# Représentations linéaires des groupes finis
# Une introduction

Daniel FERRAND

(*Août 2004. Révision en octobre 2005*)

Ce fascicule résume 12 heures d'un cours, donné à l'automne 2004, et destiné à des étudiants de quatrième année, dont le bagage algébrique est léger (en particulier, ils ne sont pas supposés connaître le produit tensoriel). Ces contraintes, et le souhait que les auditeurs puissent quand même acquérir une certaine intuition de ce qu'est une représentation linéaire, m'ont conduit à m'écarter de la présentation habituelle : les caractères sont relégués à la fin car ils ne sont indispensables que pour des développements dépassant le cadre modeste de ce cours d'introduction. Les résultats fondamentaux sur la décomposition en irréductibles et sur les représentations induites sont ainsi démontrés directement, de façon peut-être plus effective. Il m'a semblé qu'utiliser d'emblée la puissante théorie des caractères risquait de rendre les démonstrations un peu magiques aux yeux de débutants qui doivent plutôt être d'abord confrontés à des représentations en chair et en os, chair et os que le caractère ne peut évoquer qu'après une longue pratique de la chose. Pour « l'induction à $G$ d'une représentation d'un sous-groupe $H$ » j'ai repris la définition initiale de Frobenius (1898) plutôt que celle préférée aujourd'hui, c'est-à-dire l'adjoint à droite (plutôt qu'à gauche) de la restriction au sous-groupe $H$, parce que cette construction utilise juste un espace d'applications, objet familier même à des étudiants débutants, alors que l'adjoint à gauche repose sur le produit tensoriel. Par ailleurs, dans le cas de groupes finis, ces deux inductions sont des foncteurs isomorphes.

Le livre de référence est évidemment celui de J.-P. SERRE, *Représentations linéaires des groupes finis*, 3ème éd., Hermann, Paris 1978, cité [S].

Ces notes exposent les principaux résultats des §§1 à 8 de ce livre, mais, comme déjà dit, par une démarche différente ; sorte d'introduction, donc, mais en contrepoint.

## 0. Rappels sur les espaces d'applications linéaires.

Ce paragraphe ne comporte pas de démonstration bien que les énoncés soient très utilisés dans la suite ; un lecteur qui ne devinerait pas les démonstrations par simple inspection devrait considérer tout cela comme des exercices indispensables.

Dans ce paragraphe le corps de base $K$ est quelconque, mais dès le paragraphe suivant, il s'agira du corps des complexes. On ne considère que des $K$-espaces vectoriels de dimension finie. On notera $\mathrm{Hom}(V, W)$, à la place de $\mathrm{Hom}_K(V, W)$, l'espace des applications $K$-linéaires de $V$ vers $W$. Idem pour End.

0.1. Soient $x$ et $y$ deux éléments non nuls d'un espace vectoriel $V$. Il existe un automorphisme $v : V \xrightarrow{\sim} V$ tel que $v(x) = y$ ; autrement dit, le groupe $\mathbf{GL}(V)$ opère transitivement sur l'ensemble des éléments non nuls de $V$.

Soit $W \subset V$ un sous-espace tel que pour tout $v \in \mathbf{GL}(V)$, on ait $v(W) \subset W$. Alors $W = 0$ ou $W = V$.

0.2. L'application $K \to \mathrm{End}(V), \quad a \longmapsto (x \mapsto ax)$ est un homomorphisme d'anneaux ; il est injectif si l'espace $V$ est non nul, bijectif si $\dim(V) = 1$. Pour $\dim(V) \geq 1$, cet homomorphisme permet d'identifier $K$ au centre de $\mathrm{End}(V)$. (*Pour voir qu'un élément $u$ du centre est une homothétie, montrer d'abord, en utilisant 0.1, que s'il existe un $x \neq 0$ tel que $u(x) = ax$, avec $a \in K$, alors $u$ est l'homothétie de rapport $a$. Montrer ensuite que pour un sous-espace $W \subset V$, de dimension 1, on a $u(W) \subset W$, en utilisant un projecteur d'image $W$.*).

0.3. Une application linéaire *surjective* $\alpha : U \to U''$, de noyau $U' = \mathrm{Ker}(\alpha)$, induit un isomorphisme

$$U/U' \xrightarrow{\sim} U''.$$

Pour qu'une application linéaire $\gamma : U \to V$ passe par $U''$, i.e pour qu'il existe $\beta : U'' \to V$, avec $\gamma = \beta\alpha$,

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"'] & U'' \arrow[dl, dotted, "\beta"] \\ V & \end{tikzcd} ,$$

il faut et il suffit que $\gamma(U') = 0$.

0.4. Soient $v : V \to U$ et $w : W \to U$ deux applications linéaires. Pour qu'il existe une application linéaire $u : W \to V$ telle que $vu = w$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "v"] & U \\ & W \arrow[u, "w"'] \arrow[ul, dotted, "u"] \end{tikzcd}$$

il faut et il suffit que l'on ait $\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Im}(v)$. En particulier toute application surjective $v : V \to U$ admet une *section*, c'est-à-dire une application $u$ telle que $vu = 1_U$.

0.5. Soient $v : U \to V$ et $w : U \to W$ deux applications linéaires. Pour qu'il existe une application linéaire $u : V \to W$ telle que $uv = w$,

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "v"] \arrow[d, "w"'] & V \arrow[dl, dotted, "u"] \\ W & \end{tikzcd}$$

il faut et il suffit que l'on ait $\mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(w)$. En particulier, toute injection $v : U \to V$ admet une *rétraction* c'est-à-dire une application $u$ telle que $uv = 1_U$.

0.6. Une suite d'applications linéaires (ou même d'homomorphismes de groupes)

$$U \xrightarrow{u} V \xrightarrow{v} W$$

est dite *exacte* si $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(u)$. Ainsi l'exactitude de $0 \longrightarrow V \xrightarrow{v} W$ équivaut à l'injectivité de $v$, tandis que celle de $U \xrightarrow{u} V \longrightarrow 0$ équivaut à la surjectivité de $u$.

L'exactitude de $0 \longrightarrow U \longrightarrow V \longrightarrow W \longrightarrow 0$ implique la relation $\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$.

Soit $V$ un espace non nul. Pour que la suite

$$0 \longrightarrow U' \longrightarrow U \longrightarrow U'' \longrightarrow 0$$

soit exacte, il faut et il suffit que la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(U'', V) \longrightarrow \mathrm{Hom}(U, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}(U', V) \longrightarrow 0$$

soit exacte (Attention : $\mathrm{Hom}(-, V)$ est *contra*variant, i.e cela renverse le sens des flèches).

0.7. On considère le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & U' \arrow[r] \arrow[d, "u'"'] & U \arrow[r] \arrow[d, "u"] & U'' \arrow[r] \arrow[d, "u''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & V' \arrow[r] & V \arrow[r] & V'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Si $u'$ et $u''$ sont injectives, alors $u$ est injective.
Si $u'$ et $u''$ sont surjectives, alors $u$ est surjective.

# 1. Représentations linéaires.

*Dans toute la suite $G$ désignera un groupe* fini.
*Tous les espaces considérés seront des* $\mathbf{C}$*-espaces vectoriels* de dimension finie.

### 1.1. Définitions

On appelle *représentation linéaire* de $G$ un homomorphisme de groupes

$$\rho : G \quad \longrightarrow \quad \mathbf{GL}(V).$$

Ainsi, $\rho$ associe à tout $g \in G$ un automorphisme $g_V : V \to V$ du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $V$, de telle sorte que $1_V = Id_V$ et que, pour $g, g' \in G$, on ait $(gg')_V = g_V \circ g'_V$ (le produit dans $G$ correspond donc à la composition des automorphismes). Dans cette définition on ne suppose pas que l'homomorphisme $\rho$ est injectif, si bien qu'il ne permet en général pas de « représenter » $G$ comme un sous-groupe du groupe linéaire contrairement à ce que le terme (ancien) laisserait supposer. Cependant, dans bien des cas, le groupe $G$ est défini comme sous-groupe d'un groupe linéaire ou d'un groupe symétrique particuliers, c'est-à-dire qu'il est donné a-priori avec *une* de ses représentations. Par exemple, partant d'un sous-ensemble fini $X$ d'un vectoriel $V$, qui l'engendre (penser aux sommets d'un polyèdre !), on peut considérer le sous-groupe $G \subset \mathbf{GL}(V)$ formé des $g$ tels que $gX = X$ ; il est fini puisque c'est aussi un sous-groupe du groupe des permutations de $X$.

Lorsque $g_V = Id$ pour tout $g \in G$, on parle de représentation *triviale*.

La tradition impose d'appeler *degré* d'une représentation linéaire $V$ de $G$ la dimension de $V$.

Le terme $G$-*module* (qui fait allusion à la structure de $\mathbf{C}[G]$-module à gauche), est exactement synonyme de représentation linéaire ; il est plus court.

Soit $V$ une représentation linéaire de $G$. On note $V^G$ le sous-espace formé des éléments invariants :

$$V^G = \{x \in V, \forall g \in G,\ g_V(x) = x\}.$$

On désigne par $V \to V_G$ le plus grand quotient de $V$ sur lequel $G$ agit trivialement ; c'est donc le quotient par le sous-espace engendré par tous les éléments de la forme $x - g_V(x)$, avec $x \in V$ et $g \in G$.

**Lemme 1.1.1.** *Soit $V$ une représentation de $G$. Considérons l'endomorphisme $e$ de $V$ défini par*

$$e \quad = \quad \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g_V.$$

*Alors :*

*i) Pour tout $g \in G$, on a $g_V \circ e = e \circ g_V = e$ ; en particulier, $e$ est un idempotent.*

*ii)* $\mathrm{Im}(e) = V^G$.

*iii)* $\mathrm{Ker}(e)$ *est en gendré par les éléments de la forme $x - g_V(x)$, avec $x \in V$ et $g \in G$ ; par passage au quotient, $e$ donne un isomorphisme $\bar{e} : V_G \xrightarrow{\sim} V^G$.*

*iv) L'application composée $V^G \hookrightarrow V \twoheadrightarrow V_G$ est bijective.*

Démonstration : *i)* Pour $g$ fixé, les applications $g' \mapsto gg'$ et $g' \mapsto g'g$ sont des bijections de $G$.

*ii)* Les égalités $g_V e = e$ montrent l'inclusion $\mathrm{Im}(e) \subset V^G$ ; l'autre est claire.

*iii)* D'après *ii)*, $\bar{e}$ est surjective ; soit $x \in V$ un élément dont l'image $\bar{x}$ dans $V_G$ soit dans le noyau de $\bar{e}$ ; on a donc $0 = \bar{e}(\bar{x}) = e(x)$ ; par suite,

$$x \;=\; x - e(x) \;=\; \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G}(x - g_V(x)) \;\in \mathrm{Ker}(V \to V_G).$$

*iv)* Constater que l'application évoquée est la réciproque de $\bar{e}$.□

Soient $U$ et $V$ deux représentations linéaires de $G$ (donc deux $G$-modules). On munit l'espace des applications linéaires de $U$ vers $V$, noté $\mathrm{Hom}(U, V)$, d'une opération de $G$ en posant

$${}^g u \quad = \quad g_V \circ u \circ g_U^{-1}.$$

Ainsi, pour tout $g \in G$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "u"] \arrow[d, "g_U"'] & V \arrow[d, "g_V"] \\ U \arrow[r, "{}^g u"'] & V \end{tikzcd}$$

On appelle *application $G$-linéaire* une application linéaire $u : U \to V$ qui est, de plus, compatible aux opérations de $G$, c'est-à-dire telle que pour tout $g \in G$, on ait $u \circ g_U = g_V \circ u$, ou encore : ${}^g u = u$ ; on note le plus souvent $\mathrm{Hom}_G(U, V)$ l'espace des applications $G$-linéaires ; cet espace est parfois joliment nommé *l'espace d'entrelacement* de $U$ et $V$. C'est le sous-espace des invariants pour l'opération de $G$ sur $\mathrm{Hom}(U, V)$ décrite ci-dessus, ainsi $\mathrm{Hom}_G(U, V) = \mathrm{Hom}(U, V)^G \subset \mathrm{Hom}(U, V)$.

> **Exercice 1.1.2.** Si l'opération de $G$ sur $U$ est triviale, définir un isomorphisme
> $$\mathrm{Hom}(U, V^G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_G(U, V).$$
> Si l'opération de $G$ sur $V$ est triviale, définir un isomorphisme
> $$\mathrm{Hom}(U_G, V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_G(U, V).$$

Pour $x \in V$, on notera désormais le plus souvent $gx$ pour $g_V(x)$.

### 1.2. Représentations irréductibles

Un sous-espace $W \subset V$ d'une représentation $V$ est dit *stable* ou *(globalement) invariant*, si pour tout $g \in G$, on a $gW \subset W$ ; cela implique que $g$ induit un automorphisme de $W$, puisque $W$ est de dimension finie. On parlera donc aussi de *sous-représentation* de $V$.

Une représentation $V$ est dite *irréductible*, ou *simple*, si $V \neq 0$ et si les seules sous-représentations de $V$ sont 0 et $V$.

Si $V$ est une représentation, et si $x$ est un élément de $V$, le sous-espace engendré par les $gx$ pour $g \in G$ est une sous-représentation de $V$ ; elle n'est pas, en général, irréductible puisqu'elle contient l'élément $\sum_{g \in G} gx$, qui est invariant, et qui peut fort bien être non nul. Ainsi, il ne faut pas croire que chaque élément de $V$ soit contenu dans une représentation irréductible ; par contre, on verra plus bas que toute représentation est somme directe de représentations irréductibles.

Un sous-espace de $V$, non nul $G$-stable et de dimension minimum (pour ces deux propriétés) est irréductible.

