Processus de Galton-Watson et probabilité de survie d'une lignée

Ulysse Herbach et Côme Huré

18 avril 2012

Introduction

Au XIX^{e} siècle, le Royaume-Uni est une monarchie parlementaire dans laquelle la noblesse est très puissante. Un Lord anglais a alors tout intérêt à ce que son patronyme perdure, et la non-extinction de la descendance mâle est donc primordiale. C'est dans ce contexte que Sir Francis Galton entreprend en 1873 des travaux statistiques sur la survie d'une lignée.

Sir Galton cherche alors une manière simple de modéliser une population asexuée (il ne s'intéresse qu'à la descendance mâle). En fait, la difficulté réside surtout dans le rapport simplicité-réalisme : on peut toujours rendre un modèle plus réaliste en prenant en compte des facteurs supplémentaires, mais cela complique l'étude, au risque de la rendre impossible ou inexploitable.

Galton travailla avec un mathématicien nommé Henry Watson, et ensemble ils aboutirent à ce qu'on appelle aujourd'hui le *processus de Galton-Watson*. Ce modèle est très utilisé dans certains domaines, de la biologie à la physique : il permet d'obtenir de manière simple des résultats concrets sur le comportement de la lignée, et s'avère étonnamment réaliste dans certaines situations. D'un point de vue purement mathématique, il présente également un intérêt car il permet d'obtenir, à partir d'hypothèses *a priori* très fortes, des résultats non triviaux.

Dans un premier temps, nous allons décrire le processus de Galton-Watson et ses propriétés générales, ensuite nous effectuerons une étude asymptotique du nombre de survivants au cours des générations, et enfin, nous nous intéresserons, dans le cas où la lignée s'éteint, au calcul du nombre total d'individus de cette lignée.

1 Propriétés générales

1.1 Premières définitions

On considère un individu que l'on appelle Abraham, et on étudie sa descendance. Le nombre de fils d'Abraham est assimilé à une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, notée X. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $p_k = \mathbb{P}(X = k)$, la probabilité qu'Abraham ait k fils.

Définition 1. *On note ϕ la* ***fonction génératrice*** *de X, définie par :*

$$\forall s \in [0,1],\ \phi(s) = \mathbb{E}[s^X].$$

Remarque 1. *On a donc :* $\forall t \in [0,1],\ \phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n$.

Soit Z_n le nombre d'individus appartenant à la n-ième génération. Par hypothèse, $Z_0 = 1$: c'est Abraham. Dans notre modèle, on passe de la génération n à la génération $n+1$ de la manière suivante : les Z_n individus de la génération n ont chacun un nombre aléatoire de fils, que l'on assimilera à des variables aléatoires $X_{n,1}$, $X_{n,2}$, $\ldots$, X_{n,Z_n}, et on suppose que chaque individu meurt aussitôt. Pour formaliser cela de manière rigoureuse, nous allons considérer $(X_{n,k})_{n\geq 1,k\geq 1}$ une famille de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On construit ainsi une suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $Z_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n+1,k}\,.$$

Remarque 2. (Z_n) *est une suite de variables aléatoires discrètes.*

On peut représenter le processus par un arbre, souvent appelé *arbre de Galton-Watson.*

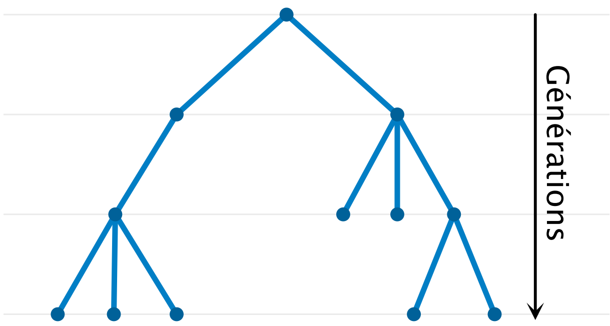

Figure 1 – Exemple d'arbre de G.-W. (ici $n = 3$)

Le but étant d'étudier la survie de la lignée, c'est à cette suite (Z_n) que l'on va s'intéresser : la lignée ne s'éteint pas tant que $Z_n > 0$. On a vu que pour $n \in \mathbb{N}$, Z_n est une variable aléatoire discrète. On va étudier la fonction génératice de Z_n, mais pour cela on a besoin d'hypothèses fondamentales :

Les hypothèses de Galton et Watson

On suppose que les individus ont un nombre aléatoire de fils :

1. indépendamment les uns des autres ;
2. selon la même loi de probabilité.

Cela revient à dire que **les variables** $X_{n,k}$ **sont i.i.d.** (de même loi que X).

