Bibliothèque d'exercices

version 3, janvier 2002

recueil réalisé par Arnaud Bodin

Introduction

Afin de faciliter le travail de tous, voici la troisième mouture de ce recueil d'exercices. L'esprit n'a pas changé : simplifier le concoctage des feuilles d'exercices par un simple «copier-coller». Je n'ai pas saisi tous les exercices, je remercie vivement les «gros» contributeurs :

- Franz Ridde ;
- François Gourio ;
- Pierre-Yves Legall ;
- Pascal Ortiz.

Sans oublier tous ceux qui m'ont fourni leurs feuilles d'exercices : Jean-François Barraud, Cécile Drouet, Olivier Gineste, Vincent Guirardel, Jean-Marc Hécart, Jean-Marie Lescure, Sylvain Maillot, Nicolas Marco, Bertrand Monthubert, Nadja Rebinguet, Sandrine Roussel, Marie-Helène Vignal. Qu'ils et elles en soient tous remerciés.

La «bibliothèque» s'agrandie encore : environ 1500 exercices. Les fichiers sources sont disponibles en LaTeX2ε, et récupérables à l'adresse suivante :

`http ://fermat.ups-tlse.fr/~bodin/`

Certains exercices sont corrigés (environ 10%), ils sont signalés par le symbole ©, cependant les corrections ne sont disponibles que pour la version électronique. Vous pouvez contribuer à ce recueil en m'envoyant vos fichiers :

`bodin@picard.ups-tlse.fr` ou `abodin@crm.es`

Donc n'hésitez pas à taper vos feuilles, ce sera fait une fois pour toutes et pour tous !

Arnaud Bodin

Sommaire

Première partie
ALGÈBRE 1

1 Nombres complexes

1.1 Forme cartésienne, forme polaire

Exercice 1© Mettre sous la forme $a+ib$ $(a,b \in \mathbb{R})$ les nombres :

$$\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

Exercice 2 Écrire les nombres complexes suivants sous la forme $a+ib$ $(a,b \in \mathbb{R})$:

$$\frac{5+2i}{1-2i} \quad ; \quad \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \quad ; \quad \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}.$$

Exercice 3 Représenter sous forme trigonométrique les nombres :

$$1+i \quad ; \quad 1+i\sqrt{3} \quad ; \quad \sqrt{3}+i \quad ; \quad \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}.$$

Exercice 4© Établir les égalités suivantes :

1. $(\cos(\pi/7) + i\sin(\pi/7))(\frac{1-i\sqrt{3}}{2})(1+i) = \sqrt{2}(\cos(5\pi/84) + i\sin(5\pi/84))$,
2. $(1-i)(\cos(\pi/5) + i\sin(\pi/5))(\sqrt{3}-i) = 2\sqrt{2}(\cos(13\pi/60) + i\sin(13\pi/60))$,
3. $\frac{\sqrt{2}(\cos(\pi/12)+i\sin(\pi/12))}{1+i} = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$.

Exercice 5© Calculer le module et l'argument de $u = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $v = 1-i$. En déduire le module et l'argument de $w = \frac{u}{v}$.

Exercice 6 Écrire sous la forme partie réelle-partie imaginaire, puis sous la forme module-argument le nombre complexe :

$$\left(\frac{1+i-\sqrt{3}(1-i)}{1+i}\right)^2.$$

Exercice 7© Déterminer le module et l'argument des nombres complexes :

$$e^{e^{i\alpha}} \quad \text{et} \quad e^{i\theta} + e^{2i\theta}.$$

Exercice 8© Déterminer le module et l'argument de $\frac{1+i}{1-i}$. Calculer $(\frac{1+i}{1-i})^{32}$.

Exercice 9 Calculer $(1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5$ et $(1+i\sqrt{3})^5 - (1-i\sqrt{3})^5$.

Exercice 10 Calculer le module et l'argument de $z = \frac{1}{1+i\tan\alpha}$.

Exercice 11 Calculer les puissances n-ièmes des nombres complexes :

$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} \quad ; \quad z_2 = 1+j \quad ; \quad z_3 = \frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}.$$

Exercice 12 Comment choisir l'entier naturel n pour que $(\sqrt{3}+i)^n$ soit un réel ? un imaginaire ?

Exercice 13© Soit z un nombre complexe de module ρ, d'argument θ, et soit $\overline{z}$ son conjugué. Calculer $(z+\overline{z})(z^2+\overline{z}^2)\dots(z^n+\overline{z}^n)$ en fonction de ρ et θ.

Exercice 14 (partiel novembre 88)©
Soient α et β deux nombres réels. Mettre le nombre complexe $z = e^{i\alpha} + e^{i\beta}$ sous forme trigonométrique $z = \rho e^{i\gamma}$ (indication : poser $u = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $v = \frac{\alpha-\beta}{2}$).
En déduire la valeur de

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p \cos[p\alpha + (n-p)\beta].$$

Exercice 15 Mettre sous forme trigonométrique $1+e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi,\pi[$. Donner une interprétation géométrique.

Exercice 16 Montrer que si $|z| \leqslant k < 1$ alors $1-k \leqslant |1+z| \leqslant 1+k$. Faire un dessin et montrer qu'il peut y avoir égalité.

Exercice 17 Montrer algébriquement et géométriquement que si $|z| = 1$ alors $|1+z| \geqslant 1$ ou $|1+z^2| \geqslant 1$.

Exercice 18 Résoudre l'équation $\exp(z) = \sqrt{3} + 3i$.

1.2 Racines carrées, équation du second degré

Exercice 19© Calculer les racines carrées de $1,\ i,\ 3+4i,\ 8-6i$, et $7+24i$.

Exercice 20©

1. Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
2. Calculer les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 21© Montrer que les solutions de $az^2+bz+c=0$ avec a, b, c réels, sont conjuguées.

Exercice 22© Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2+z+1=0 \quad ; \quad z^2-(1+2i)z+i-1=0 \quad ; \quad z^2-\sqrt{3}z-i=0 \quad ;$$
$$z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0\ ;\ z^2-(3+4i)z-1+5i=0\ ;\ 4z^2-2z+1=0\ ;$$
$$z^4+10z^2+169=0 \quad ; \quad z^4+2z^2+4=0.$$

Exercice 23 Trouver les racines complexes de l'équation suivante :

$$x^4-30x^2+289=0.$$

Exercice 24 Pour $z \in \mathbb{C}\setminus\{2i\}$, on pose

$$f(z) = \frac{2z-i}{z-2i}.$$

1. Résoudre l'équation $z^2 = i,\ z \in \mathbb{C}$.
2. Résoudre l'équation $f(z) = z,\ z \in \mathbb{C}\setminus\{2i\}$.

1.3 Racine n-ième

Exercice 25 © Calculer la somme $S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$.

Exercice 26 ©

1. Résoudre $z^3 = 1$ et montrer que les racines s'écrivent 1, j, j^2. Calculer $1 + j + j^2$ et en déduire les racines de $1 + z + z^2 = 0$.
2. Résoudre $z^n = 1$ et montrer que les racines s'écrivent $1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{n-1}$. En déduire les racines de $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = 0$. Calculer, pour $p \in \mathbb{N}$, $1 + \varepsilon^p + \varepsilon^{2p} + \cdots + \varepsilon^{(n-1)p}$.

Exercice 27

1. Calculer les racines n-ièmes de $-i$ et de $1 + i$.
2. Résoudre $z^2 - z + 1 - i = 0$.
3. En déduire les racines de $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$.

Exercice 28 Soit ε une racine n-ième de l'unité ; calculer

$$S = 1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \cdots + n\varepsilon^{n-1}.$$

Exercice 29 Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(z + 1)^n = (z - 1)^n$.

Exercice 30 Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^n = \overline{z}$ où $n \geqslant 1$.

Exercice 31 Résoudre les équations suivantes :

$$z^6 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} \quad ; \quad z^4 = \frac{1 - i}{1 + i\sqrt{3}}.$$

Exercice 32 Résoudre $z^6 + 27 = 0$. ($z \in \mathbb{C}$)

Exercice 33 (partiel novembre 91) ©

1. Soient z_1, z_2, z_3 trois nombres complexes distincts ayant le même cube.
   Exprimer z_2 et z_3 en fonction de z_1.
2. Donner, sous forme polaire, les solutions dans $\mathbb{C}$ de :

$$z^6 + (7 - i)z^3 - 8 - 8i = 0.$$

(Indication : poser $Z = z^3$; calculer $(9 + i)^2$)

Exercice 34 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $27(z - 1)^6 + (z + 1)^6 = 0$.

Exercice 35 Déterminer les racines quatrièmes de $-7 - 24i$.

1.4 Géométrie

Exercice 36 © Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

1. $\left|\dfrac{z - 3}{z - 5}\right| = 1$,
2. $\left|\dfrac{z - 3}{z - 5}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 37 Montrer que pour $u, v \in \mathbb{C}$, on a $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$.

Exercice 38 Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{Arg}(z) - \mathrm{Arg}(z') = \frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que $z\overline{z'} + \overline{z}z' = 0$.
2. Montrer que $|z+z'|^2 = |z-z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2$.

Exercice 39
1. Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe, d'affixe z tels que : $\overline{z}(z-1) = z^2(\overline{z}-1)$.
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe, d'affixe z tels que les images de 1, z, $1+z^2$ soient alignées.

Exercice 40 Soit $s = (1-z)(1-iz)$.

1. Déterminer l'ensemble des images des nombres complexes z tel que s soit réel.
2. Déterminer l'ensemble des images des nombres complexes z tel que s soit imaginaire pur.

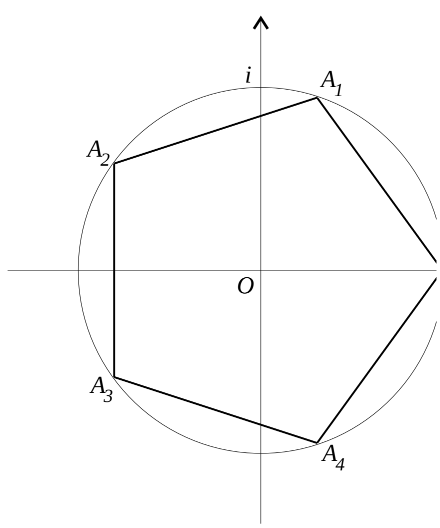
Exercice 41 Déterminer les nombres complexes z tels que le triangle ayant pour sommets les points d'affixes z, z^2, z^3 soit rectangle au point d'affixe z.

Exercice 42 Déterminer les nombres complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que les points d'affixes $z, \frac{1}{z}$ et $(1-z)$ soient sur un même cercle de centre O.

Exercice 43 Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système :

$$|z-1| \leqslant 1, |z+1| \leqslant 1.$$

Exercice 44 (Comment construire un pentagone régulier ?) ©
Soit $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ un pentagone régulier. On note O son centre et on choisit un repère orthonorm'e $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ avec $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA_0}$, qui nous permet d'identifier le plan avec l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.



1. Donner les affixes $\omega_0, \dots, \omega_4$ des points $A_0, \dots, A_4$. Montrer que $\omega_k = {\omega_1}^k$ pour $k \in \{0,1,2,3,4\}$. Montrer que $1 + \omega_1 + \omega_1^2 + \omega_1^3 + \omega_1^4 = 0$.
2. En déduire que $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est l'une des solutions de l'équation $4z^2 + 2z - 1 = 0$. En déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

3. On considère le point B d'affixe -1. Calculer la longueur BA_2 en fonction de $\sin\frac{\pi}{10}$ puis de $\sqrt{5}$ (on remarquera que $\sin\frac{\pi}{10} = \cos\frac{2\pi}{5}$).
4. On considère le point I d'affixe $\frac{i}{2}$, le cercle $\mathcal{C}$ de centre I de rayon $\frac{1}{2}$ et enfin le point J d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la demi-droite $[BI)$. Calculer la longueur BI puis la longueur BJ.
5. **Application :** Dessiner un pentagone régulier à la règle et au compas. Expliquer.

1.5 Divers

Exercice 45 1. Calculer $\cos 5\theta$, $\cos 8\theta$, $\sin 6\theta$, $\sin 9\theta$, en fonction des lignes trigonométriques de l'angle θ.
2. Calculer $\sin^3\theta$, $\sin^4\theta$, $\cos^5\theta$, $\cos^6\theta$, à l'aide des lignes trigonométriques des multiples entiers de θ.

Exercice 46 Exprimer $(\cos 5x)(\sin 3x)$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.

Exercice 47 Montrer que tout nombre complexe z non réel de module 1 peut se mettre sous la forme $\frac{1+ir}{1-ir}$, où $r \in \mathbb{R}$.

Exercice 48 Soit u, v des nombres complexes non réels tels que $|u| = |v| = 1$ et $uv \neq -1$. Montrer que $\frac{u+v}{1+uv}$ est réel.

Exercice 49 Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(kx).$$

Exercice 50 (Entiers de Gauss) ©
Soit $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib\ ;\ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que si α et β sont dans $\mathbb{Z}[i]$ alors $\alpha+\beta$ et $\alpha\beta$ le sont aussi.
2. Trouver les élements inversibles de $\mathbb{Z}[i]$, c'est-à-dire les éléments $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ tels qu'il existe $\beta \in \mathbb{Z}[i]$ avec $\alpha\beta = 1$.
3. Vérifier que quel que soit $\omega \in \mathbb{C}$ il existe $z \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $|\omega - z| < 1$.
4. Montrer qu'il existe sur $\mathbb{Z}[i]$ une division euclidienne, c'est-à-dire que, quels que soient α et β dans $\mathbb{Z}[i]$ il existe q et r dans $\mathbb{Z}[i]$ vérifiant :
$$\alpha = \beta q + r \qquad \text{avec} \qquad |r| < |\beta|.$$
(Indication : on pourra considérer le complexe $\frac{\alpha}{\beta}$)

Exercice 51 Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}$ $\dfrac{|\Re(z)| + |\Im(z)|}{\sqrt{2}} \leqslant |z| \leqslant |\Re(z)| + |\Im(z)|$. Étudier les cas d'égalité.

Exercice 52 Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $ad - bc = 1$ et $c \neq 0$. Montrer que si $z \neq -\dfrac{d}{c}$ alors $\Im(\dfrac{az+b}{cz+d}) = \dfrac{\Im(z)}{|(cz+d)|^2}$.

Exercice 53 Que dire de trois complexes a, b, c non nuls tels que $|a+b+c| = |a| + |b| + |c|$.

Exercice 54

1. Étudier la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $z_0 = 4$, $z_{n+1} = f(z_n)$ où f est l'application de $\mathbb{C}$ sur lui-même définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = i + \frac{1}{4}(1 - i\sqrt{3})z.$$

Indication : on commencera par rechercher les coordonnées cartésiennes de l'unique point α tel que $f(\alpha) = \alpha$, puis on s'intéressera à la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = z_n - \alpha.$$

2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, l_n = |z_{n+1} - z_n|$. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} l_k$$

et interpréter géométriquement.

2 Logique, ensembles, raisonnements

2.1 Logique

Exercice 55 Soient R et S des relations. Donner la négation de $R \Rightarrow S$.

Exercice 56© Démontrer que $(1 = 2) \Rightarrow (2 = 3)$.

Exercice 57 Soient les quatre assertions suivantes :

$$(a)\ \exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0 \quad ; \quad (b)\ \forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0\ ;$$

$$(c)\ \forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0 \quad ; \quad (d)\ \exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x.$$

1. Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leur négation.

Exercice 58© Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nier, de la manière la plus précise possible, les énoncés qui suivent :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leqslant 1$.
2. L'application f est croissante.
3. L'application f est croissante et positive.
4. Il existe $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) \leqslant 0$.

On ne demande pas de démontrer quoi que ce soit, juste d'écrire le contraire d'un énoncé.

Exercice 59 Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $\Leftrightarrow$, $\Leftarrow$, $\Rightarrow$.

1. $x \in \mathbb{R}$ $x^2 = 4$ ...... $x = 2$;
2. $z \in \mathbb{C}$ $z = \overline{z}$ ...... $z \in \mathbb{R}$;
3. $x \in \mathbb{R}$ $x = \pi$ ...... $e^{2ix} = 1$.

Exercice 60 © Dans $\mathbb{R}^2$, on définit les ensembles $F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y \leqslant 0\}$ et $F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \geqslant 1,\ x \geqslant 0\}$. Évaluer les propositions suivantes :

1. $\forall \varepsilon \in]0,+\infty[\quad \exists M_1 \in F_1\, \exists M_2 \in F_2 \quad / \qquad ||\overrightarrow{M_1M_2}|| < \varepsilon$
2. $\exists M_1 \in F_1\, \exists M_2 \in F_2 \quad / \quad \forall \varepsilon \in]0,+\infty[\qquad ||\overrightarrow{M_1M_2}|| < \varepsilon$
3. $\exists \varepsilon \in]0,+\infty[\quad / \quad \forall M_1 \in F_1\, \forall M_2 \in F_2 \qquad ||\overrightarrow{M_1M_2}|| < \varepsilon$
4. $\forall M_1 \in F_1\, \forall M_2 \in F_2 \quad \exists \varepsilon \in]0,+\infty[\quad / \qquad ||\overrightarrow{M_1M_2}|| < \varepsilon$

Quand elles sont fausses, donner leur négation.

Exercice 61 Nier la proposition : “tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans”.

Exercice 62 Écrire la négation des assertions suivantes où P, Q, R, S sont des propositions.

1. $P \Rightarrow Q$,
2. P et non Q,
3. P et (Q et R),
4. P ou (Q et R),
5. (P et Q) $\Rightarrow$ ($R \Rightarrow S$).

Exercice 63 © Nier les assertions suivantes :

1. tout triangle rectangle possède un angle droit ;
2. dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs ;
3. pour tout entier x, il existe un entier y tel que, pour tout entier z, la relation $z < x$ implique le relation $z < x + 1$;
4. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha > 0 \ / \ |x - 7/5| < \alpha \Rightarrow |5x - 7| < \varepsilon$.

Exercice 64 (Le missionnaire et les cannibales)
Les cannibales d’une tribu se préparent à manger un missionnaire. Désirant lui prouver une dernière fois leur respect de la dignité et de la liberté humaine, les cannibales proposent au missionnaire de décider lui-même de son sort en faisant une courte déclaration : si celle-ci est vraie, le missionnaire sera rôti, et il sera bouilli dans le cas contraire. Que doit dire le missionnaire pour sauver sa vie ? (d’après Cervantès)

Exercice 65 La proposition $\big(P \wedge Q \Rrightarrow (\neg P) \vee Q\big)$ est-elle vraie ?

Exercice 66 On suppose que la proposition P est vraie ainsi que les propositions suivantes :

1. $(\neg Q) \wedge P \Rrightarrow \neg S$.
2. $S \Rrightarrow (\neg P) \vee Q$.
3. $P \Rrightarrow R \vee S$.
4. $S \wedge Q \Rrightarrow \neg P$.
5. $R \wedge \neg(S \vee Q) \Rrightarrow T$.
6. $R \Rrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$.

La proposition T est-elle vraie ?

Exercice 67 Ecrire la négation des phrases suivantes :

1. $(\forall x)(\exists n)/(x \leqslant n)$.
2. $(\exists M)/(\forall n)(|u_n| \leqslant M)$.
3. $(\forall x)(\forall y)(xy = yx)$.
4. $(\forall x)(\exists y)/(yxy^{-1} = x)$.
5. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})/(\forall n \geqslant N)(|u_n| < \varepsilon)$.
6. $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)/(\forall f \in \mathcal{F})(\forall y \in \mathbb{R})(|x - y| < \alpha \Rrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$.

Exercice 68 Comparer les différentes phrases (sont-elles équivalentes, contraires, quelles sont celles qui impliquent les autres...)

1. $(\forall x)(\exists y)/(x \leqslant y)$.
2. $(\forall x)(\forall y)(x \leqslant y)$.
3. $(\exists x)(\exists y)/(x \leqslant y)$.
4. $(\exists x)/(\forall y)(x \leqslant y)$.
5. $(\exists x)/(\forall y)(y < x)$.
6. $(\exists x)(\exists y)/(y < x)$.
7. $(\forall x)(\exists y)/(x = y)$.

Exercice 69 Si $P(x)$ est une proposition dépendant de $x \in X$, on note $\overline{P} = \{x \in X / P(x) \text{ est vraie}\}$. Exprimer en fonction de $\overline{P}$ et $\overline{Q}$ les ensembles $\overline{\neg P}, \overline{P \wedge Q}, \overline{P \vee Q}, \overline{P \Rrightarrow Q}, \overline{P \Leftrightarrow Q}$.

Exercice 70 Montrer que $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $(n \geqslant N \Rrightarrow 2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2} < 2 + \varepsilon)$.

2.2 Ensembles

Exercice 71 Montrer que $\emptyset \subset X$, pour tout ensemble X.

Exercice 72 Montrer par contraposition les assertions suivantes, E étant un ensemble :

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$,
2. $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$.

Exercice 73© Soit A, B deux ensembles, montrer $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$ et $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$.

Exercice 74© Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$. Démontrer que :
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$,
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
$\forall A \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

Exercice 75 Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E telles que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Montrer que $B = C$.

Exercice 76 Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E.
Montrer que $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

Exercice 77 Donner les positions relatives de $A, B, C \subset E$ si $A \cup B = B \cap C$.

Exercice 78 Est-il vrai que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$? Et $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$?

Exercice 79 Montrer que $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \complement B = A \cap \complement C$.

Exercice 80 Donner la liste des éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1,2\}))$.

Exercice 81 Soient $A, B \subset E$. Résoudre les équations à l'inconnue $X \subset E$

1. $A \cup X = B$.
2. $A \cap X = B$.

Exercice 82 Soient E, F, G trois ensembles. Montrer que $(E \times G) \cup (F \times G) = (E \cup F) \times G$.

Exercice 83 Soient E, F, G, H quatre ensembles. Comparer les ensembles $(E \times F) \cap (G \times H)$ et $(E \cap G) \times (F \cap H)$.

Exercice 84 Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\{1,2,3\}$. Pour $i = 1,2,3$ on pose $A_i = \{f \in E / f(0) = i\}$. Montrer que les A_i forment une partition de E.

2.3 Absurde et contraposée

Exercice 85 Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 86 Soit X un ensemble et f une application de X dans l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X. On note A l'ensemble des $x \in X$ vérifiant $x \notin f(x)$. Démontrer qu'il n'existe aucun $x \in X$ tel que $A = f(x)$.

Exercice 87© Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de l'ensemble $\mathbb{N}$ dans lui-même. On définit une application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ en posant $f(n) = f_n(n) + 1$. Démontrer qu'il n'existe aucun $p \in \mathbb{N}$ tel que $f = f_p$.

Exercice 88©

1. Soit $p_1, p_2, \ldots, p_r$ r nombres premiers. Montrer que l'entier $N = p_1 p_2 \ldots p_r + 1$ n'est divisible par aucun des entiers p_i.
2. Utiliser la question précédente pour montrer par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers.

2.4 Récurrence

Exercice 89 Démontrer, en raisonnant par récurrence, que $10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$ est divisible par 111 quel que soit $n \in \mathbb{N}$. (Indication : $1000 = 9 \times 111 + 1$).

Exercice 90 Montrer :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 91 En quoi le raisonnement suivant est-il faux ?
Soit $\mathcal{P}(n)$: n crayons de couleurs sont tous de la même couleur.

– $\mathcal{P}(1)$ est vraie car un crayon de couleur est de la même couleur que lui-même.
– Supposons $\mathcal{P}(n)$. Soit $n+1$ crayons. On en retire 1. Les n crayons restants sont de la même couleur par hypothèse de récurrence.
Reposons ce crayon et retirons-en un autre ; les n nouveaux crayons sont à nouveau de la même couleur. Le premier crayon retiré était donc bien de la même couleur que les n autres. La proposition est donc vraie au rang $n+1$.
– On a donc démontré que tous les crayons en nombre infini dénombrable sont de la même couleur.

Exercice 92© Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 4$ et $x_{n+1} = \dfrac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n > 3$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$.
4. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 93©

1. Dans le plan, on considère trois droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ formant un "vrai" triangle : elles ne sont pas concourantes, et il n'y en a pas deux parallèles. Donner le nombre R_3 de régions (zones blanches) découpées par ces trois droites.
2. On considère quatre droites $\Delta_1, \dots, \Delta_4$, telles qu'il n'en existe pas trois concourantes, ni deux parallèles. Donner le nombre R_4 de régions découpées par ces quatre droites.
3. On considère n droites $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, telles qu'il n'en existe pas trois concourantes, ni deux parallèles. Soit R_n le nombre de régions délimitées par $\Delta_1 \dots \Delta_n$, et R_{n-1} le nombre de régions délimitées par $\Delta_1 \dots \Delta_{n-1}$. Montrer que $R_n = R_{n-1} + n$.
4. Calculer par récurrence le nombre de régions délimitées par n droites en position générale, c'est-à-dire telles qu'il n'en existe pas trois concourantes ni deux parallèles.

Exercice 94 Soit X un ensemble. Pour $f \in \mathcal{F}(X, X)$, on définit $f^0 = id$ et par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$ $f^{n+1} = f^n \circ f$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^{n+1} = f \circ f^n$.
2. Montrer que si f est bijective alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $(f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$.

Exercice 95 Montrer que

$$\forall n \geqslant 2, n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

2.5 Divers

Exercice 96 Quels sont les entiers n tels que $4^n \leqslant n!$?

Exercice 97 Montrer que :

$$\forall n \geqslant 2, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \notin \mathbb{N}.$$

Indication : montrer que

$$\forall n \geqslant 2, \exists (p_n, q_n) \in (\mathbb{N}^*)^2, u_n = \frac{2p_n + 1}{2q_n}.$$

Exercice 98 Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une application vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n+1) > f(f(n)).$$

Montrer que $f = Id_{\mathbb{N}^*}$. *Indications* : que dire de $k \in \mathbb{N}$ tel que $f(k) = \inf\{f(n)|n \in \mathbb{N}\}$? En déduire que $\forall n > 0, f(n) > f(0)$. Montrer ensuite que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $\forall m > n, f(m) > f(n)$ et $\forall m \leqslant n, f(m) \geqslant m$ (on pourra introduire k tel que $f(k)$ soit le plus petit entier de la forme $f(m)$ avec $m > n$). En déduire que f est strictement croissante et qu'il n'existe qu'une seule solution au problème. Laquelle ?

Exercice 99 Pour $p \in \{1, 2, 3\}$ on note $S_p = \sum_{k=0}^{n} k^p$.

1. A l'aide du changement d'indice $i = n - k$ dans S_1, calculer S_1.
2. Faire de même avec S_2. Que se passe-t-il ?
3. Faire de même avec S_3 pour l'exprimer en fonction de n et S_2.
4. En utilisant l'exercice 90, calculer S_3.

Exercice 100 Pour calculer des sommes portant sur deux indices, on a intérêt à représenter la zone du plan couverte par ces indices et à sommer en lignes, colonnes ou diagonales... Calculer :

1. $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij$.
2. $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} i(j-1)$.
3. $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (i-1)j$.
4. $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (n-i)(n-j)$.
5. $\sum_{1 \leqslant p,q \leqslant n} (p+q)^2$ (on posera $k = p + q$).

3 Injection, surjection, bijection

3.1 Application

Exercice 101 Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

3.2 Injection, surjection

Exercice 102 Donner des exemples d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (puis de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$) injective et non surjective, puis surjective et non injective.

Exercice 103 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - x$.
f est-elle injective ? surjective ? Déterminer $f^{-1}([-1, 1])$ et $f(\mathbb{R}_+)$.

Exercice 104 Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto 2n \quad ; \quad f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto -n$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 \quad ; \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$$

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^2.$$

Exercice 105 Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{cases}$
2. $g : \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto n+1 \end{cases}$
3. $h : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x+y, x-y) \end{cases}$
4. $k : \begin{cases} \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x+1}{x-1} \end{cases}$

Exercice 106 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x/(1+x^2)$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$.
3. Montrer que la restriction $g : [-1,1] \to [-1,1]$ $g(x) = f(x)$ est une bijection.
4. Retrouver ce résultat en étudiant les variations de f.

Exercice 107 L'application $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z + 1/z$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?
Donner l'image par f du cercle de centre 0 et de rayon 1.
Donner l'image réciproque par f de la droite $i\mathbb{R}$.

Exercice 108 © On considère quatre ensembles A, B, C et D et des applications $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$. Montrer que :

$$g \circ f \text{ injective } \Rightarrow f \text{ injective},$$

$$g \circ f \text{ surjective } \Rightarrow g \text{ surjective}.$$

Montrer que :

$$\big(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives }\big) \Leftrightarrow \big(f, g \text{ et } h \text{ sont bijectives}\big).$$

Exercice 109 Soit $f : X \to Y$. Montrer que

1. $\forall B \subset Y \; f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$.
2. f est surjective ssi $\forall B \subset Y \; f(f^{-1}(B)) = B$.
3. f est injective ssi $\forall A \subset X \; f^{-1}(f(A)) = A$.
4. f est bijective ssi $\forall A \subset X \; f(\complement A) = \complement f(A)$.

Exercice 110 Soit $f : X \to Y$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

i. f est injective.
ii. $\forall A, B \subset X \; f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
iii. $\forall A, B \subset X \; A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

Exercice 111 Soit $f : X \to Y$.On note $\hat{f} : \begin{cases} \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y) \\ A \mapsto f(A) \end{cases}$ et $\tilde{f} : \begin{cases} \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X) \\ B \mapsto f^{-1}(B) \end{cases}$.

Montrer que :

1. f est injective ssi $\hat{f}$ est injective.
2. f est surjective ssi $\tilde{f}$ est injective.

Exercice 112 (Exponentielle complexe) © Si $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $e^z = e^x \times e^{iy}$.

1. Déterminer le module et l'argument de e^z.
2. Calculer $e^{z+z'}, e^{\overline{z}}, e^{-z}, (e^z)^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.
3. L'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto e^z$, est-elle injective ?, surjective ?

3.3 Bijection

Exercice 113 Soient $a,\ b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, et $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f_{a,b}(x) = ax + b$. Démontrer que $f_{a,b}$ est une permutation et déterminer sa réciproque.

Exercice 114 Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 1 - x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrer que $f \circ f = id$.

Exercice 115 © Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\ t \mapsto e^{it}$. Montrer que f est une bijection sur un ensemble à préciser.

Exercice 116 On appelle *demi-plan de Poincaré* l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres complexes z tels que $\operatorname{Im} z > 0$, et *disque unité* l'ensemble $\mathcal{D}$ des nombres complexes z tels que $|z| < 1$. Démontrer que $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ est une bijection de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{D}$.

Exercice 117 © Soit $f : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ telle que $f(x) = x^2 - 1$. f est-elle bijective ?

Exercice 118 Soient $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$. Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives alors f, g et h le sont également.

Exercice 119 Soient $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A$. Montrer que si $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ sont injectives et $f \circ h \circ g$ surjective alors f, g et h sont bijectives.

Exercice 120 Soit X un ensemble. Si $A \subset X$ on note χ_A la fonction caractéristique associée. Montrer que $\Phi : \begin{cases} \mathcal{P}(X) \to \mathcal{F}(X, \{0,1\}) \\ A \mapsto \chi_A \end{cases}$ est bijective.

Exercice 121 Soit E un ensemble non vide. On se donne deux parties A et B de E et on définit l'application $f : \wp(E) \to \wp(E)$, $X \mapsto (A \cap X) \cup (B \cap X^c)$. Discuter et résoudre l'équation $f(X) = \emptyset$. En déduire une condition nécessaire pour que f soit bijective.
On suppose maintenant $B = A^c$. Exprimer f à l'aide de la différence symétrique Δ. Montrer que f est bijective, préciser f^{-1}. f est-elle involutive (i.e. $f^2 = id$) ? Quelle propriété en déduit-on ?

4 Relation d'équivalence, relation d'ordre

4.1 Relation d'équivalence

Exercice 122
1. Soit $E = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, on définit $\mathcal{R}$ par : $(a,b)\mathcal{R}(a',b') \Leftrightarrow a+b' = b+a'$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Identifier $E/\mathcal{R}$.
2. Mêmes questions avec $E = \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ et $(p,q)\mathcal{R}(p',q') \Leftrightarrow pq' = p'q$.

Exercice 123 Dans $\mathbb{R}^2$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow y = y'.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Exercice 124© Dans $\mathbb{C}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow |z| = |z'|.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $z\in\mathbb{C}$.

Exercice 125© Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E, symétrique et transitive. Que penser du raisonnement suivant ?

"$x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ car $\mathcal{R}$ est symétrique,
or $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x) \Rightarrow x\mathcal{R}x$ car $\mathcal{R}$ est transitive,
donc $\mathcal{R}$ est réflexive."

Exercice 126 Étudier la relation $\Re$ définie sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) par :

$$f\Re g \Longleftrightarrow \exists A>0, \forall x\in R, |x|>A \Rightarrow f(x) = g(x).$$

Exercice 127 Montrer que la relation $\Re$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\Re y \Longleftrightarrow xe^y = ye^x$$

est une relation d'équivalence. Préciser, pour x fixé dans $\mathbb{R}$, le nombre d'éléments de la classe de x modulo $\Re$.

4.2 Relation d'ordre

Exercice 128 La relation "divise" est-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$? sur $\mathbb{Z}$? Si oui, est-ce une relation d'ordre total ?

Exercice 129 Étudier les propriétés des relations suivantes. Dans le cas d'une relation d'équivalence, préciser les classes ; dans le cas d'une relation d'ordre, préciser si elle est totale, si l'ensemble admet un plus petit ou plus grand élément.

1. Dans $\mathcal{P}(E)$: $A\mathcal{R}_1B \Leftrightarrow A\subset B$; $A\mathcal{R}_2B \Leftrightarrow A\cap B = \emptyset$.
2. Dans $\mathbb{Z}$: $a\mathcal{R}_3b \Leftrightarrow a$ et b ont la même parité ; $a\mathcal{R}_4b \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{N}\ a-b = 3n$; $a\mathcal{R}_5b \Leftrightarrow a-b$ est divisible par 3.

Exercice 130 Soient $(X, \leqslant)$ et $(Y, \leqslant)$ deux ensembles ordonnés (on note abusivement les deux ordres de la même façon). On définit sur $X \times Y$ la relation $(x, y) \leqslant (x', y')$ ssi $(x < x')$ ou $(x = x'$ et $y \leqslant y')$. Montrer que c'est un ordre et qu'il est total ssi X et Y sont totalement ordonnés.

Exercice 131 Un ensemble est dit bien ordonné si toute partie non vide admet un plus petit élément.

1. Donner un exemple d'ensemble bien ordonné et un exemple d'ensemble qui ne l'est pas.
2. Montrer que bien ordonné implique totalement ordonné.
3. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 132 Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. On définit sur $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ la relation $\mathcal{R}$ par $X\mathcal{R}Y$ ssi $(X = Y$ ou $\forall x \in X\ \forall y \in Y\ x \leqslant y)$. Vérifier que c'est une relation d'ordre.

Exercice 133 Montrer que $a * b = \dfrac{a+b}{1+ab}$ est une l.c.i sur $]-1, 1[$ et déterminer ses propriétés.

5 Dénombrement

5.1 Binôme de Newton et C_n^p

Exercice 134 Démontrer que si p est un nombre premier, p divise C_p^k pour $1 \leqslant k \leqslant p-1$.

Exercice 135 En utilisant la fonction $x \mapsto (1+x)^n$, calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} kC_n^k \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k.$$

Exercice 136 Démontrer que $C_n^k C_{n-k}^{p-k} = C_p^k C_n^p$ (pour $0 \leqslant k \leqslant p \leqslant n$). En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k C_{n-k}^{p-k} = 2^p C_n^p.$$

Exercice 137© En utilisant la formule du binôme, démontrer que :

1. $2^n + 1$ est divisible par 3 si et seulement si n est impair ;
2. $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$ est divisible par 7.

Exercice 138 Démontrer que $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$ pour $1 \leqslant p \leqslant n-1$.

Exercice 139 Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. En utilisant la formule du binôme, démontrer que $m^{2p+1} + n^{2p+1}$ est divisible par $m+n$.

Exercice 140© En utilisant la formule du binôme montrer :

$$(a)\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0 \qquad (b)\ \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}.$$

Exercice 141© Démontrer les formules suivantes :

1. $C_n^m = C_m^{n-m}$ (on pourra utiliser le fait que $\mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E) A \mapsto A^c$ est une bijection.)

2. $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$,
3. $C_n^m = C_{n-2}^m + 2C_{n-2}^{m-1} + C_{n-2}^{m-2}$.

Exercice 142 Soient E un ensemble non vide et X, Y une partition de E.

1. Montrer que l'application suivante est une bijection :
$$\mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y)$$
$$A \mapsto (A \cap X, A \cap Y)$$
2. Montrer que pour $p, q, r \in \mathbb{N}$ tel que $r \leqslant p+q$ on a :
$$\sum_{i+j=r} C_p^i C_q^j = C_{p+q}^r.$$
3. En déduire que :
$$\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n.$$

Exercice 143 Soit E un ensemble, $a \in E$ et $f : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E) \\ X \mapsto X \cup \{a\} \text{ si } a \notin X \\ X \mapsto X - \{a\} \text{ si } a \in X \end{cases}$

1. Montrer que f est une bijection.
2. On suppose désormais que E est fini et $\operatorname{Card}(E) = n$. On pose $\mathcal{P}_0(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal pair et $\mathcal{P}_1(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal impair. Montrer que $\operatorname{Card}(\mathcal{P}_0(E)) = \operatorname{Card}(\mathcal{P}_1(E))$.
3. Calculer ces cardinaux et en déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$.

Exercice 144 En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$. En déduire la valeur de $\sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} C_n^{2k}$.

Exercice 145 Soient $0 \leqslant p \leqslant n$.

1. Montrer par récurrence sur n que $\sum_{k=p}^{n} C_k^p = C_{n+1}^{p+1}$.
2. Écrire ces égalités pour $p = 2$ et $p = 3$.
3. En déduire les sommes
$$S_2' = 1.2 + 2.3 + \ldots + (n-1).n \qquad S_2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$$
$$S_3' = 1^2.2 + 2^2.3 + \ldots + (n-1)^2.n \qquad S_3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$$

5.2 Cardinal

Exercice 146 Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable en utilisant l'application :

$$\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \begin{cases} n \mapsto 2n-1 & \text{si } n > 0\,; \\ n \mapsto -2n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 147 © Pour A, B deux ensembles de E on note $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Pour E un ensemble fini, montrer :

$$\operatorname{Card} A\Delta B = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - 2\operatorname{Card} A \cap B.$$

Exercice 148 © Soit E un ensemble à n éléments, et $A \subset E$ un sous-ensemble à p éléments. Quel est le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A ?

Exercice 149 Déterminer le nombre de mots distincts que l'on peut former avec 6 voyelles et 20 consonnes, chaque mot étant composé de 3 consonnes et 2 voyelles, en excluant les mots qui renferment 3 consonnes consécutives.

Exercice 150 Soient A, A', B, B' quatre ensembles tels que :

$$\operatorname{Card}(A) = \operatorname{Card}(A') = a \text{ et } \operatorname{Card}(B) = \operatorname{Card}(B') = b.$$

1. Déterminer le nombre de bijections de $A \times B$ sur $A' \times B'$.
2. Supposons maintenant que $\{A, B\},\ \{A', B'\}$ forment deux partitions de E, un ensemble. Déterminer le nombre de bijections $f : E \longrightarrow E$ telles que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.

Exercice 151 Soient A et B deux sous ensembles finis d'un ensemble E.

1. Montrer que : $\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card}(A) + \operatorname{Card}(B) - \operatorname{Card}(A \cap B)$.
2. Montrer par récurrence que si $(F_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille de sous-ensembles finis de E alors :

$$\operatorname{Card}\,(\bigcup_{i=1}^{n} F_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Card}\,(F_i)$$

avec égalité si les F_i sont deux à deux disjoints.

Exercice 152 Soient $1 \leqslant k \leqslant n$. Déterminer le nombre de k-uplets $(i_1, \ldots, i_k)$ tels que $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$.

5.3 Divers

Exercice 153

1. (*principe des bergers*) Soient E, F deux ensembles avec F ensemble fini, et f une surjection de E sur F vérifiant :

$$\forall y \in F,\ \operatorname{Card}\,(f^{-1}(y)) = p$$

Montrer que E est alors un ensemble fini et $\operatorname{Card}(E) = p\operatorname{Card}(F)$.

2. (*principe des tiroirs*) Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, p élements distincts d'un ensemble E, répartis entre une famille de n sous-ensembles de E. Si $n < p$ montrer qu'il existe au moins un ensemble de la famille contenant au moins deux éléments parmi les α_i.(on pourra raisonner par l'absurde)

Exercice 154 Montrer par récurrence sur n que si $A_1, \ldots, A_n \subset E$ alors $\text{Card}\,(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \text{Card}\,(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$.

Exercice 155 Soit $p_n(k)$ le nombre de permutations de $\{1, ..., n\}$ ayant k points fixes, montrer alors que :

$$\sum_{k=0}^{n} k p_n(k) = n!.$$

Interpréter.

Exercice 156 Soit E un ensemble de cardinal $nm \in \mathbb{N}^*$, où $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, et $P_{n,m}$l'ensemble des partitions de E en n parties à m éléments chacune. Montrer que :

$$N_{n,m} = card(P_{n,m}) = \frac{(nm)!}{n!(m!)^n}.$$

(*Indication* : on peut procéder par récurrence.)

Exercice 157 L'histoire : n personnes apportent chacune un cadeau à une fête, et chacun tire au sort un cadeau dans le tas formé par tous les présents apportés. Quelle est la probabilité qu'au moins une personne reparte avec son cadeau ? Que devient cette probabilité quand le nombre de personnes devient très grand, i.e. : $n \to \infty$? (On remarquera que l'intuition met en évidence deux effets contradictoires : plus de personnes c'est plus de proba qu'une personne ait son cadeau car... il y a plus de personnes, mais c'est aussi plus de cadeaux, donc une proportion plus élevée de cadeaux "acceptables").
Soit $S_n = \sigma(\{1, \ldots, n\})$. On dit que $\sigma \in S_n$ est un dérangement si $\forall i \in \{1, \ldots, n\}\ \ \sigma(i) \neq i$. On note $A_i = \{\sigma \in S_n / \sigma(i) = i\}$ et D_n l'ensemble des dérangements.

1. Calculer $\text{Card}\,(A_i)$.
2. Exprimer $S_n - D_n$ en fonction des A_i.
3. En déduire $\text{Card}\,(D_n)$ (on pourra utiliser l'exercice 154).
4. Déterminer la limite de $\dfrac{\text{Card}\, D_n}{\text{Card}\, S_n}$. (on rappelle que $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + x + \ldots + \frac{x^n}{n!}) = e^x$).

Exercice 158 Soit E un ensemble de cardinal $n, \Re$ une relation d'équivalence sur E, avec k classes d'équivalences et r couples $(x, y) \in E^2$ tels que $x \Re y$. Montrer que $n^2 \leqslant kr$.

6 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

6.1 Divisibilité, division euclidienne

Exercice 159 Combien 15! admet-il de diviseurs ?

Exercice 160 Trouver le reste de la division par 13 du nombre 100^{1000}.

Exercice 161 Sachant que l'on a $96842 = 256 \times 375 + 842$, déterminer, sans faire la division, le reste de la division du nombre 96842 par chacun des nombres 256 et 375.

Exercice 162 Soient $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 2$ des entiers ; montrer que :

1. $n - 1 | n^m - 1$;

2. $(n-1)^2|n^m - 1$ si et seulement si $n-1|m$.

Exercice 163 Soit a un entier relatif quelconque, démontrer que le nombre $a(a^2-1)$ et, plus généralement, $a(a^{2n}-1)$ est divisible par 6.

Exercice 164© Démontrer que le nombre $7^n + 1$ est divisible par 8 si n est impair ; dans le cas n pair, donner le reste de sa division par 8.

Exercice 165 Quel est le plus petit entier naturel qui, divisé par $8, 15, 18$ et 24, donne respectivement pour reste $7, 14, 17$ et 23 ?

Exercice 166 Montrer que si x et y sont des entiers naturels tels que x^2 divise y^2, alors x divise y. Application : démontrer, par l'absurde, que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Exercice 167© Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) \text{ est divisible par } 24,$$

$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \text{ est divisible par } 120.$$

Exercice 168 Trouver tous les entiers relatifs n tels que $n^2 + n + 7$ soit divisible par 13.

Exercice 169 On considère le nombre $m = 2^n p$, dans lequel n désigne un entier naturel quelconque et p un nombre premier. Dresser la liste des diviseurs de m, y compris 1 et m lui-même, et calculer, en fonction de m et p, la somme S de tous ces diviseurs.

Exercice 170 Le diviseur d'une division est égal à 45 ; le reste est le carré du quotient. Calculer le dividende entier naturel.

Exercice 171 Trouver le plus petit entier naturel n telle que le développement décimal de $1/n$ admette une plus petite période de longueur 5, c'est-à-dire $1/n = 0,abcde\,abcde\,ab\ldots$ avec $a, b, \ldots, e \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Exercice 172 Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que :

1. $n|n+8$.
2. $n-1|n+11$.
3. $n-3|n^3-3$.

Exercice 173 Soit $k \in \mathbb{Z}$. Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $(n|2k+1$ et $n|9k+4)$.

Exercice 174 Montrer que $\forall (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ il existe un unique $r(a) \in \{0, \ldots, b-1\}$ tel qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ avec $a = bq + r(a)$.

1. En utilisant ceci pour $b = 13$, déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $13|n^2 + n + 7$.
2. Si $a \in \mathbb{N}$ et $b = 7$, déterminer les valeurs possibles de $r(a^2)$ (on rappelle que $r(a^2)$ doit appartenir à $\{0, \ldots, b-1\}$).
   Montrer alors que $\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2$ $(7|x^2 + y^2)$ ssi $(7|x$ et $7|y)$.
3. Montrer qu'un entier positif de la forme $8k + 7$ ne peut pas être la somme de trois carrés d'entiers.

Exercice 175 1. Montrer que le reste de la division euclidienne par 8 du carré de tout nombre impair est 1.

2. Montrer de même que tout nombre pair vérifie $x^2 = 0[8]$ ou $x^2 = 4[8]$.
3. Soient a, b, c trois entiers impairs. Déterminer le reste modulo 8 de $a^2 + b^2 + c^2$ et celui de $2(ab + bc + ca)$.
4. En déduire que ces deux nombres ne sont pas des carrés puis que $ab + bc + ca$ non plus.

6.2 Pgcd, ppcm, algorithme d'Euclide

Exercice 176 Calculer le pgcd des nombres suivants :

1. 126, 230.
2. 390, 720, 450.
3. 180, 606, 750.

Exercice 177

1. Calculer le ppcm des nombres : 108 et 144 ; 128 et 230 ; 6, 16 et 50.
2. Montrer que si $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$ sont des entiers de pgcd d et, si on pose $a = da'; b = db'$, le ppcm de a et b est $da'b'$.
3. Montrer que si a, b, c sont des entiers supérieurs à 1, on a :

$$\text{ppcm}(a, b, c) = \text{ppcm}(\text{ppcm}(a, b), c).$$

Exercice 178© Déterminer les couples d'entiers naturels de pgcd 18 et de somme 360. De même avec pgcd 18 et produit 6480.

Exercice 179 Si a, b, c, d sont des entiers supérieurs à 1, montrer que l'on a :

$$(a, b, c, d) = ((a, b), (c, d))$$

où (,) désigne le pgcd .

Exercice 180

1. Soient a, b, c des entiers relatifs tels que $(a, b) \neq (0, 0)$, montrer que pour que l'équation

$$ax + by = c$$

ait une solution (x, y) en entiers relatifs x et y, il faut et il suffit que le pgcd de a et b divise c.

2. Résoudre en entiers relatifs les équations suivantes :

$$7x - 9y = 1,$$

$$7x - 9y = 6,$$

$$11x + 17y = 5.$$

Exercice 181 Soient a et b deux entiers tels que $a \geqslant b \geqslant 1$.

1. Montrer que $\text{pgcd}(a + b, a - b) = 1$ ou 2,
2. Si $\text{pgcd}(a, b) = 1$, montrer que $\text{pgcd}(a + b, ab) = 1$,
3. Si $\text{pgcd}(a, b) = 1$, montrer que $\text{pgcd}(a + b, a^2 + b^2) = 1$ ou 2.

Exercice 182 Calculer par l'algorithme d'Euclide : $18480 \wedge 9828$. En déduire une écriture de 84 comme combinaison linéaire de 18480 et 9828.

Exercice 183 Déterminer l'ensemble de tous les couples (m, n) tels que

$$955m + 183n = 1.$$

Exercice 184 Calculer, en précisant la méthode suivie,

$$a = \mathrm{pgcd}(720, 252) \qquad b = \mathrm{ppcm}(720, 252)$$

ainsi que deux entiers u et v tels que $720u + 252v = a$.

Exercice 185 Démontrer :

$$a \wedge (b_1 b_2) = 1 \Leftrightarrow (a \wedge b_1 = 1 \text{ et } a \wedge b_2 = 1),$$

puis par récurence :

$$a \wedge (b_1 \dots b_n) = 1 \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n \quad a \wedge b_i = 1.$$

Exercice 186 Démontrer pour $m, n \in \mathbb{N}^*$:

$$a^m \wedge b^n = 1 \Rightarrow a \wedge b = 1.$$

Exercice 187 Déteminer deux entiers naturels connaissant leur somme, 1008, et leur pgcd, 24.

Exercice 188 Notons $a = 1\ 111\ 111\ 111$ et $b = 123\ 456\ 789$.

1. Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.
2. Calculer $p = \mathrm{pgcd}(a, b)$.
3. Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = p$.

Exercice 189 Soient m et n deux entiers $(m > n > 0)$ et $a \geqslant 2$ un entier. Montrer que le reste de la division euclidienne de $a^m - 1$ par $a^n - 1$ est $a^r - 1$ où r est le reste de la division euclidienne de m par n, et que le pgcd de $a^m - 1$ et $a^n - 1$ est $a^d - 1$, où d est le pgcd de m et n.

Exercice 190 Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $1665x + 1035y = 45$.

6.3 Nombres premiers, nombres premiers entre eux

Exercice 191© Soient a, b des entiers supérieurs ou égaux à 1. Montrer :

1. $(2^a - 1) | (2^{ab} - 1)$;
2. $(2^a - 1) \wedge (2^b - 1) = (2^{a \wedge b} - 1)$;
3. $(2^a - 1 \text{ premier }) \Rightarrow (a \text{ premier })$.

Exercice 192© Démontrer que, si a et b sont des entiers premiers entre eux, il en est de même des entiers $a + b$ et ab.

Exercice 193 Résoudre l'équation $29x - 11y = 1$ dans $\mathbb{Z}$.
On considère maintenant l'équation $29x - 11y = 5$. Déduire de ce qui précède une solution particulière de cette équation, puis en donner la solution générale.

Exercice 194 Soit p un nombre premier.

1. Montrer que $\forall i \in \mathbb{N}, 0 < i < p$ on a :
$$C_p^i \text{ est divisible par } p.$$
2. Montrer par récurence que :
$$\forall p \text{ premier}, \forall a \in \mathbb{N}^*, \text{ on a } a^p - a \text{ est divisible par } p.$$

Exercice 195

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$. Montrer que :
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = z^2 \Leftrightarrow \exists (x', y', z') \in \mathbb{N}^3, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tq} \\ \mathrm{pgcd}(x', y', z') = 1 \\ x'^2 + y'^2 = z'^2 \\ x = nx' \text{ et } y = ny' \text{ et } z = nz'. \end{aligned}$$
2. Soit$(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ tels que $x^2 + y^2 = z^2$. On suppose que $\mathrm{pgcd}(x, y, z) = 1$
   (a) Montrer que x et y ne sont pas de mêmes parité.
   (b) On suppose x pair et y impair. On pose :
   $$x = 2u,\ z - y = 2v,\ z + y = 2w$$
   avec $(u, v) \in \mathbb{N}^*$. Montrer que v et w sont premiers entre eux.
   (c) Montrer que
   $$x = 2mn,\ y = m^2 - n^2,\ z = m^2 + n^2$$
   avec m et n entiers naturels de parité différentes.
   (d) Montrer que si
   $$x = 2mn,\ y = m^2 - n^2,\ z = m^2 + n^2$$
   alors
   $$x^2 + y^2 = z^2.$$

Exercice 196 (Nombres de Fermat)

1. Montrer par récurence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant 1$ on a :
$$2^{2^{n+k}} - 1 = \left(2^{2^n} - 1\right) \times \prod_{i=0}^{k-1} (2^{2^{n+i}} + 1).$$
2. On pose $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que pour $m \neq n$, F_n et F_m sont premiers entre eux.
3. En déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Exercice 197 Montrer que les nombres suivants ne sont pas premiers :

1. $n^4 - 20n^2 + 4$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. $\frac{1}{4}(n^3 + (n+2)^3)$ pour $n \geqslant 2$.
3. $a^4 + 4b^4$ pour $a, b \geqslant 2$.

Exercice 198 Soit X l'ensemble des nombres premiers de la forme $4k + 3$ avec $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que X est non vide.
2. Montrer que le produit de nombres de la forme $4k + 1$ est encore de cette forme.

3. On suppose que X est fini et on l'écrit alors $X = \{p_1, \dots, p_n\}$.
Soit $a = 4p_1p_2 \dots p_n - 1$. Montrer par l'absurde que a admet un diviseur premier de la forme $4k + 3$.
4. Montrer que ceci est impossible et donc que X est infini.

Exercice 199 Montrer que les nombres suivants ne sont pas premiers :

$$n^4 - 20n^2 + 4, n \in \mathbb{N} \ ; \ \frac{n^3 + (n+2)^3}{4}, n \geqslant 2 \ ; \ a^4 + 4b^4, a \geqslant 2, b \geqslant 2.$$

Exercice 200 Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $a^n + 1$ soit premier, montrer que $\exists k \in \mathbb{N}, n = 2^k$. Que penser de la conjecture : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{2^n} + 1$ est premier ?

Exercice 201 Soit n un nombre premier et $p \in \{1, ..., n-1\}$, montrer que $n$divise C_n^p.

Exercice 202 Soient a et b deux entiers supérieurs à 2 premiers entre eux, montrer que :

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_0, n \in \left\{ax + by | (x, y) \in \mathbb{N}^2\right\}.$$

6.4 Divers

Exercice 203 Résoudre en nombres entiers naturels l'équation :

$$(x+1)(y+2) = 2xy.$$

Exercice 204 Montrer que $(0, 0, 0)$ est le seul triplet (x, y, z) d'entiers naturels tels que l'on ait :

$$x^2 + y^2 = 3z^2.$$

7 Polynômes

7.1 Division euclidienne

Exercice 205 Effectuer la division euclidienne du polynôme $P = X^5 - X^4 + 2X^3 + X^2 + 4$ par $Q = X^2 - 1$. Même exercice lorsque $P = X^4 - 2X\cos(2\varphi) + 1$ et $Q = X^2 - 2X\cos(\varphi) + 1$.

Exercice 206 Soit P un polynôme. Sachant que le reste de la division euclidienne de P par $X - a$ est 1 et celui de la division de P par $X - b$ est -1, $(a \neq b)$, quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$?

Exercice 207 Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme $X^n + X + 1$ par le polynôme $(X - 1)^2$.

Exercice 208 Pour quelles valeurs de m le polynôme $P = (X + 1)^m - X^m - 1$ est-il divisible par le polynôme $Q = X^2 + X + 1$?

Exercice 209 Montrer que le polynôme $P(X) - X$ divise le polynôme $P(P(X)) - X$.

Exercice 210 Déterminer $a, b \in \mathbb{Z}$ de façon à ce que le polynôme $aX^{n+1} - bX^n + 1$ soit divisible par le polynôme $(X - 1)^2$. Calculer alors le quotient des deux polynômes.

Exercice 211 Existe-t-il un polynôme P de degré 7 tel que $(X-1)^4$ divise $P(X)+1$ et $(X+1)^4$ divise $P(X)-1$?

Exercice 212 Effectuer les divisions par puissances croissantes de :

1. $P = 1$ par $Q = 1 - X$, à l'ordre n,
2. $P = 1 + X$ par $Q = 1 + X^2$ à l'ordre 5,
3. $P = X - \frac{X^3}{6} + \frac{X^5}{12}$ par $Q = 1 - 2X^2 + X^4$ à l'ordre 5.

Exercice 213© Effectuer les divisions euclidiennes de
$3X^5 + 4X^2 + 1$ par $X^2 + 2X + 3$,
$3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ par $X^3 + X + 2$,
$X^4 - X^3 + X - 2$ par $X^2 - 2X + 4$.

Exercice 214 Dans $\mathbb{C}[X]$, effectuer les divisions euclidiennes de
$X^2 - 3iX - 5(1+i)$ par $X - 1 + i$,
$4X^3 + X^2$ par $X + 1 + i$.

Exercice 215© Effectuer la division selon les puissances croissantes de :

$$X^4 + X^3 - 2X + 1 \text{ par } X^2 + X + 1 \text{ à l'ordre } 2.$$

Exercice 216 Déterminer a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$.

Exercice 217 Déterminer le reste de la division euclidienne de $(\sin aX + \cos a)^n$ par $X^2 + 1$.

Exercice 218 Soit P un polynôme dont le reste de la division euclidienne par $X - 1$ est 7 et par $X + 5$ est 3. Quel est le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 4X - 5$?

Exercice 219© Effectuer la division euclidienne de $X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9$ par $X^2 - 5X + 4$.

Exercice 220 Soit $n \geqslant 1$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ par $(X-1)^2$.

Exercice 221 Soient $P, Q \in K[X]$ tels que $X^2 + X + 1$ divise $P(X^3) + XQ(X^3)$. Montrer que $P(1) = Q(1) = 0$. Réciproque ?

Exercice 222 Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P ?

7.2 Pgcd

Exercice 223© Calculer pgcd(P, Q) lorsque :

1. $P = X^3 - X^2 - X - 2$ et $Q = X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2$,
2. $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $Q = X^3 + X + 1$.

Exercice 224© Déterminer le pgcd des polynômes suivants :
$X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1$ et $X^4 + 2X^3 + X + 2$,
$X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$ et $X^3 + X^2 - X - 1$,
$X^5 + 5X^4 + 9X^3 + 7X^2 + 5X + 3$ et $X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1$.

Exercice 225 Déterminer $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X^3 + 1)A + (X^2 + X + 1)B = 1$.

Exercice 226 Montrer qu'il existe deux polynômes : U, V, vérifiant : $(\star)$ $(X-1)^n U + X^n V = 1$. Déterminer U_1 et V_1 de degré strictement inférieur à n, satisfaisant cette égalité. En déduire tous les polynômes U, V vérifiant $(\star)$.

Exercice 227 Soient P, Q deux polynômes premiers entre eux.

1. Montrer qu'alors P^n et Q^m sont premiers entre eux où n, m sont deux entiers positifs.
2. Montrer de même que $P+Q$ et PQ sont premiers entre eux.

Exercice 228 Soit n un entier positif.

1. Déterminer le pgcd des polynômes $(X^n - 1)$ et $(X-1)^n$.
2. Pour $n = 3$ démontrer qu'il existe un couple de polynômes (U, V) tel que $(X^3 - 1)U + (X-1)^3 V = X - 1$. En donner un.

Exercice 229
1. Montrer que les polynômes $X-1$ et $X-2$ sont premiers entre eux et en déduire $d = \text{pgcd}((X-1)^2, (X-2)^3)$ et des U et V polynômes tels que
$$U(X-1)^2 + V(X-2)^3 = d.$$
2. Déterminer le polynôme P, de degré minimal, tel que le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)^2$ est $2X$ et le reste de la division euclidienne de P par $(X-2)^3$ est $3X$.