> **Exercice 1.2.1.** Soit $V$ une représentation irréductible. La représentation $\mathrm{Hom}(V, V)$ est-elle irréductible ?
>
> **Exercice 1.2.2.** Soit $V$ une représentation $\neq 0$ telle que tout endomorphisme $v : V \to V$ puisse s'écrire comme une combinaison linéaire des $g_V$. Montrer que $V$ est irréductible.
>
> **Exercice 1.2.3.** Soit $V$ une représentation linéaire de $G$, et $H$ un sous-groupe distingué de $G$. Montrer que $V^H$ est une sous-représentation de $G$, qu'on peut voir comme une représentation du quotient $G/H$. Si $V$ est irréductible, alors $V^H = V$ ou $V^H = 0$. Si l'homomorphisme $G \to \mathbf{GL}(V)$ est injectif et $H \neq 1$, alors $V^H = 0$.

### 1.3. Représentations de degré 1

Si $V$ est un espace de dimension 1, l'homomorphisme d'anneaux $\mathbf{C} \to \mathrm{End}(V)$ est un isomorphisme ; il induit un isomorphisme $\mathbf{C}^\times \to \mathbf{GL}(V)$ sur les groupes des éléments inversibles. Par suite, une représentation de degré 1 de $G$ est simplement un homomorphisme de groupes

$$\rho : G \quad \longrightarrow \quad \mathbf{C}^\times,$$

et, pour $x \in V$, on a $gx = \rho(g)x$. Une telle représentation est irréductible.

Si $\rho' : G \to \mathbf{C}^\times = \mathbf{GL}(V')$ est une autre représentation de degré 1, et s'il existe un $G$-isomorphisme $V \simeq V'$, alors $\rho = \rho'$.

Comme un élément $g \in G$ est d'ordre fini, $\rho(g)$ est une racine de l'unité. En particulier, $\rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1} = \overline{\rho(g)}$. Mieux, l'image $\rho(G) \subset \mathbf{C}^\times$ est un groupe cyclique, comme tout sous-groupe fini de $\mathbf{C}^\times$.

L'algèbre linéaire de Licence permet, à elle seule, de comprendre le cas d'un groupe abélien :

**Proposition 1.3.1.** *Toute représentation linéaire $V$ d'un groupe abélien $G$ est somme directe de représentations de degré 1.*

En effet, chaque automorphisme $g_V$, étant d'ordre fini, est diagonalisable ; comme deux d'entre eux commutent ($G$ est abélien), on peut trouver une base de diagonalisation $(e_i)$ de $V$ qui soit commune à tous les $g_V$ ; notons $\theta_i(g)$ la valeur propre telle que $g_V(e_i) = \theta_i(g)e_i$. On constate que les $\theta_i$ sont des homomorphismes $G \to \mathbf{C}^\times$ ; $V$ est donc somme directe des représentations $\mathbf{C}e_i$, de degré 1, déterminées par les $\theta_i$.$\square$

**Exercice 1.3.2.** Soit $G \subset \mathbf{GL}(2, \mathbf{C})$ le groupe formé des puissances de la matrice $g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Quel est l'ordre de $G$ ? Décomposer explicitement cette représentation en somme de représentations irréductibles.

**Exercice 1.3.3.** Pour un groupe $G$, on note $D(G)$ le sous-groupe engendré par les commutateurs $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ des éléments de $G$. Vérifier que $G/D(G)$ est le plus grand quotient abélien de $G$. Montrer que $V^{D(G)}$ est somme directe de représentations de degré 1.

**Exemples** 1) Pour toute représentation $V$ de $G$, on note $\det(V)$ la représentation de degré 1 définie par l'homomorphisme composé

$$G \quad \longrightarrow \quad \mathbf{GL}(V) \quad \xrightarrow{\det} \quad \mathbf{C}^{\times}.$$

2) La signature d'une permutation $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\} \subset \mathbf{C}^{\times}$ fournit une représentation de degré 1 $\mathbf{C}(\varepsilon)$ de $\mathfrak{S}_n$.
3) Si $G$ est un groupe cyclique d'ordre $n$, il existe $n$ homomorphismes distincts de $G$ dans $\mathbf{C}^{\times}$ : après le choix d'un générateur $g$ de $G$, et le choix d'une racine primitive $n$-ème de l'unité $\zeta \in \mathbf{C}$, ces homomorphismes $\theta_i : G \to \mathbf{C}^{\times}$ sont définis, pour $i = 0, 1, \dots, n-1$, par $\theta_i(g) = \zeta^i$.

Soient $V$ une représentation de $G$ et $\rho : G \to \mathbf{C}^{\times}$ un homomorphisme ; on note $V(\rho)$ la représentation *tordue par* $\rho$, c'est-à-dire l'espace $V$ sur lequel l'action de $g \in G$ est définie par

$$g_{V(\rho)}(x) = \rho(g) g_V(x).$$

Si $V$ est irréductible, il en est de même de $V(\rho)$.

**Exercice1.3.4.** Soit $\mathbf{C}(\rho)$ la représentation de degré 1 associée à $\rho$. Déterminer la représentation $\mathrm{Hom}(\mathbf{C}(\rho), V)$ et ses invariants $\mathrm{Hom}_G(\mathbf{C}(\rho), V)$.

**Exercice 1.3.5.** Soit $G$ un groupe fini non commutatif et ne possédant aucun sous-groupe distingué autre que $\{1\}$ et $G$. On admettra qu'alors $G$ contient un élément $c$ d'ordre 2.
Soit $\rho : G \longrightarrow \mathbf{GL}(V)$ une représentation de $G$ dans un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Il s'agit de montrer que ou bien $\rho$ est trivial (homomorphisme constant de valeur $1_V$), ou bien $\dim V \geq 3$. On suppose que $\rho$ n'est pas trivial, ce qui implique que $V$ est non nul.
1) Montrer que $\rho$ est injectif, et que $\dim V \geq 2$.
2) Montrer que $\rho(G) \subset \mathbf{SL}(V)$ (on rappelle que $\mathbf{SL}(V)$ désigne le groupe formé des automorphismes de $V$ de déterminant 1).
3) Pour conclure, raisonner par l'absurde, en supposant que $\dim(V) = 2$ et en utilisant les valeurs propres de $c_V$.

## 1.4. Représentations de permutation

Une représentation $U$ de $G$ est dite *de permutation* s'il existe une base de $U$ qui est stable sous $G$ ; si on considère cette base comme une famille $(e_x)_{x\in X}$, cela veut dire que $G$ opère (à gauche) sur l'ensemble $X$ des indices, et que l'on a $ge_x = e_{gx}$.

Pour deux ensembles $X$ et $Y$, on note $\mathsf{M}(X,Y)$ l'ensemble de toutes les applications de $X$ vers $Y$ ($\mathsf{M}$ est l'initiale du mot anglais *map*) ; on n'écrira jamais ici cet ensemble sous la forme $Y^X$, car cela prête vraiment trop à confusion (lorsque $X$ est un groupe qui opère sur $Y$) avec l'ensemble des éléments de $Y$ invariants sous $X$.

Soit $X$ un $G$-ensemble fini, c'est-à-dire un ensemble fini muni d'une opération de $G$. On appelle représentation de permutation *asssociée à* $X$ l'espace $\mathsf{M}(X,\mathbf{C})$ de toutes les applications de $X$ vers $\mathbf{C}$, muni de l'action $\quad g.v = (x \mapsto v(g^{-1}x))$ (Comme l'opération $\bullet \mapsto \mathsf{M}(\bullet, Y)$ renverse le sens des flèches, et que l'on veut que $G$ opère à gauche sur $\mathsf{M}(X,\mathbf{C})$, on est conduit à le faire opérer à droite sur $X$ ; d'où le $g^{-1}$). Sur la base canonique (de Kronecker) $(e_x)_{x\in X}$, on a bien $g.e_x = e_{gx}$.

> **Exercice 1.4.1.** On considère la représentation de $\mathfrak{S}_3$ par permutation des trois vecteurs de la base canonique de $\mathbf{C}^3$ ; ce groupe opère aussi sur le sous-espace $V \subset \mathbf{C}^3$ formé des vecteurs dont la somme des coordonnées est nulle.
> 1) Montrer que $V^{\mathfrak{A}_3} = 0$ ($\mathfrak{A}_3$ désigne le sous-groupe des permutations paires).
> 2) Montrer que $V$ est une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_3$.
> (*Voici une des nombreuses démonstrations possibles : un sous-espace de $V$ stable sous $\mathfrak{S}_3$ et distinct de $0$ et de $V$ serait de dimension 1, engendré, disons, par $v$ ; pour chaque $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ il existerait donc un scalaire $\theta(\sigma) \in \mathbf{C}$ tel que ${}^{\sigma}v = \theta(\sigma)v$. Il n'y a que deux homomorphismes de groupes de $\mathfrak{S}_3$ vers $\mathbf{C}^{\times}$, l'homomorphisme constant (de valeurs = 1) et la signature ; donc $v$ serait invariant par permutation circulaire des 3 coordonnées.*)
> 3) Décomposer $V$ en somme de deux représentations de $\mathfrak{A}_3$.

Considérons de nouveau un ensemble fini $X$ sur lequel opère un groupe fini $G$, et l'ensemble quotient $p : X \to X/G$ ; on peut voir le quotient comme une façon de paramétrer les orbites de $G$ dans $X$ : pour $\xi \in X/G$, l'ensemble $p^{-1}(\xi) \subset X$ est une orbite, et on les obtient toutes ainsi. Une application $X/G \to Y$ peut donc être vue comme une application définie sur $X$ mais constante sur chaque orbite ; bref, comme une application invariante sous $G$. On a donc un isomorphisme

1.4.2 $$\mathsf{M}(X/G,\mathbf{C}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{M}(X,\mathbf{C})^G \qquad u \mapsto u \circ p.$$

On aura besoin de connaître l'anneau $\mathrm{End}_G(V)$ des endomorphismes $G$-linéaires de la représentation de permutation $V = \mathsf{M}(X,\mathbf{C})$. Considérons la base canonique $(e_x)_{x\in X}$ de $V$ ; un endomorphisme $u$ de $V$ est déterminé par sa matrice $(u_{xy})$ relativement à cette base, précisement :

$$u(e_y) = \sum_{x\in X} u_{xy} e_x.$$

Il est utile de voir $(u_{xy})$ comme un élément de $\mathsf{M}(X\times X,\mathbf{C})$. Comme l'opération de $G$ consiste à permuter les éléments de la base considérée, on constate que $u$ est $G$-linéaire si et seulement si pour tout $x, y \in X$ et tout $g \in G$, on a $u_{gx,gy} = u_{x,y}$, autrement dit, si l'application associée $X\times X \to \mathbf{C}$ est invariante sous l'action de $G$. On a ainsi un isomorphisme d'espaces vectoriels

1.4.3 $$\mathrm{End}_G(\mathsf{M}(X,\mathbf{C})) \quad\simeq\quad \mathsf{M}(X\times X/G,\mathbf{C}).$$

On utilisera cela plus tard (2.3.6.) pour montrer que le sous-espace $V \subset \mathsf{M}(X,\mathbf{C})$ formé des $v$ tels que $\sum_{x\in X} v(x) = 0$ est une représentation irréductible de $G$ si et seulement si $G$ est 2-fois transitif sur $X$, c'est-à-dire si $G$ est transitif sur le complémentaire de la diagonale dans $X\times X$.

### 1.5. Quaternions

Voici une définition du groupe quaternionien $Q_8$ qui conduit rapidement à ses représentations irréductibles :

$$Q_8 = \mathbf{SU}(2,\mathbf{Z}[i])$$

C'est donc le groupe formé des matrices $M$ de format $2\times 2$, à coefficients des entiers de Gauss, de déterminant 1, et telles que $M^{-1} = {}^t\overline{M}$. Explicitons ces conditions : soit $M = \left(\begin{smallmatrix} u & w\\ v & z\end{smallmatrix}\right)$ une telle matrice ; comme $\det(M) = 1$, la seconde condition s'écrit $\left(\begin{smallmatrix} z & -w\\ -v & u\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \bar u & \bar v\\ \bar w & \bar z\end{smallmatrix}\right)$, c'est-à-dire $z = \bar u$ et $w = -\bar v$, soit $M = \left(\begin{smallmatrix} u & -\bar v\\ v & \bar u\end{smallmatrix}\right)$ ; comme, de plus, $1 = \det M = u\bar u + v\bar v$ et que $u$ et $v$ sont des nombres complexes à composantes réelles *entières*, on voit que ou bien $u = 0$ et alors $v = \pm 1$ ou $\pm i$, ou bien $v = 0$ et alors $u = \pm 1$ ou $\pm i$. Cela montre que ce groupe est formé des 8 éléments suivants :

$$\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \pm\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix},\quad \pm\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix},\quad \pm\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Il est engendré par les deux éléments

$$a = \begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

puisque $a^2 = b^2 = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$, et que $ab = \left(\begin{smallmatrix} i & 0\\ 0 & -i\end{smallmatrix}\right) = -ba$. Cela montre que tout élément du groupe s'écrit sous la forme $a^p b^q$ ; comme $a(a^p b^q)a^{-1} = (-1)^q a^p b^q$, et que $b(a^p b^q)b^{-1} = (-1)^p a^p b^q$, on voit que le centre est formé des $a^p b^q$ avec $p$ et $q$ pairs ; c'est donc le sous-groupe $\{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}$. Le quotient de $Q_8$ par son centre est d'ordre 4, donc est abélien ; d'ailleurs, comme les générateurs vérifient $a^2 = b^2 = -\mathrm{Id}$, on voit que tous les éléments de ce quotient ont un carré trivial, donc qu'il est un produit de deux groupes cycliques d'ordre 2 ; on a désigné le « groupe de Klein » $\mathsf{V}$ :

$$Q_8/(\pm 1) \;\simeq\; \mathsf{V}.$$

On peut aussi définir $Q_8$ comme le groupe engendré par deux éléments $a$ et $b$ soumis aux relations

1.5.1 $$a^4 = 1, \qquad bab^{-1} = a^{-1}, \qquad a^2 = b^2.$$

Pour voir que ces relations définissent bien $Q_8$, on considère d'abord deux groupes cycliques d'ordre 4, $A$ et $B$, avec générateurs $a$ et $b$, et le produit semi-direct $A \rtimes B$ où $b$ opère sur $a$ par ${}^b a = a^{-1}$. Dans ce groupe, on a $bab^{-1} = a^{-1}$, donc $b^2ab^{-2} = a$, donc $a$ et $b^2$ commutent, donc l'élément $a^2b^2 = a^{-2}b^2$ est d'ordre 2, et il est central ; passant au quotient par le groupe qu'il engendre, on trouve donc un groupe d'ordre 8 ; plus de doute c'est lui !

