{ce} < \omega_{pe}$ et dilués $\omega_{ce} > \omega_{pe}$.

Les résonances hybrides prenant le relais des résonances cyclotron suivant la direction de propagation. Les résonances étant définies par la relation $k = +\infty$ leur analyse nécessite la prise en compte de phénomènes complémentaires pour régulariser ce comportement singulier du modèle fluide ; ces phénomènes sont l'absorption et la conversion de mode qui impliquent l'évaluation des composantes cinétiques du tenseur diélectrique. Par contre, l'analyse des coupures est directe, au voisinage d'une coupure l'onde est évanescente et est réfléchi (Figure 8.15).

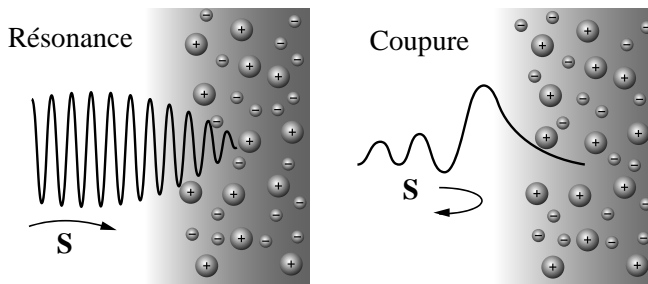


Figure 8.15 Résonances et coupures.

Le tableau (8.8) résume ces propriétés essentielles des résonances et coupures.

Tableau 8.8

	Résonances	Coupures
k	$k = +\infty$	$k = 0$
\mathbf{H}, \mathbf{E}	$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$	$\mathbf{H} = \mathbf{0}$
Phénomènes	Onde amortie, absorption, conversion	Onde évanescence, réflexion
Direction	$\tan^2 \theta = -\varepsilon_{\parallel} / \varepsilon_{\perp}, \omega_c, UH, LH$	Toutes directions, $\omega_{pe,R,L}$
Puissance	Puissance active	Puissance réactive

L'analyse des résonances et coupures permet d'organiser la description et la classification des modes en incidence quelconque et en particulier de suivre la transformation des modes X et O vers les modes L et R en fonction de la rotation de la direction de propagation.

8.3 IRRÉVERSIBILITÉ ET NON-LINÉARITÉS

Une présentation des ondes dans les plasmas se résumant à l'identification des modes propres (O, X, R, L, W...) est incomplète, il est aussi nécessaire d'analyser la dynamique de ces ondes, c'est-à-dire les mécanismes d'émission, d'absorption et de couplage de modes. Dans les plasmas de laboratoire ces modes propres sont en général excités à partir d'un système d'antennes complexe et l'onde est utilisée pour chauffer ou diagnostiquer le plasma. La compréhension des mécanismes de chauffage (qui avec les mécanismes de confinement sont les deux préoccupations fondamentales des physiciens des plasmas) passe par l'étude approfondie des processus d'absorption des ondes qui viennent d'être décrites.

Deux approches peuvent être utilisées pour étudier l'absorption des ondes dans les plasmas : (i) le calcul du tenseur diélectrique dit chaud à partir de l'équation de Vlasov qui permet d'exprimer la densité de puissance absorbée par unité de volume (8.19), (ii) le calcul des orbites des particules dans les champs électromagnétiques et l'introduction de l'irréversibilité à travers l'hypothèse des *phases aléatoires* qui sera justifiée au dernier chapitre dans le cadre de l'étude du chaos hamiltonien. C'est cette deuxième approche que nous présenterons ici car elle autorise une analyse physique plus fine des transferts de puissance et de la production d'entropie. Nous étudierons donc l'absorption Landau, l'absorption collisionnelle ou *bremsstrahlung inverse* (le mot *bremsstrahlung* désigne le processus de rayonnement des particules chargées lors de collisions, « freiner et rayonner » en allemand) et l'absorption résonante par les plasmons.

8.3.1 Absorption Landau

Considérons un onde électrostatique longitudinale $E \sin(kx - \omega t + \varphi)$, décrite par le potentiel électrostatique $\phi \cos(kx - \omega t + \varphi)$ et interagissant avec une particule

chargée de masse m et de charge q . L'équation de Newton pour cette particule est alors non-linéaire.

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{q}{m} \frac{d}{dx} \phi \cos(kx - \omega t + \varphi), \quad \frac{dx}{dt} = v$$

La phase relative initiale entre l'onde et la particule ($kx_0 - \omega t_0 + \varphi$) n'est pas un paramètre de contrôle du problème, à un instant donné, dans un plasma, certaines particules se trouvent dans les zones de champ fort, d'autres, dans les zones de champ faible. Une description statistique de l'interaction onde-particules s'impose; nous étudierons donc la fonction de distribution des vitesses $f(v, t)$ et nous supposons que la phase relative initiale entre l'onde et la particule est uniformément distribuée, c'est l'hypothèse des phases aléatoires (RPA).

Ainsi, nous prendrons la moyenne des quantités physiques sur toutes les positions initiales accessibles x_0 . Sous cette hypothèse, l'interaction onde-particules peut être vue comme une série :

émission / absorption / émission / émission / absorption / émission / ...

Cette série de processus peut être considérée comme une marche aléatoire dans l'espace des énergies ou des vitesses. Dans le deuxième chapitre nous avons présenté l'équation de Fokker-Planck (2.29) comme l'outil d'analyse des marches aléatoires, aussi, nous allons nous attacher à calculer le coefficient de diffusion de la vitesse $\langle \delta v \delta v \rangle_{x_0}$ qui permet de décrire l'interaction de l'onde et des particules à travers l'équation de Fokker-Planck dans l'espace des vitesses :

$$\frac{\partial f(v, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} \frac{\langle \delta v \delta v \rangle_{x_0}}{2\delta t} \frac{\partial}{\partial v} f(v, t) \quad (8.45)$$

La puissance transférée de l'onde vers la particule, par unité de volume, est donnée par :

$$\langle w \rangle \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right] = n \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m}{2} v^2 f dv \right] \rightarrow \langle w \rangle = -nm \int_{-\infty}^{+\infty} v \frac{\langle \delta v \delta v \rangle_{x_0}}{2\delta t} \frac{\partial f}{\partial v} dv \quad (8.46)$$

où nous avons intégré par partie pour faire apparaître le coefficient de diffusion et introduit n la densité volumique de particules.

Le coefficient de diffusion de la vitesse permet donc d'établir l'équation d'évolution de la population de particules (8.45) et de calculer le transfert irréversible de puissance de l'onde vers le plasma (8.46). Pour calculer ce coefficient de diffusion, normalisons les quantités aux données du problème : $\omega = m = q = k = 1$, effectuons un changement de repère vers le repère se déplaçant à la vitesse de phase de

l'onde : $v = v' + \omega/k = v' + 1$ et considérons une particule de conditions initiales à $t = 0$: $v'_0 = v_0 - 1$, $x'_0 = x_0$. À un instant ultérieur δt , sa vitesse et sa position deviennent : $v' = v - 1$ et $x' \approx x'_0 + v'_0 \delta t$. L'énergie mécanique totale est conservée :

$$v'^2 + 2\phi \cos x' = v_0'^2 + 2\phi \cos x'_0 \rightarrow (v' - v'_0)(v' + v'_0) = -2\phi (\cos x' - \cos x'_0).$$

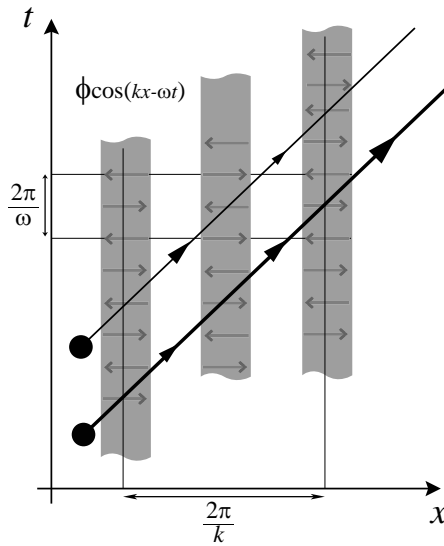


Figure 8.16 Synchronisme onde-particule et absorption Landau.

Compte tenu de l'identité $\cos a - \cos b = -2 \sin(a + b/2) \sin(a - b/2)$, l'incrément de vitesse $\delta v' = v' - v'_0$ peut être exprimé comme :

$$\delta v' = v' - v'_0 = \frac{2\phi}{v'_0} \sin\left(\frac{v'_0 \delta t}{2} + x'_0\right) \sin\left(\frac{v'_0 \delta t}{2}\right)$$

Dans le repère du laboratoire nous obtenons donc l'expression :

$$\delta v(v_0, \delta t) = -\frac{2\phi}{v_0 - 1} \sin\left[\frac{(v_0 - 1) \delta t}{2} + x_0\right] \sin\left[\frac{(v_0 - 1) \delta t}{2}\right]$$

Toutes les positions initiales x_0 étant équiprobables, la valeur moyenne est donc nulle :

$$2\pi \langle \delta v(v_0) \rangle_{x_0} = \int_0^{2\pi} \delta v dx_0 = 0$$

par contre, la valeur moyenne du carré de l'incrément de vitesse est non nulle.

$$\langle \delta v^2(v_0) \rangle_{x_0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta v^2 dx_0 = \frac{2\phi^2}{(v_0 - 1)^2} \sin^2\left[\frac{(v_0 - 1) \delta t}{2}\right]$$

Pour les temps longs devant l'échelle caractéristique de l'onde (ω^{-1}) la limite $2\varepsilon \sin^2(x/2\varepsilon)/x^2 \rightarrow \pi\delta(x)$ est légitime, remarquons que, ici aussi, nous supposons l'existence d'une échelle de temps mésoscopique grande à l'échelle microscopique mais petite à l'échelle de l'évolution de $f(v, t)$, comme ce fut le cas lors de la construction de l'équation de mobilité-diffusion dans le chapitre deux. Le résultat final est donc donné par la formule classique due à Landau.

$$\frac{\langle \delta v^2 \rangle}{2\delta t} = \frac{\pi q^2 k^2}{2 m^2} \phi^2 \delta(kv - \omega) \quad (8.47)$$

Cependant, une question demeure, comment se fait-il qu'en l'absence de processus dissipatifs ce mécanisme d'absorption (émission) soit opérationnel ?

La réponse est illustrée par la figure 8.16, dans un diagramme d'espace-temps nous avons tracé les trajectoires de deux particules de même vitesse initiale, mais de positions initiales différentes. Les zones du maximum du champ sont représentées par les bandes grises ou le sens du champ est aussi indiqué. Deux types de trajectoires peuvent être considérées.

- Si $kv - \omega \ll 0$ ou $kv - \omega \gg 0$, on voit que la particule rencontrera sur son trajet des zones d'accélération et de décélération avec une probabilité égale, il n'y a donc pas de transfert résonnant, ces particules interagissent avec l'onde en régime adiabatique et elles ne participent pas au processus d'absorption (d'émission).
- Si $kv - \omega \approx 0$, alors, comme le montre la figure 8.16, les particules et l'onde sont en synchronisme : chaque particule voyage avec une zone d'accélération ou une zone de décélération du champ, ainsi, pour ces particules, dites résonnantes, le transfert de puissance est significatif, mais il peut être positif ou négatif lorsque l'on moyenne sur x_0 . Le signe de $kv - \omega$ détermine le signe du transfert moyen ; une analyse de la relation (8.46), basée sur une deuxième intégration par partie :

$$\langle w \rangle = -n \frac{\pi q^2 E^2 \omega}{2 m k^2} \left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_{\frac{\omega}{k}} \quad (8.48)$$

démontre que les particules telles que $kv - \omega \geq 0$ donnent en moyenne leur énergie au champ et que les particules telles que $kv - \omega \leq 0$ absorbent l'énergie du champ. Une fonction de distribution des vitesses monotone décroissante constitue donc un milieu dissipatif en l'absence de collision.

8.3.2 *Bremsstrahlung inverse*

Lorsqu'un électron est soumis à l'influence d'un champ électrique oscillant $-\mathbf{E} \sin(\omega t)$ et subit, en même temps, des collisions avec d'autres espèces, il se produit aussi un transfert irréversible d'énergie du champ vers l'électron, c'est le processus de *bremsstrahlung inverse*.

Considérons un électron, de charge q et de masse m , soumis à l'influence d'un champ électrique oscillant et subissant des collisions aléatoires. La figure 8.17 illustre son comportement : la trajectoire est la combinaison d'une translation uniforme interrompue par les collisions et d'une oscillation de vitesse $q\mathbf{E} \cos(\omega t) / m\omega$.

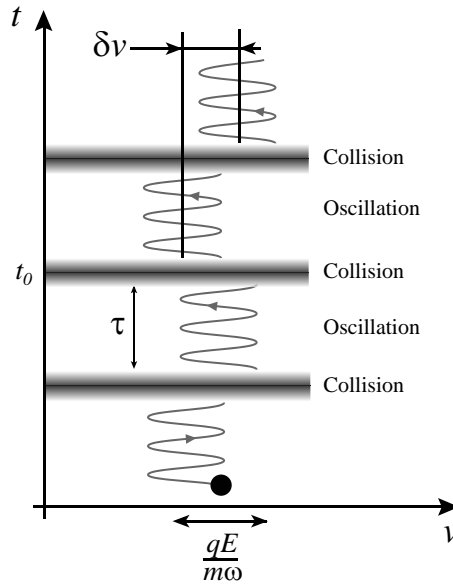


Figure 8.17 *Bremsstrahlung inverse.*

Les collisions ré-initialisent le mouvement de translation de façon aléatoire, ainsi la série :

oscillation+translation / collision / oscillation+translation / collision / ...

peut être considérée comme un marche aléatoire dans l'espace des vitesses repérant le mouvement ; les gains et pertes d'énergie de la particule sont autant de pertes et gains d'énergie pour le champ, la dynamique de l'électron est donc du type :

émission / absorption / émission / émission / absorption / émission / ...

et peut être modélisée par une équation de Fokker-Planck, la seule différence avec le cas précédent et de nature géométrique car l'espace des vitesses est ici de dimension trois et nous considérons l'évolution de la fonction de distribution du module de la vitesse $f(v, t)$.

$$\frac{\partial f(v, t)}{\partial t} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^2 \frac{\langle \delta v \delta v \rangle}{2\delta t} \frac{\partial}{\partial v} f(v, t) \quad (8.49)$$

La puissance transférée de l'onde vers la particule, par unité de volume, est donnée par :

$$\begin{aligned} \langle w \rangle \left[\frac{\mathbf{W}}{\text{m}^3} \right] &= n \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m}{2} v^2 f(v) 4\pi v^2 dv \\ &= -nm \int_{-\infty}^{+\infty} v \frac{\langle \delta v \delta v \rangle_{x_0}}{2\delta t} \frac{\partial f}{\partial v} 4\pi v^2 dv \end{aligned}$$

La probabilité qu'un électron ne subisse aucune collision durant un temps τ et subisse une collision à l'issue de ce temps τ , durant l'intervalle $d\tau$, est donnée par (2.2) : $dP(\tau)/d\tau = \nu_1 \exp(-\nu_1\tau)$ où $\nu_1(v) = n_n v \sigma_1(v)$ est la fréquence de transfert d'impulsion (4.12). L'équation de Newton en présence de collisions devient donc : $d\mathbf{v}/dt = -q\mathbf{E} \sin(\omega t) + \sum_n \delta(t - \tau_n) \delta\mathbf{v}_n$, où τ_n sont les instants (aléatoires) de

collisions (Figure 8.17). Afin de calculer le coefficient de diffusion $\langle \delta v \delta v \rangle / 2\delta t$ étudions la dynamique d'un électron entre les instants t_0 et t en l'absence de collision, supposons que l'électron vient juste de subir une collision à l'instant t_0 et possède après cette collision la vitesse $\mathbf{v}(t_0)$. En l'absence de collision la vitesse à un instant ultérieur t est donc donnée par :

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) + \frac{q}{m\omega} \mathbf{E} [\cos(\omega t) - \cos(\omega t_0)]$$

On introduit l'incrément de vitesse : $\delta\mathbf{v}(t, t_0) = \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(t_0)$, compte tenu de l'identité : $\cos a - \cos b = -2 \sin(a+b/2) \sin(a-b/2)$, l'incrément de vitesse entre deux collisions s'exprime donc comme :

$$\delta\mathbf{v} = \frac{2q}{m\omega} \mathbf{E} \sin\left(\omega \frac{\tau}{2}\right) \sin\left(\omega \frac{\tau}{2} + t_0\right)$$

où $\tau = t - t_0$. La moyenne de cet incrément sur le temps t_0 , uniformément distribué, est nulle : $\langle \delta\mathbf{v} \rangle_{t_0} = \mathbf{0}$; par contre, la moyenne de son carré, prise sur l'instant de la dernière collision t_0 , $\langle \delta\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} \rangle_{t_0}$, est non nulle et ce dernier résultat pris en moyenne sur la durée entre deux collisions, $\langle \delta\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} \rangle_{\tau, t_0}$, avec la distribution de probabilité $\nu_1 \exp(-\nu_1\tau)$:

$$\begin{aligned} \langle \delta\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} \rangle_{t_0} &= \frac{2q^2 E^2}{m^2 \omega^2} \left[\sin\left(\omega \frac{\tau}{2}\right) \right]^2 \rightarrow \\ \frac{\langle \delta\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} \rangle_{\tau, t_0}}{\delta t} &= \frac{2q^2 E^2}{m^2 \omega^2} \frac{\int_0^{+\infty} \exp(-\nu_1\tau) \left[\sin\left(\omega \frac{\tau}{2}\right) \right]^2 d\tau}{\int_0^{+\infty} \tau \exp(-\nu_1\tau) d\tau} \end{aligned}$$

permet d'évaluer l'incrément moyen d'énergie pendant une durée mésoscopique. Ainsi le coefficient de diffusion $\langle \delta v \delta v \rangle = \langle \delta\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} \rangle / 3$ peut être calculé et le résultat

final est :

$$\frac{\langle \delta v \delta v \rangle}{\delta t} = \frac{q^2 E^2}{3m^2} \frac{v_1(v)}{v_1^2(v) + \omega^2} \quad (8.50)$$

Comme pour le cas de l'absorption Landau, le coefficient de diffusion dans l'espace des vitesses est proportionnel au carré du champ et dépend de la vitesse.

$$\langle w \rangle = -n \frac{q^2 E^2}{6m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v_1(v)}{v_1^2(v) + \omega^2} v \frac{\partial f}{\partial v} 4\pi v^2 dv$$

Pour certaines fonctions de distribution, le signe du transfert de puissance peut être inversé, c'est le phénomène d'émission bremsstrahlung stimulée.

8.3.3 Absorption résonante

L'existence des plasmons peut aussi être mise à profit pour transférer, de manière irréversible, l'énergie d'un champ électrique oscillant vers la population électronique. Les mécanismes mis en jeu dans un tel transfert peuvent conduire à une excitation cohérente, c'est-à-dire à la génération d'une onde plasma régulière d'amplitude et de phase bien définies. Le transfert peut aussi être effectué en générant de l'entropie et ce type d'excitation incohérente est alors considéré comme un mécanisme de chauffage des plasmons, qui, dans une phase ultime, transfèrent leur énergie aux électrons.

Soit un plasma constitué d'électrons de charge $-q$ et de masse m , les ions sont infiniment lourds et donc restent au repos. A l'équilibre les électrons sont supposés au repos (le mouvement thermique des électrons est négligeable), la densité électronique n_0 est homogène et égale à la densité ionique. Considérons un déplacement des électrons (unidimensionnel le long de l'axe des x) perturbant cet état d'équilibre, tous les électrons appartenant à un plan $x = x_0$, à l'instant initial $t = 0$, sont déplacés dans le plan $x = x_0 + \xi(x_0, t)$ à l'instant t . La densité électronique devient donc inhomogène et la séparation de charges résultante génère un champ électrique. Le déplacement lagrangien $\xi(x_0, t)$ est tel que tous les électrons situés initialement entre le plan $x = x_0$ et le plan $x = x_0 + \xi$ sont déplacés vers des coordonnées $x > x_0 + \xi$ afin de préserver l'ordre initial entre les différentes couches d'électrons. On observe donc à l'instant t un déficit de charges négatives à gauche du plan $x = x_0 + \xi$ (Figures 3.3 et 3.4). Le théorème de Gauss permet de calculer le champ électrique $m\omega_p^2 \xi / q$ au point $x = x_0 + \xi$ à l'instant t , où ω_p est la pulsation de Langmuir. Ce champ électrique, propre au plasma, se superpose à un champ appliqué à des fins de chauffage du plasma : $E \cos(\omega t) = m\mathcal{E} \cos(\omega t) / q$ et $\omega \approx \omega_p$. Pour étudier la dynamique de ce modèle introduisons la variable complexe $\mathcal{Z} : \mathcal{Z}(t, x_0) = \omega_p \xi(t, x_0) + j \partial \xi / \partial t$ qui vérifie l'équation de Newton :

$$\frac{d\mathcal{Z}}{dt} + j\omega_p \mathcal{Z} = -j\mathcal{E} \cos(\omega t)$$

La solution de cette équation différentielle linéaire avec second membre est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre plus une solution particulière de l'équation avec second membre :

$$\mathcal{Z}(t) = a_0 \exp(-j\omega_p t + j\varphi_0) - j\mathcal{E} \exp(-j\omega_p t) \int_0^t \exp(j\omega_p u) \cos(\omega u) du.$$

$$\mathcal{Z}(t) \approx a_0 \exp(-j\omega_p t + j\varphi_0) - \frac{\mathcal{E} \exp(-j\omega t) - \exp(-j\omega_p t)}{\omega_p - \omega}$$

Dans la deuxième identité nous avons négligé les termes non résonnants car $\omega \approx \omega_p$. L'énergie ε stockée dans l'oscillation plasmon est définie par : $2\varepsilon = m\mathcal{Z}\mathcal{Z}^*$. L'incrément d'énergie $\delta\varepsilon$ absorbée durant un instant δt par les plasmons est donc donné par : $\delta\varepsilon(\varepsilon, \delta t) = m\mathcal{Z}(\delta t)\mathcal{Z}^*(\delta t)/2 - m\mathcal{Z}(0)\mathcal{Z}^*(0)/2$.

$$\delta\varepsilon(\varepsilon, \delta t) \approx \frac{ma_0\mathcal{E}}{(\omega_p - \omega)} \sin\left[\frac{(\omega - \omega_p)}{2}\delta t + \varphi_0\right] \sin\left[\frac{(\omega - \omega_p)}{2}\delta t\right]$$

Nous avons négligé les termes quadratiques en \mathcal{E}^2 puis utilisé la relation : $\cos a - \cos b = -2\sin(a+b/2)\sin(a-b/2)$; seule la moyenne sur la phase initiale de l'oscillation φ_0 possède une signification physique car cette phase φ_0 est distribuée uniformément.

$$\langle \delta\varepsilon^2 \rangle_{\varphi_0} = m\mathcal{E}^2 \varepsilon \frac{\sin^2\left[\frac{(\omega - \omega_p)}{2}\delta t\right]}{(\omega_p - \omega)^2}$$

Dans le plan des positions et vitesses de l'oscillateur plasmon $\sqrt{\varepsilon}$ constitue une coordonnée radiale, aussi nous considérons l'incrément $\delta\sqrt{\varepsilon} = \delta\varepsilon/2\sqrt{\varepsilon}$ et le coefficient de diffusion $\langle \delta\sqrt{\varepsilon}\delta\sqrt{\varepsilon} \rangle / 2\delta t$. Pour les temps δt longs devant l'échelle caractéristique de l'excitation et de l'oscillateur (ω^{-1}) la limite $2\varepsilon \sin^2(x/2\varepsilon) / x^2 \rightarrow \pi\delta(x)$ est légitime.

$$\frac{\langle \delta\sqrt{\varepsilon}\delta\sqrt{\varepsilon} \rangle}{2\delta t} = \frac{\pi}{16} \frac{q^2 E^2}{m} \delta[\omega_p(x_0) - \omega]$$

Une description cinétique de l'excitation des oscillations dans un plasma inhomogène s'articule autour de l'étude de la fonction de distribution $F(\sqrt{\varepsilon}, x_0, t)$ mesurant la densité de probabilité qu'une oscillation de la tranche centrée au repos sur x_0 possède l'énergie ε à l'instant t ; F est une densité de probabilité et la probabilité est donnée par le produit $F(\sqrt{\varepsilon}, x_0, t) \sqrt{\varepsilon} d\sqrt{\varepsilon} dx_0$. Cette densité de probabilité est factorisable :

$$F(\sqrt{\varepsilon}, x_0, t) = f(\sqrt{\varepsilon}, t) n(x_0)$$

et normalisée :

$$\int_0^{+\infty} f(\sqrt{\varepsilon}, t) \sqrt{\varepsilon} d\sqrt{\varepsilon} = 1,$$

$n(x_0)$ est la densité au repos. L'hypothèse des phases aléatoires offre un cadre probabiliste pour la modélisation de l'excitation des plasmons comme une marche aléatoire dans l'espace $\sqrt{\varepsilon}$, l'équation cinétique décrivant cette marche aléatoire est du type Fokker-Planck.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial \sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\varepsilon} \frac{\langle \delta \sqrt{\varepsilon} \delta \sqrt{\varepsilon} \rangle}{2\delta t} \frac{\partial}{\partial \sqrt{\varepsilon}} f$$

La puissance transférée du champ électrique oscillant vers les plasmons est définie par le taux de variation temporelle du contenu énergétique de la population (incohérente) de plasmons.

$$\langle w \rangle \left[\frac{\mathbf{W}}{\text{m}^2} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{+\infty} \sqrt{\varepsilon} d\sqrt{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon F(\sqrt{\varepsilon}, x_0, t) dx_0$$

Intégrons deux fois par partie pour exprimer le résultat final.

$$\langle w \rangle = n \frac{\pi}{8} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \omega \left. \frac{dn}{dx_0} \right|_{\omega_p(x_0)=\omega}^{-1}$$

Nous avons ainsi obtenu la formule classique de l'absorption résonnante, notons que cette dénomination est usurpée car toutes les absorptions non collisionnelles sont résonnantes et méritent cette appellation.

À l'opposé en terme de régime asymptotique de (dé)corrélation, pour conclure ce chapitre, nous allons maintenant étudier la génération de plasmons cohérents possédant des phases bien définies.

8.3.4 Génération de plasmons

Considérons un champ de force perturbateur $m_e \delta \mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$, d'origine quelconque (la force pondéromotrice (5.22) permet par exemple d'engendrer un tel type de force), appliqué à la population électronique d'un plasma de densité électronique d'équilibre n_0 . La dynamique électronique est décrite par un système de trois équations : l'équation de Poisson pour le potentiel électrique ϕ , l'équation d'Euler pour la dynamique du fluide électronique et l'équation de conservation de la charge.

$$\text{Équation de Poisson} \quad : \quad \Delta \phi = \frac{(n_e - n_0) e}{\varepsilon_0}$$

$$\text{Équation d'Euler} \quad : \quad \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + (\mathbf{v}_e \cdot \nabla) \mathbf{v}_e = \frac{e}{m_e} \nabla \phi + \delta \mathbf{a}$$

$$\text{Équation de continuité} \quad : \quad \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) = -\frac{\partial n_e}{\partial t}$$

où $\mathbf{v}_e(\mathbf{r}, t)$ est le champ de vitesse du fluide électronique et $n(\mathbf{r}, t)$ sa densité perturbée.

Ce système de Poisson-Euler peut être résolu en linéarisant la réponse au voisinage de l'équilibre, c'est-à-dire en supposant que la force $m_e \delta \mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ induit de faibles perturbations en valeur relative des différentes quantités.

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}, t) &= 0 + \delta\phi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \Delta\delta\phi = \frac{e\delta n_e}{\epsilon_0} \\ \mathbf{v}_e(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{0} + \delta\mathbf{v}_e(\mathbf{r}, t) \rightarrow \frac{\partial\delta\mathbf{v}_e}{\partial t} = \frac{e}{m_e}\nabla\delta\phi + \delta\mathbf{a} \\ n_e(\mathbf{r}, t) &= n_0 + \delta n_e(\mathbf{r}, t) \rightarrow n_0\nabla\cdot(\delta\mathbf{v}_e) = -\frac{\partial\delta n_e}{\partial t}\end{aligned}$$

La notation δ désignant des quantités du premier ordre en $\delta\mathbf{a}$. La linéarisation du système de Poisson-Euler est obtenue en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à deux.

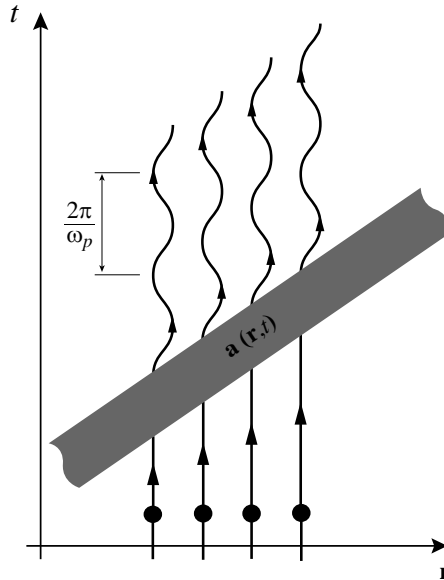


Figure 8.18 Génération de plasmons et sillage.

L'élimination du champ de vitesse et du potentiel entre les trois équations permet d'exprimer la réponse en densité et cette équation d'oscillateur harmonique forcé peut être aisément intégrée.

$$\frac{\partial^2\delta n_e}{\partial t^2} + \omega_p^2\delta n_e = n_0\nabla\cdot\delta\mathbf{a} \rightarrow \frac{\delta n_e(\mathbf{r}, t)}{n_0} = -\int_{-\infty}^t \frac{\sin\omega_p(t-u)}{\omega_p}\nabla\cdot\delta\mathbf{a}(\mathbf{r}, u)du$$

L'intégrale temporelle du second membre de la deuxième identité porte sur un intégrant oscillant à la fréquence plasma. Pour une perturbation $\nabla\cdot\delta\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ de durée finie deux cas doivent être considérés.

- Si la durée de la fonction $\delta\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ est plus longue que l'inverse de la fréquence plasma, alors l'intégrant est oscillant et sa somme quasi nulle. L'effet final de la perturbation après son passage est très faible $\delta n_e(\mathbf{r}, t \rightarrow +\infty)/n_0 \approx 0$, c'est le régime adiabatique de l'interaction.
- Si la durée de la fonction $\delta\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ est plus courte que l'inverse de la fréquence plasma, alors l'intégrant possède un signe constant entre les bornes d'intégration et sa somme est significative. L'effet final de la perturbation après son passage est un déplacement cohérent des électrons résultant en une charge d'espace et le plasma va osciller après le passage de la perturbation : c'est le phénomène de sillage (Figure 8.18).

Les perturbations lentes laissent le plasma quasi-neutre, celui-ci a le temps de réajuster la distribution de charge pour préserver la neutralité. Les perturbations rapides brisent la quasi-neutralité et créent un sillage d'ondes plasmas non-neutres.

BIBLIOGRAPHIE

Les monographies consacrées aux ondes et oscillations dans les plasmas peuvent être classées en trois catégories.

► Traités fondateurs de la discipline

- W.P. Allis S.J. Buchsbaum et A. Bers, *Waves in Anisotropic Plasmas*, MIT Press, Cambridge, USA, 1963.
- G. Bekefi, *Radiation Processes in Plasmas*, John Wiley, USA, 1966.
- R.J. Briggs, *Electron-Stream Interaction with Plasma*, MIT Press, Cambridge, USA, 1964.
- J.F. Denisse et J.L. Delcroix, *Théorie des Ondes dans les Plasmas*, Dunod, Paris, France, 1961.
- A.D. Mc Donald, *Microwave Breakdown in Gases*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1966.
- T.H. Stix, *Waves in Plasmas*, American Institute of Physics, New York, USA, 1992.
- A.W. Trivelpiece, *Slow-Wave Propagation in Plasma Waveguides*, San Francisco Press Inc, San Francisco, USA, 1967.

► Ouvrages plus récents sur les ondes

- YA.L. Al'Pert, *Space Plasma Flow, waves and oscillations*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1990.
- M. Brambilla, *Kinetic Theory of Plasma Waves*, Clarendon Press, Oxford, UK, 1998.

- R. Cross, *An Introduction to Alfvén Waves*, Adam Hilger, IOP publishing, Bristol, UK, 1988.
- A. Hasegawa et C. Uberoi, *The Alfvén Wave*, Technial Information Center U.S. DoE, Springfield Virginia, USA, 1982.
- T. Ohnuma, *Radiation Phenomena in Plasmas*, World Scientific, Singapour, 1994.
- D. Quemada, *Ondes dans les Plasmas*, Hermann, Collection Méthodes, Paris, France, 1968.
- D.G. Swanson, *Plasma Waves*, Academic Press, San Diego, USA, 1989.
- V.V. Zheleznyakov, *Radiation in Astrophysical Plasmas*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1996.

► **Livres sur les instabilités et les phénomènes non-linéaires**

- L. Chen, *Waves and Instabilities in Plasmas*, World Scientific, Singapour, 1987.
- R.C. Davidson, *Methods in Nonlinear Plasma Theory*, Academic Press, New York, USA, 1972.
- D.B. Melrose, *Instabilities in Space and Laboratory Plasmas*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1989.
- B.K. Shivamoggi, *Introduction to Non-linear Fluid-Plasma Waves*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Nethetlands, 1988.
- D.A. Tidman et N.A. Krall, *Shock Waves in Collisionless Plasmas*, Intersciences Publishers John Wiley & Sons, New York, USA, 1971.
- V.N. Tsytovich, *Nonlinear Effects in Plasma*, Plenum Press, New-York, USA, 1970.
- V. Tsytovich, *An Introduction to the Theory of Plasma Turbulence*, Pergamon Press, Oxford, UK, 1972.

En complément de ce choix d'ouvrages classiques, mentionnons :

1. sur les problèmes de dispersion,
 - L. Brillouin, *Wave Propagation and Group Velocity*, Academic Press, USA, 1960.
2. sur les ondes de type plasma dans les métaux,
 - E.A. Kaner et V.G. Skobov, *Plasma Effects in Metals : Helicon and Alfvén Waves*, Taylor & Francis, London, UK, 1971.
3. sur les applications du sillage à l'accélération de photons,
 - J.T. Mendonça, *Theory of Photon Acceleration*, IOP, Bristol, UK, 2001.

Chapitre 9

Collisions, relaxation et transport

« *Da können S' mi' frag'n was Sie woll'n : ich weiss alles.* »
Unended quest, K. Popper.

La différence majeure entre les plasmas et les gaz réside dans les aspects collectif et réactif du comportement d'un plasma. Ce comportement nécessite souvent une modélisation cinétique, non réductible à un simple modèle fluide. La théorie cinétique des plasmas peut être divisée en deux branches : l'étude des phénomènes collectifs en l'absence de collisions et l'étude des mécanismes et processus collisionnels, réactifs ou élastiques.

La fonction de distribution à N corps contient beaucoup trop d'informations pour être utilisée efficacement et, qui plus est, la plupart des systèmes dynamiques à grand nombre de degrés de liberté, en particulier les plasmas, vérifient l'hypothèse de régression des corrélations de Bogolioubov (2.4). Suivant cette hypothèse, tout système dynamique à très grand nombre de degrés de libertés évolue sur trois échelles de temps : l'échelle précinétique, l'échelle cinétique, et l'échelle hydrodynamique. À l'issue de la période précinétique, l'essentiel des corrélations multiples sont détruites et la dynamique du système est correctement représentée par une fonction de distribution réduite. La fonction de distribution à une particule, $F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ ou $F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, contient suffisamment d'informations pour appréhender l'essentiel des processus microscopiques à l'échelle cinétique. $F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)d\mathbf{r}d\mathbf{p}$ mesure la probabilité de trouver une particule en \mathbf{r} avec l'impulsion \mathbf{p} dans un élément de volume de l'espace des phases $d\mathbf{r}d\mathbf{p}$. Sur une échelle de temps longue cette fonction de distribution va

relaxer vers une maxwelienne locale et une description de fluide au voisinage de l'équilibre thermodynamique est valide (2.21).

Mais pour un plasma, par exemple en présence de résonances onde-particules, la phase hydrodynamique n'est quelquefois jamais atteinte, contrairement aux gaz où elle constitue un état asymptotique toujours accessible.

La théorie cinétique des plasmas et la modélisation cinétique sont donc particulièrement importantes et ne constituent pas une simple correction au modèle fluide.

La fonction de distribution à une particule $F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ est largement suffisante pour décrire l'essentiel des processus cinétiques, mais, l'espace des phases (\mathbf{r}, \mathbf{p}) peut être paramétré de différentes manières. En particulier, l'étude dynamique de la séparation entre variables lentes (μ, J, Φ) et variables rapides $(\theta_\mu, \theta_J, \theta_\Phi)$ facilite la modélisation cinétique, car une distribution ne peut pas dépendre des variables rapides au voisinage de l'équilibre (Tableau 5.3). Il est donc souvent approprié, dans les plasmas magnétisés, de considérer des distributions du type $f(\mu, J, \Phi)$; dans le même ordre d'idées, dans le chapitre suivant, nous étudierons les variables angles et actions et les fonctions de distribution associées à ces variables.

Dans les développements qui suivent nous appellerons \mathbf{X} les variables d'état microscopique, notation recouvrant vitesses, positions, invariants adiabatiques ou actions.

9.1 SYSTÈMES MARKOVIENS

9.1.1 Probabilités de transition

D'un point de vue formel, **un système est décrit par un point dans l'espace de ses états microscopiques**; l'évolution de ce système, c'est-à-dire la description des transitions entre les différents états en fonction du temps, génère un ensemble de points, appelé orbite, dont l'étude relève de la théorie des systèmes dynamiques.

Dans la suite, afin de simplifier la présentation, nous ne lèverons pas l'ambiguïté entre le modèle d'un système et le système proprement dit. Deux grandes classes (de modèles) de systèmes dynamiques permettent la description des processus naturels en physique des plasmas :

- les systèmes déterministes qui, au cours de leur évolution, entretiennent une mémoire forte de leur états antérieurs; cette mémoire déterminant leur évolution ultérieure,
- les systèmes aléatoires ou stochastiques, dont l'évolution présente n'est que faiblement influencée par l'histoire passée.

On conçoit aisément qu'un système dynamique *naturel* possède une certaine mémoire, intermédiaire entre le tout ou rien de ces deux cas limites. Mais la

modélisation de l'influence du passé sur le comportement présent pour les systèmes réels conduit à des équations complexes qui se simplifient dans les deux cas limites de l'absence totale de mémoire ou de sa présence déterminante. Ces deux limites asymptotiques ont donc été particulièrement étudiées et utilisées en physique.

- Un système dont le présent permet de reconstruire entièrement le passé et dont le passé détermine totalement le présent est déterministe ; les systèmes hamiltoniens, qui seront étudiés dans le dernier chapitre, constituent une classe de modèles déterministes de tel systèmes à mémoire forte très utilisés en physique.
- Un système dont l'évolution présente est indépendante de son histoire passée est dit markovien, le paragraphe qui suit rappelle les principaux résultats de la théorie des systèmes markoviens, ils seront utilisés pour l'étude des modèles cinétiques des plasmas.

L'évolution d'un système déterministe à forte mémoire, tel qu'un système hamiltonien, est décrite par une orbite dans un espace d'état, c'est-à-dire par une succession temporelle, ordonnée, d'états passés, présent et futurs. À l'opposé, l'évolution d'un système dynamique aléatoire à mémoire faible, est décrite par une densité de probabilité $F(\mathbf{X}, t)$. $F(\mathbf{X}, t) d\mathbf{X}$ mesure la probabilité d'observer ce système à l'instant t dans un voisinage $d\mathbf{X}$ de l'état \mathbf{X} .

La théorie des processus stochastiques a pour objectif de construire un certains nombre de méthodes et d'établir un ensemble de résultats permettant de calculer cette densité de probabilité $F(\mathbf{X}, t)$ à un instant t , à partir de la connaissance de cette densité à un instant antérieur t_0 .

Pour ce faire, la théorie des processus stochastiques est construite à partir de la probabilité conditionnelle, $W(\mathbf{X}_n, t_n \dots \leftarrow \mathbf{X}_1, t_1 \leftarrow \mathbf{X}_0, t_0)$, décrivant les effets de mémoire faible : $W(\mathbf{X}_n, t_n \dots \leftarrow \mathbf{X}_1, t_1 \leftarrow \mathbf{X}_0, t_0) d\mathbf{X}_n \dots d\mathbf{X}_1$ mesure la probabilité pour que le système initialement dans l'état \mathbf{X}_0 à t_0 soit observé dans l'état \mathbf{X}_1 à t_1 dans un voisinage $d\mathbf{X}_1$, dans l'état \mathbf{X}_2 à t_2 dans un voisinage $d\mathbf{X}_2$... et dans l'état \mathbf{X}_n , dans un voisinage $d\mathbf{X}_n$, à l'instant final t_n .

Par définition, un système est markovien si cette probabilité conditionnelle ne fait intervenir que le dernier état considéré :

$$W(\mathbf{X}_n, t_n \dots \leftarrow \mathbf{X}_1, t_1 \leftarrow \mathbf{X}_0, t_0) \equiv W(\mathbf{X}_n, t_n \leftarrow \mathbf{X}_{n-1}, t_{n-1}).$$

Ainsi, nous avons défini un système markovien comme un système à mémoire très courte, complémentaire des systèmes hamiltoniens.

En physique des plasmas, selon l'ordering entre les échelles de temps de l'évolution du système et de son observation, nous utiliserons soit une modélisation hamiltonienne, soit une modélisation markovienne.

La théorie du chaos, abordé dans le prochain chapitre, constitue un ensemble de méthodes et de résultats permettant de justifier et de décrire la transition entre ces deux descriptions.

La probabilité conditionnelle décrivant l'évolution des systèmes markovien, $W(\mathbf{X}, t \leftarrow \mathbf{X}_0, t_0)$ (Figure 9.1), est aussi appelée suivant le contexte :

- densité de probabilité de transition,
- propagateur markovien,
- fonction de Green de l'équation cinétique.

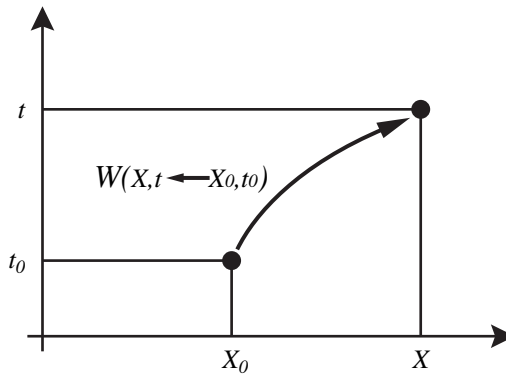


Figure 9.1 Densité de probabilité de transition dans l'espace des états d'un système markovien.

W permet de prédire la densité de probabilité dans l'espace des états $F(\mathbf{X}, t)$ à un instant t , à partir de la densité $F(\mathbf{X}_0, t_0)$ à un instant antérieur t_0 , par une simple sommation sur tous les états initiaux possibles.

$$F(\mathbf{X}, t) = \int W(\mathbf{X}, t \leftarrow \mathbf{X}_0, t_0) F(\mathbf{X}_0, t_0) d\mathbf{X}_0 \quad (9.1)$$

Dans la suite du texte, nous commettrons l'abus de langage commun consistant à dénommer probabilité une densité de probabilité. Cette probabilité de transition W possède un certain nombre de propriétés. Elle est nécessairement positive : $W(\mathbf{X}, t \leftarrow \mathbf{X}_0, t_0) > 0$, et la somme sur l'ensemble des états d'arrivée \mathbf{X} est nécessairement égale à 1, car, à l'issue de la transition, le système reste dans l'espace des états avec une probabilité égale à l'unité.

$$\int W(\mathbf{X}, t \leftarrow \mathbf{X}_0, t_0) d\mathbf{X} = 1 \quad (9.2)$$

Si le système markovien n'a pas le temps d'évoluer, c'est-à-dire si $t = t_0$, alors l'état de départ et l'état d'arrivée sont identiques, ce qui se traduit par l'identité :

$$W(\mathbf{X}, t_0 \leftarrow \mathbf{X}_0, t_0) = \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \quad (9.3)$$

La probabilité pour que le système soit dans l'état \mathbf{X} à l'instant t , sachant qu'il était dans l'état \mathbf{X}_0 à l'instant t_0 , est égale à la somme des probabilités : (i) qu'il soit dans l'état \mathbf{X} à l'instant t , (ii) qu'il fût dans l'état \mathbf{X}_1 à l'instant t_1 , et (iii) dans l'état \mathbf{X}_0 à l'instant t_0 , la somme étant prise sur tous les états intermédiaires \mathbf{X}_1 . Cette sommation sur tous les états intermédiaires \mathbf{X}_1 possibles se traduit par l'équation de Chapman-Kolmogorov :

$$W(\mathbf{X}, t \leftarrow \mathbf{X}_0, t_0) = \int W(\mathbf{X}, t \leftarrow \mathbf{X}_1, t_1) W(\mathbf{X}_1, t_1 \leftarrow \mathbf{X}_0, t_0) d\mathbf{X}_1 \quad (9.4)$$

Cette propriété est illustrée par la figure 9.2.

En physique des plasmas, les processus stochastiques markoviens sont homogènes : la probabilité de transition W entre deux instants t_0 et t n'est fonction que de la durée $|t - t_0|$ entre ces deux instants et non des instants eux mêmes.

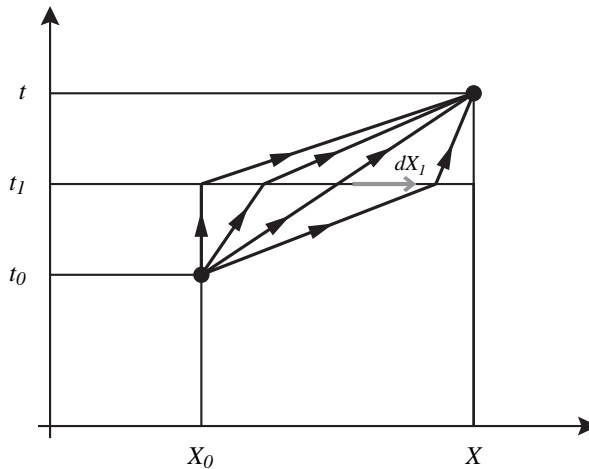


Figure 9.2 Équation de Chapman-Kolmogorov.

En termes formels, c'est une hypothèse d'invariance par translation dans le temps : $W(\mathbf{X}, t \leftarrow \mathbf{X}_0, t_0) = W(\mathbf{X} \leftarrow \mathbf{X}_0, |t - t_0|)$. Dans toute la suite de ce cours les processus markoviens seront supposés homogènes.