Remarque 3. *Ces hypothèses semblent très simplificatrices lorsque l'on considère une situation réelle, et pourtant elles fournissent une modélisation correcte de certaines populations.*

Cas particuliers :

- Si $p_0 = 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1} \geq Z_n$. Si $p_1 = 1$, (Z_n) est constante égale à 1 et si $p_1 < 1$ alors $Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} +\infty$.
- Si $p_0 + p_1 = 1$, alors $\forall n \geq 0$, $Z_n \in \{0, 1\}$ et $\mathbb{P}(Z_n = 1) = p_1^n$. En particulier, $Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Dans la suite, on supposera donc que $p_0 > 0$ et $p_0 + p_1 < 1$.

1.2 Propriétés de (Z_n)

Définition 2. *Pour $n \in \mathbb{N}$, on note ϕ_n la fonction génératrice de Z_n, avec $\phi_0 = \mathbf{Id}_{[0,1]}$.*

La suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation fondamentale :

Théorème 1.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0, 1],\ \phi_{n+1}(t) = \phi_n(\phi(t))$$

Démonstration. On a : $\forall n \geq 1$, $\forall t \in [0, 1]$,

$$\phi_{n+1}(t) = \mathbb{E}\left[t^{Z_{n+1}}\right] = \mathbb{E}\left[t^{\sum_{k=0}^{Z_n} X_{n+1,k}}\right] = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{Z_n=j\}} t^{\sum_{k=0}^{j} X_{n+1,k}}\right].$$

Or, $\forall k \in \{0, \ldots, j\}$, les variables aléatoires $\sum_{k=0}^{j} X_{n+1,k}$ et $\mathbb{1}_{\{Z_n=j\}}$ sont indépendantes car $Z_n := \sum_{k=1}^{Z_{n-1}} X_{n,k}$ et $\sum_{k=0}^{j} X_{n+1,k}$ le sont. Il s'ensuit :

$$\phi_{n+1}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\mathbb{P}(Z_n = j) \prod_{k=0}^{j} \phi(t)\right) = \phi_n(\phi(t)).$$

$\square$

Corollaire 1. *On obtient la formule suivante, importante pour la suite :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \phi_n = \phi^n\ (= \underbrace{\phi \circ \cdots \circ \phi}_{n \text{ fois}}).$$

Corollaire 2. *En dérivant ϕ_{n+1} dans le théorème 1, on obtient par récurrence que*

$$\forall n \geq 0,\ \mathbb{E}[Z_n] = m^n.$$

1.3 Survie de la lignée

Définition 3. *Soit* $\tau := \inf\{n \geq 0 \mid Z_n = 0\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. *La* ***probabilité d'extinction de l'espèce****, notée* ξ*, est définie par :*

$$\xi := \mathbb{P}(\tau < \infty).$$

Propriété 1.

$$\xi = \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} Z_n = 0) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 0}\{Z_n = 0\}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0)$$

Démonstration. Comme $(Z_n = 0) \Rightarrow (Z_{n+1} = 0)$, $(\{Z_n = 0\})_n$ est croissante. Donc $\{\lim_{n\to\infty} Z_n = 0\} = \bigcup_{n\geq 0}\{Z_n = 0\}$ et comme $\mathbb{P}$ est de mesure pleine, on a le résultat. □

Propriété 2. ξ *est le plus petit point fixe de* ϕ.

Démonstration. Remarquons d'abord que $\mathbb{P}(Z_n = 0) = \phi_n(0)$. Donc $\xi = \lim_{n\to\infty} \phi_n(0)$ d'après ce qui précède. De plus, par continuité de ϕ et d'après le corollaire du théorème 1, on a

$$\xi = \phi(\lim_{n\to\infty} \phi_{n-1}(0)) = \phi(\xi).$$

Il reste à montrer que c'est le *plus petit* point fixe : si ζ est un autre point fixe, comme les fonctions ϕ_n sont convexes et croissantes, on a $\phi_n(0) \leq \phi_n(\zeta) = \zeta$. On fait tendre n vers l'infini et on obtient $\xi \leq \zeta$. □

On considère à présent $m := \mathbb{E}[X] = \phi'(1)$. Nous allons voir que la survie de l'espèce dépend de la valeur de m grâce au théorème suivant.

Théorème 2. *On distingue deux cas pour* m *:*

1. *Si* $m \leq 1$*, alors* $\xi = 1$ *et il y a extinction de la lignée presque sûrement.*
2. *Si* $m > 1$*, alors* $\xi < 1$ *et il y a extinction avec une probabilité dans* $]0, 1[$.

Démonstration. On a : $\forall t \in [0, 1]$, $\phi''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k t^k \geq 0$. Or on a supposé que $p_0 + p_1 < 1$ donc $\phi''(t) > 0$ et ϕ est strictement convexe sur $[0, 1]$. En particulier, la courbe de ϕ est située au dessus de la tangente de ϕ en 1, d'équation $y = mx + 1 - m$. On rappelle que $\phi(1) = 1$. De plus, par hypothèse $0 < p_0 < 1$, donc 2 cas se dessinent :

- Si $m \geq 1$, alors ϕ n'admet pas de point fixe dans $[0, 1[$.
- Si $m < 1$, alors ϕ admet un point fixe dans $]0, 1[$.