7.3 Racines, décomposition en facteurs irréductibles

Exercice 230 Montrer que le polynôme $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ admet une racine multiple. Application : déterminer les racines du polynôme $3X^5 - 5X^4 + 5X - 3$.

Exercice 231 Soit $P = (X^2 - X + 1)^2 + 1$.

1. Vérifier que i est racine de P.
2. En déduire alors la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P sur $\mathbb{R}[X]$
3. Factoriser sur $\mathbb{C}[X]$ et sur $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants en produit de polynômes irréductibles : $P = X^4 + X^2 + 1$, $Q = X^{2n} + 1$, $R = X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$, $S = X^5 - 13X^4 + 67X^3 - 171X^2 + 216X - 108$ (on cherchera les racines doubles de S).

Exercice 232 Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$, sans déterminer ses racines, le polynôme $P = X^4 + 1$, en produit de facteurs irréductibles.

Exercice 233 Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que $X - a$ divise $X^n - a^n$.

Exercice 234 Décomposer $X^{12} - 1$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 235 Prouver que B divise A, où :
$A = X^{3n+2} + X^{3m+1} + X^{3p}$ et $B = X^2 + X + 1$,
$A = (X+1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$ et $B = X(X+1)(2X+1)$,
$A = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et $B = (X-1)^2$.

Exercice 236 Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $n \in \mathbb{Z}$; notons $m = P(n)$; $(\deg(P) \geqslant 1)$.

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{Z}, m$ divise $P(n + km)$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P dans $\mathbb{Z}[X]$, non constant, tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $P(n)$ soit premier.

Exercice 237 Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe $S, T \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = S^2 + T^2$ (on utilisera la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$).
Indications :

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, déterminer $c, d \in \mathbb{R}$ tels que : $ab = c^2 - d^2$, vérifier que $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (bc-ad)^2$.
2. Résoudre le problème pour P de degré 2.
3. Conclure.

Exercice 238 Soient x_1, x_2, x_3 les racines de $X^3 - 2X^2 + X + 3$. Calculer $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

Exercice 239 Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrer qu'il y a un nombre fini de polynômes unitaires de degré n à coefficients entiers ayant toutes leurs racines de module inférieur ou égal à 1.

Exercice 240 Soit $n \geqslant 2$ et $P_n(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k$. P_n a-t-il une racine double ?

Exercice 241 Résoudre les équations :

1. $P'P'' = 18P$ où $P \in \mathbb{R}[X]$.
2. $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$ où $P \in \mathbb{C}[X]$.

Exercice 242 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples.

1. Montrer qu'il en est de même de P'.
2. Montrer que le polynôme $P^2 + 1$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

Exercice 243 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$.

1. Quel est le degré de P ?
2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $\prod\limits_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}(\dfrac{k\pi}{2p+1}) = \dfrac{1}{\sqrt{2p+1}}$.

Exercice 244© Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$:

1. $X^6 + 1$.
2. $X^9 + X^6 + X^3 + 1$.

7.4 Divers

Exercice 245 Trouver les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $\forall k \in \mathbb{Z}$ $\int_k^{k+1} P(t)dt = k+1$ (on pourra utiliser le polynôme $Q(x) = \int_0^x P(t)dt$).

Exercice 246 Soit $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ telle que $\forall k \in \{0, \dots, n\}$ $\deg P_k = k$. Montrer à l'aide d'une récurrence soigneuse que cette famille est libre.

Exercice 247 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et $\Delta : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$.

1. Montrer que Δ est linéaire, i.e. que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]$ $\Delta(aP+bQ) = a\Delta(P) + b\Delta(Q)$.
2. Déterminer $\ker(\Delta) = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / \Delta(P) = 0\}$.

3. Soient $H_0 = 1$ et pour $k \in \{1, \ldots, n\}$ $H_k = \dfrac{1}{k!} X(X-1)\ldots(X-k+1)$. Calculer $\Delta(H_k)$.
4. Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Comment trouver $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\Delta(P) = Q$.
5. Déterminer P pour $Q = X^2$ tel que $P(1) = 0$.
6. En déduire la somme $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.

Exercice 248 Résoudre l'équation d'inconnue $P \in \mathbb{C}[X]$: $P(X+1)P(X) = -P(X^2)$.

Exercice 249 Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ tels que $\exists (a, A) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \forall x \in]-a, a[, |P(x) - Q(x)| \leqslant A\left|x^{n+1}\right|$. Que dire de P et Q ?

Exercice 250 Seint $W_n = (X^2 - 1)^n,\ L_n = \frac{1}{2^n n!} W_n^{(n)}$.

1. Donner le degré de L_n, son coefficient dominant, sa parité, calculer $L_n(1)$. Donner L_0, L_1, L_2.
2. Démontrer : $\forall n \geqslant 1, (X^2 - 1)W_n^{'} = 2nXW_n$, en déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, (X^2-1)L_n^{''} + 2XL_n^{'} - n(n+1)L_n = 0.$$
3. Montrer ensuite : $\forall n \geqslant 1, L_n' = XL_{n-1}^{'} + nL_{n-1}$, puis $nL_n = XL_n^{'} - L_{n-1}^{'}$.
4. Montrer enfin que les polynômes L_n peuvent être définis par la récurrence :
$$(n+1)L_{n+1} = (2n+1)XL_n - nL_{n-1}.$$

Exercice 251 Montrer que si $n \geqslant 3$, l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution non triviale (i.e. $xyz \neq 0$) dans $\mathbb{C}[X]$.
Indication : on peut supposer x, y, z, sans facteurs communs. Dériver la relation, la multiplier par z, étudier le degré.

Exercice 252 Soit $n \in \mathbb{N}^*, P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n, avec $P(0) = 1, P(1) = 0$, montrer :
$$\sup_{|z|=1} |P(z)| \geqslant 1 + \frac{1}{n}.$$
Indication : $w_k = e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}$, montrer $\sum\limits_{k=0}^{n} P(w_k) = (n+1)a_{0.}$

Exercice 253
1. Lemme : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, $z_0 \in \mathbb{C}$, montrer que
$$\forall \varepsilon > 0, \exists z \in D(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} |\, |z - z_0| \leqslant \varepsilon\}, |P(z)| > |P(z_0)|.$$
Indications : Ecrire $P(z_0 + h) = P(z_0) + \sum_{m=k}^{\deg P} \frac{h^m}{m!} P^{(m)}(z_0)$où k est le plus petit entier strictement positif tel que $P^{(i)}(z_0) \neq 0$.
On se propose de démontrer le théorème de d'Alembert-Gauss : tout polynôme non constant à coefficients complexes admet une racine complexe.
2. Expliquer pourquoi le minimum de la fonction $z \to |P(z)|$ est atteint sur un disque centré en 0, mettons $D(0, \mathbb{R})$, et expliquer pourquoi :
$$\exists z_0 \in \mathbb{C}, |P(z_0)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|.$$
3. Montrer avec le lemme que $P(z_0) = 0$.

Exercice 254 Soit $n \geqslant 2$, et $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}X^k$. P_n a t-il une racine double ?

Exercice 255 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $P(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$. Quel est le degré de P ? Le factoriser dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 256 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme dont tous les zéros sont réels et distincts, montrer que $\phi = (P')^2 - PP''$ n'a pas de zéro réel.

8 Fractions rationnelles

Exercice 257 Décomposer les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{3}{X^3+1} \text{ sur } \mathbb{C} \text{ puis sur } \mathbb{R}$$

$$\frac{X^3}{X^3-1} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\frac{X^2+X+1}{(X-1)^2(X+1)^2} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$F(X) = \frac{1}{(X^3-1)^2} \text{ sur } \mathbb{C} \text{ en remarquant que } F(jX) = F(X)$$

$$\frac{X^7+1}{(X^2+1)(X^2+X+1)} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\frac{3X^5+2X^4+X^2+3X+2}{X^4+1} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{X^{2n}+1} \text{ sur } \mathbb{C} \text{ puis sur } \mathbb{R}$$

$$\frac{X^3+X}{(X^2+X+1)^2} \text{ sur } \mathbb{R}$$

Exercice 258 Soient a et b deux réels distincts et $F(X) = \dfrac{1}{(X-a)^n(X-b)^n}$. En utilisant la formule de Taylor en a pour $f(X) = (X-a)^n F(X)$, décomposer F sur $\mathbb{R}$.

Exercice 259 Donner une CNS sur $f \in \mathbb{C}(X)$ pour qu'il existe $g \in \mathbb{C}(X)$ tel que $f = g'$.

Exercice 260 On appelle valuation une application $v : \mathbb{C}(X) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ telle que : $\lambda \in \mathbb{C}^* \Rightarrow v(\lambda) = 0, v(0) = \infty, \exists a \in \mathbb{C}(X) : v(a) = 1$

$$\forall (f,g) \in \mathbb{C}(X)^2, v(fg) = v(f) + v(g)$$

$$\forall (f,g) \in \mathbb{C}(X)^2, v(f+g) \geqslant \min(v(f), v(g))$$

(avec les convention évidentes $k + \infty = \infty, \forall k \geqslant 1 : k\infty = \infty, 0\infty = 0$, etc.) Déterminer toutes les valuations de $\mathbb{C}(X)$ et montrer la formule (la somme portant sur toutes les valuations) :

$$\forall f \in \mathbb{C}(X) - \{0\}, \sum_v v(f) = 0.$$

Deuxième partie
ANALYSE 1

9 Propriétés de $\mathbb{R}$

9.1 Les rationnels $\mathbb{Q}$

Exercice 261 ©

1. Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ $r.x \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$,
3. En déduire : entre 2 nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel. (On pourra utiliser la propriété : pour tout réel $a > 0$, il existe un entier n tel que $n > a$.)

Exercice 262 Soient a et b deux rationnels positifs tels que $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ soient irrationnels. Montrer que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est irrationnel.

Exercice 263 © Soit $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. On suppose que tous les a_i sont des entiers.

1. Montrer que si p a une racine rationnelle $\frac{\alpha}{\beta}$ alors α divise a_0 et β divise a_n.
2. On considère le nombre $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. En calculant son carré, montrer que ce carré est racine d'un polynôme de degré 2. En déduire, à l'aide du résultat précédent qu'il n'est pas rationnel.

Exercice 264 Trouver sous la forme $\frac{p}{q}$ des rationnels x dont les dévelopements décimaux périodiques sont donnés par :
$3,14\overparen{14}\ \ldots$; $0,99\overparen{9}\ \ldots$; $3,149\overparen{9}\ \ldots$

Exercice 265 ©

1. Soit $N_n = 0,1997\,1997\ldots1997$ (n fois). Mettre N_n sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $M = 0,1997\,1997\,1997\ldots\ldots$ Donner le rationnel dont l'écriture décimale est M.
3. Même question avec : $P = 0,11111\ldots + 0,22222\ldots + 0,33333\ldots + 0,44444\ldots + 0,55555\ldots + 0,66666\ldots + 0,77777\ldots + 0,88888\ldots + 0,99999\ldots$

Exercice 266 Montrer que l'ensemble $\{r^3\ ;\ r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 267 Montrer que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.

Exercice 268 Soit $a \in \mathbb{R}$, montrer :

$$\exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*; \left| a - \frac{p}{q} \right| \leqslant \frac{1}{q^2}.$$

Indication : considérer les parties fractionnaires de $0, a, 2a, ..., qa$ et la partition $[0, \frac{1}{q}[, [\frac{1}{q}, \frac{2}{q}[, ...[\frac{q-1}{q}, 1[$ de $[0, 1[$.

Exercice 269 Montrer que l'ensemble des nombres dyadiques :

$$\left\{ \frac{a}{2^k}, (a, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$$

est dense dans $\mathbb{R}$.

9.2 Maximum, minimum, borne supérieure...

Exercice 270 © Le maximum de 2 nombres x, y (c'est-à-dire le plus grand des 2) est noté $\max(x,y)$. De même on notera $\min(x,y)$ le plus petit des 2 nombres x, y. Démontrer que :

$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Trouver une formule pour $\max(x,y,z)$.

Exercice 271 Déterminer la borne supérieure et inférieure (éventuellement infinies) de : $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ en posant $u_n = 2^n$ si n est pair et $u_n = 2^{-n}$ sinon.

Exercice 272 © Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

$$[0,1] \cap \mathbb{Q}\ ,\ ]0,1[\cap\mathbb{Q}\ ,\ \mathbb{N}\ ,\ \left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\ ,\ n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Exercice 273 Soit

$$I = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x + \frac{1}{2x} \leqslant 2\right\}.$$

1. Montrer que I est la réunion de deux intervalles.
2. Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de I.

Exercice 274 © Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. On note $A + B = \{a + b \mid (a,b) \in A \times B\}$.

1. Montrer que $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A + B$.
2. Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Exercice 275 © Soit A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. **Vrai** ou **faux** ?

1. $A \subset B \Rightarrow \sup A \leqslant \sup B$,
2. $B \subset A \Rightarrow \inf A \leqslant \inf B$,
3. $\sup A \cup B = \max(\sup A, \sup B)$,
4. $\sup(A + B) < \sup A + \sup B$,
5. $\sup(-A) = -\inf A$,
6. $\sup A + \inf B \leqslant \sup(A + B)$.

Exercice 276 Donner la borne supérieure et la borne inférieure (si elles existent) de l'ensemble :

$$D = \left\{\frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} | n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Cet ensemble admet-il un maximum, un minimum ?

Exercice 277 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1 \leqslant a_2 \leqslant ... \leqslant a_n$, n nombres réels. Calculer :

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} \sum_{k=1}^{n} |x - a_i|.$$

Exercice 278 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$. Tracer les graphes des fonctions $f, |f|, f_+, f_-$ où : $f_+ = \max(f, 0)$, $f_- = \min(f, 0)$.

Exercice 279 Soient x et y deux réels strictement positifs. On pose

$$a = \frac{x+y}{2} \qquad g = \sqrt{xy} \qquad h = \frac{2xy}{x+y} \qquad q = \sqrt{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

Montrer que a, g, h, q sont rangés dans un ordre indépendant de x et y.

Exercice 280 Soient A et B deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $A \cup B$ est bornée et que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.
2. Enoncer un résultat analogue pour $\inf(A \cup B)$.
3. Qu'en est-il pour $A \cap B$?

9.3 Divers

Exercice 281 Démontrer par récurrence sur n que pour tout $n \geqslant 2$ l'implication

$$[x > -1, x \neq 0] \Rightarrow [(1+x)^n > 1 + nx]$$

est vraie.

Exercice 282 Soient $a_1, \ldots, a_n,\ b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, les a_i n'étant pas tous nuls. Soit $p(x) = \sum_{i=1}^n (a_i + xb_i)^2$. Montrer que le discriminant de cette équation du second degré est $\leqslant 0$. En déduire que :

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{1/2},$$

et que

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{1/2}.$$

Exercice 283 Deux entiers naturels distincts peuvent-ils vérifier la relation $a^b = b^a$?

Exercice 284 Résoudre l'équation $\sqrt[4]{41+x} + \sqrt[4]{41-x} = 4$, x étant un réel positif.

Exercice 285© Si a et b sont des réels $\geqslant 0$, montrer que :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leqslant 2\sqrt{a+b}.$$

Exercice 286 Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. On note $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ et $\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$.
Montrer que dans les deux cas on a :

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Exercice 287 Pout tout $x \in \mathbb{R}$ on note $E(x)$ sa partie entière et $\{x\}$ sa partie décimale.

1. Tracer les graphes des fonctions $x \mapsto E(x)$ et $x \mapsto \{x\}$.

2. Montrer les relations suivantes : $E(x)+E(y) \leqslant E(x+y)$, $E(x+n) = E(x)+n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Déterminer $\lim E(x)$ et $\lim\{x\}$ lorsque $x \to -1_+$ et $x \to -1_-$. Ces fonctions ont-elles une limites lorsque $x \to -1$?

Exercice 288 Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$ montrer que :

$$2xy \leqslant \frac{x^2}{\lambda} + \lambda y^2.$$

Exercice 289 On note $E(x)$ la partie entière d'un réel x.

1. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \ E(x)+E(y) \leqslant E(x+y) \leqslant E(x)+E(y)+1$.
2. Calculer $E(x)+E(-x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $E(x) = E(\dfrac{E(nx)}{n})$.

Exercice 290 © Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x+y) = f(x)+f(y)$. Montrer que

1. $\forall n \in \mathbb{N} \qquad f(n) = nf(1)$.
2. $\forall n \in \mathbb{Z} \qquad f(n) = nf(1)$.
3. $\forall q \in \mathbb{Q} \qquad f(q) = qf(1)$.
4. $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = xf(1)$ (on pourra utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ pour encadrer x par des rationnels de plus en plus proches de x).

Exercice 291 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 = n$. Montrer que

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, x_i = 1.$$

Exercice 292 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $(x_1, x_2, ..., x_n) \in [0,1]^n$, montrer que :

$$\prod_{i=1}^n (1-x_i) \geqslant 1 - \sum_{i=1}^n x_i.$$

Exercice 293 Soit A une partie de $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$A \neq \emptyset,$$
$$\forall x \in A, \exists \varepsilon_x > 0,]x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x[\subset A,$$
$$\forall x \in \mathbb{R} : (\forall \varepsilon > 0,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset) \Rightarrow x \in A.$$

Montrer que $A = \mathbb{R}$.

Exercice 294 Montrer :

$$\forall n \geqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n-1} E(x + \frac{k}{n}) = E(nx).$$

Exercice 295 Soient A et B deux parties denses de $\mathbb{R}$, AB et $A+B$ sont-elles denses ? Étude de la réciproque.

Exercice 296 Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, E(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}) = E(\sqrt{4n+2}).$$

10 Suites

10.1 Convergence

Exercice 297 © Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$. Que penser-vous des propositions suivantes :
• Si $(u_n)_n$ converge vers un réel l alors $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers l.
• Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, il en est de même de $(u_n)_n$.
• Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, de même limite l, il en est de même de $(u_n)_n$.

Exercice 298 © Montrer que toute suite convergente est bornée.

Exercice 299 © Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

n'est pas convergente.

Exercice 300 Montrer qu'une partie D est dense dans $\mathbb{R}$ ssi tout réel est limite d'une suite de points de D.

Exercice 301 Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}$ et x un réel.

1. Montrer que $x = \sup(A)$ ssi (x majore A et il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A qui converge vers x).
2. Énoncer un résultat analogue pour $\inf(A)$.

Exercice 302 © Étudier la convergence des suites :

$$\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n} \qquad \frac{n\sin(n)}{n^2+1} \qquad \frac{1}{n}+(-1)^n \qquad n\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{n^2+k} \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)$$

Exercice 303 © Montrer qu'une suite d'entiers qui converge est stationnaire à partir d'un certain rang.

Exercice 304 © Soit $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

1. En utilisant une intégrale, montrer que $\forall n > 0$ $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$.
2. En déduire que $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$.
3. Déterminer la limite de H_n.
4. Montrer que $u_n = H_n - \ln(n)$ est décroissante et positive.
5. Conclusion ?

Exercice 305 Montrer qu'une suite monotone dont une suite extraite converge est convergente.

Exercice 306 Montrer que (u_n) converge ssi (u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{3n}) convergent (leurs limites n'étant pas nécessairement égales).

Exercice 307 Etudier la convergence de la suite $u_n = (-1)^n\frac{n+1}{n}$.

Exercice 308 Soit q un entier au moins égal à 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \cos\frac{2n\pi}{q}$.

1. montrer que $u_{n+q} = u_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer u_{nq} et u_{nq+1}. En déduire que la suite u_n n'a pas de limite.

Exercice 309 Soit (u_n) la suite réelle définie par récurrence en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ si $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que (u_n) est croissante et majorée.
2. Montrer que (u_n) converge vers le nombre réel positif l qui vérifie $l^2 - l - 1 = 0$ et calculer l.

Exercice 310 Etudier la suite (u_n) définie par

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(u_n^2 - 3u_n + 4) \ \forall n \geqslant 0.$$

Exercice 311 Étudier les suites :

1. $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.
2. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

Exercice 312 Montrer que la suite $\left(\frac{\sin n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et que la suite $\left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne l'est pas.

Exercice 313 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle prenant toute les valeurs rationnelles. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

Exercice 314 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim_{n\to\infty} u_n^2 = \lambda$. Que dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 315

1. Donner un exemple de suite bornée divergente, puis de suite divergente telle que
$$\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n\to\infty} x_{n+k} - x_n = 0.$$
2. Donner un exemple de suite divergente qui a une seule valeur d'adhérence (i.e. telle qu'il existe une seule extraction ϕ telle que $x_{\phi(n)}$ converge).
3. Donner un exemple de suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente telle que $\forall k \geqslant 2, (x_{nk})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 316 (Examen 2000) ©
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}$$

et on définit la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ en posant $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ possède une solution unique $\alpha \in]0, 1/2[$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ et en déduire que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0, 1/2]$.
3. Montrer que $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$ et que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$. En déduire que la suite (x_n) est croissante.
4. Montrer que $f(1/2) < 1/2$ et en déduire que $0 \leqslant x_n < 1/2$ pour tout $n \geqslant 0$.
5. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers α.

10.2 Limites

Exercice 317 Posons $u_2 = 1 - \frac{1}{2^2}$ et pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$u_n = (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2}) \cdots (1 - \frac{1}{n^2}).$$

Calculer u_n. En déduire que l'on a $\lim u_n = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 318 Calculer, lorsqu'elles convergent, les limites des suites définies par :
$u_n = n - \sqrt{n^2 - n}$ $\quad u_n = \sqrt{n(n+a)} - n$ $\quad u_n = \dfrac{n}{2} \sin \dfrac{n\pi}{2}$ $\quad u_n = \dfrac{\sin n^2 - \cos n^3}{n}$.

Exercice 319 Montrer que les suites définies pour $n \geqslant 1$ par :
$u_n = \dfrac{n+1}{n}$ $\quad u_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\quad u_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ $\quad u_n = \frac{n}{n^2+1}$
admettent toutes des limites que l'on calculera.

Exercice 320 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie en posant $u_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 321 Etudier la limite des suites suivantes : $a_n = \cos(\dfrac{2^n}{n!})$; $b_n = \sqrt[n]{3 - \sin n^2}$; $c_n = \dfrac{n^3 + 2^n}{3^n}$; $d_n = \dfrac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + \sqrt{n}}$; $e_n = (\cos n) \sin \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Exercice 322 (Méthode d'Héron) ©
Soit $a > 0$. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par u_0 un réel vérifiant $u_0 > 0$ et par la relation

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

On se propose de montrer que (u_n) tend vers $\sqrt{a}$.

1. Montrer que
$$u_{n+1}{}^2 - a = \frac{(u_n{}^2 - a)^2}{4u_n{}^2}.$$
2. Montrer que si $n \geqslant 1$ alors $u_n \geqslant \sqrt{a}$ puis que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.
4. En utilisant la relation $u_{n+1}{}^2 - a = (u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a})$ donner une majoration de $u_{n+1} - \sqrt{a}$ en fonction de $u_n - \sqrt{a}$.
5. Si $u_1 - \sqrt{a} \leqslant k$ et pour $n \geqslant 1$ montrer que
$$u_n - \sqrt{a} \leqslant 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}.$$
6. Application : Calculer $\sqrt{10}$ avec une précision de 8 chiffres après la virgule, en prenant $u_0 = 3$.

Exercice 323 On considère les deux suites :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{n!} \ ; \ n \in \mathbb{N},$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!} \ ; \ n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite. Et montrer que cette limite est un élément de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Exercice 324© Soient a et b deux réels, $a < b$. On considère la fonction $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$, supposée continue et monotone, et une suite récurrente $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 \in [a,b] \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ u_{n+1} = f(u_n).$$

1. On suppose que f est croissante. Montrer que $(u_n)_n$ est monotone et en déduire sa convergence vers une solution de l'équation $f(x) = x$.
2. Application :
$$u_0 = 4 \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ u_{n+1} = \frac{4u_n + 5}{u_n + 3}.$$
3. On suppose que f est décroissante. Montrer que les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones et convergentes.
4. Application :
$$u_0 = \frac{1}{2} \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ u_{n+1} = (1 - u_n)^2.$$
Calculer les limites des suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$.

Exercice 325©

1. Soient $a, b > 0$. Montrer que $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$.
2. Montrer les inégalités suivantes ($b \geqslant a > 0$) :
$$a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b \qquad \text{et} \qquad a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b.$$
3. Soient u_0 et v_0 des réels strictement positifs avec $u_0 < v_0$. On définit deux suites (u_n) et (v_n) de la façon suivante :
$$u_{n+1} = u_n v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$
   (a) Montrer que $u_n \leqslant v_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que (v_n) est une suite décroissante.
   (c) Montrer que (u_n) est croissante En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et quelles ont même limite.

Exercice 326 Soit x un réel.

1. Déterminer la limite de $u_n = \dfrac{E(x) + E(2x) + \ldots + E(nx)}{n^2}$.
2. En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 327© Soit $n \geqslant 1$.

1. Montrer que l'équation $\sum_{k=1}^{n} x^k = 1$ admet une unique solution a_n dans $[0,1]$.
2. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée par $\frac{1}{2}$.
3. Montrer que (a_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

Exercice 328 Soient a_0 et b_0 deux réels fixés. On définit par récurrence les suites (a_n) et (b_n) par $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{3}$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + 2b_n}{3}$.

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.
2. En calculant $a_n + b_n$, montrer qu'elles convergent vers $\dfrac{a_0 + b_0}{2}$.

Exercice 329 Soient a et b deux réels tels que $0 < a \leqslant b$. On pose $u_0 = a$, $v_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ 0 < u_n \leqslant v_n$.
2. Montrer que (u_n) est croissante, (v_n) décroissante et qu'elles convergent vers la même limite.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \leqslant v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{8a}(v_n - u_n)^2$.
4. On suppose désormais que $a = 1$ et $b = 2$.
   Etablir alors que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_n - u_n \leqslant \dfrac{1}{8^{2^n - 1}}$.
5. En déduire une valeur approchée de la limite commune à 10^{-10} près.

Exercice 330 Soit (u_n) une suite qui tend vers 0. On pose $x_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$. Montrer que (x_n) converge vers 0 (on pourra fixer ε puis séparer la somme en deux et enfin choisir N...).

Exercice 331 Déterminer les limites de $\dfrac{n^{\ln(n)}}{\ln^n(n)}$ et $\sqrt[n]{n^2}$.

Exercice 332 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle dont tous les termes sont non nuls et telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 0.$$

Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Exercice 333 Étudier la suite définie par récurrence :

$$u_0 = a > 0, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}.$$

Exercice 334 Étudier la suite définie par récurrence :

$$u_0 = a > 0, u_{n+1} = \ln(1 + u_n).$$

Exercice 335 Étudier la convergence et calculer la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{k}{n^2}).$$

Exercice 336 Étudier la convergence et calculer la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k}.$$

Exercice 337 Soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective, telle que $\lim_{n\to\infty} \frac{\phi(n)}{n} = \ell$. Calculer ℓ.

Exercice 338 Soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective ; montrer que $\lim_{n\to\infty} \phi(n) = +\infty$.

Exercice 339 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$, et on suppose que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Montrer que $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$, puis que $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$.

Exercice 340 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers ℓ et ϕ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$. (pas nécessairement strictement croissante !). Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_{\phi(n)} = \ell$.

Exercice 341 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :
$$\lim_{n\to\infty} u_n + v_n = \lim_{n\to\infty} u_n v_n = 0.$$
Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Exercice 342 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :
$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = +\infty, \lim_{n\to\infty} u_{n+1} - u_n = 0.$$
Montrer que
$$E = \{u_n - v_m | (n,m) \in \mathbb{N}^2\}$$
est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 343 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $[0,1]$ telles que :
$$\lim_{n\to\infty} u_n v_n = 1.$$
Montrer que :
$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = 1.$$

Exercice 344 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergeant respectivement vers ℓ et L. Étudier la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Exercice 345 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que :
$$\lim_{n\to\infty} (u_n + \frac{u_{2n}}{2}) = 1.$$
Que dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 346 Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = \frac{z + |z|}{2}.$$

Étudier la suite définie par :

$$z_0 \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = f(z_n).$$

Indication : on écrira $z_n = \rho_n e^{i\phi_n}$,où $(\rho_n, \phi_n) \in \mathbb{R}^{+*} \times]-\pi, \pi[$ et on utilisera :

$$\sin\phi = 2^n \sin\frac{\phi}{2^n} \prod_{i=1}^{n} \cos\frac{\phi}{2^i}.$$

10.3 Équivalents

Exercice 347 Que penser-vous de l'énoncé suivant : si $(u_n) \sim (v_n)$ alors $(e^{u_n}) \sim (e^{v_n})$. Donner un énoncé correct.

Exercice 348
1. Montrer que si $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \neq 0$ et si $(u_n) \to 0$ alors $\ln(1 + u_n) \sim u_n$.
2. Soit a un réel. Déterminer la limite de $(1 + \frac{a}{n})^n$.

Exercice 349 Comparer les suites suivantes :

$$a_n = n^n, \qquad b_n = n^{\ln(n)}, \qquad c_n = e^{n^2}, \qquad d_n = (\ln n)^{n \ln n}$$

Exercice 350 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles de limite $+\infty$ telles que $u_n = o(v_n)$. Montrer qu'il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite $+\infty$ telle que $u_n = o(w_n)$ et $w_n = o(v_n)$.

Exercice 351 Donner un exemple de suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n = O(v_n)$ mais qu'on n'ait ni $u_n = o(v_n)$, ni $v_n = O(u_n)$.

Exercice 352 Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in [0, 1], u_{n+1} = u_n^2.$$

Donner un équivalent de u_n quand $n \to \infty$.

Exercice 353 Montrer la réciproque du théorème de Césaro (i.e. $\lim_{n\to\infty} u_n = l$) :

1. dans le cas où $\lim_{n\to\infty} v_n = l$ et
$$u_{n+1} - u_n = O(\frac{1}{n}),$$
2. dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Exercice 354 Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = u_n + \frac{2}{u_n}$. En utilisant $v_n = \frac{u_n^2}{4}$, donner un équivalent de u_n. *Indication* : on montrera que $\lim_{n\to\infty} v_{n+1} - v_n = 1$, on en déduira un équivalent de v_n puis de u_n.

Exercice 355 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_{n+1} = u_n + u_n^2$. L'étudier et, en utilisant $v_n = \frac{1}{u_n}$, en donner un équivalent dans le cas $u_0 \in]-1; 0]$. Que dire dans le cas $u_0 \in]0; \infty[$? (On étudiera $v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$.)

Exercice 356 Soient f et g deux formes linéaires sur un espace vectoriel E telles que $fg = 0$. Montrer que $f = 0$ ou $g = 0$. Étudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 1, x_{n+1} = \frac{x_n}{1+nx_n^2}$. En étudiant $y_n = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}$, en donner un équivalent.

Exercice 357 Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[, u_{n+1} = \sin u_n.$$

Donner $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$,(réponse : $\frac{1}{3}$) en déduire un équivalent de u_n^{-2} donc de u_n.

Exercice 358 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! x_n \in [n, n+1[$ solution de $x - E(x) = \frac{1}{x^2}$. Donner un équivalent de x_n puis faire un développement asymptotique de $x_n - n$ à l'ordre 5 en fonction de $\frac{1}{n}$.

Exercice 359 Étudier la convergence et calculer la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - ... - \frac{1}{n^2}.$$

On montrera préalablement que :

$$1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1)$$

quand $n \to \infty$.

11 Limites de fonctions

11.1 Théorie

Exercice 360 Écrire les définitions des limites suivantes : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l, l \in \mathbb{R}$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, $x_0 \in \mathbb{R}$.
(On précisera sur quel type d'intervalle la fonction f doit être définie.)

Exercice 361 Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0 dans son intérieur. On suppose que $\lim_{x\to x_0} f(x) = u > 0$. Démontrer qu'il existe $t > 0$ tel que si $0 < |x - x_0| < t$ alors $|f(x)| \geqslant \frac{u}{2}$.

Exercice 362 Montrer que si une fonction f définie sur $E \subset \mathbb{R}$ est continue en x_0 alors la fonction $|f|$ est, elle aussi, continue en x_0. Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 363

1. Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1$.
2. Soient m, n des entiers positifs. Étudier $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}$.
3. Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(\sqrt{1+x+x^2} - 1) = \frac{1}{2}$.

Exercice 364 Soit f une fonction de variable réelle telle que $\frac{f(x)}{|x|} \to \infty$ quand $x \to \infty$. Montrer que pour tout réel α il existe X_α tel que $f(x) - |\alpha x| \geqslant |x|$ si $|x| \geqslant X_\alpha$. En déduire que pour tout α réel $f(x) - \alpha x \to \infty$ quand $x \to \infty$.

Exercice 365 Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ g(x) > 0 \text{ et } \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0.$$

1. Montrer que
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} g(x) = 0.$$
2. Montrer que si $L > 0$,
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty.$$

Exercice 366

1. Montrer que toute fonction périodique et non constante n'admet pas de limite en $+\infty$.
2. Montrer que toute fonction croissante et majorée admet une limite finie en $+\infty$.

Exercice 367 Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ croissante telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x+1) - f(x) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. (on pourra utiliser des ε, sommer des inégalités et utiliser la monotonie de f pour montrer qu'elle est bornée sur un segment).
Comment généraliser ce résultat ?

11.2 Calculs

Exercice 368 Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

$a)$ $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2\,|x|}{x}$ $b)$ $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+2\,|x|}{x}$ $c)$ $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3\,x+2}$

$d)$ $\lim_{x\to \Pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ $e)$ $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$ $f)$ $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$

$g)$ $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$ $h)$ $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1}$

Exercice 369 Soient a, b des réels positifs. $E(x)$ désigne la partie entière de x. Montrer que :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{a} E\left(\frac{b}{x}\right) = \frac{b}{a} \qquad ; \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{b}{x} E\left(\frac{x}{a}\right) = 0.$$

Exercice 370 Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1};\ \lim_{x\to a} \frac{x^m-a^m}{x^p-a^p}\ (a>0, m, p \in \mathbb{N}^*);\ \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}\ (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{\frac{1}{x}+1} - \sqrt{\frac{1}{x}-1}\right);\ \lim_{x\to -\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{4x+\pi};\ \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}+x}.$$

Exercice 371 En utilisant la définition d'une limite, montrer que :

$$a)\ \lim_{x\to -\frac{2}{3}} (3x+2)\sin\left(\frac{1}{3x+2}\right) = 0\ ; \quad b)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{1+e^{-\frac{1}{x}}} = 2.$$

Exercice 372 Calculer les limites suivantes :

$$a)\ \lim_{x\to 0^+} xE(\frac{1}{x})\ ;\quad b)\ \lim_{x\to +\infty} xE(\frac{1}{x})\ ;\quad c)\ \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}E(\frac{1}{x})\ ;$$

$$d)\ \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\ ;\quad e)\ \lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}).$$

Exercice 373 Calculer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x^n-\alpha^n},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x-\sin x}{\sin x(\cos 2x-\cos x)},$$

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x},$$

$$\lim_{x\to \alpha^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}},$$

$$\lim_{x\to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^2}{x^2+x-6},$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^4}{1+x^\alpha \sin^2 x},\ \text{en fonction de } \alpha\in\mathbb{R}.$$

Exercice 374 Déterminer les limites suivantes :

$$\frac{x}{2+\sin(\frac{1}{x})} \qquad \text{en } 0$$

$$\frac{x^3-3x^2+5x-3}{4x^4+x^2+x-6} \qquad \text{en } 1$$

$$\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x} \qquad \text{en } 0$$

$$\frac{\tan x}{\sqrt{x^2+4}+x-2} \qquad \text{en } 0$$

$$\frac{1-\cos x}{x^2} \qquad \text{en } 0$$

$$\frac{1-\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x-1} \qquad \text{en } \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\tan(x+\frac{\pi}{4})-1}{\sqrt{3}-2\cos(x+\frac{\pi}{6})} \qquad \text{en } 0$$

Exercice 375 Étudier les asymptotes de $f(x)=e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)}$.

Exercice 376 Montrer que
$$\frac{\ln(x)}{x^\alpha} < \frac{2}{\alpha x^{\alpha/2}} \text{ où } \alpha > 0.$$
En déduire que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0, \quad \alpha > 0.$$

Exercice 377 Calculer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{x^2+2|x|}{x} \qquad \text{b) } \lim_{x\to 1} \frac{x^7-1}{x^6-1} \qquad \text{c) } \lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x^m-1} \quad n,m\in\mathbb{N}^*$$

$$\text{d) } \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \qquad \text{e) } \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-\cos x} \qquad \text{f) } \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^3)}{x}$$

$$\text{g) } \lim_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{x} \quad a,b>0 \qquad \text{h) } \lim_{x\to 0} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} \qquad \text{i) } \lim_{x\to\alpha^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}+\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}.$$

Exercice 378 Calculer :
$$\lim_{x\to\infty} \ln(1+e^{-x})^{\frac{1}{x}}, \lim_{x\to 0} \frac{x}{2+\sin\frac{1}{x}}, \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}.$$

Exercice 379© Calculer :
$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{(\sin x)^2} - \frac{1}{(\sinh x)^2}\right).$$

Exercice 380© Calculer :
$$\lim_{x\to\infty} (\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{2+\sin\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}.$$

Exercice 381© Trouver :
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{x^x}\ln x}{x^x-1}$$

Exercice 382© Trouver pour $(a,b)\in(\mathbb{R}^{+*})^2$:
$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Exercice 383© Trouver pour $(a,b)\in(\mathbb{R}^{+*})^2$:
$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

12 Continuité et étude de fonctions

12.1 Continuité : théorie

Exercice 384 (Partiel Novembre 96)© Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur I.

1. Soit $a \in I$. Donner une raison pour laquelle :
$$\left(\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\right) \Rightarrow \left(\lim_{x\to a} |f(x)| = |f(a)|\right).$$
2. On suppose que f et g sont continues sur I. En utilisant l'implication démontrée ci-dessus, la relation $\mathrm{Sup}(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$, et les propriétés des fonctions continues, montrer que la fonction $\mathrm{Sup}\,(f,g)$ est continue sur I.

Exercice 385 Soit f une fonction de $[a,b]$ dans $[a,b]$ telle que pour tout x et x' $(x \neq x')$ de $[a,b]$ on ait : $|f(x) - f(x')| < |x - x'|$.

1. Montrer que f est continue sur $[a,b]$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une et une seule solution dans $[a,b]$. (On pourra introduire la fonction : $x \mapsto g(x) = f(x) - x$).

Exercice 386
1. Soit f une fonction continue sur $]a,b[$ telle que $f(]a,b[) \subset [a,b]$. Montrer, par considération de $\phi(x) = f(x) - x$, qu'il existe c dans $[a,b]$ tel que $f(c) = c$.
2. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe c dans $[0,\frac{1}{2}]$ tel que $f(c) = f(c+\frac{1}{2})$.
3. Un mobile parcours, à vitesse continue, une distance d en une unité de temps. Montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-unité de temps pendant lequel il parcourt une distance $\frac{d}{2}$.

Exercice 387 Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$. Montrer que la fonction $g(t) = f(t + \frac{b-a}{2}) - f(t)$ s'annule en au moins un point de $[a, \frac{a+b}{2}]$.
Application : une personne parcourt 4 km en 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle de 30 mn pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.

Exercice 388 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. Montrer que f s'annule. Appliquer ceci aux polynômes de degré impair.

Exercice 389 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continue telle que $f(0) = 1$, $\lim\limits_{-\infty} f = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

1. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que si $|x| > a$ alors $f(x) \leqslant \frac{1}{2}$.
2. Montrer que f est bornée et possède un maximum.

Exercice 390 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in I, f(x)^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

Exercice 391 Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée. Atteint-elle ses bornes ?

Exercice 392 Soient f et g continues sur $[0,1]$ telles que $\forall x \in [0,1]$ $f(x) < g(x)$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $\forall x \in [0,1]$ $f(x) + m < g(x)$.

Exercice 393 Soit f croissante sur $[a,b]$ et prenant toute valeur entre $f(a)$ et $f(b)$. Montrer que f est continue.

Exercice 394 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=f(2x)$. Montrer que f est constante.

Exercice 395 Soit f périodique croissante. Que dire de f ?

Exercice 396 Donner un exemple de fonction continue sur $[0,1]$ non lipschitzienne, puis de fonction continue en un seul point, puis de fonction discontinue sur les rationnels et continue sur les irrationnels, enfin de fonction continue telle que $f(x)\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ si $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ou si $x=0$, et $f(x)\in\mathbb{Q}$ si $x\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$. Une fonction telle que $\forall x\in\mathbb{R}, \lim\limits_{h\to 0} f(x+h)-f(x-h)=0$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Donner un exemple de bijection de $[0,1]$ sur $[0,1]$ discontinue en tout point.

Exercice 397 Soit f continue sur $\mathbb{R}$ admettant 1 et $\sqrt{2}$ pour périodes. Que dire de f ?

Exercice 398 Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ croissante, montrer qu'elle a un point fixe. *Indication* : étudier

$$E=\{x\in[0,1]|\forall t\in[0,x[, f(t)>t\}.$$

Exercice 399 Soit $f:\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}$ croissante telle que $x\to\frac{f(x)}{x}$ soit décroissante ; montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 400 Soit $f:\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

$$\forall x\in\mathbb{R}^{+*}, f(x)e^{f(x)}=x.$$

Donner les variations de f puis comparer f et ln au voisinage de $+\infty$.

Exercice 401 Soit $f:\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R}$ croissante. Construire $g:\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R}$ continue telle que $f\leqslant g$.

Exercice 402 Donner un exemple d'application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ non constante telle que :

$$\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=f(x^2).$$

On suppose f continue en 0 et en 1, montrer que f est constante.

Exercice 403 Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ continue. Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \exists a_n\in[0,1], f(a_n)=a_n^n.$$

On suppose f strictement décroissante. Montrer que a_n est unique et étudier la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 404 Existe-t-il une bijection continue de $[0,1[$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 405 Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ continue telle que $f^2=f (*)$. On note $E_f=\{x\in[0,1]|f(x)=x\}$. Montrer que $E_f\neq\emptyset$ puis que c'est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Trouver toutes les solutions de $(*)$.

Exercice 406 Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue, évaluer :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Exercice 407 Une fonction qui vérifie la propriété des valeurs intermédiaires est-elle nécessairement continue ?

Exercice 408 Soit f uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\forall x \geqslant 0$, la suite $(f(xn))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 quand $n \to \infty$. Montrer $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Exercice 409 Soit $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ admettant une limite finie en $+\infty$, montrer qu'alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 410 Soit f continue sur $[a, b]$, montrer :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in [a, b]^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y| + \varepsilon.$$

Exercice 411 Soit $(f, g) \in C([0, 1], [0, 1])^2$, tel que : $fg = gf$. On veut montrer que $f - g$ s'annulle par deux méthodes :
– par l'absurde, utiliser le fait que $(f - g)([0, 1])$ est un segment ne contenant pas 0.
– par l'absurde, en examinant, si $f - g > 0$ par exemple, $\min\{x \in [0, 1] | f(x) = x\}$.
Le résultat subsiste-t-il si l'on remplace $[0, 1]$ par $\mathbb{R}$?

Exercice 412 Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue, telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right], f\left(x_n + \frac{1}{n}\right) = f(x_n).$$

Exercice 413 Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, montrer que : $\lim\limits_{|x|\to\infty} |f(x)| = +\infty \Leftrightarrow$ l'image réciproque de toute partie bornée est bornée.

Exercice 414 ©
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On veut démontrer que

$$\sup_{a<x<b} f(x) = \sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x).$$

1. Montrer que
$$\sup_{a<x<b} f(x) \leqslant \sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x).$$
Pour cela, on pourra montrer que $\sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$ est un majorant de f sur $]a, b[$.
2. Soit $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = \sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$. Montrer que $f(x_0) = \sup_{a<x<b} f(x)$ en distinguant les trois cas : $x_0 = a, x_0 = b, x_0 \in]a, b[$. *Indication :* Dans le cas $x_0 = a$, par exemple, on pourra considérer la suite de réels $a_n = a + 1/n$ et étudier la suite $(f(a_n))$.
3. Soit $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = 0$ si $x \in [0, 1[$ et $g(x) = 1$ si $x = 1$. Montrer que
$$\sup_{0<x<1} g(x) \neq \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} g(x).$$
Quelle hypothèse est essentielle dans la propriété démontrée auparavant ?

12.2 Continuité : pratique

Exercice 415 Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1/3\} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$.
Pour tout $\varepsilon > 0$ déterminer α tel que, $(x \neq 1/3$ et $|x| \leqslant \alpha) \Rightarrow |f(x) - 3| \leqslant \varepsilon$.
Que peut-on en conclure ?

Exercice 416 Soit f la fonction réelle à valeurs réelles, strictement croissante définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f.
2. f est elle continue ?
3. Donner la formule définissant f^{-1}.

Exercice 417 Etudier la continuité de f la fonction réelle à valeurs réelles définie par $f(x) = (\sin x)/x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

Exercice 418
1. Soit la fonction réelle définie par $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ sinon. Montrer que f n'admet pas de limite en tout point de $\mathbb{R}$.
2. Soit la fonction réelle définie par $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 1-x$ sinon. En quels points de $\mathbb{R}$ f est elle continue ?

Exercice 419 Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

$$a)\ f(x) = \sin x \sin(\frac{1}{x}) \ ; \quad b)\ f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2} \ ;$$

$$c)\ f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \ .$$

Exercice 420 Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = E(x)\sin(x)$,
2. $g(x) = E(x)\sin(\pi x)$.

Exercice 421 Etudier la continuité de

1. $f(x) = x + \sqrt{x - \mathrm{E}(x)}$.
2. $g(x) = \mathrm{E}(x) + \sqrt{x - \mathrm{E}(x)}$.

Exercice 422 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = f(2x)$. Montrer que f est constante.

Exercice 423 La fonction $\dfrac{1}{x}$ est-elle lipschitzienne sur $]0, +\infty[$? sur $[1, +\infty[$?

Exercice 424 Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$, $f(x) = 1/2 - x$ si $x \in]0, 1/2[$, $f(1/2) = 1/2$, $f(x) = 3/2 - x$ si $x \in]1/2, 1[$ et $f(1) = 1$.

1. Tracer le graphe de f. Étudier sa continuité.
2. Démontrer que f est une bijection de $[0,1]$ sur $[0,1]$.

3. Démontrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a $f(x) = \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}E(2x) - \frac{1}{2}E(1-2x)$.

Exercice 425 Étudier la continuité des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ $\quad f_1(0) = 0$;
2. $f_2(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ $\quad f_2(0) = 0$;
3. $f_3(x) = xE(x)$ sur $\mathbb{R}$;
4. $f_4(x) = [x - E(x)]^2$ et $f_5(x) = E(x) + f_4(x)$.

Exercice 426 En étudiant la suite $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \cos(u_n)$, déterminer une valeur approchée à 10^{-5} près de l'unique réel solution de $\cos(x) = x$.

Exercice 427 Soit f définie par $f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$, où E désigne la partie entière. Donner le domaine de définition de f, puis une relation entre $f(x+1)$ et $f(x)$. f est-elle monotone ? f est-elle $k-$lipschitzienne sur $[a,1](a>0)$? Et sur $[0,1]$? Étudier la continuité de f sur $[0,1]$ en utilisant la définition. Déduisez en la continuité sur $\mathbb{R}$.

12.3 Étude de fonctions

Exercice 428 Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes

$$f(x) = \sqrt{\frac{2+3\,x}{5-2\,x}}\ ; \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 2\,x - 5}\ ; \quad h(x) = \ln(4\,x+3)$$

Exercice 429 Montrer que l'équation $x^7 - 3\,x^2 + 4\,x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]-1,1[$. Même question pour l'équation $x^{29} + 14\,x^{17} - 7\,x^5 + 2 = 0$.

Exercice 430 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $d \in \mathbb{R}^+$. Démontrer en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires que le polynôme $P(X) = X^n - d$ a au moins une racine dans $\mathbb{R}$.

Exercice 431 En étudiant les variations de la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, trouver le plus grand élément de l'ensemble $f(\mathbb{N}^*)$.
En déduire que quels soient m et n appartenant à $\mathbb{N}^*$, l'un des nombres $\sqrt[n]{m}$, $\sqrt[m]{n}$ est inférieur ou égal à $\sqrt[3]{3}$.

Exercice 432 (Partiel Novembre 96) ©
Soit

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \frac{\cos x}{1+x^2}.$$

Montrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$, minorée sur $\mathbb{R}$.
Déterminer $\text{Sup}_{\,x\in\mathbb{R}} f(x)$.

Exercice 433

1. Soit la fonction $f : [-1,+\infty[\to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$. Montrer que f admet une réciproque que l'on explicitera.
2. Trouver un intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel la fonction $g(x) = \tan(x^3)$ admette une fonction réciproque (on précisera alors le domaine de définition de cette réciproque et son image).

Exercice 434 Montrer que les fonctions suivantes ne sont pas des polynômes :

$$x \to e^x, \quad x \to \ln x, \quad x \to \sqrt{x^2+1}, \quad x \to \cos x.$$

12.4 Fonctions continues par morceaux

Exercice 435 Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \phi \in CM\left([a, b], \mathbb{R}\right), \forall x \in [a, b], |g(x) - \phi(x)| < \varepsilon.$$

Montrer que l'on peut choisir $\phi \in E\left([a, b], \mathbb{R}\right)$, ie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \phi \in E\left([a, b], \mathbb{R}\right), \forall x \in [a, b], |g(x) - \phi(x)| < \varepsilon.$$

NB : CM pour continue par morceaux et E pour escalier.

Exercice 436 Donner un exemple de fonction qu'on ne puisse approcher à ε près par des fonctions en escaliers.

Exercice 437 On dit qu'un ensemble A de fonctions définies sur un intervalle $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$ est dense dans un ensemble B si :

$$\forall f \in B, \forall \varepsilon > 0, \exists g \in A, \forall x \in I, |f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Le cours dit par exemple que l'ensemble des fonctions en escaliers est dense dans l'ensemble des fonctions continues par morceaux si $I = [a, b]$. Montrer que l'ensemble des fonctions continues affines par morceaux est dense dans l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle $I = [a, b]$.

Exercice 438 On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur $I = [a, b]$ converge uniformément vers f si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathbb{N} \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur l'intervalle $[a, b]$, et que toutes les f_n sont continues. Montrer que $\forall x \in [a, b]$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et donner sa limite. Montrer que f est bornée et continue.
On ne suppose plus que $(f_n)_n$ converge uniformément mais seulement point par point (ie, $\forall x \in [a, b]$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $f(x)$) ; de plus toutes les f_n sont lipschitziennes de rapport k ; montrer que f est lipschitzienne de rapport k et qu'il y a converge uniforme.

Exercice 439 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est à variation bornée si et seulement si :

$$\exists \mu \in \mathbb{R}^+, \forall d = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\} \text{ subdivision de } [a, b], \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sigma(d) \leqslant \mu.$$

On appelle alors $V(a, b) = \sup\limits_{d \text{ subdivision}} \sigma(d)$ et on définit une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^+$: $x \to V(a, x)$.
Montrer que toute fonction monotone est à variation bornée puis que $x \to V(a, x)$ est croissante ainsi que $x \to V(a, x) - f(x)$. En déduire que toute fonction à variation bornée est la différence de deux fonctions croissantes (d'où la nature de ses discontinuités). Une fonction continue, une fonction lipschitzienne sont-elles à variation bornée ?

13 Dérivabilité

13.1 Calculs

Exercice 440 Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^2 \cos \frac{1}{x} \ \text{ si } x \neq 0 \qquad f_1(0) = 0;$$

$$f_2(x) = \sin x \sin \frac{1}{x} \ \text{ si } x \neq 0 \qquad f_2(0) = 0;$$

$$f_3(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} \ \text{ si } x \neq 1 \qquad f_3(1) = 1.$$

Exercice 441 Déterminer a de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \ \text{ et } \ f(x) = ax^2 + 1 \text{ sinon}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 442 Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 ; on note encore f la fonction prolongée. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 443 Calculer la fonction dérivée d'ordre n des fonctions f, g, h définies par :

$$f(x) = \sin x \quad ; \quad g(x) = \sin^2 x \quad ; \quad h(x) = \sin^3 x + \cos^3 x.$$

Exercice 444 Calculer les dérivées d'ordre n des fonctions :

$$f(x) = \frac{2x - 5}{(x-2)^2(x+1)(x-3)} \qquad g(x) = \ln(1 + x).$$

Exercice 445 (Formule de Leibnitz)
Étant données u et v des fonctions dérivables à l'ordre n sur l'intervalle I, montrer par récurrence que la dérivée d'ordre n du produit uv sur cet intervalle est :

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

En déduire les dérivées successives des fonctions :

$$x \mapsto x^2 e^x \quad ; \quad x \mapsto x^2(1+x)^n \quad ; \quad x \mapsto \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2} \quad ; \quad x \mapsto x^{n-1} \ln x.$$

Exercice 446 Prolonger par continuité en 0 et étudier la dérivabilté de

1. $f(x) = \sqrt{x} \ln x$.
2. $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{\sqrt{x}}$.

Exercice 447 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \text{ si } x < 0 \\ x \mapsto ax^2 + bx + c \text{ sinon} \end{cases}$
Déterminer a, b, c pour que f soit C^2 (et C^3 ?).

Exercice 448 Soit $f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f est C^∞ et que $\forall n \in \mathbb{N}\ f^{(n)}(0) = 0$.

Exercice 449 Soient a et b deux réels et $f(x) = (x-a)^n(x-b)^n$. Calculer $f^{(n)}$ et en déduire $\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$.

Exercice 450 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \neq 0, f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, f(0) = 0.$$

Montrer que $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et calculer ses dérivées en 0.

Exercice 451 Calculer la dérivée de $x \to \ln \cos(\pi + \frac{x^2-1}{x^2+1})$.

Exercice 452 La fonction $x \to \cos \sqrt{x}$ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 453 En quels points la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, f(x) = 0,$$

est-elle dérivable ?

13.2 Théorème de Rolle et accroissements finis

Exercice 454 Montrer que le polynôme P_n défini par

$$P_n(t) = \left[\left(1 - t^2\right)\right]^{(n)}$$

est un polynôme de degré n dont les racines sont réelles, simples et appartiennent à $[0, 1]$.

Exercice 455© Montrer que le polynôme $X^n + aX + b$ (a et b réels) admet au plus trois racines réelles.

Exercice 456© Soit f une fonction n fois dérivable sur $]a, b[$ s'annulant en $n+1$ points de $]a, b[$. Montrer que si $f^{(n)}$ est continue,il existe un point x_0 de $]a, b[$ tel que $f^{(n)}(x_0) = 0$.

Exercice 457 Étant donné y un réel positif et n un entier naturel pair, montrer que $(x+y)^n = x^n + y^n$ si et seulement si $x = 0$. Cas n impair ?

Exercice 458 Soit f une fonction continue et dérivable sur $[a, +\infty[$ et telle que $\lim_{x\to\infty} f(x) = f(a)$. Montrer qu'il existe un élément c dans $]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 459 Dans l'application du théorème des accroissements finis à la fonction

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ préciser le nombre θ de $]\alpha, \beta[$. Interprétation géométrique ?

Exercice 460 Appliquer la formule des accroissements finis à la fonction

$$f(x) = a + bx + ce^{\alpha x}$$

(où a, b, c, α sont réels, et c et α sont non nuls) sur l'intervalle $[0, X]$.

1. Calculer "θ" en fonction de X.
2. En déduire que
$$x \mapsto \frac{1}{\alpha x} \ln \frac{e^{2x} - 1}{\alpha x}$$
est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 461 Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a, a + 2h]$. Par introduction de la fonction

$$g(t) = f(a + t + h) - f(a + t)$$

montrer qu'il existe α dans $]0, 2[$ tel que

$$f(a) - 2f(a + h) + f(a + 2h) = h^2 f''(a + \alpha h).$$

Exercice 462 Soient x et y réels avec $0 < x < y$.

1. Montrer que
$$x < \frac{y - x}{\ln y - \ln x} < y.$$
2. On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par
$$\alpha \mapsto f(\alpha) = \ln(\alpha x + (1 - \alpha)y) - \alpha \ln x - (1 - \alpha) \ln y.$$
De l'étude de f déduire que pour tout α de $]0, 1[$
$$\alpha \ln x + (1 - \alpha) \ln y < \ln(\alpha x + (1 - \alpha)y).$$
Interprétation géométrique ?

Exercice 463 Par application du théorème des accroissements finis à $f(x) = \ln x$ sur $[n, n+1]$ montrer que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Exercice 464 Étant donné α dans $]0, 1[$, montrer que pour tout entier naturel n

$$\frac{\alpha}{(n + 1)^{1-\alpha}} \geqslant (n + 1)^{\alpha} - n^{\alpha} \geqslant \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

En déduire la limite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^{\alpha}}.$$

Exercice 465 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}\ \ |e^x - 1 - x| \leqslant \frac{x^2}{2} e^{|x|}$.

13.3 Divers

Exercice 466 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (1-k)^3x^2 + (1+k)x^3$ où k est un nombre réel. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles l'origine est un extremum local de f.

Exercice 467 Appliquer la règle de l'Hôpital aux calculs des limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right),$$

$$\lim_{x\to 0} (1-\cos x)\text{cotan}\, x.$$

Exercice 468 Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^4)-1}{x^4e^x};$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx};$$

$$\lim_{x\to 0} x^2\left(\exp\frac{1}{x} - \exp\frac{1}{x+1}\right).$$

Exercice 469 Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ f(x+y)f(x-y) \leqslant f(x)^2$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x)f''(x) \leqslant f'(x)^2$.

Exercice 470 Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\lim\limits_{+\infty} f' = l$. Montrer qu'alors $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = l$.

Exercice 471 Déterminer les extremums de $f(x) = x^4 - x^3 + 1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 472 Quel est le lieu des points d'inflexion (puis des extrémums relatifs) de f_λ quand λ décrit $\mathbb{R}$, où :

$$f_\lambda : x \to \lambda e^x + x^2.$$

Exercice 473 Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, \forall x \in \mathbb{R}, f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Exercice 474 Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(\omega) = \omega$. On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de x_0 et la récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que si $|f'(\omega)| < 1, \exists \varepsilon > 0, \forall x_0 \in]\omega-\varepsilon, \omega+\varepsilon[, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers w, et que si $|f'(\omega)| > 1$ la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers w si et seulement si elle est stationnaire (i.e. $x_n = \omega$ à partir d'un certain rang). Que dire dans le cas $|f'(\omega)| = 1$?

Exercice 475 Soit $f \in C^1([0;1],\mathbb{R})$,telle que $f(0) = 0$. Calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2}).$$

Exercice 476 (Examen 2000) ©

Enoncer le théorème de Rolle pour une fonction $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ $(a < b)$ et dérivables sur $]a,b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a,b[$.