9.1.2 Équation de Boltzmann

Le développement aux petits temps, $\tau = |t - t_0| \rightarrow 0$, de la probabilité de transition W permet d'étudier les propriétés locales de la dynamique et d'établir ainsi une équation différentielle équivalente à l'équation de Chapman-Kolmogorov, appelée *master equation* de façon générique. Dans le contexte de la théorie cinétique des plasmas, si \mathbf{X} est la variable de vitesse, cette équation n'est autre que l'équation de Boltzmann.

Aux petits temps, $\tau \rightarrow 0$, la probabilité de transition $W(\mathbf{X} \leftarrow \mathbf{X}_0, \tau)$ est la somme d'une probabilité d'attente et d'une probabilité de transition proportionnelle à τ .

$$W(\mathbf{X} \leftarrow \mathbf{X}_0, \tau) = \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) - \tau \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \int_{\text{Attente}} w(\mathbf{X} \leftarrow \mathbf{X}_0) d\mathbf{X} + \tau \int_{\text{Transition}} w(\mathbf{X} \leftarrow \mathbf{X}_0) d\mathbf{X} \quad (9.5)$$

Nous avons utilisé la normalisation de la probabilité de transition (9.2) et l'identité (9.3) pour établir ce développement aux petits temps qui définit ainsi la probabilité de transition par unité de temps w ; w est une densité de probabilité de taux de transition ayant la dimension de l'inverse d'un temps et de l'inverse de la dimension des états. C'est cette quantité qui doit être identifiée et étudiée au niveau microscopique pour construire une description cinétique.

Nous verrons, dans les chapitres suivants, que le passage d'une description déterministe vers une description stochastique nécessite l'évaluation de cette probabilité de transition par unité de temps w . Par exemple, le taux de transition entre deux états quantiques, $|A\rangle$ et $|B\rangle$, sous l'effet d'un hamiltonien perturbateur V , est donné par la règle d'or de Fermi :

$$w(A \leftarrow B) \sim \frac{2\pi}{\hbar} |\langle A | V | B \rangle|^2.$$

De même, pour un système de particules classiques en présence de collisions élastiques, l'évolution de la fonction de distribution des vitesses $F(\mathbf{v}, t)$ est décrite par la probabilités de transition w par unité de temps déterminée par la section efficace $d\sigma/d\Omega$ (4.4).

$$w(\mathbf{V}', \mathbf{v}' \leftarrow \mathbf{V}, \mathbf{v}) \sim n_c \int g(\mathbf{v}_c) \frac{d\sigma}{d\Omega} \delta(\mathbf{V}' - \mathbf{V}) \frac{\delta(v' - v)}{4\pi v} d\mathbf{v}_c \quad (9.6)$$

où $\mathbf{V}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_c)$ et $\mathbf{v}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_c)$ sont la vitesse du centre de masse et la vitesse relative, avant le choc, et \mathbf{V}' et \mathbf{v}' ces mêmes vitesses, après le choc (9.14); $g(\mathbf{v}_c)$ est la fonction de distribution des vitesses de la population cible et n_c sa densité.

Pour établir une équation différentielle régissant l'évolution temporelle de la densité de probabilité $F(\mathbf{X}, t)$, c'est-à-dire pour construire un bilan entre deux instants, nous allons exprimer de deux façons différentes le développement aux petit temps du propagateur W . Un simple développement de Taylor permet d'établir l'identité :

$$W(\mathbf{X} \leftarrow \mathbf{X}_0, t + \tau) \underset{\tau \rightarrow 0}{=} W(\mathbf{X} \leftarrow \mathbf{X}_0, t) + \tau \frac{\partial W(\mathbf{X} \leftarrow \mathbf{X}_0, t)}{\partial t}$$

Ensuite, l'équation de Chapman-Kolmogorov (9.4) et la définition de la probabilité de transition par unité de temps (9.5) conduisent à une deuxième relation.

$$W(\mathbf{X} \leftarrow \mathbf{X}_0, t + \tau) \underset{\tau \rightarrow 0}{=} \int [1 - \tau \int w(\mathbf{Z} \leftarrow \mathbf{Y}) d\mathbf{Z}] \delta(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) W(\mathbf{Y} \leftarrow \mathbf{X}_0, t) d\mathbf{Y} \\ + \int \tau w(\mathbf{X} \leftarrow \mathbf{Y}) W(\mathbf{Y} \leftarrow \mathbf{X}_0, t) d\mathbf{Y}$$

Par identification entre ces deux identités, la dérivée temporelle du propagateur peut alors s'exprimer comme une somme sur l'ensemble des états \mathbf{Y} , ces états étant des états d'arrivée pour la partie négative de cette somme, et des états de départ pour la partie positive.

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int \underset{\text{Gains}}{W(\mathbf{Y} \leftarrow \mathbf{X}_0, t) w(\mathbf{X} \leftarrow \mathbf{Y}) d\mathbf{Y}} - \int \underset{\text{Pertes}}{W(\mathbf{X} \leftarrow \mathbf{X}_0, t) w(\mathbf{Y} \leftarrow \mathbf{X}) d\mathbf{Y}}$$

Cette identité vaut aussi pour la densité de probabilité, le premier terme du membre de gauche s'interprète comme un gain, depuis tous les états \mathbf{Y} transitant vers \mathbf{X} durant un temps court, et le deuxième terme s'interprète comme une perte, due à toutes les transitions depuis \mathbf{X} vers l'un quelconque des états \mathbf{Y} durant une durée infinitésimale (Figure 9.3).

$$\frac{\partial F(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \int w(\mathbf{X} \leftarrow \mathbf{Y}) F(\mathbf{Y}, t) d\mathbf{Y} - \int w(\mathbf{Y} \leftarrow \mathbf{X}) F(\mathbf{X}, t) d\mathbf{Y} \quad (9.7)$$

Dans le contexte de la physique des plasmas, lorsque le taux de transition est collisionnel et s'exprime en fonction de la section efficace de diffusion suivant la relation (9.6), cette équation est dénommée équation de Boltzmann; on notera un abus de langage courant en physique des plasmas qui consiste à appeler équation de Boltzmann toute équation cinétique (Vlasov, Landau, EEDF...) dans l'espace des vitesses, nous ne pratiquerons pas cet abus qui conduit à de fréquentes confusions.

La figure 9.3 illustre la signification statistique de cette équation fondamentale; le nombre moyen de particules dans l'état \mathbf{X} résulte d'un bilan entre des processus de gains et des processus de pertes, les gains provenant des états \mathbf{Y} et les pertes s'écoulant vers les états \mathbf{Z} .

Ces gains et pertes doivent être sommés sur l'ensemble des états \mathbf{Y} et \mathbf{Z} pondérés par le taux de gain ou de perte par unité de temps décrit par w . Dans le cas des collisions (9.6) l'hypothèse validant cette équation cinétique est la prédominance des interactions à deux particules par rapport aux collisions à trois corps ou plus. Cette hypothèse est particulièrement bien adaptée aux milieux dilués tels que les plasmas classiques.

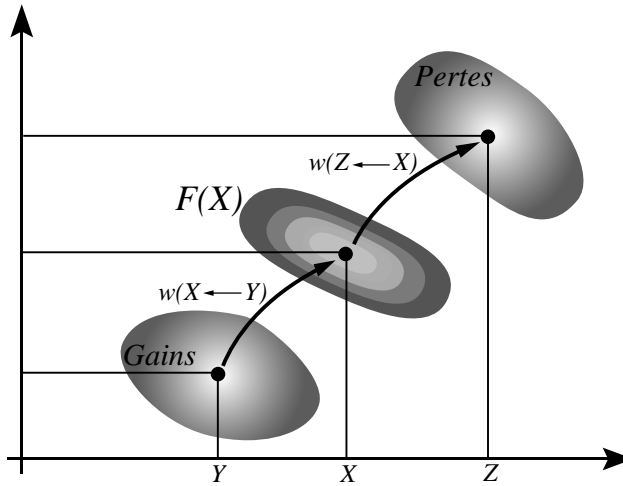


Figure 9.3 Équation de Boltzmann : bilan gains/pertes en X .

9.1.3 Équation de Fokker-Planck

Lorsque la variable d'état \mathbf{X} est la vitesse d'une particule, $\mathbf{v} = v \sin \theta \cos \varphi \mathbf{u}_x + v \sin \theta \sin \varphi \mathbf{u}_y + v \cos \theta \mathbf{u}_z$, deux régimes de collisions doivent être considérés :

- les interactions particule-particule telles que la variation relative de vitesse $\delta v/v$ (ou les angles de diffusion $\delta \theta$ et $\delta \varphi$) à l'issue d'une collision ne soit pas petite devant 1 (ou π), on parle alors de grands transferts d'énergie et de *collisions aux grands angles* (Figure 9.4).
- les interactions particule-particule telles que la variation relative $\delta v/v$ de vitesse (ou les angles de diffusion $\delta \theta$ et $\delta \varphi$) à l'issue d'une collision soit petite devant 1 (ou π), on parle alors de petits transferts d'énergie et de *collisions aux petits angles*; dans ce deuxième régime l'orbite dans l'espace des vitesses peut être considérée comme une succession continue d'états (Figure 9.4), mais la courbe $\mathbf{v}(t)$ n'est pas nécessairement différentiable.

Lorsque les collisions aux grands angles sont dominantes, l'équation de Boltzmann constitue un cadre adapté à l'étude de l'évolution de la fonction de distribution, c'est le cas pour l'étude de la distribution angulaire de la vitesse des électrons en présence de collisions électrons-neutres dans les plasmas faiblement ionisés. Dans le deuxième régime, lorsque les collisions aux petits angles sont dominantes, l'équation de Boltzmann peut être réduite à une équation différentielle du type Fokker-Planck. C'est le cas des collisions coulombiennes pour lesquelles les collisions telles que $\delta v/v$ et $\delta \theta$ sont petits devant 1 et π sont dominantes (4.15 et 4.19). C'est aussi le cas pour les collisions électrons-neutres telles que $\delta v/v \sim m_e/m_n$, où m_e et m_n sont respectivement la masse de l'électron et la masse du neutre considéré.

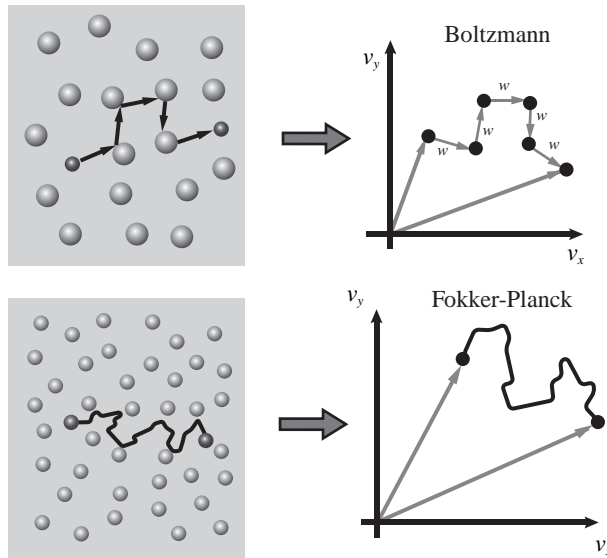


Figure 9.4 Collisions aux grands et petits angles.

Ainsi, l'équation de Fokker-Planck constitue le cadre théorique adapté à l'étude de la dynamique de la fonction de distribution des vitesses dans les plasmas fortement ou faiblement ionisés, l'exception à cette règle étant le cas de la distribution angulaire des vitesses dans les plasmas faiblement ionisés.

La fonction de distribution du module de la vitesse étant la quantité déterminant le bilan d'énergie (et de charges, pour les électrons à travers l'ionisation par impact), l'étude de la distribution angulaire n'est pertinente que dans un nombre très restreint de cas. Nous allons donc nous consacrer à la construction des équations cinétiques de type Fokker-Planck décrivant l'évolution de la fonction de distribution des vitesses dans les plasmas faiblement et fortement ionisés.

Abordons ce problème dans un cadre général. Il est assez courant, en particulier dans les études cinétiques des plasmas, de rencontrer des situations où le taux de transition entre deux états \mathbf{X} et \mathbf{Y} , $w(\mathbf{X} \leftarrow \mathbf{Y})$, est une fonction centrée autour de l'état de départ \mathbf{Y} qui s'annule assez rapidement lorsque l'état d'arrivée \mathbf{X} est éloigné de l'état de départ \mathbf{Y} (Figure 9.5).

Il est possible de tirer partie de cette propriété de localisation du taux de transition w autour de l'état de départ.

Considérons pour cela l'équation de Boltzmann (9.7).

$$\frac{\partial F(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \int [w(\mathbf{X} \leftarrow \mathbf{X} + \mathbf{x}) F(\mathbf{X} + \mathbf{x}, t) - w(\mathbf{X} + \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{X}) F(\mathbf{X}, t)] d\mathbf{x} \tag{9.8}$$

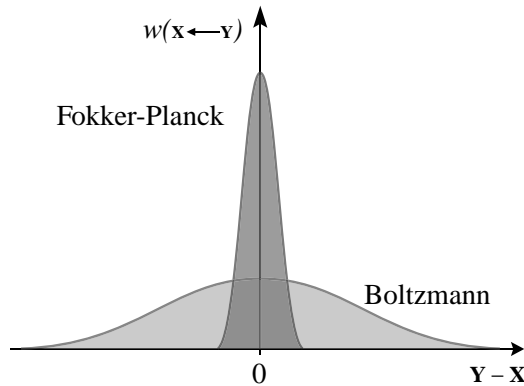


Figure 9.5 Taux de transition, entre deux états \mathbf{X} et \mathbf{Y} .

Effectuons un développement de Taylor en \mathbf{x} des taux de transition (dénommé développement de Kramers-Moyal) au deuxième ordre en \mathbf{x} , au voisinage de l'état \mathbf{X} .

$$\begin{aligned}
 w(\mathbf{X} \leftarrow \mathbf{X} + \mathbf{x}) F(\mathbf{X} + \mathbf{x}) &= w(\mathbf{X} - \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{X}) F(\mathbf{X}) \\
 &+ \mathbf{x} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} w(\mathbf{X} - \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{X}) F(\mathbf{X}) \\
 &+ \frac{\mathbf{x}\mathbf{x}}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{X} \partial \mathbf{X}} w(\mathbf{X} - \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{X}) F(\mathbf{X})
 \end{aligned}$$

Compte tenu de l'identité :

$$\begin{aligned}
 \int d\mathbf{x} [w(\mathbf{X} - \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{X}) - w(\mathbf{X} + \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{X})] \\
 = -2 \left[\int \mathbf{x} d\mathbf{x} \right] \cdot \partial w(\mathbf{X} \leftarrow \mathbf{X}) / \partial \mathbf{X} = 0,
 \end{aligned}$$

l'équation de Boltzmann (9.8) peut alors s'exprimer comme une équation différentielle.

$$\frac{\partial F(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \cdot \left[\frac{\langle \delta \mathbf{x} \rangle}{\delta t} F(\mathbf{X}, t) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{x} \delta \mathbf{x} \rangle}{2\delta t} F(\mathbf{X}, t) \right] \quad (9.9)$$

Les coefficients de friction dynamique $\langle \delta \mathbf{x} \rangle / \delta t$ et de diffusion $\langle \delta \mathbf{x} \delta \mathbf{x} \rangle / 2\delta t$ sont définis comme les moments d'ordre un et deux de la probabilité de transition par unité de temps w .

$$\begin{aligned}
 \frac{\langle \delta \mathbf{x} \rangle}{\delta t} &= - \int \mathbf{x} w(\mathbf{X} - \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{X}) d\mathbf{x} = \int \mathbf{x} w(\mathbf{X} + \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{X}) d\mathbf{x} \quad (9.10) \\
 \frac{\langle \delta \mathbf{x} \delta \mathbf{x} \rangle}{\delta t} &= \int \mathbf{x}\mathbf{x} w(\mathbf{X} - \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{X}) d\mathbf{x} = \int \mathbf{x}\mathbf{x} w(\mathbf{X} + \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{X}) d\mathbf{x}
 \end{aligned}$$

Ce type d'équation est appelé équation de Fokker-Planck, nous l'avons déjà rencontré dans les chapitre précédents. L'équation de Fokker-Planck se retrouve dans tous les domaines traitant de dynamique statistique : physique des aérosols, physique des colloïdes, physique stellaire, épidémiologie, sociologie, modélisation financière.... Les coefficients de friction et de diffusion traduisent deux tendances complémentaires, une relaxation et une diffusion. En régime stationnaire, l'équilibre entre ces deux tendances est à l'origine des distributions d'équilibres centrées et étalées telle que celle représentée sur la figure 9.6.

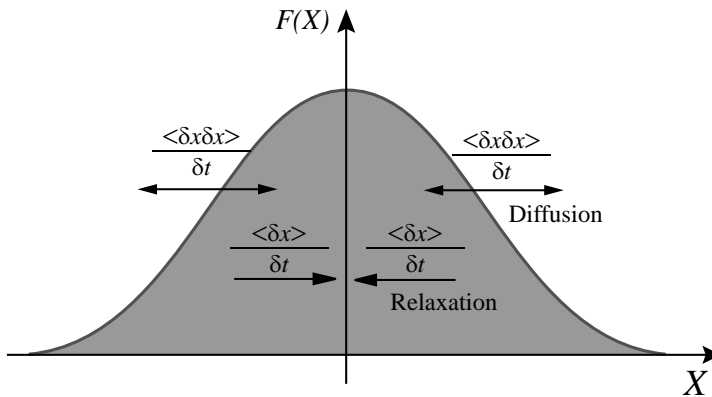


Figure 9.6 Équilibre dynamique entre friction et diffusion.

Nous avons, dans les chapitres précédents, déjà dérivé deux équations cinétiques du type Fokker-Planck :

- l'équation de Vlasov, décrivant l'interaction champ-particules sur une échelle de temps rapide en régime linéaire (6.1),
- l'équation dite quasi-linéaire, décrivant l'interaction onde-particules sur une échelle de temps lente en régime non-linéaire (8.49, 8.45).

Dans ce chapitre nous dériverons deux équations modélisant l'évolution de la fonction de distribution des vitesses résultant de l'interaction particules-particules :

- l'équation de Landau, décrivant les collisions entre particules chargées (9.20),
- l'équation de la fonction de distribution en énergie (EEDF), décrivant les collisions entre particules chargées et neutres (9.28), parfois dénommée improprement *équation de Boltzmann*.

La plupart des processus markoviens construits pour modéliser les phénomènes cinétiques dans les plasmas possèdent la propriété de micro-réversibilité qui s'énonce simplement :

$$w(\mathbf{X} + \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{X}) = w(\mathbf{X} \leftarrow \mathbf{X} + \mathbf{x}) \quad (9.11)$$

En mécanique quantique les probabilités de transition sont proportionnelles aux carrés des éléments de matrices des hamiltoniens perturbateurs et, lorsque les états initiaux et finaux sont permutés, l'élément de matrice reste invariant car l'opérateur hamiltonien est hermitique. Cette propriété de micro-réversibilité n'est pas restreinte aux régime des perturbations mais résulte de l'unitarité de l'opérateur d'évolution. En effet, si l'opérateur hamiltonien est hermitien, alors l'opérateur d'évolution, qui est son exponentielle, est unitaire. L'unitarité est intimement liée à l'invariance par renversement du temps donc à la micro-réversibilité. Le lecteur non initié à la signification de ce vocabulaire quantique savant se référera au simple bon sens pour accepter la généralité de la propriété (9.11). Sous cette hypothèse de micro-réversibilité (9.11) les coefficients de friction dynamique et de diffusion (9.10) ne sont pas indépendants et vérifient une relation, dite relation d'Einstein. Afin de démontrer la relation d'Einstein considérons l'identité (9.11) et développons cette identité au premier ordre en \mathbf{x} : $w(\mathbf{X} + \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{X}) = w(\mathbf{X} - \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{X}) + \mathbf{x} \cdot \partial w(\mathbf{X} - \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{X}) / \partial \mathbf{X}$. En multipliant les deux membres de cette identité par \mathbf{x} , puis, en intégrant sur les différentes valeurs possibles de \mathbf{x} nous exprimons la valeur moyenne en fonction de la valeur quadratique moyenne. D'une part, la valeur moyenne définissant le coefficient de friction, peut être exprimée comme :

$$\begin{aligned} \frac{\langle \delta \mathbf{x} \rangle}{\delta t} &= \frac{1}{2} \int \mathbf{x} w(\mathbf{X} + \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{X}) d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \int \mathbf{x} w(\mathbf{X} - \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{X}) d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \int \mathbf{x} \mathbf{x} \cdot \frac{\partial w(\mathbf{X} - \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{x} \end{aligned}$$

D'autre part, le coefficient de diffusion, $\langle \delta \mathbf{x} \delta \mathbf{x} \rangle / \delta t$, est défini comme ce même moment d'ordre deux en \mathbf{x} (9.10); ainsi nous avons établi une relation générale entre diffusion et friction dynamique, conséquence directe de la propriété de micro-réversibilité (9.11).

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{x} \delta \mathbf{x} \rangle}{2\delta t} = \frac{\langle \delta \mathbf{x} \rangle}{\delta t} \quad (9.12)$$

C'est la relation d'Einstein, cette relation permet de réécrire l'équation de Fokker-Planck sous sa forme dite quasi-linéaire.

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{x} \delta \mathbf{x} \rangle}{2\delta t} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}} \quad (9.13)$$

Cette forme n'est pas générale et demeure restreinte aux processus micro-réversibles. Si le processus stochastique considéré est généré par plusieurs phénomènes physiques microscopiques de natures différentes dont certains sont microscopiquement irréversibles, il peut subsister une friction dynamique.

Par exemple, l'émission spontanée et les collisions avec une population cible froide sont les phénomènes micro-irréversibles les plus fréquents dans le contexte de la physique des plasmas.

9.2 INTERACTION PARTICULES-PARTICULES

Dans les plasmas, loin de l'équilibre thermodynamique, la phase initiale de retour vers l'équilibre est souvent assurée par des instabilités et la phase finale, à petite échelle, par les collisions. Une équation cinétique collisionnelle est donc nécessaire pour étudier l'approche finale de l'équilibre thermodynamique et les processus de relaxation et thermalisation conduisant aux distributions maxwelliennes d'équilibre, homogènes et isotropes.

Considérons la fonction de distribution à une particule $F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, une telle distribution est à l'équilibre lorsque les gradients spatiaux ont relaxé et lorsque les vitesses sont distribuées suivant une gaussienne, c'est-à-dire lorsque la densité est homogène et lorsque la distribution de vitesses est maxwellienne. Les processus d'homogénéisation de la densité et de thermalisation des vitesses ont lieu sur des échelles de temps très différentes. La relaxation spatiale a un caractère hydrodynamique lent, à travers les équations de transport hydrodynamique (6.12, 6.9) ; la thermalisation des vitesses possède un caractère rapide et cinétique. Cet ordering fort entre les relaxations hydrodynamique et cinétique autorise une étude séparée de la dynamique collisionnelle de la fonction de distribution des vitesses $f(\mathbf{v}, t)$. Nous retrouvons ici la hiérarchie de Bogolioubov (2.4).

Ainsi, par exemple, pour des électrons interagissant avec des particules lourdes, la fonction de distribution à un électron $F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ peut être factorisée en trois composantes :

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \approx n(\mathbf{r}, t) f(v, t) g(\boldsymbol{\mu}, t)$$

où $v = |\mathbf{v}|$ et $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} / v$ (\mathbf{u} est une direction de référence donnée). En effet, la densité évolue sur une échelle de temps hydrodynamique lente à l'échelle cinétique caractérisée par la fréquence de transfert d'impulsion ν_1 (4.22, 4.21). Le transfert d'énergie est caractérisé par cette fréquence pondérée par le rapport de masse m/M où m est la masse de l'électron et M la masse de la particule lourde considérée. La relaxation hydrodynamique de la densité est décrite par une diffusion (2.9, 6.12) dont le coefficient est de l'ordre de $\lambda^2 \nu_1$ (4.13) où λ est le libre parcours moyen. Ainsi,

$$\frac{\lambda^2}{L^2} \nu_1 \ll \frac{m}{M} \nu_1 \ll \nu_1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial t} \ll \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial t} \ll \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial t}$$

Position Énergie Direction Transport Thermalisation Isotropisation

où L est la longueur de gradient de la densité. Au niveau microscopique la thermalisation est associée aux échanges d'énergie et l'isotropisation aux déflexions angulaires, nous allons donc établir un certains nombres de résultats classiques sur la dynamique de ces transferts et déviation pour un système de deux particules.

9.2.1 Transfert d'énergie-impulsion

L'étude des collisions s'organise autour de deux aspects : l'aspect dynamique et l'aspect cinématique ; ce dernier permet d'identifier les inconnues et les invariants associés à la collision. Le nombre de relations ainsi établi n'étant pas suffisant pour déterminer entièrement la valeur des transferts d'énergie et d'impulsion, il est nécessaire de considérer ensuite l'aspect dynamique du problème sur la base du concept de section efficace (4.4).

Dans ce paragraphe nous allons nous intéresser à l'aspect cinématique des collisions élastiques. Soient deux particules, de masses m_1 et m_2 , décrites par leur positions, \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 , leur vitesses, \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 , et leur quantités de mouvement, $\mathbf{p}_1 = m_1\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{p}_2 = m_2\mathbf{v}_2$. L'énergie de ce système de deux particules est donnée par :

$$\mathbf{p}_1^2/2m_1 + \mathbf{p}_2^2/2m_2 + U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

où U est l'énergie potentielle d'interaction entre les deux particules. Le problème de l'interaction particule-particule est considérablement simplifié si nous introduisons le changement de variables :

$$[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2] \rightarrow [\mathbf{r}, \mathbf{R}], [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] \rightarrow [\mathbf{v}, \mathbf{V}] \quad \text{et} \quad [m_1, m_2] \rightarrow [\mu, M].$$

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{V} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}, \quad M \equiv m_1 + m_2$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \quad \frac{1}{\mu} \equiv \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

Les variables relatives \mathbf{r} et \mathbf{v} sont associées à une particule fictive de masse μ , la masse effective, et de quantité de mouvement $\mu\mathbf{v}$.

Les variables du centre de masse \mathbf{R} et \mathbf{V} décrivent la position et la vitesse du centre de masse auquel nous associons la masse M .

L'énergie de ce système se décompose alors en **deux parties découplées correspondant à la particule fictive de masse μ soumise au potentiel $U(\mathbf{r})$ et au centre de masse M effectuant une translation uniforme.**

$$\frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} + U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + U(\mathbf{r})$$

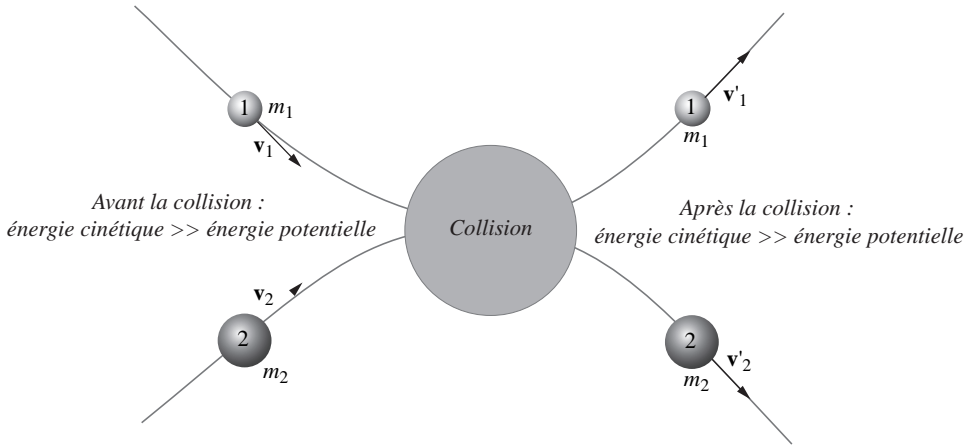


Figure 9.7 Collision entre deux particules, états entrants et sortants.

Les mouvements $\mathbf{R}(t)$ et $\mathbf{r}(t)$ sont donc intégrables et permettent d'exprimer les solutions du problème de l'interaction de deux particules : $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{R}(t) + \mu \mathbf{r}(t) / m_1$ et $\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{R}(t) - \mu \mathbf{r}(t) / m_2$.

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{V} + \frac{\mu}{m_1} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{V} - \frac{\mu}{m_2} \mathbf{v} \quad (9.14)$$

L'énergie mécanique est conservée et cette énergie est purement sous forme cinétique bien avant et bien après la collision (Figure 9.7). Nous noterons δ les variations des quantités entre ces deux états asymptotiques ($t \rightarrow \pm\infty$). Les problèmes associés au mouvement relatif (\mathbf{r}, \mathbf{v}) et au mouvement du centre de masse (\mathbf{R}, \mathbf{V}) sont découplés et conservatifs, les invariants sont donc la vitesse du centre de masse \mathbf{V} (mouvement libre) et la norme de la vitesse relative $|\mathbf{v}|$ avant et après la collision :

$$\delta \mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad \delta |\mathbf{v}| = 0.$$

Les variations d'impulsion subies par les particules lors de la collision s'expriment en fonction du changement de variables précédent (9.14) : $\delta \mathbf{p}_1 = -\delta \mathbf{p}_2 = \mu \delta \mathbf{v}$.

$$m_1 \delta \mathbf{v}_1 = \mu \delta \mathbf{v}, \quad m_2 \delta \mathbf{v}_2 = -\mu \delta \mathbf{v} \quad (9.15)$$

Cet échange d'impulsion entre les deux particules est associé à un échange d'énergie cinétique δE_1 et δE_2 .

$$\delta E_1 = \frac{m_1}{2} (\mathbf{v}_1 + \delta \mathbf{v}_1)^2 - \frac{m_1}{2} \mathbf{v}_1^2 = m_1 \mathbf{V} \cdot \delta \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_1 + \frac{m_1}{2} \delta \mathbf{v}_1^2$$

où nous avons utilisé $\mathbf{v}_1 = \mathbf{V} + \mu \mathbf{v} / m_1$. Les relations précédentes permettent d'exprimer les deux derniers termes de cette relation en fonction de la vitesse relative initiale et de sa variation $\delta \mathbf{v}$.

$$\mu \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_1 + \frac{m_1}{2} \delta \mathbf{v}_1^2 = \frac{\mu^2}{m_1} \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{\mu^2}{2m_1} \delta \mathbf{v}^2$$

Compte tenu de l'invariance de la norme de la vitesse relative $\delta |\mathbf{v}| = 0$, les trois vecteurs $(\mathbf{v}, \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}, \delta \mathbf{v})$ forment un triangle isocèle de base $\delta \mathbf{v}$ (Figure 9.8).

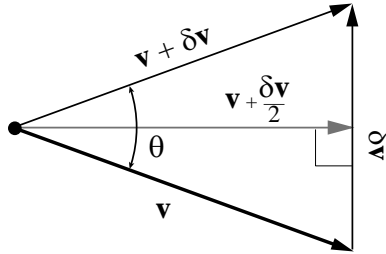


Figure 9.8 Rotation de la vitesse relative $|\mathbf{v}(t = -\infty)| = |\mathbf{v}(t = +\infty)|$.

On a donc l'identité $(\mathbf{v} + \delta \mathbf{v}/2) \cdot \delta \mathbf{v} = 0$ et l'échange d'énergie se réduit au premier terme du développement précédent.

$$\delta E_1 = \mu \mathbf{V} \cdot \delta \mathbf{v}, \quad \delta E_2 = -\mu \mathbf{V} \cdot \delta \mathbf{v} \quad (9.16)$$

Ces relations d'invariance et d'échange étant établies, il est nécessaire de décrire la dynamique du processus de collision qui induit la variation $\delta \mathbf{v}$. L'outil adapté à cette description est la section efficace de diffusion angulaire qui exprime la relation entre le paramètre d'impact et la rotation que subit \mathbf{v} . La définition de $d\sigma/d\Omega$ donnée dans le chapitre quatre (4.4) suppose que les particules cibles sont infiniment lourdes et aux repos.

L'angle de déviation dans le repère du centre de masse est différent de l'angle de déflexion dans le repère du laboratoire. L'hypothèse de particules cibles lourdes et au repos est valide lors de l'interaction d'électrons avec des ions ou des espèces neutres. Les formules précédentes permettent alors d'étudier les processus d'isotropisation et de friction. L'étude des transferts d'énergie est plus délicate lorsque les interactions électron-électron ou ion-ion doivent être considérées. Dans ces cas, il est nécessaire d'établir la relation entre l'angle de déflexion dans le repère du centre de masse et l'angle de déflexion dans le repère du laboratoire. Nous n'utiliserons cette formule de transformation que dans les cas d'une cible initialement fixe qui ne reste pas au repos compte tenu de sa masse finie (Figure 9.9). Nous allons donc restreindre l'étude à ce cas simple.

Considérons une particule 1, de masse m_1 et de vitesse \mathbf{v}_1 , incidente sur une particule cible 2, au repos et de masse m_2 . Lors d'une collision élastique les deux particules échangent de l'impulsion et de l'énergie, la particule 1 est défléchie et sort de la zone d'interaction avec une vitesse \mathbf{v}'_1 et la particule 2, initialement au repos, avec une vitesse \mathbf{v}'_2 (Figure 9.9). Dans le repère du centre de masse ce choc est équivalent à

une rotation de la vitesse relative : $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}'$. Les angles de déflexions dans le repère du laboratoire et dans le repère du centre de masse sont respectivement θ_1 , θ_2 et θ (Figures 9.9 et 9.10).

$$\cos \theta_1 = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}'_1}{|\mathbf{v}_1| |\mathbf{v}'_1|}, \quad \cos \theta_2 = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}'_2}{|\mathbf{v}_1| |\mathbf{v}'_2|}, \quad \cos \theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'}{|\mathbf{v}| |\mathbf{v}'|}$$

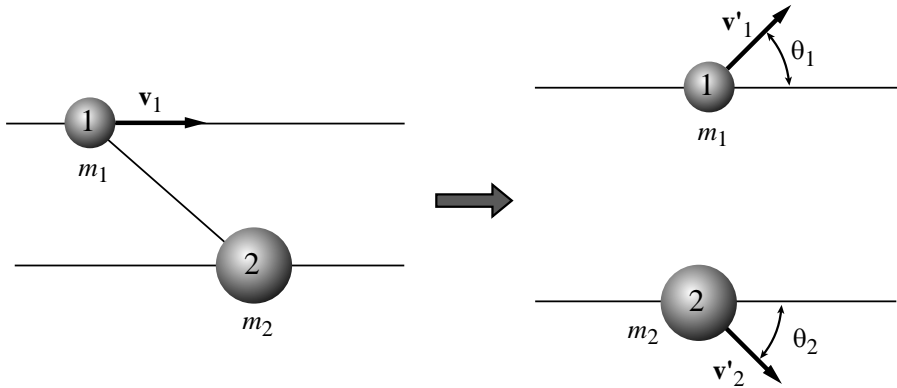


Figure 9.9 Collision sur une cible au repos de masse finie.

La particule cible étant initialement au repos la vitesse relative avant le choc est égale à $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$. Les relations précédentes permettent d'établir : $|\mathbf{v}| = |\mathbf{v}'|$ et $\mathbf{V} = \mu \mathbf{v}_1 / m_1$. Les variations de vitesses consécutives au choc sont données par les formules (9.15) : $\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}_1 = \delta \mathbf{v}_1 = \mu \delta \mathbf{v} / m_1$ et $\mathbf{v}'_2 = \delta \mathbf{v}'_2 = -\mu \delta \mathbf{v} / m_2$. Compte tenu de l'invariance de la norme de la vitesse relative $|\mathbf{v}| = |\mathbf{v}'|$, les trois vecteurs $(\mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{v}' - \mathbf{v})$ forment un triangle isocèle (Figures 9.10 et 9.11).

L'angle au sommet de ce triangle isocèle n'est autre que l'angle de déflexion dans le repère du centre de masse θ .

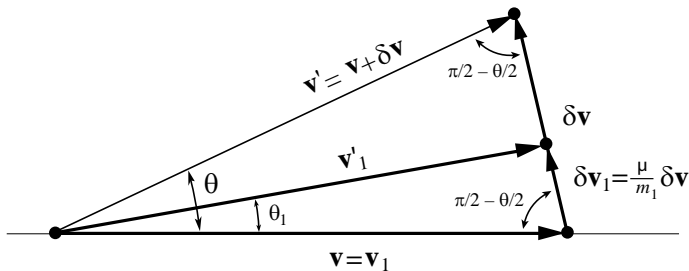


Figure 9.10 Collision sur une cible fixe : relation entre la déflexion θ dans le repère du centre de masse et la déflexion θ_1 dans le repère du laboratoire.

La lecture de la figure 9.10 permet d'établir l'expression de l'angle de déflexion dans le repère du laboratoire θ_1 en fonction de θ .

$$\tan \theta_1 = \frac{\frac{\mu}{m_1} |\delta \mathbf{v}| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{|\mathbf{v}| - \frac{\mu}{m_1} |\delta \mathbf{v}| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

La vitesse relative peut être éliminée dans cette expression de $\tan \theta_1$ à l'aide de la relation $\sin(\theta/2) = |\delta \mathbf{v}|/2|\mathbf{v}|$. Compte tenu de la relation entre les lignes trigonométriques d'un angle et de son double la relation finale entre θ_1 et θ s'exprime finalement :

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta}{\frac{m_1}{m_2} + \cos \theta} \quad (9.17)$$

Le rapport des masses du projectile et de la cible contrôle donc la relation entre l'angle de diffusion dans le repère du laboratoire et l'angle de diffusion dans le repère du centre de masse.

La lecture de la figure 9.11 permet d'établir l'expression de l'angle de déflexion dans le repère du laboratoire θ_2 : $\theta_2 = (\pi - \theta)/2$.

Trois cas peuvent alors être considérés et sont présentés dans le tableau (9.1).

Tableau 9.1

Rapport des masses	Angle de diffusion
$m_1 \approx m_2$	$\theta_1 \approx \frac{\theta}{2}$
$m_1 \ll m_2$	$\theta_1 \approx \theta$
$m_1 \gg m_2$	$\theta_1 \approx 0$

Le premier cas est utile lors de l'étude de l'interaction électron-électron, le dernier cas correspondent aux collisions sur cibles fixes pour l'interaction entre un projectile lourd et une cible légère.

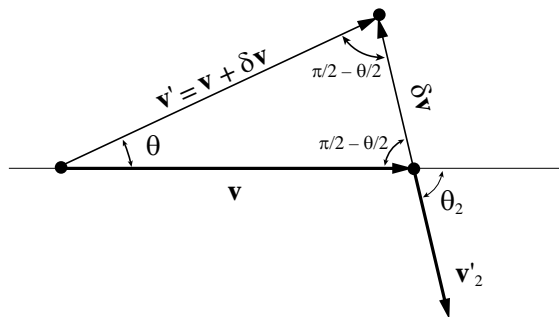


Figure 9.11 Collision sur une cible fixe : relation entre la déflexion θ dans le repère du centre de masse et la déflexion θ_2 dans le repère du laboratoire

Il est aussi instructif d'étudier le transfert d'énergie du projectile vers la cible. Les formules précédentes (9.16) appliquées au cas particulier de la configuration avec une cible initialement au repos permettent d'exprimer le coefficient de transfert relatif d'énergie $\xi \equiv |\delta E_2/E_1|$ en fonction de l'angle de déflexion.

$$\frac{\delta E_2}{E_1} = -\frac{2\mu \mathbf{V} \cdot (\mathbf{v}' - \mathbf{v})}{m_1 v_1^2} \rightarrow \xi \equiv \left| \frac{\delta E_2}{E_1} \right| = \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} [1 - \cos \theta] \quad (9.18)$$

Ce coefficient peut être moyenné sur les différentes valeurs du paramètre d'impact, c'est-à-dire sur la section efficace, compte tenu de la définition (4.11) nous obtenons :

$$\langle \xi \rangle = \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \quad (9.19)$$

Le rapport de la section efficace de transfert d'impulsion sur la section efficace totale contrôle donc le transfert d'énergie. Trois cas limites peuvent être considérés et sont présentés dans le tableau (9.2).

Tableau 9.2

Rapport des masses	Transfert d'énergie
$m_1 \approx m_2$	$\langle \xi \rangle \approx \frac{1}{2} \frac{\sigma_1}{\sigma_0}$
$m_1 \ll m_2$	$\langle \xi \rangle \approx \frac{2m_1}{m_2} \frac{\sigma_1}{\sigma_0}$
$m_1 \gg m_2$	$\langle \xi \rangle \approx \frac{2m_2}{m_1} \frac{\sigma_1}{\sigma_0}$

Nous avons déjà mentionné que pour la plupart des collisions électrons-neutres, à des énergies de l'ordre de quelques eV, on observe que la relation $\sigma_0 \approx \sigma_1$ est vérifiée à quelques 10% près, les transferts d'énergie suivent donc le rapport des masses et sont petits : $\delta v/v \ll 1$.

Dans le cas coulombien l'angle de déflexion (4.19) est faible et il est possible de développer l'approximation dite des petits transferts d'impulsion. Dans le cadre de cette approximation, appelée aussi approximation de la déflexion aux petits angles, la trajectoire est supposée rectiligne à l'ordre zéro et la rotation de la vitesse est calculée sur la base de cette trajectoire.

Cette approximation est valable pour les potentiels décroissant suffisamment rapidement à l'infini et les paramètres d'impact suffisamment grands, c'est-à-dire lorsque l'énergie cinétique domine l'énergie potentielle lors du processus de collision. Le critère de validité de cette approximation des petits transferts d'impulsion s'établit comme suit. Soit une force d'interaction F proportionnelle à une certaine puissance $-(n+1)$ de la distance entre les deux particules : $F \sim r^{-n-1}$, soit v la vitesse

relative des deux particules et b le paramètre d'impact de la collision. L'ordre de grandeur du temps d'interaction est donné par b/v , la variation de vitesse est proportionnelle au produit de la force par le temps d'interaction : $\delta v \sim (b/v) b^{-n-1}$, d'où une déflexion angulaire $|\delta\theta| \sim \delta v/v \sim b^{-n}/v^2$. Le signe de cette angle étant quelconque $\langle \delta\theta \rangle = 0$, il nous faut considérer son carré et moyenner ce carré sur toute les particules se trouvant à une distance b dans une couronne $2\pi b\delta b$ d'épaisseur $v\delta t$:

$$\langle \delta\theta^2 \rangle_b / \delta t \sim \int_0^b v^{-3} b^{1-2n} db \sim b^{2-2n} v^{-3}.$$

La dépendance du taux de déflexion angulaire en fonction de v suivant v^{-3} est indépendante de la nature du potentiel, par contre, la dépendance en b dépend de la forme de ce potentiel. L'estimation précédente démontre que lorsque $n > 1$ la déflexion décroît avec la distance, et comme le nombre de particules en interaction croît avec la distance il est raisonnable de supposer que la dynamique soit dominée par un grand nombre de petites déflexions à grand paramètre d'impact plutôt que par un petit nombre de grandes déflexions à petit paramètre d'impact. L'approximation envisagée précédemment est donc valide. Une étude particulière du cas coulombien, $n = 1$, révèle que l'approximation des petits transferts d'impulsion est aussi valide.

9.2.2 Équation de Landau

Nous allons construire l'équation de Fokker-Planck décrivant l'évolution de la fonction de distribution des impulsions dans le cas d'interactions coulombiennes, cette équation est appelée équation de Landau.

Soit une population de particules chargées de masse m_1 et de charge q_1 dont l'impulsion est distribuée suivant la fonction de distribution $f(\mathbf{p}_1, t)$. Cette population 1 interagit avec une population de particules chargées de masse m_2 et de charge q_2 dont l'impulsion est distribuée suivant la fonction de distribution $f_2(\mathbf{p}_2)$ telle que $\int f_2(\mathbf{p}_2) d\mathbf{p}_2 = n_2$ la densité.