(Si on avait quotienté $A \rtimes B$ par $< b^2 >$, on aurait obtenu le dihédral $D_4$.)

Soit $V = \mathbf{C}^2$ l'espace de la représentation de $Q_8$ donnée par l'inclusion $\mathbf{SU}(2, \mathbf{Z}[i]) \subset \mathbf{GL}(2, \mathbf{C})$. Cette représentation de degré 2 est irréductible : en effet un sous-espace stables sous $Q_8$, de dimension 1, serait un sous-espace propre à la fois pour les matrices $a$ et $b$ ci-dessus ; or, les deux sous-espaces propres de la matrice $a$ sont engendrés respectivement par $\binom{1}{1}$ et $\binom{1}{-1}$, tandis que les sous-espaces propres de la matrice $b$ sont respectivement engendrés par $\binom{1}{i}$ et $\binom{1}{-i}$ ; il n'y a pas de sous-espace propre commun.

Par ailleurs, il est clair que $Q_8$ possède 4 représentations de degré 1, c'est-à-dire 4 homomorphismes distincts dans $\mathbf{C}^\times$, puisque c'est le cas de $\mathsf{V}$ et que l'on a une surjection $Q_8 \to \mathsf{V}$.

On verra plus bas que toute représentation irréductible de $Q_8$ est isomorphe à l'une des cinq qui précèdent.

### 1.6. Quelques représentations des groupes symétriques.

Des méthodes combinatoires très élaborées permettent de trouver toutes les représentations irréductibles des groupes symétriques $\mathfrak{S}_n$. Il n'est pas question de les aborder ici, mais seulement d'indiquer les tous premiers résultats qui sont accessibles avec ce qui précède.

1.6.1. On notera (faute de mieux) par $\mathsf{P}_n \subset \mathbf{C}^n$ le sous-espace formé des vecteurs dont la somme des coordonnées est nulle, vu comme représentation de $\mathfrak{S}_n$, de degré $n - 1$ ; elle est souvent nommé la « représentation standard » de $\mathfrak{S}_n$. On verra plus bas que c'est une représentation irréductible. Cela peut se vérifier directement :

> **Exercice 1.6.2.** 1) Montrer que $\mathsf{P}_n \subset \mathbf{C}^n$ est engendré par le vecteur $(1, -1, 0, \dots, 0) \in \mathbf{C}^n$, et ses images par permutations.
> 2) Montrer qu'un sous-espace stable non nul $V \subset \mathsf{P}_n$ contient un élément $(x, y, z, \dots)$ tel que $x \neq y$ ; donc aussi $(y, x, z, \dots)$. Par différence . . .

On désignera par $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \{\pm 1\} \subset \mathbf{C}^\times$ l'homomorphisme signature (si nécessaire, on précisera $\varepsilon_n$).

Il devrait être clair que $\mathsf{P}_2 = \mathbf{C}(\varepsilon_2)$.

1.6.3. *À isomorphisme près, les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_3$ sont : $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}(\varepsilon)$ et $\mathsf{P}_3$.*

Que cette liste soit complète provient de 2.4.4. puisque $6 = |\mathfrak{S}_3| = 1^2 + 1^2 + 2^2$.

L'énoncé suivant est conséquence du précedent, mais il mérite une vérification « à la main » .

1.6.4. *Les représentations $\mathsf{P}_3$ et $\mathsf{P}_3(\varepsilon)$ sont isomorphes en tant que représentations de $\mathfrak{S}_3$.*

Posons $V = \mathsf{P}_3$ ; il s'agit de trouver une bijection linéaire $f : V \to V$ telle que pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_3$, on ait $f(\sigma_V(x)) = \varepsilon(\sigma)\sigma_V(f(x))$. Notons $\rho = (123)$ une permutation circulaire. Vérifions que $f = 1_V + 2\rho_V$ convient.

Le groupe alterné est ici le groupe $< \rho >$ engendré par $\rho$ ; pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_3$, on a $\sigma\rho = \rho\sigma$ si $\sigma \in < \rho >$ c'est-à-dire si $\varepsilon(\sigma) = 1$, et $\sigma\rho = \rho^2\sigma$ si $\varepsilon(\sigma) = -1$. Par ailleurs, l'endomorphisme de $V$ associé à $\rho$ vérifie la relation : $1_V + \rho_V + \rho_V^2 = 0$. Ces deux remarques montrent que $1_V + 2\rho_V$ possède les propriétés requises.

1.6.5. *Pour $n > 3$, les représentations $\mathsf{P}_n$ et $\mathsf{P}_n(\varepsilon)$ ne sont pas isomorphes.*

Si ces représentations étaient isomorphes, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, les traces de $\sigma_{\mathsf{P}_n}$ et de $\sigma_{\mathsf{P}_n(\varepsilon)}$ seraient égales. Or, si on note $N(\sigma)$ le nombre de points de $\{1, \ldots, n\}$ fixes sous $\sigma$, on a

$$\mathrm{Tr}(\sigma_{\mathsf{P}_n}) = N(\sigma) - 1.$$

L'hypothèse s'écrirait donc : pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad N(\sigma) - 1 = \varepsilon(\sigma)(N(\sigma) - 1)$ ; or c'est impossible dès que $n > 3$ car une transposition $\sigma$ sur un ensemble de $n$ éléments laisse fixes $n - 2$ d'entre eux, donc $N(\sigma) - 1 > 0$ si $n > 3$.

1.6.6. Passons à $\mathfrak{S}_4$.

Rappelons que le symbole $\mathsf{V}$ désigne le « groupe de Klein » (ne pas confondre avec la notation d'un vectoriel courant $V$), c'est-à-dire un espace vectoriel de dimension 2 sur le corps à 2 éléments, ou encore un produit de 2 groupes cycliques d'ordre 2. On notera additivement sa loi de composition interne. L'homomorphisme de Cayley

$$\mathsf{V} \longrightarrow \mathfrak{S}_{\mathsf{V}}$$

associe à $x \in \mathsf{V}$ la translation $t_x = (y \mapsto x + y)$. Parmi les permutations de l'ensemble $\mathsf{V}$, il y a celles qui respectent l'addition ; elles forment le groupe des automorphismes, qu'on notera $\mathrm{Aut}(\mathsf{V})$ (plutôt que $\mathbf{GL}(\mathsf{V})$, qui prète à confusion). On obtient un homomorphisme de groupes (où la source est le « groupe affine du vectoriel $\mathsf{V}$ »)

$$\mathsf{V} \rtimes \mathrm{Aut}(\mathsf{V}) \quad \longrightarrow \quad \mathfrak{S}_{\mathsf{V}}, \qquad (x, \phi) \mapsto (y \mapsto x + \phi(y)).$$

C'est un isomorphisme.

Vérifier que cette application est injective est immédiat, et un calcul standard montre que $\mathrm{Aut}(\mathsf{V})$ a 6 éléments ; or, $\mathfrak{S}_{\mathsf{V}}$ a $4 \times 6$ éléments.

Un automorphisme d'un vectoriel fixe 0 et permute les éléments non nuls ; par égalité des cardinaux, on obtient encore un isomorphisme de groupes

$$\mathrm{Aut}(\mathsf{V}) \quad \xrightarrow{\sim} \quad \mathfrak{S}_{\mathsf{V}-0}.$$

On trouve finalement un isomorphisme fort utile

1.6.6.1 $$\mathsf{V} \rtimes \mathfrak{S}_{\mathsf{V}-0} \quad \xrightarrow{\sim} \quad \mathfrak{S}_{\mathsf{V}}.$$

L'isomorphisme réciproque associe à une permutation $\sigma$ de l'ensemble $\mathsf{V}$, le couple $(\sigma(0), \bar{\sigma}) \in \mathsf{V} \rtimes \mathfrak{S}_{\mathsf{V}-0}$ où $\bar{\sigma}$ est la permutation de $\mathsf{V}-0$ définie par $\bar{\sigma}(x) = \sigma(x) - \sigma(0)$. Invoquer l'égalité de cardinaux pour prouver qu'une application est bijective, cache parfois, comme ici, la nature des choses : le fait non trivial est que l'application

1.6.6.2 $$\mathfrak{S}_{\mathsf{V}} \quad \longrightarrow \quad \mathfrak{S}_{\mathsf{V}-0}, \quad \sigma \mapsto \bar{\sigma}$$

est un homomorphisme surjectif de groupes.

La structure de groupe sur l'ensemble à quatre éléments $\mathsf{V}$, a donc permis de mettre en évidence un homomorphisme surjectif de groupes $\mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_3$, de noyau le groupe de Klein ; il y a évidemment d'autres façon de le faire, mais ce n'est jamais formel.

Précisons comment s'écrit la signature. Une translation $t_x$ par un $x \neq 0$ a deux orbites de longueur 2 dans $\mathsf{V}$ : $(0, x)$ et $(y, x+y)$, où $y \neq 0, x$ ; sa signature est donc 1. La décomposition en produit 1.6.6.1, et le fait que la signature soit un homomorphisme, montre que la signature de $\mathfrak{S}_{\mathsf{V}}$ se factorise par 1.6.6.2

$$\mathfrak{S}_{\mathsf{V}} \quad \xrightarrow{1.6.6.2} \quad \mathfrak{S}_{\mathsf{V}-0} \quad \xrightarrow{\varepsilon} \quad \{\pm 1\}, \qquad \sigma \mapsto \varepsilon(\bar{\sigma}).$$

Toute représentation irréductible du groupe $\mathfrak{S}_{\mathsf{V}-0}$ (noté dans la suite $\mathfrak{S}_3$) induit une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_4$, via l'homomorphisme 1.6.5.2 ; notons $\mathsf{P}_3'$ la représentation de $\mathfrak{S}_4$ obtenue ainsi à partir de $\mathsf{P}_3$ (notation de 1.6.1). On verra plus bas (2.4.4.) un critère permettant de vérifier que

1.6.6.3. *La liste des représentations irréductibles de* $\mathfrak{S}_4$*, à isomorphisme près, est :* $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}(\varepsilon_4)$, $\mathsf{P}_3'$, $\mathsf{P}_4$, $\mathsf{P}_4(\varepsilon)$.

# 2. Décomposition en somme d'irréductibles.

Ce paragraphe aboutit à la décomposition d'une représentation $U$ en une somme directe $U_1 \oplus \cdots \oplus U_s$, où chaque $U_i$ (la « composante isotypique ») est une somme directe de représentations irréductibles deux à deux isomorphes.

Soit $V$ une représentation irréductible ; la composante de $U$ isotypique de type $V$ est habituellement décrite par $V \otimes_{\mathbf{C}} \mathrm{Hom}_G(V, U)$ (cf Bourbaki, A.VIII.4) ; pour éviter l'emploi du produit tensoriel j'ai utilisé la description duale, à savoir : $\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_G(U, V), V)$ ; les démonstrations semblent un peu plus simples ; en particulier, la décomposition de l'algèbre du groupe devient évidente.

**2.1. Semi-simplicité.**

**Théorème 2.1.1** *Soient $U'$, $U$ et $V$ des représentations linéaires de $G$.*
*i) Considérons le triangle commutatif (i.e $\alpha = \gamma\beta$) suivant d'applications* $\mathbf{C}$-*linéaires*

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & U \arrow[dl, "\gamma"] \\ V & \end{tikzcd}$$

*On suppose que $\alpha$ et $\beta$ sont $G$-linéaires. On définit une application $\tilde{\gamma} : U \to V$ par la formule*

$$\tilde{\gamma}(x) = \frac{1}{\mid G \mid} \sum_{g \in G} g_V \gamma(g_U^{-1} x).$$

*Alors $\tilde{\gamma}$ est $G$-linéaire, et on a encore*

$$\alpha = \tilde{\gamma}\beta.$$

*En particulier, si $\alpha = 1_{U'}$, c'est-à-dire si $\beta$ admet une rétraction* $\mathbf{C}$-*linéaire, alors elle admet aussi une rétraction $G$-linéaire.*
*ii) Dualement, considérons le triangle commutatif ($\alpha = \beta\gamma$)*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\beta"] & U' \\ & V \arrow[ul, "\gamma"] \arrow[u, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

*Si $\alpha$ et $\beta$ sont $G$-linéaires, et si on pose*

$$\tilde{\gamma}(x) = \frac{1}{\mid G \mid} \sum_{g \in G} g_U \gamma(g_V^{-1} x).$$

*alors $\tilde{\gamma}$ est $G$-linéaire et on a encore $\alpha = \beta\tilde{\gamma}$. En particulier, si $\alpha = 1_{U'}$, c'est-à-dire si $\beta$ admet une section* $\mathbf{C}$-*linéaire, alors elle admet aussi une section $G$-linéaire.*

Simple vérification. Noter qu'en général, il n'est pas vrai que $\widetilde{\varphi\psi} = \tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}$.