1. Montrer que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in]a,b[$. (Raisonner par l'absurde et appliquer le théorème de Rolle.)
2. Posons $p = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ et considérons la fonction $h(x) = f(x) - pg(x)$ pour $x \in [a,b]$. Montrer que h vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et en déduire qu'il existe un nombre réel $c \in]a,b[$ tel que
$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
3. On suppose que $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, où ℓ est un nombre réel. Montrer que
$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \ell.$$
4. Application : Calculer la limite suivante :
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\mathrm{Arccos} x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 477 (Examen 2000) ©
Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé et $f : \mathbb{R}^+ = [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par la formule suivante :
$$f(x) = \frac{1+x^n}{(1+x)^n}, \quad x \geqslant 0.$$

1. (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $f'(x)$ pour $x \geqslant 0$.
   (b) En étudiant le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^+$, montrer que f atteint un minimum sur $\mathbb{R}^+$ que l'on déterminera.
2. (a) En déduire l'inégalité suivante :
$$(1+x)^n \leqslant 2^{n-1}(1+x^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$
   (b) Montrer que si $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^+$ alors on a
$$(x+y)^n \leqslant 2^{n-1}(x^n+y^n).$$

Exercice 478 ©
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(t) = \begin{cases} e^{1/t} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en $t = 0$.
2. Etudier l'existence de $f''(0)$.
3. On veut montrer que pour $t < 0$, la dérivée n-ième de f s'écrit
$$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{1/t}$$
où P_n est un polynôme.
   (a) Trouver P_1 et P_2.
   (b) Trouver une relation de récurrence entre P_{n+1}, P_n et P'_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que f est de classe C^∞.

14 Fonctions circulaires et hyperboliques inverses

14.1 Fonctions circulaires inverses

Exercice 479 Écrire sous la forme $\frac{m}{n}\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $|m|$ et n premiers entre eux, $\arcsin(\sin\alpha)$, $\arccos(\cos\alpha)$ et $\arctan(\tan\alpha)$ dans les cas : $\alpha = \frac{59}{5}\pi$; $\alpha = \frac{84}{5}\pi$; $\alpha = \frac{76}{5}\pi$.

Exercice 480 Résoudre les équations suivantes :

1. $\arctan(2x) + \arctan x = \frac{\pi}{4}$.
2. $\arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin(x)$.

Exercice 481 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\arctan(x) + \arctan(\sqrt{3}x) = \frac{7\pi}{12}.$$

Exercice 482 Soient les fonctions $f : x \mapsto \arcsin(\sin x)$ et $g : x \mapsto \arctan\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

1. Simplifier les expressions de $f(x)$ et $g(x)$.
2. Construire les graphes de f et g.

Exercice 483 Une statue de hauteur s est placée sur un piédestal de hauteur p. À quelle distance doit se placer un observateur (dont la taille est supposée négligeable) pour voir la statue sous un angle maximal ?

Exercice 484 Démontrer les inégalités suivantes :

$$\operatorname{Arcsin} a < \frac{a}{1-a^2} \quad \text{si } 0 < a < 1;$$

$$\operatorname{Arctan} a < \frac{a}{1+a^2} \quad \text{si } a > 0.$$

Exercice 485 Écrire sous forme d'expression algébrique

$$\sin(\operatorname{Arccos} x), \quad \cos(\operatorname{Arcsin} x), \quad \sin(3\operatorname{Arctan} x).$$

Exercice 486 Tracer les courbes représentatives des fonctions

$$x \mapsto f(x) = \sin(\operatorname{Arcsin} x), \qquad x \mapsto f(x) = \operatorname{Arcsin}(\sin x).$$

Exercice 487 Résoudre les équation suivantes :

$$\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin}\frac{2}{5} + \operatorname{Arcsin}\frac{3}{5}, \quad \operatorname{Arccos} x = 2\operatorname{Arccos}\frac{3}{4},$$

$$\operatorname{Arctan} x = 2\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}.$$

Exercice 488 Calculer

$$\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{8}.$$

Exercice 489 Simplifier les expressions suivantes :

$$\mathrm{Arctan}(\tan x) \quad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}), \quad \mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \quad (0 < x < 2\pi),$$

$$\mathrm{Arctan}\,\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Exercice 490 Vérifier

$$\mathrm{Arcsin}\,x + \mathrm{Arccos}\,x = \frac{\pi}{2}, \qquad \mathrm{Arctan}\,x + \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{x} = \mathrm{sgn}(x)\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 491 Montrer que $\frac{\pi}{4} = 4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239})$ (on montrera que $0 \leqslant \arctan(\frac{1}{5}) \leqslant \frac{\pi}{8}$ et $0 \leqslant \arctan(\frac{1}{239}) \leqslant \frac{\pi}{2}$).

Exercice 492 Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\frac{1}{k^2-k+1}.$$

On montrera qu'elle converge (vers ℓ) et on évaluera $\lim_{n\to\infty} n(u_n - \ell)$.
Indication : que vaut $\arctan a - \arctan b$?

Exercice 493 Étudier la fonction :

$$\phi : x \to \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2} + \arccos\frac{2x}{1+x^2}.$$

Exercice 494 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$\arctan(x-1) + \arctan(x) + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2}.$$

14.2 Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

Exercice 495 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = (\cos x + \mathrm{ch}\,y, \cos x\,\mathrm{ch}\,y).$$

Discuter et déterminer selon $p \in \mathbb{R}$ l'image réciproque de $(4,p)$. On exprimera y à l'aide d'un logarithme. Déterminer numériquement cette image réciproque si $p = -2$.

Exercice 496

1. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(\mathrm{ch}\,x) = e^x.$$

2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(e^x) = \mathrm{ch}\,x.$$

Préciser le nombre de solutions.

3. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(e^x) = \operatorname{ch} x.$$

Préciser le nombre de solutions ; y a t-il des solutions continues sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 497 Calculer :

$$\lim_{x\to\infty} e^x(\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{sh}^3 x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty}(x - \ln(\operatorname{ch} x)).$$

Exercice 498 Donner un expression plus simple de :

$$y = \operatorname{argch}\sqrt{\frac{1+\operatorname{ch} x}{2}}; \quad y = \operatorname{argsh}(2x\sqrt{1+x^2}); \quad y = \operatorname{argth}\frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

Exercice 499 Calculer pour $(n, a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^2$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{ch}(a+bk), \quad \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sh}(a+bk).$$

Exercice 500 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, résoudre le système $\left\{\begin{array}{l} \operatorname{ch}x + \operatorname{sh}y = a \\ \operatorname{sh}x + \operatorname{ch}y = b \end{array}\right.$.

Exercice 501 Montrer que : $\operatorname{argth}x + \operatorname{argth}y + \operatorname{argth}z = \operatorname{argth}u$ et déterminer u.

Exercice 502 Les réels x et y étant liés par

$$x = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right),$$

calculer $\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x$ et $\operatorname{th} x$ en fonction de y.

Exercice 503 Montrer que $\operatorname{ch} nx$ et $\operatorname{sh} nx$ peuvent s'exprimer comme polynômes en $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$. Calculer $\operatorname{ch} 3x$ et $\operatorname{sh} 3x$ en fonctions de $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$. En déduire $\operatorname{th} 3x$ en fonction de $\operatorname{th} x$.

Exercice 504 Exprimer $\operatorname{ch}^n x$ et $\operatorname{sh}^n x$ au moyen de $\{\operatorname{sh} px, \operatorname{ch} px \ ; \ 1 \leqslant p \leqslant n\}$. Expliciter $\operatorname{ch}^5 x$ et $\operatorname{sh}^5 x$.

Exercice 505 Calculer les sommes

$$1 + \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} 2x + \cdots + \operatorname{ch} nx \quad \text{et} \quad 1 + \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} 2x + \cdots + \operatorname{sh} nx.$$

Exercice 506 Simplifier

$$\operatorname{Argth}\frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

Exercice 507 Vérifier les égalités

$$2\operatorname{Argth}\tan x = \operatorname{Argth}\sin 2x, \qquad \operatorname{Argsh}(3x+4x^3) = 3\operatorname{Argsh} x.$$

Exercice 508 Expliciter au moyen de la fonction logarithme $\operatorname{Argch}\frac{1}{x}$ et $\operatorname{Argsh}\frac{1}{x}$.

Exercice 509 Résoudre
$$x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x;$$
$$xy = a^2 \text{ et } \ln^2 x + \ln^y = \frac{5}{2}\ln^2 a.$$

Exercice 510 Préciser les comportements
de $x \mapsto \dfrac{x^2 - e^x}{x - e}$ quand $x \to e$,
de $x \mapsto \sqrt{\ln(1+x)} - \sqrt{\ln x}$ quand $x \to +\infty$,
de $x \mapsto \dfrac{a^x - b^x}{x}$ quand $x \to 0$.

Exercice 511 Démontrer les inégalités :
$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) \text{ pour } x > 0 \quad \text{et} \quad 1 + x \leqslant e^x \text{ pour tout } x \text{ réel.}$$

Exercice 512 Déterminer $\lim\limits_{+\infty}(x - \ln(\mathrm{ch}x))$.

Exercice 513 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ $\mathrm{ch}(2x) = 1 + 2\mathrm{sh}^2 x$. En déduire un équivalent de $\mathrm{ch}x - 1$ en 0.

Exercice 514 Résoudre l'équation $x^y = y^x$ où x et y sont des entiers positifs non nuls.

Exercice 515 Résoudre l'équation $\tan(3 \arcsin x) = 1$. On exprimera les trois solutions au moyen de radicaux.

15 Calculs d'intégrales

15.1 Théorie

Exercice 516 Déterminer les fonctions f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\int_a^b f(t)dt = (b - a) \sup\limits_{[a,b]} |f|$.

Exercice 517 Soient $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ et $I_n = \int_a^b f(t) \sin(nt)dt$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_n \to 0$.
2. Montrer que ceci est encore vrai si f est en escalier.
3. En déduire que le résultat subsiste pour f continue par morceaux.

Exercice 518 Soient $0 < a \leqslant b$. Montrer que $\int_a^b \frac{dx}{x} \leqslant \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$.

Exercice 519 Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $a \in]0, 1[$ telle que $f(a) = a$.

Exercice 520 Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$. On définit $g : \begin{cases} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \end{cases}$.

1. Montrer que g se prolonge par continuité en 0.
2. Montrer que si f est périodique, g admet une limite en $+\infty$.

Exercice 521 Soit f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall k \in \{0, ..., n\}, \int_0^1 f(u) u^k du = 0.$$

Montrer que f admet au moins $n+1$ zéros distincts dans $]0,1[$.

Exercice 522 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue strictement croissante telle que :

$$f(0) = 0, \ f(1) = 1.$$

Calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f^n(t) dt.$$

Exercice 523 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue, n'admettant qu'un nombre fini de zéros sur $[0,1]$, et telle que $f(0) = 0, f(1) = 1$. Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_0^1 e^{nt} f(t) dt \right| = +\infty.$$

Exercice 524 (Irrationnalité de π)

1. Soit $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que le polynôme $P_n = \frac{X^n(bX-a)^n}{n!}$ et ses dérivées successives prennent, en 0 et $\frac{a}{b}$, des valeurs entières.
2. Montrer que :
$$I_n = \int_0^\pi P_n(t) \sin(t) dt \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$
3. Montrer par l'absurde que $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercice 525 Soit f continue sur $[0,\pi]$ telle que $\int_0^\pi f(u)\cos(u) du = \int_0^\pi f(u)\sin(u) du = 0$, montrer que f s'annulle au moins deux fois sur $]0,\pi[$.

Exercice 526 Soit $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall g \in E\left([0,1], \mathbb{R}\right), \int_0^1 fg = 0.$$

Montrer que $f = 0$.

Exercice 527 Soit f une fonction C^1 sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose $f(a) = 0$. Montrer que :

$$\int_a^b f^2(u) du \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b f'^2(u) du.$$

Exercice 528 Soit f continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $[a,b]$. On suppose $a < 0 < b$ et $\int_0^1 f(t) dt = 0$. Montrer que :

$$\int_0^1 f^2(t) dt \leqslant -ab.$$

Exercice 529 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $(a < b)$, et f continue positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f^n(t) dt \right)^{\frac{1}{n}} = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|.$$

Exercice 530 Calculer sans utiliser de primitive, pour $a < b$:

$$\int_a^b e^t dt.$$

Exercice 531 Soit f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^1 f^n(u)du$ ne prenne qu'un nombre fini de valeurs quand n décrit $\mathbb{N}$. Montrer que $f = -1$ ou $f = 0$ ou $f = 1$.

Exercice 532 Soient f et g de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ croissantes. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \left(\int_0^x f\right)\left(\int_0^x g\right) \leqslant x \int_0^x fg.$$

Indication : on établira d'abord que, si $a_1 \leqslant a_2 \leqslant ... \leqslant a_n$ et $b_1 \leqslant b_2 \leqslant ... \leqslant b_n$, alors :

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n b_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

Remarquer que :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \geqslant 0.$$

Exercice 533 Calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n} dt.$$

Éventuellement, en donner un DL en $\frac{1}{n}$.

Exercice 534 Calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x} dx.$$

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue ; calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx^n f(x) dx.$$

Exercice 535 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue par morceaux, continue en 0, trouver une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(t)g_n(t)dt = f(0).$$

15.2 Intégration à l'aide d'une fonction auxiliaire

Exercice 536 Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{dx}{x^2+5} \quad ; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}} \quad ; \quad \int e^x \sin(e^x) dx \quad ; \quad \int \tan^3 x dx \quad ;$$

$$\int \frac{1}{\tan^3 x} dx \quad ; \quad \int \frac{2x+3}{(x^2+3x+7)^m} dx,\ m \in \mathbb{N} \quad ; \quad \int \frac{\ln x}{x} dx \quad ; \quad \int \frac{\operatorname{ch} x\, dx}{\operatorname{sh}^5 x}.$$

15.3 Changement de variables

Exercice 537 Considérons l'intégrale

$$I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$$

Effectuer le changement de variables $u = \sqrt{e^x - 1}$ et calculer I.
Résultat : $I = 2 - \pi/2$.

Exercice 538 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante et continûment dérivable. On considère les deux intégrales $I_1 = \int_a^b f(t)\, dt$ et $I_2 = \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\, dt$.

1. Rappeler pourquoi f admet une fonction réciproque f^{-1}.
2. Faire le changement de variable $t = f(u)$ dans l'intégrale I_2.
3. Calculer I_2 en fonction de I_1.
4. Faire un dessin faisant apparaître f et f^{-1}, et interpréter ce résultat géométriquement.

Exercice 539 Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{1}{\sqrt{2+x} + \sqrt[3]{2+x}} dx, \quad (t = \sqrt[6]{2+x})\ ;$$

$$\int \frac{1}{((x-1)^2 - 4)^2} dx, \quad (\frac{x-1}{2} = \operatorname{th} u \text{ ou } \coth u)\ ;$$

$$\int (\arcsin x)^2 dx \quad ; \quad \int x^2 \sqrt{1 + x^3} dx.$$

15.4 Intégration par parties

Exercice 540 Calculer les primitives suivantes :

$$\int e^x \cos x dx \quad ; \quad \int \frac{\ln x}{x^n} dx \ n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \int x \operatorname{Arctan} x dx \quad ; \quad \int (x^2 + x + 1) e^x dx.$$

Exercice 541 Soit $I_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
2. Calculer I_n.
3. En déduire $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k$.

Exercice 542 Soit $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$.

1. Montrer que $\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) + \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(a - x)(b - x)dx$.
2. En déduire un encadrement de $\int_a^b f(t)dt$ si $\forall x \in [a, b]\ m \leqslant f''(x) \leqslant M$.

Exercice 543 (Intégrales de Wallis) Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
2. En déduire I_{2p} et I_{2p+1}.

3. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.
4. En déduire que $I_n \sim I_{n+1}$.
5. Calculer nI_nI_{n+1}.
6. Donner alors un équivalent simple de I_n.

Exercice 544 Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k})$.

Exercice 545 Calculer par récurrence :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{du}{\cos^n u}.$$

Exercice 546 Calculer par récurrence :

$$J_n = \int_1^e \log(u)^n du.$$

15.5 Polynôme en sin, cos, ou en ch, sh

Exercice 547 Calculer les primitives suivantes :

$$\int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 3x)dx \quad ; \quad \int \cos x \sin^4 x dx \quad ; \quad \int \cos^6 x dx \quad ;$$

$$\int \sin^3 x \cos x dx \quad ; \quad \int \sin^4 x dx \quad ; \quad \int \sin^3 x \cos^2 x dx \quad ;$$

$$\int \mathrm{ch}^2\, x\, \mathrm{sh}^2\, x dx \quad ; \quad \int \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}^3\, x dx \quad ; \quad \int \mathrm{ch}\, x\, \mathrm{sh}^3\, x dx.$$

Exercice 548 Déterminer les intervalles d'étude et calculer les primitives des fonctions :

$$x \cos^2 x$$

$$\cos(2x)\cos^2 x$$

15.6 Fractions rationnelles

Exercice 549 Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{x^4+1}{x(x-1)^3}dx \quad ; \quad \int \frac{dx}{(x^4+1)^2} \quad ; \quad \int \frac{xdx}{x^4+x^2+1} \quad ; \quad \int \frac{dx}{(x-1)(x^2-2x-2)^2}.$$

Exercice 550 Déterminer les intervalles d'étude et calculer les primitives des fonctions :

$$\frac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)}$$

$$\frac{2x}{(1-x+x^2)^2}$$

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+4)}$$

$$\frac{1}{(1+x^3)^3}$$

15.7 Fractions rationnelles en sin, cos ou en sh, ch

Exercice 551 Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}dx \quad ; \quad \int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}dx \quad ; \quad \int \frac{dx}{\cos^4 x+\sin^4 x} \quad ; \quad \int \frac{\cos x}{1+\sin 2x}dx \quad ;$$

$$\int \frac{\tan x-\tan a}{\tan x+\tan a}dx \quad ; \quad \int \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^4 x+\operatorname{ch}^4 x}dx.$$

Exercice 552 Déterminer les intervalles d'étude et calculer les primitives des fonctions :

$$\frac{\cos^3 x}{\sin x}$$

$$\frac{1}{1+\tan x}$$

$$\frac{1}{\operatorname{th}^2 x}$$

15.8 Intégrales abéliennes

Exercice 553 Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}} \quad ; \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} \quad ; \quad \int \frac{x}{\sqrt{9+4x^4}}dx \quad ;$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}{x+2}dx \quad ; \quad \int \frac{x+1}{\sqrt{-4x^2+4x+1}}dx.$$

Exercice 554 Déterminer les intervalles d'étude et calculer les primitives des fonctions :

$$\frac{8x-3}{\sqrt{12x-4x^2-5}}$$

$$\sqrt{x^2-1}$$

$$\frac{x\sqrt{x}}{x^2-5x+4}$$

15.9 Primitives diverses

Exercice 555 Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x\sqrt{\operatorname{ch} 2x}} \quad ; \quad \int \frac{x}{\cos^2 x}dx \quad ; \quad \int \frac{1+\cos 2x}{1-\tan^2 x}dx \quad ;$$

$$\int \frac{\sin ax+\cos bx}{e^x}dx \quad ; \quad \int \frac{x(2+\cos x)}{\sin^2 x}dx.$$

Exercice 556 Déterminer les intervalles d'étude et calculer les primitives des fonctions :

$$\operatorname{ch} x \sin(2x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2+\tan^2 x}}$$

$$(x^2+2x+2)\cos(2x)$$

$$x^2\cos x \text{ et } x^2 \sin x \text{ en utilisant les complexes}$$

$$\frac{1}{(x^2-1)^3} \text{ et } \frac{1}{(x^2-1)^2}$$

$$\frac{\sqrt{1+x}}{x\sqrt{1-x}}$$

Exercice 557 Calculer $\int_0^1 \ln(1+x^2)$.

Exercice 558 Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2+k^2})$.

Exercice 559 Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{(2n)!}{n!n^n})^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 560 Soient $I=\int_0^\pi x\cos^2 x dx$ et $J=\int_0^\pi x\sin^2 x dx$.

1. Calculer I et $I+J$.
2. En déduire J.

Exercice 561 Soit $a_n=\int_0^1 t^n e^t dt$.

1. Calculer $a_0,\dots,a_4$.
2. Etudier la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

15.10 Sommes de Riemann

Exercice 562 Calculer :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}, \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}.$$

Exercice 563 Calculer :

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\ ;\ \lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2}\ ;\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}\ ;\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}.$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}.$$

Calculer :

$$\ell=\lim_{n\to\infty}u_n$$

et donner un équivalent de $u_n-\ell$.

Exercice 564 Soient f et g continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Calculer :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)g\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

Exercice 565 Calculer :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n^2}\frac{n}{n^2+k^2}.$$

16 Équations différentielles

16.1 Premier ordre

Exercice 566 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'=y+x$ avec $y(0)=1$,
2. $y'=\cos x+y$,
3. $y'+2y=(x-2)^2$.

Exercice 567 Pour chacune des équations différentielles qui suit : écrire la solution passant par le point M(.,.) et tracer sommairement le graphe de la solution.

1. $y'+2xy=0, \quad M=(0,1)$,
2. $y'+y\tan x=\sin x\cos x \quad M=(\frac{\pi}{4},0)$,
3. $x(x^2-1)y'+2y=x^2$, On déterminera $a,b,c\in\mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{x(x^2-1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1}$.

Exercice 568 (Partiel de Novembre 1994) © On se propose d'intégrer sur l'intervalle le plus grand possible contenu dans $]0,\infty[$ l'équation différentielle :

$$(E)\qquad y'(x)-\frac{y(x)}{x}-y(x)^2=-9x^2.$$

1. Déterminer $a\in]0,\infty[$ tel que $y(x)=ax$ soit une solution particulière y_0 de (E).

2. Montrer que le changement de fonction inconnue : $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ transforme l'équation (E) en l'équation différentielle
$$(E1) \qquad z'(x) + (6x + \frac{1}{x})z(x) = 1.$$
3. Intégrer $(E1)$ sur $]0, \infty[$.
4. Donner toutes les solutions de (E) définies sur $]0, \infty[$.

Exercice 569 Trouver les solutions réelles des équations différentielles suivantes :
1. $y'(t) + 2y(t) = 0$;
2. $\dfrac{dx}{dt} - x = 0$;
3. $y'(x) + 2y(x) = 0$ avec $(y - y')(0) = 0$.

Exercice 570 Trouver les solutions réelles des équations différentielles suivantes :
1. $(1 + x^2)y' - xy = 0$;
2. $y' + y \tan x = 0$, pour x dans $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

Exercice 571 Trouver les solutions réelles sur l'intervalle maximal de l'équation différentielle :
$$t^2y' + y = 1.$$

Exercice 572© Soit l'équation différentielle
$$(E) \qquad y' + 2xy = x.$$
1. Résoudre l'équation homogène asociée.
2. Calculer la solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$.

Exercice 573 Résoudre et raccorder éventuellement :
1. $xy' - 2y = x^4$.
2. $x(1 + x^2)y' = y$.
3. $(x^2 + 1)y' + (x - 1)^2y = x^3 - x^2 + x + 1$.
4. $(e^x - 1)y' + (e^x + 1)y = 3 + 2e^x$.

Exercice 574 Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) = 3x(t) - y(t) \end{cases}$ et $\begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = -2 \end{cases}$.

Exercice 575 Résoudre l'équation différentielle de Ricatti $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$ en trouvant une solution particulière y_0 et en posant $z = \frac{1}{y - y_0}$.

Exercice 576 Soit l'équation différentielle :
$$(E) : \frac{dy(x)}{dx} + y(x) = x^2 + 2x$$
Intégrer (E) et montrer que par un point donné il passe une et une seule courbe intégrale. Soit H l'ensemble des points M tels que la courbe intégrale passant par M a une tangente horizontale en ce point, et I l'ensemble des points M tels que la courbe intégrale passant par ce point a un point d'inflexion en ce point. Tracer H, I et la courbe intégrale passant par $O(0, 0)$. En déduire un tracé géométrique des courbes intégrales.

Exercice 577 Résoudre le système différentiel :

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) + y(t),$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = 3x(t) - y(t),$$

$$x(0) = 2, y(0) = -2.$$

Exercice 578 Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que si :

$$\lim_{x\to\infty} (f'(x) + \alpha f(x)) = 0$$

alors :

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Exercice 579 Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 1$ et $f \leqslant f' \leqslant 2f$.Encadrer $f(-1)$ et $f(1)$.

16.2 Second ordre

Exercice 580 Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

1. $y'' + 4y' + 3y = 0$,
2. $y'' - 6y' + 9y = 0$,
3. $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Exercice 581 Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

1. $y'' - y = x^3 + x^2$,
2. $y'' - 2y' + y = e^x$,
3. $y'' - 2y' + y = \cos(mx)$ où $m \in \mathbb{R}$,
4. $y'' - 2y' + y = x^3e^x + 2\cos x + (x^3 + 3)$ (utiliser le principe de superposition).

Exercice 582 On considère l'équation homogène (E) $\;ay'' + by' + cy = 0$, avec $a \neq 0$. Donner des conditions necessaires et suffisantes liant les coefficients a, b et c dans les deux cas suivants :
(i) toutes les solutions de (E) tendent vers 0 lorsque x tend vers l'infini ;
(ii) toutes les solutions sont périodiques.

Exercice 583 Résoudre l'équation :

$$y'' + k^2y = \cos mx, \quad k, m \in \mathbb{R}.$$

On discutera suivant les valeurs de k et m.

Exercice 584© Résoudre l'équation suivante :

$$y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

Exercice 585© Résoudre l'équation suivante :

$$y'' - y = -6\cos x + 2x\sin x.$$

Exercice 586$^{©}$ Résoudre l'équation suivante :

$$4y'' + 4y' + 5y = \sin x e^{-x/2}.$$

Exercice 587$^{©}$ On considère l'équation :

$$y'' + 2y' + 4y = xe^{x} \qquad (E)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. Trouver une solution particulière de (E) (expliquer votre démarche), puis donner l'ensemble de toutes les solutions de (E).
3. Déterminer l'unique solution h de (E) vérifiant $h(0) = 1$ et $h(1) = 0$.
4. Soit $f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $]0, \infty[$ et qui vérifie :

$$t^2 f''(t) + 3tf'(t) + 4f(t) = t \log t.$$

   (a) On pose $g(x) = f(e^x)$, vérifier que g est solution de (E).
   (b) En déduire une expression de f.

Exercice 588 Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer la solution de l'équation :

$$(E_m) \qquad y'' - 2y' + (1 + m^2)y = (1 + 4m^2)\cos mx$$

qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ (Indication : On traitera séparement les cas $m = 0$ et $m \neq 0$).

Exercice 589 On considère l'équation différentielle :

$$y'' + 6y' + 9y = d(x) \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. Trouver une solution particulière de (E) lorque, respectivement, on pose :

$$d(x) = (x^2 + 1)e^{-3x} \ \text{ et } \ d(x) = \cos x.$$

3. Donner la forme générale des solutions de (E) lorsque :

$$d(x) = 2(x^2 + 1)e^{-3x} + 50\cos x.$$

Exercice 590 Déterminer une équation différentielle vérifiée par la famille de fonctions

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 591 Déterminer une équation différentielle admettant $(r - 2)^2 = 0$ comme équation caractéristique et $e^x + (x^3/6)e^{2x}$ comme solution particulière.

Exercice 592 Déterminer l'ensemble des solutions réelles des équations :
a) $y'' + y' - 6y = e^{3x}$, b) $y'' + y' - 6y = e^x(2x + 1)$,
c) $y'' - 4y' + 13y = \cos x$, d) $y'' + 3y' + 2y = e^{-2x}(x + 1)$ avec $y(0) = 1$, $y(1) = 0$.

Exercice 593 (Partiel Novembre 96)$^{©}$ On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E.D.) \quad y'' - 4y' + 4y = d(x),$$

où d est une fonction qui sera précisée plus loin.

1. Résoudre l'équation différentielle homogène (ou sans second membre) associée à $(E.D.)$.
2. Trouver une solution particulière de $(E.D.)$ lorsque $d(x) = e^{-2x}$ et lorsque $d(x) = e^{2x}$ respectivement.
3. Donner la forme générale des solutions de $(E.D)$ lorsque
$$d(x) = \frac{e^{-2x} + e^{2x}}{4}.$$

Exercice 594 Résoudre sur $\mathbb{R}$:
1. $y'' - 4y = 4e^{-2x}$.
2. $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + 1)e^x$.
3. $y'' - 2y' + y = e^x \sin x$.
4. $y'' + y = e^{-|x|}$.

Exercice 595 Trouver les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}\ f''(x) + f(-x) = x$.

Exercice 596 Résoudre sur $]0, +\infty[$ $xy'' - y' - x^3 y = 0$ en posant $z(t) = y(\sqrt{t})$.

Exercice 597 Résoudre en posant $z(t) = y(e^t)$ ou $y(-e^t)$ suivant le signe de x, les équations différentielles (d'Euler) suivantes :
1. $x^2 y'' - 2y = x$.
2. $x^2 y'' + xy' + y = x \ln |x|$.

Exercice 598 Résoudre l'équation différentielle de Bernouilli $x^2 y^2 - xy' - 3y = 0$ en supposant que y ne s'annule pas et en posant $z = \frac{1}{y}$.

Exercice 599 Résoudre sur $\mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} x\frac{dy(x)}{dx} - 2y(x) &= x^4, \\ y"(x) - 4y(x) &= 4e^{-2x}, \\ y"(x) - 2y'(x) + y(x) &= e^x \sin x. \end{aligned}$$

Exercice 600 En posant $z = \frac{1}{y}$ et en supposant que y ne s'annule pas, résoudre l'équation (de Bernoulli) :
$$x^2 \frac{d^2 y(x)}{dx^2} - x\frac{dy(x)}{dx} - 3y(x) = 0.$$

Exercice 601© Résoudre : $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 2x \cos x \cosh x$.

Exercice 602© Déterminer les $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x \cos x.$$

Exercice 603 Soit p continue positive non nulle ; montrer que toute solution de $y''(x) + p(x)y(x) = 0$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 604 Montrer que toute solution de $y''(x)e^{-x^2} + y(x) = 0$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 605© En posant $t = \arctan x$, résoudre :
$$y''(x) + \frac{2x}{1+x^2} y'(x) + \frac{y(x)}{(1+x^2)^2} = 0.$$

Exercice 606© Résoudre par le changement de fonction $z = \frac{y}{x}$ l'équation différentielle :
$$x''^2(x) - 2xy'(x) + (2 - x^2)y(x) = 0.$$

Troisième partie
ALGÈBRE 2

17 Espaces vectoriels

17.1 Définition, sous-espaces

Exercice 607 © Déterminer lesquels des ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Calculer leurs dimensions.
$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x + y - z = x + y + z = 0\}$.
$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x^2 - z^2 = 0\}$.
$E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ e^x e^y = 0\}$.
$E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ z(x^2 + y^2) = 0\}$.

Exercice 608 Soit $\mathbb{R}_+^*$ muni de la loi interne $\oplus$ définie par $a \oplus b = ab, \forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et de la loi externe $\otimes$ telle que $\lambda \otimes a = a^\lambda, \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $E = (\mathbb{R}_+^*, \oplus, \otimes)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 609© Parmi les ensemble suivant reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

$$\begin{aligned}
&E_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + a = 0, \text{ et } x + 3az = 0\right\} \\
&E_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f(1) = 0\}, \qquad E_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f(0) = 1\} \\
&E_4 = \{P \in \mathbb{R}_n[X]; P' = 3\}, \qquad E_5 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + \alpha y + 1 \geqslant 0\right\}.
\end{aligned}$$

Exercice 610 Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :
$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/x + y = 0\}$; $\quad E'_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/xy = 0\}$.
$E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4/x = 0, y = z\}$; $\quad E'_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/x = 1\}$.
$E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x^2 + xy \geqslant 0\}$; $\quad E'_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x^2 + xy + y^2 \geqslant 0\}$.
$E_4 = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}/f(1) = 0\}$; $\quad E'_4 = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}/f(0) = 1\}$;
$E_4" = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}/f \text{ est croissante}\}$.

Exercice 611 Déterminer si $\mathbb{R}^2$, muni des lois internes et externes suivantes, est ou n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :

1. $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d); \lambda(a, b) = (a, \lambda b), \lambda \in \mathbb{R}$.
2. $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d); \lambda(a, b) = (\lambda^2 a, \lambda^2 b), \lambda \in \mathbb{R}$.
3. $(a, b) + (c, d) = (c, d); \lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b), \lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 612 Montrer que l'ensemble $\mathcal{E} = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}/(\exists(a, \varphi) \in \mathbb{R}^2)(\forall x \in \mathbb{R})f(x) = a\cos(x - \varphi)\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 613 Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

1. Soient F et G deux sous-espaces de E. Montrer que
$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$
2. Soient H un troisième sous-espace vectoriel de E. Prouver que
$$G \subset F \Longrightarrow F \cap (G + H) = G + (F \cap H).$$

Exercice 614 On munit $\mathbb{R}^2$ de l'addition usuelle et de la loi externe $\lambda(x,y) = (\lambda x, y)$. Est-ce un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Exercice 615 Montrer que $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z=0 \text{ et } 2x-y+3z=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 616 Montrer que

$$F = \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) | \exists (A,\phi) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = A\cos(x+\phi)\}$$

est un espace vectoriel.

17.2 Systèmes de vecteurs

Exercice 617© Soient E et F les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ engendrés respectivement par les vecteurs $\left\{\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right\}$ et $\left\{\begin{pmatrix}3\\7\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\0\\-7\end{pmatrix}\right\}$. Montrer que E et F sont égaux.

Exercice 618 Prouver que dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $u_1 = (2,3,-1)$ et $u_2 = (1,-1,-2)$ engendrent le même s.e.v. que les vecteurs $v_1 = (3,7,0)$ et $v_2 = (5,0,-7)$.

Exercice 619

1. Montrer que les systèmes : $S_1 = (1;\sqrt{2})$ et $S_2 = (1;\sqrt{2};\sqrt{3})$ sont libres dans $\mathbb{R}$ considéré comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.
2. Soient, dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs $u_1 = (3+\sqrt{5}, 2+3\sqrt{5})$ et $u_2 = (4, 7\sqrt{5}-9)$. Montrer que le système (u_1,u_2) est $\mathbb{Q}$-libre et $\mathbb{R}$-lié.
3. Soient les vecteurs $v_1 = (1-i, i)$ et $v_2 = (2, -1+i)$ dans $\mathbb{C}^2$.
   (a) Montrer que le système (v_1,v_2) est $\mathbb{R}$-libre et $\mathbb{C}$-lié.
   (b) Vérifier que le système $S = \{(1,0),(i,0),(0,1),(0,i)\}$ est une base de l'e.v. $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et donner les composantes des vecteurs v_1, v_2 par rapport à cette base.

Exercice 620

1. On définit les fonctions suivantes : $f_1 : t \mapsto \cos t.\mathrm{ch}t$, $f_2 : t \mapsto \cos t.\mathrm{sh}t$, $f_3 : t \mapsto \sin t.\mathrm{ch}t$, $f_4 : t \mapsto \sin t.\mathrm{sh}t$. Montrer que le système (f_1,f_2,f_3,f_4) est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. Même question pour la famille $\mathcal{F} = \{f_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 621 Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $S_1 = (e_1, e_2, ..., e_n)$ un système libre dans E, $n \geqslant 2$.

1. On considère le système $S_2 = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ défini par : $e'_j = \sum_{k=1}^{j} e_k, 1 \leqslant j \leqslant n$. S_2 est-il libre ?
2. On considère le système $S_3 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ défini par : $\varepsilon_j = e_j + e_{j+1}, 1 \leqslant j \leqslant n-1$ et $\varepsilon_n = e_n + e_1$. Montrer les résultats suivants :
   (a) S_3 libre $\Rightarrow S_1$ libre.
   (b) n impair : S_3 libre $\Leftrightarrow S_1$ libre.
   (c) n pair : S_3 lié.

Exercice 622 © Peut-on déterminer des réels x, y pour que le vecteur $v = (-2, x, y, 3)$ appartienne au s.e.v. engendré dans $\mathbb{R}^4$ par le système (e_1, e_2) où $e_1 = (1, -1, 1, 2)$ et $e_2 = (-1, 2, 3, 1)$?

Exercice 623 Soient $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \cos(x)\cos(2x)$ et $h(x) = \sin(x)\sin(2x)$. Déterminer $\mathrm{vect}(f, g, h)$.

Exercice 624 © Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 \text{ si } x = \alpha\ , 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre.

Exercice 625 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $g_\alpha : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\alpha x} \end{cases}$. Montrer que la famille $(g_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre.

Exercice 626 Montrer que les familles suivantes sont libres dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, et ce quelque soit $N \in \mathbb{N}^*$:

$$(x \to |x-a|)_{a=1,3,5,\ldots,2N+1}\,;\,(x \to \cos nx)_{n=1,2,\ldots,N}\,;\,(x \to e^{ax})_{a=1,\ldots,N}$$

17.3 Somme directe

Exercice 627 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$. On définit

$$E_a = \{P \in E; (X-a)/P\}$$

pour $a \in \mathbb{R}$. Montrer que si $a \neq b$ il existe un couple de réels (c, d) tels que $1 = c(X-a)+d(X-b)$. En déduire que $E = E_a + E_b$, la somme est-elle directe ?

Exercice 628 © Soit $E = \Delta^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E / f(0) = f'(0) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer un supplémentaire de F dans E.

Exercice 629 Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont *supplémentaires* dans E lorsque $F \cap G = \{0\}$ et $E = F+G$. On note $E = F \oplus G$.

1. Soient $e_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ et $e_5 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Posons $F = \mathrm{Vect}\,\{e_1, e_2\}, G = \mathrm{Vect}\,\{e_3, e_4\}, G' = \mathrm{Vect}\,\{e_3, e_4, e_5\}$. Montrer que $E = F \oplus G$ et $E \neq F \oplus G'$.
2. Supposons que E est de dimension finie n, que $\dim\,(F) = p$ et $E = F \oplus G$.
   (a) Calculer $\dim\,(G)$.
   (b) Montrer que tout élément x de E se décompose d'une manière *unique* en une somme $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$.
   (c) Soient $\mathcal{F} = \{f_1, \cdots, f_k\}$ une famille libre de F et $\mathcal{G} = \{g_1, \cdots, g_l\}$ une famille libre de G. Montrer que la famille $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est libre.
   (d) Soit φ une application linéaire de E dans $\mathbb{R}^q$, $q \in \mathbb{N}$. Construire deux applications linéaires ψ et ψ' de E dans $\mathbb{R}^q$ telles que : $\forall y \in F : \psi'(y) = 0, \forall z \in G : \psi(z) = 0$ et $\forall x \in E : \varphi(x) = \psi(x) + \psi'(x)$.

Exercice 630 (Caractérisation de la somme directe de trois s.e.v.)
Soient U, V, W des s.e.v. d'un e.v. E, vérifiant $(I) : U \cap V = \{0\} = (U + V) \cap W$.

1. Démontrer que $V \cap W = \{0\} = U \cap (V + W)$.
2. Montrer que (I) équivaut à
$$(II) : (\forall x \in U + V + W)(\exists!(u, v, w) \in U \times V \times W)(x = u + v + w).$$

Exercice 631 Soit
$$E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_n \text{ converge } \}.$$
Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont des sous-espaces supplémentaires de E.

18 Applications linéaires

18.1 Définition

Exercice 632 Soient f et g, applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définies par $f(z) = \bar{z}$ et $g(z) = \Re(z)$. Montrer que f et g sont linéaires sur $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-e.v., et non linéaires sur $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$-e.v.

Exercice 633 Déterminer si les applications f_i suivantes (de E_i dans F_i) sont linéaires :
$$f_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2x + y, x - y) \in \mathbb{R}^2, f_2 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (xy, x, y) \in \mathbb{R}^3$$
$$f_3 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x + y + z, y - z, x + y) \in \mathbb{R}^3$$
$$f_4 : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P' \in \mathbb{R}[X], f_5 : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto P' \in \mathbb{R}_3[X]$$
$$f_6 : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto (P(-1), P(0), P(1)) \in \mathbb{R}^3, f_7 : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P - (X - 2)P' \in \mathbb{R}[X].$$

Exercice 634 ©
Soit E un espace vectoriel de dimension n et φ une application linéaire de E dans lui-même telle que $\varphi^n = 0$ et $\varphi^{n-1} \neq 0$. Soit $x \in E$ tel que $\varphi^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $\{x, \ldots, \varphi^{n-1}(x)\}$ est une base de E.

18.2 Image et noyau

Exercice 635 © Soient E un espace vectoriel et φ une application linéaire de E dans E. On suppose que Ker $(\varphi) \cap$ Im $(\varphi) = \{0\}$. Montrer que, si $x \notin$ Ker (φ) alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\varphi^n(x) \neq 0$.

Exercice 636 Pour des applications linéaires $f : E \to F$, $g : F \to G$, établir l'équivalence
$$g \circ f = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} g.$$
Soit f un endomorphisme d'un e.v. E, vérifiant l'identité $f^2 + f - 2i_E = 0$. Etablir $\mathrm{Im}(f - i_E) \subset \mathrm{Ker}(f + 2i_E)$; $\mathrm{Im}(f + 2i_E) \subset \mathrm{Ker}(f - i_E)$; $E = \mathrm{Ker}(f - i_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + 2i_E)$.

Exercice 637 © Soient E un espace vectoriel de dimension n et f une application linéaire de E dans lui-même. Montrer que les deux assertions qui suivent sont équivalentes :

1. $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{im}(f)$.

2. $f^2 = 0$ et $n = 2\ \mathrm{rg}(f)$.

Exercice 638 Soient E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Soit f une application linéaire de E dans lui-même.

1. Montrer que, si $F \subset f(F)$ alors $f(F) = F$.
2. Montrer que, si f est injective et $f(F) \subset F$ alors $f(F) = F$.

Exercice 639 Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires. Montrer que $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 640 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et φ une application linéaire de E dans lui-même. Posons $K_n = \mathrm{Ker}\ (\varphi^n)$ et $I_n = \mathrm{Im}\ (\varphi^n)$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on ait $K_n = K_{n_0}$. Déduiser en que pour tout $n \geqslant n_0$ on a également $I_n = I_{n_0}$.

Exercice 641 Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g.

Exercice 642 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = f^2 + f$. Montrer que $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ (on remarquera que $f \circ (f^2 - f - id) = 0$).

Exercice 643© Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = f(\ker(f \circ f))$.

Exercice 644 Soit U un sous-espace vectoriel de E espace vectoriel, et

$$A = \{f \in L(E) | U \subset \mathrm{Ker}(f)\}.$$

Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $L(E)$.

Exercice 645 Donner des exemples d'applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

1. $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.
2. $\mathrm{Ker}(f)$ inclus strictement dans $\mathrm{Im}(f)$.
3. $\mathrm{Im}(f)$ inclus strictement dans $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 646 Soit $(u, v) \in (L(E))^2$, tels que $u^2 = u$ et $vu = 0$. Montrer que

$$\mathrm{Im}(u + v) = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v).$$

18.3 Injectivité, surjectivité, isomorphie

Exercice 647

1. Dire si les applications $f_i, 1 \leqslant i \leqslant 6$, sont linéaires

$$\begin{aligned}
f_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2x + y, ax - y) \in \mathbb{R}^2,\\
f_2 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (xy, ax, y) \in \mathbb{R}^3,\\
f_3 : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto aP' + P \in \mathbb{R}[X],\\
f_4 : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto P' \in \mathbb{R}_2[X],\\
f_5 : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto (P(-1), P(0), P(1)) \in \mathbb{R}^3,\\
f_6 : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P - (X - 2)P' \in \mathbb{R}[X].
\end{aligned}$$

2. Pour les applications linéaires trouvées ci-dessus, déterminer $\ker(f_i)$ et $\mathrm{Im}\ (f_i)$, en déduire si f_i est injective, surjective, bijective.

Exercice 648 Soit $f \in L(E)$ non nul ; montrer que f est injective si et seulement si pour tout couple (E_1, E_2) de sous-espaces supplémentaires de E, la somme $f(E_1) + f(E_2)$ est directe (i.e. $f(E_1)$ et $f(E_2)$ sont supplémentaires).

Exercice 649 Soit $f \in L(E)$ où E est un $K-$espace vectoriel. On suppose :

$$\forall x \in E, \exists \lambda \in K, f(x) = \lambda x.$$

Montrer :

$$\exists \mu \in K, f = \mu id.$$

Exercice 650 Soient $E = \mathbb{C}_n[X]$ et A et B deux polynômes à coefficients complexes de degré $(n+1)$. On considère l'application f qui à tout polynôme P de E, associe les reste de la division euclidienne de AP par B.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Montrer l'équivalence

$$f \text{ est bijective} \Longleftrightarrow A \text{ et } B \text{ sont premiers entre eux.}$$

Exercice 651 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = f^2 + f + id$. Montrer que f est un automorphisme.

Exercice 652 Soit E un $\mathbb{C}$–espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2Id = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que f est un automorphisme.
2. Montrer que $E = \ker(f - Id) \oplus \ker(f - 2Id)$.
3. Déduire de 2. que si E est de dimension finie n, il existe une base $\beta = (\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, telle que $\forall i, f(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$ avec $\lambda_i = 1$ ou $\lambda_i = 2$.

Exercice 653 Montrer que si $p < q$ il n'existe pas d'application linéaire surjective de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$. Montrer que si $q < p$ il n'existe pas non plus d'application linéaire injective de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$.

Exercice 654© Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et φ une application linéaire de E dans F. Montrer que φ est un isomorphisme si et seulement si l'image par φ de toute base de E est une base de F.

Exercice 655

1. Soient E et F deux espaces vectoriels et φ une application linéaire bijective de E dans F. Montrer que la bijection réciproque φ^{-1} est linéaire. Une telle application est dite un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Montrer qu'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels de E à valeurs dans F si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.

Exercice 656 Soit E un espace vectoriel de dimension finie φ et ψ deux applications linéaires de E dans lui-même telles que $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_E$. Montrer que $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_E$.

18.4 Morphismes particuliers

Exercice 657 Soient U et V deux ensembles non vides et f une application de U à valeurs dans V. Le *graphe* de f est le sous-ensemble de $U \times V$ défini par $\mathcal{G}_f = \{(x,y) \in U \times V$ tels que $y = f(x)\}$.

1. On suppose maintenant que U et V sont des espaces vectoriels. Rappeler la définition de la structure d'espace vectoriel de $U \times V$.
2. Montrer qu'une partie H de $U \times V$ est le graphe d'une application linéaire de U dans V si et seulement si les trois conditions qui suivent sont satisfaites :
   i) La projection canonique $H \to U$ définie par $(x,y) \mapsto x$ est surjective.
   ii) H est un sous-espace vectoriel de $U \times V$.
   iii) $H \cap (\{0_U\}) \times V) = \{0_{U\times V}\}$. ($0_U$ et $0_{U\times V}$ sont les éléments neutres respectifs de U et $U \times V$.)
3. On identifie $\mathbb{R}^4$ à $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ par l'isomorphisme $(x,y,z,t) \mapsto ((x,y),(z,t))$. Enoncer des conditions nécéssaires et suffisantes pour que E soit le graphe d'une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même.
4. Montrer que E est le graphe d'une application linéaire φ de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même. Déterminer sa matrice dans une base que l'on définira au préalabe.

Exercice 658 (Projecteur et involution)
Soit E un espace vectoriel ; on note i_E l'identité sur E. Un endomorphisme u de E est un **projecteur** si $u \circ u = u$.

1. Montrer que si u est un projecteur alors $i_E - u$ est un projecteur. Vérifier aussi que $\mathrm{Im}u = \{x \in E;\ \ u(x) = x\}$ et que $E = \mathrm{Ker}u \oplus \mathrm{Im}u$.
   Un endomorphisme u de E est appelé *involutif* si $u \circ u = i_E$.
2. Montrer que si u est involutif alors u est bijectif et $E = \mathrm{Im}(i_E + u) \oplus \mathrm{Im}(i_E - u)$.
   Soit $E = F \oplus G$ et soit $x \in E$ qui s'écrit donc de façon unique $x = f + g$, $f \in F$, $g \in$G.
   Soit $u : E \ni x \mapsto f - g \in E$.
3. Montrer que u est involutif, $F = \{x \in E;\ u(x) = x\}$ et $G = \{x \in E;\ u(x) = -x\}$.
4. Montrer que si u est un projecteur, $2u - i_E$ est involutif et que tout endomorphisme involutif peut se mettre sous cette forme.

Exercice 659 Soient $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 2x + y - z = 0\}$ et $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 2x - 2y + z = 0, x - y - z = 0\}$. On désigne par ε la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner une base $\{e_1, e_2\}$ de P et $\{e_3\}$ une base de D. Montrer que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$ puis que $\varepsilon' = \{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p la projection de $\mathbb{R}^3$ sur P parallélement à D. Déterminer $\mathrm{Mat}(p, \varepsilon', \varepsilon')$ puis $A = \mathrm{Mat}(p, \varepsilon, \varepsilon)$. Vérifier $A^2 = A$.
3. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à P parallélement à D. Déterminer $\mathrm{Mat}(s, \varepsilon', \varepsilon')$ puis $B = \mathrm{Mat}(s, \varepsilon, \varepsilon)$. Vérifier $B^2 = I$, $AB = A$ et $BA = A$.

Exercice 660

1. Soit E un espace vectoriel de dimension n. Un *hyperplan* de E est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$. Montrer que l'intersection de deux hyperplans de E a une dimension supérieure ou égale à $n-2$. Montrer que, pour tout $p \leqslant n$, l'intersection de p hyperplans a une dimension supérieure ou égale à $n-p$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'application e_y de $\mathbb{R}_n[X]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie en posant $e_y(P(X)) = P(y)$ (i.e. l'application e_y est l'évaluation en y) est linéaire. Calculer la dimension de son noyau.
3. Même question avec l'application e'_y de $\mathbb{R}_n[X]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie en posant $e'_y(P(X)) = P'(y)$ (en désignant par P' le polynôme dérivé de P).
4. Démontrer, à l'aide de ces deux résultats, qu'il existe dans $\mathbb{R}_6[X]$ un polynôme P non nul et ayant les propriétés suivantes : $P(0) = P(1) = P(2) = 0$ et $P'(4) = P'(5) = P'(6) = 0$.

Exercice 661 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto \frac{1}{3}(-x+2y, -2x+4y) \end{cases}$. Montrer que f est la bîîîîp par rapport à bîîîîp parallèlement à bîîîîp.

Exercice 662 E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, F et G deux sous-espaces supplémentaires de E : $E = F \bigoplus G$. On pose $s(u) = u_F - u_G$ où $u = u_F + u_G$ est la décomposition (unique) obtenue grâce à $E = F \bigoplus G$. s est la symétrie par-rapport à F de direction G.

1. Montrer que $s \in L(E)$, que $u \in F \Leftrightarrow s(u) = u, u \in G \Leftrightarrow s(u) = -u$, donner $\mathrm{Ker}(s)$ et calculer s^2.
2. Réciproquement si $f \in L(E)$ vérifie $f^2 = id_E$. On pose $p = \frac{f+id_E}{2}$. Calculer $f(u)$ en fonction de $p(u)$ et u. Vérifier que p est un projecteur, calculer son noyau et son image. Montrer que f est la symétrie par rapport à $F = \{u \in E | f(u) = u\}$ de direction $G = \{u \in E | f(u) = -u\}$.

Exercice 663 Soient p et q deux projecteurs de E, espace vectoriel, tels que $pq = qp$ (p et q commutent). Montrer que pq et $(p+q-pq)$ sont deux projecteurs de E, et que :

$$\mathrm{Im}(pq) = \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q,$$

$$\mathrm{Im}(p+q-pq) = \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q.$$

Exercice 664 Soient p et q deux projecteurs de E, espace vectoriel ; donner une condition nécessaire et suffisante pour que $p+q$ soit un projecteur de E ; donner alors $\mathrm{Im}(p+q)$ et $\mathrm{Ker}(p+q)$.
Indication : on montrera que $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}\, p \bigoplus \mathrm{Im}\, q$ et que $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

Exercice 665 Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, P le sous-espace des fonctions paires et I le sous-espace des fonctions impaires. Monter que $E = P \bigoplus I$. Donner l'expression du projecteur sur P de direction I.

Exercice 666 Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes, et $f : E \to E$ définie par :

$$\forall P \in E,\ f(P)(X) = \frac{P(-X) - P(X)}{2}.$$

Montrer que $f \in L(E)$, que $E = \mathrm{Im}\, f \bigoplus \mathrm{Ker}(f)$ mais que $f^2 = -f$. Quel théorème cet exemple illustre t-il ?

Exercice 667 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$, et $f : E \to E$ définie par :

$$f(P) = P + (1-X)P'.$$

Montrer que $f \in L(E)$, donner une base de $\mathrm{Im}\, f$ et de $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 668 Soit $E = C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et $U : E \to E$ définie par $f \mapsto U(f)$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, U(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

et $U(f)(0) = f(0)$. Montrer que $U \in L(E)$, déterminer $\mathrm{Ker}(U)$ et $\mathrm{Im}(U)$.

19 Espaces vectoriels de dimension finie

19.1 Base

Exercice 669 © Montrer que les vecteurs $\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Calculer les coordonnées respectives des vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 670 Déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}t\\0\\1\end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 671 Soit (Σ) le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ x - t = 0 \end{cases}$$

Montrer que l'ensemble des solutions de (Σ) forme un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$. Déterminer la dimension et une base de F.

Exercice 672 Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $A_p(X) = (X - a)^p$ et $B_p(X) = X^p$.

1. Montrer que $\varepsilon = \{A_0, \dots, A_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}P^{(k)}(a)A_k(X)$. (On pourra montrer que l'ensemble E des élément de $\mathbb{R}_n[X]$ qui satisfont à cette égalité est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et contient une base.)

Exercice 673 On munit $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ de la loi interne "addition" $+ : (a, b) + (a', b') = (aa', b + b')$, et de la loi externe . à coefficients réels : $(\forall \lambda \in \mathbb{R})\forall (a, b) \in E \lambda.(a, b) = (a^\lambda, \lambda b)$.

1. Vérifier que $(E, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-e.v.
2. Les systèmes suivants sont-ils libres ou liés : ((1,0),(1,1)) ? ((2,1),(8,3)) ? ((2,1),(6,3)) ?
3. Vérifier que le système $b = ((2, 0), (2, 1))$ est une base de E et déterminer les composantes du vecteur $v = (x, y) \in E$ par rapport à la base b.

Exercice 674 Pour $k = 2, 3, 4$ montrer que V_k est un s.e.v. de $\mathbb{C}^k$, et en donner une base :

$$V_2 = \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 / a + ib = 0\}, V_3 = \{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 / a + 2b + 3c = 0\},$$

$$V_4 = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4 / a + ib = b + ic = c + id\}.$$

Exercice 675 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré $\leqslant n$.

1. Soit $\beta = (P_0, P_1, ..., P_n)$ un système de $(n+1)$ polynômes tels que, $\forall k$, $0 \leqslant k \leqslant n$, $\deg P_k = k$. Montrer que β est une base de E.
2. Soit P un polynôme de degré n. Montrer que : $\gamma = (P, P', \dots, P^{(n)})$ est une base de E et déterminer les composantes du polynôme Q défini par : $Q(X) = P(X+a)$, (a réel fixé), dans la base γ.
3. Démontrer que le système $S = (X^k(1-X)^{n-k})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de E, et déterminer, pour tout $p \in \{0, 1, \dots, n\}$, les composantes du polynôme X^p dans la base S.

Exercice 676 Soient $\mathbf{v}_1 = (1,0,0,-1), \mathbf{v}_2 = (2,1,0,1), \mathbf{v}_3 = (1,-1,1,-1), \mathbf{v}_4 = (7,2,0,-1)$ et $\mathbf{v}_5 = (-2,-3,1,0)$. Donner une base du sous-espace vectoriel $F =< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5 >$. Déterminer un supplémentaire de G dans F dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 677 Soient le triplet $\mathbf{v}_1 = (1,2,3,0), \mathbf{v}_2 = (-1,1,2,1), \mathbf{v}_3 = (1,5,8,1)$ et le triplet $\mathbf{w}_1 = (0,3,5,1), \mathbf{w}_2 = (1,-1,1,0), \mathbf{w}_3 = (0,0,3,1)$. On considère les sous-espaces vectoriels $F =< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 >$ et $G =< \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 >$. Donner une base des sous-espaces suivants $F, G, F \cap G$ et $F + G$.

Exercice 678 Soit

$$E = \left\{ f_{\alpha,A} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); (\alpha, A) \in \mathbb{R}^2, \quad f_{\alpha,A}(x) = A\cos(x+\alpha) \right\}.$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et en donner une base.

Exercice 679 Soit $E = \mathbb{R}^3$. On définit le système

$$S = \{\mathbf{e}_1 = (1,1,1), \mathbf{e}_2 = (1,1,2), \mathbf{e}_3 = (1,2,3)\}$$

1. Montrer que S est une base de E.
2. Calculer les coordonnées de $\mathbf{v} = (5,7,12)$ dans cette base.

Exercice 680

1. Montrer que les vecteurs $\mathbf{w}_1 = (1,-1,i), \mathbf{w}_2 = (-1,i,1), \mathbf{w}_3 = (i,1,-1)$ forment une base de $\mathbb{C}^3$.
2. Calculer les composantes de $\mathbf{w} = (1+i, 1-i, i)$ dans cette base.

Exercice 681

1. Montrer que le système $\mathbf{s}_1 = (1, \sqrt{2})$ et $\mathbf{s}_2 = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ sont libres dans $\mathbb{R}$ considéré comme un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$.
2. Soient dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs $\mathbf{u}_1 = (3+\sqrt{5}, 2+3\sqrt{5})$ et $\mathbf{u}_2 = (4, 7\sqrt{5}-9)$. Montrer que le système $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ est $\mathbb{Q}$–libre et $\mathbb{R}$–lié.
3. Soient dans $\mathbb{C}^2$, les vecteurs $\mathbf{r}_1 = (1+i, 1-2i)$ et $\mathbf{r}_2 = (3i-1, 5)$. Montrer que le système $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ est $\mathbb{R}$–libre et $\mathbb{C}$–lié.

Exercice 682 Déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les polynômes $X^2 + t/2$, $X - t$, $(X + t + 1)^2$ forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 683 Etudier la liberté des familles

1. $(1,1),(1,2)$.
2. $(2,3),(-6,9)$.
3. $(1,3,1),(1,3,0),(0,3,1)$.
4. $(1,3),(-1,-2),(0,1)$.

Exercice 684 Les familles suivantes sont-elles génératrices ?

1. $(1,1),(3,1)$.
2. $(1,0,2),(1,2,1)$.

Exercice 685 On considère dans $\mathbb{R}^3$ $\Pi = \text{vect}\{(1,1,1),(1,1,-1)\}$ et $D = \text{vect}\{(0,1,-1)\}$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \Pi \oplus D$.

Exercice 686 Déterminer une base de $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z=0\}$.

Exercice 687 Déterminer une base de $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y=0, x-y+z=0\}$.

19.2 Dimension

Exercice 688 Montrer que tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est de dimension finie.

Exercice 689 Soient P_0, P_1, P_2 et $P_3 \in \mathbb{R}_2[X]$ définis par

$$P_0(X) = \frac{(X-1)(X-2)}{2}, \quad P_1(X) = \frac{X(X-1)}{2},$$

$$P_2(X) = 2X(X-2), \quad P_3(X) = \frac{(X-1)(X-3)}{3}.$$

Exprimer $1,\ X,\ X^2$ en fonction de $P_0,\ P_1$ et P_2. On note $F = Vect\{P_0, P_1\}$ et $G = Vect\{P_2, P_3\}$. Calculer $\dim F$, $\dim G$, $\dim(F+G)$ et $\dim(F \cap G)$. Vérifier que

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Exercice 690 Donner la dimension du sous-espace F de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ engendré par $f_1(x) = \sin^2 x$, $f_2(x) = \cos^2 x$, $f_3(x) = \sin 2x$ et $f_4(x) = \cos 2x$.

Exercice 691$^{©}$ On considère, dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs : $e_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}, e_5 = \begin{pmatrix}2\\3\\0\\1\end{pmatrix}$.