Chaque particule de type 1 subit des collisions avec les particules de type 2, le problème est de transcrire la dynamique microscopique à deux particules, telle que nous l'avons étudiée précédemment, en termes d'évolution de la fonction de distribution $f_1(\mathbf{p}_1, t)$, $f_2(\mathbf{p}_2)$ étant donnée. L'équation de Landau est de la forme (2.29, 9.9) :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{p}_1 \rangle}{\delta t} f_1 + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{p}_1 \delta \mathbf{p}_1 \rangle}{2\delta t} f_1 \quad (9.20)$$

et nous devons évaluer les coefficients de friction $\langle \delta \mathbf{p}_1 \rangle / \delta t$ et de diffusion $\langle \delta \mathbf{p}_1 \delta \mathbf{p}_1 \rangle / 2\delta t$. Calculons pour ce faire la variation de la vitesse relative \mathbf{v} , entre deux particules 1 et 2, à l'issue d'un choc coulombien. Pour un paramètre d'impact

b et une vitesse relative initiale v les relations (4.14) permettent d'établir :

$$\delta v_{\perp}(v, b) = \frac{q_1 q_2}{2\pi\epsilon_0\mu} \frac{1}{vb}, \quad \delta v_{\parallel}(v, b) = - \left(\frac{q_1 q_2}{2\pi\epsilon_0\mu} \right)^2 \frac{1}{2v^3 b^2} \quad (9.21)$$

où μ la masse réduite des particules de type 1 et 2 (la variation de vitesse parallèle δv_{\parallel} , nulle à l'ordre le plus bas (4.14), est donc du deuxième ordre par rapport à la variation de vitesse perpendiculaire $\delta v_{\perp} : (\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}_{\parallel})^2 + \delta\mathbf{v}_{\perp}^2 = \mathbf{v}^2$). Dans le paragraphe sur les invariants collisionnels nous avons établi la relation (9.15) $\delta\mathbf{p}_1 = \mu\delta\mathbf{v}$ entre la rotation de la vitesse relative et la variation d'impulsion d'une particule. La variation de quantité de mouvement d'une particule de type 1 résultant d'une collision coulombienne avec une particule de type 2 est donc donnée par :

$$\delta\mathbf{p}_1(\mathbf{v}, \mathbf{b}) = \mu\delta v_{\perp} \frac{\mathbf{b}}{b} + \mu\delta v_{\parallel} \frac{\mathbf{v}}{v} \quad (9.22)$$

Les figures 4.4, 4.6 et 4.8 illustrent la configuration vectorielle de ce transfert dans les cas ion/électron (Figure 4.6) et électron/ion (Figure 4.8). Pendant une durée infinitésimale δt il faut sommer les effets de l'ensemble des collisions se déroulant sur le trajet $\mathbf{v}\delta t$. Il faut donc intégrer (9.21) sur toutes les particules de type 2 possédant la vitesse relative \mathbf{v} et se trouvant dans un cylindre d'épaisseur $\mathbf{v}\delta t$, de rayon maximum égal à la longueur de Debye λ_D et de rayon minimum égal à la longueur de Landau ou à la longueur de Broglie λ_C (Figure 4.7). Une telle intégrale sur le vecteur $\delta v_{\perp}(v, b) \mathbf{b}/b$ donne un résultat nul car les probabilités de déflexion vers le haut ou vers le bas (ou vers la gauche ou vers la droite) sont égales. Il faut donc intégrer $\delta v_{\perp}^2(v, b)$ pour obtenir un résultat non nul.

$$\langle \delta v_{\parallel} \rangle = f_2(\mathbf{p}_2) v \delta t \int_{\lambda_C}^{\lambda_D} 2\pi b \delta v_{\parallel} db, \quad \langle \delta v_{\perp}^2 \rangle = f_2(\mathbf{p}_2) v \delta t \int_{\lambda_C}^{\lambda_D} 2\pi b \delta v_{\perp}^2 db \quad (9.23)$$

où $v = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$. L'intégrale sur le paramètre d'impact b diverge logarithmiquement et s'exprime en fonction du logarithme coulombien Λ (4.16). Chaque contribution des particules de type 2 ayant une vitesse relative \mathbf{v} doit ensuite être sommée sur la distribution $f_2(\mathbf{p}_2)$. Considérons la représentation $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ du vecteur unitaire \mathbf{b}/b dans le plan perpendiculaire au vecteur $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$. La moyenne sur l'angle α donne $\langle \mathbf{b}/b \rangle = \mathbf{0}$, ainsi le terme de friction de l'équation de Landau (9.22, 9.23, 9.21) se réduit à une composante suivant \mathbf{v} . Pour le calcul du tenseur $\langle \delta\mathbf{p}_1 \delta\mathbf{p}_1 \rangle$, à l'ordre le plus bas, nous considérons uniquement les termes suivant $\mathbf{b}\mathbf{b}/b^2$, les termes en $\mathbf{b}\mathbf{v}$ et $\mathbf{v}\mathbf{v}$ étant d'ordres supérieurs. La représentation $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ du vecteur unitaire \mathbf{b}/b , dans le plan perpendiculaire au vecteur \mathbf{v} , permet d'établir : $\langle \mathbf{b}\mathbf{b}/b^2 \rangle = (\mathbf{I} - \mathbf{v}\mathbf{v}/v^2)/2$, où \mathbf{I} est l'opérateur identité. Les coefficients de friction et de diffusion se réduisent donc à :

$$\langle \delta\mathbf{p}_1 \rangle = \mu \int \langle \delta v_{\parallel} \rangle \frac{\mathbf{v}}{v} d\mathbf{p}_2, \quad \langle \delta\mathbf{p}_1 \delta\mathbf{p}_1 \rangle = \mu^2 \int \langle \delta v_{\perp}^2 \rangle \left[\frac{\mathbf{I}v^2 - \mathbf{v}\mathbf{v}}{2v^2} \right] d\mathbf{p}_2$$

Rassemblant les résultats qui viennent d'être établis dans ce paragraphe, l'expression finale du coefficient de friction dynamique est donc :

$$\frac{\langle \delta \mathbf{p}_1(\mathbf{v}_1) \rangle}{\delta t} = -\frac{q_1^2 q_2^2 \Lambda (m_1 + m_2)}{4\pi \epsilon_0^2 m_1 m_2} \int f_2(\mathbf{p}_2) \frac{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^3} d\mathbf{p}_2 \quad (9.24)$$

et celle du coefficient de diffusion :

$$\frac{\langle \delta \mathbf{p}_1 \delta \mathbf{p}_1(\mathbf{v}_1) \rangle}{\delta t} = \frac{q_1^2 q_2^2 \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2} \int f_2(\mathbf{p}_2) \frac{\mathbf{I} |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2 - (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)}{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^3} d\mathbf{p}_2 \quad (9.25)$$

Dans l'équation de Landau (9.20) le terme de convection décrit un ralentissement et le terme de diffusion un élargissement de la fonction de distribution, donc une production d'entropie. Ces coefficients sont parfois appelés *coefficients de Spitzer-Chandrasekhar de l'équation de Landau*. Diverse formes de cette équation peuvent être obtenues à partir d'expressions particulières de $\langle \delta \mathbf{p} \rangle / \delta t$ et $\langle \delta \mathbf{p} \delta \mathbf{p} \rangle / \delta t$. Ainsi, il est parfois utile de faire apparaître des potentiels dits de Rosenbluth-Trubnikov qui simplifient l'écriture de ces coefficients, nous ne développerons pas cette forme ici, nous noterons néanmoins l'identité :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \left[\frac{\mathbf{I} p^2 - \mathbf{p} \mathbf{p}}{p^3} \right] = -2 \frac{\mathbf{p}}{p^3} \quad (9.26)$$

qui sera utile dans la suite. L'équation de Landau possède un certain nombre de propriétés générales. En particulier, lorsque la fonction de distribution de la population 2 est une maxwellienne, alors, au bout d'un certain temps, la fonction de distribution de la population 1 tend asymptotiquement vers une maxwellienne qui constitue une solution stationnaire.

$$f_2(\mathbf{p}_2) = n_2 \frac{\exp\left(-\frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2 kT}\right)}{(2\pi m_2 kT)^{\frac{3}{2}}} \rightarrow f(\mathbf{p}, t \rightarrow +\infty) \rightarrow n \frac{\exp\left(-\frac{\mathbf{p}^2}{2mkT}\right)}{(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}}$$

L'échelle de temps d'un tel processus de thermalisation est différente selon les populations, le processus le plus rapide est la thermalisation d'une population d'électrons due aux collisions électrons-électrons. Un processus plus lent est ensuite la thermalisation de la population ionique due aux collisions ions-ions. Enfin, l'étape finale de l'approche vers l'équilibre thermodynamique, la thermalisation électrons-ions, est beaucoup plus lente. Un certain nombre de méthodes d'approximation ont été mises au point pour résoudre l'équation de Landau et étudier les différentes étapes des processus de relaxation collisionnelle. Nous étudierons les deux processus les plus importants, l'isotropisation électronique et le ralentissement ionique. Mais avant, nous allons construire l'équation cinétique décrivant l'évolution de la fonction de distribution électronique résultant des collisions électrons-neutres.

9.2.3 Équation de l'EEDF

Cette équation est souvent appelée, improprement, équation de Boltzmann électronique, l'usage actuelle dans la littérature anglo-saxonne est d'utiliser le terme « *electron energy distribution function* » (EEDF) pour nommer $f_e(v, t)$, la fonction de distribution du module de la vitesse électronique, et l'équation de Fokker-Planck associée *équation de l'EEDF*; nous adopterons ici cette terminologie. L'équation de Fokker-Planck (2.29, 9.9) pour la fonction de distribution électronique $f_e(\mathbf{v}, t)$ exprime la variation temporelle locale de la probabilité comme la divergence d'un flux.

$$\frac{\partial f_e(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left[\frac{\langle \delta \mathbf{v} \rangle}{\delta t} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle}{2\delta t} \right] f_e(\mathbf{v}, t) \quad (9.27)$$

En développant le terme de dérivée seconde,

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left[\frac{\langle \delta \mathbf{v} \rangle}{\delta t} f_e - f_e \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle}{2\delta t} - \frac{\langle \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle}{2\delta t} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} \right]$$

puis, en considérant une distribution d'équilibre $f_0(v)$ qui est nécessairement solution de l'équation (9.27), nous obtenons une relation générale entre le coefficient de friction et le coefficient de diffusion.

$$f_0(v) = \left(\frac{2\pi kT}{m} \right)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \rightarrow \frac{\langle \delta \mathbf{v} \rangle}{\delta t} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle}{2\delta t} = -\frac{\langle \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle}{2\delta t} \cdot \frac{m\mathbf{v}}{kT}$$

Ainsi, compte tenu de cette identité, en réécrivant l'équation (9.27) en coordonnées sphériques dans l'espace des vitesses, nous obtenons l'équation de l'EEDF sous sa forme usuelle.

$$\frac{\partial f_e(v, t)}{\partial t} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^2 \frac{\langle \delta v^2 \rangle}{2\delta t} \left(\frac{mv}{kT} f_e(v, t) + \frac{\partial f_e(v, t)}{\partial v} \right)$$

où T est la température du gaz neutre en interaction avec les électrons. Sans préciser la nature exacte de ce gaz, de masse M par particule, et le détail de sa distribution de vitesse \mathbf{v}_2 , l'ensemble des hypothèses suivantes : $M \gg m$, $\langle \mathbf{v}_2 \rangle = \mathbf{0}$ et $\langle \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2 \rangle = (kT/M) \mathbf{I}$ est suffisant pour établir l'expression du coefficient de diffusion $\langle \delta v^2 \rangle / 2\delta t$.

Considérons une collision entre un électron de vitesse \mathbf{v}_1 et un neutre du gaz de vitesse \mathbf{v}_2 , à l'issue de la collision les vitesses deviennent égales à \mathbf{v}'_1 et \mathbf{v}'_2 : $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \rightarrow (\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2)$. Le module de la vitesse relative est conservé dans ce processus ainsi que l'impulsion totale.

$$(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 = (\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2)^2, \quad m\mathbf{v}_1 + M\mathbf{v}_2 = m\mathbf{v}'_1 + M\mathbf{v}'_2$$

Introduisons les variations de la vitesse de l'électron $\delta \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}_1$ et de son module $\delta v_1 = v'_1 - v_1$. Compte tenu de sa masse, la vitesse de la particule neutre est peu modifiée à l'issue de la collision : $\delta \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}_2 \approx \mathbf{0}$, et cette variation est négligeable devant l'incrément de vitesse électronique résultant de la collision :

$$m\delta \mathbf{v}_1 = -M\delta \mathbf{v}_2 \rightarrow |\delta \mathbf{v}_1| \gg |\delta \mathbf{v}_2|.$$

La variation du module de la vitesse de l'électron peut alors être exprimée comme suit :

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 &= (\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2)^2 \rightarrow v_1^2 - v_1'^2 = 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}'_2 \\ v_1 \delta v_1 &= \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}'_2 + O(\delta v_1^2). \end{aligned}$$

Ensuite, l'expression du coefficient du carré de l'incrément de vitesse :

$$v_1^2 \delta v_1 \delta v_1 = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2 + (\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2 - 2(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)(\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}_2)$$

peut être moyenné sur la distribution de vitesse des particules neutres.

$$v_1^2 \langle \delta v_1 \delta v_1 \rangle_{\mathbf{v}_2} = \frac{kT}{M} (v_1^2 + v_1'^2 - 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}'_1) = 2v_1^2 \frac{kT}{M} (1 - \cos \theta)$$

où θ est l'angle de déflexion de la vitesse de l'électron : $\cos \theta = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}'_1 / v_1^2$. Cette expression de $\langle \delta v_1^2 \rangle_{\mathbf{v}_2}$ (nous omettons dans la suite l'indice 1) doit ensuite être moyennée sur l'angle de déflexion θ c'est-à-dire sur le paramètre d'impact de la collision. L'outil adapté pour cette dernière étape de sommation statistique est la section efficace de diffusion $d\sigma/d\Omega$ (4.4). La probabilité d'une déflexion angulaire donnée θ est proportionnelle à la section efficace de diffusion $d\sigma/d\Omega$, la moyenne de l'expression précédente conduit alors naturellement à la section efficace totale de transfert d'impulsion σ_1 (4.11).

$$\frac{\langle \delta v^2 \rangle}{2\delta t} = n_n \frac{kT}{M} \int \frac{d\sigma}{d\Omega} v (1 - \cos \theta) 2\pi \sin \theta d\theta = \frac{kT}{M} \nu_1(v)$$

ou n_n est la densité de neutre et $\nu_1(v)$ la fréquence de transfert d'impulsion (4.12). La construction de l'équation de l'EEDF est ainsi achevée.

$$\frac{\partial f_e(v, t)}{\partial t} = \frac{m}{M} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^2 \nu_1(v) \left[v f_e(v, t) + \frac{kT}{m} \frac{\partial f_e}{\partial v} \right]$$

Une forme plus générale, prenant en compte l'interaction avec un champ électrique, peut être établie en considérant le mécanisme d'absorption par bremsstrahlung inverse décrit par les relations (8.49) et (8.50). La forme finale de l'équation cinétique décrivant l'interaction d'une population électronique avec un gaz neutre et un champ électrique oscillant est donc donnée par :

$$\frac{\partial f(v, t)}{\partial t} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^2 v_1(v) \left[\frac{m}{M} \left(v f(v, t) + \frac{kT}{m} \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{q^2 E^2}{6m^2} \left(\frac{1}{v_1^2(v) + \omega^2} \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right] \quad (9.28)$$

C'est cette dernière équation qui constitue l'équation de l'EEDF dans les plasmas faiblement ionisés.

Le bilan énergétique dans un plasma faiblement ionisé est en première approximation déterminé par le chauffage généré par le champ électrique et la relaxation sur les particules de gaz neutre, aussi le terme de diffusion par le gaz $(kT/m) \partial f / \partial v$ peut être négligé. Pour un champ quasi-statique $\omega \rightarrow 0$ le champ électrique doit être considéré en valeur efficace : $E \sin(\omega t) \rightarrow \sqrt{2}E$ dans l'expression ci-dessus (cette règle de passage à la limite quasi-statique $\omega \rightarrow 0$ peut être aisément démontré en reprenant le calcul du Bremsstrahlung inverse). La solution stationnaire $\partial f(v) / \partial t = 0$ de l'équation de l'EEDF (9.28) résulte d'un équilibre entre refroidissement collisionnel et chauffage Ohmique.

$$m v f(v, t) = -\frac{M q^2 E^2}{v_1^2} \frac{\partial f}{\partial v} \rightarrow f(v) \sim \exp \left(-m \int^v \frac{u du}{\frac{q^2 M E^2}{3m^2 v_1^2}} \right)$$

Deux cas peuvent être considérés : (i) le cas des collisions électrons-neutres à travers une interaction du type dipôle induit, nous avons démontré que la fréquence de transfert d'impulsion v_1 est alors indépendante de la vitesse (4.6) ; (ii) le cas des collisions à travers une interaction du type sphère dure, le libre parcours moyen λ est alors indépendant de la vitesse et la fréquence de transfert d'impulsion est proportionnelle à la vitesse (Tableau 4.6).

$$\begin{aligned} \text{Dipôle induit} & : v_1(u) = v \rightarrow f(v) \sim \exp -\frac{mv^2}{2kT^*} \\ \text{Sphère dure} & : v_1(u) = \frac{u}{\lambda} \rightarrow f(v) \sim \exp -\left(\frac{mv^2}{2kT^*} \right)^2 \end{aligned}$$

Dans le premier cas nous obtenons une distribution de Maxwell dont la température T^* est déterminée par le champ électrique et la fréquence de transfert d'impulsion. Dans le deuxième cas la décroissance aux hautes vitesses est plus rapide que celle

d'une maxwellienne ; ce type de distribution est appelé distribution de Druyvesteyn.

$$\begin{aligned} \text{Dipole induit} & : kT^* = \frac{q^2 M}{3m^2 v^2} E^2 \\ \text{Sphère dure} & : kT^* = \sqrt{\frac{M}{3m}} q \lambda E \end{aligned} \quad (9.29)$$

Or, les réactions à l'origine de la physico-chimie des plasmas, ainsi que l'ionisation par impact électronique qui détermine le bilan de charge, sont des réactions dont les seuils se situent à haute énergie ; la grande différence de comportement des distributions de Maxwell et Druyvesteyn à haute énergie confirme donc la nécessité d'une description cinétique pour étudier la réactivité des décharges électriques.

9.3 PROCESSUS CINÉTIQUES

Il est courant de rencontrer des situations où les populations électronique et/ou ionique sont initialement monocinétiques, $f(\mathbf{p}, t = 0) \sim \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)$, et interagissent avec un plasma ou un gaz à l'équilibre. C'est ce type de problèmes cinétiques que nous allons étudier. Nous allons établir la loi d'évolution de la fonction de distribution et analyser les différents processus qui mènent à sa thermalisation, son isotropisation et sa relaxation.

9.3.1 Ralentissements

Soit une population d'électrons de charge $-e$ et de masse m décrite par la fonction de distribution $f_e(v, t)$. Cette population interagit avec un gaz de particules neutres de masse M décrites par la fonction de distribution des vitesses $f_n(\mathbf{v}_2)$ (Figure 9.12),

$$f_e(v, t = 0) = \frac{\delta(v - v_0)}{4\pi v^2}, \quad f_n(\mathbf{v}_2) = n_n \delta(\mathbf{v}_2) \quad (9.30)$$

où n_n est la densité de neutres. Pour une collision, sous l'hypothèse $M \gg m$, la variation d'énergie cinétique d'un électron est donnée par (9.16) :

$$\delta [mv^2] = 2\mu \mathbf{V} \cdot \delta \mathbf{v} \approx 2m \mathbf{V} \cdot \delta \mathbf{v}$$

où $\mathbf{V} \approx m\mathbf{v}/M$ est la vitesse du centre de masse. La lecture de la figure 9.8 permet d'établir : $\mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} = v^2(1 - \cos \theta)$, ainsi, l'incrément du module de la vitesse électronique δv associé à une déflexion d'angle θ s'exprime finalement comme :

$$\delta \left[\frac{1}{2} m v^2 \right] = \frac{m^2}{M} \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \rightarrow \frac{\delta v}{v} = -\frac{m}{M} (1 - \cos \theta)$$

Le coefficient de friction dynamique $\langle \delta v(v, \delta t) \rangle / \delta t$ est obtenu en sommant toutes les collisions durant l'unité de temps, chaque collision étant pondérée par sa probabilité décrite par la section efficace de diffusion $d\sigma/d\Omega$ (4.4).

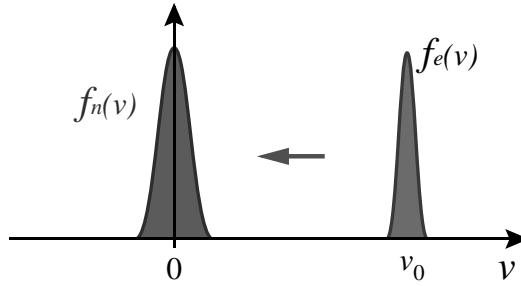


Figure 9.12 Ralentissement électronique.

Durant un instant δt l'électron interagit avec $n_n v \delta t d\sigma$ particules neutres.

$$\langle \delta v \rangle = -n_n v \delta t \int \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{m}{M} v (1 - \cos \theta) 2\pi \sin \theta d\theta$$

Ce calcul conduit naturellement vers les expressions de la section efficace totale de transfert d'impulsion σ_1 (4.11) et de la fréquence de transfert d'impulsion ν_1 (4.12).

$$\frac{\langle \delta v(v) \rangle}{\delta t} = -\frac{m}{M} \nu_1(v) v \rightarrow \frac{\partial f_e}{\partial t} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^2 \left[\frac{m}{M} \nu_1(v) v f_e \right]$$

L'équation du ralentissement électronique dans un gaz froid ainsi construite est conforme au résultat plus général établi au paragraphe précédent (9.28). Nous aurions pu obtenir directement ce résultat à partir de l'équation (9.28) sous les hypothèses : $E = 0$ et $T = 0$. La solution, comme dans l'étude précédente sur la distribution de Druyvesteyn, est fortement dépendante de la loi de variation de la fréquence ν_1 en fonction de la vitesse v , c'est-à-dire du potentiel d'interaction électron-neutre (4.6).

$$\begin{aligned} \text{Dipôle induit} & : \nu_1(v) = \nu \rightarrow f_e(v, t) = \frac{\delta \left[v - v_0 \exp \left(-\frac{m}{M} \nu t \right) \right]}{4\pi v^2} \\ \text{Sphère dure} & : \nu_1(v) = \frac{\nu}{\lambda} \rightarrow f_e(v, t) = \frac{\delta \left[v - v_0 \left(1 + \frac{M}{m} \frac{\nu t}{\lambda} \right)^{-1} \right]}{4\pi v^2} \end{aligned} \quad (9.31)$$

Les deux cas classiques de l'interaction dipolaire et du modèle de sphère dure présentent en effet des comportements exponentiel et algébriques très différents.

En physique des plasmas thermonucléaires, il est courant de rencontrer des situations où les populations électronique ou ionique sont initialement monocinétiques, $f(\mathbf{p}) \sim \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)$, et interagissent avec un plasma totalement ionisé à l'équilibre. Deux cas sont envisageable :

- un faisceau d'électrons interagissant avec un plasma totalement ionisé quasi-neutre ; alors le transfert d'énergie à lieu principalement entre les populations électroniques du faisceau et du plasma. Par contre, la perte d'impulsion du

faisceau est du à la population d'ions du plasma. Ce deuxième processus induit une isotropisation de la distribution des vitesses et sera étudié dans le prochain paragraphe.

- un faisceau d'ions en interaction avec un plasma totalement ionisé quasi-neutre ; alors l'interaction ion-électron conduit à un ralentissement dont la dynamique dépend du rapport de la vitesse du faisceau sur la vitesse thermique électronique.

Étudions ce deuxième cas car il constitue un problème particulièrement important en physique des plasmas thermonucléaires ; en effet, il détermine, pour partie, le bilan énergétique à travers le dépôt d'énergie des ions rapides dans le plasma.

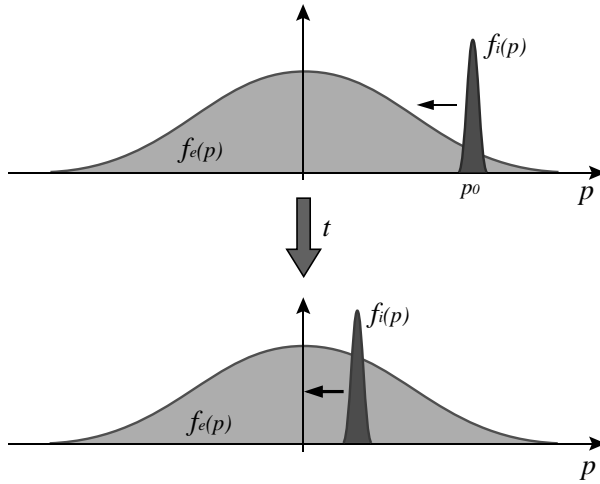


Figure 9.13 Ralentissement ion-électrons.

Soit une population d'électrons cibles, de charge $-e$ et de température T , et un ion de masse m_i et d'impulsion \mathbf{p}_0 représenté par la fonction de distribution initiale $\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)$ (Figure 9.13).

$$f_i(\mathbf{p}, t = 0) = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0), \quad f_e(\mathbf{p}_2) = n_e \frac{\exp\left(-\frac{p_2^2}{2m_e kT}\right)}{(2\pi m_e kT)^{\frac{3}{2}}} \quad (9.32)$$

Lorsqu'une particule lourde interagit avec une population de particules légères le processus dominant l'interaction est un phénomène de ralentissement ; la diffusion angulaire, ainsi que l'élargissement de la distribution en énergie de la particule lourde, étant négligeables. L'interaction ion-électrons est donc décrite par l'équation :

$$\frac{\partial f_i(\mathbf{p}, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{p} \rangle}{\delta t} f_i(\mathbf{p}, t)$$

où le coefficient de friction dynamique est donné par la relation (9.24) :

$$\frac{\langle \delta \mathbf{p} \rangle}{\delta t} = -\frac{Z^2 e^4 \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2 \mu} \frac{n_e}{(2\pi m_e kT)^{3/2}} \int \exp\left(-\frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_e kT}\right) \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}_2|^3} d\mathbf{p}_2$$

L'intégrale sur les vitesses électroniques peut être interprétée dans un cadre électrostatique. En effet, considérons les vitesses comme des positions, alors l'intégrand décrit une force centrale proportionnelle au carré de l'inverse de la distance, et l'intégrale la somme de telles forces pour une distribution isotrope. Nous pouvons donc appliquer le théorème de Gauss avec, comme surface de Gauss, une sphère centrée à l'origine. Ainsi, le calcul du coefficient de friction est simplifié pour le cas des ions suprathermiques et subthermiques.

- Ions suprathermiques : $v > \sqrt{kT/m_e}$

$$\begin{aligned} \int \exp\left(-\frac{m_e \mathbf{v}_2^2}{2kT}\right) \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}_2|^3} d\mathbf{v}_2 &\approx \frac{\mathbf{v}}{v^3} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{m_e v_2^2}{2kT}\right) 4\pi v_2^2 dv_2 \\ &= \left(\frac{2\pi kT}{m_e}\right)^{3/2} \frac{\mathbf{v}}{v^3} \end{aligned}$$

- Ions subthermiques : $v < \sqrt{kT/m_e}$

$$\int \exp\left(-\frac{m_e \mathbf{v}_2^2}{2kT}\right) \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}_2|^3} d\mathbf{v}_2 \approx \frac{\mathbf{v}}{v^3} \int_0^v 4\pi v_2^2 dv_2 = \frac{4\pi}{3} \mathbf{v}$$

Ainsi, nous pouvons définir deux temps de ralentissement ionique, pour des ions de vitesse inférieure et pour les ions de vitesse supérieure à la vitesse moyenne électronique. Ces temps de ralentissements sont donnés par :

$$\begin{aligned} \text{Suprathermique} & : \tau_{ie}(v) = \frac{4\pi \varepsilon_0^2 m_i m_e v^3}{Z^2 e^4 n_e \Lambda} \\ \text{Subthermique} & : \tau_{ie}(T) = \frac{3\varepsilon_0^2 m_i (2\pi kT)^{3/2}}{Z^2 e^4 n_e \sqrt{m_e} \Lambda} \end{aligned}$$

Pour ces deux cas limites des vitesses subthermique et suprathermique, l'équation de Landau (9.20),

$$\frac{\partial f_i(\mathbf{p}, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\mathbf{p}}{\tau_{ie}} f_i(\mathbf{p}, t)$$

peut être résolue. La solution du problème du ralentissement ionique est donc un simple ralentissement algébrique pour le cas des ions suprathérmiqes,

$$\begin{aligned} \text{Suprathérmiqes} & : f_i(\mathbf{p}, t) = \delta \left[\mathbf{p} - \mathbf{p}_0 \left(1 - \frac{3t}{\tau_{ie}(v_0)} \right)^{\frac{1}{3}} \right] \\ \text{Subthérmiqes} & : f_i(\mathbf{p}, t) = \delta \left[\mathbf{p} - \mathbf{p}_0 \exp \left(-\frac{t}{\tau_{ie}(T)} \right) \right] \end{aligned} \quad (9.33)$$

et un ralentissement exponentiel pour le cas des ions subthérmiqes.

Les modèles cinétiques ne prenant en compte que le terme de ralentissement, c'est-à-dire la dérivée du premier ordre dans l'équation de Landau, sont équivalents à la théorie du ralentissement de Bethe-Bohr. Cette théorie de Bethe-Bohr, ainsi que ses multiples raffinements, ne sont en fait que la version lagrangienne de l'équation de Landau considérée comme une équation eulérienne.

9.3.2 Isotropisation

Nous allons maintenant étudier le processus d'isotropisation des vitesses d'une population électronique induit par les collisions avec une population ionique. En effet, il est fréquent dans les plasmas thermonucléaires et spatiaux magnétisés que la population électronique présente une fonction de distribution anisotrope. En théorie cinétique, l'hypothèse de collisions sur des ions infiniment lourds conduit à des modèles, très répandus, dits de Lorentz. Soit donc une population d'ions, supposés infiniment lourds et de charge Ze , et distribués suivant la densité de probabilité $f_i(\mathbf{p}_2)$. Ces ions au repos interagissent avec un électron de masse m_e et d'impulsion initiale \mathbf{p}_0 représenté par sa fonction de distribution initiale : $f_e(\mathbf{p}, t = 0)$.

$$f_e(\mathbf{p}, t = 0) = \frac{\delta(p - p_0)}{2\pi p_0^2} \delta(\cos \theta_0 - \cos \theta), \quad f_i(\mathbf{p}_2) = n_i \frac{\delta(p_2)}{4\pi p_2^2} \quad (9.34)$$

où $p = |\mathbf{p}|$ et $\theta = \arccos(\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}/p)$ constituent un système de coordonnées sphériques d'axe \mathbf{u} dans l'espace des impulsions \mathbf{p} ; $\theta_0 = \arccos(\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_0/p_0)$. Nous ne prenons pas en compte le deuxième angle sphérique φ car, en présence d'un champ magnétique, si l'axe de référence \mathbf{u} du système sphérique est parallèle au champ magnétique, la rotation cyclotrique rend la distribution suivant cet angle φ homogène. Le cas des plasmas magnétisés étant très répandu, nous supposons donc implicitement que cette étude (et les suivantes) ce réfère à ce cas. Notons que l'inclusion du deuxième angle sphérique φ ne pose aucun problème supplémentaire si nous voulons étendre les résultats aux cas sans champ magnétique. Comme les ions sont infiniment lourds, il ne peut y avoir de transfert d'énergie et la norme de l'impulsion électronique $|\mathbf{p}|$ reste invariante. Par contre, l'effet cumulatif des collisions induit un élargissement de la distribution angulaire et une isotropisation. La fonction de

distribution $f_e(\mathbf{p}, t > 0)$ est donnée par la solution de l'équation de Landau (9.20) :

$$\frac{\partial f_e(\mathbf{p}, t)}{\partial t} = \frac{Z^2 e^4 m_e n_i \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\mathbf{p}}{p^3} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\mathbf{I}p^2 - \mathbf{p}\mathbf{p}}{2p^3} \right] f_e(\mathbf{p}, t)$$

Compte tenu de l'identité (9.26) et de la définition du temps d'isotropisation électronique : $\tau_{ei}(p) = 8\pi \varepsilon_0^2 p^3 / Z^2 e^4 m_e n_i \Lambda$, cette équation d'évolution de la distribution, initialement monocinétique, devient :

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} = \frac{1}{\tau_{ei}(p)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot [\mathbf{I}p^2 - \mathbf{p}\mathbf{p}] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} f_e$$

Ainsi apparaît un opérateur différentiel décrivant l'isotropisation, c'est-à-dire une marche aléatoire sur une sphère, dont l'expression en coordonnées sphérique est :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot [\mathbf{I}p^2 - \mathbf{p}\mathbf{p}] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Cet opérateur n'est autre que la partie angulaire du Laplacien ou le carré de l'opérateur moment cinétique orbital en mécanique quantique. Le processus d'isotropisation, dans un modèle de Lorentz, conserve donc la norme de l'impulsion $|\mathbf{p}_0| = |\mathbf{p}|$ ce qui était un résultat attendu. Dans un système de coordonnées sphériques, l'équation de Landau décrivant l'isotropisation de la population électronique est donnée par :

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} = \frac{1}{\tau_{ei}(p)} \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] f_e \quad (9.35)$$

Les fonctions propres de l'opérateur moment cinétique en mécanique quantique sont les harmoniques sphériques, qui en l'absence de dépendance en l'angle φ se réduisent aux polynômes de Legendre $P_l(\cos \theta)$.

$$\frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] P_l(\cos \theta) = l(l+1) P_l(\cos \theta) \quad (9.36)$$

La famille des polynômes de Legendre (Figure 9.14), $P_l(x)$ tels que $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$, constitue une base orthogonale complète de l'ensemble des fonctions sur le cercle :

$$\int_{-1}^{+1} P_l(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_l^m,$$

$$\delta(\cos \theta' - \cos \theta) = \sum_{l=0}^{l=\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta')$$

Ils peuvent être définis de multiples façons, soit à partir d'une fonction génératrice, soit à partir d'un développement ou d'une équation différentielle.

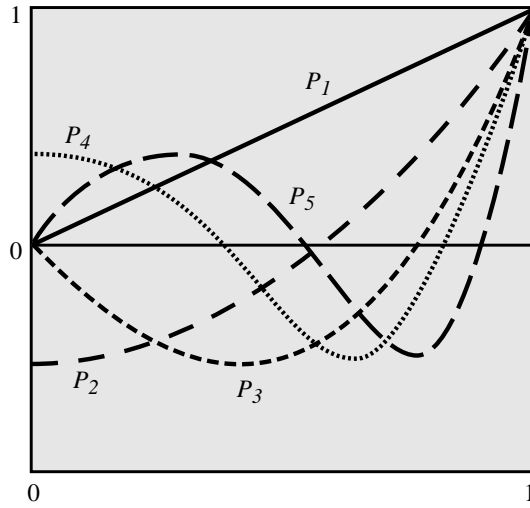


Figure 9.14 Premiers polynômes de Legendre : $P_l(x)$ pour $l = 1, 2, 3, 4, 5$.

La définition la plus opérationnelle d'un point de vue numérique est la relation de récurrence :

$$P_{l+1}(x) = \frac{2l+1}{l+1}xP_l(x) - \frac{l}{l+1}P_{l-1}(x) \rightarrow P_0 = 1, P_1 = x, P_2 = \frac{3x^2 - 1}{2}, \dots$$

Les premiers polynômes de Legendre : $P_l(x)$ pour $l = 1, 2, 3, 4, 5$ sont représentés sur la figure 9.14.

La solution de l'équation d'évolution (9.35) est obtenue à partir d'une décomposition :

$$f_e(p, \theta, t) \sim \sum_l a_l(p, t) P_l(\cos \theta_0) P_l(\cos \theta),$$

suivie d'une substitution dans l'équation (9.35) ; ainsi, chacun des coefficients a_l du développement vérifie une équation de relaxation linéaire et peut être exprimé en fonction du temps. La solution est une somme pondérée de polynômes de Legendre, les coefficients de pondération décroissant exponentiellement avec le temps et l'ordre du polynôme.

$$f_e(p, \theta, t) = \frac{\delta(p - p_0)}{2\pi p_0^2} \sum_{l=0}^{l=+\infty} \left(l + \frac{1}{2}\right) \exp\left(-\frac{l(l+1)}{\tau_{ei}(p_0)} t\right) P_l(\cos \theta_0) P_l(\cos \theta) \quad (9.37)$$

La figure 9.15 représente ce processus d'isotropisation dans l'espace des impulsions, les niveaux de gris étant proportionnels à la densité de probabilité.

Notons que, pour la clarté du schéma, nous avons élargie la distribution au cours du temps suivant la direction radiale, alors que la relation (9.37) montre clairement que

$|\mathbf{p}_0| = |\mathbf{p}|$. Le polynôme d'ordre l décrit des détails angulaires de l'ordre de $2\pi/l$, sa contribution décroît exponentiellement ; la fonction s'isotropise donc exponentiellement lorsque $t \rightarrow +\infty$.

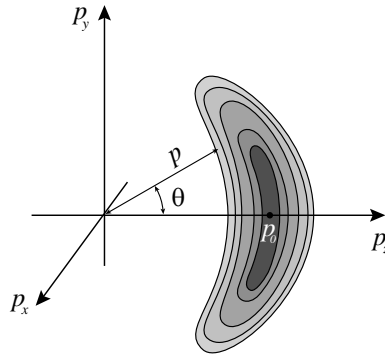


Figure 9.15 Isotropisation d'une distribution initialement monocinétique $\mathbf{p}_0 = p_0 \mathbf{u}$.

Les deux études précédentes sur le ralentissement ion-électrons et l'isotropisation électron-ions sont complémentaires. En effet, le phénomène d'isotropisation des vitesses électroniques est un processus de destruction d'une vitesse dirigée sur un fond neutralisant d'ions massifs au repos et le phénomène de ralentissement ionique est aussi un processus de destruction de vitesse dirigée dû aux collisions des ions avec un fond neutralisant d'électrons thermiques. Dans les deux dernière études de processus cinétiques que nous allons présenter ces deux processus, le ralentissement et l'isotropisation, seront pris en compte simultanément et non plus séparément.

Deux populations sont particulièrement importantes dans les plasmas thermonucléaires :

- **les particules alpha**, possédant une énergie de l'ordre de 3,5 MeV à 50 keV, qui constituent la source d'énergie de la combustion thermonucléaire,
- **les électrons rapides**, possédant une énergie de l'ordre de 10 MeV à 100 keV, qui dans les tokamaks sont utilisés pour générer le courant assurant le confinement (dans les schémas avancés de confinement inertiel ces électrons sont aussi utilisés pour allumer la combustion thermonucléaire à travers un dépôt d'énergie rapide et localisé).

Nous allons donc étudier en détail la cinétique de ces deux populations qui contrôlent la dynamique de la combustion thermonucléaire.

9.3.3 Alphas thermonucléaires

Les particules alpha, issues de la réaction de fusion entre le deutérium et le tritium (4.32), naissent avec une énergie $m_\alpha v_0^2/2 \approx 3.5$ MeV. Puis, elles subissent un processus de ralentissement sur les électrons et d'isotropisation sur les ions. Enfin, elles se thermalisent et doivent être extraites pour ne pas étouffer la combustion dans les tokamaks.

Considérons une particule alpha décrite par la fonction de distribution $f_\alpha(v, \theta, t)$ ($\cos \theta = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}/v$, \mathbf{u} est une direction de référence donnée); cette particule alpha est produite par les réactions de fusion (4.32) à une vitesse v_0 avec un angle θ_0 par rapport à la direction de référence \mathbf{u} ($\cos \theta_0 = \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{u}/v_0$), qui dans un tokamak est celle du champ magnétique. La fonction de distribution, immédiatement après la fusion, est donnée par :

$$f_\alpha(\mathbf{v}, t = 0) = \frac{\delta(v - v_0)}{2\pi v_0^2} \delta(\cos \theta_0 - \cos \theta) \quad (9.38)$$

Cette particule alpha interagit avec les électrons décrit par la distribution $f_e(\mathbf{v}_2)$ et les ions décrit par la distribution $f_i(\mathbf{v}_1)$; ces deux distributions sont statiques et données par :

$$f_i(\mathbf{v}_1) = n_i \delta(\mathbf{v}_1), \quad f_e(\mathbf{v}_2) = n_e \frac{\exp\left(-\frac{m_e v_2^2}{2kT}\right)}{(2\pi kT/m_e)^{3/2}} \quad (9.39)$$

L'ordering des masses et des vitesses, des électrons, des ions et des particules alpha, s'établit comme suit : $m_\alpha \geq m_i \gg m_e$ et $kT_e/m_e \geq v_0^2 > kT_i/m_i$. Il justifie le fait que nous ayons négligé la température ionique dans le modèle de cible (9.39). La figure 9.16 illustre l'allure des distributions des modules des vitesses ionique, électronique et des particules alphas.

L'équation de Landau décrivant la dynamique d'une particule alpha est donnée par (9.20) :

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{v} \rangle}{\delta t} f_\alpha + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle}{2\delta t} f_\alpha$$

et les conditions initiales par (9.38).

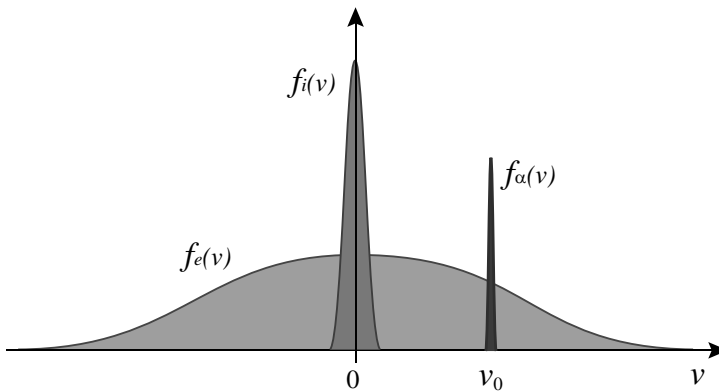


Figure 9.16 Distributions des modules des vitesses des ions, des électrons et des particules alphas dans un plasma thermonucléaire.

Le terme de diffusion ionique (9.25) s'exprime en fonction de la vitesse critique v_c et du temps de ralentissement des alphas thermonucléaire τ_α :

$$v_c^3 \equiv 3Z_i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{kT}{m_e} \frac{kT}{m_i}}, \quad \tau_\alpha \equiv \frac{12\pi^{\frac{3}{2}} \varepsilon_0^2 m_\alpha m_i}{\sqrt{2}\Lambda Z_i Z_\alpha^2 e^4 n_i} \sqrt{\frac{kT}{m_e} \frac{kT}{m_i}}$$

comme :

$$\frac{\langle \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle}{\delta t} = \frac{m_i}{m_\alpha \tau_\alpha} \frac{v_c^3}{v^3} [\mathbf{I}v^2 - \mathbf{v}\mathbf{v}]$$

L'expression intégrale du coefficient de friction dynamique (9.24) peut être sommée pour les distributions ionique et électronique du type (9.39) ; le résultat finale est :

$$\begin{aligned} \frac{\langle \delta \mathbf{v} \rangle}{\delta t} &= - \frac{Z_\alpha^2 e^4 n_e \sqrt{m_e} \Lambda}{3\varepsilon_0^2 m_\alpha (2\pi kT)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{v} - \frac{Z_i^2 Z_\alpha^2 e^4 n_i (m_i + m_\alpha) \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2 m_\alpha^2 m_i v^3} \mathbf{v} \\ &= - \left(\frac{v_c^3 + v^3}{v^3} \right) \frac{\mathbf{v}}{\tau_\alpha} - \left(\frac{m_i}{m_\alpha} \frac{v_c^3}{v^3} \right) \frac{\mathbf{v}}{\tau_\alpha} \end{aligned}$$

Compte tenu de la relation (9.26), qui prend ici la forme :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle}{2\delta t} = - \frac{1}{\tau_\alpha} \frac{m_i}{m_\alpha} \frac{v_c^3}{v^3} \mathbf{v}$$

une partie de la friction dynamique annule une partie du terme de diffusion dynamique ; le résultat final est alors donné par :

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = \frac{1}{\tau_\alpha} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v_c^3 + v^3) f_\alpha + \frac{1}{\tau_\alpha} \frac{m_i}{m_\alpha} \frac{v_c^3}{2v^3} \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) f_\alpha \quad (9.40)$$

Cette dernière expression constitue l'équation cinétique des particules alpha dans les plasmas thermonucléaires. La vitesse critique v_c ($m_\alpha v_c^2 \approx 33 T_e$) marque la limite entre le régime de ralentissement électronique à haute vitesse ($v > v_c$) et le régime de ralentissement ionique à basse vitesse ($v < v_c$). Le terme d'isotropisation est purement ionique. L'équation de Landau pour les particules alpha (9.40) peut être résolu avec les conditions initiales (9.38) ; pour ce faire, le terme de diffusion angulaire est diagonalisé sur la base des polynômes de Legendre (9.36) :

$$f_\alpha(v, \theta, t) \sim \sum_l b_l(p, t) P_l(\cos \theta_0) P_l(\cos \theta),$$

et les équations différentielles ordinaires du premier ordre sur $b_l(p, t)$ ainsi obtenues sont résolues par quadrature, le résultat final s'exprime donc comme une somme sur

la base des polynômes de Legendre.

$$f_{\alpha}(v, \mu, t) = \frac{\delta \left[\frac{t}{\tau_{\alpha}} - \frac{1}{3} \log \frac{v_c^3 + v_0^3}{v_c^3 + v^3} \right]}{2\pi (v_c^3 + v^3)} \quad (9.41)$$

$$\times \sum_{l=0}^{l=+\infty} \left(l + \frac{1}{2} \right) \left[\frac{1 + v_c^3/v_0^3}{1 + v_c^3/v^3} \right] \frac{m_i}{m_{\alpha}} \frac{l(l+1)}{6} P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta_0)$$

Cette expression n'est autre que la fonction de Green de l'opérateur de collision et constitue le point de départ d'un ensemble de méthodes perturbatives de résolution des problèmes de cinétique ionique dans les plasmas thermonucléaires ; en particulier, les problèmes de dépôt d'énergie et de confinement magnétique peuvent être abordés sur la base de ce résultat général.

9.3.4 Électrons relativistes

Une deuxième population énergétique se rencontre communément dans les plasmas thermonucléaires, ce sont les électrons rapides possédant des énergies dans la bande [100 KeV – 10 MeV]. L'origine de cette population d'électrons rapides peut-être :

- soit l'accélération dû au champ électrique dans les décharges tokamak à basse densité,
- soit la diffusion quasi-linéaire dans les expériences de génération non-inductive de courant dans les décharges tokamak longues,
- soit l'interaction d'un pulse laser intense avec un plasma dans les expériences d'allumage rapide en fusion inertielle.

La dynamique de ces électrons est contrôlée par deux processus,

- le ralentissement sur les électrons thermiques du plasmas et
- l'isotropisation sur les ions.

Au delà de quelques dizaines de MeV le rayonnement doit être pris en compte dans l'équation de Landau. Considérons un électron rapide décrit par la fonction de distribution $f_r(\mathbf{p}, t) = f_r(p, \theta, t)$ ($\cos \theta = \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}/p$). Cet électron rapide possède une impulsion initiale p_0 faisant un angle θ_0 par rapport à une direction de référence \mathbf{u} ($\cos \theta_0 = \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{u}/p_0$), qui dans un tokamak est celle du champ magnétique. La fonction de distribution initiale est donc donnée par :

$$f_r(\mathbf{p}, t = 0) = \frac{\delta(p - p_0)}{2\pi p_0^2} \delta(\cos \theta_0 - \cos \theta) \quad (9.42)$$

Cet électron interagit avec les électrons du plasma décrit par la distribution $f_e(\mathbf{p}_1)$ et les ions décrit par la distribution $f_i(\mathbf{p}_2)$; ces deux distributions sont statiques.

$$f_e(\mathbf{p}_1) = n_e \frac{\delta(p_1)}{4\pi p_1^2}, \quad f_i(\mathbf{p}_2) = n_i \frac{\delta(p_2)}{4\pi p_2^2} \quad (9.43)$$

Dans ce modèle de cible, nous avons négligé l'élargissement des fonctions de distribution f_e et f_i (élargissement décrivant la température finie du plasma) car l'ordering des vitesses des électrons, ions et électrons rapides s'établi comme suit : $p^2 \gg m_e k T_e$ et $p^2 \gg m_i k T_i$. Le temps caractéristique de ralentissement et de diffusion pour les électrons relativiste est défini par : $\tau_e = 4\pi \epsilon_0^2 m_e^2 c^3 / e^4 n_e \Lambda$; $f_r(\mathbf{p}, t)$ obéit à une équation de Landau du type (9.20) :

$$\frac{\partial f_r}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{p} \rangle}{\delta t} f_r + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{p} \delta \mathbf{p} \rangle}{2\delta t} f_r$$

Mais, les expressions des coefficients de friction $\langle \delta \mathbf{p} \rangle / \delta t$ et de diffusion $\langle \delta \mathbf{p} \delta \mathbf{p} \rangle / 2\delta t$ doivent être étendues au cas du régime relativiste. Pour ce faire, les intégrales du type (4.14) doivent être calculées à partir de l'expression du terme inertiel relativiste dans l'équation de Newton : $m d\mathbf{v}/dt \rightarrow d\mathbf{p}/dt = dm\gamma\mathbf{v}/dt$. Ensuite, la sommation sur l'ensemble des particules du plasma (9.23) permet d'exprimer ces coefficients relativistes. Dans la suite du problème nous utiliserons un système d'unités adapté à ce régime relativiste : $m_e = c = e = 1$. Le résultat final est donné par :

$$\frac{\partial f_r}{\partial t} = \frac{1}{\tau_e} \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \gamma^2 f_r + \frac{1}{\tau_e} \frac{Z+1}{2} \frac{\gamma}{p^3} \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) f_r \quad (9.44)$$

Cette équation cinétique relativiste décrit le ralentissement dû aux collisions électron rapide-électrons (premier terme du membre de droite) et la diffusion angulaire dû aux électrons et ions (deuxième terme du membre de droite). La solution correspondant aux conditions initiales (9.42) est obtenue en développant la fonction f_r sur une base de polynômes de Legendre, l'opérateur de diffusion angulaire est ainsi diagonalisé, puis l'équation différentielle ordinaire du premier ordre sur l'impulsion résolu par quadrature. La solution ainsi établi :

$$f_r(p, \theta, t) = \frac{\delta \left[\arctan(p) - p - \arctan(p_0) + p_0 - \frac{t}{\tau_e} \right]}{4\pi\gamma^2} \times \sum_{l=0}^{l=+\infty} (2l+1) \left[\frac{p(\gamma_0+1)}{p_0(\gamma+1)} \right]^{\frac{(Z+1)l(l+1)}{2}} P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta_0) \quad (9.45)$$

décrit la combinaison d'un ralentissement et d'une diffusion illustrée par la figure 9.17.