Pour apprécier le corollaire suivant on peut le comparer à un énoncé analogue mais qui porterait sur des $\mathbb{Z}$-modules libres plutôt que sur des espaces vectoriels (ou sur des espaces vectoriels mais sur un corps de caractéristique positive) ; les conclusions ne seraient alors plus nécéssairement vraies. Considérons, en effet, la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{u} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{v} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

où $u$ et $v$ sont définies par $u(1) = \binom{1}{-1}$ et $v\binom{a}{b} = a + b$. Soit $G = \{1, \sigma\}$ le groupe à 2 éléments. On le fait opérer sur le noyau par $\sigma(n) = -n$, sur le terme médian par $\sigma(\binom{a}{b}) = \binom{b}{a}$ et, sur le quotient, trivialement : $\sigma(n) = n$ ; pour ces actions, les applications $u$ et $v$ sont $G$-linéaires, mais on constate que l'application induite par $v$ sur les invariants : $(\mathbb{Z}^2)^G \to \mathbb{Z}^G$ se réduit à

$\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}$, et n'est donc pas surjective ; cela implique - ou on vérifie directement - que l'application $u$ n'admet pas de rétraction $G$-linéaire, i.e il n'existe pas d'application $G$-linéaire $w : \mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}^2$ telle que $wu = Id$. Par réduction modulo 2, on obtient une suite exacte d'espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{F}_2$, pour laquelle les conclusions du corollaire suivant sont fausses. On peut d'ailleurs montrer que si ce corollaire est vrai alors l'ordre du groupe est inversible dans le corps de base.

**Corollaire 2.1.2.** *Soit*

$$0 \longrightarrow U' \xrightarrow{u} U \xrightarrow{v} U'' \longrightarrow 0$$

*une suite exacte de $G$-modules, les applications $u$ et $v$ étant $G$-linéaires. Alors :*
*i) La suite des sous-espaces invariants est exacte :*

$$0 \longrightarrow U'^G \xrightarrow{u} U^G \xrightarrow{v} U''^G \longrightarrow 0$$

*ii) Pour toute représentation $V$, la suite*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(U'', V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(U, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(U', V) \longrightarrow 0$$

*est exacte. Autrement dit,* $\mathrm{Hom}_G(-, V)$ *transforme une suite exacte de $G$-modules en une suite exacte de vectoriels (en renversant le sens des flèches).*

Dans les deux énoncés, le seul point qui ne découle pas des simples définitions porte sur la surjectivité de la flèche de droite. Or, l'application $v$ admet une section linéaire, donc une section $G$-linéaire $s$, par le théorème qui précède ; on a donc $vs = 1_{U''}$ ; étant $G$-linéaire $s$ induit une application sur les invariants $U''^G \to U^G$ ; par composition avec $v$, on obtient l'application identique de $U''^G$ :

$$U''^G \longrightarrow U^G \longrightarrow U''^G$$

La flèche de droite est donc surjective.

De même, pour l'énoncé *ii)*, le point non trivial est que $\mathrm{Hom}_G(-, V)$ transforme injection en surjection, ou encore qu'une application $G$-linéaire définie sur une sous-représentation $U' \subset U$ peut être prolongée à $U$. Or, elle peut être prolongée en une application linéaire, application que le procédé du théorème transforme en une application $G$-linéaire. On aurait pu aussi invoquer 0.6 et la partie *i)*.$\square$

**Corollaire 2.1.3.** (Théorème de Maschke) ([S] 1.3 Thm 1) *Tout sous-espace $G$-stable admet un supplémentaire $G$-stable.*

Soit $V'$ un sous-espace $G$-stable de $V$ ; d'après le corollaire, l'application identique de $V'$ se prolonge en une application $G$-linéaire $v : V \to V'$ ; le sous-espace $V'' = \mathrm{Ker}(v)$ est $G$-stable puisque $v$ est $G$-linéaire ; pour tout $x \in V$, on a $x = v(x) + (x - v(x))$, et $x - v(x)$ est dans $V''$ puisque $v$ prolonge l'application identique de $V'$ ; enfin, $V' \cap V'' = 0$.$\square$

L'énoncé suivant est provisoire ; le paragraphe 2.4 aboutira à un résultat beaucoup plus précis.

**Proposition 2.1.4.** *Toute représentation linéaire est somme directe de représentations irréductibles.*

Rappelons que toutes les représentations considérées ici sont supposées de dimension finie.

Toute représentation non nulle $U$ de $G$ contient une sous-représentation $V$ irréductible, par exemple une sous-représentation non nulle de dimension minimum ; le théorème de Maschke montre que $V$ admet un supplémentaire $G$-stables $U'$ ; comme ce dernier est de dimension strictement plus petite que celle de $U$, un raisonnement par récurrence permet de conclure.□

> **Exercice 2.1.5** 1) Soit $V$ une représentation de degré 2. On suppose qu'il existe deux éléments $g$ et $h$ de $G$ tels que les automorphismes $g_V$ et $h_V$ de $V$ ne commutent pas. Montrer que $V$ est irréductible.
> 2) Ce résultat est-il toujours valide si $\dim(V) = 3$ ?
> 3) Indiquer pourquoi une réciproque de 1) est vraie : si $V$ est irréductible et de degré $\geq 2$, alors il existe deux éléments $g$ et $h$ de $G$ tels que $g_V$ et $h_V$ de $V$ ne commutent pas.

## 2.2. Le lemme de Schur

**Théorème 2.2.1.** « Lemme de Schur » ([S] 2.2 Prop.4) *Soient $U$ et $V$ deux représentations linéaires irréductibles, et $f : U \to V$ une application $G$-linéaire. Alors*
*i) $f$ est soit nulle, soit un isomorphisme.*
*ii) Le morphisme canonique $\mathbf{C} \to \mathrm{End}_G(V)$ est un isomorphisme ; autrement dit, toute application $G$-linéaire de $V$ dans lui-même est une homothétie.*

*i)* Les espaces $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des sous-représentations de $U$ et $V$ respectivement. Si $f \neq 0$ alors $\mathrm{Ker}(f) = 0$ puisque $U$ est irréductible, donc $f$ est injective, donc $\mathrm{Im}(f) \neq 0$ donc $\mathrm{Im}(f) = V$ puisque $V$ est irréductible.

*ii)* Tout $f \in \mathrm{End}_G(V)$ admet une valeur propre $\lambda$, puisque $\mathbf{C}$ est algébriquement clos ; donc $f - \lambda$ n'est pas bijective, et est $G$-linéaire ; c'est l'application nulle.□

> **Exercice 2.2.2.** Soit $V$ une représentation irréductible de $G$. Pour tout vectoriel $U$ (avec action triviale de $G$), on dispose d'une application de bidualité
>
> $$\psi_U : U \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Hom}(U, V), V), \qquad x \mapsto (u \mapsto u(x)).$$
>
> Montrer que cette application est un isomorphisme.
> (*On pourra constater que source et but sont « additifs » en $U$, et que, pour $U = \mathbf{C}$, $\psi_{\mathbf{C}}$ est bien un isomorphisme*)

**Proposition 2.2.3.** *Soient $U$ et $V$ deux représentations linéaires d'un groupe fini $G$. On suppose que $V$ est irréductible. Alors l'application bilinéaire*

$$\mathrm{Hom}_G(V, U) \times \mathrm{Hom}_G(U, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(V, V) = \mathbf{C} \qquad (\beta, \alpha) \longmapsto \alpha\beta$$

*est non dégénérée, autrement dit, l'application linéaire*

$$\delta_U : \mathrm{Hom}_G(V,U) \quad \longrightarrow \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathrm{Hom}_G(U,V),\mathbf{C}) \qquad \beta \longmapsto (\alpha \mapsto \alpha\beta)$$

*est un isomorphisme.*

L'examen soigneux de la définition de $\delta$ montre qu'une décomposition en somme directe de sous-représentations $U = U_1 \oplus U_2$ donne lieu à une décomposition de $\delta$ :

$$\delta_{U_1 \oplus U_2} \;=\; \delta_{U_1} \,\oplus\, \delta_{U_2}.$$

Compte-tenu de 2.1.4, il suffit donc de voir que $\delta_U$ est un isomorphisme lorsque $U$ est irréductible. Si $U$ n'est pas isomorphe à $V$, les deux membres sont nuls. Supposons que $U$ soit isomorphe à $V$, et choisissons un isomorphisme $G$-linéaire $f : V \to U$ ; le lemme de Schur montre que $\mathrm{Hom}_G(V,U) = \mathbf{C}f$, et que $\mathrm{Hom}_G(U,V) = \mathbf{C}f^{-1}$ ; comme $\delta_U(f)$ envoie $f^{-1}$ sur $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_V$, $\delta_U$ est un isomorphisme.□

### 2.3. La composante isotypique

Soient $U$ et $V$ deux représentations de $G$ ; l'espace $\mathrm{Hom}_G(U,V)$ *d'entrelacement* de $U$ et de $V$ joue un rôle central dans la suite, ainsi que l'application

$$\varphi : U \;\longrightarrow\; \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_G(U,V),V), \qquad x \longmapsto (\alpha \mapsto \alpha(x)).$$

Comme l'action de $G$ sur $\mathrm{Hom}_G(U,V)$ est évidemment triviale, son action sur $\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_G(U,V),V)$ se réduit à son action sur le second facteur $V$ ; par ailleurs, $\varphi(gx) = (\alpha \mapsto \alpha(gx))$, mais $\alpha(gx) = g\alpha(x)$, donc l'application $\varphi$ est $G$-linéaire.

**Lemme-clé 2.3.1** *Soit $V$ une représentation linéaire irréductible. Alors, pour toute représentation linéaire $U$, l'application $G$-linéaire*

$$\varphi_U : U \;\longrightarrow\; \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_G(U,V),V) \qquad x \longmapsto (\alpha \mapsto \alpha(x))$$

*est surjective.*

Une démonstration expéditive, dans l'esprit de celle de 2.2.3 consiste à remarquer que $\varphi_U$ est « additive » en $U$, et qu'il suffit donc de vérifier la surjectivité lorsque $U$ est irréductible ; or, d'après Schur, si $U$ n'est pas isomorphe à $V$, le second membre est nul, et si $U$ est isomorphe à $V$, $\varphi_U$ est un isomorphisme.

Voici une autre démonstration, peut-être plus rassurante.
Notons d'abord que l'assertion est vraie si $U = 0$, plus généralement si $\mathrm{Hom}_G(U,V) = 0$ ; elle est vraie aussi lorsque $U = V$, puisque $\varphi_V$ est un isomorphisme d'après le lemme de Schur. On raisonne alors par récurrence sur la dimension de $U$, et on peut supposer qu'il existe une application $G$-linéaire non nulle $\alpha : U \to V$. Comme $V$ est irréductible et $\alpha(U) \neq 0$, $\alpha$ est surjective ; notant $U'$ son noyau, on a donc la suite exacte de $G$-modules

$$0 \quad\longrightarrow\quad U' \quad\longrightarrow\quad U \quad\xrightarrow{\alpha}\quad V \quad\longrightarrow\quad 0.$$

D'après 2.1.2, on obtient la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(V,V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(U,V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(U',V) \longrightarrow 0.$$

On en déduit un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{U'}"'] & U \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi_U"] & V \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_V"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_G(U',V),V) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_G(U,V),V) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_G(V,V),V) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Pour voir que $\varphi_U$ est surjective, il suffit de voir que $\varphi_{U'}$ et $\varphi_V$ le sont, d'après 0.7 ; or, l'hypothèse de récurrence implique que $\varphi_{U'}$ est surjective, et on a déjà constaté que $\varphi_V$ est même un isomorphisme.$\square$

> **Exercice 2.3.2.** Dans la situation du lemme précédent, on prend pour $V$ la représentation unité de $G$, c'est-à-dire l'espace $\mathbf{C}$ muni de l'action triviale de $G$. Vérifier que $\varphi_U$ peut être identifiée à la surjection canonique $U \to U_G$ (voir 1.1.1).

Avant d'aborder la décomposition en somme d'isotypiques, il convient de montrer comment ce lemme permet de donner une démonstration très simple d'un résultat de Steinitz.

Soient $G$ et $H$ deux groupes finis et $U$ et $V$ des représentations linéaires de $G$ et $H$ respectivement. Pour une application linéaire $w : U \to V$, et pour $(g,h) \in G \times H$, la formule

$$^{(g,h)}w \;=\; h_V \circ w \circ g_U^{-1}$$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "w"] \arrow[d, "g_U"'] & V \arrow[d, "h_V"] \\
U \arrow[r, "^{(g,h)}w"'] & V
\end{tikzcd}$$

définit une opération à gauche du groupe produit $G \times H$ sur $\mathrm{Hom}(U,V)$.

**Théorème 2.3.3.** *Si $U$ est une représentation irréductible de $G$, et $V$ une représentation irréductible de $H$, alors* $\mathrm{Hom}(U,V)$ *est une représentation irréductible de $G \times H$.*

Soit, en effet, $W$ un sous-espace non nul de $\mathrm{Hom}(U,V)$ stable sous $G \times H$. Il s'agit de montrer que $W = \mathrm{Hom}(U,V)$ ; pour ce faire, on va écrire l'injection $W \hookrightarrow \mathrm{Hom}(U,V)$ comme le composé de deux applications qui s'avèreront être surjectives.