Soient E l'espace vectoriel engendré par e_1, e_2, e_3 et F celui engendré par e_4, e_5. Calculer les dimensions respectives de E, F, $E \cap F$, $E+F$.

Exercice 692 Soient $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x+y+z+t=0\}$ et $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x+y=z+t\}$. Déterminer $\dim E, \dim F, \dim(E+F), \dim(E \cap F)$.

Exercice 693 Montrer que $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (z, x-y, y+z) \end{cases}$ est un automorphisme.

Exercice 694 Soit E un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension n. Montrer que

$$n \text{ est pair} \Leftrightarrow \exists f \in \mathcal{L}(E)/\mathrm{Im} f = \ker f$$

Exercice 695 Montrer qu'il existe une unique forme linéaire f sur $\mathbb{R}^2$ telle que $f(1,2) = 2$ et $f(-2,1) = 5$. Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 696 Déterminer suivant la valeur de $x \in \mathbb{R}$ le rang de la famille de vecteurs $e_1 = (1, x, -1), e_2 = (x, 1, x), e_3 = (-1, x, 1)$.

Exercice 697 Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$. Soit $x_0 \in E/f^2(x_0) \neq 0$.

1. Montrer que $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est une base.
2. Montrer que l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de base (id, f, f^2).

Exercice 698 Soit E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence des trois propriétés :

(i) $\ker f = \ker f^2$.

(ii) $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.

(iii) $E = \ker f \oplus \mathrm{Im} f$.

Exercice 699 Soient E et F de dimensions finies et $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(u+v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.
2. En déduire que $|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leqslant \mathrm{rg}(u+v)$.

Exercice 700 (*) Soient E de dimension n et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) \geqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - n$ (on pourra utiliser $g_{|\ker(f \circ g)} = h$ dont on déterminera le noyau).

Exercice 701 Soit $(f, g) \in (L(E))^2$ où E est un K-espace vectoriel de dimension finie n, montrer les inégalités :

$$\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - n \leqslant \mathrm{rg}(f \circ g) \leqslant \inf(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$$

Exercice 702 Soit $(f, g) \in (L(E))^2$ où E est un K-espace vectoriel de dimension finie n, tel que : $(f+g)$ est inversible et $fg = 0$. Montrer que :

$$rg(f) + rg(g) = n.$$

Exercice 703 Soit U un sous-espace vectoriel de E espace vectoriel, et

$$A = \{f \in L(E) | U \subset Ker(f)\}.$$

Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $L(E)$. Si E est de dimension finie, quelle est la dimension de A ?

Exercice 704 Soient $E_0, E_1, ..., E_n$ $n+1$ espaces vectoriels sur un même corps commutatif K, de dimensions respectives $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$. On suppose qu'il existe n applications linéaires $f_0, f_1, ..., f_{n-1}$ telles que :

$$\forall k \in \{0, ..., n-1\}, f_k \in L(E_k, E_{k+1}).$$

et de plus :
- f_0 est injective ;
- $\forall j \in \{1, ..., n-1\}, \operatorname{Im} f_{j-1} = Ker(f_j)$;
- f_{n-1} est surjective.

Montrer que

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \alpha_j = 0.$$

Exercice 705 Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E, espace vectoriel de dimension n. Montrer que :

$$\dim(H_1 \cap H_2) \geqslant n-2.$$

Généraliser.

Exercice 706 Donner un exemple d'endomorphisme d'un espace vectoriel injectif et non surjectif, puis d'un endomorphisme surjectif et non injectif.

Exercice 707 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$, montrer l'équivalence :

$$E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f) \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2.$$

Donner un contre-exemple quand $\dim E = +\infty$.

Exercice 708 Soit $(f, g) \in L(E, F)^2$ avec E, F de dimension finie. On suppose

$$\operatorname{rg}(f+g) = \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g).$$

Montrer que :

$$E = \operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Im} f;$$

$$\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\}.$$

Exercice 709 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $(f, g) \in L(E)^2$ avec $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Ker}(g)$. Montrer que ces sommes sont directes.

Exercice 710 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $(f_1, ..., f_k)$ des projecteurs de E. Montrer l'équivalence :

$$\left[\forall (i,j) \in \{1, ..., k\}^2, i \neq j \Rightarrow f_i f_j = 0\right] \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} f_i \text{ est un projecteur.}$$

Exercice 711 Soit $f \in L(E)$ où E est un K-espace vectoriel de dimension n, tel que :

$$f^2 = -Id.$$

1. Montrer que f est inversible et que la dimension de E est paire, donc $n = 2p$.

2. Soit $x \neq 0$, monter que x et $f(x)$ sont linéairement indépendants, et qu'ils engendrent un sous-espace stable de E.
3. Montrer qu'il existe p sous-espaces de dimension deux stables par f, $E_1 ... E_p$ tels que : $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. En déduire une "bonne" formule de calcul de f.

Exercice 712 Soit E un K espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Soit $f \in L(E)$ nilpotente. On note $q \in \mathbb{N}^*$ l'indice de nilpotence de f, i.e. :

$$q = \inf\{j \in \mathbb{N}^* | f^j = 0\}.$$

1. Montrer que : $\exists x_0 \in E$ tel que $\{x_0, f(x_0), ..., f^{q-1}(x_o)\}$ soit libre. En déduire $q \leqslant n$.
2. Soit $r = \dim Ker(f)$. Montrer que $r > 0$ et que

$$\frac{n}{r} \leqslant q \leqslant n + 1 - r.$$

20 Matrices

20.1 Généralités

Exercice 713 Rappeler la structure d'espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$. Déterminer une base de $M_n(\mathbb{R})$. Donner sa dimension.

Exercice 714© Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

Exercice 715© Déterminer deux éléments A et B de $M_2(\mathbb{R})$ tels que : $AB = 0$ et $BA \neq 0$.

Exercice 716 Soit E le sous ensemble de $M_3(\mathbb{R})$ défini par $E = \left\{ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ stable pour la multiplication des matrices. Calculer dim (E).
2. Soit $M(a,b,c)$ un élément de E. Déterminer, suivant les valeurs des paramètres a, b et $c \in \mathbb{R}$ son rang. Calculer (lorsque cela est possible) l'inverse $M(a,b,c)^{-1}$ de $M(a,b,c)$.
3. Donner une base de E formée de matrices inversibles et une autre formée de matrices de rang 1.

Exercice 717 Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$. On nomme commutant de A et on note $C(A)$ l'ensemble des $B \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.

1. Montrer que $C(A)$ et un sous espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}, A^k \in C(A)$.

Exercice 718 © Soit F et G les sous-ensembles de $M_3(\mathbb{R})$ définis par :
$$F = \{\begin{pmatrix} a+b & 0 & c \\ 0 & b+c & 0 \\ c+a & 0 & a+b \end{pmatrix} \; a,b,c \in \mathbb{R}\} \quad G = \{\begin{pmatrix} a+b+d & a & c \\ 0 & b+d & 0 \\ a+c+d & 0 & a+c \end{pmatrix} \; a,b,c,d \in \mathbb{R}\}.$$
Montrer que ce sont des sous espaces vectoriels de $M_3(\mathbb{R})$ dont on déterminera des bases.

Exercice 719 © Montrer que $F = \{M \in M_2(\mathbb{R}); tr(M) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$. Déterminer une base de F et la compléter en une base de $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 720 Soient A et $B \in M_n(\mathbb{K})$ deux matrices triangulaires supérieures.

1. Montrer (en calculant les coefficients) que AB est triangulaire supérieure.
2. Soit φ un endomorphisme bijectif de $\mathbb{K}^n$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ tel que $\varphi(F) \subset F$. Montrer que que $\varphi^{-1}(F) \subset F$.
3. En déduire une nouvelle démonstration de 1. Montrer que si A est inversible, A^{-1} est triangulaire supérieure.

Exercice 721 Soit $N \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Calculer $\det(I+N)$. Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ commute avec N, montrer que $\det(A+N) = \det(A)$. (on pourra commencer par étudier le cas où A est inversible.)

Exercice 722 Soit $G = \left\{ \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$. Montrer que G est un groupe multiplicatif.

Exercice 723 Soit $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $A^n(\theta)$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 724 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - 3A^2 + 2A$.
2. Quel est le reste de la division euclidienne de X^n par $X^3 - 3X^2 + 2X$?
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
4. A est-elle inversible ?

Exercice 725 Soient A et $B \in M_n(\mathbb{Q})$ telles que $\forall X \in M_n(\mathbb{Q})$ $\mathrm{tr}(AX) = \mathrm{tr}(BX)$. Montrer que $A = B$.

Exercice 726 Que peut-on dire d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ qui vérifie $\mathrm{tr}(A{}^tA) = 0$?

Exercice 727 Discuter suivant les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \lambda \end{pmatrix}$.

Exercice 728 Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 729 Déterminer l'ensemble des matrices $M \in M_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall H \in M_n(\mathbb{R}), MH = HM.$$

Exercice 730 Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $M - I_n$ soit nilpotente (ie $\exists k \in \mathbb{N}, (M - I_n)^k = 0$). Montrer que M est inversible.

Exercice 731 $M = (a_{i,j})_{(i,j)\in\{1,...,n\}^2} \in M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, |a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}| .$$

Montrer que M est inversible.

Exercice 732 Montrer que si $(A, B) \in M_n(\mathbb{R})$ et $AB = A + B$ alors $AB = BA$.

Exercice 733 Soit $M = (a_{i,j})_{(i,j)\in\{1,...,n\}^2} \in M_n(\mathbb{R})$, montrer :

$$\min_j \max_i a_{i,j} \geqslant \max_i \min_j a_{i,j}.$$

Exercice 734 Soit $J \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que : $J^2 = I$ et

$$E = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2; A = aI + bJ\}.$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel stable par multiplication (Est-ce une algèbre ?). En déduire que :

   $$\forall A \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2; A^n = a_nI + b_nJ$$

   et calculer les coefficients a_n et b_n.
2. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$. Calculer (u_n, v_n) tel que $S_n = u_nI + v_nJ$ en fonction de a et de b. Calculer les limites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose $e^A = uI + vJ$ où $u = \lim_{n\to\infty} u_n$, $v = \lim_{n\to\infty} v_n$. Calculer e^{-A} et le produit $e^{-A}\, e^A$.
3. Application :

   $$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

   Calculer e^A.

Exercice 735 Soit $(A, B) \in (M_n(\mathbb{C}))^2$ tel que $\forall X \in M_n(\mathbb{C})$, $AXB = 0$. Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.

Exercice 736 Soit $(A, B) \in (M_n(\mathbb{C}))^2$ tel que $AB = I + A + A^2$. Montrer que $AB = BA$ (*Indication* : voir d'abord que A est inversible).

Exercice 737 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$une matrice triangulaire à éléments diagonaux nuls, montrer que :

$$A^n = 0.$$

Exercice 738 Calculer les puissances de :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 739 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ nilpotente, on définit :

$$\exp A = \sum_{i \geqslant 0} \frac{A^i}{i!},$$

la somme étant finie et s'arrêtant par exemple au premier indice i tel que $A^i = 0$. Montrer que si A et B sont nilpotentes et commutent, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$. En déduire que $\exp(A)$ est toujours inversible et calculer son inverse.

Exercice 740 Calculer l'inverse de :

$$\begin{pmatrix} 1 & ... & ... & 1 \\ 0 & 1 & ... & ... \\ ... & 0 & 1 & ... \\ 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ 0 & 1 & 2 & ... \\ ... & 0 & 1 & 2 \\ 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 741 Calculer l'inverse de :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & ... & a \\ 0 & 1 & a & ... \\ ... & 0 & 1 & a \\ 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}.$$

Exercice 742 (Examen)© Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, vérifiant la relation de récurrence linéaire suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} & = & -9x_n & -18y_n \\ y_{n+1} & = & 6x_n & +12y_n \end{cases}$$

avec $x_0 = -137$ et $y_0 = 18$. On se propose dans ce problème de trouver les termes généraux de ces deux suites.

1. Montrer qu'il existe une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que la relation de récurrence linéaire ci-dessus soit équivalente à la relation $U_{n+1} = AU_n$, où $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.
2. Trouver une expression de U_n en fonction de A et de U_0.
3. Trouver le noyau de A, et en donner une base B_1. Calculer le rang de A.
4. Montrer que l'ensemble des vecteurs $X \in \mathbb{R}^2$ tels que $AX = 3X$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Quelle est sa dimension ? En donner une base, qu'on notera B_2.
5. Montrer que la réunion $B_1 \cup B_2$ forme une base B de $\mathbb{R}^2$. Soit P la matrice formée des composantes des vecteurs de B relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Montrer que P est inversible, et que le produit $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D qu'on calculera.
6. Montrer que $A^n = PD^nP^{-1}$. Calculer D^n, et en déduire A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. Donner les termes généraux x_n et y_n.

20.2 Matrice provenant d'un endomorphisme

Exercice 743 Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application $z \mapsto e^{i\theta}\bar{z}$. On considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et on fixe la base $\varepsilon = \{1, i\}$.

1. Montrer que f est $\mathbb{R}$-linéaire.
2. Calculer $A = \mathrm{Mat}(f, \varepsilon, \varepsilon)$.
3. Existent-ils x et $y \in \mathbb{C} - \{0\}$ tels que $f(x) = x$ et $f(y) = -y$? Si c'est le cas déterminer un tel x et un tel y.
4. Décrire géométriquement f.
5. Soit $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application $z \mapsto e^{i\rho}\bar{z}$. Calculer $A = \mathrm{Mat}(g \circ f, \varepsilon, \varepsilon)$ et décrire géométriquement $g \circ f$.

Exercice 744 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $f^3 = -f$ et $f \neq 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(f^2 + I) = \{0\}$, $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$ et $\mathrm{Ker}(f^2 + I) \neq \{0\}$.
2. Soit x un élément distinct de 0 de $\mathrm{Ker}(f^2 + I)$. Montrer qu'il n'existe pas $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \alpha x$. En déduire que $\{x, f(x)\}$ est libre.
3. Calculer $\dim(\mathrm{Ker}(f))$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f^2 + I))$.
4. Déterminer une base ε de $\mathbb{R}^3$ telle que : $\mathrm{Mat}(f, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 745 Soient E un espace vectoriel de dimension n, f une application linéaire de E dans lui-même et x un élément de E tel que la famille $f(x), ..., f^n(x)$ soit libre.

1. Montrer que la famille $x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)$ est une base de E. Déduiser-en que f est bijective.
2. On suppose maintenant que $f^n(x) = x$. Déterminer la matrice de f dans la base $x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)$.

Exercice 746 Déterminer la matrice de la projection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}\vec{i}$ parallèlement à $\mathbb{R}(\vec{i} + \vec{j})$ dans la base $(\vec{i} + \vec{j}, \vec{j})$ puis $(\vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 747 Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$, ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que la famille $1, X, \ldots, X^n$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soient f, g et h les applications de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définies par :
$$f(P(X)) = XP(X),$$
$$g(P(X)) = P'(X),$$
$$h(P(X)) = (P(X))^2.$$
Montrer que les applications f et g sont linéaires, mais que h ne l'est pas. f et g sont-elles injectives ? Surjectives ? Déterminer la dimension de leurs noyaux respectifs. Déterminer l'image de f.
3. On désigne par f_n et g_n les restrictions de f et de g à $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que l'image de g_n est incluse dans $\mathbb{R}_n[X]$ et celle de f_n est incluse dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$. Déterminer la matrice de g_n dans la base $1, X, ..., X^n$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer la matrice de f_n de la base $1, X, ..., X^n$ dans la base $1, X, ..., X^{n+1}$. Calculer les dimensions respectives des images de f_n et de g_n.

Exercice 748 Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application de $M_2(\mathbb{R})$ dans lui-même $M \mapsto AM$. Montrer que f est linéaire. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 749 Soit φ une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même telle que $\varphi \neq 0$ et $\varphi^2 = 0$.

1. Construire des exemples de telles applications.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(x) \neq 0$. Montrer que $\{x, \varphi(x)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice de φ dans cette base.

Exercice 750 Soit E un espace vectoriel et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi^2)$. Soit $p \geqslant 1$ et $x \in \mathrm{Ker}(\varphi^p)$. Montrer que $x \in \mathrm{Ker}(\varphi^{p-1})$. En déduire que $\mathrm{Ker}(\varphi^p) = \mathrm{Ker}(\varphi)$ pour tout $p \geqslant 1$.
2. Montrer de même que si $\mathrm{Ker}(\varphi^2) = \mathrm{Ker}(\varphi^3)$ alors $\mathrm{Ker}(\varphi^p) = \mathrm{Ker}(\varphi^2)$ pour tout $p \geqslant 2$.
3. On suppose désormais que φ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même telle que $\varphi^2 \neq 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $\varphi^2(x) \neq 0$. Montrer que $\{x, \varphi(x), \varphi^2(x)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de φ dans cette base.

Exercice 751 Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et φ une application linéaire de E dans E telle que $\varphi^2 = 0$ et $\varphi \neq 0$. Posons $r = \mathrm{rg}(\varphi)$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\ (\varphi) \subset \mathrm{Ker}\ (\varphi)$. Déduiser-en que $r \leqslant 3 - r$. Calculer r.
2. Soit $e_1 \in E$ tel que $\varphi(e_1) \neq 0$. Posons $e_2 = \varphi(e_1)$. Montrer qu'il existe $e_3 \in \mathrm{Ker}\ (\varphi)$ tel que la famille $\{e_2, e_3\}$ soit libre. Montrer que $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de E.
3. Déterminer la matrice de φ dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Exercice 752 Soient E un espace vectoriel et φ une application linéaire de E dans lui-même telle que $\varphi^2 = \varphi$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\ (\varphi) \oplus \mathrm{Im}\ (\varphi)$.
2. Supposons que E est de dimension finie n. Posons $q = \dim\ (\mathrm{Ker}\ (\varphi))$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de E telle que : $\varphi(e_1) = \ldots = \varphi(e_q) = 0$ et, pour tout $r > q$, $\varphi(e_r) = e_r$. Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 753 Soit f l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$, définie en posant, pour tout $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$: $f(P(X)) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

1. Montrer que f est linéaire et que son image est incluse dans $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Dans le cas où $n = 3$, donner la matrice de f dans la base $1, X, X^2, X^3$. Déterminer ensuite, pour une valeur de n quelconque, la matrice de f dans la base $1, X, \ldots, X^n$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f. Calculer leurs dimensions respectives.
4. Soit Q un élément de l'image de f. Montrer (en utilisant en particulier les résultats de la deuxième question) qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

20.3 Endomorphisme provenant d'une matrice

Exercice 754 © Soit $M_{\alpha,\beta}$ la matrice : $M_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$. Déterminer pour quelles valeurs de α et de β l'application linéaire qui lui est associée est surjective.

Exercice 755

1. Soit E un espace vectoriel et $\{e_1, \dots e_p\}$ une famille génératrice de E. Montrer l'égalité Im $(\varphi) = \text{Vect}\ \{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p)\}$.
2. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer $\text{rg}(A)$ et $\text{rg}(B)$. Déterminer une base des noyaux et une base des images respectifs de f_A et de f_B.

Exercice 756 © Soit E un espace vectoriel de dimension n et φ une application linéaire de E dans E. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(f) = 0$. (On pourra utiliser le fait que $\mathcal{L}(E)$ est isomorphe à $M_n(\mathbb{R})$.)

Exercice 757 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. En utilisant l'application linéaire associée de $\mathcal{L}(\mathbb{Q}^n, \mathbb{Q}^n)$, calculer A^p pour $p \in \mathbb{Z}$.

Exercice 758 Même chose avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 759 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Déterminer la matrice de f dans la base $(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 0, 1)$.

Exercice 760 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Soient $e_1 = (-2, 3)$ et $e_2 = (-2, 5)$.

1. Montrer que (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer $\text{mat}(f, e)$.
2. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer l'ensemble des suites réelles qui vérifient $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + \dfrac{2}{3}y_n \\ y_{n+1} = -\dfrac{5}{2}x_n - \dfrac{2}{3}y_n \end{cases}$.

Exercice 761 Soit $E = \text{vect}(AB - BA, (A, B) \in M_n(\mathbb{Q})^2)$.

1. Montrer que $E = \ker \text{tr}$ (pour l'inclusion non triviale, on trouvera une base de $\ker \text{tr}$ formée de matrices de la forme $AB - BA$).
2. Soit $f \in M_n(\mathbb{Q})^*$ telle que $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{Q})^2$ $f(AB) = f(BA)$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f = \alpha \text{tr}$.

Exercice 762 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Phi : \begin{cases} M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AM - MA \end{cases}$. Montrer que Φ est linéaire, déterminer sa matrice dans la base canonique et calculer $\ker \Phi$ et $\text{Im}\Phi$.

21 Déterminants

21.1 Calcul

Exercice 763 Calculer les déterminants des matrices suivantes : $\begin{pmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} c & a & b & c \\ a & c & c & b \\ b & c & c & a \\ c & b & a & c \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & x & y & z \\ b & x & y & z \\ c & x' & y' & z' \\ d & x' & y' & z' \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1+a & b & a & b \\ b & 1+a & b & a \\ a & b & 1+a & b \\ b & a & b & 1+a \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a & a & a^2 & b+c+d \\ a & b & b^2 & c+d+a \\ a & c & c^2 & d+a+b \\ a & d & d^2 & a+b+c \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{pmatrix}$

Exercice 764 Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$ le rang des matrices $M_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix}$ et $N_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 765

1. Soient $A \in M_p(\mathbb{R})$ et $B \in M_q(\mathbb{R})$. Calculer (en fonction de $\det(A)$ et $\det(B)$) le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M_{p+q}(\mathbb{R})$. (On pourra pour cela décomposer M comme produit de deux matrices de déterminant évident et utiliser la multiplicativité du déterminant.)
2. Soient $A \in M_p(\mathbb{R})$, $B \in M_q(\mathbb{R})$ et $C \in M_{p,q}(\mathbb{R})$. Calculer le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M_{p+q}(\mathbb{R})$. (On pourra généraliser la méthode de 1.)

Exercice 766 Sans calcul, montrer que $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ est divisible par 17.

Exercice 767 Soit $\Delta(x) = \det(a_{i,j}(x))$ de taille $n = 2$ ou 3 avec $a_{i,j}$ des fonctions dérivables.

1. Montrer que $\Delta'(x)$ est la somme des n déterminants obtenus en remplaçant successivement dans $\Delta(x)$ chaque colonne par sa dérivée.
2. Calculer $\begin{vmatrix} x+a_1 & x & x \\ x & x+a_2 & x \\ x & x & x+a_3 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$.

Exercice 768 Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ et déterminer la condition d'inversibilité de la matrice.

Exercice 769 La famille $(2,1,0)$, $(1,3,1)$, $(5,2,1)$ est-elle libre ?

Exercice 770 Calculer $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$.

Exercice 771 Calculer $\begin{vmatrix} 1 & \sin x & \cos x \\ 1 & \sin y & \cos y \\ 1 & \sin z & \cos z \end{vmatrix}$

21.2 Applications

Exercice 772 © Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\varphi^2 = -\mathrm{id}_E$.

1. Donner des exemples de telles applications dans le cas $n = 2$ ou 4.
2. Montrer que de telles applications existent si et seulement si n est pair.

Exercice 773 Inverser les matrices $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ainsi que leurs produits.

21.3 Divers

Exercice 774 Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,n\}} \in M_n(\mathbb{R})$ est dite triangulaire supérieure lorsque pour tout $i > j$: $a_{ij} = 0$.

1. Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.
2. Démontrer que $\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}$.
3. Soit E un espace vectoriel, $\varepsilon = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. On note E_i l'espace vectoriel engendré par $\{e_1, \dots, e_i\}$, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$. Montrer que $\mathrm{Mat}(\varphi, \varepsilon)$ est triangulaire supérieure si et seulement si $\varphi(E_i) \subset E_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$.
4. Démontrer que l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire supérieure.

Exercice 775 On considère les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = I + N.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ calculer $\det(A^n)$.
2. Calculer N^2 et N^3.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donner le rang de N^n et celui de A^n.
4. En utilisant 1., donner, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de la matrice $M(n) = A^n$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier la formule $(A^n)^{-1} = M(-n)$. Expliquer et justifier l'écriture : $A^n = M(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 776 Soit S la matrice 5×5 à coefficients réels : $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer det (S). Déterminer (de préférence sans calcul) S^{-1}.
2. Montrer qu'il existe deux sous espaces vectoriels E_1 et E_2 de $\mathbb{R}^5$ de dimension respective 2 et 3 tels que : $\mathbb{R}^5 = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$ et $S(E_1) \subset E_1$ $S(E_2) \subset E_2$.
3. Montrer qu'il existe $x \in E_2$ tels que $Sx = x$. En déduire que la décomposition qui précéde n'est pas unique.

Exercice 777 © Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ anti-symétrique. Calculer $\det(A)$. Ce résultat vaut-il encore pour $A \in M_2(\mathbb{R})$?

Exercice 778 Soient $n = 2$ ou 3 et $A \in M_n(\mathbb{Q})$.

1. Montrer que si $\forall X \in M_n(\mathbb{Q})$ $\det(A + X) = \det(X)$ alors $A = 0$.
2. Soit $B \in M_n(\mathbb{Q})$ telle que $\forall X \in M_n(\mathbb{Q})$ $\det(A + X) = \det(B + X)$. Montrer que $A = B$.

Exercice 779 Soit $(A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2$ tel que $A^2 + B^2 = AB$ et $AB - BA$ inversible. Montrer que 3 divise n.

Exercice 780 Montrer que si $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, A \in M_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\det(\mathrm{Com}(A)) = \det(A)^{n-1}.$$

Exercice 781 Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*, A \in M_n(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{rg}(A) = n \Rightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = n;$$

$$\mathrm{rg}(A) = n - 1 \Rightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = 1;$$

$$\mathrm{rg}(A) \leqslant n - 2 \Rightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = 0.$$

Exercice 782 Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2} \in M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{aligned} \forall i &\in \{1, ..., n\}, \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \leqslant 1, \\ \forall (i, j) &\in \{1, ..., n\}^2, a_{i,j} \in [0, 1[. \end{aligned}$$

Montrer que $|\det(A)| < 1$.

21.4 Systèmes linéaires

Exercice 783 Pour tout a réel, on considère la matrice A et le système linéaire (S) définis par :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad (S) \left\{ \begin{array}{ccccccccc} ax & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & y & + & az & + & t & = & 1 \\ x & + & y & + & z & + & at & = & 1 \end{array} \right.$$

aux inconnues réelles x, y, z, t.

1. Discuter le rang de A suivant les valeurs de a.
2. Pour quelles valeurs de a le système (S) est-il de Cramer ? Compatible ? Incompatible ?
3. Lorsqu'il est de Cramer, résoudre (S) avec un minimum d'opérations (on pourra montrer d'abord que l'on a nécessairement $x = y = z = t$.).

4. Retrouver 3. par application des formules de Cramer.

Exercice 784 Déterminer le noyau de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

Exercice 785 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\exists X \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ tel que $AX = \lambda X$. Pour chaque λ déterminer $E_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^3 / AX = \lambda X\}$.

Exercice 786 Donner une base de l'ensemble des solutions de $\begin{cases} 3x + 2z = 0 \\ 3y + z + 3t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \end{cases}$.

Exercice 787 Résoudre suivant les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x + ay + a^2z = 0 \\ a^2x + y + az = 0 \\ ax + a^2y + z = 0 \end{cases}$.

Exercice 788 Résoudre suivant les valeurs de a et $\mu \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = \mu \\ x + y + az + t = \mu^2 \\ x + y + z + at = \mu^3 \end{cases}$.

Exercice 789 Inverser en utilisant un système linéaire la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 790 Résoudre $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$.

Exercice 791 Résoudre $\begin{cases} -cy + bz = \alpha \\ cx - az = \beta \\ -bx + ay = \gamma \end{cases}$.

Quatrième partie
ANALYSE 2

22 Suites : compléments

22.1 Limites

Exercice 792 Soient $(u_n)_{n\geqslant 2}$ définie par $u_n = \prod_{k=2}^{n} \cos(\frac{\pi}{2^k})$ et $v_n = u_n \sin(\frac{\pi}{2^n})$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente.
2. Montrer que $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est une suite géométrique. En déduire la limite de $(u_n)_{n\geqslant 2}$.

Exercice 793 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres réels telle que $\lim_{n\to\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$. Montrer que les valeurs d'adhèrence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 794 On définit par récurrence les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 1, v_0 = 2, u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{u_n + v_n}, v_{n+1} = \frac{(v_n)^2}{u_n + v_n}.$$

1. Montrer par récurrence que l'on a $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissent. En déduire qu'elles convergent vers ℓ et ℓ' respectivement. Montrer que l'on a $\ell\ell' = 0$.
3. Montrer que la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En déduire ℓ et ℓ'.

Exercice 795 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels telles que $0 < u_1 < v_1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$. Montrer qu'elles convergent vers la même limite.

Exercice 796

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels non nuls convergeant vers une limite ℓ différente de zéro. Montrer que la suite $(\frac{1}{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{\ell}$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs convergeant vers une limite ℓ différente de zéro. Montrer que la suite $(\sqrt{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{\ell}$.

Exercice 797

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$ converge.

Exercice 798 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers ℓ, alors $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers ℓ. La réciproque est elle vraie ?

2. Calculer $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{2nk+k}$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite telle que $\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}-a_n)=\ell$. Prouver que $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}=\ell$.
4. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite strictement positive telle que $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\ell$. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty}(u_n)^{1/n}=\ell$.

Exercice 799 Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on note $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$ et $v_n=u_n+\frac{1}{n!n}$. On rapelle que $e=\lim_{n\to\infty}u_n$.

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes. En déduire une valeur approchée de e à $\frac{1}{1000}$.
2. Démontrer que e est irrationnel.

22.2 Suites récurrentes linéaires

Exercice 800© Soit (u_n) définie par u_0 et u_1 strictement positifs et $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$ pour $n\geqslant 1$.

1. Montrer que $\lim(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ existe et la déterminer. Que remarquez-vous ?
2. Soit $a_n=\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.
3. Montrer que a_{2n} et a_{2n+1} sont adjacentes.
4. Déterminer un rationnel r tel que $\left|r-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right|<10^{-3}$.

Exercice 801 Déterminer (u_n) telle que

1. $u_0=1$, $u_1=3$, $u_{n+2}=4u_{n+1}-4u_n$.
2. $u_0=1$, $u_1=i$, $u_{n+2}=4u_{n+1}-5u_n$.

Exercice 802© Déterminer les suites bornées qui vérifient $u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n$.

Exercice 803 Déterminer les suites convergentes qui vérifient $2u_{n+2}=7u_{n+1}-3u_n$.

Exercice 804 Montrer que la suite $u_0=1$, $u_1=2$ et $u_{n+2}=\sqrt{u_{n+1}u_n}$ est bien définie et la déterminer.

Exercice 805 Déterminer les suites (u_n) et (v_n) qui vérifient $\begin{cases}u_0=2\\ v_0=-2\end{cases}$ et $\begin{cases}u_{n+1}=u_n+v_n\\ v_{n+1}=3u_n-v_n\end{cases}$

23 Continuité et comparaison de fonctions

23.1 Continuité

Exercice 806 Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans lui-même telle que $f(0)=0$ et pour tout couple (x,y) de $[0,1]\times[0,1]$ on ait $|f(x)-f(y)|\geqslant|x-y|$.

1. Soit x un élément de $[0,1]$. On pose $x_0=x$ et $x_{n+1}=f(x_n)$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

2. En déduire que $f(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$.
3. Le résultat reste-t-il vrai sans l'hypothèse $f(0) = 0$?

23.2 Comparaison de fonctions

Exercice 807 À quelle condition sur f et g a-t-on $e^f \underset{a}{\sim} e^g$?

Exercice 808 Soient f et g équivalentes au voisinage de a et strictement positives. Montrer que si f admet en a une limite dans $\bar{\mathbb{R}}$ différente de 1 alors $\ln f \underset{a}{\sim} \ln g$.

Exercice 809 Montrer que si f tend vers 0 en a alors $\ln(1+f) \underset{a}{\sim} f$ et $e^f - 1 \underset{a}{\sim} f$.

Exercice 810© Étudier en $+\infty$ et $-\infty$ la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x^3+1} + \sqrt{x^2+x+1}$.

Exercice 811© Calculer les limites de

1. $\dfrac{\sin x \ln(1+x^2)}{x \tan x}$ en 0.
2. $\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\tan(6x)}$ en 0.
3. $(\ln(e+x))^{\frac{1}{x}}$ en 0.
4. $(\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$.

Exercice 812 Trouver un équivalent simple en $+\infty$ de $(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x})^x - 1$.

Exercice 813©

$$\text{Limite en } +\infty \text{ de } \sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2}$$

$$\text{Équivalent en } +\infty \text{ de } \sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}$$

$$\text{Limite en 0 de } \frac{\tan(ax)-\sin(ax)}{\tan(bx)-\sin(bx)}$$

$$\text{Limite en } \frac{\pi}{4} \text{ de } \left(x-\frac{\pi}{4}\right)\tan(x+\frac{\pi}{4})$$

$$\text{Limite en } \frac{\pi}{4} \text{ de } \frac{\cos(x)-\sin(x)}{(4\,x-\pi)\tan(x)}$$

$$\text{Équivalent en 0 de } \frac{\tan(x-x\cos(x))}{\sin(x)+\cos(x)-1}$$

$$\text{Équivalent en } \frac{\pi}{4} \text{ de } \left(\tan(2\,x)+\tan(x+\frac{\pi}{4})\right)\left(\cos(x+\frac{\pi}{4})\right)^2$$

$$\text{Limite en 0 de } x^{\frac{1}{1+2\,\ln(x)}}$$

$$\text{Limite en } \frac{1}{2} \text{ de } \left(2\,x^2-3\,x+1\right)\tan(\pi\,x)$$

$$\text{Limite en 0 de } \frac{(\sin(x))^{\sin(x)} - 1}{(\tan(x))^{\tan(x)} - 1}$$

$$\text{Équivalent en } +\infty \text{ de } \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sin(\frac{1}{x})} \ln(\frac{x}{x+1})$$

Exercice 814 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles. Montrer qu'il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(t) = o(f(t))$ si $t \to \infty$.

24 Dérivabilité

24.1 Dérivées

Exercice 815 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+, \sin(x) \leqslant x$.

Exercice 816 Pour tout $x \in]1, +\infty[$ on pose $f(x) = x\ln(x) - x$. Montrer que f est une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]-1, +\infty[$. On pose $g = f^{-1}$ l'application réciproque de f. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.

Exercice 817 Étudier la continuité, la dérivabilité, la continuité de la dérivée pour les applications suivantes :
$f : x \mapsto \sin\,(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
$g : x \mapsto x\sin\,(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
$h : x \mapsto x^2\sin\,(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Exercice 818 Soit g une fonction 2 fois dérivable sur $[a, b]$ telle que $g(a) = g(b) = 0$ et $g''(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Montrer que pour tout $x \in]a, b[, g(x) \geqslant 0$.

Exercice 819 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que $\forall x \in \mathbb{R}$ on ait $f(x) \geqslant 0$, $f'(x) \geqslant 0$ et $f''(x) \geqslant 0$. Étudier $\lim_{x\to\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Exercice 820 Soit f une application continue de $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ dérivable sur $]a, b]$. Montrer que si $\lim_{x\to a} f'(x)$ existe, f est dérivable en a.

24.2 Applications

Exercice 821 Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on note g_n la fonction $x \mapsto f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$.

1. On suppose $g_n(x) > 0$ pour tout $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}[$. Montrer que $f(1) > f(0)$.
2. On suppose désormais que $f(0) = f(1)$. Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n s'annule en au moins un point de l'intervalle $[0, 1 - \frac{1}{n}]$.

Exercice 822© Pour tout n entier supérieur où égal à 2, on considère le polynôme de degré n à coefficients réels :
$$P_n(X) = X^n + X^{n-1} + X^2 + X - 1$$

1. Soit $n \geqslant 2$. Montrer que P_n a une unique racine réelle positive que l'on nommera λ_n. (On pourra étudier l'application $X \mapsto P_n(X)$.)
2. Montrer que la suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante puis qu'elle converge vers une limite que l'on notera ℓ.
3. Montrer que ℓ est racine du polynôme $X^2 + X - 1$. En déduire sa valeur.

Exercice 823 Soit f une fonction d'un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ dérivable sur I. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est strictement croissante sur I.
2. f' est positive ou nulle sur I et $\{x \in I; f'(x) > 0\}$ est dense dans I.

Exercice 824

1. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable en 0. Montrer qu'il existe une application ε de $\mathbb{R}$ dans lui-même telle que $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(0) + xf'(0) + x\varepsilon(x)$ et $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Donner une interprtation géométrique de ce résultat.
2. En déduire les limites des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = (n^3+1)^{\frac{1}{3}} - n$ et $v_n = (1 + \dfrac{\alpha}{n})^{\frac{1}{n}}$.
3. Construire un exemple de suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ avec, $u_n < 1$ pour tout $n \geqslant 1$ et telle que $\lim_{n\to\infty} w_n = 1$. (On pourra s'inpirer de l'exemple de $(v_n)_{n\geqslant 1}$ ci-dessus.)

Exercice 825

1. Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $\dfrac{1}{x+1} < \log(x+1) - \log(x) < \dfrac{1}{x}$.
2. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$: $\log(n+1) < 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} < 1 + \log(n)$.
3. Posons $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \log(n)$ Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et convergente.

Exercice 826 ©

1. Soit f une application continue d'un intervalle $]a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable en $c \in]a, b[$. Montrer qu'il existe une (unique) application continue ε de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(c) = 0$ et, pour tout $x \in]a, b[$ distinct de c, on ait :
$$f(x) = f(c) + (x-c)f'(c) + (x-c)\varepsilon(x)$$
2. Montrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général :
$$S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$$
est décroissante et qu'elle converge vers une limite que l'on nommera S.
3. Pourquoi peut on dire, *a priori*, que $\dfrac{1}{2} \leqslant S \leqslant 1$?
4. Soit $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ une application continue, dérivable en 0 et telle que $f(0) = 0$. Montrer que la suite $(\sigma_n(f))_{n\geqslant 1}$ de terme général :
$$\sigma_n(f) = f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n+1}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{2n}\right)$$
converge vers $f'(0)S$ (utiliser 1.).

5. Montrer que $\sigma_n(f) = \log(2)$ lorsque f est l'application $x \mapsto \log(1+x)$ et en déduire la valeur de S.
6. Calculer la limite de la suite $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général :
$$\sigma_n = \sin\frac{1}{n} + \sin\frac{1}{n+1} + \cdots + \sin\frac{1}{2n}.$$
7. Plus généralement, quelle est la valeur pour $p \in \mathbb{N}^*$ donné, de la limite S_p de la suite $(\sigma_n(p))_{n\geqslant 1}$ de terme général :
$$\sigma_n(p) = \sum_{k=0}^{pn} \frac{1}{n+k}?$$

Exercice 827 Soit f une fonction dérivable et a un réel. Soit $h > 0$ un nombre réel strictement positif fixé.

1. Montrer qu'il existe $\theta \in]0,1[$ tel que
$$\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h} = f'(a+\theta h) - f'(a-\theta h).$$
2. Pour tout $h \neq 0$ on note : $\varphi(h) = \dfrac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$. Montrer que si $f''(a)$ existe, alors $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = f''(a)$.

25 Développements limités

25.1 Calculs de développements limités

Exercice 828 © Donner le développement limité en 0 des fonctions :

1. $x \mapsto \ln(\cos(x))$ (à l'ordre 6).
2. $x \mapsto \tan(x)$ (à l'ordre 7).
3. $x \mapsto \sin(\tan(x))$ (à l'ordre 7).
4. $x \mapsto (\ln(1+x))^2$ (à l'ordre 4).
5. $x \mapsto \exp(\sin(x))$ (à l'ordre 3).
6. $x \mapsto \sin^6(x)$ (à l'ordre 9.)

Exercice 829 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $f(x) = \exp\left(\dfrac{-1}{x}\right)$ sinon. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le développement limité de f en 0. Quelles conclusions en tirer ?

2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(0) = 0$ et, si $x \neq 0$: $g(x) = x^3 \sin(\dfrac{1}{x})$. Montrer que g a un développement limité d'ordre 2 en 0 mais n'a pas de dérivée seconde (en 0).

Exercice 830 © Déterminer la limite en 0 de $\dfrac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x}$.

Exercice 831 © Faire un développement limité ou asymptotique en a à l'ordre n de :

1. $\ln\cos x$ $n = 6$ $a = 0$.

2. $\dfrac{\arctan x - x}{\sin x - x}$ $n = 2$ $a = 0$.
3. $\ln\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})$ $n = 3$ $a = 0$.
4. $\ln\sin x$ $n = 3$ $a = \frac{\pi}{4}$.
5. $\sqrt[3]{x^3 + x} - \sqrt[3]{x^3 - x}$ $n = 4$ $a = +\infty$.
6. $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ $n = 3$ $a = 0$.
7. $x(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} - x\sqrt{2})$ $n = 2$ $a = +\infty$.

Exercice 832 Développements limités en 0 de :

1. $\cos x . \ln(1 + x)$ à l'ordre 4.
2. $\dfrac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4.
3. $\arcsin(\ln(1 + x^2))$ à l'ordre 6.
4. $\dfrac{\sinh x - x}{x^3}$ à l'ordre 4.
5. $(1 + x)^{\frac{1}{1+x}}$ à l'ordre 3.

Exercice 833 Pour chacune des fonctions suivantes, donner les conditions sur $\varepsilon(x)$ pour que ces fonctions soient des développements limités au voisinage d'un point et à un ordre que vous préciserez.

1. $f_1(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + x^2\varepsilon(x)$
2. $f_2(x) = 1 - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^3}\varepsilon(x)$
3. $f_3(x) = (x - 2) + \dfrac{(x - 2)^2}{5} + (x - 2)^3\varepsilon(x)$
4. $f_4(x) = x^2 - x + 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x}\varepsilon(x)$
5. $f_5(x) = x^3 + 3x^- x + 1 + (x - 1)^2\varepsilon(x)$
6. $f_6(x) = (x - 2)^2 + (x - 2) - 2 + (x - 2)\varepsilon(x)$
7. $f_7(x) = \{2x + x^2 + 1 + x^2\varepsilon(x)\}\{-x + 3 + x^2 - x^3\varepsilon(x)\}$

Exercice 834

1. Développements limités en 1 à l'ordre 3 de $f(x) = \sqrt{x}$ et de $g(x) = e^{\sqrt{x}}$
2. Développement limité à l'ordre 3 en $x_0 \in]0; \pi[$ de $h(x) = \ln(\sin x)$. En déduire un développement limité en $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 835 Donner un développement limité à l'ordre 2 de $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + x^2}}{x + 1 + \sqrt{1 + x^2}}$ en 0, $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 836 Donner un développements limité en 0 à l'ordre 10 de :

1. $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \cos t^2 dt$.
2. $x \longmapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1 + t^4}} dt = F(x^2) - F(x)$ où F est une primitive de $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1 + t^4}}$.

Exercice 837 Donner le DL2 en $+\infty$ de :

$$x \to \sqrt{\frac{x - 2}{x + 1}} e^{\frac{x}{x-1}}.$$

25.2 Applications des développements limités

Exercice 838 Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\sin x}{x}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{x^4}$$

Exercice 839© Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(\cos(x)+x)}{x^2}, \lim_{x\to 0}\frac{x^3\arctan(x)-x^4}{\cos(x^2)-1}$.

Exercice 840 Étudier la position du graphe de l'application $x\mapsto \ln(1+x+x^2)$ par rapport à sa tangente en 0 et 1.

Exercice 841 Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$.

Exercice 842 Établir pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ l'inégalité :

$$\frac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{3}{8\sqrt{x+1}}<(x+1)^{3/2}-x^{3/2}<\frac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{3}{8\sqrt{x}}.$$

Exercice 843 Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $\frac{x^2}{2}\leqslant e^x-x-1\leqslant\frac{x^2}{2}e^x$.

Exercice 844 Soit $f(x)=(\cos x)^{\frac{1}{x}}$ pour $x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[-\{0\}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. Déterminer un DL de f en 0 à l'ordre 2.
3. Etudier la dérivabilité du prolongement de f.

Exercice 845 Étudier les branches infinies des fonctions :

1. $f(x)=x^2\arctan(\frac{1}{1+x^2})$.
2. $g(x)=x\sqrt{\frac{x-1}{3x+1}}$.

Exercice 846 Soit (1) l'équation $x-E(x)=\frac{1}{x^2}$.

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ il existe un unique $x_n\in[n,n+1[$ solution de (1).
2. Déterminer un équivalent de x_n.
3. Faire un DAS de x_n-n en $+\infty$ en fonction de $\frac{1}{n}$ à l'ordre 5.

Exercice 847 Calculer pour $a\in\mathbb{R}^{+*}$:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^a-a^x}{x^x-a^a},\ \lim_{n\to\infty}(3(2)^{\frac{1}{n}}-2(3)^{\frac{1}{n}})^n$$

Exercice 848 Calculer :

$$\ell=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln x+1}{\ln x}\right)^{x\ln x}$$

et donner un équivalent de $\ell-\left(\frac{\ln x+1}{\ln x}\right)^{x\ln x}$ quand $x\to\infty$.

Exercice 849 Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on définit $(u_n(x))_n$ et $(v_n(x))_n$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(x) = \frac{u_n(x)+v_n(x)}{2}, v_{n+1}(x) = \sqrt{u_n(x)v_n(x)}, u_0(x) = 1, v_0(x) = x.$$

1. Montrer que ces deux suites convergent vers une même limite ℓ_x.
2. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \ell_x$. Calculer $f(1), f(0)$, donner $f(\frac{1}{x})$ en fonction de $f(x)$ si $x > 0$. Montrer que f est croissante, en déduire le sens de variations de $x \to \frac{f(x)}{x}$.
3. Montrer que f est dérivable en 1 (on utilisera $\sqrt{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1+x}{2}$) puis que $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.
4. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, puis que f est continue en 0.
5. Donner l'allure du graphe de f, préciser la tangente en 0 ainsi que le comportement asymptotique en $+\infty$.

Exercice 850 Soit $n \in \mathbb{N}^*, x \neq 0$, on définit :

$$u_n(x) = \left(\frac{1^x + 2^x + ... + n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Déterminer $\ell_n = \lim\limits_{x\to 0} u_n(x)$.

Exercice 851 Déterminer :

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\tan x - \operatorname{sh} 2x}{(1-\cos 3x)\arctan x}.$$

Exercice 852 Soient u, v, f définies par :

$$u(x) = (x^3 - 2x^2 + 1)^{\frac{1}{3}},\ v(x) = \sqrt{x^2+x+1},\ f(x) = u(x) - v(x).$$

1. Donner un équivalent de f au voisinage de $-\infty$, en déduire $\lim\limits_{-\infty} f$.
2. Déteminer $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) - x$, $\lim\limits_{x\to-\infty} v(x) + x$. En déduire l'équation d'une droite asymptote au graphe de f en $-\infty$ et positionner f par-rapport à cette asymptote.
3. Même étude en $+\infty$.

25.3 Formules de Taylor

Exercice 853 Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^6}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 854 Soit a un nombre réel et f une application de classe C^2 de $]a, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose f' et f'' bornées ; on pose $M_0 = \sup\limits_{x\geqslant a} |f(x)|$ et $M_2 = \sup\limits_{x\geqslant a} |f''(x)|$.

1. En appliquant la formule de Taylor en x et $x + 2h$, montrer que, pour tout $x > a$ et tout $h > 0$, on a : $|f'(x+h)| \leqslant hM_2 + \dfrac{1}{h}M_0$.
2. En déduire que f' est bornée sur $]a, +\infty[$.
3. Établir le résultat suivant : soit $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 à dérivée seconde bornée et telle que $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$. Alors $\lim\limits_{x\to\infty} g'(x) = 0$.

Exercice 855 Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que : $ae^2 + be + c = 0$.

1. En appliquant la formule de Taylor sur $[0, 1]$ à l'application $\varphi : x \mapsto ae^x + ce^{-x}$ démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $\theta_n \in]0, 1[$ tel que :
$$-b = \frac{ae^{\theta_n} + (-1)^n ce^{-\theta_n}}{(n+1)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{a + (-1)^k c}{k!}.$$
2. En déduire que pour n assez grand $ae^{\theta_n} + (-1)^n ce^{-\theta_n} = 0$ puis que $a = b = c = 0$. (On rappelle que $e = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.)

Exercice 856 Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$ et $f^{(n)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ avec $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|f^{(n)}(x)\right| = o(\frac{n!}{a^n})$, a constante fixée. Montrer que $\forall x \in [-a, a], f(x) = 0$, puis que $f = 0$.

Exercice 857 Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P \geqslant 0$. On pose $Q = P + P' + ... + P^{(n)}$. Montrer que $Q \geqslant 0$.

Exercice 858 Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f \in C^3([a, b], \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) = f(a) + (b - a)f'(\dfrac{a+b}{2}) + \dfrac{(b-a)^3}{24} f'''(c)$ (on pourra utiliser Taylor-Lagrange entre $a, \dfrac{a+b}{2}, b$).

26 Intégrales : compléments

26.1 Intégration sur un compact

Exercice 859 Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cos(nt)f(t)dt = 0$.

Exercice 860 Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = 0$. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(t^n)dt = 0.$$
Généraliser au cas où $f(0)$ est quelconque.

Exercice 861 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

1. Montrer que f est bornée. On pose $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.
2. Soient x et $y \in [a, b]$ Montrer que $|\displaystyle\int_x^y f(t)dt| \leqslant M|x - y|$. En déduire que l'application $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est continue sur $[a, b]$.
3. Soit $x_0 \in [a, b]$. Montrer que si f est continue en x_0 alors F est dérivable en x_0.

Exercice 862 Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nt^n f(t^n)dt = \int_0^1 f(t)dt.$$
(On pourra faire le changement de variable $u = t^n$).

Exercice 863 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(a) = f(b) = 0$. Posons $M = \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|$. Montrer que $|\int_a^b f(t)dt| \leqslant M\frac{(b-a)^2}{4}$. (Indication : faire des développements limités de $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ et $x \mapsto \int_x^b f(t)dt$).

Exercice 864 Soit f continue sur $[0, 1]$ avec $f(1) \neq 0$, montrer :

$$\int_0^1 x^n f(t)dt \sim \frac{f(1)}{n}.$$

En déduire :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-2t}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$$

On posera $u = 1 - \frac{1}{n}$ puis $v = ue^{2(u-1)}$.

Exercice 865 Donner un développement :

$$\int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n}dt = a + \frac{b}{n} + o(\frac{1}{n}).$$

26.2 Intégrales impropres

Exercice 866© Donner la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx.$$

$$\int_1^\infty x^x dx.$$

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\sin(\frac{1}{x})}{\ln(1+x)}dx.$$

Nature et calcul des intégrales suivantes :

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx.$$

$$\int_0^\infty \frac{x^5}{x^{12}+1}dx.$$

$$\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}dx.$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{\mathrm{sh}(bile)}d(bile).$$

Exercice 867

1. Montrer que $\forall x > -1\ \ln(1 + x) \leqslant x$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall x \in [0, n]\ (1 - \frac{x}{n})^n \leqslant e^{-x} \leqslant (1 + \frac{x}{n})^{-n}$.

3. En déduire que
$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n} dt.$$
rappel (intégrales de Wallis) : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^n \, d\theta \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
4. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+u^2)^n} du$ existe et vaut I_{2n-2}.
5. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ existe et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 868 Étude de :
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_1^x \frac{e^t}{t} dt. \end{aligned}$$
Donner un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 869 Soit f une application C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f + f'' \geqslant 0$. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0.$$

Exercice 870 Soit f une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ et F de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

1. Montrer que si f admet une limite ℓ en $+\infty$, alors F a aussi la limite ℓ en $+\infty$.
2. Donner un exemple où f n'a pas de limite en $+\infty$ mais où F tend vers 0.
3. Montrer que si $f \to \infty$ quand $x \to \infty$, alors $F \to \infty$ quand $x \to \infty$.

Exercice 871 Étudier la fonction :
$$h : x \to \int_x^{x^2} \frac{dt}{\log t}.$$
Domaine de définition, continuité et dérivabilité, variations, limites aux bornes de ce domaine, et $\lim_{x\to\infty} \frac{h(x)}{x}, \lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x}$, éventuellement convexité.

Exercice 872 Donner un exemple d'une fonction continue positive telle que :
$$\int_0^{\infty} f(u)du$$
existe mais telle qu'on n'ait pas :
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$
Donner un exemple de fonction continue positive telle que :
$$\int_0^{\infty} f(u)du$$
existe mais telle que :
$$\int_0^{\infty} f^2(u)du$$
n'existe pas.

Exercice 873 Soit f une fonction positive décroissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\int_0^\infty f$ existe. Montrer que :
$$f(x) = o(\frac{1}{x})$$
quand $x \to \infty$.

Exercice 874 Soit f une application continue par morceaux de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ possédant une limite ℓ en $+\infty$, telle que $\int_0^\infty f$ existe ; montrer que $\ell = 0$.
Soit f une application uniformément continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^\infty f$ existe. Montrer que :
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Exercice 875 Soit f une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^\infty f^2$ existe. Montrer que quand $x \to \infty$:
$$\int_0^x f(t)dt = o(\sqrt{x}).$$

Exercice 876 Étudier la nature de
$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$$
selon $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 877 Convergence et calcul de :
$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t^2)dt}{t^2},$$
$$\int_0^\infty \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt,$$
$$\int_1^\infty \frac{\ln t}{t^n}dt.$$
Réponses : $\frac{\pi}{2} - \ln 2, \pi, \frac{1}{(n-1)^2}$.

Exercice 878 Soit $f : [1,\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue telle que
$$\int_1^\infty f(t)dt$$
converge. Montrer que
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_1^x tf(t)dt = 0.$$

Exercice 879 Soit $f \in C([1,\infty[,\mathbb{R}^+)$ décroissante, on pose :
$$x_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(t)dt.$$

1. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2. Montrer que la suite $S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$ a une limite quand $n \to \infty$ si et seulement si $\int_1^\infty f$ converge, et que dans ce cas :

$$\int_{n+1}^\infty f \leqslant \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^m f(k) \leqslant \int_n^\infty f.$$

3. Montrer que si $\int_1^\infty f$ diverge on a : $S_n \backsim \int_1^n f$ quand $n \to \infty$.

Exercice 880 Soit $f :]0;1] \to \mathbb{R}$ continue et monotone, telle que $\int_0^1 f$ existe. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Exercice 881 Montrer que si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est uniformément continue, alors

$$\int_0^\infty \exp(if(t))dt$$

n'existe pas.

Exercice 882 Nature de :

$$\int_0^\infty \sin t \sin\frac{1}{t}dt,\ \int_0^\infty \frac{e^{\sin t}}{t}dt,\ \int_2^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}+\sin t}dt,\ \int_0^1 \cos\ln t dt, \int_0^\infty \cos\exp t dt.$$

Exercice 883 Nature et calcul de :

$$\int_0^\infty \ln t \ln\left(1+\frac{a^2}{t^2}\right)dt, a>0\ ;\ \int_0^\infty \exp\left(-t^{\frac{1}{n}}\right)dt, n\in\mathbb{N}^*\ ;\ \int_0^1 \left(\frac{1}{t}-E(\frac{1}{t})\right)dt.$$

Exercice 884 Convergence et calcul de :

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+\cosh^2 x},\ \int_1^\infty \frac{dx}{\sinh x},\ \int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{\cosh t}.$$

Exercice 885 Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f \geqslant 0, g \geqslant 0, g = o(f)$ en $+\infty$, et $\int_0^\infty f$ n'existe pas. Montrer alors :

$$\int_0^x g(u)du = o\left(\int_0^x f(u)du\right)$$

quand $x \to \infty$.

Exercice 886 Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue, tendant vers ℓ en $+\infty$, montrer alors :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{f(t)n}{n^2+t^2}dt = \frac{\pi}{2}\ell.$$

Exercice 887 Calculer :

$$\lim_{a\to 0^+}\int_a^{3a}\frac{\tan t}{t^2}dt\ ,\ \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n-x^{2n}}{1-x}dx.$$

Exercice 888 Soit $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\int_{-\infty}^\infty f$ existe, montrer que $F(x) = \int_{-\infty}^\infty f(t)\cos tx dt$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Cinquième partie
ALGÈBRE 3

27 Groupes : généralités

27.1 Sous-groupes

Exercice 889 Soit ABC un triangle équilatéral du plan.

1. Déterminer l'ensemble des rotations qui laissent invariant $\{A, B, C\}$.
2. Montrer que c'est un groupe pour la loi $\circ$.
3. Faire de même avec un carré.

Exercice 890 Soient les quatre fonctions de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$

$$f_1(x) = x \qquad f_2(x) = \frac{1}{x} \qquad f_3(x) = -x \qquad f_4(x) = -\frac{1}{x}$$

Montre que $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est un groupe pour la loi $\circ$.

Exercice 891 Montrer qu'il existe une seule table possible pour un groupe d'ordre 3. Est-ce vrai pour 4 ?

Exercice 892 Montrer que si X contient au moins trois éléments alors $\sigma(X)$ n'est pas abélien.

Exercice 893© Les ensembles suivants, pour les lois considérées, sont-ils des groupes ?

1. $]-1, 1[$ muni de la loi définie par $x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$;
2. $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ pour la multiplication usuelle ;
3. $\mathbb{R}_+$ pour la multiplication usuelle ;
4. $\{x \in \mathbb{R} \mapsto ax + b : a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}\}$ pour la loi de composition des applications.

Exercice 894 Soit $K = \{\mathrm{Id}, f_1, f_2, f_3\}$ où f_1, f_2, et f_3 sont les permutations de $E = \{1, 2, 3, 4\}$ définies par

$$f_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{smallmatrix}\right), f_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right), f_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Montrer que K est un sous-groupe de $\mathcal{S}_4$.

Exercice 895 Soit l'ensemble

$$\mathcal{J} = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Montrer que, muni de la multiplication usuelle des matrices, $\mathcal{J}$ est un groupe abélien.

Exercice 896 © Pour la multiplication usuelles des matrices carrées, les ensembles suivants sont-ils des groupes :

$$\mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), \quad \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) : \det M = 1\} \ ?$$

Exercice 897 Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, admettant un élément neutre à droite et tel que chaque élément de G admette un symétrique à droite. Montrer que G est un groupe.

Exercice 898 Soient $(G, .)$ un groupe et $a, b \in G$. On suppose que

$$(1) : ab^2 = b^3a \quad \text{ et } (2) : ba^2 = a^3b.$$

1. Montrer, en utilisant seulement (1), que $a^2b^8a^{-2} = b^{18}$ puis que $a^3b^8a^{-3} = b^{27}$.
2. En déduire, en utilisant (2), que $a^3b^8a^{-3} = b^{18}$ et enfin que $a = b = 1$.

Exercice 899
1. L'ensemble $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ muni de la loi $\star$ définie par $\forall a, b \in \mathbb{R}, a\star b = a+b+ab$ est-il un groupe ?
2. L'ensemble $E = \{-1, 1, i, -i\} \subseteq \mathbb{C}$ muni de la loi usuelle de multiplication dans $\mathbb{C}$ est-il un groupe ?
3. L'ensemble $E = \{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) : a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ muni de la loi de multiplication usuelle des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est-il un groupe ?
4. L'ensemble $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles d'ordre 2 muni de la loi de multiplication usuelle des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est-il un groupe ?