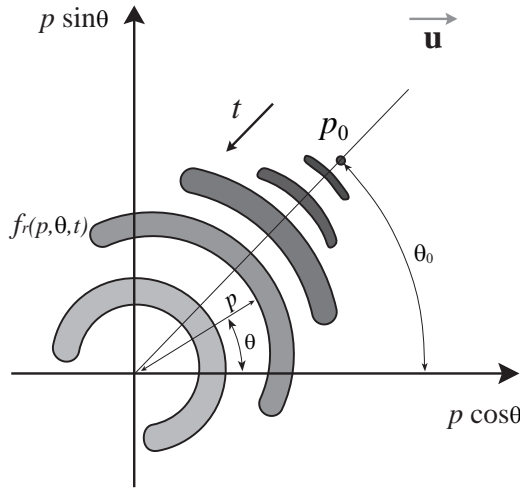


Figure 9.17 Ralentissement et diffusion angulaire pour les électrons relativistes.

La solution (9.45) est particulièrement utile pour étudier la génération de courant dans les tokamaks et le dépôt rapide d'énergie en fusion inertielle.

9.4 FLUCTUATIONS ET TURBULENCE

Dans ce paragraphe nous allons établir une relation générale entre le coefficient de diffusion dans l'espace des positions et la fonction de corrélation des vitesses, *la relation de Green-Kubo*. Nous montrerons ensuite, dans le cadre d'une comparaison entre la diffusion collisionnelle et la diffusion turbulente, que cette relation permet de déterminer le coefficient de diffusion turbulente dans un plasma magnétisé en fonction de la l'auto-corrélation des champs électriques.

9.4.1 Relation de Green-Kubo

Dans un plasma, collisionnel ou turbulent, l'évolution de la densité $n(\mathbf{r})$ est décrite par une équation de diffusion-convection de type Fokker-Planck (2.9).

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left[\frac{\langle \delta \mathbf{r} \rangle}{\delta t} n - \frac{\langle \delta \mathbf{r} \delta \mathbf{r} \rangle}{2 \delta t} \cdot \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} \right] \quad (9.46)$$

Pour calculer les coefficients de friction $\langle \delta \mathbf{r} \rangle / \delta t$ et diffusion $\langle \delta \mathbf{r} \delta \mathbf{r} \rangle / 2 \delta t$ considérons une particule dite particule test ; l'incrément de position $\delta \mathbf{r}(\delta t)$ et la vitesse $\mathbf{v}(\delta t)$ sont reliés par la relation triviale : $\mathbf{v}(\delta t) = d\delta \mathbf{r}(\delta t) / d\delta t$ où la vitesse $\mathbf{v}(\delta t)$ est une variable aléatoire. Sans préciser les propriétés statistiques spécifiques de cette variable aléatoire, il est possible d'établir une relation générale entre le coefficient de diffusion et la fonction d'auto-corrélation des vitesses. Le déplacement est obtenu

par sommation de la vitesse :

$$\delta\mathbf{r}(\delta t) = \int_0^{\delta t} \mathbf{v}(t') dt'$$

En l'absence de champ de force macroscopique le coefficient de friction $\langle \delta\mathbf{r} \rangle / \delta t$ est nul car $\langle \mathbf{v}(t) \rangle = \mathbf{0}$ et le coefficient de diffusion $\langle \delta\mathbf{r}\delta\mathbf{r} \rangle / 2\delta t$ s'exprime à l'aide de la fonction de corrélation des vitesses. En effet, le produit :

$$\frac{d\delta\mathbf{r}(\delta t)}{d\delta t} \delta\mathbf{r}(\delta t) = \int_0^{\delta t} \mathbf{v}(\delta t) \mathbf{v}(t') dt'$$

se présente sous la forme de la dérivée temporelle de l'écart quadratique de la position au bout d'un temps δt : $d[\delta\mathbf{r}(\delta t)\delta\mathbf{r}(\delta t)]/d\delta t = 2 \int_0^{\delta t} \mathbf{v}(\delta t)\mathbf{v}(t') dt'$. Introduisons le temps $\tau = \delta t - t'$: $\int_0^{\delta t} \mathbf{v}(\delta t)\mathbf{v}(t') dt' = \int_0^{\delta t} \mathbf{v}(\delta t)\mathbf{v}(\delta t - \tau) d\tau$. La fonction de corrélation des vitesses entre deux instants ne peut dépendre que de la durée τ entre ces deux instants, cette propriété d'invariance par translation dans le temps permet d'établir la relation :

$$\frac{d}{d\delta t} \langle \delta\mathbf{r}(\delta t)\delta\mathbf{r}(\delta t) \rangle = 2 \int_0^{\delta t} \langle \mathbf{v}(0)\mathbf{v}(\tau) \rangle d\tau$$

Les moyennes devant être prises sur la statistique des vitesses. Le cas isotrope est obtenu en sommant les trois composantes cartésiennes du carré du déplacement. L'expression du coefficient de diffusion D s'établit finalement en considérant que le temps δt , qui figure au dénominateur de l'expression $D = \langle \delta\mathbf{r}(\delta t) \cdot \delta\mathbf{r}(\delta t) \rangle / 6\delta t$, est très grand à l'échelle microscopique et très petit à l'échelle macroscopique, c'est donc l'échelle mésoscopique qui doit être encore considérée ici ; l'ordering fort entre échelle hydrodynamique et échelle cinétique permet donc de faire tendre $\delta t \rightarrow +\infty$ dans l'expression du coefficient de diffusion pour obtenir finalement la relation de Green-Kubo.

$$D = \frac{\langle \delta\mathbf{r}(\delta t) \cdot \delta\mathbf{r}(\delta t) \rangle}{6\delta t} = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \langle \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(0) \rangle dt \quad (9.47)$$

Notons que la relation d'Einstein (6.11) et la relation de Green-Kubo (9.47) permettent d'exprimer la mobilité μ en fonction de la corrélation des vitesses. Nous obtenons ainsi un cas particulier du théorème fluctuation-dissipation entre la dissipation Ohmique et les fluctuations de la vitesse. Considérons, maintenant, ce problème de la diffusion en présence d'un champ magnétique statique homogène.

9.4.2 Collisions et turbulence

L'ensemble des coefficients de transport décrivant les processus de relaxation des gradients dans un plasma magnétisé est usuellement référencé comme l'ensemble des **coefficients de Braginski**. Nous allons étudier, plus spécifiquement, le coefficient de diffusion du centre guide \mathbf{R}_\perp (5.5) des orbites cyclotroniques. La construction des autres coefficients de Braginski suit les mêmes lignes que l'étude du transport de matière présentée ici. L'équation de diffusion des particules en champ magnétique est de la forme :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}_\perp} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{R}_\perp \delta \mathbf{R}_\perp \rangle}{2\delta t} \cdot \frac{\partial n}{\partial \mathbf{R}_\perp}$$

où n est la densité de particules. Compte tenu de l'isotropie autour des lignes de champ, le coefficient de diffusion D_\perp est défini par : $D_\perp = \langle \delta \mathbf{R}_\perp \cdot \delta \mathbf{R}_\perp \rangle / 4\delta t$. Soit une particule chargée, de masse m et de charge q , plongée dans un champ magnétique statique uniforme $\mathbf{B} = B\mathbf{b}$. L'écriture de l'équation du mouvement de cette particule se réduit à la prise en compte : (i) de la force de Laplace et (ii) des transferts d'impulsion $m\delta\mathbf{v}_n$ induits par les collisions avec les neutres ou les autres particules chargées.

$$m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = q\mathbf{V} \times \mathbf{B} + \sum_n m\delta(t - \tau_n)\delta\mathbf{v}_n$$

où τ_n sont les instants de collisions. Entre deux collisions : $\mathbf{V} = \mathbf{V}_c + V_\parallel \mathbf{b}$ (5.2) où $\mathbf{V}_c = V_c \cos[\omega_c t] \mathbf{e}_x - V_c \sin[\omega_c t] \mathbf{e}_y = \omega_c \rho_L \times \mathbf{b}$ est la vitesse cyclotronique et $\omega_c = qB/m$ la fréquence cyclotron (5.4), $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{b}]$ est un repère cartésien orthonormé direct. La probabilité que la particule ne subisse aucune collision durant un temps τ puis subisse une collision à l'issue de ce temps τ durant l'intervalle $d\tau$ est donnée par (2.2) :

$$\frac{dP(\tau)}{d\tau} = \nu_1 \exp(-\nu_1 \tau) \quad (9.48)$$

où ν_1 (ν) est la fréquence de transfert d'impulsion (4.12). À l'issue d'une collision, non seulement une variation de la vitesse cyclotronique est observée, mais aussi un changement de position du centre guide $\delta \mathbf{R}_\perp$. En effet, dans un champ magnétique, statique et homogène, la position \mathbf{r} d'une particule peut être décomposée en la somme de la position du centre guide \mathbf{R}_\perp plus la position du rayon de Larmor tournant $\rho_L = \mathbf{b} \times \mathbf{V}_c / \omega_c$: $\mathbf{r} = \mathbf{R}_\perp + \rho_L$ (5.5). Lors d'une collision la variation de la position instantanée de la particule est nulle $\delta \mathbf{r} = \mathbf{0}$, il en résulte un couplage entre la variation de vitesse $\delta \mathbf{V}_c$ et la variation de la position du centre guide $\delta \mathbf{R}_\perp$.

$$\mathbf{R}_\perp = \mathbf{r} - \rho_L = \mathbf{r} + \frac{\mathbf{V}_c \times \mathbf{b}}{\omega_c} \rightarrow \delta \mathbf{R}_\perp = \frac{\delta \mathbf{V}_c \times \mathbf{b}}{\omega_c} \rightarrow \delta \mathbf{R}_\perp \cdot \delta \mathbf{R}_\perp = \frac{\delta \mathbf{V}_c \cdot \delta \mathbf{V}_c}{\omega_c^2}$$

Le couplage entre la position du centre guide et la vitesse est une conséquence de l'existence d'un invariant associé au moment canonique $m\mathbf{v} + q\mathbf{A}$ (10.4). Afin de calculer le coefficient $\langle \delta \mathbf{V}_c \cdot \delta \mathbf{V}_c \rangle$ considérons la dynamique entre les instants t_0

et t en l'absence de collision ; on suppose que la particule chargée vient juste de subir une collision à l'instant t_0 et possède, après cette collision, la vitesse $\mathbf{V}_c(t_0)$. En l'absence de collision, la vitesse à un instant ultérieur t est donc donnée par : $\mathbf{V}_c(t) = \mathbf{V}_c(t_0) + \delta\mathbf{V}_c$.

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{V}_c &= V_c (\cos \omega_c t - \cos \omega_c t_0) \mathbf{e}_x - V_c (\sin \omega_c t - \sin \omega_c t_0) \mathbf{e}_y \\ &= -2V_c \sin \left[\omega_c \frac{t+t_0}{2} \right] \sin \left[\omega_c \frac{t-t_0}{2} \right] \mathbf{e}_x \\ &\quad - 2V_c \cos \left[\omega_c \frac{t+t_0}{2} \right] \sin \left[\omega_c \frac{t-t_0}{2} \right] \mathbf{e}_y \end{aligned}$$

Introduisons $\tau = t - t_0$ la durée du libre parcours qui est ici une libre rotation (sur la figure 9.18 nous avons ajouté une dérive suivant l'axes des y pour la clarté du schéma représentant la rotation cyclotronique, cette dérive n'est pas prise en compte dans ce modèle, elle n'apporterait d'ailleurs aucune modification au résultat final) et exprimons le carré de l'incrément de vitesse cyclotronique et de l'incrément de position du centre guide à l'issue d'une libre rotation de durée τ .

$$\delta\mathbf{V}_c \cdot \delta\mathbf{V}_c = 4V_c^2 \sin^2 \left(\omega_c \frac{\tau}{2} \right) \rightarrow \frac{\delta\mathbf{R}_\perp \cdot \delta\mathbf{R}_\perp}{4} = \frac{V_c^2}{\omega_c^2} \sin^2 \left(\omega_c \frac{\tau}{2} \right)$$

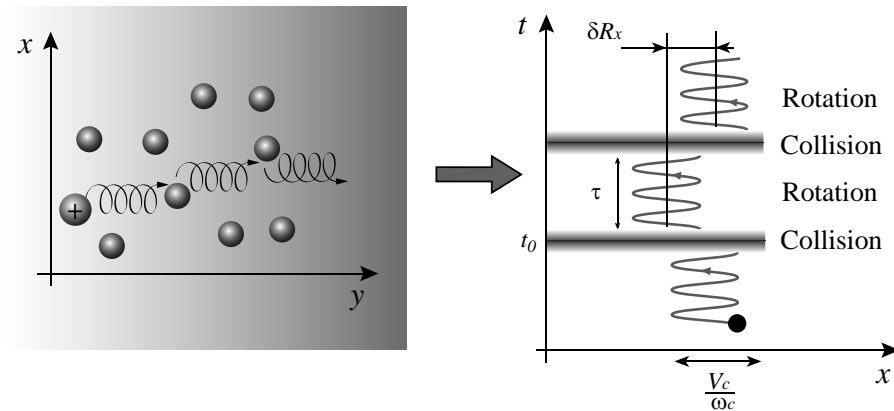


Figure 9.18 Diffusion perpendiculaire aux lignes de champ résultant des collisions.

Le résultat ainsi obtenu est fonction uniquement de la variable aléatoire τ et cette variable est distribuée suivant la loi $dP/d\tau$ (9.48), il est donc nécessaire de moyennner le résultat précédent sur τ pour exprimer le coefficient de diffusion.

$$\frac{\langle \delta\mathbf{R}_\perp \cdot \delta\mathbf{R}_\perp \rangle}{4\delta t} = \frac{V_c^2}{\omega_c^2} \frac{\int_0^{+\infty} \exp(-\nu_1 \tau) \sin^2 \left(\omega_c \frac{\tau}{2} \right) d\tau}{\int_0^{+\infty} \tau \exp(-\nu_1 \tau) d\tau}$$

Le résultat final est identique au coefficient de diffusion perpendiculaire au lignes de champ identifié lors de l'étude des modèles fluides magnétisés (6.15).

$$D_{\perp} = \frac{\langle \delta \mathbf{R}_{\perp} \cdot \delta \mathbf{R}_{\perp} \rangle}{4\delta t} = \frac{V_c^2}{2} \frac{\nu_1}{\nu_1^2 + \omega_c^2} \quad (9.49)$$

L'accord entre un modèle fluide (6.15) et un modèle cinétique (9.49) constitue, comme dans le cas de l'accord entre la MHD et la théorie des orbites, une garantie quant à la rigueur des méthodes d'élaboration des résultats à partir des hypothèses de départ ; mais, la confrontation avec l'expérience s'effectue en premier lieu au niveau des hypothèses sous tendant ces modèles. Ainsi, pour le cas de la diffusion dans un champ magnétique, les résultats (6.15) et (9.49) sont souvent infirmés par l'expérience et l'origine de ce désaccord se situe au niveau de l'hypothèse d'une dynamique collisionnelle. En effet, il n'est pas rare, dans les plasmas magnétisés chauds, que les champs électriques turbulents soit la source dominante du transport de matière. Nous allons donc construire un nouveau modèle pour établir l'expression du coefficient de diffusion en présence d'un champ électrique turbulent $\mathbf{E}_{\perp}(t)$.

Soit une particule chargée, de masse m et de charge q , plongée dans un champ magnétique statique uniforme $\mathbf{B} = B\mathbf{b}$ où \mathbf{b} est un vecteur unitaire. En présence de fluctuations électrostatiques basse fréquence $\mathbf{E}_{\perp}(t)$, entretenues par une activité turbulente d'origine non précisée, le mouvement du centre guide de la particule \mathbf{R}_{\perp} est décrit par la dérive de champs croisés (5.13).

$$\frac{d\mathbf{R}_{\perp}}{dt} = \frac{\mathbf{E}_{\perp}(t) \times \mathbf{b}}{B} \rightarrow \delta \mathbf{R}_{\perp}(t) = \int_0^t \frac{\mathbf{E}_{\perp}(t') \times \mathbf{b}}{B} dt'$$

La dérivée temporelle de l'écart quadratique de position au bout d'un temps t est donc donnée par :

$$\frac{d}{dt} [\delta \mathbf{R}_{\perp}(t) \delta \mathbf{R}_{\perp}(t)] = 2 \int_0^t \frac{\mathbf{E}_{\perp}(t) \times \mathbf{b}}{B} \frac{\mathbf{E}_{\perp}(t') \times \mathbf{b}}{B} dt'$$

Introduisons le temps $\tau = t - t'$ afin de faire apparaître la fonction d'auto-corrélation du champ électrique :

$$\frac{d}{dt} \langle \delta \mathbf{R}_{\perp}(t) \cdot \delta \mathbf{R}_{\perp}(t) \rangle = \frac{2}{B^2} \int_0^t \langle \mathbf{E}_{\perp}(t) \cdot \mathbf{E}_{\perp}(t - \tau) \rangle d\tau$$

La moyenne étant prise ici sur les différentes réalisations du champ turbulent. D'une part, la fonction de corrélation du champ entre deux instants $\langle \mathbf{E}_{\perp}(t) \cdot \mathbf{E}_{\perp}(t') \rangle$ ne peut dépendre que de la durée $\tau = t - t'$ entre ces deux instants ; d'autre part, il existe un intervalle de temps mésoscopique, grand à l'échelle microscopique et petit à l'échelle macroscopique, tel que la fonction de corrélation s'annule au delà de cette échelle mésoscopique. Ainsi, cet ordering fort entre échelle hydrodynamique et échelle cinétique, conjugué avec la décroissance rapide des corrélations temporelles,

permettent de faire tendre $t \rightarrow +\infty$ dans l'expression du coefficient de diffusion pour obtenir finalement :

$$\langle \delta \mathbf{R}_\perp(t) \cdot \delta \mathbf{R}_\perp(t) \rangle = \frac{2}{B^2} t \int_0^{+\infty} \langle \mathbf{E}_\perp(0) \cdot \mathbf{E}_\perp(\tau) \rangle d\tau$$

Le cas isotrope est obtenu en sommant les deux composantes cartésiennes du carré du déplacement. Le coefficient de diffusion turbulent s'exprime alors comme :

$$D_t = \frac{\langle \delta \mathbf{R}_\perp \cdot \delta \mathbf{R}_\perp \rangle}{4t} = \frac{1}{2B^2} \int_0^{+\infty} \langle \mathbf{E}_\perp(0) \cdot \mathbf{E}_\perp(\tau) \rangle d\tau \tag{9.50}$$

Nous reconnaissons une relation similaire à la formule de Green-Kubo (9.47). L'ensemble des formules (9.49) et (9.50) pourrait laisser croire que le problème du transport de matière dans les plasmas magnétisés est résolu, il n'en est rien. Le type de problème que nous venons de résoudre n'est pas auto-cohérent, la difficulté est en fait de pouvoir exprimer les caractéristiques du champ turbulent en fonction des écarts à l'équilibre thermodynamique qui entretiennent l'activité turbulente dans le plasma, et ce problème est encore largement ouvert.

Cette dernière expression (9.50) ne clos pas l'étude de la diffusion dans un champ électrique turbulent donné ; si le champ possède une corrélation spatiale et si la particule diffusante explore cette longueur de corrélation, alors une démonstration similaire à celle que nous venons de construire permet d'établir la *formule de Bohm de la diffusion anormal* dans le plasmas magnétisés. Cette formule présente une dépendance anormale en B^{-1} beaucoup plus défavorable au confinement que les dépendances normales en B^{-2} que nous venons d'étudier (9.49, 9.50). Le tableau (9.3) résume différents coefficients de diffusion identifiés et analysés dans ce livre.

Tableau 9.3

Diffusion	Expression
Libre	$D = \frac{kT}{m} \frac{1}{v}$
Ambipolaire	$D_a = D_i \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right)$
Collisionnelle	$D_\perp = \frac{D}{1 + \frac{\omega_c^2}{v^2}} \approx \frac{V_c^2}{2} \frac{v_1}{\omega_c^2}$
Turbulente	$D_t = \frac{\langle \mathbf{E}_\perp^2 \rangle}{2B^2} \tau_c$

où τ_c est le temps de corrélation du champ électrique turbulent.

BIBLIOGRAPHIE

► Modèles cinétiques

- M. Bayet, *Physique Électronique des Gaz et des Solides*, Masson, Paris, France, 1958.
- B.E. Cherrington, *Gaseous Electronics and Gas Lasers*, Pergamon Press, Oxford, UK, 1980.
- J.L. Delcroix, *Physique des Plasmas*, Dunod, Paris, France, 1963.
- V.E. Golant A.P. Zhilinsky et I.E. Sakharov, *Fundamentals of Plasma Physics*, John Wiley & Sons, 1980.
- S. Ichimaru, *Basic Principles of Plasma Physics A Statistical Approach*, The Benjamin Cumming Publishing Compagny, USA, 1973.
- R. Jancel et Th. Kahan, *Électrodynamique des Plasmas fondée sur la Mécanique statistique*, Dunod, Paris, 1963.
- D.R. Nicholson, *Introduction to Plasma Theory*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1983.
- Y.P. Raizer, *Gas Discharge Physics*, Springer-Verlag, Berlin, RFA, 1997.
- A.G. Sitenko, *Electromagnetic Fluctuations in Plasma*, Academic Press, New York, USA, 1967.
- B.M. Smirnov, *Physics of Ionized Gases*, John Wiley & Sons, New York, USA, 2001.

► Problèmes statistiques et cinétiques

- B. Cheron, *Théorie Cinétique Gaz et Plasmas*, Ellipses, Paris, 2000.
- T.I. Gombosi, *Gaskinetic Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, USA, 1994.
- C.V. Heer, *Statistical Mechanics Kinetic Theory and Stochastic Processes*, Academic Press, New York, USA, 1972.
- E. Lifchitz et L. Pitayevski, *Cinétique Physique*, Éditions Mir, URSS, 1990.
- D.C. Montgomery et D.A. Tidman, *Plasma Kinetic Theory*; Mc Graw-Hill Company, USA, 1964.
- L.E. Reichl, *A Modern Course in Statistical Physics*, Edward Arnold, USA, 1980.

► Principales propriétés des polynômes de Legendre : relations de récurrences, équations différentielles, propriétés d'orthogonalités et de complétude, théorèmes d'addition et formes asymptotiques

- M. Abramowitz et I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New-York, USA, 1972.
- I.S. Gradshteyn et I.M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Product*, Academic Press, New York, USA, 1994.

Chapitre 10

Adiabaticité, résonances et chaos

À force de se renfermer dans l'application, on perdrait de vue les principes, et, quand on aurait entièrement oublié les principes, on suivrait mal les méthodes qui en dérivent ; on ne pourrait plus en inventer de nouvelles et l'on emploierait sans intelligence et sans art de savants procédés qu'on ne comprendrait plus.

De la démocratie en Amérique, A. de Tocqueville.

10.1 SYSTÈMES HAMILTONIENS

10.1.1 Équations de Hamilton

Un plasma est constitué par un ensemble de charges en interaction avec des champs électromagnétiques d'origine interne ou externe (Figure 2.1). Ces champs sont utilisés pour confiner, chauffer ou accélérer le plasma. L'outil de référence pour étudier l'interaction champs-particules est la mécanique hamiltonienne. En effet, cette description est particulièrement bien adaptée aux problèmes possédant plusieurs échelles de temps, lentes et rapides, tels que ceux rencontrés dans l'étude du confinement et du chauffage de plasmas.

La mécanique hamiltonienne est aussi un formalisme particulièrement bien adapté à la mise en oeuvre de méthodes de perturbations. Enfin, une description statistique d'un ensemble de particule doit toujours être abordée dans le cadre d'un formalisme hamiltonien.

Dans ce chapitre nous présenterons les variables de configuration d'une description lagrangienne ainsi que les variables canoniques associées à une description hamiltonienne ; puis, nous établirons les équations d'Euler-Lagrange auxquelles obéissent ces variables lagrangiennes de configuration. Ensuite, sur la base de ce formalisme lagrangien, nous définirons les variables hamiltoniennes et nous établirons les équations de Hamilton. Le développement des formalismes lagrangien et hamiltonien peut être mené, soit à partir du principe variationnel de moindre action, soit à partir des équations de Newton. C'est cette deuxième approche qui est utilisée ici ; les principes variationnels sont introduits ultérieurement.

Le formalisme newtonien constitue la formulation la plus répandue des lois de la mécanique. Ce formalisme s'articule autour du concept de force (et de couple) : l'accélération d'une particule est égale à la somme des forces appliquées divisée par sa masse. Ce formalisme vectoriel fut développé par Newton à la même époque que le formalisme énergétique introduit par Leibnitz qui identifia la *vis viva*, égal (à un facteur deux près) à l'énergie cinétique. Ces deux traditions, newtonienne et leibnitzienne, sont à l'origine des différentes formulations des lois de la mécanique.

Le formalisme newtonien, construit sur la base du concept de force, est particulièrement bien adapté au développement d'une intuition mécanique. Il est donc généralement utilisé pour introduire les bases de la dynamique. Les formalismes lagrangien et hamiltonien, issus de la tradition leibnitzienne, sont en général considérés comme des chapitres de mécanique avancée et permettent de traiter des problèmes complexes où le cadre newtonien est inadapté.

Une formulation lagrangienne est bien adaptée aux problèmes où certains degrés de liberté sont contraints, ainsi qu'aux systèmes possédant des symétries. La formulation hamiltonienne est, quant à elle, particulièrement bien adaptée à l'étude des mouvements possédant des échelles de temps rapides et lentes tels que les mouvements multiples périodiques. Ce formalisme permet aussi la construction d'une théorie de perturbations remarquablement efficace. L'étude de la transition vers le chaos dans les systèmes multiples périodiques nécessite aussi un formalisme hamiltonien et la description du régime chaotique des systèmes mécaniques conservatifs se formule aussi en termes de variables hamiltoniennes. Enfin, le formalisme hamiltonien permet de considérer la dynamique d'un système, soit comme un problème aux conditions initiales à l'aide des équations de Hamilton, soit comme un problème de type conditions aux limites à travers l'équation de Hamilton-Jacobi, renouvelant ainsi radicalement notre vision de la dynamique des systèmes de particules.

Afin de construire ces deux nouvelles méthodes, lagrangienne et hamiltonienne, considérons d'abord la description newtonienne de la dynamique d'une particule chargée, de charge e et de masse m , plongée dans un champ électrique $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ et un champ magnétique $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ où $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ et $\phi(\mathbf{r}, t)$ représentent le potentiel vecteur et le potentiel scalaire décrivant ces champs électrique et magnétique. La vitesse \mathbf{v} et la position \mathbf{r} de cette particule obéissent à un

système d'équations différentielles du premier ordre par rapport au temps et l'unicité de la solution est assurée par la donnée d'une position initiale et d'une vitesse initiale : vitesse et position doivent donc être considérées comme des variables indépendantes.

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{e}{m}\nabla\phi - \frac{e}{m}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \frac{e}{m}\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (10.1)$$

Les deux premiers termes du membre de droite décrivent la force de Coulomb, le dernier celle de Laplace ; la somme de ces deux termes électrique et magnétique porte le nom de force de Lorentz.

Ces équations sont non-linéaires, au sens où la superposition linéaire de deux solutions ne constitue pas une solution. La généralisation relativiste, au cas où la vitesse de la particule devient de l'ordre de grandeur de la vitesse de la lumière c , est obtenue en introduisant le paramètre $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ mesurant le rapport de l'énergie $\sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$ sur l'énergie au repos mc^2 , où $\mathbf{p} = m\mathbf{v}\gamma$. La relation entre vitesse et position n'est pas modifiée, la vitesse d'une particule reste définie comme la dérivée temporelle de sa position, mais la relation entre accélération et force est modifiée, la dérivée de $\gamma\mathbf{v}$ est égale au rapport de la force sur la masse. Il est aisé de vérifier que lorsque la vitesse est petite devant la vitesse de la lumière cette relation est équivalente à la relation newtonienne classique décrite par les équations (10.1).

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d(\gamma\mathbf{v})}{dt} = -\frac{e}{m}\nabla\phi - \frac{e}{m}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \frac{e}{m}\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (10.2)$$

La théorie des équations différentielles ordinaires, à travers les théorèmes d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles ordinaires, garantit l'existence d'une solution unique lorsque les conditions initiales de vitesse et position sont données.

Que ce soit en régime classique, ou en régime relativiste, comme nous l'avons rappelé dans l'introduction, la construction des formalismes lagrangien et hamiltonien n'est pas la conséquence d'une difficulté technique associée aux équations de Newton mais tire son origine de la vision énergétique de la mécanique développée par Leibnitz. Ces deux méthodes, lagrangienne et hamiltonienne, sont construites, non pas sur le concept de force, mais à partir des concepts d'énergie cinétique et d'énergie potentielle d'interaction. Dans le cadre de la mécanique lagrangienne, l'usage est d'introduire les coordonnées lagrangiennes généralisées \mathbf{q} et $\dot{\mathbf{q}}$ qui pour une particule unique se réduisent à la position et à la vitesse : $\mathbf{q} = \mathbf{r}$, $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}$. À basse vitesse, en présence d'un champ électrique et d'un champ magnétique dérivant respectivement d'un potentiel scalaire ϕ et d'un potentiel vecteur \mathbf{A} , le lagrangien classique L est alors défini par :

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \equiv \frac{m}{2} \dot{\mathbf{q}}^2 + e \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{q}, t) - e\phi(\mathbf{q}, t) \quad (10.3)$$

Le premier terme du membre de droite de cette définition représente l'énergie cinétique, le deuxième l'énergie d'interaction magnétique et le troisième l'énergie d'interaction électrique.

Le moment \mathbf{p} canoniquement conjugué à la coordonnée généralisée \mathbf{q} est défini comme la dérivée de L par rapport à la vitesse généralisée.

$$\mathbf{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = m \dot{\mathbf{q}} + e\mathbf{A}(\mathbf{q}, t) \quad (10.4)$$

La formule d'analyse vectorielle :

$$\nabla(\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}) = \mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{V}) + \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{U}) + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{U}$$

permet d'exprimer la dérivée du lagrangien par rapport aux coordonnées généralisées : $\partial L / \partial \mathbf{q} = e \dot{\mathbf{q}} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + e d\mathbf{A}/dt - e \partial \mathbf{A} / \partial t - e \nabla \phi$. Si nous comparons les deux expressions $\partial L / \partial \mathbf{q}$ et $\partial L / \partial \dot{\mathbf{q}} = m \dot{\mathbf{q}} + e\mathbf{A}$ nous remarquons que nous obtenons les équations de Newton avec les forces de Laplace et Coulomb en identifiant $d(\partial L / \partial \dot{\mathbf{q}}) / dt$ et $\partial L / \partial \mathbf{q}$. Cette identification constitue les équations d'Euler-Lagrange qui sont donc complètement équivalentes aux équations de Newton et déterminent la dynamique du système de façon unique pour un ensemble de conditions initiales données.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \quad (10.5)$$

La définition du moment généralisé canoniquement conjugué à la position constitue le point de départ d'une troisième formulation des lois de la mécanique, le formalisme hamiltonien. En mécanique hamiltonienne la dynamique d'une particule, et par extension d'un système de particules, est entièrement décrite par l'évolution temporelle des coordonnées généralisées $\mathbf{q}(t)$ et de leurs moments canoniquement conjugués $\mathbf{p}(t)$ en fonction du temps. Ces deux variables sont indépendantes et l'évolution dynamique engendre une orbite dans l'espace $[\mathbf{p}, \mathbf{q}]$ appelé **espace des phases**.

Le hamiltonien H est défini comme une fonction scalaire dans cet espace des phases.

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \equiv \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L \quad (10.6)$$

D'un point de vue technique, hamiltonien et lagrangien sont reliés par une transformation de Legendre. Le hamiltonien d'une particule chargée, en régime classique, est donc donné par :

$$H = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{q}}^2 + e\phi = \frac{[\mathbf{p} - e\mathbf{A}]^2}{2m} + e\phi \quad (10.7)$$

et en régime relativiste par :

$$H = mc^2\gamma + e\phi = mc^2\sqrt{1 + \left[\frac{\mathbf{p} - e\mathbf{A}}{mc}\right]^2} + e\phi$$

Afin d'établir le système d'équations dynamiques déterminant l'orbite d'un système dans l'espace des phases hamiltonien, considérons les variations infinitésimales du lagrangien et du hamiltonien.

$$dL = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot d\mathbf{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot d\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad dH = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \cdot d\mathbf{q} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \cdot d\mathbf{p} + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Compte tenu de la définition du moment conjugué et des équations de Lagrange cette variation infinitésimale peut s'exprimer comme :

$$dL = \dot{\mathbf{p}} \cdot d\mathbf{q} + \mathbf{p} \cdot d\dot{\mathbf{q}} + \partial L / \partial t dt.$$

L'identité :

$$\mathbf{p} \cdot d\dot{\mathbf{q}} = d(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}} \cdot d\mathbf{p}$$

permet alors d'exprimer une variation infinitésimale du hamiltonien.

$$dL - d(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}}) = -dH = \dot{\mathbf{p}} \cdot d\mathbf{q} - \dot{\mathbf{q}} \cdot d\mathbf{p} + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

L'identification terme à terme de cette dernière identité avec l'accroissement infinitésimal du hamiltonien en fonction des variables indépendantes \mathbf{p} et \mathbf{q} débouche sur la formulation des équations de Hamilton.

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \quad \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (10.8)$$

Les résultats précédents pourraient laisser croire que les formalismes lagrangien et hamiltonien ne sont que des changements de variables sans intérêt majeur pour la résolution et la compréhension des problèmes de mécanique. Ce n'est pas le cas, comme nous allons le voir dans la suite de ce chapitre : le formalisme hamiltonien permet d'opérer un changement de point de vue radical sur la formulation des problèmes de mécanique. Cette nouveauté radicale s'articule autour des concepts d'intégrale d'action et de principe variationnel, et permet de construire tout un ensemble de méthodes permettant de résoudre des problèmes complexes ou de mettre en place des schémas perturbatifs spécifiques et efficaces sans égal dans le cadre newtonien.

10.1.2 Intégrale d'action

Définissons l'action S associée à une trajectoire $[\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)]$ non nécessairement réalisée par la nature, c'est-à-dire ne satisfaisant pas nécessairement les équations de Lagrange (10.5).

$$S[\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)] \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) dt \quad (10.9)$$

Formulons ensuite le principe variationnel de Hamilton. Considérons pour cela l'ensemble des trajectoires $[\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)]$ issues d'un point de départ donné q_1 à un instant t_1 et aboutissant à un point d'arrivée donné q_2 à un instant t_2 (Figure 10.1). La nature ne réalise qu'une seule de ces trajectoires et l'ensemble des autres trajectoires peut être qualifié de virtuel.

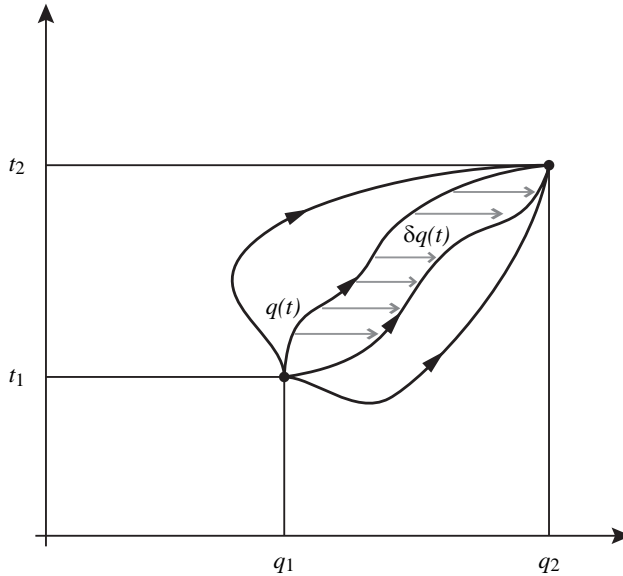


Figure 10.1 Famille de trajectoires virtuelles voisines.

Calculons la variation d'action δS associée à un changement de trajectoire décrit par les incréments infinitésimaux $\delta \mathbf{q}(t)$ et $\delta \dot{\mathbf{q}}(t)$ (Figure 10.1) par rapport à une trajectoire de référence ($\delta \dot{\mathbf{q}}(t) = d\delta \mathbf{q}(t)/dt$). Le caractère commun des points de départ et d'arrivée pour l'ensemble des trajectoires s'exprime par les contraintes : $\delta \mathbf{q}(t_1) = \delta \mathbf{q}(t_2) = 0$. La variation d'action entre deux trajectoires voisines est donnée par :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q} + \delta \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} + \delta \dot{\mathbf{q}}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt$$

et la variation infinitésimale de cette action est obtenue en considérant la limite $\delta \mathbf{q}(t) \rightarrow 0$ et $\delta \dot{\mathbf{q}}(t) \rightarrow 0$.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot \delta \mathbf{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \delta \dot{\mathbf{q}} \right) dt$$

Le théorème d'intégration par partie permet d'éliminer $\delta \dot{\mathbf{q}} = d\delta \mathbf{q}(t)/dt$ et d'exprimer la variation d'action comme une forme intégrale linéaire de la déformation de la trajectoire de référence $\delta \mathbf{q}(t)$.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \right] \cdot \delta \mathbf{q}(t) dt$$

Il apparaît alors clairement que si pour tout $\delta \mathbf{q}$ la variation de l'action est nulle au voisinage d'une trajectoire, $\delta S = 0$, c'est-à-dire si cette trajectoire réalise un optimum d'action par rapport aux trajectoires voisines, alors cette trajectoire satisfait aux équations de Lagrange et réciproquement.

Un calcul de la variation de l'action à l'ordre deux permettrait de démontrer que cet optimum est un minimum.

$$\delta S|_{\delta \mathbf{q}(t_1)=\delta \mathbf{q}(t_2)=0} = 0 \iff \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \quad (10.10)$$

Il est donc possible de reformuler les lois de la mécanique de la façon suivante : *la trajectoire suivie par une particule entre un point de départ donné à un instant donné et un point d'arrivée donné à un instant donné est celle qui rend l'intégrale d'action entre ces deux instants minimum.*

Nous venons de formuler le principe variationnel de Hamilton. Le formalisme lagrangien n'apparaît désormais plus comme un simple changement de variable, mais comme un changement radical de point de vue.

En effet, le problème du calcul de la trajectoire est formulé ici comme un problème aux conditions aux limites où le point de départ et le point d'arrivée sont fixés alors que, dans le cadre newtonien, le calcul des trajectoires est un problème de type conditions initiales où la position et la vitesse initiales sont données.

Une formulation en terme de conditions aux limites est, par exemple, particulièrement bien adaptée en optique électronique où les plans objets et les plans images sont des données de base du problème.

L'action peut aussi être utilisée pour formuler un principe variationnel équivalent aux équations de Hamilton. Exprimons l'action en fonction des variables hamiltoniennes

décrivant une orbite $[\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t)]$ non nécessairement réalisée par la nature, c'est-à-dire ne satisfaisant pas nécessairement les équations de Hamilton.

$$S[\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} [\mathbf{p}(t) \cdot \dot{\mathbf{q}}(t) - H(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t), t)] dt$$

Considérons un ensemble de trajectoires $[\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)]$ partant d'un point donné à un instant t_1 et se terminant en un point donné à un instant t_2 . Considérons l'ensemble des trajectoires voisines d'une trajectoire de référence et calculons la variation de l'action résultant des variations infinitésimales $\delta\mathbf{q}(t)$ et $\delta\mathbf{p}(t)$ (telles que $\delta\mathbf{q}(t_1) = \delta\mathbf{q}(t_2) = 0$) décrivant cette famille de trajectoires. La variation d'action associée à la déformation de la trajectoire de référence est donnée par :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\mathbf{p} \cdot \delta \dot{\mathbf{q}} + \delta \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{p} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \cdot \delta \mathbf{q} \right) dt$$

Le théorème d'intégration par partie permet d'exprimer la variation de l'intégrand en fonction de $\delta\mathbf{q}(t)$ et $\delta\mathbf{p}(t)$:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(-\dot{\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{q} + \dot{\mathbf{q}} \cdot \delta \mathbf{p} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{p} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \cdot \delta \mathbf{q} \right) dt$$

La trajectoire de référence est alors solution des équations de Hamilton (10.8) si l'action est extremum. L'étude de la variation du deuxième ordre montrerait que cet extremum est un minimum.

$$\delta S|_{\delta\mathbf{q}(t_1)=\delta\mathbf{q}(t_2)=0} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \quad \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}$$

L'action, que nous venons de définir et d'utiliser ici pour établir l'équivalence entre les équations de Lagrange et Hamilton et le principe variationnel de Hamilton, est considérée comme une fonctionnelle, c'est-à-dire un procédé faisant correspondre à une fonction un nombre : $[\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)]$ ou $[\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t)] \rightarrow S$. L'action peut aussi être considérée comme une fonction.

Dans ce cas, elle est calculée uniquement sur les trajectoires vérifiant les équations de Lagrange ou Hamilton et doit alors être considérée comme une fonction du point de départ \mathbf{q}_0 et du point d'arrivée \mathbf{q} .

L'action est alors dénommée action de Jacobi ou fonction principale de Hamilton.

$$S(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0, t) = \int_0^t L(\mathbf{q}(u), \dot{\mathbf{q}}(u), u) \Big|_{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}} du \quad (10.11)$$

La fonction principale de Hamilton ainsi définie permet de formuler et de résoudre les problèmes de dynamique d'une manière totalement originale.

Considérons l'action comme une fonction des points de départ et d'arrivée (\mathbf{q}_0, \mathbf{q}) et calculons sa variation lorsque ces points de départ et d'arrivée pour une trajectoire de référence (vérifiant les équations de Lagrange ou Hamilton) sont déplacés d'une quantité infinitésimale ($\delta\mathbf{q}_0, \delta\mathbf{q}$). Pour effectuer ce calcul considérons une variation continue de cette trajectoire de référence :

$$\left[\mathbf{q}(u), \dot{\mathbf{q}}(u) \right] \rightarrow \left[\mathbf{q}(u) + \delta\mathbf{q}(u), \dot{\mathbf{q}}(u) + \delta \dot{\mathbf{q}}(u) \right]$$

telle que $\dot{\delta\mathbf{q}}(u) = d\delta\mathbf{q}(u)/dt$.

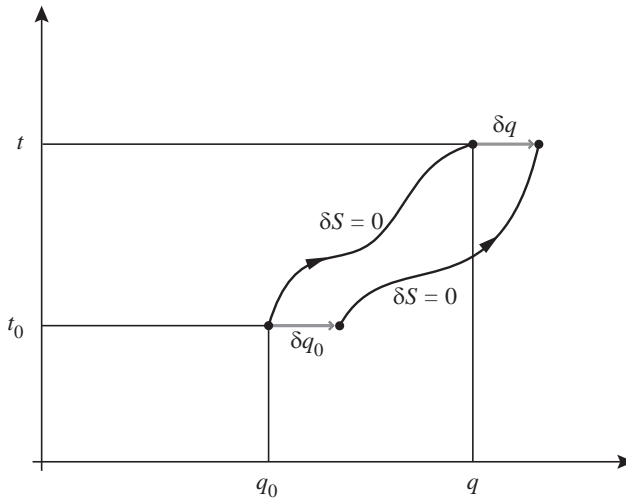


Figure 10.2 Trajectoires réelles voisines.

Contrairement au cas précédent cette déformation de la trajectoire n'est pas soumise à la contrainte $\delta\mathbf{q}(t) = \delta\mathbf{q}(0) = 0$, par contre

$$\left[\mathbf{q}(u), \dot{\mathbf{q}}(u) \right] \quad \text{et} \quad \left[\mathbf{q}(u) + \delta\mathbf{q}(u), \dot{\mathbf{q}}(u) + \delta \dot{\mathbf{q}}(u) \right]$$

sont ici solutions des équations d'Euler-Lagrange (Figure 10.2). L'expression de la variation au premier ordre de l'action est donc donnée par :

$$\delta S = \int_0^t \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot \delta\mathbf{q}(u) - \frac{d}{du} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \cdot \delta\mathbf{q}(u) \right] du + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \delta\mathbf{q}(u) \Big|_0^t$$

Le premier terme du membre de gauche de cette identité est nul car la trajectoire de référence considérée est réalisée par la nature et vérifie les équations d'Euler-Lagrange. La variation de l'action, considérée comme fonction du point de départ et du point d'arrivée et calculée suivant les trajectoires vérifiant les équations de Lagrange, a donc pour expression : $\delta S = \mathbf{p} \cdot \delta\mathbf{q} - \mathbf{p}_0 \cdot \delta\mathbf{q}_0$. Les moments initiaux et

finaux sont donc les dérivées de l'action par rapport aux positions initiale et finale.

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0, t)}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{p}_0 = -\frac{\partial S(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0, t)}{\partial \mathbf{q}_0} \quad (10.12)$$

Ces deux identités constituent une solution des équations de Hamilton. En effet, la relation $\mathbf{p}_0 = -\partial S(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0, t)/\partial \mathbf{q}_0$ permet d'exprimer la position $\mathbf{q}(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, t)$ en fonction du temps t et des conditions initiales \mathbf{q}_0 et \mathbf{p}_0 ; ensuite, la relation $\mathbf{p} = \partial S(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0, t)/\partial \mathbf{q}$ permet d'exprimer $\mathbf{p}(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, t)$. La trajectoire du système dans l'espace des phases est ainsi déterminée. Cette solution doit cependant être considérée comme formelle, car $\mathbf{p}_0 = -\partial S(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0, t)/\partial \mathbf{q}_0$ ne constituent pas en général un système d'équations algébriques d'inconnues \mathbf{q} possédant des solutions analytiques et la fonction $S(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0, t)$ calculée suivant la trajectoire naturelle ne peut être exprimée que si le problème est intégrable par quadrature. Le raisonnement qui vient d'être développé suppose que la donnée de base de notre problème est le hamiltonien. Ce n'est pas toujours le cas; par exemple, en optique électronique et photonique la donnée de base est $S(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0, t)$ l'eikonal des opticiens et l'ensemble des relations démontrées précédemment devient alors opérationnel. En particulier, la théorie des aberrations dans les systèmes paraxiaux est aisément développée en considérant S comme un polynôme dont les ordres élevés constituent la source des aberrations d'ordre supérieur.