Considérons d'abord l'application $\theta : U \to \mathrm{Hom}(W,V)$ définie par $x \mapsto (w \mapsto w(x))$ ; pour $x \in U$ fixé, l'application $w \mapsto w(x)$ est $H$-linéaire, si bien que l'application $\theta$ est à valeurs dans $\mathrm{Hom}_H(W,V)$. Pour tout $g \in G$, $w \circ g_V$ est dans $W$ par hypothèse ; par suite le noyau de $\theta$ est $G$-stable, donc nul puisque

$U$ est irréductible. D'après 0.6, le foncteur $\mathrm{Hom}(-,V)$ transforme l'application injective $\theta$ en une application *surjective*

$$\psi : \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_H(W,V),V) \longrightarrow \mathrm{Hom}(U,V).$$

Par ailleurs, le lemme-clé appliqué avec la représentation irréductible $V$ de $H$, dit que l'application

$$\varphi : W \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_H(W,V),V)$$

est surjective. Il ne reste plus qu'à constater que l'application composée

$$W \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_H(W,V),V) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Hom}(U,V)$$

est exactement l'injection $W \hookrightarrow \mathrm{Hom}(U,V)$, ce qui est immédiat si on revient aux définitions.□

**Théorème 2.3.4.** *Soit $V$ une représentation linéaire* irréductible *de $G$. Alors, toute représentation linéaire $U$ de $G$ se décompose de façon unique en une somme directe*

$$U = U_0 \oplus U_1$$

*où $U_0$ est le plus grand sous-$G$-module $U' \subset U$ tel que* $\mathrm{Hom}_G(U',V)=0$*, et où $U_1$ est isomorphe à une somme directe de copies de $V$ en nombre $m$, où*

$$m \;=\; \dim \mathrm{Hom}_G(U,V) \;=\; \dim \mathrm{Hom}_G(V,U).$$

*On dira que $V$* intervient $m$ fois *dans $U$, et que $U_1$ est la* composante isotypique*, de type $V$, de $U$.*

*Plus généralement, toute représentation linéaire se décompose de façon unique en la somme directe de ses composantes isotypiques (de types non isomorphes)*

Posons $U_0 = \mathrm{Ker}(\varphi_U)$, et montrons que c'est le plus grand sous-$G$-module $U' \subset U$ tel que $\mathrm{Hom}_G(U',V) = 0$. Soit $x \in U_0$ ; pour toute application $G$-linéaire $u : U \to V$, on a $u(x) = 0$ ; d'après 2.1.1, toute application linéaire $U_0 \to V$ se prolonge en une application $G$-linéaire définie sur $U$ ; par suite $\mathrm{Hom}_G(U_0,V)=0$. Réciproquement, soit $U' \subset U$ une sous-représentation telle que $\mathrm{Hom}_G(U',V)=0$. La commutativité du carré

$$\begin{array}{ccc} U' & \longrightarrow & U \\ {\scriptstyle \varphi_{U'}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \varphi_U} \\ \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_G(U',V),V) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_G(U,V),V). \end{array}$$

montre que $U'$ est contenu dans $U_0 = \mathrm{Ker}\varphi_U$.

Posons $U'' = \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_G(U,V),V)$ ; en considérant au besoin une base (de cardinal $m$) de $\mathrm{Hom}_G(U,V)$, on voit que cette représentation $U''$ est bien somme directe de $m$ copies de $V$. Comme $\varphi_U : U \to U''$ est surjective d'après le lemme-clé, il existe une application linéaire - et par suite aussi une application $G$-linéaire (théorème 2.1.1) - $\psi : U'' \to U$ telle que $\varphi_U \circ \psi = 1_{U''}$. Comme $\psi$ est injective, $U_1 = \mathrm{Im}(\psi)$ est bien $G$-isomorphe à la somme de $m$ copies de $V$, et on a $U = U_0 \oplus U_1$.

Montrons l'unicité d'une telle décomposition : par sa définition même, le sous-espace $U_0$ est intrinsèque ; soit $U_1'$ une sous-représentation de $U$ isomorphe à une somme directe de copies de $V$, et telle que $U = U_0 \oplus U_1'$ ; l'application composée $G$-linéaire

$$U_1 \hookrightarrow U = U_0 \oplus U_1' \overset{\mathrm{pr}_1}{\to} U_0$$

est nulle : en effet, puisque $U_1$ est isomorphe $V^m$, on a $\mathrm{Hom}_G(U_0, U_1) = 0$, donc $\mathrm{Hom}_G(U_1, U_0) = 0$ par dualité (2.2.3) ; on a donc $U_1 \subset U_1'$ ; par symétrie, on voit que ces deux représentations sont égales.

Finalement, en appliquant la première partie du théorème à $U_0$, avec une représentation irréductible $V_2$ qui intervient dans $U_0$ (2.1.4), on voit que $U_0$ est, de façon unique, somme directe $U_0' \oplus U_2$, où $U_2$ est isotypique de type $V_2$ ; en itérant ce procédé, on obtient la dernière assertion.□

**Corollaire 2.3.5.** *Soient $U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_s$ une représentation linéaire et sa décomposition en somme directe d'isotypiques (de type distincts). On a alors un isomorphisme d'anneaux*

$$\mathrm{End}_G(U) \quad \xrightarrow{\sim} \quad \mathrm{End}_G(U_1) \times \ldots \times \mathrm{End}_G(U_s).$$

*En particulier, pour que $U$ soit irréductible, il faut et il suffit que* $\mathrm{End}_G(U)$ *soit de dimension 1.*

Le lemme de Schur montre que $\mathrm{Hom}_G(U_i, U_j) = 0$ si $i \neq j$, d'où la première partie.

Il reste à voir que si $\dim \mathrm{End}_G(U) = 1$, alors $U$ est irréductible. Or, la décomposition de cet anneau en produit montre déjà qu'il n'y a qu'un seul facteur $U_i$, c'est-à-dire que $U$ est isotypique, soit : $U = V^d$, avec $V$ irréductible. La seconde partie du lemme de Schur conduit à un isomorphisme canonique d'algèbres

$$\mathbf{M}_d(\mathbf{C}) \quad \xrightarrow{\sim} \quad \mathrm{End}_G(V^d).$$

Si ces algèbres sont de dimension 1, alors $d = 1$.□

**Exemple 2.3.6.** *Décomposition des représentations de permutation.*([S], p.29, Exerc. 2.)

Soient $U$ une représentation de permutation de $G$, et $(e_x)_{x \in X}$ une base de $U$ stable sous $G$. Supposons que $G$ agisse transitivement sur $X$ (sinon, décomposer $X$ en réunion d'orbites, et ainsi $U$ en somme directe de sous-espaces stables). On va appliquer le théorème 2.3.2 en prenant comme représentation irréductible $V$ la représentation unité c'est-à-dire $\mathbf{C}$ avec action triviale. L'espace d'entrelacement $\mathrm{Hom}_G(U, \mathbf{C})$ est l'espace des formes linéaires $\alpha : U \to \mathbf{C}$ telles que, pour tout $g \in G$ et tout $x \in X$, on ait $\alpha(e_{gx}) = \alpha(e_x)$ ; comme $G$ agit transitivement sur $X$ les scalaires $\alpha(e_x)$ sont indépendants de $x$ ; cet espace est donc de dimension 1 engendré par la forme $\omega : U \to \mathbf{C}$ définie par $\omega(e_x) = 1$ pour tout $x \in X$. Montrons que $U_0 = \mathrm{Ker}(\omega)$ : pour tout sous-espace stable $U' \subset U$, l'application de restriction à $U'$

$$\mathbf{C}\omega = \mathrm{Hom}_G(U, \mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(U', \mathbf{C})$$

est surjective (2.1.2. *ii)*), donc ce dernier espace est engendré par la restriction de $\omega$ à $U'$ ; il est nul si et seulement si $U' \subset \mathrm{Ker}(\omega)$.

D'autre part, une somme directe de copies de $\mathbf{C}$ avec action triviale est exactement un sous-espace vectoriel invariant ; donc $U_1 = U^G$ ; en tenant compte de (1.4.3.), on voit que $U_1$ est de dimension 1 (on peut prendre pour base le vecteur $\sum_{x\in X} e_x$, mais cela est sans importance pour la suite).
La décomposition $U = U_0 \oplus U_1$ conduit à l'isomorphisme d'anneaux

$$\mathrm{End}_G(U) \quad \xrightarrow{\sim} \quad \mathrm{End}_G(U_0) \times \mathrm{End}_G(U_1).$$

Explicitons une condition pour que $U_0$ soit irréductible. Comme $\mathbf{C} = \mathrm{End}_G(U_1)$ d'après ce qu'on vient de voir, la représentation $U_0$ est irréductible si $\mathrm{End}_G(U)$ est de dimension 2. D'après 1.4.2, la dimension de cet anneau est égale au nombre d'orbites dans $X \times X$ sous l'action de $G$ ; comme la diagonale est une orbite, la condition cherchée est que le complémentaire de la diagonale dans $X \times X$ soit une orbite sous $G$. On obtient finalement le critère suivant :

*Supposons qu'un groupe $G$ opère transitivement sur une base d'un espace $U$. Soit $U_0$ le sous-espace formé des vecteurs dont la somme des coordonnées, relativement à cette base, est nulle. Alors $U_0$ est une représentation irréductible de $G$ si et seulement si l'opération de $G$ sur la base est doublement transitive.*

Cela s'applique en particulier au groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agissant sur $\mathbf{C}^n$ par permutation des vecteurs de la base ; comme il doublement transitif (il est même $n$-fois transitif !), on déduit de ce qui précède (avec la notation introduite en 1.6.1), que la décomposition de $\mathbf{C}^n$ en facteurs irréductibles est

$$\mathbf{C}^n \quad = \quad \mathsf{P}_n \oplus \mathbf{C}.$$

### 2.4. L'algèbre du groupe et la décomposition canonique

On notera $\mathbf{C}[G]$ *l'algèbre de $G$ sur* $\mathbf{C}$ (cf. [S] p.63) ; cette algèbre a une base indéxée par les éléments de $G$, et que l'on identifie le plus souvent à $G$. Un élément $u$ de $\mathbf{C}[G]$ s'écrit donc de façon unique sous la forme

$$u \;=\; \sum_{g\in G} u(g)g, \qquad \text{avec } u(g) \in \mathbf{C}.$$

La multiplication prolonge celle de $G$, et on identifie $\mathbf{C}$ au sous-anneau $\mathbf{C}e$ (où $e$ désigne provisoirement l'élément neutre de $G$), si bien qu'on peut désormais désigner par le même symbole 1 l'élément unité de $\mathbf{C}$ et l'élément neutre de $G$, qui est aussi l'élément unité de $\mathbf{C}[G]$.

On peut préférer le point de vue des applications $G \to \mathbf{C}$, et identifier l'élément $u$ de l'algèbre du groupe à l'application $g \mapsto u(g)$ ; l'algèbre du groupe est alors vue comme l'ensemble $\mathsf{M}(G, \mathbf{C})$ muni du produit de convolution

$$(u \star v)(g) \quad = \quad \sum_{hk=g} u(h)v(k).$$

**Exercice** Lorsque $G$ est le groupe cyclique $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, dégager un isomorphisme de $\mathbf{C}$-algèbres $\mathbf{C}[\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}] \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}[X]/(X^n-1)$. De même, pour le groupe de Klein $\mathsf{V}$, construire un isomorphisme

$$\mathbf{C}[\mathsf{V}] \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}[X,Y]/(X^2-1, Y^2-1)$$

**Lemme 2.4.1** *Pour toute représentation linéaire $V$ de $G$, l'application*

$$V \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(\mathbf{C}[G], V), \qquad x \mapsto (\sum u(g)g \mapsto \sum u(g)gx),$$

*est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier, toute représentation irréductible $V$ intervient* $\dim V$ *fois dans la décomposition de* $\mathbf{C}[G]$.

L'application réciproque $\mathrm{Hom}_G(\mathbf{C}[G], V) \longrightarrow V$ est donnée par $\alpha \mapsto \alpha(1)$.□

Cela montre que, à $G$-isomorphisme près, il n'y a qu'un nombre fini de représentations irréductibles, puisqu'elles interviennent toutes dans $\mathbf{C}[G]$.

**Définition 2.4.2.** *On note désormais $V_1, \ldots, V_h$ une suite de représentations irréductibles choisies de telle sorte que toute représentation irréductible soit isomorphe à une et une seule d'entre elles.*
*On appelle* décomposition canonique *décomposition canoniqued'une représentation linéaire $U$ l'isomorphisme de $G$-modules*

$$U \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{h} \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_G(U, V_i), V_i)$$

*donné par le théorème 2.3.2 appliqué avec les représentations irréductibles $V_1, \cdots, V_h$.*

À la place de « décomposition canonique » Bourbaki écrira « description » de la représentation ; cette heureuse dénomination n'est malheureusement pas encore consacrée par l'usage.

On peut écrire le second membre de façon plus explicite, mais moins canonique, en choisissant pour chaque $i$ une base de $\mathrm{Hom}_G(U, V_i)$, c'est-à-dire un isomorphisme $\mathrm{Hom}_G(U, V_i) \simeq \mathbf{C}^{m_i}$ ; la décomposition précédente se récrit alors :

$$U \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{h} V_i^{m_i}.$$

En utilisant 2.4.1, la décomposition canonique de la représentation $\mathbf{C}[G]$ conduit au résultat central suivant ([S] 6.2 Prop.10, p.64)

**Théorème 2.4.3.** *Les applications $G \to \mathrm{End}(V_i)$ s'étendent en un isomorphisme de $\mathbf{C}$-algèbres*

2.4.3.1 $$\mathbf{C}[G] \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{h} \mathrm{End}(V_i).$$

*En particulier, on a* $|G| = \sum_{i=1}^{h} (\dim V_i)^2$ .

La démonstration se réduit à la vérification (immédiate) que l'application composée

$$G \subset \mathbf{C}[G] \xrightarrow{2.3.1} \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_G(\mathbf{C}[G], V), V) \xrightarrow{2.4.1} \mathrm{End}(V)$$

est simplement $g \mapsto g_V$.□

**Corollaire 2.4.4.** *Soient* $W_1, \ldots, W_s$ *des représentations irréductibles de* $G$*, deux à deux non* $G$*-isomorphes. Si l'égalité suivante est vérifiée*

$$|G| = \sum_{i=1}^{s} (\dim W_i)^2$$

*alors toute représentation irréductible de* $G$ *est isomorphe à l'une des* $W_i$*.*

Ainsi, la liste proposée en 1.5 pour le groupe quaternionien est complète.