Le résultat découle alors de la propriété 2. □

Nous avons donc distingué 2 cas pour m qui déterminent si la lignée s'éteint ou pas. Pour faire une étude plus précise on va devoir distinguer trois cas (c.f. figure 2) :

- *sur-critique* si $m > 1$;
- *critique* si $m = 1$;
- *sous-critique* si $m < 1$.

Nous consacrons le prochain chapitre à l'étude de quelques résultats sur le processus, en fonction de la valeur de m.

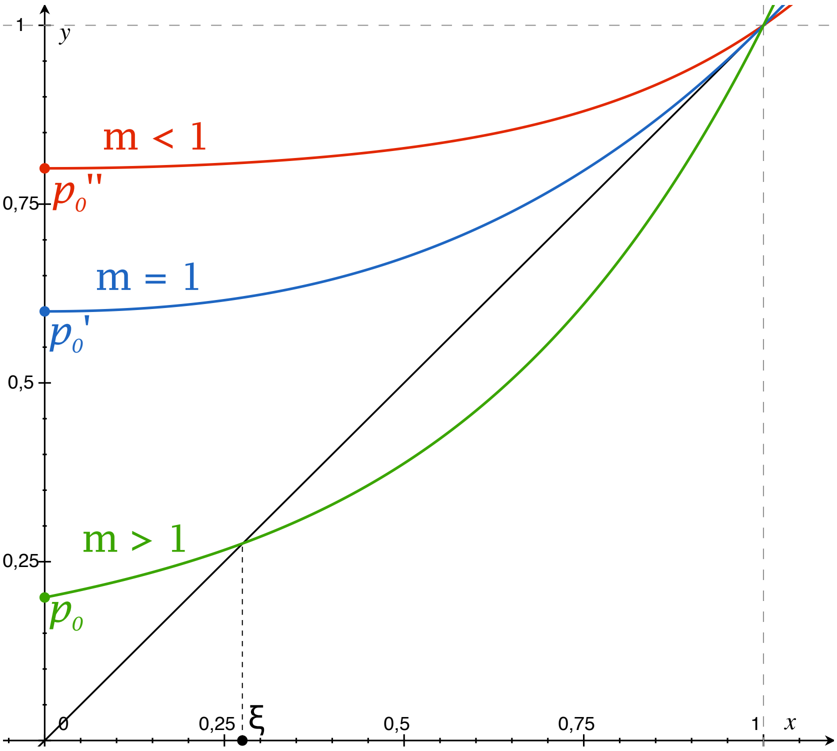

FIGURE 2 – Graphe de ϕ pour 3 valeurs de m : $m > 1$, $m < 1$, $m = 1$.

2 Étude asymptotique en fonction de m

D'après ce qui précède, l'extinction du processus est presque certaine pour $m \leq 1$. On rappelle que $\tau = \min\{n \geq 1 \mid Z_n = 0\}$. On cherche dans cette partie à analyser le comportement asymptotique de $\mathbb{P}(\tau > n)$, qui correspond en fait à la décroissance de (Z_n).

Remarque 4. $\mathbb{P}(\tau > n) = \mathbb{P}(Z_n > 0)$, *d'où*

$$\mathbb{P}(\tau > n) = 1 - \phi_n(0).$$

La vitesse de décroissance de (Z_n) *est donc liée à la vitesse de convergence de* $\phi_n(0)$.

2.1 Cas sous-critique

Propriété 3. *On suppose que* $\sigma < \infty$, *où* $\sigma^2 = Var(X)$. *Alors, si* $m < 1$, *il existe* $C \in]0, \infty[$ *tel que :*

$$\mathbb{P}(\tau > n) \underset{n \to \infty}{\sim} Cm^n.$$

Démonstration. $\phi_n(0) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$, on a donc par un développement de Taylor de ϕ en 1 au premier ordre :

$$\begin{aligned} 1 - \phi_{n+1}(0) &= 1 - \phi(\phi_n(0)) \\ &= 1 - \phi(1 - (1 - \phi_n(0))) \\ &= 1 - \phi(1) + (1 - \phi_n(0))\phi'(1) + o((1 - \phi_n(0))^2) \\ &= (1 - \phi_n(0))m + o((1 - \phi_n(0))^2. \end{aligned}$$

La fonction ϕ étant convexe, $o((1 - \phi_n(0))^2)$ est négatif pour n assez grand. Donc il existe $F > 0$ tel que pour n assez grand, on ait

$$m(1 - \phi_n(0)) - F(1 - \phi_n(0))^2 \leq 1 - \phi_{n+1}(0) \leq m(1 - \phi_n(0)). \tag{1}$$