Afin d'établir l'équivalence entre la donnée de la fonction principale de Hamilton S et le hamiltonien H , exprimons ce dernier en fonction de S . D'une part, compte tenu de la définition de l'action, sa dérivée temporelle n'est autre que le lagrangien.

$$S = \int_0^t L du \rightarrow \frac{dS}{dt} = L$$

D'autre part, la dérivée de la fonction principale de Hamilton par rapport au temps est donnée par :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} \rightarrow \frac{\partial S}{\partial t} = L - \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} = -H$$

La dérivée partielle de la fonction principale de Hamilton par rapport au temps est donc égale à l'opposé du hamiltonien. L'expression finale de la variation infinitésimale de la fonction principale de Hamilton $S(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0, t)$ s'établit donc comme suit :

$$dS = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - \mathbf{p}_0 \cdot d\mathbf{q}_0 - H dt \quad (10.13)$$

L'action de Jacobi ou fonction principale de Hamilton contient toute l'information sur un système dynamique. Ses transformées de Legendre constituent aussi des fonctions permettant de poser un problème de dynamique sans perte d'information par rapport à la fonction originale. Parmi ces différentes transformées de Legendre il est d'usage de définir l'action de Maupertuis ou fonction caractéristique de Hamilton comme la transformée de Legendre par rapport au temps de la fonction principale de

Hamilton $W(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0, E)$:

$$W = S + Et \rightarrow dW = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - \mathbf{p}_0 \cdot d\mathbf{q}_0 + t dE \quad (10.14)$$

Les formulations hamiltoniennes de l'optique électronique et de l'optique photonique sont construites sur la base de cette fonction caractéristique de Hamilton.

Que ce soient la fonction principale $S(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0, t)$ ou la fonction caractéristique $W(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0, E)$ il semble en première analyse que leurs expressions en fonction des positions initiale et finale nécessitent la connaissance de la trajectoire, c'est-à-dire la solution des équations de Hamilton. En fait ces deux fonctions peuvent être exprimées comme solutions des équations dites de Hamilton-Jacobi sans qu'il soit nécessaire de résoudre les équations de Hamilton et de calculer l'intégrale d'action le long d'une trajectoire naturelle. Nous avons établi précédemment les deux identités permettant d'exprimer le moment et l'énergie en fonction de l'action : $\mathbf{p} = \partial S / \partial \mathbf{q}$ et $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = -\partial S / \partial t$, S vérifie donc l'équation aux dérivées partielles obtenue en éliminant \mathbf{p} , cette équation est appelée équation de Hamilton-Jacobi. La fonction caractéristique de Hamilton $W(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0, E)$ est aussi solution d'une équation également appelée par extension équation de Hamilton-Jacobi :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{q}, t\right) = 0, \quad H\left(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{q}\right) = E \quad (10.15)$$

Ces deux équations de Hamilton-Jacobi permettent donc de construire une nouvelle formulation de la mécanique. L'usage est de considérer le lagrangien et le hamiltonien et de résoudre les équations différentielles ordinaires sur les positions et moments dans le cadre d'un problème aux conditions initiales. Les développements précédents permettent de considérer une stratégie alternative : la donnée du hamiltonien permet d'établir l'équation de Hamilton-Jacobi. Cette équation aux dérivées partielles est résolue comme un problème aux conditions aux limites.

$$\begin{array}{ll} \text{Lagrangien :} & L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \\ \text{Hamiltonien :} & H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \rightarrow \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \quad \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\ \text{Action de Jacobi :} & S(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0, t) \rightarrow \mathbf{p} = \frac{\partial S(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0, t)}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{p}_0 = -\frac{\partial S(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0, t)}{\partial \mathbf{q}_0} \end{array}$$

L'expression de S ainsi obtenue permet ensuite d'exprimer les positions et moments en fonction des conditions initiales. Cette dernière étape suppose la résolution d'un système d'équations algébriques sans garantie de succès. Le tableau ci-dessus résume les différentes formulations possibles d'un problème de dynamique d'un système de particules chargées.

10.1.3 Invariants de Poincaré

Que ce soit sur la base des équations de Hamilton, ou sur la base de l'équation de Hamilton-Jacobi, l'objectif est toujours d'exprimer les trajectoires dans l'espace des phases en fonction du temps. Mais, un autre point de vue peut être considéré pour résoudre un problème de dynamique : $\mathbf{p}(t)$ et $\mathbf{q}(t)$ sont des fonctions inconnues du temps mais il existe peut-être des combinaisons de ces fonctions telles que les variations temporelles soient combinées de façon à se compenser mutuellement. Ainsi, il est peut-être possible de construire des invariants du mouvement. La mécanique hamiltonienne est bien adaptée pour mettre en œuvre une stratégie particulièrement efficace de recherche d'invariants grâce aux transformations canoniques générant les variables d'actions pour les systèmes intégrables.

Avant d'étudier les invariants associés à un système, considérons les invariants associés à un ensemble de systèmes. Pour un système possédant N degrés de liberté, Poincaré a démontré l'existence de N invariants de ce type. Parmi ces N invariants, les plus utiles sont le premier invariant de Poincaré : l'invariant de Helmholtz-Poincaré, et le dernier invariant de Poincaré : l'invariant de Liouville-Poincaré. L'évolution inertielle d'un ensemble de systèmes à un degré de liberté offre une illustration de ces invariants.

Considérons dans l'espace des phases $[p, q]$ d'un système à un degré de liberté, à un instant donné, un élément de volume $\int \int dpdq \Big|_0$ ainsi que la circulation le long d'une courbe fermée $\oint pdq \Big|_0$, le volume d'espace des phases et le circuit étant initialement un rectangle.

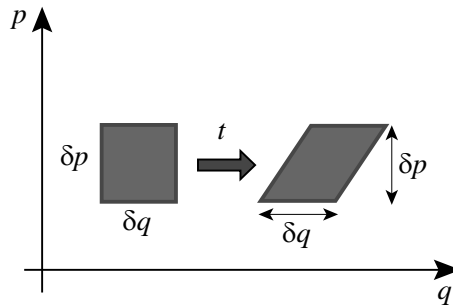


Figure 10.3 Évolution inertielle d'un volume et d'un circuit dans l'espace des phases.

La figure 10.3 illustre l'évolution de cet élément de volume et de ce circuit rectangulaire élémentaire, la surface et la circulation restent invariantes au cours du temps car $q \sim pt$.

$$\int \int dpdq \Big|_0 = \delta p \delta q = \int \int dpdq \Big|_t, \quad \oint pdq \Big|_0 = \delta p \delta q = \oint pdq \Big|_t$$

Considérons maintenant un système possédant N degrés de liberté et un élément de volume décrivant, à un instant donné, un ensemble (continu) de systèmes dans l'espace des phases. Calculons l'évolution temporelle de cet élément de volume. Après une durée infinitésimale δt les positions et les impulsions ont évolué conformément aux équations de Hamilton.

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_0 + \delta t \left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right|_0 + O(\delta t^2), \quad \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0 - \delta t \left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right|_0 + O(\delta t^2)$$

Le rapport du volume final sur le volume initial est donné par le déterminant jacobien associé aux fonctions $[\mathbf{q}_1(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0), \mathbf{p}_1(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)]$. Le rapport des volumes après un instant δt est donc du deuxième ordre en δt .

$$\left| \frac{\partial(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)}{\partial(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)} \right| = \left| \text{Det} \begin{pmatrix} 1 + \delta t \left. \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p} \partial \mathbf{q}} \right|_0 & -\delta t \left. \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{q}^2} \right|_0 \\ \delta t \left. \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p}^2} \right|_0 & 1 - \delta t \left. \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p} \partial \mathbf{q}} \right|_0 \end{pmatrix} \right| = 1 + O(\delta t^2)$$

Considérons maintenant l'évolution de cet ensemble de systèmes sur une durée finie t et découpons cet intervalle de temps en M courts instants $\delta t = \frac{t}{M} \Big|_{M \rightarrow +\infty}$. Le rapport du volume initial au volume final est donné par le déterminant du produit des matrices jacobiennes décrivant chaque évolution infinitésimale.

$$\frac{\partial[\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t)]}{\partial[\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0]} = \left[1 + O\left(\frac{t}{M}\right)^2 \right]^M \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 1$$

Ce résultat est parfois formulé de façon concise et imagée ainsi : *l'écoulement hamiltonien dans l'espace des phases est incompressible*.

$$\text{Invariant de Liouville-Poincaré : } \frac{d}{dt} \left[\int d\mathbf{p} d\mathbf{q} \right] = 0 \quad (10.16)$$

Cette propriété est très importante car elle conditionne l'évolution des systèmes hamiltoniens de manière restrictive. En particulier, les systèmes hamiltoniens non-linéaires évoluent en créant des harmoniques d'ordres élevés par couplages non-linéaires. Ces harmoniques d'ordres élevés sont la source de structures à petite échelle dans l'espace des phases (Figure 10.4); la compatibilité entre cette génération de structures à petites échelles et l'incompressibilité implique une filamentation dans l'espace des phases. La fragilité structurelle de cette filamentation constitue l'une des origines du régime chaotique qui sera étudié dans le dernier paragraphe.

Cette invariance du volume d'espace des phases occupé par un ensemble de systèmes se traduit par un bilan gain-perte entre le sous-espace des configurations \mathbf{q} et le sous-espace des impulsions \mathbf{p} : ce qui est *perdu* par l'un est nécessairement *gagné* par l'autre. Ainsi, lors d'une transformation adiabatique pour un gaz parfait

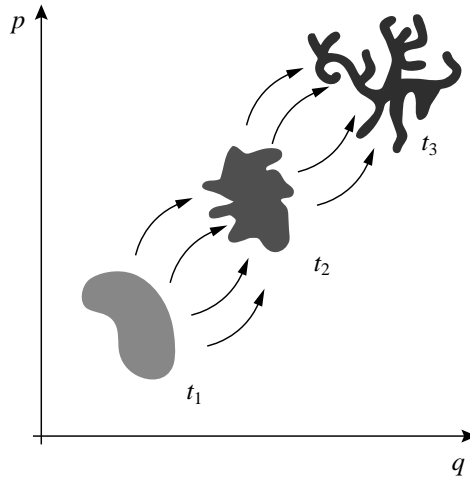


Figure 10.4 Évolution d'un volume dans l'espace des phases.

composé de N particules, de densité initiale n_0 et de densité finale n , l'invariance de $d\mathbf{p}d\mathbf{q} = mNdv/n$ (v est la vitesse et m la masse) permet d'établir la relation densité-température de la transformation (2.33). Le tableau (10.1) présente cette relation pour les gaz mono, bi, et tri-dimensionnels, T_0 et T sont respectivement les températures initiale et finale du gaz.

Tableau 10.1

Dimension	$d\mathbf{p}_0d\mathbf{q}_0=d\mathbf{p}d\mathbf{q}$	$d\mathbf{q}_0 \int d\mathbf{p}_0=d\mathbf{q} \int d\mathbf{p}$	$\langle v^n \rangle \sim T^{\frac{n}{2}} \rightarrow$ Adiabatique
1	$\frac{dv_0}{n_0} = \frac{dv}{n}$	$\frac{v_0}{n_0} = \frac{v}{n}$	$\frac{T_0^{\frac{1}{2}}}{n_0} = \frac{T^{\frac{1}{2}}}{n}$
2	$\frac{2\pi v_0 dv_0}{n_0} = \frac{2\pi v dv}{n}$	$\frac{v_0^2}{n_0} = \frac{v^2}{n}$	$\frac{T_0}{n_0} = \frac{T}{n}$
3	$\frac{4\pi v_0^2 dv_0}{n_0} = \frac{4\pi v^2 dv}{n}$	$\frac{v_0^3}{n_0} = \frac{v^3}{n}$	$\frac{T_0^{\frac{3}{2}}}{n_0} = \frac{T^{\frac{3}{2}}}{n}$

Considérons maintenant un ensemble de systèmes distribués, non pas dans un volume d'espace des phases, mais, le long d'une courbe fermée dans cet espace des phases (Figure 10.5).

Définissons la circulation le long de cette courbe $\oint \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q}$. Cette circulation est invariante au cours du temps lorsque la courbe est entraînée par l'écoulement hamiltonien, c'est-à-dire lorsque les positions et impulsions évoluent conformément aux

équations de Hamilton.

$$\text{Invariant de Helmholtz-Poincaré : } \frac{d}{dt} \left[\oint \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} \right] = 0 \quad (10.17)$$

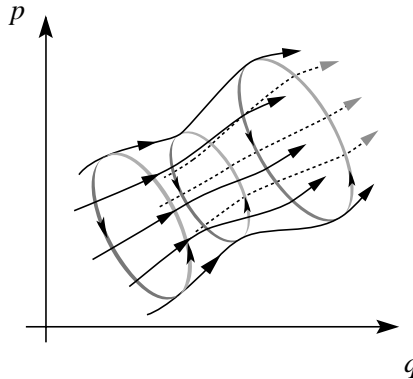


Figure 10.5 Évolution d'un circuit dans l'espace des phases.

La démonstration de l'existence de cet invariant de Poincaré-Helmholtz est facilitée par l'utilisation de la fonction caractéristique de Hamilton W dans le cas d'un hamiltonien indépendant du temps. Lorsque la position initiale et la position finale d'une trajectoire varient de façon infinitésimale la variation de W s'écrit :

$$dW|_E = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - \mathbf{p}_0 \cdot d\mathbf{q}_0.$$

La variation de W entre un point initial et un point final identique le long d'une courbe est nulle. L'intégrale curviligne suivant une courbe fermée est donc aussi nulle : $\oint dW|_E = 0$ et l'invariant de Poincaré-Helmholtz est indépendant du temps :

$$\oint \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - \oint \mathbf{p}_0 \cdot d\mathbf{q}_0 = 0.$$

Jusqu'à présent, nous avons établi un certain nombre de résultats formels sur l'action, les fonctions principale et caractéristique ainsi que sur les invariants de Poincaré. Mais nous n'avons pas réellement présenté des méthodes et des résultats qui permettent d'attribuer au formalisme hamiltonien des vertus supérieures aux formalismes lagrangien et newtonien. Le chapitre suivant est consacré aux transformations canoniques qui constituent l'outil principal de résolution des problèmes de dynamique formulés dans un cadre hamiltonien. Nous allons voir que ce concept de transformation canonique est spécifique à la mécanique hamiltonienne et lui confère une puissance opérationnelle supérieure aux formulations newtonienne et lagrangienne.

10.2 INTÉGRABILITÉ

10.2.1 Transformations canoniques

On appelle transformation canonique tout changement de variables dans la description de l'espace des phases : $[\mathbf{p}, \mathbf{q}] \rightarrow [\mathbf{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q})]$ préservant la structure hamiltonienne de la dynamique ; c'est-à-dire, tel qu'il existe pour ces nouvelles variables de position \mathbf{Q} et moment \mathbf{P} un hamiltonien $K(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$. L'évolution dynamique des nouvelles variables $[\mathbf{P}, \mathbf{Q}]$ étant donnée par les équations de Hamilton par rapport à ce nouveau hamiltonien.

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial \mathbf{Q}}, \quad \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{P}}$$

On notera que les transformations canoniques sont beaucoup plus générales que les transformations ponctuelles dans l'espace des positions, $[\mathbf{q}] \rightarrow [\mathbf{Q}(\mathbf{q})]$, puisqu'elles considèrent sur un pied d'égalité position et moment. La définition des transformations canoniques ainsi énoncée peut paraître formelle et dénuée de vertu pratique. Il n'en est rien, car un procédé de construction systématique de transformations canoniques : **les fonctions génératrices**, permet de faciliter leur recherche.

Considérons un système hamiltonien dont l'espace des phases est décrit par les moments et positions $[\mathbf{p}, \mathbf{q}]$ et la dynamique par le hamiltonien $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$. Nous souhaitons décrire l'espace des phases par de nouvelles variables canoniques $[\mathbf{P}, \mathbf{Q}]$ associées à un nouveau hamiltonien $K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$. L'évolution dynamique de ce système hamiltonien peut être formulée de différentes manières, en particulier à travers le principe variationnel de Hamilton. En effet, les nouvelles variables $[\mathbf{P}, \mathbf{Q}]$ décrivent cette évolution dynamique sur la base des équations de Hamilton associées au hamiltonien K et la trajectoire $\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t)$, vérifiant le principe de Hamilton avec H , doit être identique à la trajectoire $\mathbf{P}(t), \mathbf{Q}(t)$ vérifiant le principe de Hamilton avec K .

$$\delta \left[\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt \right] \Big|_{\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t)} = 0 \rightarrow \delta \left[\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - K dt \right] \Big|_{\mathbf{P}(t), \mathbf{Q}(t)} = 0$$

Une condition suffisante pour que ces deux principes d'extremum soient satisfaits simultanément (le long de la trajectoire suivie par la particule) est obtenue en considérant que la différence entre les deux intégrands est la différentielle d'une fonction $F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$. Introduisons donc une fonction $F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$; l'égalité des variations des intégrales d'action est donc garantie si :

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dt = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) dt + dF_1 \quad (10.18)$$

$F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$ est appelée fonction génératrice de première espèce et sa variation est donnée par :

$$dF_1 = \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{q}} \cdot d\mathbf{q} + \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{Q}} \cdot d\mathbf{Q} + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt \quad (10.19)$$

L'identité précédente (10.18) comparée à l'expression d'une variation infinitésimale (10.19) de la fonction $F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$ conduit à l'expression des anciens et nouveaux moments en fonction des dérivées partielles de cette fonction génératrice de première espèce ainsi qu'à l'identification du nouvel hamiltonien K .

$$\mathbf{p} = \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{P} = -\frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{Q}}, \quad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

Toute fonction du type $F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$ permet donc de générer une transformation canonique, mais les trois équations précédentes expriment cette transformation sous forme implicite. Un travail algébrique de substitution et d'élimination est encore nécessaire afin d'établir la forme explicite de la transformation canonique.

$$[\mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t), \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)] \rightarrow [\mathbf{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t), \mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)]$$

Il est possible de définir quatre types de fonctions génératrices de transformation canonique à l'aide de transformations de Legendre successives. Considérons à cet effet une fonction génératrice de deuxième espèce : $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$ définie à partir d'une fonction génératrice de première espèce $F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$:

$$F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) + \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} \quad (10.20)$$

D'une part, à partir de cette définition et des résultats précédents, l'accroissement infinitésimal de cette fonction peut être exprimée comme :

$$dF_2 = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} + (K - H) dt + \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} + \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{P}$$

D'autre part, cette variation infinitésimale est fonction des incréments des variables indépendantes et des dérivées partielles de F_2 .

$$dF_2 = \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{q}} \cdot d\mathbf{q} + \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{P}} \cdot d\mathbf{P} + \frac{\partial F_2}{\partial t} dt$$

Finalement, l'identification, terme à terme, de ces deux expressions permet d'établir les relations :

$$\mathbf{p} = \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{Q} = \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{P}}, \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

Ce résultat est de même nature que celui concernant les fonctions génératrices de première espèce ; ici aussi le changement de variable entre les anciens moments et positions et les nouveaux moments et positions est exprimé de façon implicite et un travail algébrique supplémentaire est nécessaire pour obtenir une expression explicite de la transformation canonique générée par F_2 .

$$[\mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t), \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)] \rightarrow [\mathbf{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t), \mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)]$$

Les fonctions génératrices de troisième espèce et de quatrième espèce :

$$F_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t) = F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}, \quad F_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t) = F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$$

sont définies de façon semblable et l'ensemble des relations permettant de générer une transformation canonique à partir des fonctions génératrices est résumé dans le tableau (10.2).

Tableau 10.2

	q	p	Q	P
$F_1(q, Q)$		$\frac{\partial F_1}{\partial q}$		$-\frac{\partial F_1}{\partial Q}$
$F_2(q, P)$		$\frac{\partial F_2}{\partial q}$	$\frac{\partial F_2}{\partial P}$	
$F_3(p, Q)$	$-\frac{\partial F_3}{\partial p}$			$-\frac{\partial F_3}{\partial Q}$
$F_4(p, P)$	$-\frac{\partial F_4}{\partial p}$		$\frac{\partial F_4}{\partial P}$	

Dans le cadre du formalisme hamiltonien, les fonctions génératrices ont à la fois un rôle formel en permettant d'établir un certain nombre de résultats généraux, et un rôle opérationnel en permettant de générer les variables angles-actions des mouvements multiples périodiques. Elles permettent ainsi de construire les théories perturbatives en régime adiabatique et les descriptions statistiques en régime chaotique. D'un point de vue pratique, nous verrons dans le chapitre consacré à l'interaction champ-particule que les fonctions génératrices constituent un outil indispensable pour l'étude du mouvement des particules chargées, que ce soit en régime adiabatique, en régime résonnant ou en régime chaotique.

10.2.2 Variables angles et actions

Posons maintenant le problème suivant : existe-t-il une fonction génératrice de première espèce générant un nouveau système de variables canoniques : $[\mathbf{P}, \mathbf{Q}]$, $[\mathbf{p}, \mathbf{q}] \rightarrow [\mathbf{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q})]$ telles que ces nouvelles variables restent constantes au cours du mouvement ? Ces constantes du mouvement étant par exemple les conditions initiales de l'orbite.

$$\begin{aligned} \mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t) &\rightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{q}_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \\ \mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t) &\rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{p}_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \end{aligned}$$

Le hamiltonien K associé à ces nouvelles variables canoniques est donc indépendant de \mathbf{P} et \mathbf{Q} , c'est une constante pouvant être prise égale à zéro sans restreindre la généralité du problème.

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{P}} = \mathbf{0}, \quad \frac{d\mathbf{P}}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial \mathbf{Q}} = \mathbf{0}$$

Soit $F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$ la fonction génératrice de cette transformation canonique, l'ancien moment et le nouveau hamiltonien sont donnés par les identités établies au paragraphe précédent.

$$\mathbf{p} = \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{q}}, \quad K = 0 = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

$F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$ vérifie donc l'équation de Hamilton-Jacobi :

$$H(\partial F_1 / \partial \mathbf{q}, \mathbf{q}, t) + \partial F_1 / \partial t = 0 ;$$

or la fonction principale de Hamilton $S(\mathbf{q}, \mathbf{Q}_0, t)$ est solution de cette équation. La fonction génératrice solution du problème est donc la fonction principale de Hamilton.

$$F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) = S(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) \quad (10.22)$$

Cette fonction existe mais est inconnue car sa connaissance suppose la connaissance de l'action de Jacobi, c'est-à-dire des orbites du mouvement dans l'espace des phases, ou l'intégration de l'équation de Hamilton-Jacobi.

En fait, à vouloir construire autant d'invariants que de variables on perd toute l'information pertinente sur la dynamique du système. En effet, un mouvement est toujours la superposition de plusieurs types d'évolutions, rotations, translations, oscillations... Chacune de ces composantes étant caractérisée par une échelle de temps, il est alors particulièrement instructif de comparer ces différentes échelles de temps et d'identifier les composantes lentes et les composantes rapides du mouvement. En ce sens, la transformation canonique qui vient d'être étudiée ne constitue pas une transformation adaptée à l'étude de la dynamique des mouvements présentant plusieurs échelles de temps. Pour l'étude de tels systèmes considérons un système de variables canoniques, dit système angles-actions, tel que les nouveaux moments, les actions \mathbf{J} , restent constants au cours du mouvement et les nouvelles positions, les angles θ , varient linéairement en fonction du temps.

$$[\mathbf{p}, \mathbf{q}] \rightarrow [\mathbf{J}(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \theta(\mathbf{p}, \mathbf{q})] \rightarrow \mathbf{J}(t) = \mathbf{J}_0, \theta(t) = \omega(\mathbf{J}_0)t + \theta_0$$

Les pulsations $\omega(\mathbf{J})$ sont appelées les pulsations (ou fréquences) propres du système. Le hamiltonien H associé à ce système de variables canoniques est donc nécessairement indépendant des angles θ et les pulsations permettent d'identifier les composantes rapides du système.

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = -\frac{\partial H(\mathbf{J})}{\partial \theta} = \mathbf{0}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H(\mathbf{J})}{\partial \mathbf{J}} = \omega(\mathbf{J}) \quad (10.23)$$

Lorsqu'il est possible de construire les variables angles-actions dans tout l'espace des phases, le système est dit intégrable au sens de Poincaré.

Cette définition, en apparence analytique et suggérant que le système angles-actions opère une simple rectification des orbites (Figure 10.6), est en fait topologique.

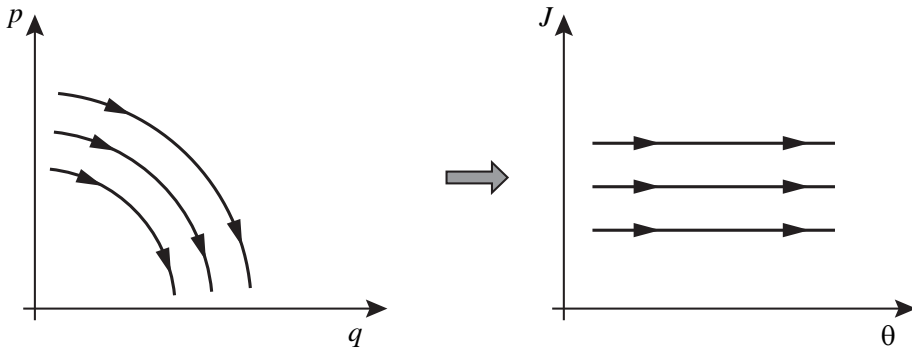


Figure 10.6 Rectification des orbites à travers la description angles-actions.

En fait, la définition primaire de l'*intégrabilité* au sens de Poincaré décrit une propriété plus faible que l'existence des angles-actions : l'existence de N **constantes du mouvement indépendantes** en involution. Cette dernière propriété est associée à la structure symplectique de l'espace des phases et sa définition n'est pas indispensable pour la pratique des théories perturbatives dont la maîtrise constitue l'objectif de ce chapitre. Partant de cet énoncé, le théorème de Liouville-Arnold permet alors d'établir que cette définition primaire est équivalente à l'existence d'un système angles-actions et précise que ce jeu de variables angles-actions permet de structurer l'espace des phases en tores de dimension N , repérés par les actions, et que chaque orbite dans l'espace des phases est tangente en tout point à l'un de ces tores appelés tores de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM). Un système intégrable au sens de Poincaré est donc un système dont l'espace des phases est structuré en tores de KAM emboîtés (Figure 10.7), tel que les orbites soient tangentes en tout point à ces tores. Les variables angles sont alors les variables naturelles permettant de paramétrer un point sur un tore donné, ce tore étant identifié par les actions.

L'intégrabilité au sens de Poincaré est donc bien une propriété topologique associée à la structure de l'ensemble des orbites dans l'espace des phases.

Il est aussi possible d'adopter un point de vue purement topologique et de définir un système intégrable comme un système dont les trajectoires dans l'espace des phases sont ordonnées en tores emboîtés de dimension N . Partant de cette définition topologique de l'intégrabilité, définissons sur un tore de dimension N , N coordonnées angulaires prenant leur valeurs entre 0 et 2π pour repérer un point sur ce tore de dimension N ; introduisons N courbes ou contours indépendants C_i sur chaque tore, ces contours ne pouvant pas être réduits à un point ou continûment déformés pour se

superposer. Ces N courbes correspondent aux N contours indépendants permettant d'enlacer un tore de dimension N . Introduisons les N actions J_i :

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_i} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} \quad (10.24)$$

Ces nombres sont des invariants : en effet, la structuration de l'ensemble des orbites en tores induit une évolution dynamique des courbes dans la même classe topologique de contour et l'invariant de Poincaré-Helmholtz assure l'invariance de l'intégrale ainsi définie.

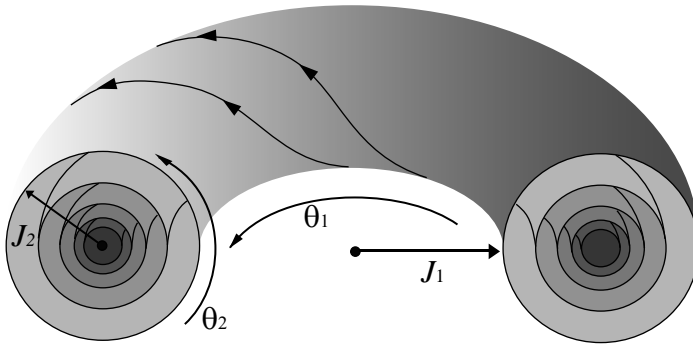


Figure 10.7 Tores de KAM dans l'espace des phases pour un système à deux degrés de liberté.

Nous disposons donc de N nombres indépendants permettant d'étiqueter chaque tore et sur chacun de ces tores les coordonnées angulaires peuvent être choisies pour être canoniquement conjuguées aux actions.

Les variables angles-actions permettent de construire **un double ordering des échelles de temps** caractéristiques du mouvement :

- les actions sont des constantes du mouvement et les angles tournent linéairement en fonction du temps : *les actions sont donc des variables lentes et les angles des variables rapides*,
- sauf cas singulier, il existe aussi un ordering supplémentaire entre les vitesses de rotation des angles : $\omega(\mathbf{J}) = \partial H_0 / \partial \mathbf{J} \rightarrow \omega_1(\mathbf{J}) \geq \omega_2(\mathbf{J}) \geq \omega_3(\mathbf{J})$ qui autorise à définir *des angles rapides et des angles lents*. Ce deuxième ordering suppose que le système n'est pas dégénéré, c'est-à-dire que $\omega_1 \neq \omega_2 \neq \omega_3$.

Cette analyse des échelles de temps est essentielle pour construire des méthodes perturbatives, car il est nécessaire de comparer les échelles caractéristiques de la perturbation et du mouvement non perturbé ; les formalismes newtonien et lagrangien ne permettent pas une telle analyse et sont donc peu adaptés à la construction de méthodes perturbatives efficaces.

L'oscillateur harmonique (ou linéaire) est le système intégrable le plus simple et l'un des plus utilisés pour la modélisation des systèmes dynamiques physiques. Le

hamiltonien est simplement une forme quadratique prenant en compte la somme de l'énergie cinétique associée à l'inertie et de l'énergie potentielle associée à une force de rappel.

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2} + \omega^2 \frac{q^2}{2} \quad (10.25)$$

La solution des équations de Hamilton décrit des oscillations de position et de moment en quadrature de phase, le portrait de phase est donc un ensemble d'ellipses concentriques centrées en $p = q = 0$ (Figure 10.8). L'amplitude de ces oscillations est un invariant permettant de construire l'action. La description du mouvement en terme d'angle et d'action est obtenue à l'aide de la fonction génératrice de première espèce :

$$F_1(q, \theta) = \frac{\omega}{2} q^2 \cot \theta$$

Les règles de génération $p = \partial F_1 / \partial q$ et $J = -\partial F_1 / \partial \theta$ sont utilisées pour exprimer les anciennes variables canoniques en fonction de l'angle et de l'action, et l'angle et l'action en fonction des anciennes variables canoniques.

$$q = \sqrt{\frac{2J}{\omega}} \sin \theta, \quad p = \sqrt{2J\omega} \cos \theta, \quad J = \frac{p^2}{2\omega} + \frac{\omega q^2}{2}, \quad \theta = \arctan\left(\omega \frac{q}{p}\right) \quad (10.26)$$

L'action est donc proportionnelle à la surface totale balayée par l'orbite dans l'espace des phases durant une période (Figure 10.8).

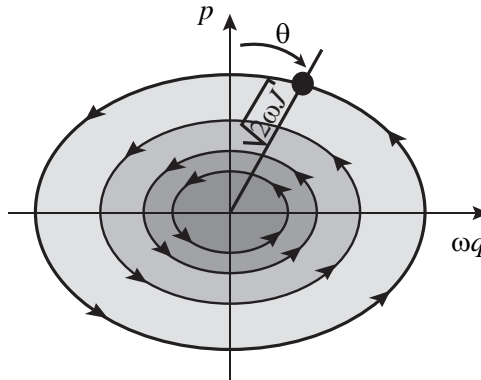


Figure 10.8 Portrait de phase d'un oscillateur linéaire.

Le hamiltonien est une fonction linéaire de l'action et les équations de Hamilton décrivent l'invariance de l'action et la rotation uniforme de l'angle.

$$H = \omega J \rightarrow \frac{dJ}{dt} = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (10.27)$$

L'oscillateur linéaire est l'un des modèles les plus répandus en théorie des systèmes dynamiques. Il est pertinent dans le cadre de l'analyse des petites oscillations des systèmes dynamiques au voisinage d'un point d'équilibre, point O dans l'espace des phases ; mais, lorsque l'amplitude de l'oscillation ne peut plus être considérée comme faible, il est nécessaire de prendre en compte les écarts au comportement linéaire et une modélisation en terme d'oscillateur non-linéaire s'impose.

La première différence essentielle entre les oscillateurs linéaires et non-linéaires est la non isochronie des oscillations. En effet, pour les oscillateurs linéaires la période ne dépend pas de l'amplitude : $\partial\omega/\partial J = 0$, c'est la loi d'isochronie découverte par Galilée, alors que dans le cas non-linéaire la période dépend de l'amplitude : $\partial\omega/\partial J \neq 0$. Une deuxième différence, en régime fortement non-linéaire, concerne la nature topologique du portrait de phase. Dans le cas linéaire les orbites sont organisées autour d'un point, dit O , unique : $p = q = 0$ (Figure 10.8) ; dans le cas non-linéaire il est courant de rencontrer des points dits X , à l'intersection de trajectoires particulières appelées séparatrices. Les différentes régions ainsi organisées par rapport aux points O et X , multiples, constituent des zones permettant de construire une classification des orbites.

10.2.3 Relation d'Einstein

Les variables canoniques angles et actions sont particulièrement bien adaptées à l'étude des problèmes d'interactions ondes-particules ; en effet, au delà de la séparation des échelles de temps entre mouvements lent et rapide, lorsque l'on utilise un système angles-actions, l'angle apparaît en général combiné linéairement avec la phase de l'onde dont la dynamique est aussi une rotation linéaire en fonction du temps. Ainsi, dans ce type de problème, il est courant d'introduire le concept de **phase relative entre l'onde et la particule**. Cette phase relative est incontrôlable au sens où, pour un ensemble de particules, la distribution de cette phase est uniforme entre 0 et 2π . Cette situation, où l'un des paramètres de description n'est pas un paramètre de contrôle, est semblable au cas du paramètre d'impact dans le problème de l'interaction particule-particule. Les quantités physiques doivent donc être moyennées sur cette phase relative entre le champ et la particule afin de construire des quantités respectant la nature statistique du problème.

Nous retrouverons ce concept de moyenne sur la phase dans le cadre de la théorie des perturbations adiabatiques ainsi que dans l'étude du régime chaotique. Ici, nous allons établir une identité, appelée relation d'Einstein, entre le carré de l'accroissement de l'action au premier ordre, moyennée sur l'angle, et l'accroissement au deuxième ordre, moyennée sur ce même angle. Par ordre nous entendons un développement perturbatif où (\mathbf{J}, θ) est un couple de variables angles-actions pour un système décrit par le hamiltonien intégrable non perturbé $H_0(\mathbf{J})$ et $V(\mathbf{J}, \theta, t)$ ($V \ll H_0$) une perturbation qui induit une évolution des actions. Le calcul de cette évolution peut être effectué au premier ordre en V puis au deuxième ordre en V etc ; en fait un

tel énoncé est un abus de langage commun car le petit paramètre par rapport auquel nous devons effectuer un développement perturbatif n'est pas V mais $V/H_0 \ll 1$.

Soit donc un système hamiltonien décrit par le hamiltonien $H = H_0 + V$. Considérons la fonction principale de Hamilton S (10.13) dont la variation infinitésimale, en fonction des incréments d'angles initiaux θ_0 et finaux θ , est donnée par : $dS = \mathbf{J} \cdot d\theta - \mathbf{J}_0 \cdot d\theta_0 - H dt$. Introduisons la fonction génératrice F permettant d'exprimer les actions et angles finaux (\mathbf{J}, θ) en fonction des actions et angles initiaux (\mathbf{J}_0, θ_0) .

$$F = \mathbf{J} \cdot [\theta - \theta_0] - S \rightarrow dF = \theta \cdot d\mathbf{J} - \theta_0 \cdot d\mathbf{J} + \mathbf{J} \cdot d\theta - \mathbf{J} \cdot d\theta_0 - dS$$

L'orbite du mouvement est donc générée par F suivant les deux relations :

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 - \frac{\partial F}{\partial \theta_0}, \quad \theta = \theta_0 + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{J}}$$

Ces relations sont exactes, mais de peu d'utilité, car elles supposent la fonction F connue, c'est-à-dire la fonction S connue. Or, l'action ne peut être calculée que si les équations du mouvement, ou l'équation de Hamilton Jacobi, sont intégrables, c'est-à-dire lorsque nous disposons déjà de la solution du problème. En revanche, ces relations permettent d'établir un développement perturbatif de l'orbite sous l'hypothèse $V \ll H_0$. Remarquons d'abord que $F = H_0(\mathbf{J})t + O[V] + \dots$ et décomposons la variation d'action, entre un instant initial et un instant final, en la somme d'un incrément ne dépendant pas des angles initiaux $\overline{\delta\mathbf{J}}$ plus un incrément fonction périodique de ces angles initiaux $\widetilde{\delta\mathbf{J}}$, c'est-à-dire dont la moyenne sur ces angles initiaux est nulle.

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 + \overline{\delta\mathbf{J}} + \widetilde{\delta\mathbf{J}} \rightarrow \overline{\delta\mathbf{J}} \equiv \langle \mathbf{J} - \mathbf{J}_0 \rangle_{\theta_0}, \quad \widetilde{\delta\mathbf{J}} \equiv \mathbf{J} - \mathbf{J}_0 - \langle \mathbf{J} - \mathbf{J}_0 \rangle_{\theta_0}$$

Un développement de Taylor des relations de génération précédentes au voisinage des actions initiales \mathbf{J}_0 permet d'établir :

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 - \frac{\partial F}{\partial \theta_0} \Big|_{\mathbf{J}_0} - \frac{\partial^2 F}{\partial \theta_0 \partial \mathbf{J}} \Big|_{\mathbf{J}_0} \cdot [\overline{\delta\mathbf{J}} + \widetilde{\delta\mathbf{J}}] - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^3 F}{\partial \theta_0 \partial \mathbf{J} \partial \mathbf{J}} \Big|_{\mathbf{J}_0} \cdot [\overline{\delta\mathbf{J}} + \widetilde{\delta\mathbf{J}}] + \dots \right]$$

La moyenne de ce développement sur les angles initiaux θ_0 permet alors d'exprimer séparément la partie séculaire $\overline{\delta\mathbf{J}}$ et la partie oscillante $\widetilde{\delta\mathbf{J}}$ de la variation d'action.

$$\begin{aligned} \overline{\delta\mathbf{J}} &= \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial \theta_0 \partial \mathbf{J}_0} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta_0} \right\rangle_{\theta_0} - \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial F}{\partial \theta_0} \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial \theta_0 \partial \mathbf{J}_0 \partial \mathbf{J}_0} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta_0} \right\rangle_{\theta_0} + \dots \\ \widetilde{\delta\mathbf{J}} &= -\frac{\partial F}{\partial \theta_0} + \frac{\partial^2 F}{\partial \theta_0 \partial \mathbf{J}_0} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta_0} - \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial \theta_0 \partial \mathbf{J}_0} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta_0} \right\rangle_{\theta_0} + \dots \end{aligned}$$

La composante oscillante est développée au premier ordre et la partie séculaire au deuxième ordre. La valeur moyenne de la dérivée du carré du premier ordre de l'incrément périodique d'action $\widetilde{\delta\mathbf{J}}$ apparaît égale au double de l'incrément séculaire d'action $\overline{\delta\mathbf{J}}$ au deuxième ordre ; l'identité :

$$\overline{\delta\mathbf{J}}(\mathbf{J}_0) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{J}_0} \left\langle \widetilde{\delta\mathbf{J}}(\mathbf{J}_0) \widetilde{\delta\mathbf{J}}(\mathbf{J}_0) \right\rangle_{\theta_0} \quad (10.28)$$

a reçu le nom de relation d'Einstein car elle traduit une relation entre mobilité et diffusion en contexte cinétique et entre émission spontanée et induite en contexte électrodynamique.

Cette relation sera extrêmement utile pour les calculs de transferts d'énergie dans les problèmes d'interactions champs-particules.

10.2.4 Interactions électromagnétiques

Nous verrons dans les chapitres consacrés aux systèmes non-intégrables, en régimes adiabatiques et résonnants, que le hamiltonien de tout système non-intégrable voisin d'un système intégrable peut être décomposé en la somme d'un hamiltonien intégrable et d'une série de Fourier non-intégrable. L'analyse de chacune des composantes de cette série pouvant être réduite à l'analyse d'un hamiltonien effectif du type pendule non-linéaire (10.60). Ce résultat général explique l'importance qui est accordée à l'étude du hamiltonien du pendule non-linéaire. Ce système dynamique est aussi l'un des plus simples dont le portrait de phase présente des points X et O et deux classes topologiques d'orbites.

Dans ce paragraphe nous allons étudier l'interaction des particules chargées avec des ondes électrostatiques, des champs magnétostatiques et des ondes électromagnétiques, dans le cadre d'un formalisme hamiltonien. Ces trois problèmes se rencontrent fréquemment en physique des plasmas, ils sont intégrables et le formalisme hamiltonien, à travers la construction des variables angles et actions, offre un cadre adapté au développement de théories perturbatives et de modèles cinétiques. Pour les cas magnétostatique et électromagnétique nous expliciterons les variables angles-actions associées à l'intégrabilité ; pour le cas de l'interaction électrostatique l'expression des variables angles-actions, associées à l'intégrabilité, étant particulièrement lourde en termes de fonctions elliptiques et de série de Fourier, il est plus approprié de discuter la nature des différentes classes d'orbites. Nous verrons dans le chapitre consacré au chaos qu'un calcul perturbatif est suffisant pour établir les relations de transfert d'impulsion-énergie entre une onde électrostatique et une particule et qu'il est inutile d'utiliser les fonctions elliptiques pour établir ce bilan d'énergie-impulsion.

Soit une particule chargée de charge e et de masse m . L'équation de Newton décrivant l'interaction de cette particule avec une onde électrostatique $-E \sin(kx - \omega t)$ est

donnée par :

$$m \frac{dv}{dt} = -eE \sin(kx - \omega t), \quad \frac{dx}{dt} = v$$

Introduisons les variables canoniquement conjuguées I et φ , ainsi que la pulsation Ω .

$$I = kv - \omega, \quad \varphi = kx - \omega t, \quad \Omega = \sqrt{\frac{keE}{m}}$$

L'équation de Newton prend alors une forme canonique : $dI/dt = -\Omega^2 \sin \varphi$, $d\varphi/dt = I$ associée au hamiltonien, dit du pendule non-linéaire, $H(I, \varphi)$:

$$H(I, \varphi) = \frac{1}{2}I^2 - \Omega^2 \cos \varphi \quad (10.29)$$

Il est possible de construire un couple angle-action pour ce hamiltonien. Mais, une telle construction fait intervenir des intégrales et fonctions elliptiques, qui, contrairement aux fonctions spéciales usuelles, sont d'un usage plus restreint et d'une manipulation moins aisée. Nous n'utiliserons donc pas ce système de variables angle-action pour analyser les caractéristiques de ce système intégrable. Nous allons analyser les caractéristiques du mouvement du pendule non-linéaire en identifiant d'abord les deux classes topologiques de trajectoires, puis en étudiant séparément les caractéristiques de chacune de ces deux classes. Bien que $[I, \varphi]$ ne soient pas un couple d'angle-action pour le pendule non-linéaire, par un abus de langage, justifié et répandu, dans les chapitres suivant, nous les appellerons angle et action.

Lorsque le hamiltonien H , qui est une constante du mouvement, est beaucoup plus grand que le carré de la pulsation Ω^2 , le terme de potentiel $\Omega^2 \cos \varphi$ est négligeable devant le terme cinétique I^2 ; le mouvement de la particule est donc voisin d'une rotation uniforme : $H \gg \Omega^2 \rightarrow \varphi = I(t - t_0)$. Les états de très haute énergie sont donc des mouvements inertiels.

I^2 étant toujours positif la quantité $H + \Omega^2 \cos \varphi$ est aussi toujours positive, mais deux cas doivent être considérés :

- Lorsque le hamiltonien est plus grand que le carré de la pulsation Ω^2 , alors l'angle φ peut prendre toutes les valeurs sans que le signe de $H + \Omega^2 \cos \varphi$ ne varie :

$$H > \Omega^2 \rightarrow -\infty \leq \varphi \leq +\infty.$$

Ces orbites sont appelées circulantes et elles effectuent un mouvement de rotation quasi-uniforme (Figure 10.9).

- Lorsque le hamiltonien est plus petit que le carré de la pulsation Ω^2 :

$$-\Omega^2 < H < +\Omega^2,$$

les valeurs admissibles de l'angle φ sont restreintes afin de préserver la valeur positive de $H + \Omega^2 \cos \varphi$:

$$-\Omega^2 < H < +\Omega^2 \rightarrow (2n - 1)\pi < \varphi < (2n + 1)\pi.$$

Ces orbites sont appelées piégées, la particule effectue un mouvement de libration (Figures 10.9 et 10.10).

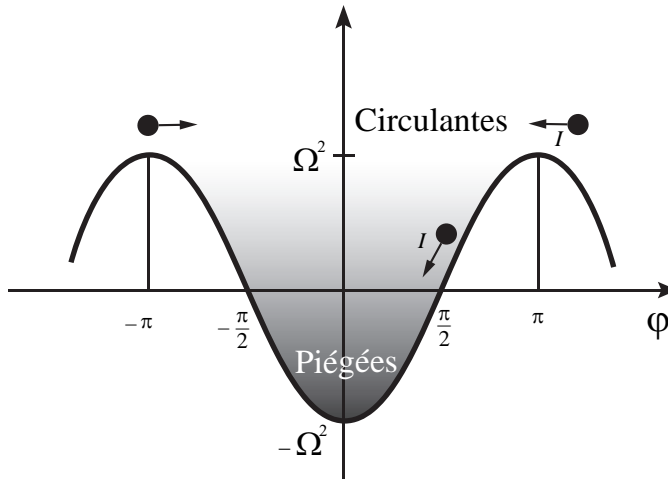


Figure 10.9 Potentiel du pendule non-linéaire, orbites circulantes et piégées.

Dans l'espace des phases (I, φ) ces deux classes d'orbites sont séparées par deux orbites critiques d'énergie $H = +\Omega^2$, les séparatrices. La définition de ces séparatrices, $I^2/2 - \Omega^2 \cos \varphi = \Omega^2$, permet d'exprimer leur équation cartésienne $I_S(\varphi)$ et de calculer l'extension en action ΔI de la zone piégée (Figure 10.10), cette dernière quantité permettra de quantifier les interactions entre résonances dans le paragraphe consacré au chaos.