Exercice 900 Soient $(G, \star)$ et $(H, \triangle)$ deux groupes. On définit sur $G\times H$ la loi $\heartsuit$ par $(x, y)\heartsuit(x', y') = (x \star x', y\triangle y')$.
1. Montrer que $(G \times H, \heartsuit)$ est un groupe.
2. Si G est de cardinal 2, dresser la table de $G \times G$ et la reconnaître parmi les exemples des exercices précédents.

Exercice 901 Montrer que si H et K sont des sous-groupes de G alors $H\cap K$ est un sous-groupe de G. Est-ce vrai pour $H \cup K$?

Exercice 902 Si G est un groupe, on appelle centre de G et on note $Z(G)$ l'ensemble $\{x \in G/\forall y \in G, xy = yx\}$
1. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.
2. Montrer que G est commutatif ssi $Z(G) = G$.
3. Calculer $Z(\sigma_3)$.

Exercice 903 On nomme $M_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients entiers relatifs.
- Soit $M \in M_n(\mathbb{Z})$. Montrer que pour que M admette un inverse élément de $M_n(\mathbb{Z})$ il faut et il suffit que $\det(M) \in \{-1, 1\}$.
- Démontrer que $Gl_n(\mathbb{Z}) = \{M \in M_n(\mathbb{Z})\ ; \det(M) \in \{-1, 1\}\}$ est un sous-groupe de $Gl_n(\mathbb{R})$.

Exercice 904©
1. L'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $ad-bc \neq 0$ et $a^2-b^2-c^2-d^2 \leqslant 1$ est il un sous-groupe de $Gl_2(\mathbb{R})$?
2. L'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ est-il un sous groupe de $Gl_2(\mathbb{R})$?
3. Existe-t-il une valeur $M \in \mathbb{R}$ telle que l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $ad - bc \neq 0$ et $a \leqslant M$ forme un sous-groupe de $Gl_2(\mathbb{R})$?

Exercice 905© Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes de G. Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Exercice 906 Déterminer le sous-groupe de $\mathbb{Z}$ engendré par les entiers 24, 36 et -54.

Exercice 907 Les questions sont indépendantes. Soit j le nombre complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Déterminer le sous-goupe du groupe additif $\mathbb{C}$ engendré par i et j.
2. Déterminer le sous-goupe du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ engendré par i et j.

Exercice 908 © Soit G un groupe engendré par a et b. Montrer que $< a > \cap < b > \subseteq Z(G)$ où $Z(G)$ désigne le centre de G.

Exercice 909 Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

1. Montrer l'existence de $\alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}^{+*})$.
2. Si $\alpha > 0$ montrer que $G = \alpha\mathbb{Z}$.
3. Si $\alpha = 0$ montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 910 Soit Gun groupe. Montrer que l'ensemble $Aut(G)$ des automorphismes de G est un groupe pour la loi de composition. Soit H un sous-groupe de $Aut(G)$, et $\pi : G \to \wp(G)$ définie par : $\pi(x) = \{f(x) | f \in H\}$. Montrer que $\pi(G)$ est une partition de G.

27.2 Ordre d'un élément

Exercice 911 © Soit H un groupe abélien. Un élément $x \in H$ est dit d'ordre fini lorsque il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que la somme $x + ... + x$ (n-fois) soit égale à 0. Montrer que l'ensemble des éléments d'ordre fini de H est un sous-groupe abélien de H.

Exercice 912 © Soit G un groupe, e son élément neutre. Un élément g de G est dit *d'ordre* $n \in \mathbb{N}$ si $g^n = e$ et $g^k \neq e$ pour tout entier $k < n$. g est dit *d'ordre fini* si il est d'ordre n pour un n quelconque.

1. Montrer que $Gl_2(\mathbb{R})$ contient des éléments d'ordre 2 et des éléments qui ne sont pas d'ordre fini.
2. Soit φ un homomorphisme de G à valeurs dans H et g un élément de G d'ordre n. Montrer que :
   - $\varphi(g)$ est d'ordre fini inférieur ou égal à n.
   - Si φ est injectif, l'ordre de $\varphi(g)$ est égal à n.
3. Montrer que si G n'a qu'un nombre fini d'éléments, tous ses éléments ont un ordre fini.

Exercice 913 Soit le groupe $G = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

1. Déterminer le sous-groupe H de G engendré par $\overline{6}$ et $\overline{8}$ et déterminer son ordre.
2. Caractériser les générateurs de G.
3. Quel est l'ordre de l'élément $\overline{9}$?

Exercice 914 Soient E un espace vectoriel réel de dimension 2 et (e_1, e_2) une base de E. On considère les endomorphismes de E définis par

$$s(e_1) = e_1, \quad s(e_2) = -e_2,$$

$$r(e_1) = e_2, \quad r(e_2) = -e_1.$$

1. Montrer que r et s sont des automorphismes du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

2. Déterminer l'ordre de s et l'ordre de r.
3. (a) Montrer que $sr = -rs$.
   (b) En déduire que $G := \{\mathrm{Id}_E, s, r, sr, -\mathrm{Id}_E, -s, -r, -s\}$ est un sous-groupe du groupe linéaire de E.
   (c) Montrer que G est le sous-groupe du groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$ engendré par s et t.

Exercice 915 © Soient G un groupe et $x \in G$ un élément d'ordre n. Quel est l'ordre de x^2 ?

Exercice 916 ©

1. Soient G un groupe et $x, y \in G$ des éléments qui commutent et d'ordres respectifs m et n premiers entre eux. Montrer que xy est d'ordre mn. Montrer que l'hypothèse m et n *premiers entre eux* est indispensable.
2. Montrer que $A := \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $B := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ sont des éléments de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ d'ordres finis et que AB n'est pas d'ordre fini.

Exercice 917 © Le groupe $(\mathbb{Q}, +)$ est-il monogène ?

27.3 Morphismes

Exercice 918 © Décrire tous les homomorphismes de groupes de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$. Déterminer ceux qui sont injectifs et ceux qui sont surjectifs.

Exercice 919 Pour tout couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$, on pose la matrice $M_{a,b} = \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$. Soit $\mathcal{S} = \{M_{a,b} : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}\}$. Soit l'application $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}, M_{a,b} \mapsto a^2 + b^2$.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un groupe pour la loi usuelle de multiplication des matrices carrées.
2. Montrer que f est un morphisme du groupe $(\mathcal{S}, \times)$ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{R}\setminus\{(0, 0)\}$.

Exercice 920 © Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ l'application qui à tout $x \in \mathbb{R}$ associe $e^{ix} \in \mathbb{C}^*$. Montrer que f est un homomorphisme de groupes. Calculer son noyau et son image. f est-elle injective ?

Exercice 921 Traduire en termes d'homomorphisme de groupes les propriétés traditionnelles suivantes :

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$;
2. $\det(MM') = \det(M)\det(M')$;
3. $|zz'| = |z||z'|$;
4. $(xy)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$;
5. $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$;
6. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.

Exercice 922 Pour tout couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$, on pose $M_{a,b} = \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$, $\mathcal{S} = \{M_{a,b} : (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ et $\mathcal{S}^* = \mathcal{S} \setminus \{M_{0,0}\}$. Soit l'application $f : \mathcal{S} \to \mathbb{C}, M_{a,b} \mapsto a + ib$.

1. (a) Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-groupe du groupe additif usuel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que $\mathcal{S}^*$ est un sous-groupe multiplicatif de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que f est un isomorphisme du groupe $(\mathcal{S}, +)$ sur le groupe additif $\mathbb{C}$.
3. (a) Montrer que f définit un homomorphisme du groupe $(\mathcal{S}^*, \times)$ sur le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$.

(b) Déterminer le noyau et l'image de cet homomorphisme.

4. Montrer que $\Omega = \{M_{a,b} : (a,b) \in \mathbb{R}^2, a^2+b^2=1\}$ est un sous-groupe distingué du groupe multiplicatif $\mathcal{S}^*$.

Exercice 923 Soit G un groupe. Montrer que l'application $x \to x^{-1}$ est un morphisme si et seulement si G est commutatif. On suppose G fini ; soit ϕ un morphisme involutif de G dont le seul point fixe est e, montrer que :

$$\forall z \in G, \exists t \in G, z = t(\phi(t))^{-1}.$$

En déduire ϕ puis que G est commutatif.

27.4 Isomorphisme

Exercice 924 Montrer que les groupes $(\mathbb{R},+)$ et $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ sont isomorphes.

Exercice 925 Montrer que $\mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_3$ est isomorphe à $\mathbb{U}_6$. Est-ce que $\mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_2$ est isomorphe est $\mathbb{U}_4$? Pouvez-vous conjecturer à quelle condition $\mathbb{U}_n \times \mathbb{U}_m$ est isomorphe à $\mathbb{U}_{nm}$?

Exercice 926 Soit G un groupe.

1. Montrer que l'ensemble des automorphismes de G muni de la loi de composition des applications est un groupe. Ce groupe est noté $\mathrm{Aut}\,(G)$.
2. Vérifier que l'application $\phi : G \to \mathrm{Aut}\,(G)$ qui associe à $g \in G$ l'application $\phi_g : G \to G, x \mapsto gxg^{-1}$ est un morphisme de groupes. Déterminer son noyau $Z(G)$, dit *centre* de G.
3. Déterminer $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{Q})$ et $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z})$.

Exercice 927
1. Les sous-groupes $(\mathbb{Q},+)$ et $(\mathbb{Z},+)$ sont-ils isomorphes ?
2. Les sous-groupes $(\mathbb{Q},+)$ et $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\times)$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 928© Montrer que les groupes multiplicatifs $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ne sont pas isomorphes.

28 Anneaux et corps

28.1 Anneaux

Exercice 929 Soient $a,b \in \mathbb{C}$. L'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto iz - \overline{z}$ est-elle un (endo)morphisme...

1. ...du groupe $\mathbb{C}$?
2. ...de l'anneau $\mathbb{C}$?
3. ...du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$?

Exercice 930 Soient les ensembles

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : x \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } M = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ -x & -x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : x \in \mathbb{R} \right\}$$

Étudier si, munis des lois usuelles, L et M sont des anneaux, des corps.

Exercice 931 1. Soit $D = \{f \in \mathbb{R}[X] : f'(0) = 0\}$. Montrer que D n'est pas un idéal de l'anneau $\mathbb{R}[X]$ et que c'est un sous-anneau de l'anneau $\mathbb{R}[X]$.

2. Soit $E = \{f \in \mathbb{R}[X] : f(0) = f'(0) = 0\}$. Montrer que D n'est pas un sous-anneau de l'anneau $\mathbb{R}[X]$ et que c'est un idéal de l'anneau $\mathbb{R}[X]$ dont on donnera un générateur.

Exercice 932 On définit sur $\mathbb{R}$ les deux lois $\oplus$ et $\otimes$ par $x \oplus y = x + y - 1$ et $x \otimes y = x + y - xy$. Montrer que $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ est un corps.

Exercice 933 Soit $(G, +)$ un groupe commutatif. On note $\mathrm{End}(G)$ l'ensemble des endomorphismes de G sur lequel on définit la loi $+$ par $f + g : \begin{cases} G \to G \\ x \mapsto f(x) + g(x) \end{cases}$.
Montrer que $(\mathrm{End}(G), +, \circ)$ est un anneau.

Exercice 934 Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On dit que $x \in A$ est nilpotent ssi il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$.

1. Montrer que si x est nilpotent alors $1 - x$ est inversible.
2. Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent, alors xy et $x + y$ sont nilpotents.
3. Un corps admet-il des éléments nilpotents ?

Exercice 935 Soit $(A, +, \times)$ un anneau.
On appelle centre de A l'ensemble $C = \{x \in A / \forall y \in A, xy = yx\}$.
Montrer que C est un sous-anneau de A.

Exercice 936 Soient A et B deux anneaux. On définit sur $A \times B$ les lois

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$(x, y)(x', y') = (xx', yy')$$

1. Montrer que $A \times B$ est alors un anneau.
2. Si A et B sont des corps, en est-il de même pour $A \times B$?

Exercice 937 Montrer que si $A_1, \ldots, A_n$ sont des sous-anneaux de A alors $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ est un sous-anneau de A.

Exercice 938 Soit $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau commutatif pour les lois usuelles de $\mathbb{C}$.
2. Déterminer les inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 939 Soit A un anneau commutatif. On dit que $a \in A$ est nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0$. On pose $\mathcal{N}(A) = \{a \in A : a \text{ est nilpotent}\}$.

1. Dans cette question, $A = \mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$. Montrer que $\overline{6} \in \mathcal{N}(A)$ puis que $\mathcal{N}(A) = \left\{\lambda\overline{6} : \lambda \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. Que peut-on dire de $\mathcal{N}(A)$ si A est intègre ?
3. Montrer que $\mathcal{N}(A)$ est un idéal de A

Exercice 940 (Extrait de l'examen de juin 1994) Sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$, on définit la loi $\star$ par

$$(x_1, x_2) \star (y_1, y_2) = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2y_1).$$

1. (a) Montrer que $(\mathbb{R}^2, +, \star)$ est un anneau commutatif noté A.
   (b) Chercher les diviseurs de 0 de l'anneau A.
2. On considère l'application

$$f : \mathbb{R}[X] \to A, P \mapsto (P(0), P'(0)).$$

   (a) Montrer que f est un homomorphisme d'anneaux.
   (b) f est-il surjectif ?
   (c) Déterminer le noyau de f.

Exercice 941 (Extrait de l'examen de janvier 1994) On définit $A = \{a + jb : a, b \in \mathbb{Z}\}$ où $j = \exp(\frac{2i\pi}{3})$.

1. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{C}$. On désigne par $\mathcal{U}(A)$ le groupe des éléments inversibles de A et enfin, on pose, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $N(z) = |z|^2$.
2. (a) Montrer que si $z \in A$ alors $N(z) \in \mathbb{Z}$.
   (b) Soit $z \in A$. Montrer que $z \in \mathcal{U}(A)$ si et seulement si $N(z) = 1$.
   (c) Soient a et b des entiers. Montrer que si $N(a + jb) = 1$ alors $a, b \in \{-1, 0, 1\}$.
3. Décrire le groupe $\mathcal{U}(A)$ et en déterminer les éléments d'ordre 3.
4. Soit $\Phi : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{C}, P \mapsto P(j)$.
   (a) Montrer que Φ est un homomorphisme d'anneaux.
   (b) Déterminer le noyau de Φ (on pourra remarquer que $j^2 + j + 1 = 0$).
   (c) Montrer que $\operatorname{Im}\Phi = \{a + jb : a, b \in \mathbb{Q}\}$ et que c'est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Exercice 942 1. $\mathcal{J} = \{(\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{Z}\}$ est-il un idéal de l'anneau $\mathbb{Z}^2$?

2. $\mathcal{J} = \left\{P \in \mathbb{R}[X] : P'(0) = 0\right\}$ est-il un idéal de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 943 (D'après examen juin 94) 1. Montrer que $\overline{k}$ est inversible dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si les entiers k et n sont premiers entre eux.

2. On pose $n = 10$ et soit G le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
   (a) Donner la liste des éléments de G.
   (b) Quel est l'ordre de $\overline{3}$? G est-il cyclique ?

Exercice 944 (Bac 1978) Soit l'anneau $A = \mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$.

1. Déterminer les diviseurs de zéro de l'anneau A.
2. Résoudre dans A l'équation $x^2 + \overline{2}x - \overline{3} = \overline{0}$.

Exercice 945 Soit $\mathcal{J} = \{P \in \mathbb{Z}[X] : P(0) \in 2\mathbb{Z}\}$.

1. (a) Montrer que $\mathcal{J}$ est un idéal de $\mathbb{Z}[X]$.
   (b) Montrer que $\mathcal{J}$ est engendré par les polynômes 2 et X.
2. En remarquant que $2 \in \mathcal{J}$, montrer que l'hypothèse "$\mathcal{J}$ est un idéal principal de $\mathbb{Z}[X]$" est absurde.

Exercice 946 Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un anneau principal.

Exercice 947 Soit A un anneau fini commutatif intègre (i.e. $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$). Montrer que c'est un corps, i.e. que tout élément non nul est inversible.

Exercice 948 Soit A un anneau, on dit que $x \in A$ est nilpotent si $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$.

1. Montrer que si x est nilpotent alors $(1 - x)$ est inversible.
2. Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent alors xy et $x + y$ sont nilpotents.
3. Un corps admet-il des éléments nilpotents ?

Exercice 949 Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif, on dit que $I \subset A$ est un idéal de A si et seulement si : I est un sous-groupe de $(A, +)$ et de plus : $\forall a \in A, \forall x \in I, ax \in I$.

1. Quels sont les idéaux de $\mathbb{Z}$?
2. On appelle radical de I, l'ensemble :
$$\sqrt{I} = \{x \in A | \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I\}.$$
Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de Acontenant I. Étudier le cas $A = Z$.
3. Montrer que si I et J sont deux idéaux de A tels que $I \subset J$, alors $\sqrt{I} \subset \sqrt{J}$.En déduire $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
4. Montrer que si I et Jsont deux idéaux de A, $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.

28.2 Algèbre, Corps

Exercice 950 Déterminer les automorphismes du corps $\mathbb{Q}$.

Exercice 951 Soit σ un automorphisme de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si $x \geqslant 0$ alors $\sigma(x) \geqslant 0$.
2. Montrer que σ est croissante.
3. Déterminer σ.

Exercice 952 Soient $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $C = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : MA = AM\}$.

1. Montrer que C est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.
2. Montrer que, pour les lois usuelles, C est une $\mathbb{R}$-algèbre.

Exercice 953 Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = u$. On définit
$$\mathbb{R}[u] := \{P(u) : P \in \mathbb{R}[X]\}.$$

1. Montrer que, muni des lois usuelles sur $\mathcal{L}(E)$, c'est une $\mathbb{R}$-algèbre.
2. Montrer que cette algèbre est de dimension finie et discuter de sa dimension en fonction de u.
3. L'anneau $\mathbb{R}[u]$ est-il un corps ?

Exercice 954 Soit $M = \{aI_2 + bJ \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R}\}$ où $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer J^2 et montrer que si $a, b \in \mathbb{R}$ et $aI_2 + bJ = O$ alors $a = b = 0$.
2. Montrer que, muni des lois usuelles sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, M est un anneau. Cet anneau est-il commutatif, intègre ?

3. M est-il un corps, une $\mathbb{R}$-algèbre ?

Exercice 955 Montrer que l'ensemble S des suites réelles convergentes est une $\mathbb{R}$-algèbre. L'application $S \to \mathbb{R}, u \mapsto \lim u$ est-elle un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres ? L'anneau S est-il intègre ?

Exercice 956 Soient E un $\mathbb{R}$-ev et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = u$. On définit

$$\mathbb{R}[u] = \{a\mathrm{Id}_E + bu : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que, muni des lois usuelles sur $\mathcal{L}(E)$, c'est une $\mathbb{R}$-algèbre. L'anneau $\mathbb{R}[u]$ est-il un corps ?

29 Groupes finis

29.1 Cadre général

Exercice 957 © Soient p un nombre premier et G un groupe d'ordre p. Montrer que G est cyclique et donner la liste des générateurs de G.

Exercice 958 © Soit G un groupe d'ordre pn avec p premier.

1. On considère deux sous-groupes H et H' de G d'ordre p avec $H \neq H'$. Montrer que $H \cap H' = \{e\}$.
2. En déduire que le nombre d'éléments d'ordre p dans G est un multiple de $p - 1$.

Exercice 959 Déterminer (à isomorphisme près) tous les groupes d'ordre 4.

Exercice 960 ©

1. Soit G un groupe dans lequel tout élément (distinct de l'élément neutre) est d'ordre 2. Montrer que G est commutatif.
2. Soit G un groupe d'ordre pair. Montrer que G contient au moins un élément d'ordre 2.

Exercice 961 Montrer que tout morphisme de groupes de $\mathbb{Q}$ dans un groupe fini G est trivial.

Exercice 962 Soit G un groupe et H une partie finie non vide de G. On suppose que H est stable pour la loi de G. Montrer H est un sous-groupe de G.

Exercice 963 Soit G un groupe fini de cardinal $2n$ ($n \geqslant 2$), possédant 2 sous-groupe H et H' tels que :

$$\mathrm{Card}\,(H) = \mathrm{Card}\,(H') = n$$

et

$$H \cap H' = \{e\}.$$

1. Montrer que $G - (H \cup H')$ est un singleton, noté $\{a\}$.
2. Soit $h \in H - \{e\}$, montrer que $hH' \subset \{h, a\}$, en déduire que $hH' = \{h, a\}$ puis que $n = 2$.
3. On écrit $G = \{a, e, h, h'\}$, donner la table de G (puis un exemple d'un tel groupe).

29.2 Groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Exercice 964 Donner la liste des générateurs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 965 Soit le groupe G (additif) $\mathbb{Z}/40\mathbb{Z}$.

1. Soit H le sous-groupe de G engendré par $\overline{12}$ et $\overline{20}$. Montrer que H est le sous-groupe de G engendré par $\overline{4}$ et trouver son ordre.
2. Caractériser les générateurs de G. Combien en compte-t-on ?
3. Déterminer l'ordre de $\overline{15}$.

Exercice 966 1. Montrer qu'il n'existe aucun élément d'ordre 3 dans le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
2. En déduire les morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Exercice 967 Soit f un morphisme de groupes de $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$.

1. Montrer que f est caractérisé par $f(\overline{1})$.
2. Déterminer les ordres possibles de $f(\overline{1})$.
3. En déduire la liste des morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$.

Exercice 968 Soit G le groupe-produit $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\times(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$.

1. Donner la liste des éléments de G et déterminer l'ordre de chacun d'entre eux. G est-il cyclique ?
2. Donner la liste des sous-groupes de G et en constuire le treillis.

Exercice 969 1. Soit $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ définie par $f(n)=(\overline{n},\widetilde{n})$.
   (a) Montrer que f est un morphisme de groupes.
   (b) Déterminer le noyau de f.
2. En déduire que les groupes $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\times(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ et $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ sont isomorphes.

Exercice 970 Les groupes $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\times(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ et $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ sont-ils isomorphes ?

29.3 Groupes de permutations

Exercice 971 Soit G un groupe d'ordre $2n$ et H un sous-groupe de G d'ordre n (H est donc d'indice deux dans G).

1. Montrer que si $g\in G$ et $g\notin H$, on a $H\cap gH=\emptyset$ puis que $G=H\cup gH$.
2. En déduire que pour tout $g\in G, g^2\in H$.
3. On suppose désormais $G=\mathcal{A}_4$ le groupe des permutations paires de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$. Soit $\sigma=(a,b,c)$ un 3-cycle. Montrer que σ peut s'écrire comme le carré d'une permutation paire c'est à dire qu'il existe $\varphi\in\mathcal{A}_4$ telle que $\varphi^2=\sigma$. En déduire que $\mathcal{A}_4$ ne possède pas de sous-groupe d'ordre 6.

Exercice 972 Déterminer tous les éléments $\sigma\in S_n$ tels que $\sigma^2=\sigma$.

Exercice 973©

1. Rappeler $|S_3|$. Montrer que S_3 ne contient pas d'élément d'ordre 6.
2. Montrer que S_3 contient un unique sous-groupe d'ordre 3. Déterminer tous les sous-groupes d'ordre 2 de S_3.

3. Déduire de ce qui précède tous les sous-groupes de S_3.

Exercice 974 (examen juin 1999) Soit $GL_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles 2×2 à cœfficients réels. $GL_2(\mathbb{R})$ est naturellement muni d'une structure de groupe par la multiplication usuelle des matrices. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A et B appartiennent à $GL_2(\mathbb{R})$.
2. Quels sont les ordres de A et B ?
3. Montrer que $AB = -BA$ et en déduire que :
   (a) $G = \{I, A, B, AB, -I, -A, -B, -AB\}$ est un groupe (pour la loi multiplicative des matrices ; I esl la matrice identité) ;
   (b) G est le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$ engendré par $\{A, B\}$.
4. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne orientée canonique.
   (a) Montrer que G est inclus dans $O_2(\mathbb{R})$ (le groupe orthogonal).
   (b) Déterminer l'intersection de G et de $SO_2(\mathbb{R})$ (le groupe spécial orthogonal).
   (c) Déterminer la nature géométrique des 8 éléments de G.

Exercice 975 (examen juin 1999)

I

Soit $(G, \cdot)$ un groupe. On définit le centre $\mathcal{Z}(G)$ de G par :

$$\mathcal{Z}(G) = \{x \in G \ / \ \forall a \in G \ \ ax = xa\}.$$

Montrer que $\mathcal{Z}(G)$ est un sous-groupe de G.
Que peut-on dire de $\mathcal{Z}(G)$ si G est abélien ?

II

On désigne par $\mathcal{A}_n$ le groupe alterné d'ordre n (rappel : c'est le sous-groupe de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ formé des permutations de $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$ de signature $+1$.)
On se propose de déterminer le centre de $\mathcal{A}_n$ pour $n \geqslant 3$.

1. Donner la liste des éléments de $\mathcal{A}_3$ et de $\mathcal{Z}(\mathcal{A}_3)$.
2. On suppose désormais $n \geqslant 4$. Dans cette question on fixe i, j, k trois éléments distincts de E_n.
   (a) Vérifier que le 3-cycle (i, j, k) est dans $\mathcal{A}_n$.
   (b) Soit $s \in \mathcal{S}_n$, montrer que $s \circ (i, j, k) = (s(i), s(j), s(k)) \circ s$.
   (c) En déduire que si $s \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}_n)$ alors l'image de $\{i, j, k\}$ par s est $\{i, j, k\}$.
3. Pour $n = 4$, on note $E_4 = \{i, j, k, \ell\}$. Si $s \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}_4)$ montrer que $s(\ell) = \ell$. En déduire $\mathcal{Z}(\mathcal{A}_4) = \{\mathrm{id}\}$.
4. Pour $n \geqslant 5$, soit $s \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}_n)$, soit i, j, k, ℓ, m cinq éléments distincts de E_n. En considérant les ensembles $\{i, j, k\}$ et $\{i, \ell, m\}$ montrer que $s = \mathrm{id}$ et déterminer $\mathcal{Z}(\mathcal{A}_n)$

Exercice 976 Quel est l'ordre maximal d'un élément de S_4? De S_5? De A_5?

Exercice 977 On désigne par K le sous-ensemble $\{id, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$ de S_4.

1. Montrer que K est un sous-groupe distingué de S_4 et de A_4.
2. Pour quelle raison K est-il isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$? Calculer le quotient A_4/K.
3. Montrer que le quotient S_4/K est isomorphe à S_3.
4. Donner un exemple de sous groupe distingué de K et non de S_4. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

Exercice 978 Calculer $Z(S_n)$ suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 979© Trouver la décomposition en produit de cycles à supports disjoints, la signature, l'ordre et une décomposition en produit de transpositions des permutations suivantes de $\mathcal{S}_{10}$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 7 & 1 & 4 & 2 & 6 & 9 & 8 & 5 & 10 \end{pmatrix},$$

$$\varphi = (10,3,4,1)\,(8,7)\,(4,7)\,(5,6)\,(2,6)\,(2,9)\,.$$

Calculer σ^{1998} et φ^{1998}.

Exercice 980 $\mathcal{A}_4$ désigne le groupe des permutations paires sur l'ensemble $E = \{1,2,3,4\}$.

1. Quels sont les ordres des éléments de $\mathcal{A}_4$? En déduire la liste de ces éléments sous forme décomposée en produit de cycles à supports disjoints.
2. Montrer que les permutations $s = (1\ 2)(3\ 4)$ et $r = (1\ 2\ 3)$ engendrent $\mathcal{A}_4$.
3. Montrer que $\mathcal{A}_4$ admet un unique sous-groupe H d'ordre 4 (on examinera d'abord les ordres des éléments d'un tel sous-groupe) et que ce sous-groupe est un sous-groupe distingué de $\mathcal{A}_4$.

Exercice 981 Le groupe $G = \mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_3$ est-il abélien ? Déterminer tous les sous-groupes de G d'ordre 4.

Exercice 982 Quel est le nombre de k-cycles dans $\mathcal{S}_k$ puis dans $\mathcal{S}_n$ où $k \leqslant n$?

Exercice 983 Soit G un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$.

1. Montrer que si G est d'ordre impair alors G ne contient aucune permutation impaire.
2. Montrer que si G contient au moins une permutation impaire, alors G contient autant de permutations paires que de permutations impaires.

Exercice 984 Soient $a = (1,2)(3,4), b = (1,3)(2,4), c = (1,4)(2,3) \in \mathcal{A}_4,\ X = \{a,b,c\}$, $V = \{a,b,c,\mathrm{Id}\}$ et $\Phi : \mathcal{S}_4 \to \mathcal{S}(X), g \in G \mapsto \Phi_g = [x \mapsto gxg^{-1}]$.

1. (a) Montrer que V est un sous-groupe distingué de $\mathcal{A}_4$ (on pourra étudier l'ordre des élements de $\mathcal{A}_4$).
   (b) Montrer que $< a >$ est un sous-groupe distingué de V et n'est pas un sous-groupe distingué de $\mathcal{A}_4$.
2. Montrer que Φ est un homomorphisme de groupes.
3. (a) Calculer $\Phi(g)$ pour $g = (1,2)$ puis $g = (1,2,3)$.
   (b) En déduire que Φ est surjectif.
4. Montrer que $\mathcal{S}_4/V$ est isomorphe à $\mathcal{S}_3$.

5. Ecrire la décomposition de $\mathcal{A}_4$ suivant les classes modulo V.

Exercice 985 1. Déterminer le centre du groupe $\mathcal{S}_n$.

2. (a) Montrer qu'un groupe $G_1 \times G_2$ contient un sous-groupe distingué isomorphe à G_1.
   (b) Montrer que les groupes $\mathcal{S}_n$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathcal{A}_n$ ne sont pas isomorphes si $n \geqslant 3$.

Exercice 986 1. Montrer que dans $\mathcal{S}_n$ on a $f \circ (a, b) \circ f^{-1} = (f(a), f(b))$.

2. Montrer que les permutations $(1, ..., n)$ et $(1, 2)$ engendrent $\mathcal{S}_n$ (on rappelle que les transpositions engendrent $\mathcal{S}_n$).

Exercice 987©

1. Montrer que $\mathcal{S}_n$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{A}_{n+2}$.
2. Montrer que $\mathcal{S}_4$ n'est pas isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{A}_5$.
3. Montrer que $\mathcal{S}_5$ n'est pas isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{A}_6$.

Exercice 988 Montrer que tout groupe fini est isomorphe à un sous-groupe de S_n (groupe symétrique) pour un certain n.

30 Groupes quotients

30.1 Sous-groupes distingués

Exercice 989© Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes d'ordre fini de G tels que $H \cap K = \{e_G\}$.

1. Montrer que le cardinal de HK est égal $|H||K|$.
2. En déduire que si $|G| = pq$ où p est premier et $p > q$ alors G a au plus un sous-groupe d'ordre p. Montrer que si ce sous-groupe existe il est distingué dans G.

Exercice 990 Soit G un groupe, A une partie non vide de G. On note $N(A) = \{g \in G; gAg^{-1} = A\}$ et $C(A) = \{g \in G; \forall a \in A; gag^{-1} = a\}$. Montrer que $N(A)$ et $C(A)$ sont des sous-groupes de G et que $C(A)$ est un sous-groupe distingué de $N(A)$.

Exercice 991 Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes de G. On note $HK = \{hk; h \in H, k \in K\}$.

1. Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$. En déduire que si H est distingué dans G alors HK est un sous-groupe de G.
2. On suppose désormais que $\forall h \in H, k \in K : hk = kh$. Montrer que l'application $f : H \times K \to G$ définie par $\forall h \in H, k \in K : f(h, k) = hk$ est un homomorphisme de groupes.
3. Calculer le noyau et l'image de f. Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que f soit un isomorphisme de groupes.

Exercice 992

1. Soit G un groupe, H un sous-groupe de G. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

   i) $\forall g \in G : gHg^{-1} \subset H$.

   ii) $\forall g \in G : gHg^{-1} = H$.

   iii) $\forall g \in G : gH = Hg$.

2. En déduire que tout sous-groupe d'indice 2 est distingué.

Exercice 993 Soient $T = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right) : a, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}\}$ et $U = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : b \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que T est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que U est un sous-groupe distingué de T.

30.2 Groupes quotients

Exercice 994 Soit G un groupe non réduit à un élément. Un sous-groupe M de G est dit *maximal* si le seul sous-groupe de G, distinct de G et contenant M, est M lui-même. Les questions sont indépendantes.

1. (a) Montrer que $6\mathbb{Z}$ n'est pas un sous-groupe maximal de $\mathbb{Z}$.
   (b) Montrer que $5\mathbb{Z}$ est un sous-groupe maximal de $\mathbb{Z}$.
2. On pose $G := \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Soit H_1 le sous-groupe de G engendré par $\overline{4}$ et H_2 le sous-groupe de G engendré par $\overline{2}$.
   (a) Expliciter les éléments de H_1 et H_2.
   (b) Montrer que H_1 n'est pas un sous-groupe maximal de G et que H_2 est un sous-groupe maximal de G.

Exercice 995© Déterminer tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

Exercice 996 Montrer que le groupe-quotient $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ est isomorphe à $\mathbb{R}$.

Exercice 997 Soit G le groupe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Si $q \in \mathbb{Q}$, on note $\mathrm{cl}(q)$ la classe de q modulo $\mathbb{Z}$.

1. Montrer que $\mathrm{cl}(\frac{35}{6}) = \mathrm{cl}(\frac{5}{6})$ et déterminer l'ordre de $\mathrm{cl}(\frac{35}{6})$.
2. Montrer que si $x \in G$ il existe un unique $\alpha \in \mathbb{Q} \cap [0, 1[$ tel que $x = \mathrm{cl}(\alpha)$.
3. Montrer que tout élément de G est d'ordre fini et qu'il existe des éléments d'ordre arbitraire.

Exercice 998© Décrire le groupe-quotient $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^*_+$ et montrer qu'il est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 999 Montrer que tout quotient d'un groupe monogène est monogène.

Exercice 1000 Soient G le groupe-produit $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ et H le sous-groupe de G engendré par $(\overline{3}, \overline{2})$. Écrire la décomposition de G suivant les classes à gauche modulo H. Décrire le groupe-quotient G/H.

Exercice 1001 Soit G un groupe $Z(G) = \{h \in G; \forall g \in g, gh = hg\}$.

1. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe distingué de G.
2. Montrer que si $G/Z(G)$ est monogène G est cyclique.

Exercice 1002© Soit G un groupe ; on note $D(G)$ le groupe engendré par les éléments de la forme $ghg^{-1}h^{-1}$; $g, h \in G$.

1. Montrer que $D(G)$ est distingué dans G.
2. Montrer que $G/D(G)$ est commutatif ; plus généralement montrer qu'un sous-groupe distingué H de G contient $D(G)$ si et seulement si G/H est commutatif.

Exercice 1003 Soit G un groupe ; on note, pour tout $g \in G$ φ_g l'application $x \mapsto gxg^{-1}$ de G dans lui-même et $\mathrm{Int}(G) = \{\varphi_g ; g \in G\}$.

1. Montrer que $\mathrm{Int}(G)$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Aut}(G)$.
2. Soit $f : G \to \mathrm{Int}(G)$ l'application $g \mapsto \varphi_g$. Montrer que f est un homomorphisme de groupe. Calculer $\mathrm{Ker}(f)$.
3. En déduire que $G/Z(G)$ est isomorphe à $\mathrm{Int}(G)$.

Exercice 1004 Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes de G. On note $HK = \{hk; h \in H, k \in K\}$. On suppose que K est distingué dans G.

1. Montrer que $HK = KH$ et que HK est un sous-groupe de G.
2. Montrer que H et K sont des sous-groupes de KH et que $K \cap H$ est un sous-groupe distingué de H et que K est distingué dans KH.
3. Soit $\varphi : H \to (HK)/K$ la restriction à H de l'application quotient. Calculer le noyau et l'image de φ. En déduire que les groupes $H/(K \cap H)$ et $(HK)/K$ sont isomorphes.

Exercice 1005 Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes distingués de G avec $H \subset K$.

1. Montrer que K/H est un sous-groupe distingué de G/H.
2. Montrer que le quotient $(G/H)/(K/H)$ est isomorphe à G/K.

Exercice 1006© Soit G le sous-groupe de $Gl(2,\mathbb{R})$ engendré par les matrices $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit H le sous-groupe de G engendré par AB. Calculer $|H|$
2. Montrer que H est distingué dans G. Calculer le quotient G/H; en déduire $|G|$.

Exercice 1007© Les questions sont indépendantes.

1. (a) Montrer que l'application $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto 3x+6y$ est un morphisme de groupes.
   (b) Déterminer le noyau $\ker f$ de f et montrer qu'il n'existe pas $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\ker f = p\mathbb{Z} \times q\mathbb{Z}$.
   (c) Montrer que le groupe-quotient $\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}(-2, 1)$ est isomorphe au groupe $3\mathbb{Z}$.
2. Soit G le sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$ engendré par $(2, 0)$ et $(0, 2)$. Montrer que le groupe-quotient $\mathbb{Z}^2/G$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

31 Espaces euclidiens

31.1 Produit scalaire, norme

Exercice 1008 Soient $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ appartenant à $\mathbb{R}^2$. Pour quelles valeurs de $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ l'application $f(x, y) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2$ est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 1009 Soient x, y et z trois réels tels que $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leqslant 1$. Montrer l'inégalité : $(x + y + z)^2 \leqslant \frac{11}{6}$. (On pourra par exemple appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à certains vecteurs de $\mathbb{R}^3$ pour un produit scalaire bien choisi.)

Exercice 1010 Soient x, y et z trois réels tels que $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$. Montrer que $(x+2y+3z)^2 \leqslant 14$.

Exercice 1011 Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non nul, φ un produit scalaire sur E, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. $\psi : E \times E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\psi(x, y) = a\varphi(x, x) + b\varphi(x, y) + c\varphi(y, y)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c) pour que ψ soit un produit scalaire sur E.

Exercice 1012

1. Soient $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et $\|.\|$ la norme associée ; $n \in \mathbb{N}^*$, et $v_1, \dots, v_n \in E$. Montrer l'inégalité : $\|\sum_{i=1}^{n} v_i\|^2 \leqslant \ n\sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geqslant n^2$. Etudier le cas d'égalité.

Exercice 1013 Soit $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue 2π-périodique$\}$. Montrer que $\langle f|g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur E.

Exercice 1014 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $\langle P|Q\rangle = \sum\limits_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$ est un produit scalaire sur E.

Exercice 1015 Soit E un espace euclidien et f et g deux fonctions de E dans E qui vérifient : $\forall (x, y) \in E^2 \, \langle f(x)|y\rangle = \langle x|g(y)\rangle$. Montrer que f et g sont linéaires.

Exercice 1016 Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n$ des réels positifs.
Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k c_k \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 c_k \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2 c_k$.

Exercice 1017 Soit E un espace euclidien de dimension n et $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E tels que si $i \neq j$ alors $\langle x_i|x_j\rangle < 0$. Montrer par récurrence sur n que $p \leqslant n + 1$.

Exercice 1018 Soit E un espace euclidien, et $(e_1, ..., e_n)$ des vecteurs unitaires vérifiant :

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2 .$$

Montrer que $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormale (i.e. une base qui est aussi une famille orthonormale). (NB : on ne suppose pas que la dimension de l'espace est n.)

Exercice 1019

1. Montrer que sur $M_n(\mathbb{R})$ l'application :
$$(A, B) \to tr({}^tAB)$$
est un produit scalaire.
2. Soit N la norme associée, montrer que :
$$\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R}), N(AB) \leqslant N(A)N(B).$$
3. Montrer que :
$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), |tr(A)| \leqslant \sqrt{n}N(A).$$

Exercice 1020 Soit E un espace euclidien et f et g deux fonctions de E dans E telles que :

$$\forall (x,y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle .$$

Montrer que f et g sont linéaires.

Exercice 1021 Soit E un espace euclidien, montrer que :

$$\forall (x,y) \in E^2, \|x+y\|^2 + 1 \leqslant 2\left(1+\|x\|^2\right)\left(1+\|y\|^2\right).$$

Exercice 1022 Soit E un espace euclidien et $f : E \to E$ tel que $f(0) = 0$ et :

$$\forall (x,y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| .$$

Montrer que f est linéaire.

Exercice 1023 On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire :

$$(P,Q) \to \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

Existe t-il $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], (P|A) = P(0) \ ?$$

Exercice 1024 Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme de E, tel que :

$$\forall (x,y) \in E^2, (x|y) = 0 \Rightarrow (f(x)|f(y)) = 0.$$

Montrer :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}^+, \forall (x,y) \in E^2, (f(x)|f(y)) = \alpha (x|y).$$

31.2 Espace orthogonal

Exercice 1025 Montrer que l'application $(A,B) \mapsto tr({}^tAB)$ de $M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un produit scalaire. Calculer l'orthogonal de l'ensemble des matrices diagonales puis celui des matrices symétriques.

Exercice 1026 Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :

1. Si $F \subset G$ alors $G^\perp \subset F^\perp$.
2. $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
3. $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.
4. Si $\dim(E)$ est finie, alors $(F^\perp)^\perp = F$.

31.3 Projection, symétrie

Exercice 1027 Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est orthogonal (c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(p) \perp \mathrm{Im}(p)$) si et seulement si : $\forall x \in E : \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 1028 Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. On note p la projection orthogonale sur F et on pose, pour tout $x \in E$: $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$. Soit $z \in F$.

1. Montrer que pour tout $x \in F$, les trois conditions sont équivalentes :
   (i) $d(x, F) = \|x - z\|$.
   (ii) $z = p(x)$.
   (iii) $\forall y \in F, y \perp (x - z)$.
2. En déduire $\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$.

Exercice 1029 Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 2. Soient x et $y \in E$. Montrer que :

1. Si $\|x\| = \|y\|$, alors il existe un hyperplan H de E tel que $y = s(x)$ où s est la symétrie orthogonale par rapport à H.
2. Si $\langle x, y\rangle = \|y\|^2$, alors il existe un hyperplan H de E tel que $y = p(x)$ où p est la projection orthogonale sur H.

Exercice 1030 Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire euclidien canonique, donner la matrice de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x + 2y - 3z = 0$. Donner la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à ce même plan.

Exercice 1031 Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel muni d'une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_m)$. Soit p la projection orthogonale sur F.

1. Montrer que $\forall x \in E, p(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i\rangle e_i$.
2. Donner de même l'expression de la symétrie orthogonale par rapport à F et la projection orthogonale sur $F^\perp$.

Exercice 1032 Quelle est la transformation de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$?

Exercice 1033 Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ où $v_1 = (1, -1, 0, 0)$ et $v_2 = (0, 1, 0, 1)$.

Exercice 1034 Soient E un espace euclidien, u un vecteur non nul et $H = u^\perp$. Soient p la projection orthogonale sur H et s la symétrie orthogonale par rapport à H.

1. Montrer que $\forall x \in E \qquad p(x) = x - \frac{\langle x|u\rangle}{\|u\|^2} u$.
2. Montrer que $\forall x \in E \qquad s(x) = x - 2\frac{\langle x|u\rangle}{\|u\|^2} u$.
3. On considère dans $\mathbb{R}^3$ le plan $(\Pi : x - y + z = 0)$. Déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à Π.

Exercice 1035 Soit $(E, |\ )$ un espace vectoriel de dimension n.

1. Soient F et G des sous-espace vectoriels de E. Montrer que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.
2. Soient $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormale de E et $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, ..., 0)\}$ et H le sous-espace vectoriel de E d'équation cartésienne $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0$ dans $\mathcal{B}$.
   (a) Déterminer l'orthogonale de H.
   (b) Déterminer la distance du vecteur $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ de E au sous-espace vectoriel H.
3. Soit P le sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ défini par
$$u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in P \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0.$$
   (a) Déterminer une base de $P^{\perp}$ puis une base orthonormale de $P^{\perp}$.
   (b) En déduire une expression analytique de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^4$ sur P.

Exercice 1036 Soient E un espace vectoriel euclidien, F et G deux sous-espace vectoriels supplémentaires de E et p le projecteur de E d'axe F et de direction G.

1. On suppose que $F \perp G$. Montrer que $\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
2. On suppose que $\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
   (a) Soient $a \in F$ et $b \in G$. Montrer que $\|a + b\| \geqslant \|a\|$.
   (b) En déduire que $F \perp G$.

Exercice 1037 Soit $\alpha = \inf \left\{ \int_{-1}^{1} (ax^2 + bx + c - |x|\ )^2\, dx : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Déterminer un espace vectoriel euclidien $(E, |\ )$, un sous-espace vectoriel F de E et $v \in E$ tel que $\alpha = \mathrm{d}(v, F)^2$.
2. Déterminer $p \in F$ tel que $\alpha = \mathrm{d}(v, p)^2$ et α.

Exercice 1038 Soit E un espace euclidien (de dimension finie), F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Déterminer $(F + G)^{\perp}$ et $(F \cap G)^{\perp}$ en fonction de $F^{\perp}$ et $G^{\perp}$.

Exercice 1039 Déterminer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (e^x - (ax + b))^2 dx$.

Exercice 1040 Calculer :
$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 x^2 \left|\ln x - ax - b\right|^2 dx.$$

31.4 Orthonormalisation

Exercice 1041 Résoudre l'équation $(1 - x)^2 + (x - y)^2 + (y - z)^2 + z^2 = \frac{1}{4}$ pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 1042

1. Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^5$ engendré par $u = (1, 2, 3, -1, 2)$ et $v = (2, 4, 7, 2, -1)$. Trouver une base de l'orthogonal $F^{\perp}$ de F.
2. Trouver une base orthonormale du sous-espace E de $\mathbb{C}^3$ engendré par $v_1 = (1, i, 0)$ et $v_2 = (1, 2, 1 - i)$.

Exercice 1043 Soit F un sous-espace d'un espace euclidien E. Montrer qu'il existe une base orthonormale de F qui est inclue dans une base orthonormale de E.

Exercice 1044

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que A définit un produit scalaire φ sur $\mathbb{R}^3$. Construire une base orthonormale pour φ.
2. Considérons une base $\{v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,1,1), v_3 = (0,0,1)\}$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. Utiliser le procédé d'orthogonalisation de Schmidt pour transformer $\{v_i\}$ en une base orthonormale.

Exercice 1045 Soient $E = \mathbb{R}_n[X], I_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{\frac{-t^2}{2}} dt$.

1. Montrer que l'intégrale I_n est convergente. Que vaut I_{2p+1} ?

   Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(P,Q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{\frac{-t^2}{2}} dt$.
2. Montrer que φ est un produit scalaire.
3. On suppose $n = 2$. Ecrire la matrice associée à φ dans la base $(1, X, X^2)$. Construire une base orthonormale (P_0, P_1, P_2) par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt appliqué à $(1, X, X^2)$.

Exercice 1046 Réduire en somme de carrés indépendants les formes suivantes :

1. $9x^2 - 6y^2 - 8z^2 + 6xy - 14xz + 18xw + 8yz + 12yw - 4zw$
2. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4$

Exercice 1047 $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien. Vérifier que les vecteurs $e_1 = (1,0,1)$, $e_2 = (1,0,2)$ et $e_3 = (1,1,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt.

Exercice 1048 $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien. Soient $e_1 = (1,0,1,0)$ et $e_1 = (1,-1,1,-1)$ et $F = \mathrm{vect}(e_1, e_2)$.

1. Déterminer une base orthonormale de F.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ du projecteur orthogonal sur F.
3. Déterminer la distance du vecteur $(1,1,1,1)$ au sous-espace vectoriel F.

Exercice 1049 On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire défini par

$$\phi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X], (P,Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

1. Déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la distance du polynôme $P = X^2 + X + 1$ au sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}_2[X]$ formé des polynômes f tels que $f'(0) = 0$.

Exercice 1050 Soit $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie de la manière suivante : si $u = (x,y,z)$ et $u' = (x', y', z')$ alors

$$f(u,u') = 2xx' + yy' + 2zz' + xy' + yx' + xz' + zx' + yz' + zy'.$$

1. Montrer que f est un produit scalaire sur l'espace vectoriel canonique $\mathbb{R}^3$.
2. Soit P le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne $2x - y + z = 0$.

(a) Déterminer l'orthogonal du sous-espace vectoriel P.

(b) Déterminer un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont l'orthogonal est P.

3. Déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ pour le produit scalaire f.

Exercice 1051 Orthonormaliser dans $\mathbb{R}^3$ la famille $x_1 = (1, -2, 2)$, $x_2 = (-1, 0, -1)$, $x_3 = (5, -3, 7)$.

Exercice 1052 Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P|Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

31.5 Formes quadratiques

Exercice 1053 Soient E un K-espace vectoriel (où K est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie $n > 0$ et q une forme quadratique sur E.

1. q peut-elle être injective ?
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur q pour qu'elle soit surjective.

Exercice 1054 (examen juin 1999) Soit a un nombre réel. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(v) = x^2 + (1 + a)y^2 + (1 + a + a^2)z^2 + 2xy - 2ayz$$

pour $v = (x, y, z)$. Soit f la forme bilinéaire symétrique associée à q.

1. Déterminer une décomposition de q en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.
2. Donner le rang et la signature de q suivant les valeurs de a.
3. Pour quelles valeurs de a, f définit-elle un produit scalaire ?

Exercice 1055 Soit q la forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner l'expression analytique de q dans $\mathcal{B}$ et expliciter sa forme polaire f.
2. Vérifier que $\mathcal{B}' = (e_1, -\frac{1}{2}e_1 + e_2, -e_2 + e_3)$ est une base $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de q dans cette base. Expliciter q dans cette base.
3. Trouver le rang et la signature de q.

Exercice 1056 Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ et q l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $q(P) = P(0)P(1)$.

1. (a) Montrer que q est une forme quadratique sur E.

   (b) Déterminer la matrice de q dans la base canonique de E.

   (c) La forme q est-elle positive, négative ?
2. Soit $P := X^2 + X + 1$ et V =vect(P). Déterminer $V^\perp$ et $V^{\perp\perp}$.
3. Déterminer le rang de q puis son noyau.
4. Déterminer le cône isotrope $C(q)$ de q et constuire une base de E formée de vecteurs isotropes. $C(q)$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?
5. Déterminer une base (P_0, P_1, P_2) de E telle que $q(a_0P_0 + a_1P_1 + a_2P_2) = a_0^2 - a_1^2$ et donner la signature de q.

Exercice 1057 Soit q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, que l'on suppose définie (*i.e.* son cône isotrope est $\{0\}$). Montrer que q garde un signe constant sur E (on pourra raisonner par l'absurde et considérer $q(a+tb)$ où a et b sont des vecteurs bien choisis et $t \in \mathbb{R}$).

Exercice 1058
1. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Soit q la forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Utiliser la question précédente pour trouver une base q-orthogonale, déterminer la signature de q et une décomposition de q en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.

Exercice 1059 Déterminer la signature de la forme quadratique

$$q : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x + y - z)^2 - (3x - y + 2z)^2 + (5y - 7z)^2.$$

Exercice 1060 Soit la forme quadratique q définie par

$$q : (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 \mapsto x_1x_2 + x_2x_4 - x_3x_4 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 - x_1x_3.$$

1. Montrer, sans réduire q, qu'il existe une base q-orthonormale de $\mathbb{C}^4$.
2. En expliciter une.

32 Endomorphismes particuliers

32.1 Endomorphismes autoadjoints

Exercice 1061 Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est orthogonal si et seulement si $p = p^*$.

Exercice 1062 Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace euclidien et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
1. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que si $\varphi = \varphi^*$ et $\varphi(F) \subset F$ alors $\varphi(F^\perp) \subset F^\perp$.
2. Soit F un espace propre de φ. Montrer que si $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$ alors $\varphi(F^\perp) \subset F^\perp$.

Exercice 1063 Soient A et B deux matrices symétriques positives. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
1. Montrer que tout vecteur propre de A^k est vecteur propre de A.
2. Si $A^k = B^k$ alors $A = B$.
3. Que se passe-t-il sans l'hypothèse A et B symétriques positives ?

Exercice 1064 Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace euclidien et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
1. Montrer que $\varphi^* \circ \varphi$ est symétrique et que $\mathrm{Sp}(\varphi^* \circ \varphi) \subset \mathbb{R}_+$.
2. On note respectivement λ et μ la plus grande et la plus petite valeur propre de $\varphi^* \circ \varphi$. Montrer, pour tout $x \in E$, l'inégalité :

$$\mu\|x\|^2 \leqslant \|\varphi(x)\|^2 \leqslant \lambda\|x\|^2.$$

Exercice 1065 Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace euclidien et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
1. Montrer que si $\varphi = \varphi^*$ et $\forall x \in E : \langle x, \varphi(x)\rangle = 0$ alors $\varphi = 0$.

2. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   i) $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$.
   ii) $\forall x, y \in E : \langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = \langle \varphi^*(x), \varphi^*(x) \rangle$.
   iii) $\forall x \in E : \|\varphi(x)\| = \|\varphi^*(x)\|$.
3. Si $\dim(E) = 2$ et si $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$ alors la matrice de φ dans une base orthonormée est soit symétrique, soit de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$.
4. On suppose désormais que $\dim(E) = 3$ et que $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$.
   (a) Montrer que φ a au moins une valeur propre réelle qu'on notera λ. Montrer que E_λ et $E_\lambda^\perp$ sont laissés stables par φ et φ^*.
   (b) Montrer que si φ n'est pas symétrique, il existe une base orthonormée ε de E et deux réels a et b (avec $b \neq 0$) tels que $\mathrm{Mat}(\varphi, \varepsilon) = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Exercice 1066 Soit E un espace euclidien de dimension 3.

1. Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base orthonormée de E. Soient $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ et $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ deux vecteurs de E. Calculer $\langle x, y \rangle$ en fonction des coefficients x_i et y_i (pour $i \in \{1, 2, 3\}$).
2. On considère $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme auto-adjoint. On note λ sa plus petite valeur propre et λ' sa plus grande valeur propre. Montrer que l'on a, pour tout x appartenant à E, les inégalités :
$$\lambda\|x\|^2 \leqslant \langle u(x), x \rangle \leqslant \lambda'\|x\|^2.$$
   (On utilisera une base orthonormée convenable.)
3. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme quelconque. Montrer que $u = \frac{1}{2}(v + v^*)$ est auto-adjoint. Soient μ une valeur propre de v, λ la plus petite valeur propre de u et λ' la plus grande valeur propre de u. Montrer que $\lambda \leqslant \mu \leqslant \lambda'$.

Exercice 1067

1. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S = {}^tA \cdot A$ est une matrice symétrique dont tous les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont positives. Démontrer l'égalité : $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}^2$.
2. Soit $S \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Existe-t-il une matrice $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tA \cdot A$? Donner une condition nécessaire et suffisante sur S pour que A soit inversible. Application à $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 1068 Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien de dimension p. A chaque n-uple $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de E on associe le nombre (déterminant de Gram)
$$G(x_1, \ldots, x_n) = \text{dét}(< x_i, x_j >)_{i,j=1,\ldots,n}.$$

1. Montrer que $x_1, \ldots, x_n$ sont liés si et seulement si $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$; montrer que si $x_1, \ldots, x_n$ sont indépendants, on a $G(x_1, \ldots, x_n) > 0$.
2. Montrer que, pour toute permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$, on a $G(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = G(x_1, \ldots, x_n)$, et que la valeur de $G(x_1, \ldots, x_n)$ n'est pas modifiée si l'on rajoute à un des vecteurs, soit x_i, une combinaison linéaire des autres vecteurs $x_j (j \neq i)$. Calculer $G(\alpha x_1, \ldots, x_n)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

3. On suppose $x_1, \ldots, x_n$ indépendants. Soit $x \in E$, et soit $d(x, H)$ la distance de x à l'hyperplan $H = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$. Montrer que $d(x, H)^2 = \dfrac{G(x, x_1, \ldots, x_n)}{G(x_1, \ldots, x_n)}$.

Exercice 1069 Diagonaliser très rapidement la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Exercice 1070 Montrer que l'endomorphisme de l'espace vectoriel euclidien canonique $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$C = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -8 \\ 7 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

est un automorphisme orthogonal.

Exercice 1071 Soient E un espace vectoriel euclidien et f un endomorphisme de E tel que

$$\forall x \in E, \|f(x)\| \leqslant \|x\|.$$

1. (a) Soit $x \in E$ tel que $f^*(x) = x$. Montrer que $\|f(x) - x\|^2 = \|f(x)\|^2 - \|x\|^2$.
   (b) En déduire que $\ker(f^* - \mathrm{Id}) \subseteq \ker(f - \mathrm{Id})$.
2. Soit h un endomorphisme de E. Montrer que $(\mathrm{Im}\, h)^\perp \subseteq \ker h^*$.
3. En déduire que les sous-espace vectoriels $\ker(f - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$ sont supplémentaires et orthogonaux.

Exercice 1072 Soit E un espace euclidien de dimension 3.

1. Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée de E. Soient $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ et $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ deux vecteurs de E. Calculer $\langle x, y\rangle$ en fonction des coefficients x_i et y_i (pour $i \in \{1, 2, 3\}$).
2. On considère $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme auto-adjoint. On note λ_1 sa plus petite valeur propre et λ_2 sa plus grande valeur propre. Montrer que l'on a, pour tout x appartenant à E les inégalités :
   $$\lambda_1\|x\|^2 \leqslant \langle u(x), x\rangle \leqslant \lambda_2\|x\|^2.$$
   (On utilisera une base orthonormée convenable.)
3. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme quelconque. Montrer que $u = \dfrac{1}{2}(v + v^*)$ est auto-adjoint. Soient λ une valeur propre de v, λ_1 la plus petite valeur propre de u et λ_2 la plus grande valeur propre de u. Montrer que $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$.

Exercice 1073 1. Soient E un espace vectoriel euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique positif. Montrer que si $x \in E$ alors $(f(x)|x) \geqslant 0$.

2. Soit $M = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique positive. Montrer que pour tout $i = 1, .., n$, $m_{ii} \geqslant 0$ et $\mathrm{tr}(M) \geqslant 0$
3. Soient A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques positives.
   (a) Montrer qu'il existe $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique positive telle que $\mathrm{tr}(AB)$ $=\mathrm{tr}(DM)$.
   (b) En déduire que $\mathrm{tr}(AB) \leqslant \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$.

32.2 Autres endomorphismes normaux

Exercice 1074 Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien. Un endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ est dit antisymétrique lorsque $\varphi^* = -\varphi$.

1. Montrer que φ est antisymétrique si et seulement si $\forall x \in E, \langle \varphi(x), x \rangle = 0$. (on pourra remarquer que $\varphi + \varphi^*$ est autoadjoint.)
2. Montrer que si φ est antisymétrique alors $(\mathrm{Ker}(\varphi))^\perp = \mathrm{Im}(\varphi)$ puis que $\mathrm{rg}(\varphi)$ est pair.

Exercice 1075 Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme antisymétrique c'est-à-dire tel que $\varphi^* = -\varphi$.

1. Montrer que si $\lambda \in Sp(\varphi)$ alors $\lambda = 0$. Montrer que $(\mathrm{Ker}(\varphi))^\perp$ est stable par φ.
2. (a) Montrer que φ^2 est symétrique.
   (b) Montrer que si x est un vecteur propre associé à une valeur propre μ de φ^2 alors $E_x = \mathrm{vect}\{x, \varphi(x)\}$ et $E_x^\perp$ sont laissés stables par φ.
   (c) Montrer que $\mu > 0$. Déterminer une base $\{e_1, e_2\}$ de E_x telle que la matrice de la restriction de φ E_x dans $\{e_1, e_2\}$ soit $\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\mu} \\ \sqrt{\mu} & 0 \end{pmatrix}$.
3. Montrer que E est somme directe orthogonale de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et de plans stables.