On obtient déjà : $1-\phi_n(0) \leq m^n$. De plus, en divisant (1) par $m(1-\phi_n(0))$:

$$1 - F(1-\phi_n(0)) \leq \frac{m^{-(n+1)}(1-\phi_{n+1}(0))}{m^{-n}(1-\phi_n(0))} \leq 1$$

et en combinant les deux, il vient :

$$1 - Fm^n \leq \frac{m^{-(n+1)}(1-\phi_{n+1}(0))}{m^{-n}(1-\phi_n(0))} \leq 1.$$

Or $m < 1$ donc à partir d'un certain rang N_0 on a $1 - Fm^n > 0$, et alors pour $N \geq N_0$:

$$\sum_{n=N_0}^{N} \ln(1 - Fm^n) \leq \sum_{n=N_0}^{N} \ln\left(\frac{m^{-(n+1)}(1-\phi_{n+1}(0))}{m^{-n}(1-\phi_n(0))}\right) \leq 0.$$

Ceci montre que la série de terme général négatif

$$\ln(m^{-(n+1)}(1-\phi_{n+1}(0))) - \ln(m^{-n}(1-\phi_n(0)))$$

est minorée, donc converge. Ainsi, il existe $C > 0$ tel que $\lim_{n\to\infty} m^{-n}(1-\phi_n(0)) = C$, d'où le résultat. $\square$

Application :

On illustre le théorème précédent dans le cas où X suit une loi de Poisson : $X \sim P(m)$, avec $m < 1$. On a programmé une procédure Scilab [1] qui prend en argument m, et qui simule X ainsi que la fonction $n \mapsto \mathbb{P}(\tau > n)$ en conséquence.

Nous observons ci-dessous la courbe des fonctions $n \to \mathbb{P}(\tau > n)$ pour différentes valeurs de m. De la courbe la plus haute à la plus basse, nous avons pris les valeurs de m suivantes : $m = 0.9$; $m = 0.8$; $m = 0.7$; $m = 0.6$; $m = 0.5$; $m = 0.4$; $m = 0.3$; $m = 0.2$; $m = 0.1$; $m = 0.01$.

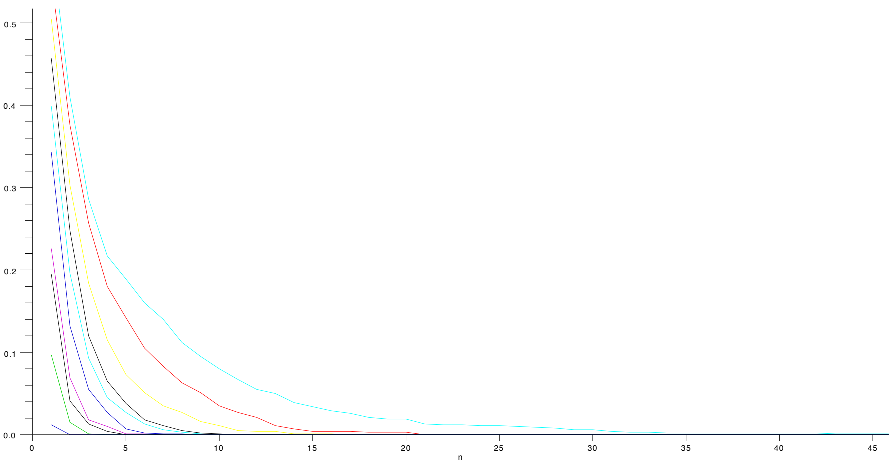

FIGURE 3 – Comportement des fonctions $n \mapsto \mathbb{P}(\tau > n)$ pour différentes valeurs de m.

1. c.f. Annexe

2.2 Cas critique

Propriété 4. *On suppose toujours que $\sigma < \infty$. Si $m = 1$, alors :*

$$\mathbb{P}(\tau > n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{\sigma^2 n}.$$

Démonstration. La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 en 1 donne l'existence d'une fonction α continue, bornée sur $[0,1]$, vérifiant $\lim_{s\to 1} \alpha(s) = 0$ et telle que

$$\forall s \in [0,1],\ \phi(s) = s + \frac{(1-s)^2}{2}\sigma^2 + (1-s)^2\alpha(s).$$

On a alors

$$\frac{1}{1-\phi(s)} - \frac{1}{1-s} = \frac{\phi(s)-s}{(1-\phi(s))(1-s)} = \frac{\frac{1}{2}\sigma^2 + \alpha(s)}{1 - \frac{1}{2}(1-s)\sigma^2 - (1-s)\alpha(s)}$$

et donc $\left(\frac{1}{2}\sigma^2 + \alpha(s)\right)\left(1 + \frac{1}{2}(1-s)\sigma^2 + (1-s)\tilde{\alpha}(s)\right)$ où $\tilde{\alpha}$ est comme α. Ainsi, il existe β comme α telle que

$$\forall s \in [0,1[,\ \frac{1}{1-\phi(s)} - \frac{1}{1-s} = \frac{\sigma^2}{2} + \beta(s).$$