Séparatrices S : $I_S(\varphi) = \pm 2\Omega \cos(\varphi/2) \rightarrow \Delta I = 4\Omega$ (10.30)

Les équations de Hamilton pour les séparatrices peuvent être résolues en éliminant l'action dans l'équation sur l'angle.

$$\varphi_S(t) = 4 \arctan \left[\exp \pm \Omega(t - t_0) \right], \quad I_S(t) = \pm \frac{2\Omega}{\cosh \Omega(t - t_0)} \quad (10.31)$$

Ces mêmes équations de Hamilton permettent d'identifier les points O et X : $I_X = 0$, $\varphi_X = (2n + 1)\pi$, $I_O = 0$, $\varphi_O = 2n\pi$; l'agencement des séparatrices, des orbites circulantes et des orbites piégées est représenté sur la figure 10.10.

Le point O correspond à la position de plus basse énergie du système : $H = -\Omega^2$; au voisinage de ce point O le hamiltonien peut être développé sous la forme d'un

développement de Taylor.

$$H = \frac{1}{2}I^2 + \Omega^2 \left(\frac{\varphi^2}{2!} - \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{\varphi^6}{6!} + \dots \right)$$

Lorsque ce développement est restreint à sa partie quadratique, le potentiel est celui d'un oscillateur linéaire et les orbites au voisinage du point O sont donc des oscillations harmoniques : $I_O(t) \approx I \cos(\Omega(t - t_0))$, $\varphi_O(t) \approx \frac{I}{\Omega} \sin(\Omega(t - t_0))$.

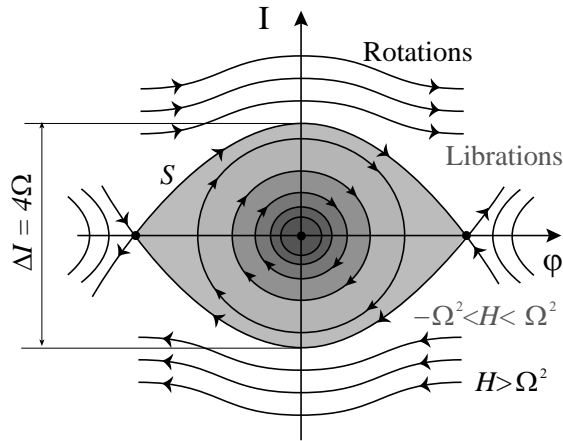


Figure 10.10 Portrait de phase du pendule non-linéaire.

Le cas des oscillations de plus grande amplitude peut être étudié en introduisant les variables angle-action de l'oscillateur linéaire (10.26) : $\varphi = \sqrt{2J/\Omega} \sin \theta$, $I = \sqrt{2J\Omega} \cos \theta$. Le hamiltonien dans la zone piégée, mais non nécessairement au voisinage immédiat du point O, est alors donné par :

$$H = \Omega J - \frac{4J^2}{4!} \sin^4 \theta + \frac{8J^3}{6! \Omega} \sin^6 \theta + \dots \rightarrow \langle H \rangle_\theta = \Omega J - \frac{J^2}{16} + \frac{J^3}{288\Omega} + \dots$$

Dans le chapitre suivant nous verrons que c'est la partie moyenne sur θ de ce hamiltonien qui détermine la dynamique de la particule (10.45). Les équations de Hamilton appliquées à cette valeur moyenne permettent de calculer la période de l'oscillation non-linéaire en fonction de l'action J . Cette formule, parfois appelée formule d'Airy : $\Omega_O(H) \rightarrow \Omega(1 - H/8\Omega^2 + \dots)$ quand $H \rightarrow -\Omega^2$, indique que la période augmente avec l'amplitude du mouvement. Cette croissance est monotone jusqu'à la séparatrice, et, au niveau de cette dernière, la période est infinie. En effet, le transit d'un point X vers un autre point X nécessite un temps infini car la particule possède exactement l'énergie nécessaire pour atteindre le sommet du potentiel, ainsi la phase finale est extrêmement lente car l'énergie cinétique est épuisée à l'approche du sommet, c'est-à-dire la vitesse quasi nulle. Cette analyse qualitative est confirmée par les

formules (10.31). Une analyse asymptotique de la période du mouvement au voisinage de la séparatrice est possible et le résultat : $\Omega_S(H) \rightarrow 2\pi\Omega/|\log|H - \Omega^2||$ quand $H \rightarrow \Omega^2$, prédit une divergence logarithmique de la période à l'approche de la séparatrice. Nous verrons dans la partie consacrée au chaos (§ 10.5) que *la lenteur du mouvement au voisinage de la séparatrice rend cet ensemble d'orbites extrêmement sensible aux perturbations et donc structurellement fragile*; dans un scénario de transition vers le chaos par croissance d'une perturbation appropriée cet ensemble d'orbites est le premier à présenter un comportement chaotique.

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique, statique et homogène, est un problème intégrable. Dans ce paragraphe nous allons construire les variables angles-actions pour ce système. L'analyse présentée ici constitue la base de toutes les études sur le confinement dans des structures magnétiques complexes. Une étude approfondie de ce problème du confinement magnétique sera présentée dans le paragraphe consacré à l'adiabaticité.

Considérons une particule de masse m et de charge e interagissant avec un champ magnétique \mathbf{B} homogène et stationnaire. La dynamique de cette particule chargée est décrite par l'évolution de sa position $\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$ et de sa vitesse $\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z$ au cours du temps où $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ est une base cartésienne orthonormée directe. Le champ magnétique \mathbf{B} dérive du potentiel vecteur \mathbf{A}_0 .

$$\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z \leftarrow \mathbf{A}_0 = -B_0 y \mathbf{e}_x$$

Introduisons le moment \mathbf{p} canoniquement conjugué à la position \mathbf{r} : $\mathbf{p} = \mathbf{v} + e\mathbf{A}_0 = p_x \mathbf{e}_x + p_y \mathbf{e}_y + P \mathbf{e}_z$, ainsi que le hamiltonien H de cette particule chargée interagissant avec le champ magnétique uniforme \mathbf{B} .

$$H = \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}_0)^2$$

Ce système possède les caractéristiques physiques d'un oscillateur linéaire, mais avec la différence notable que le couplage n'est pas un potentiel scalaire quadratique mais un potentiel vecteur linéaire. L'utilisation d'un système d'unités naturelles simplifie l'étude de ce mouvement intégrable ; m est l'unité naturelle de masse, $e^2 B_0/m$ est l'unité naturelle de courant électrique et m/eB_0 est l'unité naturelle de temps. Nous effectuons donc un changement d'unités du système international SI vers le système d'unités naturelles du problème : $\text{SI} \rightarrow [m, m/eB_0, e^2 B_0/m]$. Nous allons ensuite construire deux transformations canoniques afin d'identifier et d'exprimer les variables angles-actions $[(J, D, P), (\theta, \varphi, z)]$ séparant les parties lente et rapide du mouvement.

$$[(p_x, p_y), (x, y)] \rightarrow [(J, X), (\theta, Y)] \rightarrow [(J, D), (\theta, \varphi)]$$

La première transformation canonique $[(p_x, p_y), (x, y)] \rightarrow [(J, X), (\theta, Y)]$ est générée par la fonction génératrice de première espèce $F_1(x, y, \theta, Y)$.

$$F_1(x, y, \theta, Y) = -\frac{1}{2}(y - Y)^2 \tan \theta - xY \quad (10.32)$$

Les anciens et nouveaux moments sont donnés par les règles de génération canonique (10.2) :

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial F_1}{\partial x} = -Y, & p_y &= \frac{\partial F_1}{\partial y} = -(y - Y) \tan \theta \\ J &= -\frac{\partial F_1}{\partial \theta} = \frac{(y - Y)^2}{2 \cos^2 \theta}, & X &= -\frac{\partial F_1}{\partial Y} = -(y - Y) \tan \theta + x \end{aligned}$$

permettant d'obtenir par élimination l'expression de la position :

$$x = X + \sqrt{2J} \sin \theta, \quad y = Y + \sqrt{2J} \cos \theta \quad (10.33)$$

où X et Y sont les positions du centre guide (Figure 10.11). La vitesse s'exprime aussi en fonction de J et de θ , l'**angle cyclotronique** : $\mathbf{v} = \mathbf{p} - \mathbf{A}_0 = \sqrt{2J} \cos \theta \mathbf{e}_x - \sqrt{2J} \sin \theta \mathbf{e}_y + P \mathbf{e}_z$. Dans de nombreux problèmes présentant une symétrie cylindrique il est avantageux d'exprimer la position du centre guide de la particule en coordonnées cylindriques (D, φ) à l'aide d'une deuxième transformation canonique $[(X), (Y)] \rightarrow [(D), (\varphi)]$ générée par la fonction génératrice de première espèce $G_1(Y, \varphi)$.

$$G_1(Y, \varphi) = \frac{1}{2}Y^2 \cot \varphi \rightarrow X = \frac{\partial G_1}{\partial Y} = Y \cot \varphi, \quad D = -\frac{\partial G_1}{\partial \varphi} = \frac{Y^2}{2 \sin^2 \varphi}$$

L'expression finale de la position de la particule en fonction de l'angle cyclotronique et de l'angle polaire du centre guide est donnée par :

$$x = \sqrt{2D} \cos \varphi + \sqrt{2J} \sin \theta, \quad y = \sqrt{2D} \sin \varphi + \sqrt{2J} \cos \theta \quad (10.34)$$

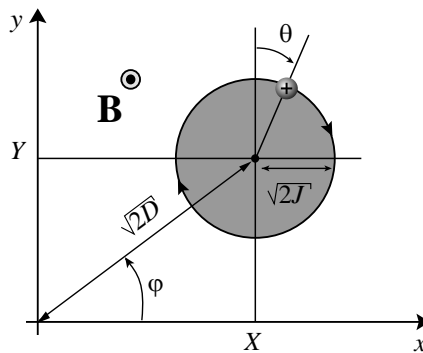


Figure 10.11 Variables angles-actions décrivant le mouvement cyclotronique.

Enfin, le hamiltonien de cette particule chargée interagissant avec un champ magnétique, homogène et statique, s'exprime comme :

$$H = J + \frac{P^2}{2} \quad (10.35)$$

Les variables angles-actions associées au mouvement d'une particule chargée interagissant avec un champ magnétique uniforme statique ainsi déterminées, les équations de Hamilton dérivant du hamiltonien (10.35) : $d\theta/dt = 1$, $d\varphi/dt = 0$, $dz/dt = P$, confirment le résultat classique : le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique est la combinaison d'une rotation uniforme autour des lignes de champ, appelée rotation cyclotronique, et d'une translation uniforme le long des lignes de champ. L'objectif du formalisme hamiltonien n'est bien entendu pas restreint à cette confirmation ; nous verrons dans les paragraphes consacrés à l'adiabaticité et aux résonances que l'identification de (J, D) et (θ, φ) permet d'aborder et de résoudre des problèmes d'interactions en champs complexes situés hors du champ d'application classique de la mécanique newtonienne.

L'étude du mouvement d'une particule chargée interagissant avec une OPMH se propageant dans le vide est un problème récurrent dans le contexte de l'interaction laser-plasma. Ce problème est aussi intégrable au sens de Poincaré et l'identification des variables angles-actions est présenté ici. Ce problème constitue aussi un exemple de la pertinence du formalisme hamiltonien pour séparer les échelles lente et rapide d'un mouvement en régime relativiste. Considérons donc un électron de charge $-e$ décrit par sa position $\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$ et sa vitesse $\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z$ où $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ est une base cartésienne orthonormée directe. Cet électron est soumis à l'influence d'une OPMH, de champ électrique \mathbf{E} et de champ magnétique \mathbf{B} , se propageant suivant l'axe des x et oscillant à la pulsation ω .

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = A\omega \sin \omega \left(\frac{x}{c} - t \right) \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{A\omega}{c} \sin \omega \left(\frac{x}{c} - t \right) \mathbf{e}_z$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide. Ce champ électromagnétique dérive du potentiel vecteur \mathbf{A} .

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = A \cos \omega \left(\frac{x}{c} - t \right) \mathbf{e}_y$$

Introduisons le moment \mathbf{p} canoniquement conjugué à la position \mathbf{r} : $\mathbf{p} = p_x \mathbf{e}_x + p_y \mathbf{e}_y + p_z \mathbf{e}_z$ ainsi que le hamiltonien h de cette particule chargée.

$$h(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = mc^2\gamma = \sqrt{m^2c^4 + (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 c^2} \quad (10.36)$$

L'utilisation d'un système d'unités naturelles simplifie l'étude de ce mouvement intégrable : m est l'unité de masse, $e\omega$ est l'unité de courant électrique, $1/\omega$ est l'unité de temps et c/ω l'unité de longueur : $\text{SI} \rightarrow [m, e\omega, 1/\omega, c/\omega]$. Lorsque le hamiltonien

est une fonction du temps il est toujours possible de construire un problème équivalent indépendant du temps. Cette construction s'articule autour d'une extension de l'espace des phases, le temps et (moins) l'énergie sont considérés comme un couple de variables canoniquement conjuguées supplémentaires $[(p_x, p_y, p_z), (x, y, z)] \rightarrow [(p_x, p_y, p_z, -\gamma), (x, y, z, t)]$ et le système est supposé évoluer en fonction d'un temps fictif s , conformément aux équations de Hamilton associées au nouvel hamiltonien H .

$$H(\mathbf{p}, \gamma, \mathbf{r}, t) = 1 + [\mathbf{p} + \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]^2 - \gamma^2 \quad (10.37)$$

En effet, les équations de Hamilton associées à ce hamiltonien dans l'espace des phases étendu $[(\mathbf{p}, -\gamma), (\mathbf{r}, t)]$:

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}, \quad \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad \frac{dt}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial \gamma}$$

sont équivalentes aux équations du mouvement dérivant du hamiltonien original (10.36) si l'étude de la dynamique est restreinte à l'hypersurface $H = 0$ dans l'espace des phases étendu.

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \right|_{H=0} = -\frac{\partial h}{\partial \mathbf{r}}, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right|_{H=0} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{p}}$$

Le hamiltonien (10.37) est donc pertinent pour décrire l'orbite d'une particule chargée interagissant avec une onde électromagnétique en régime relativiste. Afin d'entreprendre cette description et d'identifier les échelles lentes et rapides du mouvement nous allons effectuer une transformation canonique pour exprimer les variables angles-actions décrivant la dynamique de ce mouvement intégrable.

$$[(p_x, p_y, p_z, -\gamma), (x, y, z, t)] \rightarrow [(P_{\parallel}, P_{\perp}, P, E), (\varphi, \theta, z, \phi)]$$

La fonction génératrice de deuxième espèce $F_2(P_{\perp}, P_{\parallel}, P, E, x, y, z, t)$ est introduite à cette fin.

$$F_2 = P_{\perp}y + P_{\parallel}x + Pz - Et - \frac{P_{\perp}A}{P_{\parallel} - E} \sin(x - t) - \frac{A^2}{8P_{\parallel} - 8E} \sin(2x - 2t)$$

Les anciens et nouveaux moments sont donc donnés par les règles de génération canonique (10.2) : $\mathbf{p} = \partial F_2 / \partial \mathbf{q}$ et $\theta = \partial F_2 / \partial \mathbf{P}$.

$$\begin{aligned} p_y &= P_{\perp}, & p_z &= P \\ p_x &= P_{\parallel} - \left(\frac{AP_{\perp}}{P_{\parallel} - E} \right) \cos(\varphi + \phi) - \left(\frac{A^2}{4P_{\parallel} - 4E} \right) \cos(2\varphi + 2\phi) \\ \gamma &= E - \left(\frac{AP_{\perp}}{P_{\parallel} - E} \right) \cos(\varphi + \phi) - \left(\frac{A^2}{4P_{\parallel} - 4E} \right) \cos(2\varphi + 2\phi) \end{aligned}$$

On notera que les actions ne sont autres que les valeurs moyennes des moments canoniques $P_{\perp} = \langle p_y \rangle$, $P_{\parallel} = \langle p_x \rangle$, $P = p_z$, $E = \langle \gamma \rangle$. Les angles peuvent être exprimés explicitement en fonction des positions et du temps mais une telle expression nécessite la sommation d'une double série de fonctions de Bessel ; en revanche, l'expression des positions en fonction des actions est explicite

$$\begin{aligned}
 y &= \theta + \frac{A}{P_{\parallel} - E} \sin(\varphi + \phi) \\
 x &= \varphi - \frac{AP_{\perp}}{(P_{\parallel} - E)^2} \sin(\varphi + \phi) - \frac{A^2}{8(P_{\parallel} - E)^2} \sin(2\varphi + 2\phi) \\
 t &= -\phi - \frac{AP_{\perp}}{(P_{\parallel} - E)^2} \sin(\varphi + \phi) - \frac{A^2}{8(P_{\parallel} - E)^2} \sin(2\varphi + 2\phi)
 \end{aligned}$$

et permet d'obtenir par élimination l'expression du hamiltonien.

$$H = 1 + \frac{A^2}{2} + P_{\perp}^2 + P_{\parallel}^2 + P^2 - E^2 \tag{10.39}$$

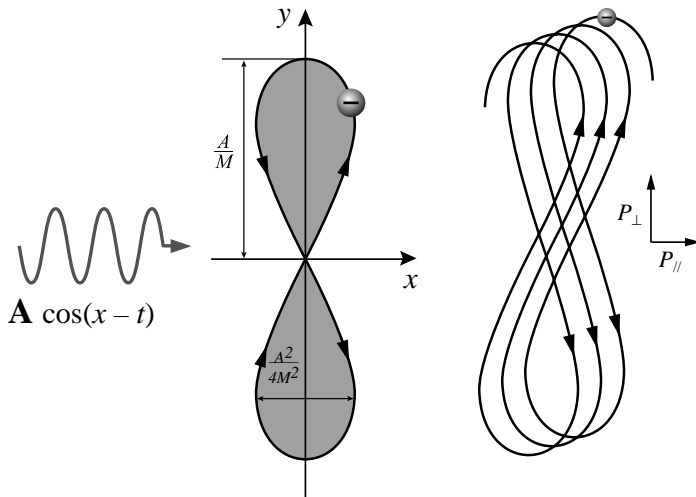


Figure 10.12 Variables angles-actions décrivant l'interaction relativiste laser-particule.

Les équations de Hamilton dérivant de ce hamiltonien impliquent l'invariance des actions, c'est-à-dire de la valeur moyenne des impulsions. Les angles effectuent un mouvement de rotation uniforme en fonction du temps s , c'est-à-dire en fonction du temps propre.

L'orbite d'une particule chargée dans une onde est donc la superposition d'une translation uniforme, d'une oscillation dans la direction du champ électrique

(cette oscillation est anharmonique car le temps propre n'est pas une fonction linéaire du temps) et d'une oscillation le long de la direction de propagation de l'onde (cette deuxième oscillation, en fonction du temps propre, s'effectue à l'harmonique deux de l'oscillation électrique). L'énergie stockée dans l'oscillation est essentiellement de nature réactive, les échanges de puissance active s'effectuent au niveau des actions décrivant la translation.

10.3 ADIABATICITÉ

Le formalisme hamiltonien est adapté à l'étude des systèmes multiples périodiques à travers l'utilisation des variables actions et angles qui séparent les composantes lentes et rapides du mouvement. En effet, les variables d'action constituent une combinaison des positions et vitesses des différents degrés de liberté dont les variations se compensent mutuellement. On identifie ainsi les parties lentes (constantes) du mouvement ; la partie rapide du mouvement se retrouve isolée dans les variables d'angles qui sont des combinaisons des positions et vitesses dont la dynamique est une rotation uniforme.

Un telle séparation des composantes lentes et rapides de la dynamique d'un système n'est possible que sur la base de l'expression des variables angles et actions ; nous avons précisément défini les systèmes intégrables comme les systèmes possédant cette propriété. La question est donc de savoir si, au delà des quatre exemples présentés dans le paragraphe précédent, il existe une procédure systématique de construction des variables angles et actions pour un système dynamique quelconque.

La réponse est négative, l'ensemble des systèmes intégrables est de mesure nulle dans l'ensemble des systèmes hamiltoniens ; ceci signifie que, si nous considérons l'ensemble des systèmes hamiltoniens et en tirons un *au hasard*, la probabilité qu'il soit intégrable est nulle.

Néanmoins, malgré leur rareté, les systèmes intégrables constituent l'outil de référence pour l'étude des systèmes hamiltoniens. Dans de nombreux cas, en présence d'un système non intégrable donné, il est possible d'identifier un système intégrable voisin de ce système donné ; par voisin nous entendons la possibilité de séparer le hamiltonien H du système en deux parties : une partie représentant un système intégrable $H_0(\mathbf{J})$ pour lequel nous disposons de l'expression du jeu de variables canoniques angles-actions (\mathbf{J}, θ) et une partie non intégrable $V(\mathbf{J}, \theta)$: $H = H_0(\mathbf{J}) + V(\mathbf{J}, \theta)$. Cette représentation doit en outre vérifier un ordering justifiant un traitement perturbatif de la partie non intégrable : $|V(\mathbf{J}, \theta)| \ll |H_0(\mathbf{J})|$. Pour ces systèmes voisins d'un système intégrable trois régimes de perturbation peuvent alors être distingués.

- Le régime adiabatique, lorsque le hamiltonien perturbateur n'introduit pas de couplages résonnants entre les différents degrés de liberté du système intégrable,

c'est-à-dire lorsque V ne générera pas des harmoniques possédant des échelles de temps (fréquences) multiples des échelles de temps associées à la partie intégrables. Ce régime adiabatique est donc caractérisé par l'absence de résonances telles qu'il existe un triplet d'entiers $\mathbf{N} = (N_1, N_1, N_1)$ vérifiant une relation du type : $\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{J}) = N_1 \omega_1(\mathbf{J}) + N_2 \omega_2(\mathbf{J}) + N_3 \omega_3(\mathbf{J}) = 0$ où $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{J}) = \partial H_0 / \partial \mathbf{J}$.

- Le deuxième régime de perturbation est le régime résonnant caractérisé par un fort couplage entre les degrés de liberté, couplage dû à l'apparition d'échelles de temps similaires caractérisant la dynamique de ces différents degrés de liberté; ce type de couplage résonnant, tel que des résonances $\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{J}) = N_1 \omega_1(\mathbf{J}) + N_2 \omega_2(\mathbf{J}) + N_3 \omega_3(\mathbf{J}) = 0$ soient présentes dans la perturbation V , permet des transferts significatifs d'impulsion-énergie entre les degrés de liberté.
- Enfin, lorsque plusieurs résonances sont présentes, le comportement du système dynamique devient chaotique au delà d'un certain seuil de l'amplitude de la perturbation. Ces deux derniers régimes, résonnants et chaotiques, seront étudiés dans les paragraphes suivants.

10.3.1 Perturbations adiabatiques

Afin d'étudier le régime adiabatique de perturbation d'un système intégrable, considérons un système décrit par le hamiltonien : $H(\mathbf{J}, \theta) = H_0(\mathbf{J}) + V(\mathbf{J}, \theta)$ voisin d'un système intégrable décrit par le hamiltonien H_0 ($V \ll H_0$). Introduisons les pulsations du mouvement non perturbé $\boldsymbol{\omega}$ ainsi que la matrice de masse \mathbf{M}^{-1} associées à ce mouvement intégrable.

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{J}) \equiv \frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{J}}, \quad \mathbf{M}(\mathbf{J}) \equiv \frac{\partial^2 H_0}{\partial \mathbf{J} \partial \mathbf{J}} \quad (10.40)$$

Effectuons une transformation canonique et cherchons un nouveau système de variables actions et angles (\mathbf{I}, φ) tel que le nouvel hamiltonien K soit intégrable au deuxième ordre en $V/H_0 \ll 1$, c'est-à-dire tel que K ne dépende que des nouvelles actions \mathbf{I} .

$$[\mathbf{J}, \theta] \rightarrow [\mathbf{I}, \varphi], \quad H(\mathbf{J}, \theta) \rightarrow K(\mathbf{I}) + O[V^3/H_0^3]$$

Les variables angles effectuant des mouvements de rotation uniforme prennent leurs valeurs physiques sur $[0, 2\pi]$. Les quantités physiques telle la perturbation V sont donc nécessairement des fonctions périodiques des angles, ainsi, ces quantités peuvent être représentées et analysées sous forme d'un développement de Fourier.

$$V(\mathbf{J}, \theta) = V_0(\mathbf{J}) + \sum_{\mathbf{N}=-\infty}^{\mathbf{N}=\infty} V_{\mathbf{N}}(\mathbf{J}) \cos[\mathbf{N} \cdot \theta + \phi_{\mathbf{N}}] \quad (10.41)$$

Nous avons isolé la composante $\mathbf{N} = (0, 0, 0)$ de ce développement en série de Fourier, $V_0(\mathbf{J})$, car elle joue un rôle majeur dans la théorie des perturbations au

premier ordre en V/H_0 ; cette composante n'est autre que la valeur moyenne de la perturbation : $V_0(\mathbf{J}) = \int_0^{2\pi} V(\mathbf{J}, \theta) d\theta / 2\pi = \langle V(\mathbf{I}, \theta) \rangle_\theta$. Pour construire la transformation canonique permettant de rendre le système intégrable, aux premier et deuxième ordres en V/H_0 , et identifier les nouvelles variables actions-angles $[\mathbf{I}, \varphi]$, considérons une fonction génératrice de deuxième espèce F_2 construite sur la base d'un ensemble de fonctions inconnues $W_{\mathbf{N}}(\mathbf{I}) = O[V^2/H_0^2]$.

$$F_2(\theta, \mathbf{I}) = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\theta} - \sum_{\mathbf{N}=-\infty}^{\mathbf{N}=\infty} \frac{V_{\mathbf{N}}(\mathbf{I}) + W_{\mathbf{N}}(\mathbf{I})}{\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{I})} \sin[\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\theta} + \phi_{\mathbf{N}}] \quad (10.42)$$

L'hypothèse d'adiabaticité est ici explicitement utilisée : $\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{I}) \neq 0$. Les formules de génération canonique (Tableau 10.2) associées aux fonctions génératrices de deuxième espèce permettent d'établir les relations :

$$\varphi = \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{I}}, \quad \mathbf{J} = \frac{\partial F_2}{\partial \boldsymbol{\theta}}, \quad K(\mathbf{I}) = H(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta})$$

Les nouvelles variables canoniques $[\mathbf{I}, \varphi]$ peuvent être ainsi exprimées en fonction des anciennes variables canoniques $[\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}]$.

$$\begin{aligned} \varphi &= \boldsymbol{\theta} - \sum_{\mathbf{N}=-\infty}^{\mathbf{N}=\infty} \frac{\partial}{\partial \mathbf{I}} \left[\frac{V_{\mathbf{N}} + W_{\mathbf{N}}}{\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\omega}} \right] \sin[\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\theta} + \phi_{\mathbf{N}}] \\ \mathbf{I} &= \mathbf{J} + \sum_{\mathbf{N}=-\infty}^{\mathbf{N}=\infty} \mathbf{N} \left[\frac{V_{\mathbf{N}} + W_{\mathbf{N}}}{\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\omega}} \right] \cos[\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\theta} + \phi_{\mathbf{N}}] \end{aligned} \quad (10.43)$$

Ensuite, le nouvel hamiltonien K peut être développé au même ordre en $V/H_0 \ll 1$ sous forme d'un développement de Taylor.

$$\begin{aligned} H(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}) &= H_0(\mathbf{I}) + (\mathbf{J} - \mathbf{I}) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{I}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\mathbf{J} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{M}(\mathbf{I}) \cdot (\mathbf{J} - \mathbf{I}) + V(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}) + (\mathbf{J} - \mathbf{I}) \cdot \left. \frac{\partial V}{\partial \mathbf{J}} \right|_{\mathbf{J}=\mathbf{I}} \end{aligned}$$

Puis, l'expression de $(\mathbf{J} - \mathbf{I})$ en fonction de \mathbf{I} est substituée dans ce développement afin d'explicitier le nouvel hamiltonien et d'identifier sous quelles conditions, sur

$W_{\mathbf{N}}$, il peut être construit indépendant de θ .

$$\begin{aligned}
 H = & H_0(\mathbf{I}) + V_0(\mathbf{I}) - \sum_{\mathbf{N}=-\infty}^{\mathbf{N}=\infty} W_{\mathbf{N}} \cos[\mathbf{N} \cdot \theta + \phi_{\mathbf{N}}] \\
 & + \sum_{\mathbf{N}=-\infty}^{\mathbf{N}=\infty} \sum_{\mathbf{S}=-\infty}^{\mathbf{S}=\infty} \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{S}}{2} \left(\frac{V_{\mathbf{N}}}{\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\omega}} \right) \left(\frac{V_{\mathbf{S}}}{\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega}} \right) \cos[\mathbf{N} \cdot \theta + \phi_{\mathbf{N}}] \cos[\mathbf{S} \cdot \theta + \phi_{\mathbf{S}}] \\
 & - \sum_{\mathbf{N}=-\infty}^{\mathbf{N}=\infty} \frac{\mathbf{N} V_{\mathbf{N}}}{\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\omega}} \cos[\mathbf{N} \cdot \theta + \phi_{\mathbf{N}}] \cdot \left[\frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{I}} + \sum_{\mathbf{S}=-\infty}^{\mathbf{S}=\infty} \frac{\partial V_{\mathbf{S}}}{\partial \mathbf{I}} \cos[\mathbf{S} \cdot \theta + \phi_{\mathbf{S}}] \right] \quad (10.44)
 \end{aligned}$$

Cette expression est indépendante de θ si et seulement si la somme des termes dépendants de θ est nulle, c'est-à-dire, lorsque les éléments inconnus $W_{\mathbf{N}} = O[V^2/H_0^2]$ sont solutions de l'équation : $H = \langle H \rangle_{\theta}$. Cette équation admet une solution unique obtenue en identifiant à zéro, terme à terme, les différents coefficients de la série de Fourier $H - \langle H \rangle_{\theta}$. Ainsi, il est possible d'exprimer $W_{\mathbf{N}}$ en fonction de $V_{\mathbf{N}}$ et de démontrer l'existence d'une transformation canonique rétablissant l'intégrabilité du système au deuxième ordre en $V/H_0 \ll 1$ sous l'hypothèse $\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$. Le nouvel hamiltonien $K = \langle H \rangle_{\theta}$ peut alors être explicité en fonction des nouvelles actions. Pour ce faire introduisons les facteurs $U_{\mathbf{N}} = V_{\mathbf{N}} + V_{-\mathbf{N}} \cos(\phi_{\mathbf{N}} + \phi_{-\mathbf{N}})$, $K(\mathbf{I})$ est finalement donné par :

$$K(\mathbf{I}) = H_0 + V_0 - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{N}=-\infty}^{\mathbf{N}=\infty} \frac{V_{\mathbf{N}}}{\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\omega}} \mathbf{N} \cdot \frac{\partial U_{\mathbf{N}}}{\partial \mathbf{I}} + \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{N}=-\infty}^{\mathbf{N}=\infty} \frac{V_{\mathbf{N}} U_{\mathbf{N}}}{(\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\omega})^2} \mathbf{N} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{N} \quad (10.45)$$

Cette formule générale constitue le résultat principal de la théorie des perturbations adiabatiques des systèmes hamiltonien. Une procédure systématique pour étendre ce résultat aux ordres supérieurs en V/H_0 peut être construite sous l'hypothèse $\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$; mais la complexité de sa mise en place pratique restreint les applications aux premier et deuxième ordres présentés ici. Souvent le premier ordre apparaît suffisant pour étudier l'influence d'une perturbation sur un système. Le nouvel hamiltonien n'est autre, alors, que la moyenne du hamiltonien perturbé sur l'angle.

$$K(\mathbf{I}) = H_0(\mathbf{I}) + \langle V(\mathbf{I}, \theta) \rangle_{\theta} + O[V^2/H_0^2]$$

L'action \mathbf{J} , qui était une constante en l'absence de perturbation, oscille au premier ordre en V/H_0 et le spectre de cette oscillation présente une somme infinie d'harmoniques des fréquences du mouvement non perturbé.

$$\mathbf{J} = \mathbf{I} - \sum_{\mathbf{N} \neq \mathbf{0}} \mathbf{N} \frac{V_{\mathbf{N}}(\mathbf{I})}{\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{I})} \cos[\mathbf{N} \cdot \varphi + \phi_{\mathbf{N}}] + O[V^2/H_0^2]$$

Si nous effectuons alors la moyenne de l'action sur ces oscillations, au deuxième ordre en V/H_0 nous obtenons une constante.

$$\frac{d\langle \mathbf{J} \rangle_{\varphi}}{dt} = O[V^2/H_0^2] \rightarrow \frac{d}{dt} \left[\oint_{C_i} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} \right] = O[V^2/H_0^2]$$

Ce dernier résultat permet d'énoncer la propriété d'invariance adiabatique des actions en présence de perturbations non résonnantes. Une étude plus approfondie du comportement de l'action permettrait de préciser le comportement de l'erreur, ici du deuxième ordre en V/H_0 , et de démontrer que cette erreur est en fait exponentiellement faible et non simplement en V^2/H_0^2 . Ce comportement exponentiel confère à l'action une robustesse aux perturbations allant au delà de ce que prédit la théorie que nous venons de développer ici.

10.3.2 Dérives et forces séculaires

Dans ce paragraphe nous allons illustrer les méthodes précédentes dans le cadre de plusieurs problèmes spécifiques et présenter un ensemble de résultats sur les dérivées et forces séculaires dans le contexte de l'interaction entre un champ électromagnétique et une particule chargée. Certains de ces résultats, tels ceux relatifs aux dérivées de gradient et à la force diamagnétique, peuvent être obtenus à l'aide de méthodes non canoniques ; l'intérêt des méthodes canoniques, présentées et utilisées ici, est de pouvoir envisager de travailler à des ordres plus élevés et sur des champs plus complexes.

Les résultats de la théorie des perturbations adiabatiques nécessitent l'identification d'un hamiltonien non perturbé H_0 , intégrable et dominant, et d'une perturbation V non intégrable telle que $H_0 \gg V$. Nous allons, dans un premier temps, construire le cadre de cette séparation. Soit donc une particule chargée de masse m et de charge e . Repérons sa position par le vecteur position $\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$ et sa vitesse par le vecteur vitesse $\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z$ où $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ est une base cartésienne orthonormée directe. Cette particule chargée est plongée dans un champ magnétique uniforme \mathbf{B} dérivant du potentiel vecteur \mathbf{A}_0 .

$$\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z \leftarrow \mathbf{A}_0 = -B_0 y \mathbf{e}_x$$

Dans le cadre d'une description hamiltonienne de la dynamique de cette particule, introduisons $\mathbf{p} = p_x \mathbf{e}_x + p_y \mathbf{e}_y + P \mathbf{e}_z$ le moment canoniquement conjugué à la position \mathbf{r} . L'emploi d'un système d'unités naturelles simplifie l'étude de ce mouvement intégrable : m est l'unité de masse, $e^2 B_0/m$ est l'unité de courant électrique, m/eB_0 est l'unité de temps et l'unité de longueur est L , une longueur de gradient des champs qui apparaîtra ultérieurement. Effectuons donc un changement d'unités du système international SI vers le système d'unités naturelles du problème : $\text{SI} \rightarrow [m, m/eB_0, e^2 B_0/m, L]$. Afin de développer un formalisme de perturbations, nous introduisons les variables angle-action (J, θ) construites au

chapitre précédent (10.33) : $\mathbf{r} = (X + \sqrt{2J} \sin \theta) \mathbf{e}_x + (Y + \sqrt{2J} \cos \theta) \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$ et $\mathbf{p} - \mathbf{A}_0 = \sqrt{2J} \cos \theta \mathbf{e}_x - \sqrt{2J} \sin \theta \mathbf{e}_y + P \mathbf{e}_z$. L'expression du hamiltonien en fonction de ces variables angle-action est donnée par :

$$H_0 = \frac{1}{2} (\mathbf{p} - \mathbf{A}_0)^2 = J + \frac{P^2}{2}$$

Lorsque le système est perturbé par un champ supplémentaire dérivant du potentiel vecteur \mathbf{a} , le potentiel vecteur du système doit être modifié en conséquence, $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{a}$, et le hamiltonien décrivant la dynamique de ce système perturbé peut alors être séparé en une composante intégrable H_0 et une perturbation V par simple développement de la forme quadratique constituant le hamiltonien non relativiste.

$$H_0 + V = \frac{1}{2} [(\mathbf{p} - \mathbf{A}_0) - \mathbf{a}]^2 = J + \frac{P^2}{2} - (\mathbf{p} - \mathbf{A}_0) \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{2} \mathbf{a}^2$$

Les deux termes perturbateurs ainsi identifiés sont appelés le couplage dipolaire $(\mathbf{p} - \mathbf{A}_0) \cdot \mathbf{a}$ et le terme pondéromoteur \mathbf{a}^2 .

Considérons d'abord le problème de l'orbite d'une particule chargée dans un champ magnétique possédant une direction constante et présentant un gradient de son amplitude orthogonalement à cette direction de référence.

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_z + x \mathbf{e}_z \leftarrow \mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{a} = -y \mathbf{e}_x - yx \mathbf{e}_x$$

Au premier ordre la perturbation du hamiltonien se réduit donc au couplage dipolaire $(\mathbf{p} - \mathbf{A}_0) \cdot \mathbf{a}$ dont l'expression :

$$V = -(\mathbf{p} - \mathbf{A}_0) \cdot \mathbf{a} = (X + \sqrt{2J} \sin \theta) (Y + \sqrt{2J} \cos \theta) (\sqrt{2J} \cos \theta)$$

doit être moyennée sur l'angle θ afin d'exprimer la correction adiabatique $\langle V \rangle_\theta = JX$. L'équation de Hamilton décrivant la dynamique de la coordonnée du centre guide est alors donnée par :

$$\frac{dY}{dt} = \frac{\partial \langle V \rangle_\theta}{\partial X} = J \quad (10.46)$$

Une particule chargée soumise à l'influence d'un champ magnétique inhomogène présentant un gradient d'amplitude, dans la direction perpendiculaire au champ, dérive donc dans la direction mutuellement perpendiculaire au champ et au gradient. La vitesse de cette dérive est proportionnelle à l'énergie cinétique du mouvement cyclotronique autour des lignes de champ : nous retrouvons ici l'expression de la vitesse de dérive de gradient \mathbf{V}_{DG} (5.19).

Les effets séculaires des inhomogénéités peuvent aussi se manifester par l'apparition d'accélération, c'est-à-dire de forces séculaires. Considérons un champ magnétique présentant un gradient de son amplitude le long de sa direction principale tel que les lignes de champ forment un faisceau de droites localement convergent ou divergent.

$$\mathbf{B} = e_z + z e_z - \frac{x}{2} e_x - \frac{y}{2} e_y \leftarrow \mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{a} = -y e_x - \frac{yz}{2} e_x + \frac{xz}{2} e_y$$

Compte tenu de la symétrie cylindrique de ce champ nous utiliserons le système de variables canoniques angles-actions construit au chapitre précédent, équation (10.34) : $x = \left(\sqrt{2D} \cos \varphi + \sqrt{2J} \sin \theta\right) e_x + \left(\sqrt{2D} \sin \varphi + \sqrt{2J} \cos \theta\right) e_y$ et $\mathbf{p} - \mathbf{A}_0 = \sqrt{2J} \cos \theta e_x - \sqrt{2J} \sin \theta e_y + P e_z$. Le terme perturbateur dipolaire V résultant de la convergence des lignes de champ a pour expression :

$$V = -(\mathbf{p} - \mathbf{A}_0) \cdot \mathbf{a} = \frac{z}{2} \left(\sqrt{2D} \sin \varphi + \sqrt{2J} \cos \theta\right) \sqrt{2J} \cos \theta + \frac{z}{2} \left(\sqrt{2D} \cos \varphi + \sqrt{2J} \sin \theta\right) \sqrt{2J} \sin \theta$$

Conformément à la théorie des perturbations adiabatiques ce terme dipolaire doit être moyenné : $\langle V \rangle_\theta = zJ$. L'équation de Hamilton décrivant la dynamique de l'impulsion le long des lignes de champ fait alors apparaître une force constante dont l'amplitude est proportionnelle à l'énergie cinétique du mouvement cyclotronique.

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\partial \langle V \rangle_\theta}{\partial z} = -J \quad (10.47)$$

Une particule chargée soumise à l'influence d'un champ magnétique convergent ou divergent est repoussée hors des zones de champ fort et attirée vers les zones de champ faible : cette force séculaire est donc de nature diamagnétique. Nous retrouvons ici la force diamagnétique identifiée dans le chapitre consacré à l'interaction champs-particule (5.10).

Une force séculaire apparaît aussi dans le contexte de l'interaction entre un champ électrique oscillant et une particule chargée : c'est la force pondéromotrice. Cette force résulte de l'inhomogénéité de l'amplitude du champ oscillant. Pour l'étudier, considérons un problème à une dimension suivant l'axe des x . Soit une particule de charge $e = 1$ et de masse $m = 1$ interagissant avec une onde électrique, de vecteur d'onde $k = 1$, de potentiel : $V(x) \cos(x - \omega t)$.

$$H(p, x, t) = \frac{p^2}{2} + V(x) \cos(x - \omega t) \quad (10.48)$$

Ce problème possède un seul degré de liberté mais il est complètement équivalent à un problème à deux degrés de liberté obtenu en considérant le temps t comme un

variable canonique de configuration conjuguée à l'énergie.

$$H(p, E, x, t) = \frac{p^2}{2} + V(x) \cos(x - \omega t) + E \quad (10.49)$$

Cette équivalence peut être établie en considérant l'identité des équations de Hamilton sur x , p et H déduite de (10.49) et (10.48). L'utilisation de la théorie des perturbations adiabatiques nécessite la construction d'un système de variables angles-actions : $[(p, E), (x, t)] \rightarrow [(J, I), (\varphi, \phi)]$. Ce système de nouvelles variables canoniques est obtenu à l'aide de la fonction génératrice de deuxième espèce $F_2(x, t, I, J) = (\omega t - x)J + xI$. Les relations entre anciennes et nouvelles variables canoniques sont exprimées par les formules de génération (Tableau 10.2).

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial F_2}{\partial x} = I - J, & E &= \frac{\partial F_2}{\partial t} = \omega J \\ \varphi &= \frac{\partial F_2}{\partial J} = \omega t - x, & \phi &= \frac{\partial F_2}{\partial I} = x \end{aligned}$$

Le nouvel hamiltonien s'écrit comme la somme d'une partie intégrable décrivant un mouvement inertiel en l'absence d'onde plus une perturbation décrivant l'interaction de la particule avec cette onde.

$$H = \frac{(J - I)^2}{2} + \omega J + V(\phi) \cos \phi$$

Appliquée au premier ordre, la théorie des perturbations adiabatiques ne prédit aucun effet séculaire nouveau ; en effet, la moyenne sur l'angle φ du terme $V(\phi) \cos \phi$ est nulle. La théorie adiabatique doit donc être appliquée au deuxième ordre, ce qui nécessite le calcul de l'inverse de la matrice de masse \mathbf{M} . Les pulsations du problème non perturbé étant des fonctions linéaires : $\omega_\varphi = \omega + J - I$, $\omega_\phi = I - J$, cette matrice est donc constante. Le terme du deuxième ordre se réduit alors à la prise en considération de l'unique harmonique $\mathbf{N} = (1, 0)$ (10.45).

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{N}}{(\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\omega})^2} V_{\mathbf{N}} V_{\mathbf{N}} \Big|_{\mathbf{N}=(1,0)} = \frac{V^2(\phi)}{(\omega + J - I)^2}$$

L'expression finale, au deuxième ordre adiabatique, du hamiltonien dit pondéromoteur fait apparaître un terme quadratique dépendant de la position. La position étant conjuguée à l'impulsion, ce terme pondéromoteur quadratique induit donc une force séculaire.

$$H = \frac{(J - I)^2}{2} + \omega J + \frac{1}{4} \frac{V^2(\phi)}{(\omega + J - I)^2} \quad (10.50)$$

L'orbite d'une particule chargée soumise à l'influence d'une onde électrostatique dont l'amplitude dépend de la position est la combinaison d'une oscillation et d'une

accélération proportionnelle au gradient de cette amplitude :

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{1}{4} \frac{d}{dx} \left[\frac{V^2(x)}{(\omega - p)^2} \right]$$

nous retrouvons ici la force pondéromotrice étudié au chapitre 5 (5.22).

Le comportement est diélectrique : les particules sont repoussées hors des zones de champ fort et attirées vers les zones de champ faible.

10.3.3 Confinement magnétique

La théorie des perturbations adiabatiques est aussi pertinente pour décrire et comprendre le mouvement des particules chargées dans des configurations de champs plus complexes que de simple gradients magnétique ou électrique ; en particulier, les variables angles-actions constituent l'outil de référence pour étudier le confinement des particules dans les pièges magnétiques. En effet, la propriété de confinement implique, par définition, que les trajectoires des particules soient contenues dans un volume fini donné pour un temps quasi-infini. Les mouvements intégrables multi-plement périodiques possèdent ce type de propriété, car, dans l'espace des phases, leurs orbites sont ordonnées sur les tores de KAM. Un choix judicieux de conditions initiales permet donc d'assurer le confinement des orbites.

Dans ce paragraphe nous allons étudier un piège magnétique classique, *le miroir magnétique*. Ce type d'analyse peut être étendu aux pièges de type tokamaks qui offrent de meilleures performances au prix d'une complexité supérieure. Un miroir magnétique est une configuration de champs possédant une zone de champ faible, la région de confinement, et deux zones de champ fort, les points miroirs. Le plus simple des miroirs peut être construit avec deux bobines de même axe (Figure 10.13) ; une particule est repoussée des zones de champ fort et exécute un mouvement de rebond périodique entre ces deux zones. Ce mouvement d'oscillation axiale se superpose au mouvement de rotation cyclotronique autour des lignes de champ et aux mouvements de dérive autour de l'axe.

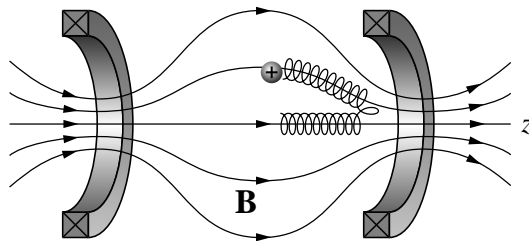


Figure 10.13 Miroir magnétique.