32.3 Endomorphismes orthogonaux

Exercice 1076
1. Soient E un espace vectoriel euclidien, f un endomorphisme de E et $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de f dans une base orthonormale donnée $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ de E. Pour $i, j \in \{1, ..., n\}$, exprimer a_{ij} en fonction de f et des vecteurs e_i et e_j.
2. Soient $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}$.
   (a) Montrer qu'il existe $u \in E$ tel que $S = (u|f(u))$.
   (b) En déduire que $|S| \leqslant n$.

Exercice 1077 Soient $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et A_{ij} le cofacteur (i, j) de A. Montrer que $\det A > 0$ si et seulement si a_{ij} et A_{ij} sont de même signe.

Exercice 1078 Que peut-on dire d'une matrice carrée réelle à la fois symétrique et orthogonale ? Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme de l'espace vectoriel euclidien canonique $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1079 Quelles sont les isométries vectorielles d'un espace vectoriel euclidien qui sont diagonalisables.

Exercice 1080 Soient E un espace vectoriel euclidien et f un endomorphisme de E tel que

$$\forall x \in E, \|f(x)\| \leqslant \|x\|.$$

1. (a) Soit $x \in E$ tel que $f^*(x) = x$. Montrer que $\|f(x) - x\|^2 = \|f(x)\|^2 - \|x\|^2$.
   (b) En déduire que $\ker(f^* - \mathrm{Id}) \subseteq \ker(f - \mathrm{Id})$.
2. Soit h un endomorphisme de E. Montrer que $(\mathrm{Im}\, h)^\perp \subseteq \ker h^*$.
3. En déduire que les sous-espace vectoriels $\ker(f - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$ sont supplémentaires et orthogonaux.

Exercice 1081 Déterminer une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale $U \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ telles que $UDU^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 1082 Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
i) $u^* = u^{-1}$.
ii) $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.
iii) $\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
iv) L'image par u d'une base orthonormée de E est une base orthonormée de E.
v) L'image par u de toute base orthonormée de E est une base orthonormée de E.

Exercice 1083 Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et $\varphi \in \mathcal{O}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que si $\varphi(F) \subset F$ alors $\varphi(F^\perp) \subset F^\perp$. A-t-on égalité ?

Exercice 1084 Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension 3 et $u \in \mathcal{O}^-(E)$. On pose $F = \mathrm{Ker}(u + id)$.

1. Montrer que $F \neq \{0\}$. Montrer que F et $f^\perp$ sont stables par u. Pour quelle raison $\dim(F) \neq 2$?
2. On suppose $E \neq F$. Montrer que la restriction de u à $F^\perp$ est une rotation.
3. En déduire qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et une base ε de E tels que :
$$\mathrm{Mat}(u, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1085 Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension 4 et $\varepsilon = \{e_1, \cdots, e_4\}$ une base orthonormée de E. Soit A la matrice $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{2} & 1 & 1 & -\sqrt{6} \\ -2\sqrt{2} & 1 & 1 & \sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme déterminé par $\mathrm{Mat}(u, \varepsilon) = A$.

1. Montrer que $u \in \mathcal{O}^+(E)$.
2. Montrer que l'espace vectoriel F engendré par e_1 et $u(e_1)$ est stable par u. Montrer que la restriction de u à F est une rotation.
3. Montrer que $F^\perp$ est stable par u et est engendré par e_4 et $u(e_4)$. La restriction de u à $F^\perp$ est-elle une rotation ?

Exercice 1086 Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$. Montrer pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$ l'égalité : $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$. En déduire que si A est triangulaire supérieure elle est diagonale.

Exercice 1087 Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{O}(E)$. On pose $v = id - u$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(v)^\perp$.
2. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} u^p(x)$ est la projeté orthogonal de x sur $\mathrm{Ker}(v)$.

Exercice 1088 Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et $s \in \mathcal{L}(E)$ telle que $s^2 = id$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(s - Id) \oplus \mathrm{Ker}(s + Id)$.
2. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

   i) $s \in \mathcal{O}(E)$.

   ii) $\mathrm{Ker}(s - Id) \perp \mathrm{Ker}(s + Id)$.

   iii) $s = s^*$.
3. On note désormais s_F l'unique symétrie $s \in \mathcal{O}(E)$ telle que $F = \mathrm{Ker}(s + Id)$. Montrer que pour tout $u \in \mathcal{O}(E)$ on a : $us_Fu^{-1} = s_{u(F)}$.
4. Montrer que si f est une application de E dans lui-même laissant stables toutes les droites vectorielles (c'est à dire que pour tout $x \in E$ il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$) alors f est linéaire.
5. En déduire que $Z(\mathcal{O}(E)) = \{id, -id\}$ et que si $n \geqslant 3$ alors $Z(\mathcal{O}^+(E)) = \{id, -id\} \cap \mathcal{O}^+(E)$. (on pourra appliquer 3.) dans le cas où F est une droite ou un plan.)
6. Que se passe-t-il lorsque $n = 1$ et $n = 2$?

Exercice 1089 Soit E un espace euclidien et $u \in O(E)$ telle que $\ker(u - id) \neq E$. Soit $x \in E$ tel que $u(x) \neq x$. On pose $y = u(x)$. Alors on sait qu'il existe une unique réflexion r telle que $r(y) = x$.

1. Montrer que $\ker(u - id) \subset \ker(r - id)$.
2. Montrer que $\dim\ker(r \circ u - id) > \dim\ker(u - id)$.
3. Montrer par récurrence que toute isométrie vectorielle est la composée de réflexions.

Exercice 1090 Soit $A = (a_{i,j}) \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\forall (i,j)\ |a_{i,j}| \leqslant 1$ et que $\left|\sum_{i,j} a_{i,j}\right| \leqslant n$.

Exercice 1091 Soit E euclidien, $n \in \mathbb{N}^*, (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) \in E^{2n}$ tels que :

$$\forall (i,j) \in \{1, ..., n\}^2, (x_i|x_j) = (y_i|y_j)\,.$$

Montrer qu'il existe un endomorphisme orthogonal f de E tel que :

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, f(x_i) = y_{i.}$$

33 Polynômes d'endomorphismes

33.1 Compléments

Exercice 1092 Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ un corps pour les lois usuelles sur $\mathbb{C}$ et $P \in K[X]$ non constant.

1. Montrer que si α est racine de P de multiplicité $m \in [1, +\infty[$ alors α est racine du polynôme P' avec la multiplicité $m - 1$.
2. On suppose $K = \mathbb{R}$ et P scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que P' est scindé sur $\mathbb{R}$ (on utilisera le théorème de Rolle).

Exercice 1093 Soient $m, n \in [1, +\infty[$, $d = \mathrm{pgcd}(m, n)$ et $P = X^m - 1, Q = X^n - 1, D = X^d - 1 \in \mathbb{C}[X]$.

1. (a) Montrer que si $x \in \mathbb{C}$ est racine commune de P et Q alors x est racine de D (on pourra utiliser l'égalité de Bézout dans $\mathbb{Z}$).

   (b) Montrer que si $y \in \mathbb{C}$ est racine de D alors y est racine commune de P et Q (utiliser la définition de d).

2. (a) Soients $A, B \in \mathbb{C}[X]$ tels que toute racine de A est racine de B. Peut-on en déduire que A divise B ? Même question si les racines de A sont simples.

   (b) Montrer que les racines de D et P sont simples et en déduire que $\mathrm{pgcd}(P, Q) = D$.

Exercice 1094 Montrer que les polynômes complexes $P = X^{1998} + X + 1$ et $Q = X^5 + X + 1$ sont premiers entre eux.

Exercice 1095 Soient les polynômes complexes $P_1 = X^3 - 2$, $P_2 = X^4 + 4$ et $P_3 = X^4 + 4X^3 + 8$.

1. Étudier leur irréductibilité sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que P_1 est irréductible sur $\mathbb{Q}$ (on utilisera que $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$).
3. Montrer que P_2 est réductible sur $\mathbb{Z}$.
4. Montrer que P_3 est irréductible sur $\mathbb{Z}$.

Exercice 1096 Soit $P = X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 15X + 18 \in \mathbb{C}[X]$. Déterminer toutes les racines complexes de P sachant que deux d'entre elles ont 6 pour produit.

33.2 Idéaux

Exercice 1097 Montrer qu'un idéal de $K[X]$ est distinct de $K[X]$ si et seulement s'il ne contient aucun polynôme constant non nul.

Exercice 1098 Soient les polynômes $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $Q = X^2 + X + 1$ de $\mathbb{R}[X]$. Déterminer $\mathrm{pgcd}(P, Q)$ puis la somme et l'intersection des idéaux principaux (P) et (Q) de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 1099 Les parties $\mathcal{I} = \{P \in \mathbb{R}[X] : P'(0) = 0\}$ et $\mathcal{J} = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(0) = P'(0) = 0\}$ sont-elles des idéaux de $\mathbb{R}[X]$? Dans l'affirmative, en donner un générateur.

33.3 Polynômes annulateurs

Exercice 1100 Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer le polynôme minimal de A. En déduire A^{-1}, A^3 et A^5.

Exercice 1101 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $P(f) = 0$.
Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$; en déduire $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 1102 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f - id) = 1$. On note $H = \mathrm{Ker}(f - id)$.

1. Soit $\{e_1, \cdots, e_{n-1}\}$ une base de H et $e_n \notin H$. Montrer que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de E et donner l'allure de la matrice de f dans cette base.
2. Montrer que le polynôme $(X - 1)(X - \det(f))$ annule f. Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

Exercice 1103 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de trace non nulle. Montrer que toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ qui commute avec A^2 commute aussi avec A. (*Indication :* utiliser Cayley-Hamilton.)

Exercice 1104 Que peut-on dire d'un endomorphisme d'un K-espace vectoriel de dimension finie annulé par les polynômes $P = 1 - X^3$ et $Q = X^2 - 2X + 1$?

Exercice 1105 Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que le polynôme minimal de f est $P = (X-2)(X-1)^2$. Quel est le polynôme minimal de $f + \mathrm{Id}_E$?

Exercice 1106 Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice diagonale. Si $P \in K[X]$, calculer $P(M)$ et en déduire le polynôme minimal de M.

Exercice 1107 En appliquant la méthode utilisée en cours pour démontrer l'existence d'un polynôme annulateur d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, déterminer le polynôme minimal de la matrice $B = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Exercice 1108 Quel est le polynôme minimal d'un endomorphisme d'une droite vectorielle ?

Exercice 1109 Soient E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et f un endomorphisme de E de rang 1. Montrer que le polynôme minimal de f est de la forme $X(X-\lambda)$.

Exercice 1110 Déterminer les endomorphismes d'un K-espace vectoriel E de dimension finie n dont le polynôme minimal est de degré 1.

Exercice 1111

1. Montrer que $P = (X-1)^2(X-2)$ est un polynôme annulateur de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et en déduire le polynôme minimal de la matrice A.
2. Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Calculer explicitement $B^2 - \mathrm{tr}(B)\,B + \det(B) I_2$. En déduire le polynôme minimal de la matrice $B = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Exercice 1112 Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ et P son polynôme minimal. Montrer que f est bijective si et seulement si $P(0) \neq 0$.

Exercice 1113 Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 3. Montrer que f admet un plan stable (on discutera en fonction du caractère trigonalisable de f).

Exercice 1114 Soit f un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E de dimension finie tel que

$$f^4 = f^2 + f.$$

1. Montrer que $\ker(f^3 - f - \mathrm{Id}) \oplus \ker f = E$.
2. (a) Montrer que $\mathrm{Im}\, f \subseteq \ker(f^3 - f - \mathrm{Id})$.
   (b) En déduire que $\mathrm{Im}\, f = \ker(f^3 - f - \mathrm{Id})$.

Exercice 1115 Déterminer le polynôme minimal de la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 1116 Soient $J = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et la matrice par blocs à coefficients réels suivante

$$M = \begin{pmatrix} O & \frac{1}{2}J \\ \frac{1}{2}J & O \end{pmatrix}.$$

1. Calculer M^2 et M^3 et en déduire que M est diagonalisable.
2. Déterminer le polynôme caract eristique et le polynôme minimal de M.

Exercice 1117 On considére la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Calculer son polynôme caractéristique, calculer A^2 et déduire de ces calculs et du théorème de Cayley-Hamilton l'inverse de A.

Exercice 1118 On se place dans $E = \mathbb{C}^{\,4}$ muni de sa base canonique $b = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On désigne par j l'endomorphisme de E dont la matrice dans b est la matrice suivante

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C}).$$

1. Déterminer l'image de b par j, j^2, j^3, et j^4.
2. En déduire J^2, J^3 et J^4.
3. Déterminer un polynôme annulateur non nul de J.
4. Montrer que si $P \in \mathbb{C}[X]$ avec $\deg(P) \leqslant 3$ vérifie $P(J) = 0$ alors $P = 0$.
5. En déduire le polynôme minimal de J.
6. Montrer que J est diagonalisable.
7. Déterminer les valeurs propres de J.

34 Réduction d'endomorphismes : diagonalisation

34.1 Valeurs propres, vecteurs propres

Exercice 1119 Soit $m \in \mathbb{R}$ et $A_m \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de A_m et une base de vecteurs propres.
2. Déterminer suivant les valeurs de m le rang de A_m. Déterminer lorsque cela est possible A_m^{-1}.
3. Lorsque A_m n'est pas inversible déterminer le noyau et l'image de A_m.

Exercice 1120 Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si -1 n'est pas valeur propre de A, alors il existe une matrice Q antisymétrique (i.e. ${}^tQ = -Q$) telle que $A = (I+Q)^{-1}(I-Q) = (I-Q)(I+Q)^{-1}$ et qu'on a $A \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$. Réciproque ?

Exercice 1121 Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si λ est valeur propre de $g \circ f$ alors λ est valeur propre de $f \circ g$ (on distinguera les cas $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$).

Exercice 1122 1. Soient f et g deux endomorphisme s d'un espace vectoriel E de dimension n sur
$K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ayant chacun n valeurs propres distinctes dans K. Montrer que

$$f \circ g = g \circ f \Longleftrightarrow f \text{ et } g \text{ ont les mêmes valeurs propres.}$$

2. Supposons maintenant que $K = \mathbb{C}$ et que $f \circ g = g \circ f$. Si u est un endomorphisme on dit qu'un espace vectoriel F est $u-$stable si $u(F) \subset F$. Montrer que tout sous-espace propre de f est $g-$stable.
   Remarque : On peut montrer par récurrence sur n qu'il existe un vecteur propre commun à $f$et g. On admettra ce résultat.
3. Considérons f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   – Vérifier que $f \circ g = g \circ f$ et déterminer les sous-espaces propres de M et N.
   – Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle les matrices de f et g sont diagonales.

Exercice 1123 Soient $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Soit f l'endomorphisme associé à la matrice A.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Uniquement* en examinant la matrice A, trouver deux valeurs propres et un vecteur propre de A, puis deux sous-espaces $f-$stables.
2. Que représente la matrice B ?

34.2 Diagonalisation

Exercice 1124 Soient $\mathbb{R}^n$ euclidien, $f \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si f est une symétrie orthogonale.

Exercice 1125 Diagonaliser en base orthonormale les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}, a_i \in \mathbb{R}; B = \begin{pmatrix} a & b & & \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ & & b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}.$$

Peut-on déterminer a, b tels que B soit la matrice d'un produit scalaire ?

Exercice 1126 Montrer que si A est une matrice symétrique réelle, alors $A + iI$ est inversible.

Exercice 1127 Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ où } k \in \mathbb{C}.$$

(a) Déterminer, suivant les valeurs de k, la dimension du noyau de f.
(b) Montrer que M admet une valeur propre réelle entière indépendante de k, et calculer toutes les valeurs propres de M.
(c) Indiquer toutes les valeurs de k pour lesquelles on obtient des valeurs propres multiples. Pour quelles valeurs de ces k la matrice M est-elle semblable à une matrice diagonale ?

Exercice 1128 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I$.

1. Montrer que n est pair, $n = 2p$.
2. Calculer $Sp_{\mathbb{R}}(A)$ et montrer $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{i, -i\}$. Pour quelle raison A est elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?
3. Montrer que si $\{y_1, \dots y_k\}$ est une base de E_i, alors $\{\overline{y_1}, \dots \overline{y_k}\}$ est une base de E_{-i}. Quelle est donc la valeur de k ?
4. Démontrer que A est semblable (dans $M_n(\mathbb{R})$) à une matrice diagonale par blocs dont chacun des blocs diagonaux est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. (on pourra utiliser la question 3.)

Exercice 1129 Soient M et $N \in M_n(\mathbb{K})$. On note $\varphi_M \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}))$ l'application $N \mapsto MN - NM$.

1. Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A et montrer que B n'est pas diagonalisable.
2. Montrer que si N est un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle λ de φ_M alors N est nilpotente. (on pourra établir que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $MN^k - N^kM = k\lambda N^k$.)
3. Montrer que l'identité n'appartient pas à l'image de φ_M. (utiliser la trace.)
4. Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Diagonaliser φ_D puis φ_A. Montrer que φ_B n'est pas diagonalisable.
5. Montrer que si M est diagonalisable, φ_M est diagonalisable.
6. Etablir la réciproque lorsque M a au moins une valeur propre.

Exercice 1130 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une application $p \in \mathcal{L}(E)$ est nommée projecteur lorsque $p^2 = p$.

1. Montrer que si p est un projecteur $1-p$ est un projecteur. Montrer que $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p) = E$.
2. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soient p et q deux projecteurs tels que $p + q$ soit aussi un projecteur. Montrer que :
   (a) $pq = qp = 0$.
   (b) $\mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.
   (c) $\mathrm{Ker}(p + q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

   On suppose désormais E de dimension finie et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
3. Montrer que tout projecteur est diagonalisable et que deux projecteurs sont semblables si et seulement si ils ont même trace.

4. Montrer que toute matrice diagonalisable est combinaison linéaire de projecteurs.

Exercice 1131 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $P(Sp(u)) = \{P(\lambda); \lambda \in Sp(u)\}$.

1. On suppose que u est diagonalisable. Montrer que $P(Sp(u)) = Sp(P(u))$.
2. Montrer, dans le cas général, $P(Sp(u)) \subset Sp(P(u))$.
3. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ montrer que $Sp(P(u)) \subset P(Sp(u))$. Ce résultat est-il vrai lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

Exercice 1132 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que f^2 soit diagonalisable. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

Exercice 1133 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ déterminée par sa matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans une base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que M est diagonalisable.
2. Montrer que la restriction de f a tout sous-espace stable est diagonalisable.
3. En déduire tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

Exercice 1134 Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ et $\varphi_M \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}))$ l'application $N \mapsto MN$. Montrer que φ_M est diagonalisable si et seulement si M est diagonalisable. (utiliser le polynôme minimal.)

Exercice 1135 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) La famille $\{id, f, f^2, \dots, f^{n-1}\}$ est libre.

(ii) Il existe $x \in E$: $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ engendre E.

(iii) Les valeurs propres de f sont simples.

Exercice 1136 Soit ρ l'application de $\mathbb{R}_4[X]$ dans lui-même qui à un polynôme P associe le reste de la division euclidienne de P par $(X^2 - 1)$.

1. Montrer que ρ est linéaire.
2. Montrer que $\rho^2 = \rho$. En déduire que ρ est diagonalisable.
3. Déterminer (de préférence sans calcul) une base de vecteurs propres pour ρ.

Exercice 1137 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propores de A. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
2. Calculer $(A - I)^2$. En déduire A^n, en utilisant la formule du binôme de Newton.
3. Soient $P(X) = (X - 1)^2$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de Q par P en fonction de $Q(1)$ et $Q'(1)$, où Q' est le polynôme dérivé de Q.
   En remarquant que $P(A) = 0$ (on dit alors que P est un polynôme annulateur de A) et en utilisant le résultat précédent avec un choix judicieux du polynôme Q, retrouver A^n.

4. Montrer que l'image de $\mathbb{R}^3$ par l'endomorphisme $(A-I)$ est un sous-espace de dimension 1, dont on désignera une base par ε_2. Déterminer ensuite un vecteur ε_3 tel que $f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2+\varepsilon_3$. Soit enfin ε_1, un vecteur propre de f, non colinéaire à ε_2. Ecrire $\tilde{A}$, la matrice de f dans la base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$, ainsi que la matrice de passage P et son inverse P^{-1}. Retrouver A^n.

Exercice 1138 Soit f un automorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si f^2 est diagonalisable.

Exercice 1139 Les questions sont indépendantes. K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un K-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ est une base fixée de E et f un endomorphisme de E.

1. Quels sont les valeurs propres de l'endomorphisme nul de E ?
2. On suppose que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.
   (a) 2 est-il valeur propre de f ?
   (b) Le vecteur $2e_1 + e_2 + e_3$ est-il un vecteur propre de f ?
3. Pourquoi un vecteur de E ne peut-il être vecteur propre relativement à deux valeurs propres distinctes ?
4. (a) Est-il vrai que si λ est une valeur propre de f et si P est un polynôme annulateur de f alors λ est racine de P ?
   (b) Est-il vrai que si λ est une racine d'un polynôme annulateur de f alors λ est une valeur propre de f ?
5. Montrer que si $f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E = 0$ alors 1 est valeur propre de f.
6. Montrer qu'il existe toujours au moins un scalaire α tel que $f - \alpha\mathrm{Id}_E$ est bijectif.
7. Donner un exemple d'endomorphisme f de E avec $n = 2$ tel que la somme de deux vecteurs propres de f n'est pas un vecteur propre de f.
8. On suppose que $E = E_1 \oplus E_2$ et que si $x \in E$ s'écrit $x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ alors $f(x) = 2x_1 - 3x_2$.
   (a) Quel résultat assure l'existence d'un tel endomorphisme ?
   (b) Montrer que f est diagonalisable.
9. La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?
10. Si l' endomorphisme f admet 0 pour valeur propre et est diagonalisable, que peut-on dire de la dimension du noyau de f ?

Exercice 1140 Étudier le caractère diagonalisable des matrices suivantes et le cas échéant, les diagonaliser :

1. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$,
3. $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C}), k \in \mathbb{C}$.

Exercice 1141 Soient $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $\mathrm{tr}(A) \neq 0$ et

$$f : \mathcal{M}_n(K) \to \mathcal{M}_n(K), M \mapsto \mathrm{tr}(A)M - \mathrm{tr}(M)A.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(K)$.
2. Montrer que $\mathcal{T} = \{M \in \mathcal{M}_n(K) : \mathrm{tr}(M) = 0\}$ et $\mathrm{vect}(A)$ sont des sous-espaces propres de f.
3. En déduire que f est diagonalisable et écrire la matrice réduite de f.

Exercice 1142 Montrer que si le polynôme minimal d'un endomorphisme f d'un K-espace vectoriel de dimension finie admet une racine $\lambda \in K$ alors λ est valeur propre de f.

Exercice 1143 Étudier le caractère diagonalisable des matrices suivantes

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,
2. $B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), n \geqslant 2$,

Exercice 1144 Soient E un K-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E de rang 1.

1. Montrer que si f est diagonalisable alors $\mathrm{tr}(f) \neq 0$.
2. Montrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que le polynôme cararactéristique de f s'écrive
$$\chi_f = (-1)^n X^{n-1}(X - \lambda).$$
3. (a) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(f) \neq 0$.
   (b) Réduire sans calcul la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et donner sans calcul les sous-espaces vectoriels propres.

Exercice 1145 Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Soit $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $Y^2 = D$.
   (a) Montrer que Y et D commutent.
   (b) En déduire que Y est diagonale puis déterminer Y.
2. (a) Montrer que A est diagonalisable.
   (b) En déduire les solutions $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de l'équation $X^2 = A$.

Exercice 1146 Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que si f est diagonalisable alors f^2 est diagonalisable et $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$.
2. Soit $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Montrer que $\ker(f^2 - \mu^2 \mathrm{Id}_E) = \ker(f - \mu \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mu \mathrm{Id}_E)$.
3. On suppose $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$.
   (a) Montrer que $\ker(f) = \ker(f^2)$.
   (b) On suppose en outre que f^2 est diagonalisable. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 1147 On considère la matrice par blocs $A = \begin{pmatrix} O & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Calculer A^2.
2. Rechercher les éléments propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 1148 On désigne par E l'espace vectoriel des polynôme s à coefficients réels, et par E_n, le sous-espace des polynôme s de degré au plus n.

1. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\Delta P(x) = (x+1)P'(x) + 2P(x)$ définit une application linéaire de E dans E. Quel est le degré de ΔP lorsque P appartient à E_n ?
2. On considère Δ_2, la restriction de Δ au sous-espace E_2. Déterminer les valeurs propres de Δ_2. L'endomorphisme Δ_2 est-il diagonalisable ? Est-ce que Δ_2 est un isomorphisme ?
3. En utilisant la définition des valeurs propres, calculer les valeurs propres et les polynôme s propres de Δ.

Exercice 1149 Pour tout élément non nul $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique $\{e_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n\}$ est la matrice $A = (\alpha_{i,j})$ où $\alpha_{i,j} = a_i a_j$.

1. Déterminer le noyau et l'image de u.
2. En déduire les sous-espaces propres de u. Déterminer les valeurs propres de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
3. Quel est le polynôme caractéristique de u ?

Exercice 1150 Soit B une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit son rayon spectral par

$$\rho(B) = \max\{|\lambda| \text{ avec } \lambda \text{ est une valeur propre de } B\}.$$

1. Montrer que $\lim_{k\longrightarrow+\infty} B^k = 0$.
2. En déduire que $I - B$ est inversible et que $(I-B)^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} B^k$.

Exercice 1151 (Endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}^2$) ©

On considère l'endomorphisme a de $E = \mathbb{R}^2$ dont la matrice représentative $A = [a]_e^e$ dans la base canonique e est $\begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$. Calculer la trace, le déterminant, le polynôme caractéristique et le spectre de a. Quel théorème du cours garantit l'existence d'une base $f = (\vec{f_1}, \vec{f_2})$ de vecteurs propres ? Choisir ensuite f telle que $[\mathrm{id}_E]_f^e$ et $[\mathrm{id}_E]_e^f$ soient à coefficients entiers. Dessiner $\vec{f_1}$ et $\vec{f_2}$, en prenant des unités d'axes assez petites. Dessiner quelques vecteurs $\vec{x}$ et leurs images $a(\vec{x})$ à l'aide de f.

Trouver deux matrices P et D carrées d'ordre 2 telles que D soit diagonale, P inversible et $A = PDP^{-1}$. Calculer $[a^{50}]_f^f$, $[a^{50}]_e^e$ et A^{50}. Calculer $\lim_{n\infty} \frac{1}{3^{2n}} a^{2n}$.

Exercice 1152 (Endomorphisme d'un espace de matrices) ©

Soit K un corps commutatif quelconque, et soit $F = \mathcal{M}_n(K)$ l'espace vectoriel sur K des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K. Si i et j sont des entiers compris entre 1 et n, on note par F_{ij} l'élément de F dont le coefficient (i, j) est 1 et dont les autres coefficients sont nuls. Montrer que les F_{ij} forment une base de F. Dimension de F ? Soit D dans F et diagonale. Soient α et β dans K et soit l'endomorphisme Φ de F qui à la matrice X fait correspondre la matrice $\Phi(X) = \alpha XD + \beta DX$. Calculer $\Phi(F_{ij})$. Φ est il un endomorphisme diagonalisable ? Donner son polynôme caractéristique en fonction des coefficients de D et de α et β.

Exercice 1153© Soit $\theta \in]0,\pi[$. On considère les deux matrices d'ordre n :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\theta \end{bmatrix}$$

Montrer par récurrence que $\det B = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ (Méthode : développer par rapport à la dernière ligne). Montrer que $\det B$ s'annule pour n valeurs distinctes de θ de $]0,\pi[$, et les déterminer. Si P_A est le polynôme caractéristique de A, calculer $P_A(-2\cos\theta)$ et déduire de ce qui précède les valeurs propres de A. Montrer que les valeurs propres des matrices $2I_n + A$ et $2I_n - A$ sont strictement positives.

35 Réduction d'endomorphismes : autres réductions

35.1 Sous-espaces stables

Exercice 1154 Soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le plan P d'équation $y + z = 0$ est-il stable par f ? La droite vect $\{(1,1,1)\}$ est-elle stable par f ?

Exercice 1155 Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$ telle que $f^3 + f^2 + f = 0$ où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $F = \operatorname{Im} f$.

1. (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel stable par f.
   (b) Montrer que $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.
   (c) En déduire que la restriction g de f à F est un automorphisme de F.
2. (a) Montrer que si $\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$ alors $\lambda = 0$.
   (b) En déduire que le rang de f est pair (raisonner par l'absurde et étudier les racines réelles du polynôme caractéristique de g).

Exercice 1156 Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $a \in E$.

1. Montrer que le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant a et stable par f est $F_a = \text{vect}\left\{f^k(a) : k \in \mathbb{N}\right\}$.
2. Montrer que si $\dim(E) = n$ alors $F_a = \text{vect}\left\{f^k(a) : k = 0, ..., n-1\right\}$.
3. Soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer qu'il n'existe pas $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $F_a = \mathbb{R}^3$. Généraliser à un endomorphisme diagonalisable.

Exercice 1157 Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, F un sous-espace vectoriel de E stable par f et g l'endomorphisme de G induit par f.

1. Montrer que si $P \in K[X]$ vérifie $P(f) = 0$ alors $P(g) = 0$.
2. En déduire que si f est diagonalisable alors g est diagonalisable.

3. Application : trouver tous les sous-espaces vectoriels stables par l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 1158 1. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est trigonalisable. A est-elle diagonalisable ? Réduire A et déterminer son polynôme minimal.

2. Même question pour $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 1159 Quel est le polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie ?

Exercice 1160 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ses valeurs propres complexes. Exprimer $\operatorname{tr}(A^p)$ où $p \in \mathbb{N}$ en fonction des λ_j, $j = 1, ..., n$.

Exercice 1161 Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $fg = gf$.

1. Soit $x \in E$. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ et $f(x) = g(x)$ alors $f^n(x) = g^n(x)$.

   Dans toute la suite, on suppose g nilpotent.

2. (a) Déduire de 1. que si f est inversible alors $f + g$ est inversible.

   (b) Déduire de (a) que si $f + g$ est inversible alors f est inversible.

3. (a) Soit $h \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Montrer que $\det(h + \mathrm{Id}_E) = 1$.

   (b) Montrer que $\det(f + g) = \det(f)$ (on distinguera selon que f est inversible ou non et on utilisera les questions précédentes.

Exercice 1162 Soient E un K-espace vectoriel, f et g des endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$ et P un polynôme de $K[X]$.

1. Montrer que $P(g)$ et f commutent.
2. Montrer que le noyau et l'image de l'endomorphisme $P(g)$ sont stables par f. Donner des cas particuliers de cette situation.

Exercice 1163 Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E stable par f. On désigne par g l'endomorphisme de F induit par f sur F.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(g) \subseteq \mathrm{Sp}(f)$.
2. Montrer que si $P(f) = 0$ alors $P(g) = 0$. En déduire que le polynôme minimal de g divise celui de f.

Exercice 1164 Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme de E. Montrer que si f admet un sous-espace vectoriel propre de dimension $p \geqslant 2$ alors il admet une infinité de sous-espaces vectoriels stables par f.

35.2 Trigonalisation

Exercice 1165 Trigonaliser les matrices réelles suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$,
2. $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 1166 Mettre sous forme triangulaire les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1167 Soient les matrices à coefficients réels suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Trigonaliser les matrices A, B et C.
2. Déterminer le polynôme minimal de A, B et C.

Exercice 1168 Soit f l'endomorphisme de l'espace vectoriel canonique $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker f^2 \oplus \ker(f - 2\mathrm{Id})$.
2. Trouver une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\mathrm{mat}(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $g^2 = f$. Montrer que $\ker f^2$ est stable par g. En déduire qu'un tel endomorphisme g ne peut exister.

Exercice 1169 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice A dans la base canonique ε de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Trouver une base $\varepsilon' = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}(f, \varepsilon') = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ un endomorphisme tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - 2Id)$ et $\mathrm{Ker}(f - Id)^2$ sont laissés stables par g. En déduire que la matrice de g dans ε' est de la forme $\mathrm{Mat}(g, \varepsilon') = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Préciser les valeurs possibles de a, b, c et d.
4. Soit $F = \{B \in M_3(\mathbb{R}); AB = BA\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$. Calculer sa dimension (on pourra utiliser la question 3.).

Exercice 1170 Les questions sont indépendantes. K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un K-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ est une base fixée de E et f. un endomorphisme de E.

1. Donner un exemple de matrice de $M_2(K)$ non trigonalisable.
2. Donner un exemple de matrice de $M_n(K)$ à la fois non diagonalisable et trigonalisable.

3. Déterminer sans calculs les valeurs propres complexes de f s i sa matrice dans $\mathcal{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. On suppose que $n = 3$ et que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. Montrer que le plan d'équation $x + 2z = 0$ est stable par f.
5. Que peut-on dire d'un vecteur générateur d'une droite stable par f ?
6. Montrer que si l'endomorphisme f est trigonalisable alors il admet au moins un sous-espace vectoriel stable par f et de dimension $k \in [0, n]$ fixée.

35.3 Réduction de Jordan

Exercice 1171 Soit E un espace vectoriel réel de dimension 4. Soit :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice d'un endomorphisme u de E dans la base canonique de E.

1. Calculer le polynôme caractéristique de u. Déterminer les sous-espaces propres E_1 et E_2. Pourquoi u est-il non diagonalisable ? Est-il triangularisable ?
2. Déterminer les sous-espaces caractéristiques F_1 et F_2. Pour $k = 1, 2$, donner l'ordre β_k du nilpotent $(u - \lambda_k.\mathrm{id}_E)|_{F_k}$ $(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2)$.
3. Si $v \in F_2$ et $v \notin \ker(u - 2.\mathrm{id}_E)^{\beta_2 - 1}$, montrer que $f_1 = (u - 2.\mathrm{id}_E)^{\beta_2 - 1}(v)$, $f_1 = (u - 2.\mathrm{id}_E)^{\beta_2 - 2}(v)$, $\ldots$, $f_{\beta_2} = v$ forment une base de F_2.
4. On note $f = \{f_1, \ldots, f_4\}$ la complétée de la base précédente par une base de F_1. Vérifier que $T = [u]_f^f$ est triangulaire. Décomposer T sous la forme $D + N$, où D est diagonale, N est nilpotente, et $DN = ND$. Calculer T^5.

Exercice 1172 Quel est le polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie ?

Exercice 1173 Donner toutes les réduites de Jordan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des endomorphismes nilpotents pour $1 \leqslant n \leqslant 4$.

Exercice 1174 Soit ρ l'application de $\mathbb{R}_4[X]$ dans lui-même qui à un polynôme P associe le reste de la division euclidienne de P par $(X^2 - 1)$.

1. Montrer que ρ est linéaire.
2. Montrer que $\rho^2 = \rho$. En déduire que ρ est diagonalisable.
3. Déterminer (de préférence sans calcul) une base de vecteurs propres pour ρ.

Exercice 1175 Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\in M_4(\mathbb{C})$ ont-elles une racine carrée ?

Exercice 1176 Réduire sous la forme de Jordan les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1177 Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice N (le plus petit entier p tel que $f^p = 0$). Montrer que

$$N = n \Leftrightarrow \operatorname{rang} f = n - 1.$$

35.4 Autres réductions

Exercice 1178 Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ de matrice dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique P_u de u. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces caractéristiques F_i.
2. Donner une base suivant laquelle la matrice de u se décompose en deux blocs diagonaux.
3. Donner les projections p_i de $\mathbb{R}^4$ sur F_i.

Exercice 1179 Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = -A$ et $A \neq 0$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 1180 Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et f l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{2n}$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice par blocs $M = \left(\begin{smallmatrix} I_n & I_n \\ O_n & O_n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de M.
2. (a) Déterminer le noyau de f.
   (b) Montrer que f est diagonalisable.

35.5 Applications

Exercice 1181 Résoudre le système différentiel $X' = AX$ où A est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Exercice 1182 Soit la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Par différentes méthodes, calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la formule obtenue a un sens pour $n \in \mathbb{Z}$ et donner plusieurs méthodes pour établir sa validité dans ce cas.

Exercice 1183 Soit l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer toutes les droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ stables par f.
2. Déterminer toutes les plans vectoriels P de $\mathbb{R}^3$ stables par f (on commencera par étudier le polynôme caractéristique de la restriction de f à P).
3. Donner la liste de tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

Exercice 1184 Calculer les puissances et l'exponentielle ($e^M = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$) des matrices suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1185 Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g^2 = f$. Dans le cas d'existence de g, donner le nombre exact de g tel que $g^2 = f$.

Application Soit :

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il existe $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $N^2 = M$. Déterminer une N.

Exercice 1186 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M et ${}^tM$ sont semblables.
Indication : le montrer d'abord pour des blocs de Jordan n'ayant que des 1 au-dessus de la diagonale.

Exercice 1187 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur M pour que M et $2M$ soient semblables.

Exercice 1188 Soit $a \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un K-espace vectoriel de dimension n ayant n valeurs propres distinctes. On pose

$$\mathcal{C} = \{u \in \mathcal{L}(E) : au = ua\}.$$

1. Soit $u \in \mathcal{C}$.
   (a) Montrer que tout sous-espace vectoriel propre de a est stable par u.
   (b) En déduire que u est diagonalisable.
2. (a) Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et que $\dim \mathcal{C} = n$.
   (b) Montrer que la famille $(\mathrm{Id}_E, a, ..., a^{n-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$ (raisonner par l'absurde et utiliser le polynôme minimal de a.)
   (c) En déduire que $\mathcal{C} = \{P(u) : P \in K[X]\}$.

Exercice 1189 Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme et $a \in E$ tels que la famille $(a, f(a), ..., f^{n-1}(a))$ est une base de E.

1. Soit $P \in K[X] \setminus \{0\}$ un polynôme annulateur de f. Montrer que $\deg(P) \geqslant n$ (raisonner par l'absurde).

2. En déduire que le polynôme minimal de f est (au signe près) le polynôme caractéristique de f.

Exercice 1190 Donner un exemple de deux matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ ayant même polynôme caractéristique et même polynôme minimal et pourtant non semblables. Qu'en est-il pour deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 1191 Soit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel

$$\mathcal{S} = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \geqslant 3, u_n = 3u_{n-1} - 3u_{n-2} + u_{n-3}\right\}.$$

1. Montrer que l'application

$$f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^3, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1, u_2)$$

   est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espace vectoriels.
2. Soient la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\sigma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A et, pour $n \geqslant 2$, $U_n = (u_{n-2}, u_{n-1}, u_n) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que $\sigma(U_{n-1}) = U_n$ et en déduire une base de $\mathcal{S}$.

Exercice 1192 Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites de nombres réels satisfaisant aux relations de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n - x_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n - y_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n - z_n \end{cases}$$

Calculer les valeurs de x_n, y_n et z_n en fonction de x_0, y_0 et z_0.

Exercice 1193 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 = f$. Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ l'endomorphisme $f_t = id + tf$ est inversible ? Calculer f_t^{-1}.

Exercice 1194 Etudier les solutions (suivant A) dans $M_2(\mathbb{C})$ de l'équation $X^2 = A$.

Exercice 1195 Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On note $C(A) = \{B \in M_n(\mathbb{K}); AB = BA\}$.

1. On suppose que A a des valeurs propres simples. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   i) $B \in C(A)$.
   ii) B a une base de vecteurs propres en commun avec A.
   iii) Il existe $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $B = P(A)$.
   iv) Il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = P(A)$.
2. On suppose que $n = 3$ (pour simplifier) et que A est diagonalisable avec une valeur propre double. Déterminer $C(A)$.

Les parties I, II, III et IV peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Exercice 1196 Soient $M_a = \begin{pmatrix} a+1 & 1-a & a-1 \\ -1 & 3 & 2a-3 \\ a-2 & 2-a & 3a-2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ une matrice dépendant d'un paramètre réel a et f_a l'endomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice M_a dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On nomme *racine carrée* d'une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ toute matrice $N \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $N^2 = M$.

On désigne par I la matrice identité et, pour toute base ε de $\mathbb{R}^3$, on note $\mathrm{Mat}(f_a, \varepsilon)$ la matrice représentant l'endomorphisme f_a dans la base ε.

I

1. Calculer les valeurs propres de M_a en fonction de a. Pour quelle raison la matrice M_a est-elle triangularisable ?
2. Pour quelles valeurs du paramètre a la matrice M_a est-elle diagonalisable ?

II

On pose maintenant (questions 3 et 4) $a = 2$.

3. Diagonaliser M_2. Déterminer une racine carrée A de M_2.
4. (a) Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $g^2 = f_2$. Montrer que g est diagonalisable (on pourra déterminer le polynôme minimal de f_2). Montrer que les sous-espaces propres de f_2 sont laissés stables par g.

   (b) Démontrer que la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ a une infinité de racines carrées. En déduire l'existence d'une infinité de racines carrées de M_2.

III

5. On pose $a = 1$. Montrer que $M_1 = 2I + N$ avec N nilpotente (telle que $N^2 = 0$). En déduire la valeur de $(M_1)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer deux réels α et β tels que $\alpha I + \beta N$ soit une racine carrée de M_1.

IV

On pose désormais (questions 6 et 7) $a = 0$.

6. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f_0^2) \oplus \mathrm{Ker}(f_0 - 2I)$. Déterminer une base ε de $\mathbb{R}^3$ telle que l'on ait : $\mathrm{Mat}(f_0, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
7. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ un endomorphisme tel que $g^2 = f_0$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f_0^2)$ est laissé stable par g. En déduire que f_0 n'a pas de racine carrée.

Sixième partie
ANALYSE 3

36 Fonctions convexes

Exercice 1197 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in]0, +\infty[$.

1. En utilisant la concavité du log, montrer que $(x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.
2. Montrer que $(x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \geqslant \frac{1}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}$.
3. En déduire que $n! \leqslant (\frac{n+1}{2})^n$.

Exercice 1198 Soit f une fonction C^2 sur $\mathbb{R}$ convexe croissante et non constante. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f =$ tûûûûûût.

Exercice 1199 Soient p et $q \in]0, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que $\forall x, y > 0 \; xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.
2. Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n > 0$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^q = 1$. Montrer que $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant 1$.
3. Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n > 0$. Montrer l'inégalité de Hölder :
$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant (\sum_{i=1}^{n} x_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} y_i^q)^{\frac{1}{q}}$$
4. Soit $p > 1$. En écrivant $(x_i + y_i)^p = x_i(x_i + y_i)^{p-1} + y_i(x_i + y_i)^{p-1}$, montrer l'inégalité de Minkowski :
$$(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant (\sum_{i=1}^{n} x_i^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n} y_i^p)^{\frac{1}{p}}$$
5. Soit (a_n) une suite strictement positive, $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2$ et $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}$. Montrer que si (u_n) converge alors (v_n) aussi.

Exercice 1200 Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ convexe.

1. Montrer que f' admet une limite dans $\bar{\mathbb{R}}$ en $+\infty$.
2. En déduire que $\frac{f(x)}{x}$ admet une limite en $+\infty$ (on pourra utiliser des ε et une formule de Taylor à l'ordre 1).

Exercice 1201 $I \subset \mathbb{R}^{+*}$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $J = \left\{x; \frac{1}{x} \in I\right\}$.
Montrer que J est un intervalle de $\mathbb{R}^{+*}$, puis que si $(x, y) \in I^2$, alors :
$$\forall \lambda \in [0,1], \exists \mu \in [0,1], \frac{1}{\lambda x + (1-\lambda) y} = \mu \frac{1}{x} + (1-\mu) \frac{1}{y}.$$
Soit f continue sur I, et g définie sur J par $g(x) = f(\frac{1}{x}), h$ définie sur I par $h(x) = x f(x)$. Montrer que g est convexe $\Leftrightarrow$ h est convexe.

Exercice 1202 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe majorée. Que dire de f ? Et si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$?

Exercice 1203 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^{\mathbb{N}}, u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2, v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}$. Montrer que si $(u_n)_n$ converge alors $(v_n)_n$ aussi.

Exercice 1204 Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, ..., x_n) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^n, 1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(1 + \prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 1205 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Montrer que f est convexe.

Exercice 1206 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe ou I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, dérivable en $x_0 \in I$ et telle que $f'(x_0) = 0$. Montrer que x_0 minimise f sur I.

Exercice 1207 Soit $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que g est convexe si et seulement si :

$$\forall h \in CM([0, 1], \mathbb{R}), g\left(\int_0^1 h\right) \leqslant \int_0^1 g(h).$$

37 Notions de topologie

Exercice 1208 (partiel 1999) On définit un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^2$ en posant

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 2\} \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 < 1\}.$$

Déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière de A. L'ensemble A est-il connexe ?

Exercice 1209 (partiel 1999) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :
(1) $\forall M > 0, \exists R > 0$ tel que $\|x\| > R \Rightarrow |f(x)| > M$.
(2) Pour toute partie bornée B de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(B)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$.
(3) Pour toute partie compacte K de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(K)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1210
1. Dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ euclidien muni d'une b.o.n., représenter les ensembles suivants :
   - $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 > 1 \text{ et } x^2 + y^2 < 4\}$
   - $\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 - y^2 > 1 \text{ et } x^2 + \frac{y^2}{4} < 4\}$
   - $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < x + y + z < 3 \text{ et } x > 0 \text{ et } y > 0 \text{ et } z > 0\}$
   - $\mathcal{D} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{ll} & x + y + z < 1 \\ \text{et} & x - y + z < 1 \\ \text{et} & -x - y + z < 1 \end{array} \right\}$
   - $\mathcal{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 < 0 \text{ et } 2 < z < 4\}$
   - $\mathcal{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1 \text{ et } x^2 + y^2 < z^2 \text{ et } z > 0\}$
   - $\mathcal{G} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4 \text{ et } z = x - 1\}$.
2. Déterminer les projections de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{G}$ sur le plan (xOy).

Exercice 1211 (Images directes et réciproques) 1. Soit f l'application affine par morceaux, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant -2 \\ 1+x & \text{si} \quad -2 < x < 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

Soient $A = [-1, 0[$ et $B = [0, 2[$. Déterminer $f(A)$, $f^{-1}(B)$, $f(\mathbb{R}\backslash A)$, $f^{-1}(f(A))$, $f(f^{-1}(B))$, $f(A \cap B)$, et $f(A) \cap f(B)$.

2. Soient deux ensembles E et F, et $f : E \to F$ une application. Comparer les ensembles $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$, $f^{-1}(f(A))$ et A, $f(f^{-1}(B))$ et B, $f(E \setminus A)$ et $F \setminus f(A)$.

Exercice 1212 Soit l'application $\begin{pmatrix} G: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & (\frac{u}{u+v}, \frac{\sqrt{v(v+2u)}}{u+v}) \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition de G. Déterminer $G(\mathcal{D})$.

Exercice 1213 Soient les applications f et g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par :

$$f(x,y) = (\frac{x+y}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}y) \text{ et } g(x,y) = (2x, \frac{y}{\sqrt{2}}).$$

Soient les ensembles

$$\mathcal{D}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{xy}{2} = 1\},$$

$$\text{et } \mathcal{D}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + 2y^2 = 1\}.$$

Déterminer $f(\mathcal{D}_1)$ et $g^{-1}(\mathcal{D}_2)$.

Exercice 1214 Simplifier l'écriture des ensembles suivants :

$$I = \bigcup_{n>1} [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}] \text{ et } J = \bigcap_{i>0, j>0}]-\frac{1}{i}, 1 + \frac{1}{j}[.$$

Exercice 1215 Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Montrer les implications suivants :
- $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in A,\ x < M \Rightarrow \sup A \leqslant M$
- $A \subset B \Rightarrow \sup A \leqslant \sup B$.

Exercice 1216 Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On définit :

$$A + B = \{c \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A, \exists b \in B, c = a + B\}.$$

1. Montrer que $A + B$ admet une borne supérieure, puis que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
2. Montrer l'implication :

$$\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in A, \forall y \in B,\ x + y < M \Rightarrow \sup A + \sup B \leqslant M.$$

Exercice 1217 Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x \geqslant \varepsilon$. Montrer que $\varepsilon = 0$.

Exercice 1218 Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\sup\{|x-y| : (x,y) \in A^2\} = \sup A - \inf A.$$

Exercice 1219 Les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants sont-ils ouverts ? Fermés ? Compacts ?

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - \sin(y) \leqslant 4\}$$
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - 4e^y > 4\}$$
$$C = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] \mid \cos(x) \geqslant 0\}$$

Exercice 1220 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Pour toutes parties A et B de E on note

$$A + B = \{z \in E \mid \exists (x,y) \in A \times B, z = x + y\}.$$

1. Montrer que si A est ouvert et B fermé, alors $A + B$ est ouvert.
2. Montrer que si A est compact et B fermé, alors $A + B$ est fermé.

Exercice 1221 On se propose de montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion d'intervalles ouverts disjoints. On considère donc un ouvert $U \subset \mathbb{R}$ et pour tout $x \in U$ on pose

$$C(x) = \{y \in [x, +\infty[\mid [x,y] \subset U\} \cup \{y \in]-\infty, x[\mid [y,x] \subset U\}.$$

1. Montrer que $C(x)$ est un intervalle ouvert pour tout x. (Considérer $\inf_{y \in C(x)} y$ et $\sup_{y \in C(x)} y$.)
2. Pour tous x, y dans U, montrer qu'on a $C(x) = C(y)$ ou $C(x) \cap C(y) = \emptyset$.
3. Conclure.

Exercice 1222 Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties de E. Montrer :

1. $C_{\overset{\circ}{A}} = \overline{C_A}$, $C_{\bar{A}} = \overset{\circ}{C_A}$
2. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

   En **déduire** $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.
3. $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

   En **déduire** $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$.

   Donner un exemple pour lequel l'inclusion réciproque n'est pas réalisée.

Exercice 1223 Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. On rappelle que la frontière de A est l'ensemble $\mathrm{Fr}(A) = \bar{A} - \overset{\circ}{A}$. Montrer que :

1. $\mathrm{Fr}(A) = \{x \in E \mid \forall \varepsilon > 0, B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ et } B(x,\varepsilon) \cap C_A \neq \emptyset\}$
2. $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(C_A)$
3. A est fermé si et seulement si $\mathrm{Fr}(A)$ est inclus dans A.
4. A est ouvert si et seulement si $\mathrm{Fr}(A) \cap A = \emptyset$.

Exercice 1224 Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E.

1. Montrer que $\bar{A}$ est l'ensemble des limites de suites convergentes d'éléments de A.
2. On suppose maintenant que $E = \mathbb{R}$. Déduire de la question précédente que si A est bornée, alors $\sup A \in \bar{A}$. (Construire une suite de points appropriée.)

Exercice 1225 Montrer que l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même centre et même rayon.

Exercice 1226 Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties de E. On pose $A+B=\{z\in E \mid \exists x\in A, \exists y\in B, z=x+y\}$.
Montrer que si A est ouvert, $A+B$ est ouvert. (Commencer par le cas où B est un singleton.)

Exercice 1227 Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.
Montrer que tout sous-espace vectoriel de E est fermé.

Exercice 1228 Soit E un espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide et bornée de E. On définit $\operatorname{diam}(A)=\sup\{\|y-x\|, x,y\in A\}$.

1. Montrer que si A est bornée, alors $\bar{A}$ et $\operatorname{Fr}(A)$ sont bornés.
2. Comparer $\operatorname{diam}(A)$, $\operatorname{diam}(\overset{\circ}{A})$ et $\operatorname{diam}(\bar{A})$ lorsque $\overset{\circ}{A}$ est non vide.
3. (a) Montrer que $\operatorname{diam}(\operatorname{Fr}(A))\leqslant \operatorname{diam}(A)$.
   (b) Soit x et u des éléments de A avec $u\neq 0$. On considère l'ensemble $X=\{t\geqslant 0 \mid x+tu\in A\}$. Montrer que $\sup X$ existe.
   (c) En déduire que toute demi-droite issue d'un point x de A coupe $\operatorname{Fr}(A)$.
   (d) En déduire que $\operatorname{diam}(\operatorname{Fr}(A))=\operatorname{diam}(A)$.

Exercice 1229 Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien, les ensembles suivants sont-ils compacts ?
- $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2}\leqslant\|(x,y)\|\leqslant 2 \text{ et } xy=1\}$.
- $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2}<\|(x,y)\|\leqslant 2 \text{ et } xy=1\}$.
- $C=\{(x,\cos n)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leqslant x\leqslant 18 \text{ et } n\in\mathbb{N}\}$.

Exercice 1230 Soit $E=\mathbb{R}^d$ muni d'une norme $\|\cdot\|$. On définit la *distance* d'un élément x_0 de E à une partie A de E, notée $d(x_0,A)$, par la formule

$$d(x_0,A)=\inf_{x\in A}\|x-x_0\|.$$

1. Supposons A compact. Montrer que pour tout $x_0\in E$ il existe $y\in A$ tel que $d(x_0,A)=\|y-x_0\|$.
2. Montrer que le résultat est encore vrai si on suppose seulement que A est fermé. (On remarquera que pour toute partie B de A on a $d(x_0,B)\geqslant d(x_0,A)$.)
3. Montrer que l'application qui à x_0 associe $d(x_0,A)$ est continue sur E (sans aucune hypothèse sur A).
4. En déduire que si A est un fermé de E et B un compact de E tels que A et B sont disjoints, alors il existe une constante $\delta>0$ telle que
$$\|a-b\|\geqslant\delta \qquad \forall(a,b)\in A\times B.$$
5. Montrer par un contre-exemple que le résultat est faux si on suppose seulement que A et B sont deux fermés disjoints.

Exercice 1231 Soit $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Montrer que f admet un minimum.

Exercice 1232 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Pour toutes parties A et B de E on note

$$A+B=\{z \in E \mid \exists(x, y) \in A \times B, z=x+y\}.$$

Montrer que si A est compact et B fermé, alors $A+B$ est fermé.

Exercice 1233 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit (x_n) une suite convergente de E et x sa limite. Montrer que l'ensemble $\{x\} \cup \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ est compact.

Exercice 1234 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On suppose que (x_n) est de Cauchy. Montrer qu'elle converge si et seulement si elle admet une sous-suite convergente.

Exercice 1235 Soit X une partie de $\mathbb{R}^2$; montrer qu'elle est fermée si et seulement si pour toute partie fermée bornée $K, K \cap X$ est fermée bornée.

Exercice 1236 Soient $k \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\omega_n=\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \left\lvert\,\left(x-\frac{1}{n}\right)^2+\left(y-\frac{1}{n}\right)^2 \leqslant \frac{k^2}{n^2}\right.\right\},$$

et

$$\Omega=\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \omega_n.$$

Ω est-il ouvert ? fermé ? ...

Exercice 1237 Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'ensembles fermés bornés de $\mathbb{R}^2$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, K_{n+1} \subset K_n$, et $K_n \neq \emptyset$.
Montrer que :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} K_n \neq \emptyset.$$

Exercice 1238 Montrer que l'intersection de deux ensembles ouvert est ouvert, que l'union de deux ensembles fermés est fermée, que cela reste vrai pour un nombre fini d'ensembles, mais que cela peut devenir faux si l'on considère des suites infinies.

Exercice 1239 Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble ; on pose

$$\int(E)={}^c\,\overline{{}^cE}.$$

Montrer que $\int(E)$ est le plus grand ouvert contenu dans E.

Exercice 1240 Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}^2$, montrer que $\overline{A}$ est aussi bornée et que

$$\sup_{x \in A}\|x\|=\sup_{x \in \overline{A}}\|x\|.$$

Exercice 1241 Soit C une partie convexe de $\mathbb{R}^2$, montrer que $\overline{C}$ est aussi convexe.

Exercice 1242 Classer (pour l'inclusion) les parties : $\overline{A \cap B}, \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cup B}, \overline{A} \cup \overline{B}$.

Exercice 1243 Dans l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}$, chacune des parties suivantes est-elle ouverte ? fermée ?
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, [0,1[, [0,+\infty[,]0,1[\cup\{2\}, \{1/n,\ n\in\mathbb{N}^*\}, \bigcap_{n\geqslant 1}]-1/n, 1/n[$.

Exercice 1244 Soit E un evn (espace vectoriel normé). Soit A une partie de E. Montrer l'égalité

$$E\backslash \overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{E\backslash A}} \text{ et } E\backslash \overset{\circ}{A} = \overline{E\backslash A}$$

Exercice 1245 Soit E un evn, V un sev de E.

1. Montrer que $\overline{V}$ est un sev de E.
2. Montrer que si $\overset{\circ}{V} \neq \varnothing$ alors $V = E$.

Exercice 1246 Représenter graphiquement les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ et dire pour chacune d'elle si c'est un ouvert, un fermé, ou ni l'un ni l'autre. Déterminer leurs adhérences et intérieurs.

1. $$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ,\ |x|\neq 1 \text{ et } |y|\neq 1\}$$
2. $$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ,\ |x| = 1 \text{ et } |y|\neq 1\}$$
3. $$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ,\ |x|\neq 1 \text{ ou } |y|\neq 1\}$$
4. $$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ,\ 1-xy>0\}$$
5. $$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ,\ 3x+4y=2\}$$
6. $$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ , x^2+y^2=1\}$$
7. $$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ , xy=1\}$$
8. $$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{1/n\}\times[0,1]$$

Exercice 1247 Déterminer l'adhérence de chacune des parties de $\mathbb{R}$ suivantes :

1. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$
2. $\{1/n,\ n\in\mathbb{N}^*\}$
3. $\{\frac{(-1)^n}{1+1/n},\ n\in\mathbb{N}^*\}$

Exercice 1248 Soient A et B, deux parties d'un evn E.

1. Montrer que si O est un ouvert de E, alors $A+O$ est ouvert. (Indication : Prendre d'abord $A=\{a\}$ puis A quelconque ....)
2. Etablir que $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cup\overline{B}$ et que $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$. (Trouver un exemple où l'inclusion est stricte)

Exercice 1249 Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle. $\forall n \geqslant 1$, on pose $A_n = \{u_p / \ p \geqslant n\}$. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est $V = \bigcap_{n\geqslant 1} \overline{A_n}$, et qu'ainsi V est fermé. En déduire que si la suite est bornée, alors l'ensemble V est un compact non vide.

Exercice 1250 Si A et B sont des parties d'un espace vectoriel normé E, on note $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$. Montrer que :

1. Si A et B sont compacts alors $A + B$ est compact.
2. Si A est compact et B est fermé alors $A+B$ est fermé. Donner un exemple de deux parties fermées A et B telles que $A + B$ ne soit pas fermé.

38 Fonctions de deux variables

Exercice 1251 Étudier la continuité des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\begin{aligned}
&f_1(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} && \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0),\\
&f_1(0,0) = 0.\\
&f_2(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} && \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0),\\
&f_2(0,0) = 0.
\end{aligned}$$

Exercice 1252 (partiel 1999) 1. Étudier la continuité de la fonction $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{(\sin x)\,(\sin y)}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

2. Soit $a > 0$ fixé. Étudier la continuité de la fonction $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^a\,|y|^a}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

3. Étudier la continuité de la fonction $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_3(x,y) = \begin{cases} y - x^2 & \text{si } y > x^2 \\ 0 & \text{si } y \leqslant x^2. \end{cases}$$

4. On définit une fonction continue de l'ouvert $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz \neq 0\}$ dans $\mathbb{R}$ en posant

$$f_4(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)\,\sin\frac{1}{x}\,\sin\frac{1}{y}\,\cos\frac{1}{z}.$$

   Étudier la possibilité de prolonger f_4 en une fonction continue sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1253 Prolonger par continuité la fonction $g : \begin{cases} (\mathbb{R}^2)^* \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto xy\ln(x^2+y^2) \end{cases}$.