> **Exercice 2.4.5.** Soit $F$ un corps ; on désigne par $F^\times$ le groupe multiplicatif formé des éléments inversibles de $F$. Le produit semi-direct $G = F \rtimes F^\times$ est le groupe d'ensemble sous-jacent $F \times F^\times$, muni de la loi
>
> $$(x, u)(y, v) = (x + uy, uv).$$
>
> Une opération de ce groupe sur l'ensemble $F$ est donnée par : $(x, u).a = x + ua$. (Lorsque $F = \mathbf{R}$, on aura reconnu le groupe des transformations affines de la droite.)
>
> 1) Montrer que l'opération de $G$ sur $F$ est doublement transitive.
>
> On suppose désormais que le corps $F$ est fini, et on note $q$ son cardinal.
>
> 2) Exhiber $q - 1$ représentations distinctes de degré 1 de $G$.
> 3) Décomposer en somme d'irréductibles l'espace des fonctions complexes sur $F$, vu comme représentation de $G$.
> 4) Trouver toutes les (classes d'isomorphisme de) représentations irréductibles de $G$.
> 5) Lorsque $F = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, le groupe $G$ est isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$. Décrire comment les représentations trouvées en 3) correspondent à celles de $\mathfrak{S}_3$ (cf 1.6.3.).
> 6) L'action de $G$ sur $F$ fournit un homomorphisme de groupes $G \to \mathfrak{S}_F$. Montrer qu'il est injectif.
> On suppose que $F$ est un corps à 4 éléments. Montrer que cet homomorphisme permet d'identifier $G$ au groupe alterné $\mathfrak{A}_4$ . En déduire la liste des représentations irréductibles de ce groupe, à isomorphisme près.

## 2.5. Premières conséquences

2.5.1. Un théorème de Burnside. Le théorème 2.4.3 implique (en fait, le lemme-clé suffirait) que pour toute représentation irréductible $V$, le morphisme

$$\mathbf{C}[G] \to \mathrm{End}(V)$$

est surjectif, ce qui veut dire que toute aplication linéaire $u : V \to V$ est combinaison linéaire d'éléments de $G$, i.e peut être écrite sous la forme $u = \sum_g u(g) g_V$, pour des scalaires convenables $u(g) \in \mathbf{C}$. On peut difficilement démontrer cela directement ! (La réciproque a été signalée en 1.2)

2.5.2. L'injectivité de 2.4.3.1. implique en particulier ceci : pour tout $g \in G$, $g \neq 1$, il existe une représentation irréductible $V$ telle que $g_V \neq 1_V$.

2.5.3. Cas des groupes abéliens.

L'anneau $\mathrm{End}(V)$ est commutatif si et seulement si $\dim V \leq 1$ ; par suite, un groupe fini est abélien si et seulement si ses représentations irréductibles sont de degré 1, c'est-à-dire sont données par des homomorphismes de groupes $\theta_i : G \to \mathbf{C}^\times$ (La nécessité de cette condition est élémentaire et a déjà été signalée en 1.3). Le théorème montre aussi qu'un groupe abélien d'ordre $n$ possède exactement $n$ homomorphismes distincts $G \to \mathbf{C}^\times$. Ils forment ce qu'on appelle *le groupe dual*, noté $\widehat{G}$, qui a donc même ordre que $G$. L'injectivité de 2.4.3.1 montre que le seul élément de $G$ qui soit dans le noyau de tous les caractères est l'élément neutre ; ainsi, l'application $G \longrightarrow \widehat{\widehat{G}}$ est injective, donc bijective puisque ces deux groupes ont le même nombre d'éléments.

Enfin, deux groupes abéliens de même ordre $n$ ont des algèbres de groupe isomorphes (car toutes deux isomorphes à $\mathbf{C}^n$) ; ainsi l'algèbre d'un groupe ne caractérise pas le groupe à isomorphisme près.

On connaît le centre de $\mathrm{End}(V)$ : il est formé des homothéties. Déterminons celui de l'algèbre d'un groupe.

**Lemme 2.5.4.** *Pour tout anneau commutatif $A$ et tout groupe fini $G$, le centre de $A[G]$ est formé des éléments $\sum_{g\in G} a(g)g$ , où pour tout $g, h \in G$, on a $a(gh) = a(hg)$, ou encore $a(ghg^{-1}) = a(h)$. Si on note $C_1, \cdots, C_h$ les classes de conjugaisons d'éléments de $G$, et si on pose $e_i = \sum_{g\in C_i} g$, alors les $e_1, \cdots, e_h$ forment une base (en tant que $A$-module) du centre de $A[G]$.*

Simple vérification.

**Proposition 2.5.5.** ([S] 6.3, Prop.13, et 2.5 Théor. 7) *Par restriction aux centres, l'isomorphisme du théorème* 2.4.3. *donne un isomorphisme de* $\mathbf{C}$*-algèbres*

$$\mathrm{Cent.}\mathbf{C}[G] \quad \xrightarrow{\sim} \quad \mathbf{C}^h.$$

*En particulier, le nombre $h$ de représentations irréductibles de $G$ (à isomorphisme près) est égal au nombre de classes de conjugaison d'éléments de $G$.*

# 3. Représentations induites.

### 3.1 Définition et dualité de Frobenius.

Considérons un espace vectoriel $W$, un ensemble fini $X$ et l'espace vectoriel $V = \mathsf{M}(X, W)$ des applications (ou familles) $v = (v(x))_{x \in X}$ d'éléments de $W$. Si un groupe $K$ opère à droite sur $X$, il opère (à gauche) sur $V$, par « permutation des facteurs » :

$$(kv)(x) \quad = \quad v(xk), \qquad \text{pour } k \in K,\ x \in X.$$

Dans plusieurs situations importantes, l'ensemble $X$ sera, en plus, muni d'une action à gauche d'un groupe $H$, compatible avec celle de $K$ (i.e telle que $h(xk) = (hx)k$). Par exemple, si $H$ et $K$ sont deux sous-groupes d'un groupe $G$, alors l'ensemble $X = G$ est de ce type, tout comme chaque double classe $HtK$.

Lorsque $W$ est une représentation linéaire de $H$, on sera amené à considérer l'espace, noté $\mathsf{M}_H(X, W)$, formé des applications $v : X \to W$ telles que pour tout $h \in H$ et tout $x \in X$, on a $v(hx) = hv(x)$ ; on obtient un sous-espace du précédent, qui est toujours une représentation de $K$.

**Définition 3.1.1.** *Soient $H$ un sous-groupe d'un groupe $G$ et $W$ une représentation linéaire de $H$. On appelle* représentation de $G$ induite par $W$, *l'espace vectoriel*

$$\mathsf{M}_H(G, W) = \{\alpha : G \to W, \forall h \in H, \forall g \in G, \alpha(hg) = h\alpha(g)\},$$

*muni de l'action de $G$ définie par la formule : $({}^g\alpha)(g') = \alpha(g'g)$.*

Soit $T \subset G$ un système représentant les classes pour l'opération à gauche de $H$ sur $G$ ; autrement dit, l'application composée $T \subset G \to H\backslash G$ est bijective, ou encore, les ensembles $(Ht)_{t \in T}$ forment une partition de $G$ ; il est clair que la restriction à $T$ fournit un isomorphisme d'espaces vectoriels $\mathsf{M}_H(G, W) \longrightarrow \mathsf{M}(T, W)$ ; en particulier,

$$\dim \mathsf{M}_H(G, W) \quad = \quad \frac{|G|}{|H|}. \dim W.$$

Mais la structure de $G$-module n'est pas aisée à décrire en utilisant un système de représentants. En effet, si la multiplication à droite par un élément $g \in G$ induit bien une bijection de l'ensemble quotient $H\backslash G$, en général l'élément $tg$ n'est pas dans $T$ ; on peut seulement écrire, de façon unique,

$$tg \quad = \quad ht', \qquad \text{avec} \quad h \in H, t' \in T.$$

Pour $\alpha \in \mathsf{M}(T, W)$, on doit donc poser $({}^g\alpha)(t) = h\alpha(t')$. Ainsi, l'action de $G$ sur $\mathsf{M}(T, W)$ ne se réduit pas à une simple permutation des facteurs, car chaque facteur permuté est transformé par un élément de $H$, qui dépend de $t$ et de $g$ (Voir l'exemple 3, ci-après).

**Exemples** 1) $\mathsf{M}_G(G, V) \simeq V$.

2) Si $W$ est une représentation de $H$, pour tout groupe $K$, l'induite de $W$ à $H \times K$ est isomorphe à $\mathsf{M}(K, W)$ (comme espace vectoriel), via

$$\mathsf{M}(K, W) \longrightarrow \mathsf{M}_H(H \times K, W), \qquad \alpha \mapsto (hk \mapsto h\alpha(k)).$$

La structure de $H \times K$-module est donnée par $({}^{hk}\alpha)(k') = h\alpha(k'k)$.

3) Supposons que $H$ soit d'indice 2 dans $G$ (donc distingué) ; soit $t \notin H$, de sorte qu'on a la partition $G = H \sqcup Ht$, et que $t^2 \in H$. Pour $h \in H$, on note ${}^t h = tht^{-1}$. Alors, si $W$ est une représentation de $H$, on vérifie que l'induite $\mathsf{M}_H(G, W)$ est l'espace produit $W \times W$ muni de l'action de $G$ définie, pour $x, y \in W$, par

$$h.(x, y) = (hx, {}^t hy), \qquad t.(x, y) = (y, t^2 x).$$

La représentation induite jouit de la propriété de « relèvement » fondamentale suivante :

**Théorème 3.1.2.** (Dualité de Frobenius) *Soient $H$ un sous-groupe de $G$, $W$ une représentation linéaire de $H$ et $V$ une représentation linéaire de $G$. Alors, l'application $p : \mathsf{M}_H(G, W) \to W, \quad \alpha \mapsto \alpha(1)$ est $H$-linéaire, et pour toute application $H$-linéaire $u : V \to W$ il existe une unique application $G$-linéaire $\bar{u} : V \to \mathsf{M}_H(G, W)$ telle que $u = p \circ \bar{u}$.*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\bar{u}"] \arrow[dr, "u"'] & \mathsf{M}_H(G, W) \arrow[d, "p"] \\ & W \end{tikzcd}$$

*En d'autres termes, on a un isomorphisme d'espaces vectoriels*

$$\mathrm{Hom}_G(V, \mathsf{M}_H(G, W)) \ \xrightarrow{\sim}\ \mathrm{Hom}_H(V, W), \qquad v \ \mapsto\ p \circ v$$

L'application $\bar{u} : V \to \mathsf{M}_H(G, W)$ est définie par la formule $\bar{u}(x) = (g \mapsto u(gx))$. La vérification des assertions énoncées est de simple routine.

> **Exercice 3.1.3.** 1) Montrer que l'application $p : \mathsf{M}_H(G, W) \to W$ induit une bijection $\mathsf{M}_H(G, W)^G \ \to\ W^H$.
> 2) Soit $\rho : G \to\ \mathbf{C}^\times$ un homomorphisme de groupes. Définir un isomorphisme $G$-linéaire $\mathsf{M}_H(G, W)(\rho) \ \to\ \mathsf{M}_H(G, W(\rho))$.

**Remarque 3.1.4** Comme annoncé dans l'introduction, il y a deux façons de définir l'induction, et celle de ce fascicule n'est pas celle du livre de Serre, laquelle utilise le produit tensoriel ([S], p.71). Mais ces deux définitions conduisent à des objets isomorphes (voir aussi [S], p.45, Exerc. 2).
Soient $H$ un sous-groupe d'un groupe $G$, et $W$ une représentation de $H$. L'autre représentation de $G$ induite par $W$ est

$$\mathbf{C}[G] \otimes_{\mathbf{C}[H]} W.$$

Dans cette expression, le produit tensoriel est relatif à l'action à droite de $H$ sur $G$ donnée par la multiplication, et la structure de $G$-module provient de la multiplication à gauche dans $G$. On définit une application

$$f : \ \mathbf{C}[G] \otimes_{\mathbf{C}[H]} W \quad \longrightarrow \quad \mathsf{M}_H(G, W)$$

par la formule $f(g \otimes w)(g') = g'gw$ si $g'g \in H$, et 0 sinon. Pour voir que c'est un isomorphisme, le plus simple est de définir une application $f'$ qui s'avèrera être réciproque de $f$ ; pour cela on choisit un système $R$ représentant les classes à gauche modulo $H$, de sorte qu'on a une partition $G = \bigsqcup_{r \in R} rH$ ; pour $\alpha \in \mathsf{M}_H(G, W)$ on pose $f'(\alpha) = \sum_{r \in R} r \otimes \alpha(r^{-1}) \in \mathbf{C}[G] \otimes_{\mathbf{C}[H]} W$. Il y a des vérifications nécessaires... Il faut noter que la dualité associée à priori à cette construction change de côté ; pour toute représentation $V$ de $G$, on a une bijection

$$\mathrm{Hom}_G(\mathbf{C}[G] \otimes_{\mathbf{C}[H]} W, V) \quad \widetilde{\longrightarrow} \quad \mathrm{Hom}_H(W, V).$$

### 3.2. Restriction aux sous-groupes et critère de Mackey.

Les résultats qui suivent sont dus à Mackey ([S] 7.3 et 7.4).