Au voisinage de l'axe magnétique, à égale distance des deux bobines, c'est-à-dire dans la zone de confinement, le champ d'une configuration miroir \mathbf{B} ainsi que son potentiel vecteur \mathbf{A} peuvent être décrits par un développement de Taylor.

$$\mathbf{B} = B_0 \left(1 + \frac{z^2}{L^2} \right) \mathbf{e}_z - B_0 \left(\frac{xz}{L^2} \right) \mathbf{e}_x - B_0 \left(\frac{yz}{L^2} \right) \mathbf{e}_y \quad (10.51)$$

Considérons une particule chargée de masse m et de charge e piégée dans cette configuration. L'emploi d'un système d'unités naturelles simplifie l'étude de ce problème, m est l'unité de masse, $e^2 B_0 / m$ est l'unité de courant électrique, $m / e B_0$ est l'unité de temps et L l'unité de longueur.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{a} = -y \mathbf{e}_x - \frac{yz^2}{2} \mathbf{e}_x + \frac{xz^2}{2} \mathbf{e}_y \quad (10.52)$$

Introduisons les couples de variables angles-actions (10.34) décrivant le système intégrable associé au champ uniforme $\mathbf{A}_0 = -y \mathbf{e}_x : x = \sqrt{2D} \cos \varphi + \sqrt{2J} \sin \theta$, $y = \sqrt{2D} \sin \varphi + \sqrt{2J} \cos \theta$, $\mathbf{p} - \mathbf{A}_0 = \sqrt{2J} \cos \theta \mathbf{e}_x - \sqrt{2J} \sin \theta \mathbf{e}_y + P \mathbf{e}_z$. Dans la configuration de champ uniforme le hamiltonien est donné par la forme classique : $H_0 = (\mathbf{p} - \mathbf{A}_0)^2 / 2 = J + P^2 / 2$. L'ajout du potentiel vecteur \mathbf{a} décrivant les zones de champs fort et faible perturbe ce hamiltonien et la perturbation V doit être exprimée en fonction des variables angles et actions.

$$V = -(\mathbf{p} - \mathbf{A}_0) \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{2} \mathbf{a}^2 = z^2 \left[J + \sqrt{JD} \sin(\theta + \varphi) \right] + \frac{z^4}{4} \left[J + D + 2\sqrt{JD} \sin(\theta + \varphi) \right]$$

La théorie des perturbations adiabatiques peut alors être appliquée à cette perturbation V ; les valeurs moyennes des termes de couplage dipolaire et pondéromoteur sont aisément calculées ainsi que la valeur du terme du deuxième ordre (10.45).

$$\langle V \rangle_0 = z^2 J + \frac{z^4}{4} (J + D), \quad \frac{V_1^2}{4} - \frac{V_1}{2} \frac{\partial V_1}{\partial J} = \frac{1}{4} z^4 D (J - 1)$$

Le hamiltonien décrivant la dynamique d'une particule chargée dans la zone de confinement est alors égal à :

$$H = J + P^2 / 2 + z^2 J + z^4 (J + DJ) / 4$$

où nous avons négligé les termes d'ordre supérieur à z^4 . Le mouvement d'oscillation le long de l'axe des z entre les deux régions de champ fort est ensuite analysé à l'aide d'un couple de variables angle-action approprié (I, φ) ; on effectue donc une ultime transformation canonique :

$$[(\theta, \varphi, z), (J, D, P)] \rightarrow [(\theta, \varphi, \phi), (J, D, I)]$$

sur la base la fonction génératrice de première espèce : $F_1(z, \phi) = \sqrt{J/2}z^2 \cot \phi$. Les anciens et nouveaux moments sont donnés par les formules de génération (10.2).

$$P = \frac{\partial F_1}{\partial z} = \sqrt{2J}z \cot \phi, \quad I = -\frac{\partial F_1}{\partial \phi} = \sqrt{\frac{J}{2}}z^2 \frac{1}{\sin^2 \phi}$$

Le hamiltonien final est obtenu par substitution en éliminant les termes oscillants ($\langle \sin^4 \phi \rangle = 3/8$).

$$H = J + \sqrt{2J}I + \frac{3}{16}I^2 D + \frac{3}{16}I^2 \quad (10.53)$$

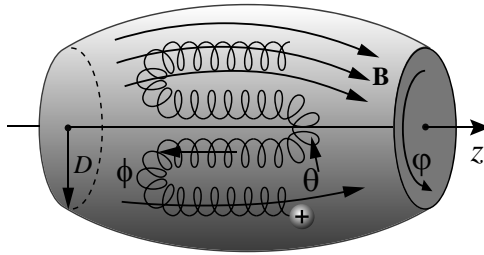


Figure 10.14 Surface de dérive dans une configuration de type miroir.

Le mouvement d'une particule chargée dans la zone confinement d'une configuration magnétique de type miroir est donc la combinaison de deux rotations et d'une oscillation :

- une rotation rapide, d'angle θ , autour des lignes de champ, le mouvement cyclotronique,
- une oscillation, de phase ϕ , le long des lignes de champ entre les deux zones de champ fort et
- une rotation lente, d'angle φ , autour de l'axe magnétique de la configuration.

Les hypothèses d'adiabaticité qui sous-tendent ce modèle doivent être vérifiées *a posteriori* ; la dynamique angulaire donnée par les équations de Hamilton doit donc vérifier un ordering fort entre les périodes de ces deux rotations et de cette oscillation, dite *de bounce*.

$$\frac{d\theta}{dt} = 1 > \frac{d\phi}{dt} = \sqrt{2J} > \frac{d\varphi}{dt} = \frac{3}{16}I^2$$

Remarquons pour conclure que ce modèle peut être analysé plus précisément pour dégager le concept de cône de perte et que la rotation autour de l'axe magnétique à son origine principale dans la courbure et non dans le gradient du champ. La figure 10.14 illustre ce mouvement complexe, autour, le long et à travers les lignes de champ ; le concept de surface de dérive décrite par le mouvement du centre guide permet de visualiser la nature de l'orbite.

10.4 RÉSONANCES

La théorie des perturbations adiabatiques, aux premier et deuxième ordres, ainsi que l'invariance adiabatique des actions, constituent les deux principaux résultats permettant d'étudier les systèmes non-intégrables voisins d'un système intégrable ; l'hypothèse qui sous-tend la validité de ces résultats est l'absence de résonances. En effet, dans le hamiltonien adiabatique $K(\mathbf{I})$ (10.45) associé au hamiltonien non-intégrable $H_0(\mathbf{J}) + V(\mathbf{J}, \theta)$, ainsi que dans la transformation canonique (10.43), apparaissent des dénominateurs du type $\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{J}) = N_1 \omega_1(\mathbf{J}) + N_2 \omega_2(\mathbf{J}) + N_3 \omega_3(\mathbf{J})$ qui, lorsqu'ils prennent des valeurs faibles, sont qualifiés de résonnants.

Ainsi, bien que V soit petit devant H_0 , il n'est pas exclu que certains éléments du développement de $V = V_0 + \sum V_N \cos[\mathbf{N} \cdot \theta]$ brisent cet ordering adiabatique en présence d'un dénominateur résonnant.

$$|V(\mathbf{J}, \theta)| \ll |H_0(\mathbf{J})| \quad \text{et} \quad |\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{J})| \ll 0 \rightarrow \left| \frac{V_N(\mathbf{J}, \theta)}{\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{J})} \right| \geq |H_0(\mathbf{J})| \quad (10.54)$$

Il est alors nécessaire de considérer séparément ces termes résonnants qui brisent l'adiabaticité de la perturbation. L'analyse de ces termes est extrêmement importante car en régime adiabatique les transferts d'impulsion-énergie entre un champ et une particule sont exponentiellement faibles contrairement au régime résonnant où ces transferts sont importants et peuvent croître exponentiellement avec le temps sous certaines conditions d'instabilité.

Le fait que les transferts d'impulsion-énergie soient significatifs uniquement en régime résonnant confère aux couplages résonnants un statut particulier :

- il est parfois nécessaire d'éviter de telles résonances qui peuvent être dommageables, par exemple, dans les problèmes de confinement ;
- il est par contre utile de rechercher de tels couplages résonnants pour des systèmes d'accélération ou pour des schémas de chauffage.

Deux paramètres importants sont à considérer pour une résonance :

- son extension dans l'espace des phases (10.30), c'est-à-dire l'ensemble des positions et vitesses piégées (figure 10.10) ;
- le transfert d'énergie entre le champ et la particule associée à ce couplage.

Ce paragraphe est consacré à l'identification des principales résonances champ électromagnétique-particule et au calcul des transferts d'énergie-impulsion résonnants.

10.4.1 Résonances linéaires

Dans le paragraphe consacré aux systèmes intégrables nous avons identifié et décrit deux types d'oscillateurs :

- l'oscillateur harmonique (10.25) et
- le pendule non-linéaire (10.29).

Ces deux oscillateurs donnent lieu aux phénomènes de résonances linéaire et non-linéaire. Nous allons d'abord étudier les résonances linéaires et démontrer qu'un ensemble d'oscillateurs linéaires résonnants ne peut pas transférer d'énergie à un champ et se comporte toujours comme un milieu absorbant malgré l'absence de dissipation. L'origine de cette dissipation est à rechercher dans l'hypothèse des phases aléatoires qui implique une production d'entropie. Soit un oscillateur linéaire (10.25) excité par une force périodique $E \cos \omega t$:

$$H(p, q, t) = \frac{p^2}{2} + \Omega^2 \frac{q^2}{2} + qE \cos \omega t \quad (10.55)$$

Les variables angle θ et action J de cet oscillateur non perturbé (10.26) constituent le cadre approprié pour l'analyse des transferts d'énergie entre la force $E \cos \omega t$ et l'oscillateur : $q = \sqrt{2J/\Omega} \sin \theta$, $p = \sqrt{2J\Omega} \cos \theta$. Ainsi le hamiltonien se sépare en une partie intégrable H_0 et une perturbation résonnante V .

$$H = H_0(J) + V(J, \theta) = \Omega J + E \sqrt{\frac{J}{2\Omega}} [\sin(\theta - \omega t) + \sin(\theta + \omega t)] \quad (10.56)$$

Essayons de construire un développement perturbatif pour résoudre les équations de Hamilton. Pour ce faire, calculons l'incrément d'action au premier ordre en V/H_0 pour un oscillateur excité à partir d'un état initial (J_0, θ_0) à l'instant $t = 0$.

$$\delta J(J_0, \theta_0, t) = J(t) - J_0 = -E \sqrt{\frac{J_0}{2\Omega}} \frac{\sin[(\Omega - \omega)t + \theta_0] - \sin(\theta_0)}{\Omega - \omega}$$

où nous avons négligé le terme non résonnant devant le terme résonnant. Ce dernier résultat indique qu'il n'y a pas d'échange d'énergie au premier ordre si nous considérons un ensemble d'oscillateurs dont la phase initiale θ_0 est uniformément distribuée : $\langle \delta J \rangle_{\theta_0} = 0$.

Le calcul de l'échange d'énergie entre un ensemble d'oscillateurs et la force $E \cos \omega t$ doit donc être mené au deuxième ordre en V/H_0 . Ce calcul est grandement simplifié par la relation d'Einstein (10.28) ; il est alors simplement nécessaire d'évaluer la moyenne du carré de l'échange au premier ordre.

$$\langle \delta J \delta J \rangle_{\theta_0} = E^2 \frac{J_0}{\Omega} \frac{\sin^2 \left[\frac{\Omega - \omega}{2} t \right]}{(\Omega - \omega)^2}$$

et de prendre sa dérivée par rapport à l'action conformément à la formule (10.28). Le résultat final :

$$\langle \delta J \rangle_{\theta_0} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial J_0} \langle \delta J \delta J \rangle_{\theta_0} \rightarrow \langle \delta J \rangle_{\theta_0} = \frac{E^2}{2\Omega} \frac{\sin^2 \left[\frac{\Omega - \omega}{2} t \right]}{(\Omega - \omega)^2} \quad (10.57)$$

fait apparaître le carré de la fonction sinus cardinal et démontre ainsi que, quelque soit le niveau d'excitation initiale J_0 , un ensemble d'oscillateurs sans préparation initiale de la phase θ_0 absorbe toujours de l'énergie : $\langle \delta J \rangle_{\theta_0} > 0$. Seuls les oscillateurs non-linéaires, au voisinage de leurs résonances, sous certaines conditions, peuvent convertir leur énergie mécanique en énergie électromagnétique. La raison de cette propriété est à rechercher dans le processus de synchronisation des oscillateurs. En effet, un ensemble d'oscillateurs linéaires ne peut pas être synchronisé (principe de superposition des réponses linéaires), par contre, la synchronisation est une propriété générique des oscillateurs non-linéaires.

10.4.2 Résonances Landau

Le plus simple et le plus répandu des systèmes non-linéaires est le pendule non-linéaire. L'origine de son importance est à rechercher dans le théorème de représentation par série de Fourier qui permet d'exprimer n'importe quel hamiltonien, voisin d'un hamiltonien intégrable, comme une série de Fourier sur les variables angles : ainsi, tout système peut être considéré comme une combinaison de pendules non-linéaires (10.41). Isolons une composante de Fourier $V_N(\mathbf{J}) \cos[\mathbf{N} \cdot \theta - \omega_0 t]$ de cette série et considérons un système intégrable perturbé par une telle résonance non-linéaire.

$$H(\mathbf{J}, \theta, t) = H_0(\mathbf{J}) - V_N(\mathbf{J}) \cos[\mathbf{N} \cdot \theta - \omega_0 t]$$

Introduisons les pulsations non perturbées ω et l'inverse de la matrice de masse \mathbf{M} (10.40). La théorie des perturbations adiabatiques peut être appliquée lorsque $|V_N(\mathbf{J}, \theta)| \ll |H_0(\mathbf{J})|$. Mais, au voisinage d'une résonance : $\mathbf{N} \cdot \omega \sim \omega_0$, même si l'amplitude V_N reste petite, elle apparaît dans le schéma perturbateur (10.42) comme un numérateur au-dessus d'un dénominateur petit et l'ordering de départ est brisé (10.54). La méthode de moyennisation utile pour étudier le régime adiabatique est donc inappropriée au voisinage des résonances. Il est alors nécessaire de considérer les équations de Hamilton.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{J}}{dt} &= -\mathbf{N} V_N(\mathbf{J}) \sin[\mathbf{N} \cdot \theta - \omega_0 t] \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega(\mathbf{J}) - \frac{\partial V_N(\mathbf{J})}{\partial \mathbf{J}} \cos[\mathbf{N} \cdot \theta - \omega_0 t] \end{aligned} \quad (10.58)$$

Une intégration sur les temps courts à partir du point $[\mathbf{J}_0, \theta_0]$ donne :

$$\mathbf{J}(t) = \mathbf{J}_0 + \mathbf{N} \frac{V_N(\mathbf{J}_0)}{\mathbf{N} \cdot \omega(\mathbf{J}_0) - \omega_0} [\cos(\mathbf{N} \cdot \omega(\mathbf{J}_0)t - \omega_0 t + \mathbf{N} \cdot \theta_0) - \cos(\mathbf{N} \cdot \theta_0)]$$

et montre clairement l'impact de la résonance :

$$\mathbf{N} \cdot \omega(\mathbf{J}_0) = \omega_0 \quad (10.59)$$

(appelée résonance Landau dans le contexte de l'interaction onde-particule) sur les solutions approchées des équations du mouvement. La relation (10.59) définit une courbe dans l'espace des actions (si l'espace des actions est de dimension 2, ou une surface s'il est de dimension supérieure) au voisinage de laquelle la théorie adiabatique tombe en défaut (Figure 10.15). Dans cet espace des actions, les courbes (ou surfaces) isoenergétiques, définies par $H_0(\mathbf{J}) = C^{te}$, constituent un deuxième lieu de points autour desquels s'organise la structure de la résonance.

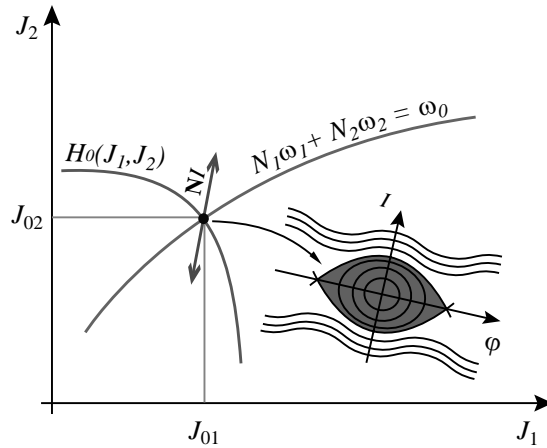


Figure 10.15 Surface isoénergétique, surface de résonance et direction de la perturbation pour une résonance Landau.

Considérons une action donnée \mathbf{J}_0 à l'intersection d'une courbe isoénergétique et d'une courbe de résonance (Figure 10.15). Les équations de Hamilton (10.58) permettent d'identifier un invariant du mouvement perturbé : $\mathbf{N} \times \mathbf{J}$; la variation d'action induite par la perturbation $V_{\mathbf{N}}(\mathbf{J})$ s'effectue donc suivant la direction \mathbf{N} dans l'espace des actions. Ainsi, il est possible de restreindre la description de la résonance à l'étude de la variable scalaire $I(t)$ définie par : $\mathbf{J}(t) = \mathbf{J}_0 + \mathbf{N}I(t)$. Nous allons démontrer que cette variable scalaire est l'action d'un pendule non-linéaire. Pour ce faire, considérons une particule possédant trois degrés de liberté et développons le hamiltonien au voisinage de \mathbf{J}_0 , le développement étant mené au deuxième ordre.

$$\begin{aligned}
 H(\mathbf{J}, \theta) &= H_0(\mathbf{J}_0) + \omega(\mathbf{J}_0) \cdot (\mathbf{J} - \mathbf{J}_0) \\
 &\quad + \frac{1}{2} (\mathbf{J} - \mathbf{J}_0) \cdot \mathbf{M}(\mathbf{J}_0) \cdot (\mathbf{J} - \mathbf{J}_0) - V_{\mathbf{N}}(\mathbf{J}_0) \cos[\mathbf{N} \cdot \theta - \omega_0 t]
 \end{aligned}$$

Ensuite, introduisons trois directions de référence indépendantes (la matrice \mathbf{M} étant supposée non singulière et non dégénérée) dans l'espace des actions :

$$\mathbf{N}, \quad \mathbf{U} = [\mathbf{M} \cdot \mathbf{N}] \times \mathbf{N} \quad \text{et} \quad \mathbf{V} = [\mathbf{M} \cdot \mathbf{N}] \times \mathbf{U}.$$

Ces trois directions étant indépendantes, définissons un nouveau système de variables canoniques :

$$[(J_1, J_2, J_3), (\theta_1, \theta_2, \theta_3)] \rightarrow [(I, I_U, I_V), (\phi, \phi_U, \phi_V)].$$

Ce nouveau système étant engendré par la fonction génératrice linéaire de deuxième espèce $F_2(\theta, I, I_U, I_V) = \mathbf{J}_0 \cdot \theta + I\mathbf{N} \cdot \theta + I_U \mathbf{U} \cdot \theta + I_V \mathbf{V} \cdot \theta$. Les formules de génération (10.2) :

$$\mathbf{J} = \frac{\partial F_2}{\partial \theta} = \mathbf{J}_0 + I\mathbf{N} + I_U \mathbf{U} + I_V \mathbf{V}, \quad \phi = \frac{\partial F_2}{\partial I} = \mathbf{N} \cdot \theta$$

permettent ainsi d'exprimer le nouvel hamiltonien K .

$$K = K_0(I_U, I_V) + [\mathbf{N} \cdot \mathbf{M}(\mathbf{J}_0) \cdot \mathbf{N}] \frac{I^2}{2} - V_{\mathbf{N}}(\mathbf{J}_0) \cos(\phi - \omega_0 t) \quad (10.60)$$

Nous reconnaissons le hamiltonien du pendule non-linéaire que nous avons étudié dans le paragraphe consacré aux systèmes intégrables. Nous avons identifié dans ce paragraphe deux classes d'orbites, circulante et piégée, ainsi que la nature topologique du portrait de phase. Dans ce paragraphe consacré aux résonances nous allons étudier l'aspect énergétique du pendule non-linéaire et établir la relation de transfert d'énergie entre une population dont la phase initiale est uniformément distribuée et la perturbation à l'origine de la résonance.

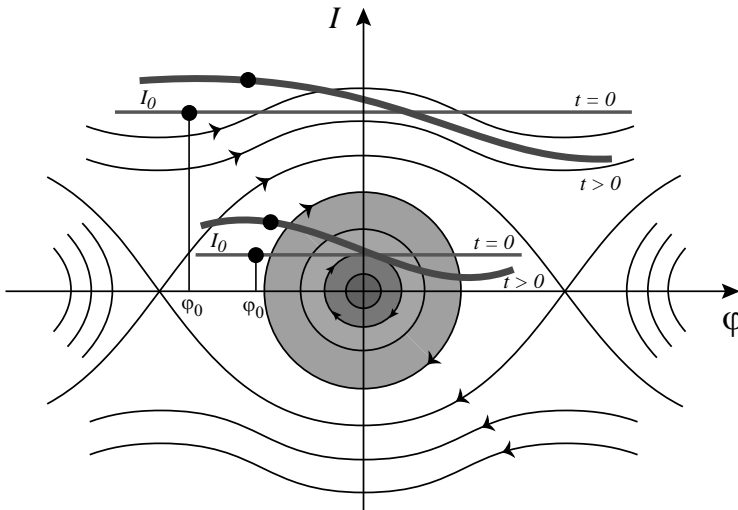


Figure 10.16 Transfert d'énergie pour une résonance Landau.

Pour ce faire, introduisons la fonction génératrice de deuxième espèce :

$$F_2(\phi, I) = I(\phi - \omega_0 t)$$

qui permet de réduire le hamiltonien précédent à une forme canonique plus appropriée pour cette étude énergétique :

$$K \rightarrow H(I, \varphi) = \frac{1}{2}(I - \omega_0)^2 - \Omega^2 \cos \varphi,$$

où nous avons introduit la pulsation :

$$\Omega^2 = \frac{V_{\mathbf{N}}(\mathbf{J}_0)}{\mathbf{N} \cdot \mathbf{M}(\mathbf{J}_0) \cdot \mathbf{N}} \quad (10.61)$$

Évaluons, pour les temps courts, l'évolution de l'angle φ et de l'action I à partir d'un point initial d'angle φ_0 et d'action I_0 (Figure 10.16). La conservation de l'énergie se traduit par la relation : $(I - \omega_0)^2 - 2\Omega^2 \cos \varphi = (I_0 - \omega_0)^2 - 2\Omega^2 \cos \varphi_0$. À l'ordre zéro, c'est-à-dire en négligeant la résonance, nous obtenons l'évolution inertielle : $I = I_0$ et $\varphi = \varphi_0 + (I_0 - \omega_0)t$ qui permet d'exprimer la variation d'action au premier ordre.

$$I(I_0, \varphi_0, t) = I_0 - \frac{2\Omega^2}{I_0 - \omega_0} \sin\left(\frac{I_0 - \omega_0}{2}t\right) \sin\left(\frac{I_0 - \omega_0}{2}t + \varphi_0\right)$$

L'évolution aux temps courts de l'action est une fonction de sa phase initiale φ_0 et de son action initiale I_0 . Ce phénomène, lié à la non-linéarité du couplage, est appelé *bunching dans l'espace des phases* car il provoque des accumulations et déplétions de particules et la distribution en phase, initialement homogène, devient inhomogène (Figure 10.16). Ce phénomène de bunching, s'il est considéré comme une cause et non comme une conséquence, constitue la source du transfert d'énergie ; en effet, en électrodynamique, la phase (moyenne) relative entre un champ électrique et un ensemble de particules détermine la nature, active ou réactive, du transfert d'énergie.

En physique des plasmas, la phase relative de l'onde et des particules est initialement uniformément distribuée. Il est donc nécessaire de moyennner la relation précédente sur la phase initiale pour évaluer le transfert d'énergie résonnant entre une population de particules et une onde. La valeur moyenne $\langle I - I_0 \rangle_{\varphi_0} = \langle \delta I \rangle_{\varphi_0} = 0$ est nulle ; par contre, la valeur moyenne du carré de l'incrément d'action est non nulle.

$$\langle \delta I^2 \rangle_{\varphi_0} = \frac{2\Omega^4}{(I_0 - \omega_0)^2} \sin^2\left(\frac{I_0 - \omega_0}{2}t\right) \quad (10.62)$$

La relation d'Einstein (10.28) permet d'en déduire la variation d'action, au deuxième ordre, de la population distribuée uniformément en phase initiale.

$$\langle \delta I \rangle_{\varphi_0} = \Omega^4 t^2 G [(I_0 - \omega_0)t] \quad (10.63)$$

où nous avons introduit la **fonction de gain** G défini par :

$$G(x) \equiv \left(\cos x + \frac{x}{2} \sin x - 1 \right) / x^3$$

dont le graphe est représenté sur la figure 10.17. Ainsi $\langle \delta I \rangle_{\varphi_0}$ peut être positif ou négatif selon le signe de $I_0 - \omega_0$. Un ensemble de particules résonnantes plus rapides que l'onde cède de l'énergie à celle-ci et un ensemble de particules résonnantes plus lentes absorbe de l'énergie.

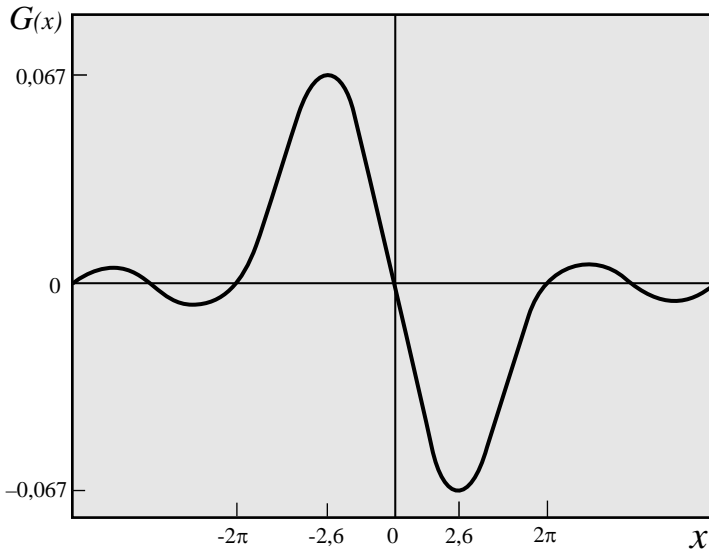


Figure 10.17 Fonction de gain des résonances Landau $G(x)$.

Ainsi, les résonances non-linéaires, ou résonances Landau, permettent des transferts d'énergie et d'impulsion :

- des particules vers les ondes, en physique des plasmas on parle alors d'instabilités et en physique des faisceaux de systèmes générateurs ;
- des ondes vers les particules, on parle alors d'absorption et de chauffage.

Nous allons maintenant étudier les résonances **cyclotrons** associées aux perturbations du mouvement intégrable (10.35) et démontrer qu'elles peuvent toujours être ramenées au cas Landau. Il serait également possible d'identifier les résonances, dites **Compton**, associées au mouvement intégrable (10.39) et de les ramener au cas Landau, mais, nous ne considérerons pas cette réduction canonique ici. Notons enfin que la fonction de gain G décrivant l'énergétique du couplage onde-particule en régime résonnant est universelle mais demeure restreinte aux cas des temps courts.

10.4.3 Résonances cyclotron

Considérons une particule chargée de masse m et de charge e , repérons sa position par le vecteur $\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$ et sa vitesse par le vecteur $\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z$ sur une base cartésienne orthonormée directe $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$. Cette

particule chargée est plongée dans un champ magnétique uniforme $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$ dérivant du potentiel vecteur $\mathbf{A}_0 = -B_0 y \mathbf{e}_x$. Dans le cadre d'une description hamiltonienne on introduit $\mathbf{p} = p_x \mathbf{e}_x + p_y \mathbf{e}_y + P \mathbf{e}_z$ le moment canoniquement conjugué à la position \mathbf{r} . Au cours de cette étude nous utiliserons un système d'unités tel que l'unité de masse soit m , l'unité d'intensité $e^2 B_0/m$, l'unité de longueur cm/eB_0 (où c est la vitesse de la lumière) et l'unité de temps m/eB_0 . Afin de développer un formalisme de perturbation efficace effectuons la transformation canonique (10.33) $[(p_x, p_y), (x, y)] \rightarrow [(I, X), (\theta, Y)]$ qui se traduit par les relations : $x = X + \sqrt{2I} \sin \theta$ et $y = Y + \sqrt{2I} \cos \theta$. Ainsi le hamiltonien relativiste (10.7) décrivant le mouvement cyclotronique s'exprime comme :

$$H_0 = \gamma = \sqrt{1 + (\mathbf{p} - \mathbf{A}_0)^2} = \sqrt{1 + I + \frac{P^2}{2}}$$

Étudions maintenant l'interaction de cette particule magnétisée avec une OPMH dérivant du potentiel vecteur $\mathbf{a} = a \sin(\omega t + kx) \mathbf{e}_y$; le potentiel vecteur \mathbf{A} est donc la somme du potentiel décrivant le champ statique \mathbf{A}_0 plus le potentiel associé à cette onde \mathbf{a} .

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{a} = -y \mathbf{e}_x + a \sin(\omega t + kx) \mathbf{e}_y$$

Le hamiltonien de la particule interagissant avec cette superposition de deux champs est donc donné par :

$$H_0 + V = \sqrt{1 + [\mathbf{p} - \mathbf{A}_0 - \mathbf{a}]^2} = \sqrt{1 + (\mathbf{p} - \mathbf{A}_0)^2} - \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{A}_0) \cdot \mathbf{a}}{\gamma} + \frac{1}{2\gamma} \mathbf{a}^2$$

où nous avons séparé une partie intégrable H_0 associée au champ statique et une perturbation V associée à l'onde. La perturbation V est composée de deux termes, un terme linéaire en \mathbf{a} appelé couplage dipolaire et un terme quadratique dénommé couplage pondéromoteur.

La théorie de l'interaction onde-particule est centrée sur l'étude du terme dipolaire, le terme pondéromoteur est en général négligeable devant les effet dipolaires résonnants. L'identification des résonances associées au terme dipolaire nécessite l'utilisation des variables angles-actions afin d'analyser la brisure de l'adiabaticité.

$$(\mathbf{p} - \mathbf{A}_0) \cdot \mathbf{a} = -a\sqrt{2I} \sin \left[\omega t + k\sqrt{2I} \sin \theta + kX \right] \sin \theta$$

Cette dernière expression peut être développée en utilisant l'identité :

$$\sin [u + b \sin \alpha] = \sum J_n(b) \sin [u + n\alpha]$$

où n décrit l'ensemble des entiers et où $J_n(b)$ sont les fonctions de Bessel de première espèce, d'ordre entier, définis (entre autres) par la récurrence :

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} \dots, \quad J_1(x) = -\frac{dJ_0}{dx} \rightarrow J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x)$$

Les graphes des trois premières fonctions de Bessel, $J_n(x)$ pour $n = 0, 1, 2$, sont représentés sur la figure 10.18.

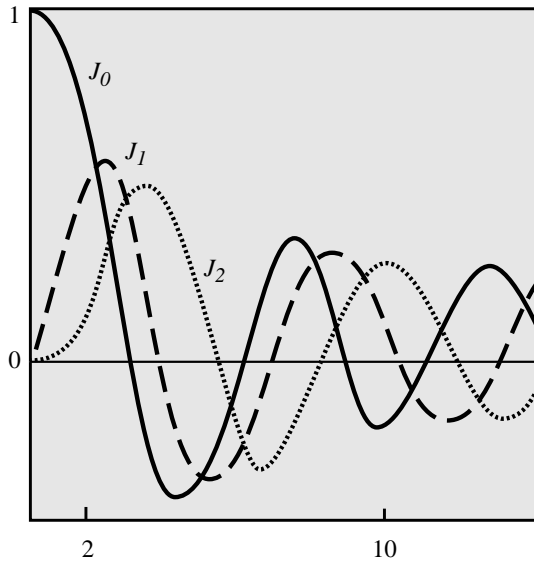


Figure 10.18 Fonctions de Bessel $J_n(x)$, $n = 0, 1, 2$.

Ainsi, le hamiltonien apparaît comme la somme d'une série de résonances entre le mouvement cyclotronique de rotation et la rotation de la phase de l'onde.

$$V = \frac{a}{\gamma} \sqrt{\frac{I}{2}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(k\sqrt{2I}) [\cos[\omega t + (n-1)\theta + kX] - \cos[\omega t + (n+1)\theta + kX]]$$

Compte tenu de l'identité : $2J'_n(u) = J_{n-1}(u) - J_{n+1}(u)$, où le prime dénote la dérivée par rapport à l'argument u , les résonances $n-1$ et $n+1$ peuvent être regroupées deux à deux pour simplifier la série, le résultat final :

$$V = -a \frac{\sqrt{2I}}{\sqrt{1+I+\frac{p^2}{2}}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J'_n(k\sqrt{2I}) \cos(\omega t + n\theta + kX)$$

présente donc deux types de résonances.

- La résonance cyclotron fondamentale $n = -1$, dont l'origine physique est illustrée sur la figure 10.19 ; un champ électrique $\mathbf{E} = -\partial\mathbf{a}/\partial t$ polarisé linéairement et oscillant à la pulsation ω peut toujours être décomposé en deux champs tournants avec une vitesse de rotation ω . La composante tournant dans le même sens de rotation que le mouvement cyclotronique de la particule échange de l'énergie avec cette dernière car le produit $\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$ garde un signe constant, autorisant ainsi un transfert significatif d'énergie. Ce phénomène de résonance correspond à un synchronisme entre le mouvement de la particule et la dynamique (oscillation ou rotation) du champ.
- les résonances cyclotrons harmoniques $n \neq -1$, dont l'origine est illustrée par la deuxième partie du schéma de la figure 10.19, dans ce cas aussi le synchronisme entre le mouvement de la particule et la dynamique de l'onde est à l'origine de la résonance, mais ce sont les effets spatiaux de longueur d'onde finie, comparée au rayon de Larmor, qui assurent les conditions de ce synchronisme.

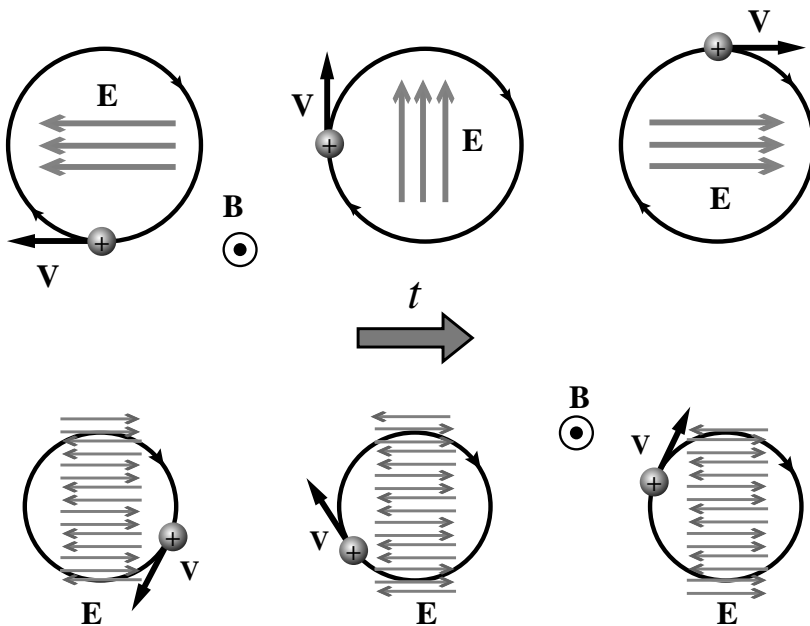


Figure 10.19 Synchronisme champ-vitesse et transfert de puissance pour une résonance cyclotron.

La nature de ces effets de rayon de Larmor fini est manifeste si nous considérons le développement de la fonction $J'_n(k\sqrt{2}l)$ dont l'argument est proportionnel au rapport du rayon de Larmor de la particule sur la longueur d'onde du champ ; pour les harmoniques élevées l'amplitude de ces résonances cyclotrons décroît rapidement avec ce rapport lorsqu'il est plus petit que un.

10.5 CHAOS

Nous venons d'étudier, successivement, les régimes d'interactions adiabatique et résonant, l'étude de ce dernier cas a été restreinte à l'analyse d'une résonance isolée ; mais, en général, comme dans le cas cyclotronique qui vient d'être présenté, le hamiltonien décrivant l'interaction possède une série de résonances :

$$H(\mathbf{J}, \theta) = H_0(\mathbf{J}) + \sum_{\mathbf{N}} V_{\mathbf{N}}(\mathbf{J}) \cos[\mathbf{N} \cdot \theta - \omega_{\mathbf{N}} t].$$

Il est donc nécessaire d'étudier **les interactions entre plusieurs résonances**.

10.5.1 Critère de Chirikov

Considérons donc un hamiltonien H_R présentant deux résonances voisines :

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_1 \cdot \omega(\mathbf{J}_1) &= 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{N}_2 \cdot \omega(\mathbf{J}_2) = 0. \\ H_R &= H_0(\mathbf{J}) + V_{\mathbf{N}_1} \cos[\mathbf{N}_1 \cdot \theta] + V_{\mathbf{N}_2} \cos[\mathbf{N}_2 \cdot \theta] \end{aligned} \quad (10.64)$$

Nous avons démontré que dans l'espace des actions ces deux résonances :

$$\mathbf{N}_1 \cdot \omega(\mathbf{J}_1) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{N}_2 \cdot \omega(\mathbf{J}_2) = 0$$

définissent deux courbes. Au voisinage de chacune de ces courbes le domaine normalisé de piégeage, ou *largeur d'îlot*, est défini par les relations (10.30 et 10.61) :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{J}_1 &= 4\mathbf{N}_1 \sqrt{V_{\mathbf{N}_1}(\mathbf{J}_1) / \mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{M}(\mathbf{J}_1) \cdot \mathbf{N}_1}, \\ \Delta \mathbf{J}_2 &= 4\mathbf{N}_2 \sqrt{V_{\mathbf{N}_2}(\mathbf{J}_2) / \mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{M}(\mathbf{J}_2) \cdot \mathbf{N}_2}. \end{aligned}$$

La figure 10.20 illustre ce régime à plusieurs résonances. Introduisons le paramètre S qui mesure le rapport de la somme des deux demi-largeurs de piégeage sur la distance entre les résonances.

$$S \equiv \frac{[\text{Somme des demi-largeurs des zones piégées}]}{[\text{Distance entre les points O des résonances}]} = \frac{\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2}{|\mathbf{N}_1| |\mathbf{N}_2|} \frac{|\Delta \mathbf{J}_1| + |\Delta \mathbf{J}_2|}{2 |\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1|} \quad (10.65)$$

S est appelé **le paramètre de Chirikov** : s'il est plus petit que 1, les domaines piégés sont disjoints et l'influence mutuelle des deux résonances n'a pas lieu d'être considérée, les résultats du paragraphe précédent sont alors valides.

Par contre, si $S \gtrsim 1$, les orbites entre les deux résonances seront déterminées par une tendance au piégeage dans la résonance \mathbf{N}_1 et par une tendance au piégeage dans la résonance \mathbf{N}_2 . Ces deux tendances contradictoires perturbent fortement le mouvement et sont à l'origine d'un comportement complexe. Existe-t-il un critère de dominance entre deux résonances se recouvrant ainsi ? La réponse à cette question est aisée s'il existe un ordering fort entre l'amplitude des deux résonances, $V_{\mathbf{N}_1} \gg V_{\mathbf{N}_2}$

ou $V_{N_1} \ll V_{N_2}$. Il est alors légitime de négliger la plus faible des résonances. Mais, si $V_{N_1} \approx V_{N_2}$ et $S \approx 1$, le problème doit être analysé en détail.

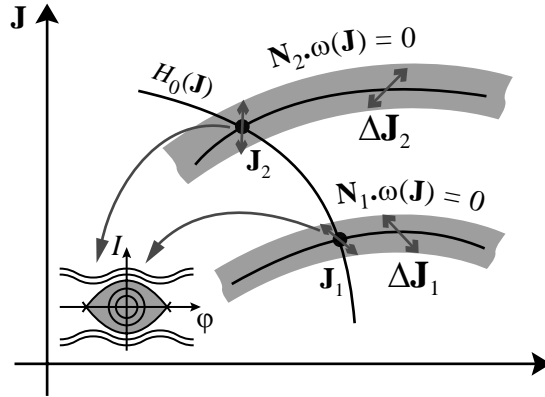


Figure 10.20 Interaction entre deux résonances voisines.

Il n'existe pas d'outil analytique pour étudier le hamiltonien à deux ondes (10.64) lorsque $V_{N_1} \approx V_{N_2}$ et $S \approx 1$; la réponse à la question précédente nécessite une étude numérique qui révèle un nouveau régime au-delà des régimes intégrable, adiabatique et résonnant : le régime chaotique.

Pour identifier ce nouveau régime, il est plus simple d'étudier le *hamiltonien de Chirikov-Taylor* H_{CT} associé au couple de variables canoniques (J, θ) et dépendant du temps, obtenu en considérant **une infinité de résonances équidistantes et de même amplitude**. Le hamiltonien de Chirikov-Taylor H_{CT} peut être considéré comme la symétrisation des hamiltoniens à deux ondes du type H_R afin d'éliminer les effets de bord.

$$H_R = \frac{J^2}{2} + V_n \cos(\theta - 2\pi nt) + V_m \cos(\theta - 2\pi mt) \rightarrow$$

$$H_{CT} = \frac{J^2}{2} + V \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \cos(\theta - 2\pi nt) \quad (10.66)$$

La formule sommatoire de Poisson :

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \exp(i2\pi nt) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - n)$$

permet alors d'établir les équations de Hamilton sous la forme :

$$dJ/dt = V \sin \theta \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - n), d\theta/dt = J.$$

L'interaction apparaît ainsi très localisée dans le temps et les actions restent constantes entre les instants $t = n$ et $t = n + 1$. Les équations du mouvement peuvent donc être remplacées par une récurrence sur la série discrète des valeurs $J_n = J(t = n)$ et $\theta_n = \theta(t = n)$.

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= J_n + V \sin \theta_n \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + J_{n+1} \pmod{2\pi} \end{aligned} \quad (10.67)$$

Nous venons ainsi de construire la *récurrence de Chirikov-Taylor*. Cette récurrence est le modèle de base de la théorie du chaos hamiltonien car elle présente une transition, selon la valeur du paramètre de couplage V , du régime adiabatique vers le régime chaotique.

Pour les petites valeurs de V , les variations de l'action sont petites et le régime de couplage est adiabatique. Les orbites s'organisent comme un ensemble de courbes $J^2 \approx -2V \cos \theta + C$, définissant ainsi les tores de KAM.

$$V < 1 \rightarrow \frac{dJ}{d\theta} \approx \frac{J_{n+1} - J_n}{\theta_{n+1} - \theta_n} = \frac{V \sin \theta_n}{J_{n+1}} \approx \frac{V \sin \theta}{J} \rightarrow J^2 \approx -2V \cos \theta + C$$

C'est effectivement ce qui est observé numériquement sur la figure 10.21 qui présente l'allure du portrait de phases de cette récurrence pour un ensemble homogène de conditions initiales.

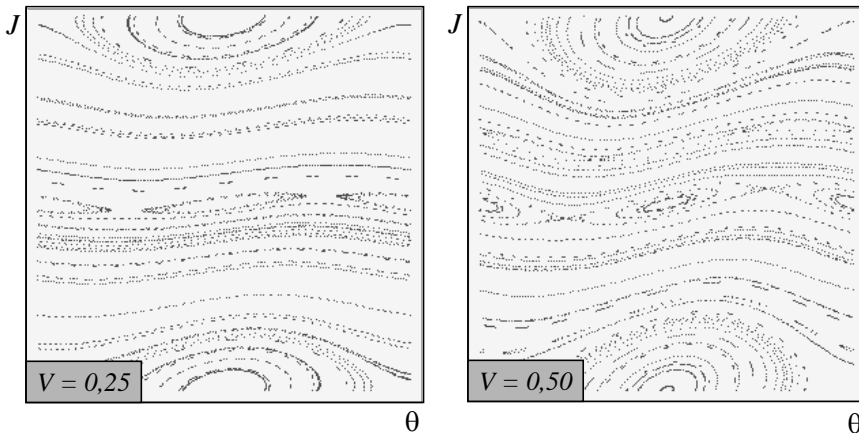


Figure 10.21 Récurrence de Chirikov-Taylor en régime adiabatique, $V = 0,25$ et $V = 0,50$.

Par contre, pour les grandes valeurs de V , une petite différence sur la position initiale de l'angle est exponentiellement amplifiée par la récurrence.

$$V > 1 \rightarrow |(\theta_{n+1} - \theta_n) - (\theta_n - \theta_{n-1})| \approx \varepsilon V \rightarrow \frac{(\theta_{n+1} - \theta_n)}{(\theta_1 - \theta_0)} \approx \exp(n \log \varepsilon V)$$

Sur la base de cette évaluation on peut donc s'attendre à une transition vers le chaos au voisinage de $V = 1$ car le système dynamique amplifie alors toute erreur initiale avec un taux exponentiel. Bien entendu, il nous faudrait définir plus précisément la signification de cette perte d'information, nous renvoyons le lecteur aux traités de dynamique chaotique conseillés dans les lectures complémentaires. Cette transition vers le chaos, que nous considérons uniquement comme l'apparence visuelle d'un désordre dans l'espace des phases (Figure 10.22) sans donner une définition précise, est effectivement observée numériquement ; la figure 10.22 présente l'allure du portrait de phases au voisinage de ce seuil chaotique.

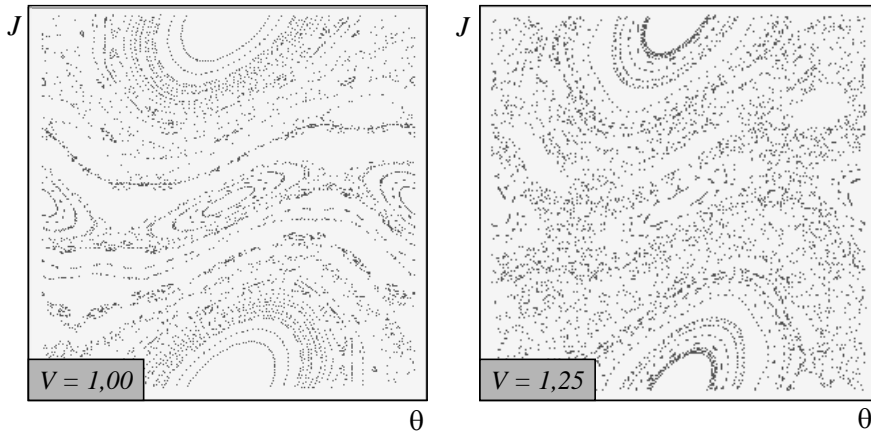


Figure 10.22 Récurrence de Chirikov-Taylor au seuil du régime chaotique $V = 1,00$ et $V = 1,25$.