Exercice 1254 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x \text{ si } |x| > |y| \\ (x,y) \mapsto y \text{ si } |x| < |y| \\ (x,y) \mapsto 0 \text{ si } |x| = |y| \end{cases}$.
Étudier la continuité de f, l'existence des dérivées partielles et leur continuité.

Exercice 1255 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \frac{\sin(xy)}{|x|+|y|} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) \mapsto 0 \end{cases}$.
Étudier la continuité de f et l'existence des dérivées partielles. f est-elle C^1 ?

Exercice 1256 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) \mapsto 0 \end{cases}$.
Étudier la continuité de f. Montrer que f est C^1. Calculer les dérivées partielles secondes en $(0,0)$. Que remarque-t-on ?

Exercice 1257 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Calculer les dérivées partielles de :

$$g(x,y) = f(x+y) \qquad h(x,y) = f(x^2+y^2) \qquad k(x,y) = f(xy)$$

Exercice 1258 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dérivable. On pose $F(x,y,z) = f(x-y, y-z, z-x)$.
Calculer $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}$.

Exercice 1259 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction C^2. On pose $g(x,y) = f(x^2-y^2, 2xy)$.
Calculer $\triangle(g)$ en fonction de $\triangle(f)$.

Exercice 1260 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^6} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) \mapsto 0 \end{cases}$.
Montrer que f admet une dérivée en $(0,0)$ suivant tout vecteur mais n'admet pas de développement limité à l'ordre 1 en $(0,0)$.

Exercice 1261 Trouver le point du plan $(2x - y + z = 16)$ le plus proche de l'origine.

Exercice 1262 Déterminer les extremums de $f(x,y) = xy(1 - x^2 - y2)$ sur $[0,1]^2$.

Exercice 1263 Soit $f(x,y) = x^2+xy+y^2-3x-6y$. Montrer que f admet au plus un extremum. Ecrire $f(x,y)+9$ comme la somme de deux carrés et en déduire que f admet -9 comme valeur minimale.

Exercice 1264 Déterminer un triangle d'aire maximale inscrit dans un cercle donné.

Exercice 1265 Soit $f(x,y) = (x^2 - y)(3x^2 - y)$.
Montrer que f admet un minimum local en 0 suivant tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ mais n'admet pas de minimum local en $(0,0)$.

Exercice 1266 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto xe^y + ye^x \end{cases}$.
Montrer que $(-1,-1)$ est le seul extremum possible. A l'aide d'un développement limité de $\varphi(h) = f(-1+h,-1+h)$ et de $\psi(h) = f(-1+h,-1-h)$, montrer que f n'a pas d'extremum.

Exercice 1267 Résoudre à l'aide des coordonnées polaires l'équation aux dérivées partielles :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

Exercice 1268 Résoudre l'équation des cordes vibrantes : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ à l'aide du changement de variables $u = \frac{x+y}{2}$ et $v = \frac{x-y}{2}$ (on suppose que f est C^2).

Exercice 1269 Soient $\alpha > 0$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{|x|^\alpha y}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que
$$\forall (x,y) \neq (0,0) \quad |f(x,y)| \leqslant \left(x^2+y^4\right)^{\frac{2\alpha-3}{4}}.$$
   (b) Calculer $\lim\limits_{\substack{y \to 0 \\ y \neq 0}} \left|f(y^2,y)\right|$.
   (c) Étudier la continuité de f en (0,0).
2. (a) Montrer que
$$\forall (x,y) \neq (0,0) \quad \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant |x|^{\alpha-2}.$$
   (b) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \dfrac{|f(x,x)|}{\sqrt{2}|x|}$.
   (c) Étudier la différentiabilité de f en (0,0).

Exercice 1270 Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f\left(e^x \sin x, \ln(1+x^2)\right)$.
Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 1271 Soient $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0\}$ et $V =]0,+\infty[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. On définit la fonction

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & V & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (r,\theta) & \mapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

1. Montrer que U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ et que Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective de V sur U. Déterminer Ψ^{-1}.
2. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. On pose
$$F(r,\theta) = f \circ \Psi(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$
   (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et calculer $\frac{\partial F}{\partial r}$ et $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

(b) Montrer que f vérifie l'équation

$$(E) \qquad a\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + b\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \sqrt{a^2+b^2}\arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad \forall (a,b) \in U$$

si et seulement si F vérifie l'équation

$$(E') \qquad \frac{\partial F}{\partial r}(r_0, \theta_0) = \theta_0 \quad \forall (r_0, \theta_0) \in V.$$

(c) Déterminer toutes les fonctions $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U qui vérifient l'équation (E).

Exercice 1272 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0\}$. On cherche les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ qui vérifient

$$(E) \qquad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \forall (x,y) \in D.$$

1. Vérifier que $\varphi(x,y) = y/x$ est solution de (E).
2. Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que $g \circ \varphi$ est solution de (E).
3. Soit f une solution de (E). Montrer que $f(u, uv)$ ne dépend que de v.
4. Donner l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 1273 Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

On pourra effectuer le changement de variables $u = x+y$, $v = x-y$.

Exercice 1274 Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$.

1. Rappeler une condition nécessaire pour que f présente un extremum local en (x_0, y_0). Dans la suite de l'exercice, $\mathbf{a} = (x_0, y_0)$ vérifie cette condition, c'est-à-dire est un *point critique* de f. On pose

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}), \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{a}),$$

$$Q(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2, \quad \Delta = B^2 - AC,$$
$$R(t) = At^2 + 2Bt + C, \quad S(t) = Ct^2 + 2Bt + A.$$

2. On suppose $\Delta < 0$ et $A(\text{ou } C) > 0$.
   (a) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $R(t) \geqslant \delta$ et $S(t) \geqslant \delta$ pour un certain $\delta > 0$.
   (b) On pose $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$, et on suppose que $\sin\theta.\cos\theta \neq 0$. Montrer successivement :

$$Q(x,y) \geqslant r^2\delta\sin^2\theta,$$
$$Q(x,y) \geqslant r^2\delta\cos^2\theta,$$
$$Q(x,y) \geqslant \tfrac{r^2}{2}\delta.$$

En déduire que

$$\forall (x,y) \quad Q(x,y) \geqslant \frac{r^2}{2}\mathrm{Inf}(\delta, 2A, 2C).$$

(c) Montrer que $\mathbf{a}$ est un point de minimum local strict de f. On écrira pour cela la formule de Taylor-Young pour f en ce point.

3. On suppose $\Delta < 0$ et A(ou C) < 0.
   Montrer que (x_0, y_0) est un point de maximum local strict de f.
4. On suppose maintenant $\Delta > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tels que $S(t_1) > 0$ et $S(t_2) < 0$.
   (b) Soient $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\tan\theta_1 = t_1$ et $\tan\theta_2 = t_2$. En examinant les fonctions
   $$g(t) \ := f(x_0 + t\cos\theta_1, y_0 + t\sin\theta_1), \quad h(t) \ := f(x_0 + t\cos\theta_2, y_0 + t\sin\theta_2)$$
   pour $t \in \mathbb{R}$ assez petit, montrer que $\mathbf{a}$ n'est ni un point de maximum local, ni un point de minimum local de f.
5. Dessiner l'allure du graphe de f au voisinage du point $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$ dans les trois cas étudiés ci-dessus (questions 1, 3 et 4).
6. Que peut-on dire en général quand $\Delta = 0$? Pour répondre à cette question, on pourra s'appuyer sur l'étude des deux cas suivant au voisinage de $(0, 0)$:
   $$f_1(x, y) = x^2 + x^4 + y^4 \quad \text{et} \quad f_2(x, y) = x^2 - y^4.$$

Exercice 1275 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x, y) = ((x-2)^2 + y^2 - 4)((x-1)^2 + \frac{y^2}{4} - 1).$$
- Tracer rapidement la courbe C d'équation $f(x, y) = 0$.
- En quels points de C la relation $f(x, y) = 0$ permet-elle de définir une fonction implicite de la forme $y = \phi(x)$?

Exercice 1276 Montrer que les relations proposées définissent au voisinage du couple (a, b) indiqué une fonction implicite $y = \phi(x)$.
Donner un développement limité à l'ordre 3 de ϕ en a.
- $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1 = 0$ $\qquad (a, b) = (0, 1)$.
- $f(x, y) = 2e^{x+y-1} + \ln(x - y) - 2x + y^3$ $\qquad (a, b) = (1, 0)$.

Exercice 1277 Montrer que la relation
$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 2z(x + y) - 2x + y - 2z - 1 = 0$$
définit au voisinage de $(0, 0, -1)$ une fonction implicite $z = \phi(x, y)$. Donner un développement limité de ϕ à l'ordre 2 en $(0, 0)$.

Exercice 1278 Existe-t-il un triangle d'aire maximale inscrit dans un cercle donné ? Le déterminer par une méthode géométrique.

Exercice 1279 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, .)$ et $f(., y)$ sont continues. Montrer qu'il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications continues sur $\mathbb{R}^2$ telles que :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \lim_{n\to\infty} g_n(x, y) = f(x, y).$$

Exercice 1280 Trouver les fonctions f continues sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = f(x+y, x-y).$$

Exercice 1281 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\lim_{\|x\| \to \infty} |f(x)| = +\infty.$$

Montrer que f est minorée et atteint sa borne inférieure.

Exercice 1282 Étudier la continuité, l'existence de dérivées partielles et le caractère C^1 des applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

$$(x,y) \to \frac{\sin(xy)}{|x|+|y|}, (0,0) \to 0;$$

$$(x,y) \to x \text{ si } |x| > |y|, (x,y) \to y \text{ si } |y| > |x|, (x,y) \to 0 \text{ si } |x| = |y|;$$

$$(x,y) \to (x^2+y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2}, (0,0) \to 0;$$

$$(x,y) \to \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, (0,0) \to 0;$$

$$(x,y) \to \sin |xy|;$$

$$(x,y) \to \frac{y^2}{x} \text{ si } x \neq 0, y \text{ si } x = 0.$$

Exercice 1283 Si f est concave sur un ouvert convexe $U \subset \mathbb{R}^2$ et si :

$$\exists a \in U, \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = 0,$$

alors f admet un maximum local en a.

Exercice 1284 Soit $A \subset \mathbb{R}^2$, on définit $\int(A)$ comme l'ensemble $\{x \in A | \exists \rho > 0, B(x,\rho) \subset A\}$. On supposera A fermée bornée et $\int(A) \neq \emptyset$. On suppose que f est une fonction C^1 sur A telle que f est constante sur $A \setminus \int(A)$. Montrer qu'il existe $z \in \int(A)$ tel que :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(z) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(z) = 0.$$

Exercice 1285 Chercher les extrémums sur $\mathbb{R}^2$ des applications :

$$(x,y) \to x^4 + y^4 - 4xy;$$

$$(x,y) \to (x-y)e^{xy};$$

$$(x,y) \to xe^y + ye^x;$$

$$(x,y) \to e^{x \sin y};$$

$$(x,y) \to x^3 + y^3.$$

Exercice 1286 Montrer qu'une norme N sur $\mathbb{R}^2$ ne peut avoir des dérivées partielles qui existent et qui soient continues en 0.

Exercice 1287 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles continues en 0 et telle que :

$$\forall a \in \mathbb{R}^2 - \{0\}, \forall t > 0, f(ta) = tf(a).$$

Montrer que f est linéaire.

Exercice 1288 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application C^1 homogène de degré $s > 0$, i.e. telle que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in \mathbb{R}^2, f(\lambda x) = \lambda^s f(x).$$

Montrer que les dérivées partielles de f sont homogènes de degré $s - 1$ et :

$$sf(x) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x).$$

Exercice 1289 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application C^1 sur un ouvert convexe O telle que :

$$\forall a \in O, \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = 0.$$

Montrer que f est constante sur O.

Exercice 1290 Résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = f$$

en passant en coordonnées polaires.

Exercice 1291 Résoudre en utilisant le changement de variable $x = u, y = uv$ l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Exercice 1292 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
– si $|x| \leqslant y$, $f(x, y) = x^2$.
– $f(x, y) = y^2$ sinon.
Étudier la continuité de f et l'existence de dérivées partielles.

Exercice 1293 Déterminer $\max\limits_{|z|\leqslant 1} |\sin z|$. On rappelle que : $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$.

Exercice 1294 Déterminer les extrémums de $f : (x, y, z) \to x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$.

Exercice 1295 Soit $a \in \mathbb{R}^2$ fixé ; l'application $x \to \langle x, a\rangle$ de $\mathbb{R}^2$ usuel dans $\mathbb{R}$ est-elle continue, admet-elle des dérivées partielles, celles-ci sont elles continues ?

39 Espaces métriques et espaces vectoriels normés

Exercice 1296 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)©

1. Montrer que : $\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\ \ (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \leqslant n(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$
2. Déterminer : $m = \text{Inf}\{(\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n 1/x_i)$ tels que $x_1, x_2, \cdots, x_n > 0\}$
3. Déterminer : $M = \text{Sup}\,\{|x + 2y + 3z + 4t|$ tels que $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\ , x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leqslant 1\}$

Exercice 1297 (Normes sur $\mathbb{R}^2$)
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N_1(x, y) = \text{Max}(\sqrt{x^2 + y^2}, |x - y|)$ et $N_2(x, y) = \sqrt{x^2/9 + y^2/4}$.

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}^2$ et représenter les boules unités fermées associées à ces normes.
2. Montrer que $N_2 \leqslant \|.\|_\infty \leqslant \|.\|_2 \leqslant N_1 \leqslant \|.\|_1 \leqslant 4N_2$.
3. Déterminer le plus petit réel $k > 0$, tel que $\|.\|_1 \leqslant kN_2$. (utiliser Cauchy-Schwarz)

Exercice 1298 Soient $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ deux familles de n nombres réels. Montrer, en étudiant le signe du trinôme $\lambda \longrightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^n (a_i + \lambda b_i)^2$ que $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Exercice 1299 Soit (E, d) un espace métrique.

1. Montrer que $d'(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$ est une distance sur E. Enoncer des conditions suffisantes sur une fonction f, définie de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ pour que $(x, y) \longrightarrow f(d(x, y))$ soit une distance sur E.
2. Montrer que l'application d'' définie sur $E \times E$ par $d''(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ est une distance sur E. *Indication* : On utilisera la croissance de la fonction $u \longrightarrow \dfrac{u}{1 + u}$.
3. Comparer les distances d et d'' .
4. Dans le cas où E est l'ensemble des nombres réels et où d est la distance valeur absolue, construire $B_{d''}(0, a)$ où a est un réel.

Exercice 1300 Soit (E, d) un espace métrique complet, et f une application de E dans E telle qu'il existe $k \in \mathbb{R},\ 0 < k < 1$ tel que $d(f(x), f(y)) \leqslant k\ d(x, y)\ \ \forall x \in E,\ \forall y \in E$.

1. Montrer que f est continue sur (E, d).
2. Soient $x_0 \in E$ et pour $n \geqslant 0,\ x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy dans (E, d).
3. Montrer que cette suite converge vers un point fixe de f, c'est-à-dire une solution de $f(l) = l$. Montrer que ce point fixe est unique.
4. Application : montrer que le système $\begin{cases} x_1 &= \frac{1}{5}(2\sin x_1 + \cos x_2) \\ x_2 &= \frac{1}{5}(\cos x_1 + 3\sin x_2) \end{cases}$ admet une solution unique $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 1301 On considère les trois normes définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\|X\|_1 = |x_1| + |x_2|\ \ ,\ \ \|X\|_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}\ \ ,\ \ \|X\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}.$$

Représenter graphiquement les boules unités de chacune d'entre elles. Peut-on "comparer" ces trois normes ? Ecrire les définitions des distances d_1,d_2 et d_∞ associées à chacune d'entre elles.

Exercice 1302 Soit E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, définies et
nues sur [-1,1].

1. Montrer que les trois applications suivantes sont des normes sur E :

$$f \longrightarrow \|f\|_1 = \int_{-1}^{+1} |f(x)|dx, \quad f \longrightarrow \|f\|_2 = (\int_{-1}^{+1} f^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}$$

$$f \longrightarrow \|f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,+1]} \{|f(x)|\}$$

2. On considère la suite $(f_n)_{n\in N^*}$ de fonctions définies par $f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-1, -\frac{1}{n}] \\ nx & \text{si } x \in]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 1 & \text{si } x \in]\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$

   La suite f_n est-elle de Cauchy dans $(E, \|.\|_1)$, $(E, \|.\|_2)$ et dans $(E, \|.\|_\infty)$? Conclusions ?

Exercice 1303 Soit E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, définies, continues et dérivables sur [0,1] et vérifiant $f(0) = 0$. On définit sur cet espace les deux normes suivantes :

$$N_1(f) = \|f\|_\infty \text{ et } N_2(f) = \|f'\|_\infty.$$

1. Montrer que $N_1(f) \leqslant N_2(f)$. En déduire que l'application identique de (E, N_2) vers (E, N_1) est continue.
2. A l'aide de la fonction $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$, montrer que l'application identique de (E, N_1) vers (E, N_2) n'est pas continue.

Exercice 1304 Lorsqu'un espace vectoriel E est en outre muni d'une multiplication, l'application $N :\ E \to \mathbb{R}$ est dite norme multiplicative si :
– N est une norme,
– pour tous A et B dans E, $N(A.B) \leqslant N(A).N(B)$.
Soit $E = M_n(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes. $A \in E$ se note $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$

1. Montrer que $N_\infty(A) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \}$ définit une norme multiplicative sur E.
2. Montrer que $N_\infty(A) = \max\limits_{\{X\in\mathbb{R}^n,\ \|X\|_\infty=1\}}\{ \|A.X\|_\infty\}$.
3. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ |a_{i,i}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}|$ et D la matrice diagonale formée avec les éléments diagonaux de A. Soit aussi F un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On considère la suite des $X^{(p)} \in \mathbb{R}^n$ définie pour $p \geqslant 0$ par :

$$\begin{cases} X^{(0)} & = X_0 \in \mathbb{R}^n \\ X^{(p+1)} & = (I - D^{-1}A)X^{(p)} + D^{-1}F \quad \text{pour p} \geqslant 0 \end{cases}$$

   Montrer qu'elle est convergente et calculer sa limite.

Exercice 1305 (partiel 1999) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, x un élément de E et A un compact de E.

1. Montrer que l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui à y associe $\|y\|$ est continue.

2. Montrer que l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui à y associe $\|y-x\|$ est continue.
3. Montrer que la distance de x à A est atteinte, c'est-à-dire qu'il existe $a \in A$ tel que

$$\inf_{y\in A}\|y-x\| = \|a-x\|.$$

Exercice 1306 Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit L une application linéaire de E dans F.

1. Montrer que L est continue en 0 si et seulement si elle est continue en tout point de E.
2. On suppose qu'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\|L(x)\|_F \leqslant K\|x\|_E \qquad \forall x \in E.$$

   Montrer que L est continue.
3. Dans la suite, on suppose que L est continue et on pose

$$K = \sup_{\|x\|_E=1}\|L(x)\|_F.$$

   (a) Supposons que $K = +\infty$. Montrer qu'alors il existe une suite (x_n) dans E telle que $\|x_n\| = 1$ pour tout n et telle que $\|L(x_n)\|_F$ tend vers $+\infty$. En déduire qu'il existe une suite y_n tendant vers 0 et telle que $\|L(y_n)\|_F = 1$.
   (b) En déduire que $K \in \mathbb{R}_+$ et que pour tout $x \in E$ on a

$$\|L(x)\|_F \leqslant K\|x\|_E.$$

Exercice 1307 Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx.$$

On considère l'application $L : E \to \mathbb{R}$ définie par $L(f) = f(1)$.

1. Montrer que L est une application linéaire.
2. En considérant les fonctions $f_n : x \mapsto \sqrt{n}x^n$, montrer que L n'est pas continue.

Exercice 1308 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On suppose que (x_n) est de Cauchy. Montrer qu'elle converge si et seulement si elle admet une sous-suite convergente.

Exercice 1309 Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit une norme sur E en posant

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^1 |f(t)|\,dt.$$

On va montrer que E muni de cette norme n'est pas complet. Pour cela, on définit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$f_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leqslant t \leqslant -\frac{1}{n} \\ nt & \text{si } -\frac{1}{n} \leqslant t \leqslant \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

1. Vérifier que $f_n \in E$ pour tout $n \geqslant 1$.

2. Montrer que
$$\|f_n - f_p\| \leqslant \sup(\frac{2}{n}, \frac{2}{p})$$
et en déduire que (f_n) est de Cauchy.
3. Supposons qu'il existe une fonction $f \in E$ telle que (f_n) converge vers f dans $(E, \|\cdot\|_1)$. Montrer qu'alors on a
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{-\alpha} |f_n(t) - f(t)|\, dt = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_{\alpha}^{1} |f_n(t) - f(t)|\, dt = 0$$
pour tout $0 < \alpha < 1$.
4. Montrer qu'on a
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{-\alpha} |f_n(t) + 1|\, dt = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_{\alpha}^{1} |f_n(t) - 1|\, dt = 0$$
pour tout $0 < \alpha < 1$. En déduire que
$$\begin{aligned} f(t) &= -1 && \forall t \in [-1, 0[\\ f(t) &= 1 && \forall t \in]0, 1]. \end{aligned}$$
Conclure.

Exercice 1310 Soit $E = \mathbb{R}^d$ muni d'une norme $\|\cdot\|$. On rappelle qu'une application continue g de E dans E est dite *contractante* s'il existe $K \in]0, 1[$ tel que
$$\|g(x) - g(y)\| \leqslant K\|x - y\| \qquad \forall x, y \in E.$$
On rappelle aussi que toute application contractante admet un unique point fixe.
Soit f une application continue de E dans E telle qu'il existe un entier n tel que f^n soit contractante. On note x_0 le point fixe de f^n.

1. Montrer que tout point fixe de f est un point fixe de f^n.
2. Montrer que si x est un point fixe de f^n, il en est de même pour $f(x)$.
3. En déduire que x_0 est l'unique point fixe de f.

Exercice 1311 Soit $E = \mathbb{R}^d$ muni d'une norme $\|\cdot\|$. On définit la *distance* d'un élément x_0 de E à une partie A de E, notée $d(x_0, A)$, par la formule
$$d(x_0, A) = \inf_{x\in A} \|x - x_0\|.$$

1. Supposons A compact. Montrer que pour tout $x_0 \in E$ il existe $y \in A$ tel que $d(x_0, A) = \|y - x_0\|$.
2. Montrer que le résultat est encore vrai si on suppose seulement que A est fermé. (On remarquera que pour toute partie B de A on a $d(x_0, B) \geqslant d(x_0, A)$.)
3. Montrer que l'application qui à x_0 associe $d(x_0, A)$ est continue sur E (sans aucune hypothèse sur A).
4. En déduire que si A est un fermé de E et B un compact de E tels que A et B sont disjoints, alors il existe une constante $\delta > 0$ telle que
$$\|a - b\| \geqslant \delta \qquad \forall (a, b) \in A \times B.$$

5. Montrer par un contre-exemple que le résultat est faux si on suppose seulement que A et B sont deux fermés disjoints.

Exercice 1312 $N : (x,y) \longmapsto |5x+3y|$ est-elle une norme de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 1313

1. Montrer que $\forall p \geqslant 1$, l'application $\left(\begin{array}{cccc} N_p : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \left(\sum_{k=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{array}\right)$ est une norme (on utilisera la convexité de x^p).
2. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, montrer que $\lim_{p\to+\infty} N_p(x) = \max(x_i, 1 \leqslant i \leqslant n)$, et que cela définit une norme, appelée **norme infinie**, et notée N_∞.
3. Établir les inégalités suivantes :
$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ N_\infty(x) \leqslant N_1(x) \leqslant \sqrt{n}N_2(x) \leqslant nN_\infty(x).$$
Que peut-on en déduire ?
4. Dessiner les boules unités des normes 1,2, et ∞ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1314 Soit $\left(\begin{array}{cccc} N : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sum_{k=1}^n |\sum_{i=1}^k x_i| \end{array}\right)$. Montrer que N est une norme.

Exercice 1315 A est dit *convexe* s'il contient tout segment reliant deux quelconques de ses points :
$$\forall (x,y) \in A^2,\ [x,y] = \{x + t(y-x),\, t \in [0,1]\} \subset A.$$
Soit E un espace vectoriel muni d'une norme N. Montrer que toute boule fermée (ou ouverte) est convexe et symétrique par rapport à son centre.

Exercice 1316 Soit (E,N) un espace vectoriel normé. Montrer :
$$\forall (x,y) \in (E \setminus \{0\})^2,\ N(x-y) \geqslant \frac{1}{2}\sup(N(x),N(y)) \cdot N\left(\frac{x}{N(x)} - \frac{y}{N(y)}\right).$$

Exercice 1317 Soit E un espace vectoriel normé, et $(a,a') \in E^2$, $(r,r') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer :

1. $B(a,r) = \{a\} + B(0,r)$
2. $B(a,r) = B(a',r') \Leftrightarrow a = a'$ et $r = r'$
3. $B(a+a', r+r') = B(a,r) + B(a',r')$
4. $B(a,r) \cap B(a',r') \neq \emptyset \Leftrightarrow \|a'-a\| < r+r'$.

Exercice 1318 Soit (E,N) une espace vectoriel. Montrer les équivalences :
$$\begin{array}{rcl} A \subset E \text{ est borné} & \Leftrightarrow & \exists (a,r) \in E \times \mathbb{R}^+ \,:\, A \subset B(a,r) \\ & \Leftrightarrow & \exists R \geqslant 0 \,:\, A \subset B(0,R) \\ & \Leftrightarrow & \exists R \geqslant 0 \,:\, A \subset B_f(0,R) \\ & \Leftrightarrow & A \text{ est inclus dans une boule de } E. \end{array}$$

Exercice 1319 (Topologie du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$)

1. Quelles sont toutes les normes sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$?
On se place désormais dans $(\mathbb{R}, |\,.\,|)$.
2. Quelles sont les boules ouvertes ? fermées ?
3. Ouverts et fermés de $\mathbb{R}$:

(a) soit $(I_a)_{a\in A}$ une famille d'intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$, deux à deux disjoints. Montrer que A est au plus dénombrable.

(b) soit O un ouvert de $\mathbb{R}$, et $a \in O$. On pose $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin O \text{ et } x > a\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin O \text{ et } x < a\}$. Etudier l'existence de $\inf A$ et $\sup B$.

(c) en déduire que :
  - tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion d'une famille au plus dénombrable d'intervalles ouverts
  - tout fermé de $\mathbb{R}$ est réunion d'une famille au plus dénombrable d'intervalles fermés.

40 Suites dans $\mathbb{R}^n$

Exercice 1320 Soit x_n une suite de $\mathbb{R}^d$. Montrer que l'ensemble A des valeurs d'adhérence de x_n est fermé. Indication : prouver que le complément de A est ouvert.

Exercice 1321 Soit x_n une suite bornée de $\mathbb{R}^d$. Montrer que x_n converge si et seulement si A est un singleton. Indication : pour prouver la convergence, utiliser qu'une suite bornée de $\mathbb{R}^d$ a au moins une valeur d'adhérence.

Exercice 1322 Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continue. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Soit x_n la suite définie par

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Supposons que $||x_n - x_{n+1}|| \to 0$. Montrer que si $a \in\ A$ alors $f(a) = a$.
Indication : appliquer la définition de la continuité de f en a en termes de limites.

Exercice 1323 Soit x_n une suite bornée de $\mathbb{R}^d$. Supposons que $||x_n - x_{n+1}|| \to 0$. Montrer que l'ensemble A est non-vide, compact, connexe.
Indication : pour la connexité, supposer que $A = A_1 \cup A_2$ avec A_1 et A_2 non-vides, disjoints, fermés.
Si $d = 1$ conclure que $A = [a, b]$ avec $a \leqslant b$.

Exercice 1324 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit x_n la suite définie par

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Supposons que x_n est bornée. Montrer que x_n converge si et seulement si

$$||x_n - x_{n+1}|| \to 0.$$

Indication. Montrer qu'il suffit de prouver que $a = b$ dans $[a, b] = A$. Si $a < b$ montrer que la suite est stationnaire.

Exercice 1325 Soit $s_n = \Sigma_{k=1}^n 1/k$ et $x_n = \cos(s_n)$. Montrer qu'il n'existe pas d'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Indication : montrer que $||x_n - x_{n+1}|| \to 0$ mais que x_n ne converge pas.

41 Intégrales multiples

Exercice 1326 Calculer $I_1 = \iint\limits_D (x+y)e^{-x}e^{-y}dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x, y \geqslant 0, x+y \leqslant 1\}$.
Calculer $I_2 = \iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 < x, x^2+y^2 > y\}$.
Calculer $I_3 = \iint\limits_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy$ où $D = \{(x,y) \in [0,1]^2 / x^2+y^2 \geqslant 1\}$.
Calculer $I_4 = \iint\limits_D \frac{1}{y\cos(x)+1}dxdy$ où $D = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$.
Calculer $I_5 = \iiint\limits_D zdxdydz$ où $D = \{(x,y,z) \in (\mathbb{R}^+)^3 / y^2+z \leqslant 1, x^2+z \leqslant 1\}$.
Calculer $I_5 = \iint\limits_D xydxdy$ où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x, y > 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$ avec $a, b > 0$.

Exercice 1327 Représenter et calculer le volume de $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / -1 \leqslant z \leqslant 1, x^2+y^2 \leqslant z^2+1\}$.

Exercice 1328 Déterminer le centre de gravité du culbuto (homogène), *i.e.* le cône

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z \in [0,1], x^2+y^2 \leqslant z^2\right\}$$

auquel on adjoint sur sa base une demi-boule.

Exercice 1329 Soit $D = [0,1]^2$. Calculer :

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y+1)^2}.$$

Exercice 1330 Soit D le disque de centre $(0,1)$ et de rayon 1 du plan. Calculer :

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy.$$

Exercice 1331 Soit $D = \{x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2+y^2-2y \geqslant 0, x^2+y^2-1 \leqslant 0\}$. Calculer :

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

Exercice 1332 Soit $D = \{(x^2+y^2)^2 \leqslant xy\}$. Calculer :

$$\iint_D \sqrt{xy}\,dx\,dy.$$

Exercice 1333 Soient $a, b > 0$. Calculer l'aire de l'ellipse $E = \{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\}$ par deux méthodes différentes.
(On rappelle que l'aire d'un domaine D vaut $\iint_D dx\,dy$.)

Exercice 1334 Soit $a > 0$ et D le domaine délimité par la courbe d'équation polaire $\rho = a(1+\cos\theta)$. Calculer l'aire de D.

Exercice 1335 Soient $0 < a \leqslant b, 0 < c \leqslant d$, et $D = \{ax^2 \leqslant y \leqslant bx^2, \frac{c}{x} \leqslant y \leqslant \frac{d}{x}\}$. Calculer l'aire de D.
(Indication : poser $u = \frac{y}{x^2}$ et $v = xy$.)

Exercice 1336 Soit $p > 0$ et $D = \{y^2 - 2px \leqslant 0, x^2 - 2py \leqslant 0\}$. Calculer :

$$\iint_D e^{\frac{x^3+y^3}{xy}}\, dx\, dy.$$

(Indication : poser $x = u^2 v$ et $y = uv^2$.)

Exercice 1337 Soit $R > 0$, $D_R = \{x^2 + y^2 \leqslant R^2, x > 0, y > 0\}$ et $K_R = [0, R]^2$. Montrer que :

$$\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \leqslant \iint_{K_R} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \leqslant \iint_{D_{2R}} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy.$$

En déduire l'existence et la valeur de

$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^R e^{-t^2}\, dt.$$

Exercice 1338 Soient $a, R > 0$. Dans le plan (yOz), soit D le disque de centre $(0, a, 0)$ et de rayon R. En tournant autour de l'axe (Oz), le disque D engendre un domaine T (appelé un tore plein). Calculer le volume de T (c'est-à-dire l'intégrale triple $\iiint_T dx\, dy\, dz$).

Exercice 1339 Soit $D = \{x^2 + y^2 \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1 - x^2 + y^2\}$. Calculer le volume de D.

Exercice 1340 Soit $D = \{x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x + y + z \leqslant 1\}$. Calculer :

$$\iiint_D \frac{dx\, dy\, dz}{(1 + x + y + z)^3}.$$

Exercice 1341 Quel est le volume délimité par deux cylindres de révolution d'axes (Ox) et (Oy) et de même rayon $R > 0$?

42 Séries numériques

Exercice 1342 Soient, pour $n > 0$, $u_n = \dfrac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ et $v_n = \ln u_n$.

1. Etudier la serie de terme général w_n où, pour $n \geqslant 2$, $w_n = v_n - v_{n-1}$ et $w_1 = v_1$.
2. En déduire, en utilisant la convergence de la suite des sommes partielles de w_n, que la suite u_n converge vers $\lambda > 0$.
3. Déterminer λ en utilisant la formule de Wallis : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} = \sqrt{\pi}$. En déduire un équivalent de $n!$.
   Indication : Exprimer $n!$ (respectivement $(2n)!$) en fonction de u_n (resp. de u_{2n}) et remplacer-les dans la formule de Wallis.

Exercice 1343 Soit $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$. Donner une valeur approchée de S en garantissant une erreur inférieure ou égale à 10^{-3}.

Exercice 1344 Etudier la série de terme général

$$u_n = \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n} \text{ où } a > 0,\ b > 0.$$

Indication : Chercher un équivalent suivant les valeurs de b.

Exercice 1345 (Utilisation des règles de Cauchy et d'Alembert)
Etudier les séries de termes généraux

1. $$u_n = \sqrt{n!} \sin x \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \cdots \sin \frac{x}{\sqrt{n}} \text{ avec } x > 0.$$
2. $$v_n = e^{an^2}(1 - \frac{a}{n})^{n^3}$$

Exercice 1346 (Comparaison à des séries de Riemann et équivalent)
Etudier les séries de termes généraux

1. $$u_n = cos(\frac{\pi n^2}{2n^2 + an + 1}) \text{ avec } a > 0$$
2. $$v_n = e^{-\sqrt{n}}$$
3. $$w_n = (1 - \frac{1}{n^2})^n$$

Exercice 1347 Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs, on suppose que $\lim(\frac{u_{n+1}}{u_n}) = 1$ et que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^\beta}) \text{ , où } \alpha > 0 \ \ \beta > 1.$$

On pose $v_n = n^\alpha u_n$. Etudier $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ et montrer que (v_n) a une limite finie. Application : Etudier la série de terme général

$$u_n = \sqrt{n!} \sin 1 \sin \frac{1}{\sqrt{2}} \cdots \sin \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 1348 Déterminer la nature de la série de terme général :

1. $\frac{n!}{n^n}$, $(\text{ch} \sqrt{\ln n})^{-2}$, $n^{-(1+(1/n))}$
2. $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})$, $\frac{\ln n}{\ln(e^n - 1)}$, $n^{lnn} e^{-\sqrt{n}}$

Exercice 1349 Etudier, suivant les valeurs de $p \in \mathbb{N}$, la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+p)!}.$$

Exercice 1350 Calculer les sommes des séries suivantes, en montrant leur convergence :

1. $\sum_{n \geqslant 0} (n+1)3^{-n}$
2. $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1}$
3. $\displaystyle\sum_{n \geqslant 3} \frac{2n-1}{n^3 - 4n}$

Exercice 1351 Soit (u_n) une suite réelle positive et $S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$. Comparer la nature des séries $(\sum u_n)$ et $(\sum \frac{u_n}{S_n})$.

Exercice 1352 (Séries à termes quelconques)
Etudier les séries de termes généraux

1. $$u_n = \frac{(-1)^n}{(\ln n)(n^{1/n})}$$

2. $$v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} \text{ où } \alpha > 0$$

3. $$w_n = \ln(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}) \text{ où } \alpha > 0$$

Indication : Des calculs de D.L. peuvent etre fructueux ...

Exercice 1353 (Utilisation d'une série)
Le but de cet exercice est de montrer la convergence de l'intégrale généralisée suivante $\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^4 \sin^2 x}$. Pour cela, on considère la série de terme général

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1 + x^4 \sin^2 x}.$$

Par un changement de variable, transformer u_n en

$$u_n = \int_0^\pi \frac{dx}{1 + (n\pi + x)^4 \sin^2 x}$$

Encadrer ensuite u_n par les termes de la suite v_n où

$$v_n = \int_0^\pi \frac{dx}{1 + (n\pi)^4 \sin^2 x}$$

Calculer explicitement l'intégrale v_n et en déduire un équivalent de u_n. Conclure.

Exercice 1354 Soit u_n une suite décroissante à termes positifs. On suppose $(\sum u_n)$ converge. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} (nu_n) = 0.$$

Indication : Encadrer $\sum_{p+1}^n u_k$ pour $n > p$. Puis revenir aux définitions des limites avec les epsilons.

Exercice 1355 Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries à termes réels strictement positifs. On suppose que $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge, et que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+2}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+2}}{v_n}.$$

Montrer que $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge.

Exercice 1356 (Examen 2000) En justifiant votre réponse, classer les dix séries $\sum u_n$ suivantes en 4 catégories
– GD : celles telles que u_n ne tend pas vers 0 ;
– ZD : celles qui divergent et telles que $\lim u_n = 0$;
– AC : celles qui convergent absolument ;
– SC : celles qui convergent, mais non absolument.
(Attention : pour pouvoir répondre, certaines séries demandent deux démonstrations : par exemple pour montrer que $\sum u_n$ est SC, il faut montrer que $\sum u_n$ converge *et* que $\sum |u_n|$ diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n^2}\right);\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right);\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^2;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\log(1+\frac{1}{n})\right];\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n};\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-(1-\frac{1}{n})^n\right);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1000}{3^n+1};\ \sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{\pi}{n});\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi n)\sin(\frac{\pi}{n});\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\frac{1}{3^{n-k}}\right).$$

Exercice 1357 (Examen 2000)

1. On rappelle que la série harmonique alternée converge et a pour somme
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\log 2.$$
Montrer la convergence des deux séries $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)$ et $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k}\right)$ et calculer leur somme à l'aide du rappel ci dessus.
2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{4x^3-x}$.
3. Montrer la convergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^3-k}$et calculer sa somme à l'aide de ce qui précède.
4. L'intégrale impropre $\int_1^{\infty}\frac{dx}{4x^3-x}$ converge t-elle ? Si oui, la calculer.

Exercice 1358 (Examen 2000) Soit $a>0$ fixé. Pour n entier positif ou nul on dfinit $P_n(a)$ par $P_0(a)=1$, $P_1(a)=a$, $P_2(a)=a(a+1)$ et, plus généralement $P_{n+1}(a)=(n+a)P_n(a)$. Montrer que
$$L(a)=\lim_{n\infty}\frac{P_n(a)}{n!n^{a-1}}$$
existe et est un nombre strictement positif. Méthode : considérer la série de terme général pour $n>0$: $u_n=\log(n+a)-a\log(n+1)+(a-1)\log n$, comparer sa somme partielle d'ordre $n-1$ avec $\log\frac{P_n(a)}{n!n^{a-1}}$, et, ... l'aide d'un développement limité en $1/n$ d'ordre convenable, montrer que, $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ converge.

Exercice 1359©
Soit α et β deux nombres réels ou complexes tels que $\alpha\beta=-1$ et $|\alpha|>1>|\beta|$. Pour n dans l'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers positifs ou négatifs on pose $F_n=\frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha^n-\beta^n)$ et $L_n=\alpha^n+\beta^n$ (si $\alpha+\beta=1$ ces nombres sont appelés entiers de Fibonacci (1225) et de Lucas (1891)).

1. Montrer par le critère de D'Alembert que la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_{2n+1}+1}$ converge et calculer la limite de $Q_n=L_n/F_n$ si $n\to+\infty$. .

2. On admet (identité de Backstrom (1981)) que pour tous n et k de $\mathbf{Z}$ on a

$$\frac{1}{F_{4n-2k-1}+F_{2k+1}}+\frac{1}{F_{4n+2k+1}+F_{2k+1}}=\frac{1}{2L_{2k+1}}\left(Q_{2n+2k+1}-Q_{2n-2k-1}\right).$$

En faisant $k=0$ dans cette identité, calculer la somme partielle d'ordre $2n$ de la série initiale, c'est à dire $s_{2n}=\sum_{j=1}^{2n}\frac{1}{F_{2j+1}+1}$ en montrant par récurrence sur n que $s_{2n}=\frac{1}{2L_1}(Q_{2n+1}-Q_1)$. En déduire la somme de la série en termes de α et β. Donner une expression simple du terme général de la série et de sa somme si $\alpha=\exp t$ et $\beta=-\exp(-t)$ si t est réel.

3. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_{2n+1}+F_3}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 1360 (Permutation dans la série harmonique alternée : Pringsheim (1883)) ©
Pour tout entier $n>0$, soit $u(n)=(-1)^n/n$. Soit σ une permutation des entiers >0 et soit τ la permutation réciproque. On suppose de plus que
(1) pour tout entier $p>0$ on a $\tau(2p-1)<\tau(2p+1)$ et $\tau(2p)<\tau(2p+2)$.
(2) Notant par $p(n)$ le nombre d'entiers k tels que $1\leqslant k\leqslant n$ et $\sigma(k)$ est pair, alors $\alpha=\lim_{n\infty}p(n)/n$ existe et est dans $]0,1[$.

1. Dans le cas particulier où σ est définie par

$$\sigma(3p)=2p,\ \sigma(3p+1)=4p+1,\ \sigma(3p+2)=4p+3$$

pour tout entier $p>0$, calculer explicitement τ, et vérifier que σ satisfait (1) et (2), en calculant $p(n)$ pour tout n ainsi que α.

2. On note $f(n)=\sum_{k=1}^{n}1/k-\log n$, et on rappelle le fait, vu en cours, que $\lim_{n\infty}f(n)=\gamma$ existe (Constante d'Euler). On revient au cas général pour σ, on considère la série de terme général $v_n=u(\sigma(n))$ et on note $s_n=v_1+\cdots+v_n$.

3. Montrer par récurrence que $s_n=\sum_{k=1}^{p(n)}\frac{1}{2k}-\sum_{k=1}^{n-p(n)}\frac{1}{2k-1}$ et que

$$s_n=\frac{1}{2}f(p(n))+\frac{1}{2}f(n-p(n))-f(2n-2p(n))+\frac{1}{2}\log\frac{p(n)}{n-p(n)}-\log 2.$$

En déduire que $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ converge et calculer sa somme en fonction de α.

Exercice 1361 ©Soit $0<a<b$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ défini par $u_0=1$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+a}{n+b}$ pour $n\geqslant 0$. Montrer que la limite de la suite $S_n=\log(n^{b-a}u_n)$ existe et est finie. En déduire les valeurs de a et b telles que la série $\sum_{j=0}^{\infty}u_j$ converge. Calculer alors sa somme : pour cela expliciter sa somme partielle s_n, en montrant d'abord que pour tout n on a

$$\sum_{j=0}^{n}[(j+1)+b-1]u_{j+1}=\sum_{j=0}^{n}[j+a]u_j.$$

Septième partie
GÉOMÉTRIE

43 Géométrie affine

43.1 Convexes

Exercice 1362 Montrer que l'intersection de deux parties convexes est convexe. Est-ce vrai pour l'union ?

Exercice 1363 Soient C et C' deux ensembles convexes d'un espace affine, montrer que

$$D = \left\{ \frac{M+M'}{2} | \, (M,M') \in C \times C' \right\}$$

est convexe.

Exercice 1364 On appelle enveloppe convexe $co(A)$ d'une partie non vide A d'un espace affine E l'intersection des ensembles convexes contenant A ; c'est le plus petit ensemble convexe contenant A. Montrer que c'est aussi l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de points de A. Que sont $co(\{A,B\}), co(\{A,B,C\})$?

Exercice 1365 Un cône d'un espace vectoriel est une partie K telle que :

$$\forall x \in K, \forall t \geqslant 0, tx \in K.$$

Montrer qu'un cône est convexe si et seulement si il est stable par addition.

Exercice 1366 Trouver les parties C convexes de $\mathbb{R}^2$ telles que le complémentaire ${}^cC$ soit aussi convexe.

Exercice 1367 Soit E un espace affine de dimension n, et $(x_1, ..., x_n)$ des points de E.On considère une combinaison convexe de points de A, sous ensemble de E :

$$x = \sum_{i=1}^{m} t_i x_i \text{ avec } \forall i \in \{1, ..., m\} : t_i \geqslant 0 \text{ et } \sum_{j=1}^{m} t_j = 1.$$

Montrer qu'on peut écrire :

$$x = \sum_{k=1}^{n+1} g_k x_k \text{ avec } \forall k \in \{1, ..., n+1\} : g_k \geqslant 0 \text{ et } \sum_{k=1}^{n+1} g_k = 1.$$

Ainsi il suffit de $n+1$ points dans un espace de dimension n pour écrire une combinaison convexe.

43.2 Divers

Exercice 1368 Une bimédiane d'un tétraèdre est une droite qui passe par les milieux de deux arêtes opposées. Montrer que les trois bimédianes sont concourantes.

Exercice 1369 Soient A, B, C trois points non alignés d'un plan affine. Déterminer l'ensemble des points ayant mêmes coordonnées dans les repères $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

Exercice 1370 Soit $R_1 = (0, e_1, e_2, e_3)$ un repère cartésien d'un espace affine. Soient $O' = (1,0,0)$, $e_1' = e_1 + e_2$, $e_2' = e_1 - e_2$, $e_3' = e_3$ et $R_2 = (0', e_1', e_2', e_3')$. Déterminer les coordonnées d'un point dans R_2 en fonction de ses coordonnées dans R_1.

Exercice 1371 Soient $(D_i)_{i=1\dots4}$ quatre droites du plan affine sécantes deux à deux en six points distincts. Si deux d'entre elles se coupent en A et les deux autres en B, on dit que $[AB]$ est une diagonale. Montrer que les milieux des trois diagonales sont alignés (on étudiera le problème analytiquement en choisissant un bon repère).

Exercice 1372

1. Soient $(D_i : u_i x + v_i y + h_i = 0)_{i=1\dots3}$ trois droites du plan affine. Montrer qu'elles sont parallèles ou concourantes ssi $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & h_1 \\ u_2 & v_2 & h_2 \\ u_3 & v_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0$.
2. Soient $(D_1 : x + 2y = 1)$, $(D_2 : x + y = 2)$, $(D_3 : 2x + y = 3)$, $(D_4 : 3x + 2y = 1)$. Déterminer une équation de la droite D qui passe par $D_1 \cap D_2$ et $D_3 \cap D_4$ sans calculer ces points d'intersection.

Exercice 1373 Soient A, B, C trois points non alignés d'un plan affine.

1. Soit f une application affine telle que $f(A) = A$, $f(B) = B$ et $f(C) = C$. Montrer que $f = id$.
2. Soient f et g affines telles que $f(A) = g(A)$, $f(B) = g(B)$ et $f(C) = g(C)$. Que peut-on dire ?
3. Soit f affine telle que $f(A) = B$, $f(B) = C$ et $f(C) = A$. Que peut-on dire ?

Exercice 1374 Soit E un espace affine et f une application affine de E dans E.

1. Montrer que f est une translation ssi $\vec{f} = id$.
2. Montrer que si $\vec{f} = \lambda id$ où $\lambda \neq 1$ alors f est une homothétie (on montrera que f admet un point fixe).
3. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des translations. Montrer que $\mathcal{T}$ est un sous-groupe du groupe affine.
4. On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des homothéties bijectives. Montrer que $\mathcal{T} \cup \mathcal{H}$ est un sous-groupe du groupe affine.

Exercice 1375 Soient f et g deux applications affines de E dans E telles que $\vec{f} = \vec{g}$. Montrer qu'il existe $u \in \vec{E}$ tel que $f = t_u \circ g$ où t_u est la translation de vecteur u. Que peut-on dire si de plus il existe $M \in E$ tel que $f(M) = g(M)$?

Exercice 1376 Reconnaître les application affines de $\mathbb{R}^3$ suivantes :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x + 2y - 2z - 2 \\ -3y + 2z + 6 \\ -4y + 3z + 6 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{y}{2} - \frac{z}{2} + \frac{2}{3} \\ -x + \frac{3y}{2} - \frac{z}{2} + \frac{2}{3} \\ -x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} + \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Exercice 1377 Soit E un espace affine, f une application affine de E dans E et

$$F = \{M \in E / f(M) = M\}.$$

On suppose que $F \neq \emptyset$.

1. Montrer que $\vec{F} = \ker(\vec{f} - id)$.
2. On suppose que $\vec{f} \circ \vec{f} = \vec{f}$. Soit s la projection affine sur F parallèlement à $\ker(\vec{f})$. Montrer que $f = s$.
3. Faire la même chose si $\vec{f} \circ \vec{f} = id$.

Exercice 1378 Soit E un espace affine et f une application affine de E dans E.

1. Montrer que si $f \circ f = f$ alors f est une projection affine.
2. Montrer que si $f \circ f = id$ alors f est une symétrie affine.

44 Isométries vectorielles

Exercice 1379 Compléter $x_1 = (1, 2, 1)$ en base orthogonale directe de $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique.

Exercice 1380 Montrer que $\forall (x, y, z) \in (\mathbb{R}^3)^3 \quad x \wedge (y \wedge z) + y \wedge (z \wedge x) + z \wedge (x \wedge y) = 0$.

Exercice 1381 Soit E euclidien orienté de dimension 3 et $a \in E$.
Soit $f : \begin{cases} E \to E \\ x \mapsto x \wedge a \end{cases}$. f est-elle linéaire, bijective ? Comparer f^3 et f.

Exercice 1382 Soient a et b deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Discuter et résoudre l'équation $a \wedge x = b$.

Exercice 1383 Soit R le rotation vectorielle d'angle θ et d'axe orienté par le vecteur unitaire k. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^3 \; R(x) = (\cos\theta)x + (\sin\theta)k \wedge x + 2(x|k)\sin^2(\frac{\theta}{2})k$.

Exercice 1384 Determiner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ du retournement d'axe $\mathbb{R}(1, 2, 1)$.

Exercice 1385 Reconnaître les transformations géométriques dont les matrices respectives dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont :

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 1386 Soit R une rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe $\mathbb{R}u$ et d'angle θ et r une rotation quelconque. Déterminer rRr^{-1}. En déduire que le centre de $SO_3(\mathbb{R})$ est bîîîîîp (le centre est l'ensemble des rotations qui commutent avec toutes les autres).

Exercice 1387 On considère l'espace vectoriel euclidien canonique et orienté $\mathbb{R}^3$. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ et $p = [a, b, c]$ le produit mixte de a, b et c. Exprimer à l'aide de p les quantités suivantes

1. $s = [a + b, b + c, c + a]$,
2. $t = [a \wedge b, b \wedge c, c \wedge a]$.

45 Géométrie affine euclidienne

Exercice 1388 Soit $(0,\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan. Déterminer l'expression analytique dans ce repère de la réflexion d'axe $x+y=1$.

Exercice 1389 Déterminer l'expression analytique de la réflexion s de plan $x+y-z=1$. Quelle est l'image par s du plan $x+2y-3z+1=0$?

Exercice 1390 Soit G un sous-groupe fini de l'ensemble des isométries du plan. Montrer que G ne peut pas contenir de translation non triviale.

Exercice 1391 On considère dans le plan les deux droites $(D : 3x+y=5)$ et $(D' : x-2y+3=0)$. Quel est l'angle entre ces deux droites ?

Exercice 1392 Déterminer la distance du point $M=(1,2,3)$ aux droites

$$D\begin{cases} x+y-2z=1 \\ 2x-y+z+1=0 \end{cases} \qquad \text{et } \Delta \begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=2+2t \end{cases}$$

Exercice 1393 Soit C un cercle de centre $I=(x_0,y_0)$ et de rayon R et $(D : ax+by+c=0)$. En paramétrant D, montrer que D est tangente à C (*i.e.* $D\cap C$ est un singleton) ssi $d(I,D)=R$.

Exercice 1394 Soient A et B deux points du plan et α un réel. Déterminer l'ensemble des points M qui vérifient $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\alpha$.

Exercice 1395 Soient A,B,C les sommets d'un triangle équilatéral de coté 1. Déterminer l'ensemble des points M qui vérifient $MA^2+MB^2+MC^2=2$.

Exercice 1396 Soient A et B deux points du plan et k un réel strictement positif. Déterminer l'ensemble des points M qui vérifient $MA=kMB$.

Exercice 1397 Quelle est l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3x-4y \\ -4x+3y-2 \end{pmatrix} \end{cases}$?

Exercice 1398 Soit $X=\{A,B,C,D\}$ les sommets d'un carré du plan et $G=\{f\in I_2/f(X)=X\}$. Montrer que G est un sous-groupe de I_2. Montrer que si $f\in G$ alors $f(O)=O$ où O est l'isobarycentre de A,B,C,D. En déduire les éléments de G.

Exercice 1399 Déterminer les $z\in\mathbb{C}$ tels que z,z^2,z^4 soient alignés.

Exercice 1400 Si a et b sont les affixes de deux sommets opposés d'un carré, calculer les affixes des deux autres.

Exercice 1401 Soit O,A,B un triangle rectangle en O. A toute droite D issue de O on associe le cercle de diamètre $A'B'$ où A' et B' sont les projetés orthogonaux de A et B sur D. Montrer que tous les cercles passent par un même point fixe (on pourra utiliser une similitude...).

Exercice 1402 Pour a,b,c trois nombres complexes tels que $b\neq c$, on note $V(a,b,c)=\frac{c-a}{c-b}$. Soient z_1,z_2,z_3,z_4 quatre nombres complexes distincts. Montrer que les images de ces nombres complexes sont alignées ou cocycliques ssi $\frac{V(z_1,z_2,z_3)}{V(z_1,z_2,z_4)}\in\mathbb{R}$.

Exercice 1403 Soit $ABCD$ un carré direct et M un point de la droite (DC). La perpendiculaire à (AM) passant par A coupe (BC) en N. On note I le milieu de $[MN]$. Déterminer le lieu des points I lorsque M décrit la droite (DC).

Exercice 1404 Soient A, B, C, D quatre points distincts du plan tels que $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$. Montrer que le centre de la similitude transformant A en C et B en D est aussi le centre de celle transformant A en B et C en D.

46 Courbes paramétrées

46.1 Coordonnées cartésiennes

Exercice 1405 Tracer les courbes paramétrées suivantes

$$x(t) = \cos^2(t) \qquad y(t) = \cos^3(t)\sin(t)$$
$$x(t) = \frac{t}{1+t^4} \qquad y(t) = \frac{t^3}{1+t^4}$$
$$x(t) = t^2 + \frac{2}{t} \qquad y(t) = t + \frac{1}{t}$$
$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad y(t) = t\frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$x(t) = \tan(t) + \sin(t) \qquad y(t) = \frac{1}{\cos(t)}$$
$$x(t) = \sin(2t) \qquad y(t) = \sin(3t)$$

Exercice 1406 On fait rouler sans glissement un cercle de rayon 1 sur l'axe (Ox). Déterminer et tracer la courbe décrite par un point du cercle.

Exercice 1407 Tracer la courbe d'équation $x^3 + y^3 = 3xy$ en la coupant par les droites $y = tx$ où $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 1408 Tracer la courbe paramétrée définie par :

$$x(t) = \int_0^t \cos(2u)\sin(u)du, \quad y(t) = \int_0^t \sin(2u)\cos(u)du.$$

Exercice 1409 Tracer la courbe paramétrée définie par :

$$x(t) = t^2 + 2t, y(t) = \frac{1+2t}{t^2}.$$

46.2 Coordonnées polaires

Exercice 1410 Tracer les courbes en polaires suivantes

$$\rho(\theta) = \sin(2\theta)$$
$$\rho(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\theta}$$

$$\rho(\theta) = \frac{\theta - 1}{\theta + 1}$$
$$\rho(\theta) = \cos(\theta) - \cos(2\theta)$$
$$\rho(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{1 + \sin(\theta)}$$

Exercice 1411 Soit C un cercle du plan de centre $(1, 0)$ et de rayon a. Déterminer et tracer le lieu des projetés orthogonaux de O sur les tangentes de C.

Exercice 1412 Déterminer et tracer les courbes dont la tangente en tout point M fait un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec $\overrightarrow{OM}$.

Exercice 1413 Grâce aux coordonnées polaires, tracer la courbe définie implicitement par la relation $2xy(x^2 + y^2) = x^2 - y^2$.

Exercice 1414 Tracer la courbe d'équation polaire :

$$r = 1 + \cos\theta.$$

Exercice 1415 Tracer les courbes d'équations polaires :

$$r = \frac{\tan\theta}{\cos\theta}\ ;\ r^2 = \frac{1}{\sin(2\theta)}.$$

46.3 Divers

Exercice 1416 Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]^2$ de classe C^1, montrer que f ne peut être bijective.

Exercice 1417 Soit $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ continue, et $z \in \mathbb{C}$ quelconque. Montrer :

$$\begin{array}{rcl} \forall\varepsilon & > & 0, \exists\gamma' \in C([0, 1], \mathbb{C}) \text{ tel que :} \\ 1 & : & \forall t \in [0, 1], |\gamma(t) - \gamma'(t)| < \varepsilon, \\ 2 & : & \forall t \in [0, 1], \gamma(t) \neq z. \end{array}$$

47 Propriétés métriques des courbes planes

Exercice 1418 Déterminer la longueur de la courbe $y = \sqrt{x}(1 - \frac{x}{3})$ pour $0 \leqslant x \leqslant 3$.

Exercice 1419 Déterminer une abscisse curviligne, la longueur et la développée de l'astroïde.

Exercice 1420 Calculer le rayon de courbure de $\rho(\theta) = \cos(\frac{\theta}{3})$ en fonction de ρ.

Exercice 1421 Soit $\mathcal{P}$ la parabole $y^2 = x$. Déterminer une équation paramétrée et une équation cartésienne de Γ la développée de $\mathcal{P}$. Tracer Γ.

Exercice 1422 Soit Γ la courbe $\rho(\theta) = \sqrt{\sin(2\theta)}$.

1. Tracer cette courbe.
2. Calculer le rayon de courbure.

3. Soient I le centre de courbure en M et H le projeté orthogonal de I sur (OM). Déterminer $\overrightarrow{MH}$.
4. En déduire une construction géométrique de la développée de Γ.

Exercice 1423 Soit $M(s)$ un arc C^2 birégulier paramétré par une abscisse curviligne. Soit $\mathcal{R}$ le repère de Frénet $(M(0), \vec{t}(0), \vec{n}(0))$. On note $(X(s), Y(s))$ les coordonnées dans ce repère d'un point $M(s)$ de la courbe.

1. Montrer que si R_0 est le rayon de courbure en $M(0)$ alors $R_0 = \lim_{s \to 0} \dfrac{X^2(s)}{2Y(s)}$.
2. En déduire le rayon de courbure au point $\theta = 0$ de la courbe $\rho(\theta) = 1 + 2\cos(\frac{\theta}{2})$.

48 Coniques

Exercice 1424 Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de foyers F et F', M un point fixé de $\mathcal{E}$ et M' un point qui se promène sur $\mathcal{E}$. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ les cercles de centres M et M' de rayons MF' et $M'F'$. Soient I le point de $(FM) \cap \mathcal{C}$ tel que $M \in [FI]$ et J le deuxième point d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

1. Montrer que (MM') est bissectrice de l'angle $F'MJ$.
2. Que devient J si M' tend vers M (on ne demande pas de preuve) ?
3. Montrer que la tangente à $\mathcal{E}$ en M est bissectrice extérieure de l'angle FMF'.