Il vient, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{1-\phi_n(s)} - \frac{1}{1-s} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1-\phi(\phi_k(s))} - \frac{1}{1-\phi_k(s)} = n\frac{\sigma^2}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} \beta(\phi_k(s))$$

et enfin

$$\frac{1}{n(1-\phi_n(s))} - \frac{1}{n(1-s)} = \frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \beta(\phi_k(s)).$$

Soit $\varepsilon > 0$. On a $\beta(s) \xrightarrow[s\to 1]{} 0$ et $\phi_k(0) \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$ donc par continuité de β il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq K$, $|\beta(\phi_n(0))| < \varepsilon$. Donc pour n assez grand :

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \beta(\phi_k(0))\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{K} |\beta(\phi_k(0))| + \frac{1}{n}\sum_{k=K+1}^{n-1} |\beta(\phi_k(0))| < \varepsilon + \varepsilon.$$

D'où $\frac{1}{n(1-\phi_n(0))} \sim \frac{\sigma^2}{2}$ et le résultat. □

Remarque 5. *Le cas est effectivement critique : par le théorème 2 on a $Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$, et pourtant $\mathbb{E}[Z_n] = 1$ pour tout n. Cela implique que (Z_n) ne peut pas être dominée par une v.a. intégrable (sinon on aurait $1 = \lim \mathbb{E}[Z_n] = \mathbb{E}[\lim Z_n] = 0$). En outre, la propriété 4 implique que la moyenne du temps d'extinction τ est infinie. En effet, on a $\mathbb{P}(\tau > k-1) = \mathbb{P}(\tau = k) + \mathbb{P}(\tau > k)$. En multipliant par k et en sommant de 1 à n, on obtient*

$$\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(\tau = k) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(\tau > k)\right) - n\mathbb{P}(\tau > n).$$

Or $\mathbb{P}(\tau > n) \sim \frac{2}{\sigma^2 n}$ (terme général d'une série divergente) et $n\mathbb{P}(\tau > n) \sim \frac{2}{\sigma^2}$, d'où $\mathbb{E}[\tau] = \infty$.

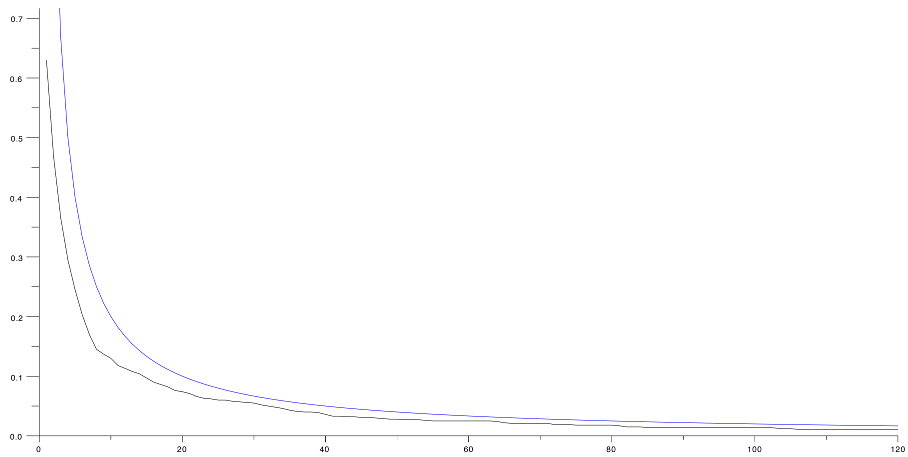

FIGURE 4 – Comportement de $n \to \mathbb{P}(\tau > n)$ pour $m = 1$

Application :

On a programmé une procédure Scilab (en annexe) qui simule une v.a. X de loi $P(1)$, et qui trace la courbe de $n \mapsto \mathbb{P}(\tau > n)$. Sur la figure 4 on a représenté cette courbe pour une simulation de X (en noir), ainsi que la fonction : $x \mapsto \frac{2}{\sigma^2 x}$ (en bleu).

3 Cas sous-critique : recensement de la lignée

On se place dans le cas $m < 1$. D'après ce qui précède, on sait que la lignée s'éteint *presque sûrement*. Ainsi, le nombre total d'individus, défini par

$$N := \sum_{n=0}^{+\infty} Z_n$$

est fini *presque sûrement*. Une question intéressante qui se pose alors est de recenser la lignée, c'est-à-dire connaître N. Puisque c'est une variable aléatoire, on va chercher à décrire sa loi. On a vu que le processus de Galton-Watson peut être décrit par un arbre : on décide d'indexer (de manière arbitraire) les nœuds de cet arbre par $\mathbb{N}^*$:

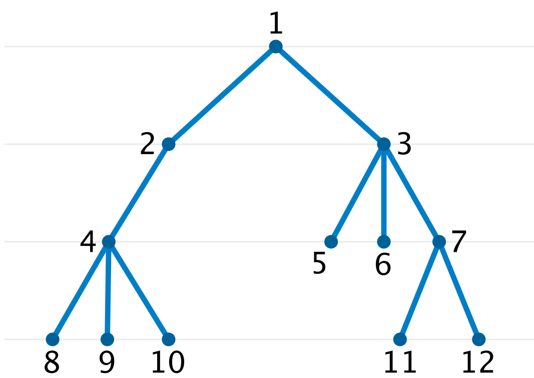

FIGURE 5 – Indexation des nœuds de l'arbre

Soit $U_i :=$ [nombre d'enfants de l'individu i]-1. On définit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$S_n := \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0\,; \\ \sum_{i=1}^{n} U_i & \text{si } n \geq 1\,. \end{cases}$$

Remarque 6. *Les U_i sont des variables aléatoires i.i.d.* En effet, l'indexation des noeuds de l'arbre correspond à une bijection

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \\ i & \mapsto & (n_i, k_i) \end{array}$$

telle que $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $U_i = X_{n_i,k_i} - 1$. Or les $X_{n,k}$ sont i.i.d., donc les U_i le sont aussi.

3.1 Graphe de (S_n)

On peut dessiner le graphe de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour l'arbre pris en exemple :

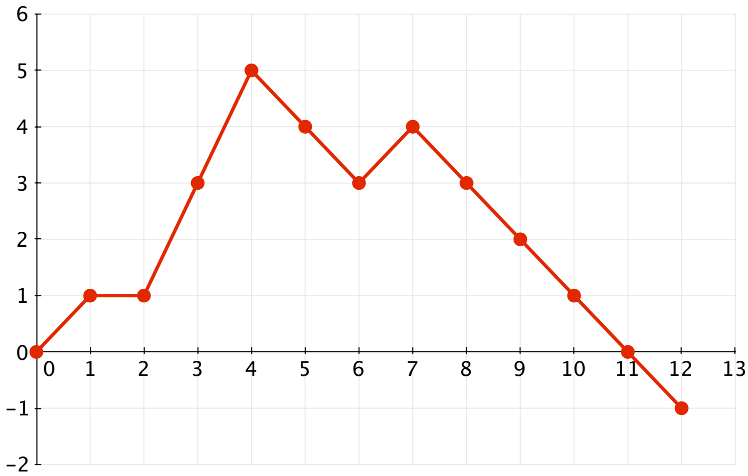

FIGURE 6 – Graphe de (S_n) pour l'arbre de la figure 5

On constate que la suite atteint -1 pour $n = 12$. En fait, on a la propriété suivante :

Propriété 5. *Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $S_n = -1$.*

Démonstration. D'après la remarque **6**, les U_i sont i.i.d. et pour tout $i \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{E}[U_i] = \mathbb{E}[U_1] = \mathbb{E}[X_{n_1,k_1}] - 1 = m - 1.$$

D'après la loi des grands nombres, on a

$$\frac{S_n}{n} = \frac{U_1 + \cdots + U_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} m - 1,$$

et ainsi $S_n \underset{n\to\infty}{\sim} n(m-1)$. Or $(m-1) < 0$ (par hypothèse), donc $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$. Enfin, on constate que S_n ne peut décroître que de 1 (car $\forall i \in \mathbb{N}^*, U_i \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$), d'où le résultat. $\square$

Réciproquement, en partant du graphe de (S_n), on peut reconstruire l'arbre qui décrit le processus. En fait, si on fixe une convention pour l'indexation, on a une bijection entre une partie de la suite (S_n) et l'arbre de Galton-Watson : c'est une conséquence du théorème suivant.

Théorème 3. *On note $T := \inf\{n \leq 0 \mid S_n = -1\}$. Alors $N = T$.*

Remarque 7. *Sur la figure 6 on n'a représenté qu'une partie de (S_n) : comme elle est définie à partir des $X_{n,k}$, rien ne l'empêche d'atteindre -1 plusieurs fois (un nombre fini de fois cependant car on sait que $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$). Le théorème 3 implique que l'arbre de Galton-Watson est entièrement déterminé par $\{S_0, \ldots, S_T\}$. Cela permet d'utiliser des propriétés de (S_n) pour en tirer des propriétés sur N (cf. 3.3).*

Démonstration. Il s'agit de montrer que $S_0 \geq 0, \ldots, S_{N-1} \geq 0$ et $S_N = -1$. Avec les notations de la remarque 6, on a $S_n = \sum_{i=1}^{n} (X_{n_i,k_i} - 1) = (\sum_{i=1}^{n} X_{n_i,k_i}) - n$, i.e. $S_n =$ [nombre d'enfants des n premiers individus] $- n$. Or, pour avoir n individus, il faut qu'il y ait au préalable au moins $n-1$ enfants (la racine n'en fait pas partie). De plus, tant qu'on n'a pas parcouru tout l'arbre, il existe un individu faisant partie des n premiers qui a un fils non situé dans ces n premiers. Ainsi, $S_n \geq 0$ tant qu'on n'a pas parcouru tout l'arbre. Enfin, la définition de (S_n) implique que [nombre d'enfants des N premiers individus] $= N - 1$ (car seule la racine n'a pas de père). On a donc $S_N = -1$, d'où le résultat. □