Pour $t \in G$, on note $H^t$ le groupe $t^{-1}Ht \subset G$, et, si $W$ est une représentation de $H$, on note $W^t$ la représentation de $H^t$ définie par composition :

$$H^t \quad \stackrel{g \mapsto tgt^{-1}}{\longrightarrow} \quad H \quad \longrightarrow \quad \mathrm{GL}(W)$$

**Théorème 3.2.1** (Théorème des deux sous-groupes)([S] 7.3 Prop. 22 p.75) *Soient $H$ et $K$ deux sous-groupes de $G$, et $T \subset G$ un système représentant les doubles classes $H \backslash G / K$ ; la famille d'ensembles $(HtK)_{t \in T}$ est donc une partition de $G$. Alors, pour toute représentation $W$ de $H$, l'induite à $G$, $\mathsf{M}_H(G, W)$ se décompose,* en tant que $K$-module, *en une somme directe de représentations induites à $K$ :*

$$\mathsf{M}_H(G, W) \quad \simeq \quad \prod_{t \in T} \mathsf{M}_{H^t \cap K}(K, W^t).$$

*La projection sur le facteur d'indice $t$ est :*

$$(\alpha : G \to W) \ \longmapsto \ (k \mapsto \alpha(tk)).$$

Chaque double classe $HtK$ est stable pour les opérations à gauche de $H$ et à droite de $K$ ; si on ne le considère que comme $K$-module, il est donc clair que $\mathsf{M}_H(G, W)$ est produit des $K$-modules $\mathsf{M}_H(HtK, W)$. Il reste donc à voir que l'application

$$\mathsf{M}_H(HtK, W) \longrightarrow \mathsf{M}_{H^t \cap K}(K, W^t), \qquad (\alpha : HtK \to W) \longmapsto (k \mapsto \alpha(tk))$$

est un isomorphisme de $K$-modules.

Vérifions d'abord que l'application $k \mapsto \alpha(tk)$ est bien $(H^t \cap K)$-linéaire : soit $x \in H$ et $y \in K$ tels que $t^{-1}xt = y \in H^t \cap K$ ; alors l'image de $yk$ est $\alpha(tyk) = \alpha(xtk) = x\alpha(tk)$.

En sens inverse, si $\beta : K \to W^t$ est $(H^t \cap K)$-linéaire, alors l'élément $h\beta(k)$ ne dépend que de $htk$ puisque si $htk = h'tk'$, alors l'élément $k'' = t^{-1}h^{-1}h't = kk'^{-1}$ est dans $(H^t \cap K)$, donc

$$h\beta(k) = h\beta(k''k') = htk''t^{-1}\beta(k') = h'\beta(k').$$

On définit donc $\alpha \in \mathsf{M}_H(HtK, W)$ en posant $\alpha(htk) = h\beta(k)$.

**Théorème 3.2.2.** (Critère d'irréductibilité de Mackey)([S] 7.4 Prop. 23 p.75) *Pour que la représentation induite $V = \mathsf{M}_H(G, W)$ soit irréductible, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites :*

*a) $W$ est irréductible.*

*b) Pour tout $g \in G - H$, les deux représentations $W$ et $W^g$ du groupe $g^{-1}Hg \cap H$ sont disjointes (i.e aucun facteur irréductible de l'une n'est isomorphe à un facteur irréductible de l'autre).*

L'irréductibilité de $V$ se voit sur $\mathrm{End}_G(V)$ : cet espace doit être de dimension 1. Or, par la propriété d'adjonction, on a un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_G(V, V) \simeq \mathrm{Hom}_H(V, W).$$

On décompose ensuite en somme directe le $H$-module $V = \mathsf{M}_H(G, W)$, à l'aide d'un système $T \subset G$ représentant les doubles classes $HgH$, et contenant 1. D'après le théorème des deux sous-groupes (ici c'est le même, $H$), on a un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_H(\mathsf{M}_H(G, W), W) \simeq \mathrm{Hom}_H(\mathsf{M}_H(H, W), W) \times \prod_{t \neq 1} \mathrm{Hom}_H(\mathsf{M}_{H^t \cap H}(H, W^t), W)$$

Comme $\mathsf{M}_H(H, W)$ est $H$-isomorphe à $W$, le premier facteur est isomorphe à $\mathrm{End}_H(W)$ ; il est de dimension $\geq 1$ puisque cet anneau contient les homothéties. Pour que $V$ soit irréductible il faut donc et il suffit que $W$ soit irréductible (en tant que représentation de $H$), et que pour $t \neq 1, \mathrm{Hom}_H(\mathsf{M}_{H^t \cap H}(H, W^t), W) = 0$. Or, d'après 2.2.3., on a

$$\dim \mathrm{Hom}_H(\mathsf{M}_{H^t \cap H}(H, W^t), W) = \dim \mathrm{Hom}_H(W, \mathsf{M}_{H^t \cap H}(H, W^t)),$$

et, par adjonction, ce dernier espace est isomorphe à $\mathrm{Hom}_{H^t \cap H}(W, W^t)$. Enfin, tout $g \notin H$ s'écrit $g = htk$, avec $t \neq 1$ et $h, k \in H$, et on constate que l'application suivante est un isomorphisme :

$$\mathrm{Hom}_{H^t \cap H}(W, W^t) \quad \longrightarrow \quad \mathrm{Hom}_{H^g \cap H}(W, W^g), \qquad u \longmapsto huk.$$

### 3.3. Représentations de certains produits semi-directs

On suppose ici que le groupe $G$ est un produit semi-direct $G = A \rtimes H$ où $A$ est un groupe abélien (distingué dans $G$), et où $H$ opère sur $A$. Pour un caractère de $A$ de degré 1, c'est-à-dire un homomorphisme de groupes $\chi : A \to \mathbf{C}^\times$, on note $H_\chi$ le sous-groupe des $h \in H$ qui stabilisent $\chi$, c'est-à-dire tels que pour tout $a \in A$, on ait $\chi^h(a) = \chi(hah^{-1}) = \chi(a)$ ; le stabilisateur dans $G$ de $\chi$ est donc $G_\chi = A \rtimes H_\chi$. Soit $W$ une représentation irréductible de $H_\chi$, on note $W(\chi)$ la représentation de $G_\chi$ définie, pour $ah \in G_\chi$, par

$$(ah).w = \chi(a)hw.$$

**Proposition 3.3.1.** ([S] 8.2 Prop. 25) *Sous les hypothèses et avec les notations qui précèdent, on a les propriétés suivantes :*
*i)* $\mathsf{M}_{G_\chi}(G, W(\chi))$ *est une représentation irréductible de* $G$.
*ii) Toute représentation irréductible de* $G$ *est isomorphe à une représentation du type ci-dessus décrit.*
*iii) Soient* $\mathsf{M}_{G_\chi}(G, W(\chi)$ *et* $\mathsf{M}_{G_{\chi'}}(G, W'(\chi')$ *deux représentations de ce type. Elles sont* $G$*-isomorphes si et seulement si il existe* $t \in H$ *tel que* $\chi' = \chi^t$*, donc* $H_{\chi'} = H_\chi^t$*, et* $W'$ *est isomorphe à* $W^t$.

*i).* D'après le critère de Mackey, il s'agit de voir que pour $g \notin G_\chi$, les représentations $W(\chi)$ et $W(\chi)^g$ du groupe $K = G_\chi^g \cap G_\chi$ sont disjointes, et il suffit de constater que leurs restrictions au sous-groupe $A \subset K$ sont disjointes ; or, $A$ opère respectivement via $\chi$ et $\chi^g$, et le choix de $g$ implique que $\chi$ est distinct de $\chi^g$.

*ii).* Soit $V$ une représentation irréductible de $G$ ; considérée comme représentation du sous-groupe abélien $A$, elle se décompose en la somme directe $\bigoplus V_\chi$, où $\chi$ parcourt les caractères de degré 1 de $A$, et où, pour $x \in V_\chi$ et $a \in A$ on a $ax = \chi(a)x$. Soit $\chi$ un des caractères tels que $V_\chi$ soit non nul ; on constate que cet espace est stable sous $H_\chi$. Soit $W \subset V_\chi$ une sous-représentation irréductible de $H_\chi$ ; $W(\chi)$ est donc une représentation irréductible de $G_\chi$. Par définition d'une représentation induite, la projection $V \to W(\chi)$, qui est $G_\chi$-linéaire, s'étend en une application $G$-linéaire non nulle

$$V \longrightarrow \mathsf{M}_{G_\chi}(G, W(\chi)).$$

Comme ces deux représentations sont irréductibles, c'est un isomorphisme.

*iii).* Utilisons le théorème des deux sous-groupes pour décomposer $\mathsf{M}_{G_\chi}(G, W(\chi))$ en tant que $A$-module. Comme $A$ est distingué dans $G$ et contenu dans $G_\chi$, une double classe $G_\chi tA$ est égale à $G_\chi t$, et on peut choisir le représentant $t$ dans $H$ ; on a alors $G_\chi^t \cap A = A$ et la structure de $A$-module sur $W(\chi)^t$ est l'homomorphisme composé

$$A^t = A \xrightarrow{a \mapsto tat^{-1}} A \longrightarrow \mathrm{GL}(W(\chi)),$$

c'est-à-dire $a.w = \chi(tat^{-1})w$ ; il s'agit donc du $A$-module $W(\chi^t)$ . Finalement, on obtient $\mathsf{M}_{G_\chi^t \cap A}(A, W(\chi)^t) = W(\chi^t)$. Résumons :

Soit $T \subset H$ un système représentant les classes à gauche de $G$ modulo $G_\chi$. Alors on a un isomorphisme de $A$-modules

$$\mathsf{M}_{G_\chi}(G, W(\chi)) \xrightarrow{\sim} \prod_{t \in T} W(\chi^t).$$

Cela montre déja que, sous les hypothèses de *iii)* il existe un élément $t \in H$ tel que $\chi' = \chi^t$. Par suite, $G_{\chi'} = G_\chi^t$ ; en utilisant la conjugaison par $t$, on est donc ramené au cas où $\chi' = \chi$, et il reste alors à vérifier que $W$ et $W'$ sont des représentations isomorphes de $H_\chi$, ou encore que la représentation $W(\chi)$ est déterminée par $\mathsf{M}_{G_\chi}(G, W(\chi))$.

Or, considérons le sous-espace $W_0$ de $\mathsf{M}_{G_\chi}(G, W(\chi))$ formé des $\alpha$ tels que, pour tout $a \in A$, on ait ${}^a\alpha = \chi(a)\alpha$ : comme ${}^a\alpha(g) = \alpha(ga) = \chi(gag^{-1})\alpha(g)$, la condition s'écrit $(\chi(gag^{-1}) - \chi(a))\alpha(g) = 0$ ; choisissons $g \notin G_\chi$ (donc tel que $\chi^g \neq \chi$) et $a \in A$ tel que $\chi^g(a) = \chi(gag^{-1}) \neq \chi(a)$ ; on doit donc avoir $\alpha(g) = 0$ ; bref, $W_0$ est l'ensemble des applications $\alpha \in \mathsf{M}_{G_\chi}(G, W(\chi))$ qui sont nulles en dehors de $G_\chi$ ; par composition avec la projection canonique $\mathsf{M}_{G_\chi}(G, W(\chi)) \to W(\chi)$, $\alpha \mapsto \alpha(1)$, on obtient donc un isomorphisme $W_0 \simeq W(\chi)$. Finalement, $W_0$ est stable sous $G_\chi$ puisque pour $g$ dans ce groupe et $\alpha \in W_0$, on a ${}^{ag}\alpha(g')) = \alpha(g'ag) = \chi(g^{-1}ag)\alpha(g'g) = \chi(a)^g\alpha(g')$ ; ainsi, l'isomorphisme $W_0 \simeq W(\chi)$ est un isomorphisme de $G_\chi$-modules

# 4. Les caractères.

### 4.1. La trace

Soit $V$ un espace vectoriel (i.e, comme toujours ici, un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie) ; la trace est une application linéaire

$$\mathrm{Tr} : \mathrm{End}(V) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{C}$$

que l'on peut définir de plusieurs façons :

1) Le choix d'une base de $V$ permet d'associer à tout endomorphisme $v$ sa matrice, et $\mathrm{Tr}(v)$ est la somme des éléments diagonaux de cette matrice (on vérifie, par simple écriture, que ce scalaire ne dépend pas de la base choisie).

Considérons, en particulier, le cas où $v$ est de rang 1 ; soit $y$ une base de $v(V)$ et $\alpha$ la forme linéaire telle que $v(x) = \alpha(x)y$ ; alors $\mathrm{Tr}(v) = \alpha(y)$.

2) Introduisant une indéterminée $T$, la trace est la dérivée en 0 du polynôme $\det(1 + Tv)$ (une variante du polynôme caractéristique) ; autrement écrit,

$$\det(1 + Tv) = 1 + \mathrm{Tr}(v)T + \ldots + \det(v)T^{\dim(V)}.$$

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ $(n = \dim(V))$, désignent les valeurs propres de $v$, alors

$$\det(1 + Tv) \;=\; \prod_i (1 + \lambda_i T).$$

Par suite $\mathrm{Tr}(v)$ est la somme des valeurs propres de $v$, comptées avec leur multiplicité.

Voici quelques propriétés de la trace qui seront utilisées dans la suite.

**4.1.1.** *Une décomposition $V = V' \oplus V''$ en somme directe permet d'écrire tout endomorphisme par blocs, c'est-à-dire sous la forme $v = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$, où $a$ est une application $V' \to V'$, $b$ une application $V' \to V''$, etc. On a alors*

$$\mathrm{Tr}_{V' \oplus V''} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \mathrm{Tr}_{V'}(a) + \mathrm{Tr}_{V''}(d).$$

**4.1.2.** *Si $e : V \to V$ est un idempotent ($e^2 = e$), on dit aussi : un projecteur, alors*

$$\mathrm{Tr}(e) = \dim(\mathrm{Im}(e)).$$

(La trace est un élément du corps de base ; cette égalité relie donc des élément de ce corps ; il faut donc être très vigilant si le corps de base est de caractéristique positive, mais on a supposé, une fois pour toutes, qu'ici le corps de base est **C**.)

**4.1.3.** *Soient $U \xrightarrow{u} V \xrightarrow{v} U$ deux applications linéaires. Alors*

$$\mathrm{Tr}_U(vu) \quad = \quad \mathrm{Tr}_V(uv).$$

On a un peu plus : $\det(1+vu) = \det(1+uv)$. Cela provient de l'égalité suivante entre endomorphismes de l'espace $U \oplus V$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+vu & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1+uv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Introduisons alors une indéterminée $T$, et remplaçons, dans l'égalité des déterminants, $u$ par $Tu$ ; on obtient $\det(1+Tvu) = \det(1+Tuv)$ ; d'où le résultat.