Si nous calculons le paramètre de Chirikov S (10.65) pour le hamiltonien de Chirikov-Taylor (10.66) nous obtenons $S \approx V$; au-delà de cet exemple spécifique, de nombreuses simulations numériques pour de multiples hamiltoniens confirment l'existence d'une transition vers le régime chaotique lorsque :

$$S = \frac{|\Delta J_1| + |\Delta J_2|}{2|J_2 - J_1|} \gtrsim 1 \quad (10.68)$$

Ce résultat $S \gtrsim 1$, que nous considérons désormais comme un critère général, répond à la question que nous nous étions posée sur l'interaction de deux résonances voisines lorsque $V_{N_1} \approx V_{N_2}$ et $S \approx 1$; il constitue : **le critère de Chirikov de transition vers le chaos.**

10.5.2 Transition vers le chaos

Dans le paragraphe précédent, nous avons considéré qu'au delà du seuil de stochastité $S = 1$ les orbites sont chaotiques, sans définir précisément cette propriété. Nous allons maintenant affiner la description de l'espace des phases au voisinage du seuil

$S = 1$ et analyser la brisure d'adiabaticité, c'est-à-dire la destruction des tores de KAM par la composante non intégrable d'un hamiltonien voisin d'un hamiltonien intégrable.

C'est la distance entre les tores résonnants et la largeur des domaines piégés qui déterminent la nature du régime dynamique : régulier ou chaotique ; il est donc nécessaire d'étudier la distribution des tores résonnants dans l'espace des phases pour construire une description de la transition vers le chaos. Considérons un système non-linéaire intégrable, indépendant du temps, à deux degrés de liberté, décrit par le hamiltonien :

$$H = H_0(I, J) \rightarrow \omega_I(I, J) = \frac{\partial H_0}{\partial I}, \omega_J(I, J) = \frac{\partial H_0}{\partial J}$$

La figure 10.23 représente des tores de KAM structurant l'espace des phases (réduit) de ce système ; suivant la définition de l'intégrabilité au sens de Poincaré, les orbites s'appuient sur une famille de tores emboîtés. Il existe deux types de tores :

- les tores rationnels (résonnants) tels que le rapport des pulsation $\frac{\omega_I(I, J)}{\omega_J(I, J)}$ soit un nombre rationnel $\frac{m}{n}$ où m et n sont deux entiers : sur ces tores les orbites sont fermées et la particule effectue m grands tours et n petits tours,
- les tores irrationnels (adiabatiques) tels que le rapport des pulsations $\frac{\omega_I(I, J)}{\omega_J(I, J)}$ ne soit pas un rationnel : sur ces tores les orbites ne sont pas fermées et une orbite couvre la surface du tore de façon ergodique.

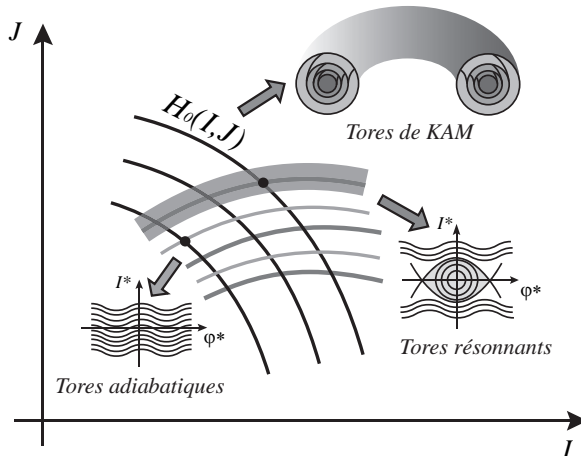


Figure 10.23 Torres de KAM, tores irrationnels adiabatiques et tores rationnels résonnants.

Perturbons ce système intégrable par une faible perturbation indépendante du temps :

$$H = H_0(I, J) + \sum_{n=1}^{n=+\infty} \sum_{m=1}^{m=+\infty} V_{nm}(I, J) \cos[n\theta + m\phi]$$

alors, les tores résonnants $n\omega_I(I, J) + m\omega_J(I, J) = 0$ sont détruits et développent des domaines piégés. Entre ces tores, si $V_{n,m}(I, J) \ll 1$, persiste un régime adiabatique sur les tores non-résonnants. La figure 10.23 illustre dans l'espace des actions (I, J) l'organisation des tores rationnels (résonnants) et irrationnels (adiabatiques), la persistance de l'adiabaticité entre les tores résonnants est l'objet du célèbre théorème KAM que nous n'étudierons pas ici.

Pour une courbe de résonance donnée (en gris sur la figure 10.23), plusieurs couples d'entiers (n, m) peuvent satisfaire la même relation $n\omega_I(I, J) + m\omega_J(I, J) = 0$, cette dégénérescence peut être étudiée en considérant la probabilité p pour que deux entiers n et m soient premiers entre eux, c'est-à-dire que leur p.g.c.d. soit égal à 1. Soit p_k la probabilité pour que $\text{p.g.c.d.}(n, m) = k$; pour que cet événement soit réalisé il faut que : (i) n soit un multiple de k , (ii) que m soit aussi un multiple de k (ces deux événements ont une probabilité $1/k$ et $1/k$) et (iii) que n/k et m/k soient premiers entre eux (la probabilité de cet événement est donnée par p) ; on a donc $p_k = p/k^2$ et comme $\sum_k p_k = 1$ et $\sum_k k^{-2} = \pi^2/6$, on établie ainsi le résultat classique : $p = 0,3256984\dots$

En fait, la réductibilité des fractions $n/m = n'/m'$ et la superposition des résonances V_{nm} et $V_{n'm'}$ n'est pas le problème central de l'analyse des résonances au seuil de la transition vers le chaos ; le problème crucial est celui de la représentation des irrationnels $\omega_I(I, J) / \omega_J(I, J)$ définissant les tores adiabatiques.

Bien qu'elle possède un certain nombre de vertus pratiques pour les calculs usuels, la représentation décimale ne constitue pas la meilleure représentation pour les irrationnels car elle est inadaptée à l'étude de la convergence. Par exemple, la série décimale classique $\pi = 3,14159265\dots$

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \dots \rightarrow \pi = \frac{3}{1}, \frac{31}{10}, \frac{314}{100}, \frac{3142}{1000}, \dots, \frac{p_n}{q_n}, \dots$$

présente une vitesse de convergence médiocre et la représentation par fraction continue :

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{292 + \dots}}} \rightarrow \pi = \frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \dots, \frac{P_n}{Q_n}, \dots$$

possède des **propriétés de convergence supérieures** ; au sens où la majoration de l'erreur à un certain ordre est plus serrée : $355/113 = 3.1415929$ est une meilleure approximation de π que $3142/1000 = 3.142$. Il est aisé de voir que pour la représentation décimale l'erreur à l'ordre n est simplement majorée par $1/q_n$: $|\pi - p_n/q_n| < 1/q_n$; alors que pour la représentation en fraction continue nous allons démontrer que $|\pi - P_n/Q_n| < 1/Q_n^2$.

Soit un nombre a , non entier, soit a_0 sa partie entière telle que $a = a_0 + \alpha_0$; introduisons $x_0 = 1/\alpha_0$ et considérons a_1 la partie entière de x_0 telle que $x_0 = a_1 + \alpha_1$; introduisons $x_1 = 1/\alpha_1$ et considérons a_2 la partie entière de x_1 telle que $x_1 = a_2 + \alpha_2$;

introduisons $x_2 = 1/\alpha_2$ et considérons a_3 la partie entière.... On construit ainsi un développement en fraction continue :

$$a = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} \quad (10.69)$$

Si ce développement est fini, alors a est un rationnel ; dans le cas contraire, a est un irrationnel. L'algorithme de développement peut être interrompu à un ordre fini n pour obtenir une approximation rationnelle appelée **la réduite de la fraction continue** P_n/Q_n .

$$a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{P_1}{Q_1}, a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = \frac{P_2}{Q_2}, a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}} = \frac{P_3}{Q_3}$$

L'algorithme de définition et de construction permet d'établir la relation de récurrence des numérateurs et dénominateurs de la réduite d'ordre n : $P_n = a_n P_{n-1} + P_{n-2}$ et $Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}$. L'écart entre deux réduites successives est donc donné par : $P_n/Q_n - P_{n-1}/Q_{n-1} = (-1)^{n-1} / Q_n Q_{n-1}$. Ce dernier résultat permet une majoration de l'erreur commise lors de l'approximation par une réduite d'ordre n ; les réduites d'ordre pair forment une suite croissante qui converge vers a par valeurs inférieures et les réduites d'ordre impair une suite décroissante qui converge vers a par valeurs supérieures telles que $|P_n/Q_n - a| < 1/Q_n^2$. Les réduites ne sont pas les seuls rationnels possédant cette propriété. Un théorème, dû à Hurwitz, confirme cette non-unicité et précise la majoration de l'erreur : *quel que soit un irrationnel a il existe une infinité de couple d'entier (P, Q) tels que $|(P/Q) - a| < 1/\sqrt{5}Q^2$ et la constante de majoration de l'erreur $1/\sqrt{5}$ ne peut pas être améliorée pour $a = (\sqrt{5} + 1)/2$. On trouvera une démonstration claire et directe de ce résultat dans le célèbre traité de C. L. Siegel : *Geometry of Numbers*. On voit donc que la vitesse de convergence est d'autant plus rapide que la série des dénominateurs Q_n diverge rapidement. En particulier, le nombre d'or, qui sature la majoration du théorème de Hurwitz, ainsi que son inverse et tous les irrationnel tels qu'à partir d'un certain rang la fraction continue ne contienne que des 1 :*

$$\frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}, \quad \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}, \dots$$

constituent une classe d'irrationnels dont l'approximation par réduites rationnelles présentera une convergence des plus lentes. Formulé plus prosaïquement, le nombre d'or et la classe décrite précédemment sont les nombres les plus éloignés des rationnels. Les tores irrationnels, dits tores nobles, ainsi définis :

$$2\omega_J(I, J) = (\sqrt{5} + 1) \omega_I(I, J), 2\omega_J(I, J) = (\sqrt{5} - 1) \omega_I(I, J), \dots$$

sont très éloignés d'une résonance, donc sont les plus robustes aux perturbations.

Lorsque l'amplitude des perturbations V_{nm} augmente à partir d'une situation intégrable $V_{nm} = 0$, le passage du régime adiabatique au régime globalement chaotique verra la destruction de ces tores nobles après la destruction des tores rationnels résonnants et de leur voisins immédiats. L'étude détaillée de cette hiérarchie entre tores résonnants, adiabatiques et nobles permet d'affiner le critère de Chirikov et, pour la récurrence de Chirikov-Taylor (10.67), une méthode de renormalisation prédit une transition vers le chaos pour $V = 0,971635\dots$ en accord avec l'estimation $V \sim 1$. Notons que dans les systèmes physiques réels (tels que les plasmas) l'existence de bruits, associés à des couplages faibles avec la multitude des degrés de liberté extérieurs, permet de se contenter du critère $S \sim 1$. L'observation expérimentale de la transition : *intégrable* \rightarrow *adiabatique-résonnant* \rightarrow *chaotique*, dans les expérience d'interaction champs-particules, confirme la validité du critère de Chirikov $S \sim 1$ au seuil du régime chaotique.

En régime chaotique les deux variables angles et actions doivent être traitées comme des variables aléatoires et la dynamique doit être considérée comme un processus Markovien. La variable d'angle est une variable rapide extrêmement sensible aux perturbations, il est alors justifié de construire l'*approximation des phases aléatoires* et de considérer ces variables d'angles comme des variables aléatoires dont la distribution est uniforme entre 0 et 2π . Cette approximation a reçu le nom de RPA (Random Phase Approximation) et constitue une approximation transverse à de nombreux domaines de la physique au delà de la physique des plasmas. Les variables d'actions sont aussi des variables aléatoires markoviennes mais leur évolution est plus lente et sa description nécessite la construction d'une équation cinétique : l'équation quasi-linéaire.

10.5.3 Équation quasi-linéaire

Dans un plasma, le nombre de particules est très grand : le nombre d'Avogadro $N_A = 6,02 \times 10^{23}$ ou le nombre de Loschmidt $N_L = 2,69 \times 10^{19}$ (2.19) donnent une mesure de l'ordre de grandeur du nombre de degrés de liberté à considérer pour quelques m^3 d'un plasma de laboratoire typique.

Une description statistique de l'espace des phases pour N particules est nécessaire pour décrire un tel nombre de degrés de liberté. Introduisons $\mathcal{F}(\mathbf{J}_1, \theta_1, \mathbf{J}_2, \theta_2 \dots t)$ $d\mathbf{J}_1 d\theta_1 d\mathbf{J}_2 d\theta_2 \dots$ la probabilité, à un instant t , de trouver la particule 1 dans le volume $d\mathbf{J}_1 d\theta_1$, au voisinage de (\mathbf{J}_1, θ_1) , de trouver la particule 2 dans le volume $d\mathbf{J}_2 d\theta_2$, au voisinage de $(\mathbf{J}_2, \theta_2) \dots \mathcal{F}(\mathbf{J}_1, \theta_1, \mathbf{J}_2, \theta_2 \dots t)$ est la densité de probabilité dans l'espace des phases $(\mathbf{J}_1, \theta_1, \mathbf{J}_2, \theta_2 \dots)$ de l'ensemble des particules. L'équation d'évolution dynamique de cette fonction de distribution \mathcal{F} peut être établie en partant de l'invariant de Liouville-Poincaré. L'invariance de l'élément de volume d'espace des phases $d\mathbf{J}_1 d\theta_1 d\mathbf{J}_2 d\theta_2 \dots$ (10.16) et l'invariance du nombre de particules : $d[\mathcal{F}(\mathbf{J}_1, \theta_1, \mathbf{J}_2, \theta_2 \dots t) d\mathbf{J}_1 d\theta_1 d\mathbf{J}_2 d\theta_2 \dots] / dt = 0$ ne peuvent être satisfaites que si

la fonction de distribution \mathcal{F} vérifie $d\mathcal{F}/dt = 0$, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{J}_i} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \theta_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{J}_i} = 0$$

cette dernière identité constitue l'équation de Liouville où $\mathcal{H}(\mathbf{J}_1, \theta_1, \mathbf{J}_2, \theta_2 \dots t)$ est le hamiltonien à N particules. La solution formelle de cette équation linéaire est donnée par :

$$\mathcal{F}(t) = \exp \left[\left(\sum_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{J}_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{J}_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta_i} \right) t \right] \cdot \mathcal{F}(t=0)$$

Cette solution est utile pour établir un certain nombre de propriétés générales telles que les relations fluctuations-dissipation ; mais, suivant la discussion sur l'ordering de Bogolioubov (2.4), au delà de l'échelle précinétique, l'information contenue dans la description statistique \mathcal{F} est irrelevante et la fonction de distribution à un corps $F(\mathbf{J}, \theta, t)$ est suffisante pour l'étude des processus cinétiques. Considérons donc $F(\mathbf{J}, \theta, t) d\mathbf{J}d\theta$ la probabilité, à un instant t , de trouver une particule dans le volume $d\mathbf{J}d\theta$ au voisinage de (\mathbf{J}, θ) ; $F(\mathbf{J}, \theta, t)$ est la densité de probabilité à un corps. L'équation d'évolution dynamique de cette fonction de distribution F peut être établie en partant de l'identité (Figure 10.24) :

$$F(\mathbf{J}, \theta, t + \delta t) = \int \delta[\mathbf{J} - \mathbf{J}' - \delta\mathbf{J}(\mathbf{J}', \theta', \delta t)] \delta[\theta - \theta' - \delta\theta(\mathbf{J}', \theta', \delta t)] \\ \times F(\mathbf{J}', \theta', t) d\mathbf{J}' d\theta'$$

où $\delta\mathbf{J}(\mathbf{J}', \theta', \delta t)$ et $\delta\theta(\mathbf{J}', \theta', \delta t)$ sont les incréments d'action et d'angle durant le temps δt ; ces incréments sont solutions des équations de Hamilton pour une particule. La durée δt est supposée suffisamment petite pour permettre un développement de Taylor suivant $\delta\mathbf{J}(\mathbf{J}', \theta', \delta t)$ et $\delta\theta(\mathbf{J}', \theta', \delta t)$,

$$\delta[\mathbf{x} - (\mathbf{y} + \xi(\mathbf{y}))] \approx \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \xi(\mathbf{y}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \xi(\mathbf{y}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

ainsi la variation de la fonction de distribution : $\delta F(\mathbf{J}, \theta, t) = F(\mathbf{J}, \theta, t + \delta t) - F(\mathbf{J}, \theta, t)$ peut être évaluée en procédant à une intégration par parties sous le signe somme.

$$\frac{\delta F(\mathbf{J}, \theta, t)}{\delta t} = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{J}} \cdot \frac{\delta \mathbf{J}(\mathbf{J}, \theta, \delta t)}{\delta t} F(\mathbf{J}, \theta, t) - \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \frac{\delta \theta(\mathbf{J}, \theta, \delta t)}{\delta t} F(\mathbf{J}, \theta, t)$$

Compte tenu des équation de Hamilton, l'équation de Vlasov, décrivant l'évolution de la fonction de distribution à un corps F est donc donnée par :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{J}} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{\partial H}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{J}} = 0$$

Le hamiltonien à une particule $H(\mathbf{J}, \theta, t) = H_0(\mathbf{J}) + V(\mathbf{J}, \theta, t)$ est constitué de deux composantes, le hamiltonien intégrable $H_0(\mathbf{J})$ dû aux champs extérieurs, et le hamiltonien $V(\mathbf{J}, \theta, t)$ décrivant les interactions entre les particules à travers un champ moyen collectif solution des équations de Maxwell macroscopiques.

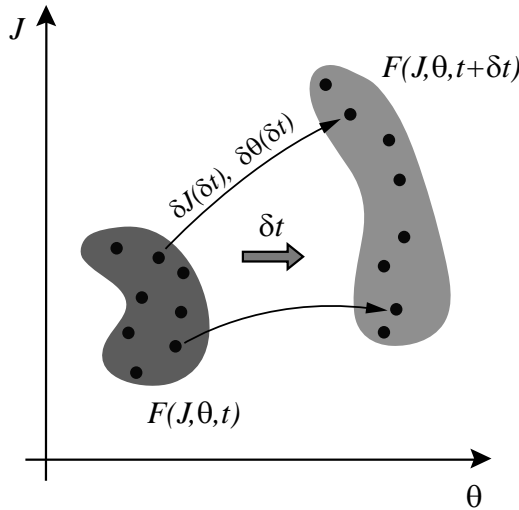


Figure 10.24 Évolution dynamique dans l'espace des phases pour une particule.

Contrairement à l'équation de Liouville, l'équation de Vlasov est non-linéaire, car V est une fonctionnelle de F ; en effet, les charges et courants sources des équations de Maxwell qui déterminent V sont des intégrales sur F dans l'espace des phases. Néanmoins, durant cette étude, nous considérerons V donné. Nous allons résoudre l'équation de Vlasov dans le cadre d'un schéma perturbatif, sous l'hypothèse de dominance des champs extérieurs par rapport aux champs collectifs (qui est la condition de contrôle du confinement d'un plasma) : $V(\mathbf{J}, \theta, t) \ll H_0(\mathbf{J})$.

Considérons V comme une perturbation harmonique de pulsation Ω dont l'amplitude a crû de façon adiabatique dans le passé jusqu'à sa valeur présente ($V(\mathbf{J}, \theta, t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow -\infty$), cette dernière condition traduit l'hypothèse de causalité. Décomposons cette perturbation en série de Fourier sur les angles θ du système angles-actions associé à la partie intégrable H_0 .

$$V(\mathbf{J}, \theta, t) = \sum_{\mathbf{N}=-\infty}^{\mathbf{N}=\infty} \frac{V_{\mathbf{N}}(\mathbf{J})}{2} [\exp i [\mathbf{N} \cdot \theta - (\Omega + i\varepsilon)t + \phi_{\mathbf{N}}] + \exp -i [\mathbf{N} \cdot \theta - (\Omega - i\varepsilon)t + \phi_{\mathbf{N}}]] \quad (10.70)$$

Le terme $i\varepsilon$ permet de traduire l'hypothèse de causalité dans ce développement et, à la fin du calcul, la limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$ doit être prise pour établir ainsi la solution associée

à la perturbation réelle :

$$V = \sum_{\mathbf{N}=-\infty}^{\mathbf{N}=\infty} V_{\mathbf{N}}(\mathbf{J}) \cos [\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\theta} - \Omega t + \phi_{\mathbf{N}}] \quad (10.71)$$

La partition du hamiltonien en une partie intégrable plus une perturbation :

$$H(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}, t) = H_0(\mathbf{J}) + V(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}, t) \quad (V(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}, t) \ll H_0(\mathbf{J})),$$

se traduit par une partition de la solution en une solution d'équilibre plus une perturbation : $F(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}, t) = F_0(\mathbf{J}) + f(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}, t)$, ($F_0(\mathbf{J}) \gg f(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}, t)$). La solution d'équilibre vérifiant :

$$\frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{J}} \cdot \frac{\partial F_0}{\partial \boldsymbol{\theta}} - \frac{\partial H_0}{\partial \boldsymbol{\theta}} \cdot \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{J}} = 0$$

La perturbation de la fonction de distribution, au premier ordre en V , est donc solution de l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{J}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\theta}} - \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\theta}} \cdot \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{J}} = 0$$

Les termes d'ordres supérieurs en V ayant été ainsi négligés nous avons donc procédé à une linéarisation de l'équation de Vlasov.

Recherchons une solution de l'équation de Vlasov ainsi linéarisée sous forme d'une série de Fourier similaire à (10.70) où les coefficients $f_{\mathbf{N}}$ des différentes harmoniques constituent les inconnues $f \sim \sum f_{\mathbf{N}} \exp \pm i [\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\theta} - (\Omega \pm i\varepsilon)t + \phi_{\mathbf{N}}]$. Ces inconnues vérifient une équation algébrique obtenue par substitution dans l'équation précédente ; puis, par identification terme à terme des deux séries (V et f) la solution de l'équation de Vlasov linéarisée est obtenue.

$$f(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}, t) = \sum_{\mathbf{N}=-\infty}^{\mathbf{N}=\infty} \frac{\mathbf{N} \cdot \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{J}} V_{\mathbf{N}}}{2 [\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\omega} - \Omega - i\varepsilon]} \exp i [\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\theta} - (\Omega + i\varepsilon)t + \phi_{\mathbf{N}}] \\ + \sum_{\mathbf{N}=-\infty}^{\mathbf{N}=\infty} \frac{\mathbf{N} \cdot \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{J}} V_{\mathbf{N}}}{2 [\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\omega} - \Omega + i\varepsilon]} \exp -i [\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\theta} - (\Omega - i\varepsilon)t + \phi_{\mathbf{N}}]$$

La prescription de causalité $\varepsilon \rightarrow 0^+$ peut finalement être exprimée compte tenu de la relation : $1/(x \pm i\varepsilon) \rightarrow \mathcal{P}(1/x) \mp i\pi\delta(x)$.

$$f = \sum_{\mathbf{N}=-\infty}^{\mathbf{N}=\infty} \frac{\mathbf{N} \cdot \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{J}}}{\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\omega} - \Omega} V_{\mathbf{N}} \cos [\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\theta} - \Omega t + \phi_{\mathbf{N}}] \\ - \pi \mathbf{N} \cdot \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{J}} \delta [\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\omega} - \Omega] V_{\mathbf{N}} \sin [\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\theta} - \Omega t + \phi_{\mathbf{N}}]$$

Ainsi, un hamiltonien perturbateur du type (10.71) induit une perturbation de la fonction de distribution présentant deux composantes : une composante en phase avec la

perturbation, le premier terme du membre de droite de la relation précédente, et une perturbation en quadrature de phase avec cette perturbation, le deuxième terme du membre de droite. La partie en phase décrit les phénomènes de réfraction, si nous parlons le langage de l'opticien, ou de transfert de puissance réactive, si nous parlons le langage de l'électronicien ; la partie en quadrature de phase, quant à elle, décrit les phénomènes d'absorption pour l'opticien, ou de transfert de puissance active pour l'électronicien.

L'énergie totale, instantanée, stockée par la population de particules sous formes cinétique et potentielle est donnée par : $\int (H_0 + V)(F_0 + f) d\mathbf{J}d\theta$, mais il est plus pertinent de s'intéresser à l'énergie d'interaction champs-particules et de considérer l'énergie moyenne d'interaction : $\langle u \rangle = \int V f d\mathbf{J}d\theta$ (8.18).

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{N}=-\infty}^{\mathbf{N}=\infty} \int \mathbf{N} \cdot \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{J}} \frac{V_{\mathbf{N}}^2}{\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\omega} - \Omega} d\mathbf{J} \quad (10.72)$$

Afin de clarifier le problème de l'absorption (ou émission) il est nécessaire d'établir l'équation d'évolution à un ordre supérieur en V et de considérer que sur une échelle de temps supérieure à Ω^{-1} la distribution d'équilibre F_0 évolue en fonction du temps : $F_0(\mathbf{J}, t) = \langle F(\mathbf{J}, \theta, t) \rangle_{\theta}$. Le choix d'établir une décomposition entre une partie lente et une partie rapide de la fonction de distribution F , et de considérer que la partie lente est la moyenne sur les angles, relève de l'hypothèse des phases aléatoires (RPA). En régime chaotique il est légitime de considérer que les angles sont des variables aléatoires dont la distribution est uniforme entre 0 et 2π ; par contre, la distribution des actions n'est pas uniforme et son évolution est beaucoup plus lente. L'équation décrivant cette évolution est appelée équation quasi-linéaire. Pour établir l'équation quasi-linéaire considérons la modification de la distribution F_0 sur un temps δt .

$$F_0(\mathbf{J}, t) = \int F(\mathbf{J}, \theta_0, t) d\theta_0 \rightarrow$$

$$F_0(\mathbf{J}, t + \delta t) = \int \delta [\mathbf{J} - (\mathbf{J}' + \delta \mathbf{J}(\mathbf{J}', \theta_0, \delta t))] F(\mathbf{J}', \theta_0, t) d\mathbf{J}' d\theta_0$$

où $\delta \mathbf{J}(\mathbf{J}', \theta_0, \delta t)$ est l'incrément moyen d'action résultant de l'évolution dynamique durant un temps δt supposé suffisamment petit pour permettre un développement de Taylor.

$$\delta [\mathbf{x} - (\mathbf{y} + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{y}))] \approx \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{y}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}(\mathbf{y}) \boldsymbol{\xi}(\mathbf{y}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

En régime chaotique, lorsque le critère de Chirikov est vérifié, l'évolution de la fonction de distribution des actions est donc décrite par une équation de Fokker-Planck :

$$\frac{\partial F_0(\mathbf{J}, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{J}} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{J} \rangle_{\theta_0}}{\delta t} F_0(\mathbf{J}, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{J}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{J}} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{J} \delta \mathbf{J} \rangle_{\theta_0}}{\delta t} F_0(\mathbf{J}, t)$$

et la relation d'Einstein (10.28) : $\langle \delta \mathbf{J} \rangle_{\theta_0} = \partial \cdot \langle \delta \mathbf{J} \delta \mathbf{J} \rangle_{\theta_0} / 2\partial \mathbf{J}$ permet d'établir la forme finale de l'équation quasi-linéaire :

$$\frac{\partial F_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{J}} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{J} \delta \mathbf{J} \rangle_{\theta_0}}{2\delta t} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{J}} F_0 \quad (10.73)$$

Considérons le cas, étudié précédemment dans le cadre de l'équation de Vlasov, d'un hamiltonien somme d'une partie intégrable et d'une perturbation non intégrable :

$$H(\mathbf{J}, \theta) = H_0(\mathbf{J}) + V(\mathbf{J}, \theta)$$

où la perturbation vérifie l'ordering : $V(\mathbf{J}, \theta) \ll H_0(\mathbf{J})$.

$$H(\mathbf{J}, \theta) = H_0(\mathbf{J}) + \sum_{\mathbf{N}=-\infty}^{\mathbf{N}=\infty} V_{\mathbf{N}}(\mathbf{J}) \cos[\mathbf{N} \cdot \theta - \Omega t + \phi_{\mathbf{N}}]$$

Les équations de Hamilton :

$$d\mathbf{J}/dt = \mathbf{N}V_{\mathbf{N}} \sin(\mathbf{N} \cdot \theta - \Omega t + \phi_{\mathbf{N}}) \quad \text{et} \quad d\theta/dt = \omega,$$

peuvent être intégrées aux petits temps pour exprimer l'incrément d'action résultant de la perturbation V : $\theta = \omega \delta t + \theta_0$,

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{J}(\mathbf{J}_0, \theta_0, \delta t) &= \mathbf{J}(\delta t) - \mathbf{J}_0 \\ &= -\mathbf{N}V_{\mathbf{N}} \frac{\cos[(\mathbf{N} \cdot \omega - \Omega)\delta t + \mathbf{N} \cdot \theta_0 + \phi_{\mathbf{N}}] - \cos[\mathbf{N} \cdot \theta_0 + \phi_{\mathbf{N}}]}{\mathbf{N} \cdot \omega - \Omega} \end{aligned}$$

Le carré de cet incrément d'action doit être évalué en moyenne sur l'angle initial θ_0 (RPA), cet angle initial étant distribué uniformément entre 0 et 2π .

$$\begin{aligned} \langle \delta \mathbf{J} \delta \mathbf{J} \rangle_{\theta_0} &= \mathbf{N} \mathbf{N} \frac{4V_{\mathbf{N}}^2}{(\mathbf{N} \cdot \omega - \Omega)^2} \sin^2 \left[\frac{\mathbf{N} \cdot \omega - \Omega}{2} \delta t \right] \\ &\quad \left\langle \sin^2 \left[\frac{\mathbf{N} \cdot \omega - \Omega}{2} \delta t + \mathbf{N} \cdot \theta_0 + \phi_{\mathbf{N}} \right] \right\rangle_{\theta_0} \end{aligned}$$

L'incrément de temps est ici de nature mésoscopique, c'est-à-dire grand à l'échelle microscopique et petit à l'échelle macroscopique ; dans ce contexte, microscopique et macroscopique ne se réfèrent pas à un ordering entre échelles de longueur mais entre échelles de temps. La limite du facteur de résonance pour ces durées mésoscopiques est donnée par la relation : $2\varepsilon \sin^2(x/2\varepsilon)/x^2 \rightarrow \pi \delta(x)$. Ainsi, le coefficient

de diffusion quasi-linéaire dans l'espace des actions apparaît comme une somme de facteurs résonnants $\delta [\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\omega} - \Omega]$ pondérés par le carré du hamiltonien perturbateur $V_{\mathbf{N}}^2$.

$$\frac{\langle \delta \mathbf{J} \delta \mathbf{J} \rangle}{2\delta t} = \frac{\pi}{2} \sum_{\mathbf{N}=-\infty}^{\mathbf{N}=\infty} \mathbf{N} \mathbf{N} V_{\mathbf{N}}^2 \delta [\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\omega} - \Omega] \quad (10.74)$$

Ce coefficient est toujours positif, mais les transferts d'énergie qu'il décrit peuvent présenter un signe quelconque. Les échanges de puissance entre le champ perturbateur à l'origine de V et la population de particules chargées sont à la fois de nature active et réactive comme dans tout système dynamique périodique perturbé par une perturbation elle-même périodique.

La puissance active $\langle w \rangle$ (8.19) transmise du champ collectif, à l'origine de la perturbation V , vers la population de particules, peut être positive (on parle alors d'absorption et de chauffage) ou négative (on parle alors d'émission ou d'instabilité cinétique).

L'énergie totale, instantanée, stockée par la population de particules sous formes cinétique et potentielle est donnée par :

$$\int (H_0 + V)(F_0 + f) d\mathbf{J} d\theta.$$

Les équations de Vlasov et quasi-linéaire offrent deux méthodes de calcul de l'échange de puissance active $\langle w \rangle$:

- la puissance instantanée $\partial V / \partial t$ développée par le champ peut être moyennée sur la perturbation instantanée f solution de l'équation de Vlasov, ou
- l'évolution de l'énergie séculaire $H_0 F_0$ peut être évaluée en considérant l'évolution lente de la distribution $\partial F_0 / \partial t$ solution de l'équation quasi-linéaire.

$$\text{Équation de Vlasov} \quad : \quad \langle w \rangle = \int \frac{\partial V(\mathbf{J}, \theta, t)}{\partial t} f(\mathbf{J}, \theta, t) d\mathbf{J} d\theta$$

$$\text{Équation quasi-linéaire} \quad : \quad \langle w \rangle = \int H_0(\mathbf{J}) \frac{\partial F_0(\mathbf{J}, t)}{\partial t} d\mathbf{J}$$

Ces deux points de vue doivent donner le même résultat et c'est effectivement le cas.

$$\langle w \rangle = -\frac{\pi}{2} \sum_{\mathbf{N}=-\infty}^{\mathbf{N}=\infty} \int \mathbf{N} \cdot \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{J}} \frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{J}} \cdot \mathbf{N} V_{\mathbf{N}}^2 \delta [\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\omega} - \Omega] d\mathbf{J} \quad (10.75)$$

L'équation de Vlasov, qui décrit l'évolution rapide de la fonction de distribution en régime linéaire, est donc non seulement complémentaire, mais aussi complètement cohérente avec l'équation quasi-linéaire qui décrit l'évolution lente de la distribution sous l'hypothèse RPA.

Le processus quasi-linéaire est une diffusion dans l'espace des actions et produit donc de l'entropie, la justification de cette production d'entropie est à rechercher dans le régime chaotique de l'interaction. Dans ce régime chaotique, la description statistique quasi-linéaire offre une méthode d'étude cinétique possédant deux propriétés essentielles : **la conservation de l'énergie et la production d'entropie** ; par conservation de l'énergie, nous entendons le fait que l'énergie fournie ou reçue par le champ dans le cadre du modèle linéaire de Vlasov est égale à l'énergie respectivement reçue ou fournie par les particules dans le cadre quasi-linéaire.

Un modèle possédant ces deux propriétés de conservation de l'énergie et de croissance de l'entropie inspire confiance aux physiciens et cette confiance est justifiée car les prédictions de la théorie quasi-linéaire ont été vérifiées expérimentalement dans les expériences de chauffage des plasmas thermonucléaires et industriels.

BIBLIOGRAPHIE

La dynamique hamiltonienne, branche majeure de la mécanique rationnelle, est une discipline pratiquée par trois communautés : les mathématiciens, les astronomes et les physiciens ; dans le premier cas elle se rattache à théorie des systèmes dynamiques et à la géométrie symplectique ; pour ce qui concerne l'astronomie elle est incontournable en mécanique céleste et les physiciens des accélérateurs ainsi que les physiciens des plasmas sont les deux principales communautés de physiciens utilisant et développant ce formalisme.

► Traités classiques de mécanique rationnelle

- H.C. Corben et P. Stehle, *Classical Mechanics*, Dover Publications, New York, USA, 1994.
- H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading Massachusetts, USA, 1974.
- D.T. Greenwood, *Classical Dynamics*, Dover Publications, New York, USA, 1997.
- C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*, Dover Publications, New York, USA, 1986.
- L.D. Landau et E.M. Lifshitz, *Mechanics*, Pergamon Press, Oxford, UK, 1987.

- A. Sommerfeld, *Lectures on Theoretical Physics, Vol 1 : Mechanics*, Academic Press, New York, USA, 1957.
- K.R. Symon, *Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading Massachusetts, USA, 1978.
- N. Tchetaev, *Mécanique rotationnelle*, Editions MIR, Moscou, URSS, 1993.
- E.T. Whittaker, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Cambridge University Press, Cambridge, USA, 1999.

► **Adiabaticité, résonances et chaos**

- A.J. Lichtenberg, *Phase-space Dynamics of Particles*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1969.
- A.J. Lichtenberg et M.A. Lieberman, *Regular and Stochastic Motion*, Springer-Verlag, New York, USA, 1983.
- L.E. Reichl, *The Transition to Chaos In Conservative Classical Systems : Quantum Manifestation*, Springer Verlag, New York, USA, 1992.
- M. Tabor, *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics, An Introduction*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1989.
- G.M. Zaslavsky, *Physics of Chaos in Hamiltonian Systems*, Imperial College Press, London, UK, 1998.

► **Principales propriétés des fonctions de Bessel : relations de récurrences, équations différentielles, propriétés d'orthogonalité et de complétude, théorèmes d'addition et formes asymptotiques**

- M. Abramowitz et I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New-York, USA, 1972.
- I.S. Gradshteyn et I.M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Product*, Academic Press, New York, USA, 1994.
- G.N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1980.

Index

A

action, 11, 358–361, 368, 373
action de Jacobi, 362
active, 402
adiabaticité, 150, 151, 155–157, 386, 388, 404
Alfvén, 74, 89–92, 147, 239, 241, 250, 291–293
ambipolaire, 206
angle-action, 371, 373, 383, 384, 386, 390
Appleton, 295
approximation des phases aléatoires, 414

B

Bessel, 385, 405
Bethe-Bohr, 338
Bohm, 94, 207, 215
Bohm-Gross, 282, 284
Bohr, 108
Boltzmann, 313, 315, 317
Born-Oppenheimer, 130, 131
Braginski, 348
bremstrahlung, 297, 300
Brillouin, 286, 290, 293

C

capacitif, 259
chaos, 312, 407, 410
Chapman-Ferraro, 231

Chapman-Kolmogorov, 313, 315
chauffage stochastique, 23
Child-Langmuir, 217, 250
Chirikov, 407, 410, 414
Chirikov-Taylor, 408–410, 414
cinétique, 304, 309, 334, 341
coefficient de diffusion, 44, 99, 136
collision, 102, 108
composant microélectronique, 23
Compton, 108, 403
condition de Bennett, 249
condition de Townsend, 144
conduction, 48
conductivité, 38, 47, 97, 227, 235
corrélation, 58, 59
Coulomb, 167
coupure, 261, 294, 295
courant de magnétisation, 53
courant de polarisation, 51
critère de Townsend, 199
cyclotronique, 148–153, 155–157, 161, 162, 170, 349, 382, 404

D

de Broglie, 114, 116, 329
Debye, 81, 83, 85, 86, 115, 117, 329
décharge, 18, 21, 194, 195, 197, 199, 207, 211
capacitive, 19
inductive, 19

luminescente, 18
 radiofréquence, 19
 dégénérescence, 291
 dérive, 154–156, 162–165, 174, 175, 390, 391, 396
 diamagnétique, 151–153, 165, 192, 390, 392
 diélectrique, 394
 diffusion, 48, 205, 298, 331, 343, 347, 351
 magnétique, 234
 dispersion, 260, 282, 286, 289, 294
 dissociation, 1, 11
 distribution, 309
 de Boltzmann, 47, 85
 de Maxwell, 61, 65
 des vitesses, 56, 57
 Druyvesteyn, 334, 335
 dynamique hamiltonienne, 2

E

échelle
 hydrodynamique, 61, 65
 mésoscopique, 43, 61
 échelle de temps
 cinétique, 59
 hydrodynamique, 59
 précinétique, 59
 échantage, 14, 74, 77, 81, 86, 88
 effet Faraday, 288
 Einstein, 190, 347, 375
 électron rapide, 341
 électron-volt, 10, 11
 émission spontanée, 116
 énergie interne, 62, 64
 entropie, 11, 84, 297, 398, 421
 équation d'Euler, 69, 184
 Erhenfest, 169
 espace des phases, 356, 365, 366, 402
 Euler-Lagrange, 354

F

facteur de Boltzmann, 57
 Fermi, 176
 fluctuation, 346, 350
 flux de particules, 62, 136
 Fokker-Planck, 69, 180, 190, 298, 301, 316, 317, 319
 fonction
 de distribution, 321, 342

 de gain, 402
 de Green, 312, 344
 elliptique, 377
 génératrice, 368, 369, 376, 382, 384, 393
 fonction principale de Hamilton, 362, 371
 force
 de Coulomb, 37, 147, 283
 de Laplace, 37, 91, 147, 148, 192, 230, 246
 de Lorentz, 37
 diamagnétique, 30
 Fourier, 260, 270, 271, 377, 387, 416
 Frank-Kamenetski, 202
 fréquence
 d'ionisation, 129
 de collision, 42, 105, 106, 112, 113, 115, 118
 hybride basse, 263
 hybride haute, 263
 friction, 188, 189, 331, 334, 337, 343
 fusion, 16, 133

G

gaine, 20, 207, 215, 216, 222
 gel, 241, 243, 244, 294
 Green-Kubo, 346

H

Hall, 192, 193, 227
 Hamilton-Jacobi, 363, 371
 hamiltonien, 353, 356, 357, 362, 369–371, 374, 378, 384, 388
 Hartree, 295
 hélicité, 251, 252
 magnétique, 250, 253

I

impédance, 260
 inductif, 259
 inertiel, 100
 instabilité, 23, 275, 403, 420
 interaction laser-plasma, 19
 invariant adiabatique, 168–170, 183
 ionisation, 1, 3, 11, 12, 17, 25, 126, 129, 139, 189, 195, 202
 ionisation et réactivité, 125
 isotropisation, 330, 338, 339, 341, 344
 ITER, 27, 29

K

Kelvin, 98, 99
Knudsen, 75, 184, 186
Kolmogorov-Arnold-Moser, 372
Kramers-Moyal, 318

L

lagrangien, 355–357
Landau, 114, 116, 117, 297, 303, 319, 328, 339, 345, 399
Langmuir, 74, 77–79, 88, 206, 281
Laplace, 167
Larmor, 148, 149, 157, 348, 406
Legendre, 339, 340, 343, 356
Leibnitz, 354
libre parcours, 40–42, 105, 107, 112, 134, 136, 140, 185, 186, 211, 349
Liouville-Poincaré, 364, 414
lithium, 133
logarithme coulombien, 115, 117
loi d'Ohm, 39
London, 86, 88, 98

M

magnétisation, 38, 48, 52, 54, 165, 242
magnétohydrodynamique, 92, 179, 188, 226
Maxwell, 96, 97, 205
Maxwell-Ampère, 39, 51, 54, 87, 92, 229, 238, 259
Maxwell-Boltzmann, 57
Maxwell-Faraday, 39, 87, 229, 238–240, 259
Maxwell-Gauss, 97
mésoscopique, 45, 76, 350
MHD idéale, 228–230, 242, 253
micro-réversibilité, 320
microélectronique, 22
mobilité, 45, 137, 139, 190, 195, 203, 209, 211, 347
mobilité-diffusion, 300
moment magnétique, 150
multiplication, 196

N

Navier-Stokes, 184, 244
Newton, 345
nombre d'Avogadro, 55
nombre Loschmidt, 55

O

Ohm, 47, 97, 227, 229, 237, 239, 265
onde, 258
 monochromatique, 259
oscillateur harmonique, 373, 397

P

paramètre plasma, 13
particule(s) alpha, 341, 342
Paschen, 194, 201, 202
Pedersen, 228
pendule non-linéaire, 378, 397, 400, 401
perméabilité, 39, 258
permittivité, 39, 258, 270, 271, 285
phases aléatoires, 297, 298, 305
phénomène magnétohydrodynamique, 3
photon, 281, 289
plasma quasi-neutre, 14
plasmons, 281, 286, 303, 305
Poincaré, 364
Poincaré-Helmholtz, 367
points miroirs, 171
polarisabilité, 121
polarisation, 38, 48–50, 54
pondéromoteur, 393, 404
pondéromotrice, 166, 167
Poynting, 265, 275, 276
précinétique, 309
premier coefficient de Townsend, 129
pression, 62–64, 70, 91, 183, 184, 244
 magnétique, 230, 231
principe variationnel, 359, 360, 368
processus stochastique, 311, 313, 320
propulseur, 19, 29, 31
puissance
 active, 418, 420
 réactive, 418

Q

quasi-linéaire, 319, 414, 419–421
quasi-neutralité, 14, 74, 76, 77, 85, 89, 93, 95, 205, 207, 213, 225, 229, 283

R

radiatif, 259
ralentissement, 113, 330, 334, 341, 344
rayonnement, 258

réacteurs, 21, 24, 31
 plasmas, 15
 réactive, 402
 régime adiabatique, 266, 307, 386, 387
 relation d'Einstein, 47
 représentation
 eulérienne, 65
 lagrangienne, 65
 résistif, 100
 résonance, 261, 263, 264, 292, 294, 295, 310,
 387, 397, 400, 405
 hybride, 296
 Rosenbluth-Trubnikov, 330
 rotation, 130
 Rutherford, 112

S

Schottky, 208, 211
 section efficace, 102, 103, 105–107, 110,
 132, 314
 de diffusion, 104, 118, 332, 334
 différentielle, 104, 109
 séculaire, 157, 168, 377, 390
 séparatrice, 379, 381
 seuil, 125
 seuil de réaction, 124
 Siegel, 413
 sillage, 307
 Spitzer, 227
 Spitzer-Chandrasekhar, 330
 structure de couplage
 capacitive, 22

inductive, 22
 radiative, 22
 surface magnétique, 175, 245
 synchronisation, 399
 système markovien, 310–312

T

terme pondéromoteur, 391
 théorème de Lagrange, 68, 69
 théorie cinétique, 59
 thermonucléaire, 16, 17, 25, 27, 29, 133, 134,
 164, 344
 Thomson, 108, 122, 126, 127
 tokamak, 19, 24–28, 31, 346, 394
 Tonks-Langmuir, 208, 213, 214
 Townsend, 195
 deuxième coefficient de, 143
 premier coefficient de, 140, 143, 202
 transformation canonique, 368–370, 382,
 389
 tritium, 133
 turbulence, 346

V

vecteur d'onde, 260
 vibration, 130
 viscosité, 136, 184, 188
 vitesse de groupe, 276, 278, 279
 Vlasov, 180–182, 184, 319, 415–417, 420

W

Woltjer, 254, 256

47250 - (I) - (1,2) - OSB-80° - PUB - JME

Achévé d'imprimer sur les presses de
SNEL Grafics sa
rue Saint-Vincent 12 – B-4020 Liège
Tél +32(0)4 344 65 60 – Fax +32(0)4 341 48 41
juillet 2005 – 34735

Dépôt légal : août 2005
Imprimé en Belgique



Jean-Marcel Rax

Préface de Bernard Bigot

PHYSIQUE DES PLASMAS

Cet ouvrage s'adresse aux étudiants en master (M1 et M2) et licence (L3) ainsi qu'aux élèves des écoles d'ingénieurs. Il est issu d'un cours de physique des plasmas dispensé ces dernières années devant différents auditoires : à l'université de Paris XI (L3, M1 et M2), à l'École Normale Supérieure de Cachan (L3), à l'École Polytechnique (M2), à l'École Centrale (M1) et à l'École Supérieure d'Électricité (L3).

Il est d'usage de structurer la physique des plasmas en trois domaines et de distinguer respectivement : la physique des plasmas industriels (réacteurs pour les nanotechnologies et propulseurs spatiaux), la physique des plasmas naturels (environnement terrestre et astrophysique) et la physique des plasmas thermonucléaires (tokamak et interaction laser-plasma). Ces trois domaines possèdent en commun un ensemble d'outils, de méthodes et de résultats constituant la physique des plasmas. Ce cours, à vocation généraliste, est construit autour de cet ensemble de connaissances et résultats communs à ces trois domaines.

Il peut être adopté comme manuel de base aux niveaux L3 et M1 ou comme monographie de référence pour les ingénieurs et chercheurs confrontés à des problèmes de physique des plasmas.

JEAN-MARCEL RAX

est professeur à l'université de Paris XI et directeur du laboratoire de physique et technologie des plasmas de l'École Polytechnique.