3.2 Expression de la fonction génératrice de N

Définition 4. *La fonction génératrice de N est notée ψ et définie par*

$$\forall s \in [0,1],\ \psi(s) = \mathbb{E}\left[s^N\right].$$

Théorème 4. *On peut exprimer ψ en fonction de la loi de X par la relation :*

$$\forall s \in [0,1],\ \psi(s) = s\phi(\psi(s)) \tag{2}$$

où $\phi : t \to \sum_{k=0}^{+\infty} p_k t^k$ est la fonction génératrice de X.

Remarque 8. *Grâce à (2), on a directement la moyenne μ de N :*

$$\mu = \psi'(1) = \frac{1}{1-m}.$$

Démonstration. Etudions les premiers cas possibles pour U_1 :

- si $U_1 = -1$, le nœud **1** n'a pas de fils donc $T = 1$;
- si $U_1 = 0$, le nœud **1** a exactement un fils donc $T = 1 + \widetilde{T}$ avec $\widetilde{T} \sim T$ *(ceci est dû au fait que les $X_{n,k}$ sont i.i.d.)* ;
- si $U_1 = 1$, alors $T = 1 + \widetilde{T}_1 + \widetilde{T}_2$ avec T, $\widetilde{T}_1$ et $\widetilde{T}_2$ i.i.d. (pour la même raison que précédemment).

On peut généraliser : si $U_1 = k \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$, on a

$$T = 1 + \sum_{j=1}^{k+1} \widetilde{T}_j \tag{3}$$

avec T, $\widetilde{T}_1$, …, $\widetilde{T}_{k+1}$ i.i.d. On fait la remarque suivante, utile pour la suite.

Remarque 9. *Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Alors, avec les notations précédentes :*

$$\forall j \in \{1, \dots, k+1\},\ \mathbb{1}_{\{U_1=k\}} \perp\!\!\!\perp \widetilde{T}_j.$$

Cela vient du fait que $\forall j \in \{1, \dots, k+1\}$, $U_1 \perp\!\!\!\perp \widetilde{T}_j$, qui découle des hypothèses de départ (indépendance des $X_{n,k}$).

On utilise (3) pour ψ : pour tout $s \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
\psi(s) &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=-1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{U_1=k\}} s^T\right] \\
&= \sum_{k=-1}^{+\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{U_1=k\}} s^T\right] \\
&= \sum_{k=-1}^{+\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{U_1=k\}} s^{1+\sum_{j=1}^{k+1} \widetilde{T}_j}\right] \\
&= s \underbrace{\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{U_1=-1\}}\right]}_{=p_0} + s \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{U_1=k\}} s^{\sum_{j=1}^{k+1} \widetilde{T}_j}\right].
\end{aligned}$$

Or d'après la remarque 9, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{U_1=k\}} s^{\sum_{j=1}^{k+1} \widetilde{T}_j}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{U_1=k\}} \prod_{j=1}^{k+1} s^{\widetilde{T}_j}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{U_1=k\}}\right] \prod_{j=1}^{k+1} \mathbb{E}\left[s^{\widetilde{T}_j}\right] \\
&= p_{k+1} \psi(s)^{k+1}.
\end{aligned}$$

D'où $\psi(s) = sp_0 + s\sum_{k=0}^{+\infty} p_{k+1}\psi(s)^{k+1} = s\sum_{k=0}^{+\infty} p_k \psi(s)^k = s\phi(\psi(s))$. □

Application :

L'équation (2) permet, dans certains cas, de calculer ψ de manière explicite. Par exemple si ϕ est un polynôme du second degré (i.e. $\forall k \geq 3, p_k = 0$). Il suffit alors de résoudre $p_2 X^2 + (p_1 - \frac{1}{s})X + p_0 = 0$ pour avoir $\psi(s)$.

3.3 Une autre méthode pour trouver la loi de N

L'équation fonctionnelle peut être difficile (voir impossible ?) à résoudre dès que ϕ est un polynôme de degré élevé, ou une série. On cherche alors à obtenir des informations sur N lorsque l'équation fonctionnelle est inutilisable. On rappelle que pour tout $s \in [0,1]$:

$$\psi(s) = \mathbb{E}\left[s^N\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = n)s^n.$$

Par le théorème 3, on a $N = T$. On va chercher une méthode de calcul de $\mathbb{P}(T = n)$.