**4.1.4.** *Soient $v : V \to V$ et $w : W \to W$ deux endomorphismes d'espaces vectoriels. On considère l'endomorphisme $u \mapsto wuv$ de l'espace vectoriel* $\mathrm{Hom}(V, W)$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{u} & W \\ {\scriptstyle v}\big\uparrow & & \big\downarrow{\scriptstyle w} \\ V & \xrightarrow[wuv]{} & W \end{array}$$

*Alors, on a*

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{Hom}(V,W)}(u \mapsto wuv) \;=\; \mathrm{Tr}_V(v)\mathrm{Tr}_W(w).$$

Cela se voit par récurrence sur $\dim(V)$, en commençant avec $\dim(V) = 1$ : choisissons une base $e$ de $V$ ; on alors $v(e) = \lambda e$, donc $\mathrm{Tr}(v) = \lambda$ ; l'application $\varphi : \mathrm{Hom}(V, W) \to W, \quad u \mapsto u(e)$, est un isomorphisme, et le carré suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(V,W) & \xrightarrow{u \mapsto wuv} & \mathrm{Hom}(V,W) \\ {\scriptstyle \varphi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ W & \xrightarrow[\lambda w]{} & W \end{array}$$

Par suite, $\mathrm{Tr}(u \mapsto wuv) = \mathrm{Tr}(\lambda w) = \mathrm{Tr}(v)\mathrm{Tr}(w)$. Pour pouvoir, dans le cas général, appliquer le procédé de récurrence, on décompose $V$ en la somme directe $V = V' \oplus V''$ de deux sous-espaces non nuls, de sorte que l'endomorphisme $v$ s'écrit en blocs sous la forme $\left(\begin{smallmatrix} v' & t \\ s & v'' \end{smallmatrix}\right)$. Notons, pour simplifier, $w \diamond v$ l'application $u \mapsto wuv$ ; alors l'endomorphisme $w \diamond v$ de $\mathrm{Hom}(V, W) = \mathrm{Hom}(V', W) \oplus \mathrm{Hom}(V'', W)$ s'écrit en blocs sous la forme

$$\begin{pmatrix} w \diamond v' & w \diamond s \\ w \diamond t & w \diamond v'' \end{pmatrix}$$

D'après la propriété 4.1.1 le calcul de la trace ne fait intervenir que les blocs diagonaux, d'où $\mathrm{Tr}(w \diamond v) = \mathrm{Tr}(w \diamond v') + \mathrm{Tr}(w \diamond v'')$ ; plus explicitement, si $u = u' + u'' \in \mathrm{Hom}(V', W) \oplus \mathrm{Hom}(V'', W)$, on a

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{Hom}(V,W)}(u \mapsto wuv) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{Hom}(V',W)}(u' \mapsto wu'v') + \mathrm{Tr}_{\mathrm{Hom}(V'',W)}(u'' \mapsto wu''v'').$$

L'hypothèse de récurrence permet de conclure.

**4.1.5.** Soit $g$ un automorphisme de $V$ d'ordre fini ; ses valeurs propres sont donc des racines de l'unité, et il est diagonalisable ; si, dans une base appropriée, $g_V$ est représenté par la matrice diagonale d'éléments $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, alors $g_V^{-1}$ sera représenté par $(\zeta_1^{-1}, \ldots, \zeta_n^{-1}) = (\bar{\zeta_1}, \ldots, \bar{\zeta_n})$ puisque les $\zeta_i$ sont des racines de l'unité ; par suite,

$$\mathrm{Tr}(g^{-1}) = \overline{\mathrm{Tr}(g)}.$$

## 4.2. Un calcul de dimension

Soit $V$ une représentation de $G$. L'endomorphisme $e$ de $V$ défini par

$$e = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g_V.$$

est un projecteur d'image le sous-espace $V^G$ (cf 1.1.1). En utilisant 4.1.2, on obtient

4.2.1 $$\boxed{\dim(V^G) \quad = \quad \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{Tr}(g_V).}$$

Cette relation sera constament utilisée dans la suite. Montrons d'abord comment, appliquée à une représentation de permutation, elle redonne une formule combinatoire classique (Cauchy, 1845).

Soit $X$ un ensemble sur lequel opère le groupe fini $G$, et $V = \mathsf{M}(X, K)$ la représention de permutation associée (1.4). Soit $g \in G$ et $X^g \subset X$ l'ensemble des points de $X$ fixes sous $g$ ; on voit, en se représentant la matrice de la permutation de $X$ associée à $g$, que

4.2.2 $$\mathrm{Tr}(g_{\mathsf{M}(X,K)}) = \mathrm{Card}(X^g).$$

Par ailleurs, on a déjà constaté que $\mathsf{M}(X, K)^G$ est isomorphe à $\mathsf{M}(X/G, K)$ (1.4.1) ; on trouve donc la formule de Cauchy

4.2.3 $$\mathrm{Card}(X/G).\mathrm{Card}(G) \quad = \quad \sum_{g \in G} \mathrm{Card}(X^g).$$

**Proposition 4.2.4.** *Soient $U$ et $V$ deux représentations de $G$. Alors, on a*

$$\dim(\mathrm{Hom}_G(U,V)) \quad = \quad \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{Tr}(g_U^{-1})\mathrm{Tr}(g_V).$$

En effet, l'espace d'entrelacement $\mathrm{Hom}_G(U,V)$ est le sous-espace de $\mathrm{Hom}(U,V))$ formé des applications linéaires $u : U \to V$ qui sont invariantes pour l'action ${}^g u = g_V \circ u \circ g_U^{-1}$, et d'après 4.1.4, on a

$$\mathrm{Tr}(u \mapsto {}^g u) = \mathrm{Tr}(u \mapsto g_V u g_U^{-1}) = \mathrm{Tr}(g_U^{-1})\mathrm{Tr}(g_V).$$

**Corollaire 4.2.5.** *Soient $V$ une représentation d'un groupe $G$, et $H$ un sous-groupe de $G$. Alors, on a*

$$\dim \mathrm{End}_H(V) \;\leq \frac{|\, G \,|}{|\, H\,|}\dim \mathrm{End}_G(V)$$

D'après ce qui précède, on a

$$\dim(\mathrm{End}_G V)) \quad = \quad \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{Tr}(g_V^{-1})\mathrm{Tr}(g_V)$$

Comme $\mathrm{Tr}(g^{-1}) = \overline{\mathrm{Tr}(g)}$, le nombre $\mathrm{Tr}(g_V^{-1})\mathrm{Tr}(g_V)$ est un réel $\geq 0$. Par suite,

$$\frac{|\, G \,|}{|\, H\,|}\dim(\mathrm{End}_G V)) \;=\; \frac{1}{|\, H\,|}\sum_{g\in G}\mathrm{Tr}(g_V^{-1})\mathrm{Tr}(g_V) \quad\geq\quad \frac{1}{|\, H\,|}\sum_{h\in H}\mathrm{Tr}(h_V^{-1})\mathrm{Tr}(h_V) \;=\; \dim(\mathrm{End}_H V)).\square$$

**4.3. Caractères.**

On appelle *caractère* d'une représentation $V$ de $G$ l'application composée

$$G \quad \xrightarrow{\rho} \quad \mathbf{GL}(V) \quad \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \quad \mathbf{C}.$$

On la note le plus souvent $\chi_V$, alors qu'il serait plus logique de la noter $\chi_\rho$.

Si la représentation est de degré 1 ($\dim V = 1$), alors $\chi_\rho = \rho$ ; c'est le seul cas où $\chi_\rho$ soit un homomorphisme ; d'ailleurs, en général $\chi_\rho(1) = \dim V$.

La trace vérifie la propriété $\mathrm{Tr}(uv) = \mathrm{Tr}(vu)$, ou encore $\mathrm{Tr}(vuv^{-1}) = \mathrm{Tr}(u)$ ; par suite les caractères sont des applications constantes sur les classes de conjugaison d'éléments de $G$ ; on dit souvent que ce sont des applications centrales. Introduisons donc le $\mathbf{C}$-espace vectoriel

$$\mathsf{CF}(G)$$

des applications centrales de $G$ vers $\mathbf{C}$ (en anglais, on parle de *class function*) ; sa dimension est égale au nombre $h$ de classes de conjugaison dans $G$. On munit cet espace du produit hermitien

4.3.1
$$(\phi|\psi) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\phi(g)}\psi(g).$$

**Théorème 4.3.2.** *Soit* $\mathsf{CF}(G)$ *l'espace hermitien des applications centrales sur* $G$*. Désignons par* $\chi_1,\ldots,\chi_h$ *les caractères des représentations irréductibles* $V_1,\ldots,V_h$ (cf. 2.4.2)*. Alors*

*i) Si* $\chi$ *est le caractère de la représentation* $U$*, on a*

$$(\chi|\chi_i) \quad = \quad \dim \mathrm{Hom}_G(U,V_i).$$

*C'est le nombre de fois que* $V_i$ *intervient dans* $U$ (2.3.2)*.*

*ii) Deux représentations qui ont le même caractère sont* $G$*-isomorphes.*

*iii) Les* $\chi_i$ *forment une base orthonormée de* $\mathsf{CF}(G)$*.*

Dans le livre de Serre, cet énoncé est réparti dans les théorèmes 3 à 7, lesquels sont utilisés pour établir les résultats du §2 du présent fascicule. La démarche adoptée ici fait du théorème ci-dessus une simple traduction dans le langage des caractères de ce qui est déjà établi.

Le point *i)* est la reformulation de 4.2.4 à l'aide du produit hermitien ; on peut donc écrire la décomposition canonique de $U$ sous la forme

$$U \quad \simeq \quad \prod_i V_i^{(\chi|\chi_i)}.$$

L'assertion *ii)* est alors évidente. Que l'on ait $(\chi_i|\chi_j) = \delta_{ij}$ découle encore de *i)* ; les $\chi_i$ forment donc une partie libre de $\mathsf{CF}(G)$ ; mais elle a le bon nombre d'éléments, d'après 2.5.5.

Ce résultat donne un procédé très efficace pour démontrer l'existence de certaines représentations : partant d'une application centrale $\varphi \in \mathsf{CF}(G)$, on évalue, pour chaque $i$, les nombres $(\varphi|\chi_i)$ ; si ce sont des entiers 0, alors $\varphi$ est le caractère de la représentation $\prod_i V_i^{(\varphi|\chi_i)}$. La démonstration d'un théorème de Frobenius donne un exemple spectaculaire de cette démarche (voir par ex. [S], p.74, exercice 3) ; sans entrer dans les détails, disons simplement qu'il s'agit de montrer que certaines propriétés d'un sous-groupe $H$ d'un groupe $G$ impliquent l'existence d'une rétraction $f : G \to H$, i.e d'un homomorphisme de groupes tel que $f \circ j = Id_H$ :

$$H \quad \overset{j}{\hookrightarrow} \quad G \quad \xrightarrow{f} \quad H$$

Si $f$ existe, alors pour toute représentation $W$ de $H$, on peut définir sa « restriction à $G$ le long de $f$ » ; c'est l'espace $W$ sur lequel un élément $g \in G$ agit comme $f(g)$. La restriction à $H$ de ce $G$-module (via l'inclusion $j$) est $W$. L'idée très originale de Frobenius est de construire $V$ à partir de $W$ sans connaître d'abord $f$, et d'en déduire l'existence de $f$ dans un deuxième temps ; pour montrer qu'une telle représentation $V$ existe, il montre que son caractère existe, i.e qu'une certaine fonction centrale est effectivement le caractère d'une représentation.

### 4.4. Construction d'idempotents centraux.

Reprenons l'isomorphisme des centres (2.5.5)

$$\mathrm{Cent}.\mathbf{C}[G] \quad \xrightarrow{\sim} \quad \mathbf{C}^h.$$

Le facteur $\mathbf{C}$ d'indice $i$, pour $1 \leq i \leq h$, est déterminé par l'idempotent $e_i \in \mathrm{Cent}.\mathbf{C}[G]$, dont l'image dans le produit est $(0, \ldots, 1, \ldots 0)$ (le 1 à la place $i$). La théorie des caractères permet d'expliciter ces idempotents.

**Théorème 4.4.1** ([S] 2.6 Thm 8) *Soit $V$ une représentation irréductible de $G$. Posons*

$$\pi \quad = \quad \frac{\dim V}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g^{-1}) g.$$

*Cet élément est un idempotent central de $\mathbf{C}[G]$. Pour toute représentation irréductible $V'$, on a $\pi x = x$ pour tout $x \in V'$, si $V'$ est $G$-isomorphe à $V$, et $\pi V' = 0$ sinon. En particulier, pour chaque représentation $U$ le sous-espace $\pi U$ est la composante isotypique, de type $V$, de $U$.*

Comme un caractère est une application centrale, $\pi$ est dans le centre de $\mathbf{C}[G]$ ; son image $\pi_{V'}$ par l'homomorphisme surjectif $\mathbf{C}[G] \to \mathrm{End}(V')$ est dans le centre de cet anneau d'endomorphismes, c'est donc une homothétie, de rapport, disons, $\lambda$ ; prenant la trace, on trouve

$$\lambda \dim V' = \frac{\dim V}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g^{-1}) \chi_{V'}(g) = \dim V . (\chi_V | \chi_{V'}).$$

Ainsi, on a $\pi_{V'} = 1$ ou 0 selon que $V'$ est, ou non, $G$-isomorphe à $V$.

Cette dernière propriété montre aussi que $\pi$ est un idempotent, puisque son image par l'isomorphisme de 2.5.5 en est un.

Remarquons que, lorsque $V$ est la représentation unité (i.e $\mathbf{C}$, avec opération triviale de $G$), on retrouve l'idempotent $e$ de 1.1.1.