Remarque 10. $\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(S_1 \geq 0, \ldots, S_{n-1} \geq 0, S_n = -1)$

Théorème 5.

$$\forall n \geq 1,\ \mathbb{P}(T = n) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(S_n = -1)$$

Démonstration. On note $A_n = \{\text{marches aléatoires } (S_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ telles que } S_n = -1\}$, et $P(A_n)$ l'ensemble des parties de A_n. On considère l'application :

$$\begin{array}{rcl} \gamma : A_n & \to & P(A_n) \\ (U_1, \ldots U_n) & \mapsto & \{(U_{i+1}, \ldots, U_n, U_1, \ldots, U_i), i \in \{1, \ldots, n-1\}\} \end{array}$$

On remarque que $\mathrm{Im}(\gamma)$ forme une partition de A_n. De plus il existe un unique i_0 dans $\{1, \ldots, n-1\}$ tel que $U_1 \geq 0, \ldots, U_{i_0-1} \geq 0, U_{i_0+1} \geq 0, \ldots, U_n \geq 0$, et $U_{i_0} = -1$. On a

$$i_0 = \min\{i \in \mathbb{N} \mid \forall k \in \{1, \ldots, n\}, S_i \leq S_k\},$$

d'où $\mathbb{P}(T = n) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(S_n = -1)$. □

Application :

Par le théorème précédent, on est ramené au calcul de $\mathbb{P}(S_n = -1)$. Reprenons l'exemple de la loi de Poisson : $X \sim P(\lambda)$. L'équation fonctionnelle est difficile à résoudre dans ce cas. Considérons donc $\mathbb{P}(S_n = -1) = \mathbb{P}(\sum_{i=0}^{n} X_{n_i,k_i} = -1 + n)$. Les X_i étant indépendantes, on a $X_1 + \cdots + X_n \sim P(n\lambda)$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(T = n) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(S_n = -1) = \frac{1}{n}\frac{e^{n\lambda}(n\lambda)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{e^{n\lambda}(n\lambda)^{n-1}}{n!}.$$

Conclusion

Malgré sa simplicité, le processus de Galton-Watson génère déjà des questions intéressantes du point de vue mathématique. Au delà de sa motivation historique, on constate qu'il permet de modéliser de manière réaliste certains phénomènes naturels *a priori* bien plus complexes : (populations de bactéries en biologie, d'atomes en physique).

Il est possible de le complexifier à volonté en prenant en compte d'autres aspects dans la dynamique de la population :

– prise en compte des sexes ;
– immigration, émigration ;
– survie pendant plusieurs générations…

Annexe

A Equations des courbes de la figure 2

- Cas $m < 1$: $\phi(x) = \frac{8}{10} + \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{10}x^5$, *i.e.* :

$$p_0 = \frac{8}{10},\ p_2 = p_5 = \frac{1}{10} \text{ et } p_i = 0\ \forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0, 2, 5\}$$

- Cas $m = 1$: $\phi(x) = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x^3$
- Cas $m > 1$: $\phi(x) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{5}x^4$

B Programme Scilab, cas $m < 1$

Voici la procédure qui simule $n \mapsto \mathbb{P}(\tau > n)$ lorsque $m = \mathbb{E}[X] < 1$:

```
function tpssurvieminf1(n,m,k)
    // on regarde P(tau>i) pour tout i<k
X=grand(n,1,'poi',m); // m moyenne de X; n= nbre de simulations;
Y=X;
N=zeros(n,1);// N vecteur qui fait office de tau pour les n simultaions.

for i=1:n
    while Y(i,1)>0,
        t=grand(Y(i,1),1,'poi',m);
        N(i,1)=N(i,1)+1;
        Y(i,1)=sum(t);
    end;
end;

B=zeros(k,1);

for l=1:k
    b=0;
    for j=1:n
        if N(j,1)>=l then b=b+1; end
    end
    B(l,1)=b/n;
end

C=linspace(1,k,k);
plot2d(C,B);

endfunction
```

C Programme Scilab, cas $m = 1$

Voici la procédure qui simule $n \mapsto \mathbb{P}(\tau > n)$ lorsque $m = \mathbb{E}[X] = 1$:

```
function tpssurvie2m1(n,k)
    // On regarde P(tau>i) pour tout i<k
X=grand(n,1,'poi',1); // m moyenne de X; n= nbre de simulations;
Y=X;
N=zeros(n,1); //N vecteur qui fait office de tau pour les n simultaions.

for i=1:n
    while Y(i,1)>0,
        t=grand(Y(i,1),1,'poi',1);
        N(i,1)=N(i,1)+1;
        Y(i,1)=sum(t);
    end;
end;

B=zeros(k,1);

for l=1:k
    b=0;
    for j=1:n
        if N(j,1)>=l then b=b+1; end
    end
    B(l,1)=b/n;
end

C=linspace(1,k,k);
plot2d(C,B);
D=zeros(k,1);
for bb=1:k
    D(bb,1)=2/(1*1*bb);
end
plot(C,D);
endfunction
```