Exercice 1425 Soit $\mathcal{P}$ une parabole de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$, M un point de $\mathcal{P}$ et H son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$. Montrer que la tangente à $\mathcal{P}$ en M est la médiatrice de $[FH]$. En déduire un procédé de construction d'une parabole.

Exercice 1426 Déterminer l'ensemble des points d'où l'on peut mener deux tangentes orthogonales à une parabole.

Exercice 1427 Soit $\mathcal{E} = \left\{M(z)/2\left|z\right|^2 - \frac{i}{2}(z^2 - \bar{z}^2) = 1\right\}$, R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et $\mathcal{E}' = R(\mathcal{E})$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{E}'$ et en déduire le tracé de $\mathcal{E}$.

Exercice 1428 Tracer les courbes suivantes :

1. $13x^2 - 32xy + 37y^2 - 2x + 14y - 5 = 0$
2. $xy + 3x + 5y - 4 = 0$
3. $(2x + 3y)^2 + 4x + 6y - 5 = 0$

Exercice 1429 Déterminer astucieusement le sommet et l'axe de la parabole $x(t) = t^2 + t + 1$ et $y(t) = t^2 - 2t + 2$.

Exercice 1430 Montrer que la courbe paramétrée $x(t) = \dfrac{1}{t^2 + t + 1}$ et $y(t) = \dfrac{t}{t^2 + t + 1}$ est une ellipse et la tracer.

49 Analyse vectorielle

Exercice 1431 On considère le champ de vecteurs $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$P(x,y) = (2x\mathrm{e}^{x^2-2y}; -2\mathrm{e}^{x^2-2y}).$$

1. Vérifier que la forme différentielle associée à P est fermée.
2. En déduire que P est un champ de gradients et en déterminer un potentiel.
3. Calculer la circulation de P le long du chemin

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto (\ln(1+t); \mathrm{e}^t + 1).$$

Exercice 1432 Soient a, b des nombres tels que $0 < a < b$ et soit

$$D = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \mid a \leqslant xy \leqslant b,\ y \geqslant x,\ y^2 - x^2 \leqslant 1\}.$$

En effectuant le changement de variable $u = xy, v = y^2 - x^2$, calculer

$$I = \iint_D (y^2 - x^2)(x^2 + y^2)\, dx\, dy.$$

Exercice 1433 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2)$.

1. Étudier les extrema locaux de f.
2. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Montrer que f a un maximum M et un minimum m sur D.
3. Soit $(x,y) \in D$. Montrer que si $f(x,y) = M$ ou $f(x,y) = m$, alors $x^2 + y^2 = 1$.
4. Étudier la fonction $t \mapsto f(\cos t, \sin t)$. En déduire les valeurs de M et m.

Exercice 1434 On cherche les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) + 2u\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = 0 \qquad \text{pour tout } (u,v) \in \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\phi(x,y) = (x, y + x^2)$.

1. En calculant l'application réciproque, montrer que ϕ est bijective. Vérifier que ϕ et ϕ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Posons $g = f \circ \phi$.
   (a) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$.
   (b) Montrer que f est solution de (1) si et seulement si $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$.
3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f vérifie (1) si et seulement s'il existe une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(u,v) = h(v - u^2)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 1435 On pose $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \in \Omega \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est différentiable sur Ω et calculer sa différentielle.
2. Montrer que f est différentiable en $(0,0)$ et que sa différentielle est nulle.
3. Montrer que f admet en tout point des dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et calculer la valeur de ces dérivées en $(0,0)$. Que peut-on en déduire pour la continuité de ces dérivées partielles en $(0,0)$?

Exercice 1436 Soit le champ de vecteurs $\vec{V} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (2xy + e^y, x^2 + xe^y) \end{cases}$. Calculer la circulation de $\vec{V}$ le long de la parabole $x = y^2$ entre les points $(0,0)$ et $(1,1)$.

Exercice 1437 Soit le champ de vecteurs $\vec{V} : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (xy, -z, xz) \end{cases}$. $\vec{V}$ est-il un champ de gradient ? Calculer la circulation de $\vec{V}$ le long de l'hélice $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ pour $t \in [0, 2\pi]$.

Exercice 1438 Montrer que $\omega(x,y) = \dfrac{(1 - x^2 + y^2)y}{(1 + x^2 + y^2)^2}dx + \dfrac{(1 + x^2 - y^2)x}{(1 + x^2 + y^2)^2}dy$ est une forme différentielle exacte sur $\mathbb{R}^2$ et l'intégrer.

Exercice 1439 Sur $D =]0, +\infty[^2$ on définit $\omega(x,y) = (\dfrac{x}{x+y} + \ln(x^2 + xy))dx + \dfrac{\varphi(y)}{x+y}dy$.

1. Trouver une CNS sur φ pour que ω soit fermée.
2. Montrer qu'alors ω est exacte et l'intégrer.

Exercice 1440 Soit $\omega(x,y,z) = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ une forme différentielle C^1 sur un ouvert étoilé U de $\mathbb{R}^3$.

1. A quelle condition ω est-elle exacte ?
2. On suppose qu'elle n'est pas exacte et on cherche alors $\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^*$ de classe C^1 telle que $\lambda\omega$ soit exacte. On dit alors que λ est un facteur intégrant. En éliminant λ dans la condition trouvée à la question précédente, trouver une condition nécessaire sur P, Q, R pour qu'il existe un facteur intégrant.

Exercice 1441 Soit $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z > 0\}$ et $\omega(x,y,z) = 2xzdx - 2yzdy - (x^2 - y^2)dz$.

1. En utilisant l'exercice précédent, montrer que ω admet un facteur intégrant.
2. Chercher un facteur intégrant ne dépendant que de z.
3. On suppose qu'un mouvement dans U vérifie l'équation différentielle $2x(t)z(t)\dot{x}(t) - 2y(t)z(t)\dot{y}(t) - (x^2(t) - y^2(t))\dot{z}(t)$. Trouver une intégrale première du mouvement.

Exercice 1442 Calculer l'aire d'une astroïde.

Huitième partie
CORRECTIONS

50 ALGÈBRE 1

Correction 1 de l'exercice 1 Remarquons d'abord que pour $z \in \mathbb{C}$, $z\overline{z} = |z|^2$ est un nombre réel.

$$\frac{3+6i}{3-4i} = \frac{(3+6i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{9-24+12i+18i}{9+16} = \frac{-15+30i}{25} = -\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i.$$

Calculons

$$\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{3} = \frac{1+3i}{3},$$

et

$$\left(\frac{1+i}{2-1}\right)^2 = \left(\frac{1+3i}{3}\right)^2 = \frac{-8+6i}{9} = -\frac{8}{9} + \frac{6}{9}i.$$

Donc

$$\left(\frac{1+i}{2-1}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} = -\frac{8}{9} + \frac{6}{9} - \frac{3}{5} + \frac{6}{5}i = -\frac{67}{45} + \frac{84}{45}i.$$

Soit $z = \frac{2+5i}{1-i}$. Calculons $z + \overline{z}$, nous savons déjà que c'est un nombre réel, plus précisément : $z = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2}i$ et donc $z + \overline{z} = -3$.

Correction 2 de l'exercice 4 Il s'agit juste d'appliquer la formule de Moivre :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta;$$

ainsi que les formules sur les produits de puissances :

$$e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)} \text{ et } e^{ia}/e^{ib} = e^{i(a-b)}.$$

Correction 3 de l'exercice 5 Nous avons

$$u = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

puis

$$v = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Il ne reste plus qu'à calculer le quotient :

$$\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\frac{\pi}{6} - i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

Correction 4 de l'exercice 7 D'après la formule de Moivre pour $e^{i\alpha}$ nous avons :

$$e^{e^{i\alpha}} = e^{\cos\alpha + i\sin\alpha} = e^{\cos\alpha}e^{i\sin\alpha}.$$

Or $e^{\cos\alpha} > 0$ donc l'écriture précédente est bien de la forme "module-argument".

De façon générale pour calculer un somme du type $e^{iu}+e^{iv}$ il est souvent utile de factoriser par $e^{i\frac{u+v}{2}}$. En effet

$$\begin{aligned}
e^{iu}+e^{iv} &= e^{i\frac{u+v}{2}}\left(e^{i\left(\frac{u}{2}-\frac{v}{2}\right)}+e^{-i\left(\frac{u}{2}-\frac{v}{2}\right)}\right)\\
&= e^{i\frac{u+v}{2}}2\cos\left(\frac{u}{2}-\frac{v}{2}\right)\\
&= 2\cos\left(\frac{u}{2}-\frac{v}{2}\right)e^{i\frac{u+v}{2}}.
\end{aligned}$$

Ce qui est proche de l'écriture en coordonées polaires.
Pour le cas qui nous concerne :

$$z = e^{i\theta}+e^{2i\theta} = e^{\frac{3i\theta}{2}}\left[e^{-\frac{i\theta}{2}}+e^{\frac{i\theta}{2}}\right] = 2\cos\theta e^{\frac{3i\theta}{2}}.$$

Attention le module dans une décomposion en forme polaire doit être positif ! Donc si $\cos\theta/2 \geqslant 0$ (*i.e.* $\theta\in[-\pi+4k\pi,+\pi+4k\pi]$ avec $k\in\mathbb{Z}$) alors $2\cos\theta$ est le module de z et 3θ est son argument ; par contre si $\cos\theta/2<0$ le module est $2|\cos\theta|$ et l'argument $3\theta+\pi$ (le $+\pi$ compense le changement de signe car $e^{i\pi}=-1$).

Correction 5 de l'exercice 8

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = e^{i\pi/2} = i.$$

On remarque $1=i^0=i^4=i^8=\cdots=i^{32}$.

Correction 6 de l'exercice 13 Écrivons $z=\rho e^{i\theta}$, alors $\overline{z}=\rho e^{-i\theta}$. Donc

$$\begin{aligned}
P &= \prod_{k=1}^{n}\left(z^k+\overline{z}^k\right)\\
&= \prod_{k=1}^{n}\rho^k\left((e^{i\theta})^k+(e^{-i\theta})^k\right)\\
&= \prod_{k=1}^{n}\rho^k\left(e^{ik\theta}+e^{-ik\theta}\right))\\
&= \prod_{k=1}^{n}2\rho^k\cos k\theta\\
&= 2^n.\rho.\rho^2.\dots.\rho^n\prod_{k=1}^{n}\cos k\theta\\
&= 2^n\rho^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{k=1}^{n}\cos k\theta.
\end{aligned}$$

Correction 7 de l'exercice 14 Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et z le nombre complexe $z=e^{i\alpha}+e^{i\beta}$. Soit

$u = \frac{\alpha+\beta}{2}$ et $v = \frac{\alpha-\beta}{2}$. Alors, $\alpha = u + v$ et $\beta = u - v$ et :

$$\begin{aligned} z &= e^{i\alpha} + e^{i\beta} \\ &= e^{iu+iv} + e^{iu-iv} \\ &= e^{iu}(e^{iv} + e^{-iv}) \\ &= 2\cos(v)e^{iu} \\ &= 2\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \end{aligned}$$

On en déduit la forme trigonométrique de z :

$$|z| = 2|\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})| \quad \text{et, lorsque } \cos(\frac{\alpha-\beta}{2}) \neq 0 :$$

$$Arg(z) = \begin{cases} \frac{\alpha+\beta}{2}[2\pi] & \text{si } \cos\frac{\alpha-\beta}{2} > 0 \\ \pi + \frac{\alpha+\beta}{2}[2\pi] & \text{si } \cos\frac{\alpha-\beta}{2} < 0 \end{cases}$$

(Attention, si $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} < 0$, $z = 2\cos v e^{iu}$ n'est pas la forme trigonométrique de z !).
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons z^n de deux façons différentes : d'une part

$$z^n = (e^{i\alpha} + e^{i\beta})^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p e^{ip\alpha} e^{i(n-p)\beta},$$

et d'autre part, en utilisant la forme obtenue plus haut : $z^n = 2^n \cos^n v\, e^{inu}$. En comparant les parties réelles des expressions obtenues on obtient :

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p \cos[p\alpha + (n-p)\beta] = 2^n \cos^n \frac{\alpha-\beta}{2} \cos(n\frac{\alpha+\beta}{2}).$$

Correction 8 de l'exercice 19 Racines carrées. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$; nous cherchons les complexes $\omega \in \mathbb{C}$ tels que $\omega^2 = z$. Écrivons $\omega = \alpha + i\beta$. Nous raisonnons par équivalence :

$$\begin{aligned} \omega^2 = z &\Leftrightarrow (\alpha + i\beta)^2 = a + ib \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = a + ib \end{aligned}$$

Soit en identifiant les parties réelles entre elles ainsi que les parties imaginaires :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a \\ 2\alpha\beta = b \end{cases}$$

Sans changer l'équivalence nous rajoutons la condition $|\omega|^2 = |z|$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2+\beta^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ \alpha^2-\beta^2 = a \\ 2\alpha\beta = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \\ \beta^2 = \alpha^2 - a = \frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \\ 2\alpha\beta = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ \beta^2 = \pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ \alpha\beta \text{ est du même signe que } b \end{cases}$$

Cela donne deux couples (α,β) de solution et donc deux racines carrées $\omega = \alpha + i\beta$ de z.
En pratique on répète facilement ce raisonnement, par exemple pour $z = 8-6i$,

$$\begin{aligned} \omega^2 = z &\Leftrightarrow (\alpha+i\beta)^2 = 8-6i \\ &\Leftrightarrow \alpha^2-\beta^2+2i\alpha\beta = 8-6i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2-\beta^2 = 8 \\ 2\alpha\beta = -6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2+\beta^2 = \sqrt{8^2+(-6)^2} = 10 \text{ le module de } z \\ \alpha^2-\beta^2 = 8 \\ 2\alpha\beta = -6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha^2 = 18 \\ \beta^2 = 10-\alpha^2 = 1 \\ 2\alpha\beta = -6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \\ \beta = \pm 1 \\ \alpha \text{ et } \beta \text{ de signes opposés} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \qquad \alpha = 3 \text{ et } \beta = -1 \\ ou \\ \qquad \alpha = -3 \text{ et } \beta = +1 \end{cases} \end{aligned}$$

Les racines de $z = 8-6i$ sont donc $\omega = 3-i$ et $-\omega = -3+i$.

Correction 9 de l'exercice 20 Par la méthode usuelle nous calculons les racines carrées $\omega, -\omega$ de $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, nous obtenons

$$\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}.$$

mais nous remarquons que z s'écrit également

$$z = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

et $e^{i\frac{\pi}{8}}$ vérifie

$$\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2 = e^{\frac{2i\pi}{8}} = e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Cela signifie que $e^{i\frac{\pi}{8}}$ est une racine carrée de z, donc $e^{i\frac{\pi}{8}} = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$ est égal à ω ou $-\omega$. Comme $\cos\frac{\pi}{8} > 0$ alors $e^{i\frac{\pi}{8}} = \omega$ et donc par identification des parties réelles et imaginaires :

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}.$$

Correction 10 de l'exercice 21 Soit $P(z) = az^2 + bz + c$, et $\Delta = b^2 - 4ac$, si $\Delta \geqslant 0$ alors les racines sont réelles, seul le cas où $\Delta < 0$ nous intéresse. Première méthode : il suffit de regarder les deux solutions et de vérifier qu'elles sont conjuguées...
Seconde méthode : si z est une racine de P *i.e.* $P(z) = 0$, alors

$$P(\bar{z}) = a\bar{z}^2 + b\bar{z} + c = \overline{az^2 + b^z + c} = \overline{P(z)} = 0.$$

Donc $\bar{z}$ est aussi une racine de P. Or z n'est pas un nombre réel (car $\Delta < 0$) donc $\bar{z} \neq z$. Sachant que le polynôme P de degré 2 a exactement 2 racines, ce sont z et $\bar{z}$ et elles sont conjuguées.

Correction 11 de l'exercice 22 Équations du second degré. La méthode génerale pour résoudre les équations du second degré $az^2 + bz + c = 0$ (avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$) est la suivante : soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant complexe et δ une racine carrée de Δ ($\delta^2 = \Delta$) alors les solutions sont :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

Dans le cas où les coefficients sont réels, on retrouve la méthode bien connue. Le seul travail dans le cas complexe est de calculer une racine δ de Δ.
Exemple : pour $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$, $\Delta = 3 + 4i$, dont une racine carrée est $\delta = 2 + i$, les solutions sont donc :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}+2+i}{2} \text{ et } z_2 = \frac{\sqrt{3}-2-i}{2}.$$

Correction 12 de l'exercice 25

$$S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \sum_{k=0}^{n} z^k.$$

Nous devons retrouver le résultat sur la somme $S_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$d'une suite géométrique dans le cas où $z \neq 1$ est un réel. Soit maintenant $z \neq 1$ un nombre complexe. Calculons $S_n(1-z)$.

$$\begin{aligned} S_n(1-z) &= (1 + z + z^2 + \cdots + z^n)(1-z) \text{ développons} \\ &= 1 + z + z^2 + \cdots + z^n - z - z^2 - \cdots - z^{n+1} \text{ les termes intermédiaires s'annulent} \\ &= 1 - z^{n+1}. \end{aligned}$$

Donc

$$S_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}, \text{ pour } z \neq 1.$$

Correction 13 de l'exercice 26 Calcul de racine n-ième. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = 1$, déjà $|z|^n = 1$ et donc $|z| = 1$. Écrivons $z = e^{i\theta}$. L'équation devient

$$e^{in\theta} = e^0 = 1 \Leftrightarrow n\theta = 0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Les solution sont donc

$$\mathcal{S} = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Comme le polynôme $z^n - 1$ est de degré n il a au plus n racines. Nous choisissons pour représentants :

$$\mathcal{S} = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k = 0, \ldots, n-1 \right\}.$$

De plus si $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ alors $\mathcal{S} = \left\{ \varepsilon^k,\ k = 0, \ldots, n-1 \right\}$. Ces racines sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité.

Soit $P(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z}$ pour $z \neq 1$. Donc quelque soit $z \in \mathcal{S} \setminus \{1\}$ $P(z) = 0$, nous avons ainsi trouver $n-1$ racines pour P de degré $n-1$, donc l'ensemble des racines de P est exactement $\mathcal{S} \setminus \{1\}$.

Pour conclure soit $Q_p(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{kp}$.
Si $p = 0 + ln\ l \in \mathbb{Z}$ alors $Q_p(z) = p$.
Sinon $Q_p(z)$ est la somme d'une suite géométrique de raison ε^p :

$$Q_p(z) = \frac{1-(\varepsilon^p)^n}{1-\varepsilon^p} = \frac{1-(\varepsilon^n)^p}{1-\varepsilon^p} = \frac{1-1}{1-\varepsilon^p} = 0.$$

Correction 14 de l'exercice 33 Soient z_1, z_2, z_3 trois nombres complexes *distincts* ayant le même cube.

1. $z_1 \neq 0$ car sinon on aurait $z_1 = z_2 = z_3 = 0$. Ainsi $(\frac{z_2}{z_1})^3 = (\frac{z_3}{z_1})^3 = 1$. Comme les trois nombres $1, (\frac{z_2}{z_1})$ et $(\frac{z_3}{z_1})$ sont distincts on en déduit que ce sont les trois racines cubiques de 1. Ces racines sont $1, j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $j^2 = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$. A une permutation près des indices 2 et 3 on a donc :
$$z_2 = jz_1 \qquad \text{et} \qquad z_3 = j^2 z_1.$$
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :
$$z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0 \Leftrightarrow z^3 \text{ est solution de } Z^2 + (7-i)Z - 8 - 8i = 0$$
Etudions l'équation $Z^2+(7-i)Z-8-8i = 0$. $\Delta = (7-i)^2+4(8+8i) = 80+18i = (9+i)^2$. Les solutions sont donc -8 et $1+i$. Nous pouvons reprendre notre suite d'équivalences :
$$\begin{aligned} z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0 &\Leftrightarrow z^3 \in \{-8, 1+i\} \\ &\Leftrightarrow z^3 = (-2)^3 \quad \text{ou} \quad z^3 = (\sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}})^3 \\ &\Leftrightarrow z \in \{-2, -2e^{\frac{2i\pi}{3}}, -2e^{-\frac{2i\pi}{3}}\} \text{ ou } z \in \{\sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{9\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}\} \\ &\Leftrightarrow z \in \{-2, 2e^{\frac{i\pi}{3}}, 2e^{-\frac{i\pi}{3}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}\}. \end{aligned}$$
L'ensemble des solutions est donc :
$$\{-2, 2e^{\frac{i\pi}{3}}, 2e^{-\frac{i\pi}{3}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}\}.$$

Correction 15 de l'exercice 36 Nous identifions $\mathbb{C}$ au plan affine et $z = x+iy$ à $(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Remarquons que pour les deux ensembles $z = 5$ n'est pas solution, donc

$$\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-3| = |z-5|.$$

Ce qui signifie présiment que que les points d'affixe z sont situés à égale distance des points A, B d'affixes respectives $3 = (3, 0)$ et $5 = (5, 0)$. L'ensemble solution est la médiatrice du segment $[A, B]$.

Ensuite pour

$$\begin{aligned}\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} &\Leftrightarrow |z-3|^2 = \frac{1}{2}|z-5|^2\\ &\Leftrightarrow (z-3)\overline{(z-3)} = \frac{1}{2}(z-5)\overline{(z-5)}\\ &\Leftrightarrow z\overline{z} - (z+\overline{z}) = 7\\ &\Leftrightarrow |z-1|^2 = 8\\ &\Leftrightarrow |z-1| = 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc le cercle de centre le point d'affixe $1 = (1, 0)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

Correction 16 de l'exercice 44

1. Comme $(A_0, \ldots, A_4)$ est un pentagone régulier, on a $OA_0 = OA_1 = OA_2 = OA_3 = OA_4 = 1$ et $(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_1}) = \frac{2\pi}{5}[2\pi], (\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_2}) = \frac{4\pi}{5}[2\pi], (\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_3}) = -\frac{4\pi}{5}[2\pi], (\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_4}) = -\frac{2\pi}{5}[2\pi],$. On en déduit : $\omega_0 = 1, \omega_1 = e^{\frac{2i\pi}{5}}, \omega_2 = e^{\frac{4i\pi}{5}}, \omega_3 = e^{-\frac{4i\pi}{5}} = e^{\frac{6i\pi}{5}}, \omega_4 = e^{-\frac{2i\pi}{5}} = e^{\frac{8i\pi}{5}},$. On a bien $\omega_i = \omega_1^i$. Enfin, comme $\omega_1 \neq 0$, $1 + \omega_1 + \ldots + \omega_1^4 = \frac{1-\omega_1^5}{1-\omega_1} = \frac{1-1}{1-\omega_1} = 0$.
2. $\mathrm{Re}(1 + \omega_1 + \ldots + \omega_1^4) = 1 + 2\cos(\frac{2\pi}{5}) + 2\cos(\frac{4\pi}{5})$. Comme $\cos(\frac{4\pi}{5}) = 2\cos^2(\frac{2\pi}{5}) - 1$ on en déduit : $4\cos^2(\frac{2\pi}{5}) + 2\cos(\frac{2\pi}{5}) - 1 = 0$. $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est donc bien une solution de l'équation $4z^2 + 2z - 1 = 0$. Etudions cette équation : $\Delta = 20 = 2^2.5$. Les solutions sont donc $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Comme $\cos(\frac{2\pi}{5}) > 0$, on en déduit que $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
3. $BA_2^2 = |\omega_2+1|^2 = |\cos(\frac{4\pi}{5})+i\sin(\frac{4\pi}{5})+1|^2 = 1+2\cos(\frac{4\pi}{5})+\cos^2(\frac{4\pi}{5})+\sin^2(\frac{4\pi}{5}) = 4\cos^2(\frac{2\pi}{5})$. Donc $BA_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
4. $BI = |i/2 + 1| = \frac{\sqrt{5}}{2}$. $BJ = BI - 1/2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
5. Pour tracer un pentagone régulier, on commence par tracer un cercle C_1 et deux diamètres orthogonaux, qui jouent le rôle du cercle passant par les sommets et des axes de coordonnées. On trace ensuite le milieu d'un des rayons : on obtient le point I de la question 4. On trace le cercle de centre I passant par le centre de C_1 : c'est le cercle $\mathcal{C}$. On trace le segment BI pour obtenir son point J d'intersection avec $\mathcal{C}$. On trace enfin le cercle de centre B passant par J : il coupe C_1 en A_2 et A_3, deux sommets du pentagone. Il suffit pour obtenir tous les sommets de reporter la distance A_2A_3 sur C_1, une fois depuis A_2, une fois depuis A_3. (en fait le cercle de centre B et passant par J', le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé à J, coupe C_1 en A_1 et A_4, mais nous ne l'avons pas justifié par le calcul : c'est un exercice !)

Correction 17 de l'exercice 50

1. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$. Notons $\alpha = a + ib$ et $\beta = c + id$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Alors $\alpha + \beta = (a+c)+i(b+d)$ et $a+c \in \mathbb{Z}$, $b+d \in \mathbb{Z}$ donc $\alpha+\beta \in \mathbb{Z}[i]$. De même, $\alpha\beta = (ac-bd)+i(ad+bc)$ et $ac - bd \in \mathbb{Z}$, $ad + bc \in \mathbb{Z}$ donc $\alpha\beta \in \mathbb{Z}[i]$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ inversible. Il existe donc $\beta \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $\alpha\beta = 1$. Ainsi, $\alpha \neq 0$ et $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Z}[i]$. Remarquons que tout élément non nul de $\mathbb{Z}[i]$ est de module supérieur ou égal à 1 : en effet $\forall z \in \mathbb{C}, |z| \geqslant \sup(|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)|)$ et si $z \in \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}$, $\sup(|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)|) \geqslant 1$. Si $|\alpha| \neq 1$ alors $|\alpha| > 1$ et $|1/\alpha| < 1$. On en déduit $1/\alpha = 0$ ce qui est impossible. Ainsi $|\alpha| = 1$, ce qui implique $\alpha \in \{1, -1, i, -i\}$.
   Réciproquement, $1^{-1} = 1 \in \mathbb{Z}[i], (-1)^{-1} = -1 \in \mathbb{Z}[i], i^{-1} = -i \in \mathbb{Z}[i], (-i)^{-1} = i \in \mathbb{Z}[i]$. Les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ sont donc $1, -1, i$ et $-i$.
3. Soit $\omega \in \mathbb{C}$. Notons $\omega = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. soit $E(x)$ la partie entière de x, i.e. le plus grand entier inférieur ou égal à x : $E(x) \leqslant x < E(x) + 1$. Si $x \leqslant E(x) + 1/2$, notons $n_x = E(x)$, et si $x > E(x) + 1/2$, notons $n_x = E(x) + 1$. n_x est le, ou l'un des s'il y en a deux, nombre entier le plus proche de x : $|x - n_x| \leqslant 1/2$. Notons n_y l'entier associé de la même manière à y. Soit alors $z = n_x + in_y$. $z \in \mathbb{Z}[i]$ et $|\omega - z|^2 = (x - n_x)^2 + (y - n_y)^2 \leqslant 1/4 + 1/4 = 1/2$. Donc $|\omega - z| < 1$.
4. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$, avec $\beta \neq 0$. Soit alors $q \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $|\frac{\alpha}{\beta} - q| < 1$. Soit $r = \alpha - \beta q$. Comme $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ et $\beta q \in \mathbb{Z}[i]$, $r \in \mathbb{Z}[i]$. De plus $|\frac{r}{\beta}| = |\frac{\alpha}{\beta} - q| < 1$ donc $|r| < |\beta|$.

Correction 18 de l'exercice 56 Il ne faut pas se laisser impressionner par l'allure de cette assertion. En effet $A \Rightarrow B$ est une écriture pour B ou (non$A$) ; ici A (la proposition $(1 = 2)$) est fausse, donc (non$A$) est vraie et B ou (non$A$) l'est également. Donc l'assertion $A \Rightarrow B$ est vraie, quand A est fausse et quelque soit la proposition B.

Correction 19 de l'exercice 60

1. Cette proposition est vraie. En effet soit $\varepsilon > 0$, définissons $M_1 = (\frac{2}{\varepsilon}, 0) \in F_1$ et $M_2 = (\frac{2}{\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{2}) \in F_2$, alors $M_1M_2 = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Ceci étant vrai quelque soit $\varepsilon > 0$ la proposition est donc démontrée.
2. Soit deux points fixés M_1, M_2 vérifiant cette proposition la distance $d = M_1M_2$ est aussi petite que l'on veut donc elle est nulle, donc $M_1 = M_2$; or les ensembles F_1 et F_2 sont disjoints. Donc la proposition est fausse. La négation de cette proposition est :
   $$\forall M_1 \in F_1 \quad \forall M_2 \in F_2 \quad \exists \varepsilon \in]0, +\infty[\quad / \quad M_1M_2 \geqslant \varepsilon$$
   et cela exprime le fait que les ensembles F_1 et F_2 sont disjoints.
3. Celle ci est également fausse, en effet supposons qu'elle soit vraie, soit alors ε correspondant à cette proposition. Soit $M_1 = (\varepsilon + 2, 0)$ et $M_2 = (1, 1)$, on a $M_1M_2 > \varepsilon + 1$ ce qui est absurde. La négation est :
   $$\forall \varepsilon \in]0, +\infty[\quad \exists M_1 \in F_1 \quad \exists M_2 \in F_2 \quad / \quad M_1M_2 \geqslant \varepsilon$$
   C'est-à-dire que l'on peut trouver deux points aussi éloignés l'un de l'autre que l'on veut.
4. Cette proposition est vraie il suffit de choisir $\varepsilon = M_1M_2 + 1$. Elle signifie que la distance entre deux points donnés est un nombre fini !

Correction 20 de l'exercice 63

1. Un triangle dont aucun angle n'est droit n'est pas rectangle.

2. Il existe une écurie dans laquelle il y a (au moins) un cheval dont la couleur n'est pas noire.
3. Sachant que la proposition en langage mathématique s'écrit
$$\forall x \in \mathbb{Z} \;\; \exists y \in \mathbb{Z} \;\; \forall z \in \mathbb{Z} \quad (z < x \Leftrightarrow z < x + 1),$$
la négation est
$$\exists x \in \mathbb{Z} \;\; \forall y \in \mathbb{Z} \;\; \exists z \in \mathbb{Z} \quad (z < x \text{ et } z \geqslant x + 1).$$
4. $\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall \alpha > 0 \quad (|x - 7/5| < \alpha \text{ et } |5x - 7| \geqslant \varepsilon)$.

Correction 21 de l'exercice 58 Dans ce corrigé, nous donnons une justification, ce qui n'était pas demandé.

1. Cette assertion se décompose de la manière suivante : (Pour tout $x \in \mathbb{R}$) ($f(x) \leqslant 1$). La négation de "(Pour tout $x \in \mathbb{R}$)" est "Il existe $x \in \mathbb{R}$" et la négation de "($f(x) \leqslant 1$)" est $f(x) > 1$. Donc la négation de l'assertion complète est : "Il existe $x \in \mathbb{R}, f(x) > 1$.
2. Rappelons comment se traduit l'assertion "L'application f est croissante" : "pour tout couple de réels (x_1, x_2), si $x_1 \leqslant x_2$ alors $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Cela se décompose en : "(pour tout couple de réels x_1 et x_2) ($x_1 \leqslant x_2$ implique $f(x_1) \leqslant f(x_2)$)". La négation de la première partie est : "(il existe un couple de réels (x_1, x_2))" et la négation de la deuxième partie est : "($x_1 \leqslant x_2$ et $f(x_1) > f(x_2)$)". Donc la négation de l'assertion complète est : "Il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 \leqslant x_2$ et $f(x_1) > x_2$".
3. La négation est : l'application f n'est pas croissante ou n'est pas positive. On a déjà traduit "l'application f n'est pas croissante", traduisons "l'application f n'est pas positive" : "il existe $x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$". Donc la négation de l'assertion complète est : " Il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 < x_2$ et $f(x_1) \geqslant x_2$, ou il existe $x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$".
4. Cette assertion se décompose de la manière suivante : "(Il existe $x \in \mathbb{R}^+$) ($f(x) \leqslant 0$)". La négation de la première partie est : "(pour tout $x \in \mathbb{R}^+$), et celle de la seconde est :"($f(x) > 0$)". Donc la négation de l'assertion complète est : " Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) > 0$".
5. Cette assertion se décompose de la manière suivante : "$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$". La négation de la première partie est "$(\forall x \in \mathbb{R})$, celle de la seconde est $(\exists y \in \mathbb{R})$, et celle de la troisième est ($x < y$ et $f(x) \leqslant f(y)$). Donc la négation de l'assertion complète est : " $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$ et $f(x) \leqslant f(y)$".

Correction 22 de l'exercice 73

$$\begin{aligned} x \in \complement(A \cup B) &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ et } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \complement A \text{ et } x \in \complement B \\ &\Leftrightarrow x \in \complement A \cap \complement B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in \complement(A \cap B) &\Leftrightarrow x \notin A \cap B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \complement A \text{ ou } x \in \complement \\ &\Leftrightarrow x \in \complement A \cup \complement B. \end{aligned}$$

Correction 23 de l'exercice 74 Montrons quelques assertions.
$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
Si $y \in f(A \cap B)$, il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$, or $x \in A$ donc $y = f(x) \in f(A)$ et de même $x \in B$ donc $y \in f(B)$. D'où $y \in f(A) \cap f(B)$. Tout élément de $f(A \cap B)$ est un élément de $f(A) \cap f(B)$ donc $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
Remarque : l'inclusion réciproque est fausse. Exercice : trouver un contre-exemple.

$f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

$$\begin{aligned}
x \in f^{-1}(F \setminus A) &\Leftrightarrow f(x) \in F \setminus F \setminus A \\
&\Leftrightarrow f(x) \notin A \\
&\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A) \text{ car } f^{-1} = \{x \in E \ / \ f(x) \in A\} \\
&\Leftrightarrow x \in E \setminus f^{-1}(A)
\end{aligned}$$

Correction 24 de l'exercice 87 Par l'absurde, supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f = f_p$. Deux applications sont égales si et seulement si elles prennent les mêmes valeurs.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = f_p(n).$$

En particulier pour $n = p$, $f(p) = f_p(p)$. D'autre part la définition de f nous donne $f(p) = f_p(p) + 1$. Nous obtenons une contradiction car $f(p)$ ne peut prendre deux valeurs distinctes. En conclusion, quelque soit $p \in \mathbb{N}$ $f \neq f_p$.

Correction 25 de l'exercice 88

1. Montrons en fait la contraposée.
   S'il existe i tel que p_i divise $N = p_1 p_2 \dots p_r + 1$ (i est fixé) alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $N = kp_i$ donc
   $$p_i(k - p_1 p_2 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_r) = 1$$
   soit $p_i q = 1$ (avec $q = k - p_1 p_2 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_r$ un nombre entier) Donc $p_i \in \mathbb{Z}$ et $1/p_i = q \in \mathbb{Z}$, alors p_i vaut 1 ou -1. Et donc p_i n'est pas un nombre premier.
   Conclusion : par contraposition il est vrai que N n'est divisible par aucun des p_i
2. Raisonnons par l'absurde : s'il n'existe qu'un nombre fini r de nombres premiers $p_1, \dots, p_r$ alors $N = p_1 p_2 \dots p_r + 1$ est un nombre premier car divisible par aucun nombre premier autre que lui même (c'est le 1.).
   Mais N est strictement supérieur à tous les p_i. Conclusion on a construit un nombre premier N différent des p_i, il y a donc au moins $r + 1$ nombres premiers, ce qui est absurde.

Correction 26 de l'exercice 92

1. Montrons par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n > 3$. Soit l'hypothèse de récurrence :
   $$(\mathcal{H}_n) : \quad x_n > 3.$$
   - La proposition $\mathcal{H}_0$ est vraie car $x_0 = 4 > 3$.

- Soit $n \geqslant 0$, supposons $\mathcal{H}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est alors vraie.

$$x_{n+1} - 3 = \frac{2{x_n}^2 - 3}{x_n + 2} - 3 = \frac{2{x_n}^2 - 3x_n - 9}{x_n + 2}.$$

  Par hypothèse de récurrence $x_n > 3$, donc $x_n + 2 > 0$ et $2{x_n}^2 - 3x_n - 9 > 0$ (ceci par étude de la fonction $x \mapsto 2x^2 - 3x - 9$ pour $x > 3$). Donc $x_{n+1} - 3$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Nous avons montrer

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$$

  et comme $\mathcal{H}_0$ est vraie alors $\mathcal{H}_n$ est vraie quelque soit n. Ce qui termine la démonstration.

2. Montrons que $x_{n+1} - 3 - \frac{3}{2}(x_n - 3)$ est positif.

$$x_{n+1} - 3 - \frac{3}{2}(x_n - 3) = \frac{2{x_n}^2 - 3}{x_n + 2} - \frac{3}{2}(x_n - 3) = \frac{1}{2}\frac{{x_n}^2 + 3x_n + 12}{x_n + 2}$$

   Ce dernier terme est positif car $x_n > 3$.
3. Montrons par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$. Soit notre nouvelle l'hypothèse de récurrence :

$$(\mathcal{H}_n) \quad x_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3.$$

   - La proposition $\mathcal{H}_0$ est vraie.
   - Soit $n \geqslant 0$, supposons que $\mathcal{H}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vérifiée.
     D'après la question précédente $x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$ et par hypothèse de récurrence $x_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$; en réunissant ces deux inégalités nous avons $x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(\left(\frac{3}{2}\right)^n) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$.
   - Nous concluons en résumant la situation :
     $\mathcal{H}_0$ est vraie, et $\mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$ quelque soit n. Donc $\mathcal{H}_n$ est toujours vraie.
4. La suite (x_n) tend vers $+\infty$ et n'est donc pas convergente.

Correction 27 de l'exercice 93

Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ la proposition suivante :

$$\mathcal{H}_n : \quad n \text{ droites en position générale découpent le plan en } R_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1 \text{ régions.}$$

- pour $n = 1$ alors une droite divise le plan en deux régions. $\mathcal{H}_1$ est vraie.
- Soit $n \geqslant 2$ et supposons que $\mathcal{H}_{n-1}$ soit vraie, et montrons $\mathcal{H}_n$. Soient $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ n droites en position générale, la droite Δ_n rencontre les droites $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$ en $n-1$ points, donc Δ_n traverse (et découpe en deux) n régions du découpage $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$. Le découpage par Δ_n donne donc la relation $R_n = R_{n-1} + n$.
  Or par hypothèse de récurrence $\mathcal{H}_{n-1}$: $R_{n-1} = \frac{(n-1)n}{2} + 1$ donc

$$R_n = R_{n-1} + n = \frac{(n-1)n}{2} + 1 + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

  Et $\mathcal{H}_n$ est vraie.
  Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathcal{H}_{n-1} \Rightarrow \mathcal{H}_n$.
- Conclusion : par récurrence on a montré que $\mathcal{H}_n$ est vraie quelque soit $n \geqslant 1$.

Correction 28 de l'exercice 108

1. Supposons $g \circ f$ injective, et montrons que f est injective : soit $a,\ a' \in A$ avec $f(a) = f(a')$ donc $g \circ f(a) = g \circ f(a')$ or $g \circ f$ est injective donc $a = a'$. Conclusion on a montré :
$$\forall a, a' \in A \quad f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$
c'est la définition de f injective.
2. Supposons $g \circ f$ surjective, et montrons que g est surjective : soit $c \in C$ comme $g \circ f$ est surjective il existe $a \in A$ tel que $g \circ f(a) = c$; posons $b = f(a)$, alors $g(b) = c$, ce raisonnement est valide quelque soit $c \in C$ donc g est surjective.
3. Un sens est simple ($\Leftarrow$) si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ l'est également. De même avec $h \circ g$.
Pour l'implication directe ($\Rightarrow$) : si $g \circ f$ est bijective alors en particulier elle est surjective et donc d'après le deuxième point g est surjective.
Si $h \circ g$ est bijective, elle est en particulier injective, donc g est injective (c'est le 1.). Par conséquent g est à la fois injective et surjective donc bijective.
Pour finir $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ est bijective comme composée d'applications bijectives, de même pour h.

Correction 29 de l'exercice 112
1. Pour $z = x + iy$, le module de $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ est e^x et son argument est y.
2. Les résultats : $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$, $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$, $e^{-z} = (e^z)^{-1}$, $(e^z)^n = e^{nz}$.
3. La fonction exp n'est pas surjective car $|e^z| = e^x > 0$ et donc e^z ne vaut jamais 0. La fonction exp n'est pas non plus injective car pour $z \in \mathbb{C}$, $e^z = e^{z+2i\pi}$.

Correction 30 de l'exercice 115 Montrons que la restriction de f, $\phi : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{U}$, $t \mapsto e^{it}$ est bijective. Où $\mathbb{U}$ est le cercle unité de $\mathbb{C}$ donné par l'équation ($|z| = 1$).
- ϕ est surjective car tout nombre complexe de $\mathbb{U}$ s'écrit sous la forme polaire $e^{i\theta}$, et l'on peut choisir $\theta \in [0, 2\pi[$.
- ϕ est injective :
$$\begin{aligned} \phi(t) = \phi(t') &\Leftrightarrow e^{it} = e^{it'} \\ &\Leftrightarrow t = t' + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow t = t' \text{ car } t, t' \in [0, 2\pi[\text{ et donc } k = 0. \end{aligned}$$

En conclusion ϕ est injective et surjective donc bijective.

Correction 31 de l'exercice 117
- f est injective :
$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Rightarrow x^2 - 1 = y^2 - 1 \\ &\Rightarrow x = \pm y \text{où } x, y \in [1, +\infty[\text{ donc } x, y \text{ sont de même signe} \\ &\Rightarrow x = y. \end{aligned}$$
- f est surjective : soit $y \in [0, +\infty[$. Nous cherchons un élément $x \in [1, +\infty[$ tel que $y = f(x) = x^2 - 1$. Le réel $x = \sqrt{y+1}$ convient !

Correction 32 de l'exercice 124

1. Soit z, z', z'' des complexes quelconques.
   - Reflexivité : $z\mathcal{R}z$ car $|z| = |z|$.
   - Symétrie : $z\mathcal{R}z' \Rightarrow z'\mathcal{R}z$ car $|z| = |z'|$ et donc $|z'| = |z|$.
   - Transitivité : $z\mathcal{R}z'$ et $z'\mathcal{R}z''$ alors $|z| = |z'| = |z''|$ donc $z\mathcal{R}z''$.

   En fait, nous avons juste retranscrit que l'égalité $=$ est une relation d'équivalence.
2. La classe d'équivalence d'un point $z \in \mathbb{C}$ est l'ensemble des complexes qui sont en relation avec z, *i.e.* l'ensemble des complexes dont le module est égal à $|z|$. Géométriquement la classe d'équivalence de z est le cerlce $\mathcal{C}$ de centre 0 et de rayon $|z|$.
$$\mathcal{C} = \{|z|e^{i\theta} \ / \ \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Correction 33 de l'exercice 125 Le raisonnement est faux.
L'erreur est due au manque de quantification. En effet, rien ne prouve que pout tout x un tel y existe. Il peut exister un élément x qui n'est en relation avec personne (même pas avec lui).

Correction 34 de l'exercice 137 L'astuce consiste à écrire $2 = 3 - 1$!
$$2^n = (3-1)^n = 3 \times p + (-1)^n$$
Où $3 \times p$ ($p \in \mathbb{Z}$)représente les n premiers termes de $\sum_{k=0}^{n} C_n^k 3^k (-1)^{n-k}$ et $(-1)^n$ est le dernier terme.
Donc $2^n - (-1)^n = 3p$.
Si n est impair l'égalité s'écrit $2^n + 1 = 3p$ et donc $2^n + 1$ est divisible par 3.
Si n est pair $2^n - 1 = 3p$ donc $2^n + 1 = 3p + 2$ qui n'est pas divisible par 3.

Pour l'autre assertion regarder $3 = 7 - 4$.

Correction 35 de l'exercice 140 Il s'agit de comparer les deux écritures de la fonction
$$f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$
Pour $x = 1$ et $x = -1$ nous obtenons respectivement les assertions (a) et (b). En dérivant la fonction f et en calculant $f'(1)$, nous obtenons (b). Pour (d) il faut dériver une nouvelle fois.

Correction 36 de l'exercice 141 L'application Φ est une bijection : son inverse est Φ elle-même.
Supposons que E soit un ensemble fini. Notre bijection Φ envoie un ensemble $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(E)$ sur un ensemble de même cardinal.
Choisissons E un ensemble à n éléments, et soit $p \leqslant n$. Soit $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(E)$:
$$\mathcal{Q} = \{F \subset E, \quad \operatorname{Card} F = p\}.$$
Nous savons que $\operatorname{Card} \mathcal{Q} = C_n^p$ (c'est la définition de C_n^p). De plus
$$\begin{aligned}\Phi(\mathcal{Q}) &= \{\Phi(F), \quad F \subset E, \quad \operatorname{Card} F = p\} \\ &= \left\{\complement F, \quad F \subset E, \quad \operatorname{Card} F = p\right\} \\ &= \{G \subset E, \quad \operatorname{Card} G = n - p\}.\end{aligned}$$
Donc $\operatorname{Card} \Phi(\mathcal{Q}) = C_n^{n-p}$. Et comme Φ est une bijection, $\operatorname{Card} \Phi(\mathcal{Q}) = \operatorname{Card}(\mathcal{Q})$, donc $C_n^{n-p} = C_n^p$.

Correction 37 de l'exercice 147

$$\begin{aligned} A\Delta B &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \\ &= (A \setminus A \cap B) \cup (B \setminus A \cap B). \end{aligned}$$

Les deux ensembles de la décomposition précédente sont disjoints donc :

$$\begin{aligned} \operatorname{Card} A\Delta B &= \operatorname{Card}(A \setminus A \cap B) + \operatorname{Card}(B \setminus A \cap B) \\ &= \operatorname{Card} A - \operatorname{Card}(A \cap B) + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card}(A \cap B) \\ &= \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - 2\operatorname{Card}(A \cap B). \end{aligned}$$

Correction 38 de l'exercice 148 Fixons un élément de A ; dans $E \setminus A$ (de cardinal $n-p$), nous pouvons choisir C_{n-p}^k ensembles à k éléments ($k = 0, 1, \dots, n$). Le nombre d'ensembles dans le complémentaire de A est donc

$$\sum_{k=0}^{n-p} C_{n-p}^k = 2^{n-p}.$$

Pour le choix d'un élément de A nous avons p choix, donc le nombre total d'ensembles qui vérifie la condition est :

$$p2^{n-p}.$$

Correction 39 de l'exercice 164 Raisonnons modulo 8 :

$$7 \equiv -1(\mod 8).$$

Donc

$$7^n + 1 \equiv (-1)^n + 1(\mod 8).$$

Le reste de la division euclidienne de $7^n + 1$ par 8 est donc $(-1)^n + 1$ donc Si n est impair alors $7^n + 1$ est divisible par 8. Et si n est pair $7^n + 1$ n'est pas divisible par 8.

Correction 40 de l'exercice 167 Il suffit de constater que pour 4 nombres consécutifs il y a nécessairement : un diviseur de 2, un diviseur de 3, un diviseur de 4 (tous distincts). Donc le produit de 4 nombres consécutifs est divisible par $2 \times 3 \times 4 = 24$.

Correction 41 de l'exercice 178 Soient a, b deux entiers de pgcd 18 et de somme 360. Soit a', b' tel que $a = 18a'$ et $b = 18b'$. Alors a' et b' sont premiers entre eux, et leur somme est $360/18 = 20$.
Nous pouvons facilement énumérer tous les couples d'entiers naturels (a', b') ($a' \leqslant b'$) qui vérifient cette condition, ce sont les couples :

$$(1, 20), (3, 17), (6, 14), (7, 13), (8, 12), (9, 11).$$

Pour obtenir les couples (a, b) recherchés ($a \leqslant b$), il suffit de multiplier les couples précédents par 18 :

$$(18, 360), (54, 306), (108, 252), (126, 234), (144, 216), (162, 198).$$

Correction 42 de l'exercice 191 Montrons plutôt la contraposée. Soit $p = ab$ un entier avec $a, b \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $2^p - 1$ n'est pas premier.
Nous savons que

$$x^b - 1 = (x - 1)(x^{b-1} + \cdots + x + 1),$$

pour $x = 2^a$ nous obtenons :

$$2^p - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1 = (2^a - 1)\left(2^{a(b-1)} + \cdots + 2^a + 1\right).$$

De plus $2^a - 1$ n'est ni 1 ni 2^{ab} donc nous avons décomposer $2^p - 1$ en produit d'entier différents de 1. Donc $2^p - 1$ n'est pas premier.
Par contraposition nous obtenons que si $2^p - 1$ est premier alors p est premier.

Correction 43 de l'exercice 192 Soit a et b des entiers premiers entre eux. Raisonnons par l'absurde et supposons que ab et $a+b$ ne sont pas premiers entre eux. Il existe alors δ un nombre premier divisant ab et $a+b$. L'entier δ ne peut diviser a et b car a et b sont premiers entre eux. Par exemple supposons que δ ne divise pas b cela implique que δ et b sont premiers entre eux. D'après le théorème de Gauss, comme δ divise ab et δ premier avec b alors δ divise a.
Maintenant δ divise a et divise $a+b$ alors δ divise $a+b-a=b$. δ est un facteur premier de a et de b ce qui est absurde.

Correction 44 de l'exercice 213

1. $A = 3X^5 + 4X^2 + 1$, $B = X^2 + 2X + 3$, le quotient de A par B est $3X^3 - 6X^2 + 3X + 16$ et le reste $-47 - 41X$.
2. $A = 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$, $B = X^3 + X + 2$ le quotient de A par B est $3X^2 + 2X - 3$ et le reste est $7 - 9X^2 - X$.
3. $A = X^4 - X^3 - X - 2$, $B = X^2 - 2X + 4$, le quotient de A par B est $X^2 + X - 2$ de reste $6 - 9X$.

Correction 45 de l'exercice 215 $X^4 + X^3 - 2X + 1 = (X^2 + X + 1)(2X^2 - 3X + 1) + X^3(2 - X)$.

Correction 46 de l'exercice 219 Soient $A = X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9$, $B = X^2 - 5X + 4$, le quotient de A par B est $X^3 - 2\,X^2 - 14\,X - 63$, le reste étant $261 - 268\,X$.

Correction 47 de l'exercice 223

1. $\mathrm{pgcd}(X^3 - X^2 - X - 2, X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2) = X - 2$.
2. $\mathrm{pgcd}(X^4 + X^3 - 2X + 1, X^3 + X + 1) = 1$.

Correction 48 de l'exercice 224

1. $\mathrm{pgcd}(X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1, X^4 + 2X^3 + X + 2) = X^3 + 1$.
2. $\mathrm{pgcd}(X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1, X^3 + X^2 - X - 1) = X + 1$
3. $\mathrm{pgcd}(X^5 + 5X^4 + 9X^3 + 7X^2 + 5X + 1, X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1) = 1$.

Correction 49 de l'exercice 244

1. $X^6 + 1 = -\left(X^2 + 1\right)\left(X^2 + X\sqrt{3} + 1\right)\left(-X^2 + X\sqrt{3} - 1\right)$.
2. $X^9 + X^6 + X^3 + 1 = -\left(X^2 + 1\right)\left(X^2 - X + 1\right)\left(X^2 + X\sqrt{3} + 1\right)\left(-X^2 + X\sqrt{3} - 1\right)(X + 1)$.

51 ANALYSE 1

Correction 50 de l'exercice 261

1. Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$. Par l'absurde supposons que $r + x \in \mathbb{Q}$ alors il existe deux entiers p', q' tels que $r + x = \frac{p'}{q'}$. Donc $x = \frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} = \frac{qp'-pq'}{qq'} \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde car $x \notin \mathbb{Q}$.
   De la même façon si $rx \in \mathbb{Q}$ alors $rx = \frac{p'}{q'}$ Et donc $x = \frac{p'}{q'}\frac{q}{p}$. Ce qui est absurde.
2. Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ alors il existe deux entiers p, q tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. De plus nous pouvons supposer que la fraction est irréductible (p et q sont premiers entre eux). En élevant l'égalité au carré nous obtenons $q^2 \times 2 = p^2$. Donc p^2 est un nombre pair, cela implique que p est un nombre pair (si vous n'êtes pas convaincu écrivez la contraposée "p impair $\Rightarrow p^2$ impair"). Donc $p = 2 \times p'$ avec $p' \in \mathbb{N}$, d'où $p^2 = 4 \times p'^2$. Nous obtenons $q^2 = 2 \times p'^2$. Nous en déduisons maintenant que q^2 est pair et comme ci-dessus que q est pair. Nous obtenons ainsi une contradiction car p et q étant tous les deux pairs la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible et aurait pu être simplifier. Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
3. Soient r, r' deux rationnels avec $r < r'$. Notons $a = \sqrt{2}(r' - r)$. Choisissons $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > \sqrt{2}$. Et posons
   $$x = r + \frac{a}{n}.$$
   D'une part $x \in]r, r'[$ et d'après les deux premières questions $\sqrt{2}\left(\frac{r'-r}{n}\right) \notin \mathbb{Q}$. Et donc x est un nombre irrationnel compris entre r et r'.

Correction 51 de l'exercice 263

1. Soit $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$ avec $\alpha \wedge \beta = 1$. Pour $p(\frac{\alpha}{\beta}) = 0$, alors $\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^i = 0$. Après multiplication par β^n nous obtenons l'égalité suivante :
   $$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1}\beta + \cdots + a_1\alpha\beta^{n-1} + a_0\beta^n.$$
   En factorisant les derniers termes de cette somme par β, nous écrivons $a_n\alpha^n + \beta q = 0$. Ceci entraîne que β divise $a_n\alpha^n$, mais comme β et α^n sont premier entre eux (car $\alpha \wedge \beta = 1$) alors par le théorème de Gauss β divise a_n. De même en factorisant les premiers termes de la somme ci-dessus par α nous obtenons $\alpha q' + a_0\beta^n = 0$ et par un raisonnement similaire α divise a_0.
2. Notons $\gamma = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Alors $\gamma^2 = 5 + 2\sqrt{2}\sqrt{3}$ Et donc $\left(\gamma^2 - 5\right)^2 = 4 \times 2 \times 3$, Nous choisissons $p(x) = (x^2 - 5)^5 - 24$, qui s'écrit aussi $p(x) = x^4 - 10x^2 + 1$. Vu notre choix de p, nous avons $p(\gamma) = 0$. Si nous supposons que γ est rationnel, alors $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$ et d'après la première question α divise le terme constant de p, c'est-à-dire 1. Donc $\alpha = \pm 1$. De même β divise le coefficient du terme de plus au degré de p, donc β divise 1, soit $\beta = 1$. Ainsi $\gamma = \pm 1$, ce qui est évidemment absurde !

Correction 52 de l'exercice 265

1. Soit $p = 2001\,2001 \ldots 2001$ et $q = 10000\,0000 \ldots 0000 = 10^{4n}$. Alors $N_n = \frac{p}{q}$.
2. Remarquons que $10\,000 \times M = 2001, 2001\,2001 \ldots$ Alors $10\,000 \times M - M = 2001$; donc $9999 \times M = 2001$ d'où $M = \frac{2001}{9999}$.
3. $0,111 \ldots = \frac{1}{9}$, $0,222 \ldots = \frac{2}{9}$, etc. D'où $P = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \cdots + \frac{9}{9} = \frac{1+2+\cdots+9}{9} = \frac{45}{9} = 5$.

Correction 53 de l'exercice 270 Explicitons la formule pour $\max(x, y)$. Si $x \geqslant y$, alors $|x-y| = x-y$ donc $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y+x-y) = x$. De même si $x \leqslant y$, alors $|x-y| = -x+y$ donc $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y-x+y) = y$.
Pour 3 élément, nous avons $\max(x, y, z) = \max\big(\max(x, y), z\big)$, donc d'après les formules pour 2 éléments :

$$\begin{aligned}\max(x, y, z) &= \frac{\max(x, y) + z + |\max(x, y) - z|}{2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) + z + \left|\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) - z\right|}{2}.\end{aligned}$$

Correction 54 de l'exercice 272

1. $[0,1] \cap \mathbb{Q}$. Les majorants : $[1, +\infty[$. Les minorants : $]-\infty, 0]$. La borne supérieure : 1. La borne inférieure : 0. Le plus grand élément : 1. Le plus petit élément 0.
2. $]0,1[\cap \mathbb{Q}$. Les majorants : $[1, +\infty[$. Les minorants : $]-\infty, 0]$. La borne supérieure : 1. La borne inférieure : 0. Il nexiste pas de plus grand élément ni de plus petit élément.
3. $\mathbb{N}$. Pas de majorants, pas de borne supérieure, ni de plus grand élément. Les minorants : $]-\infty, 0]$. La borne inférieure : 0. Le plus petit élément : 0.
4. $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Les majorants : $[\frac{5}{4}, +\infty[$. Les minorants : $]-\infty, -1]$. La borne supérieure : $\frac{5}{4}$. La borne inférieure : -1. Le plus grand élément : $\frac{5}{4}$. Pas de plus petit élément.

Correction 55 de l'exercice 274

1. Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. On sait que $\mathrm{Sup}\, A$ est un majorant de A, c'est à dire, $\forall a \in A,\ a \leqslant \mathrm{Sup}\, A$. De même, $\forall b \in B,\ b \leqslant \mathrm{Sup}\, B$. On veut montrer que $\mathrm{Sup}\, A + \mathrm{Sup}\, B$ est un majorant de $A+B$. Soit donc $x \in A+B$. Cela signifie que x est de la forme $a+b$ pour un $a \in A$ et un $b \in B$. Or $a \leqslant \mathrm{Sup}\, A$, et $b \leqslant \mathrm{Sup}\, B$, donc $x = a+b \leqslant \mathrm{Sup}\, A + \mathrm{Sup}\, B$. Comme ce raisonnement est valide pour tout $x \in A+B$ cela signifie que $\mathrm{Sup}\, A + \mathrm{Sup}\, B$ est un majorant de $A+B$.
2. On veut montrer que, quel que soit $\varepsilon > 0$, $\mathrm{Sup}\, A + \mathrm{Sup}\, B - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $A+B$. On prend donc un $\varepsilon > 0$ quelconque, et on veut montrer que $\mathrm{Sup}\, A + \mathrm{Sup}\, B - \varepsilon$ ne majore pas $A+B$. On s'interdit donc dans la suite de modifier ε. Comme $\mathrm{Sup}\, A$ est le plus petit des majorants de A, $\mathrm{Sup}\, A - \varepsilon/2$ n'est pas un majorant de A. Cela signifie qu'il existe un élément a de A tel que $a > \mathrm{Sup}\, A - \varepsilon/2$. *Attention : $\mathrm{Sup}\, A - \varepsilon$ n'est pas forcément dans A. $\mathrm{Sup}\, A$ non plus. Et il n'est pas non plus vrai que $\forall a \in A\ a > \mathrm{Sup}\, A - \varepsilon/2$. On ne choisit donc pas ce a.* De la même manière, il existe $b \in B$ tel que $b > \mathrm{Sup}\, B - \varepsilon/2$. Or l'élément x défini par $x = a+b$ est un élément de $A+B$, et il vérifie $x > (\mathrm{Sup}\, A - \varepsilon/2) + (\mathrm{Sup}\, B - \varepsilon/2) = \mathrm{Sup}\, A + \mathrm{Sup}\, B - \varepsilon$. Ceci implique que $\mathrm{Sup}\, A + \mathrm{Sup}\, B - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $A+B$.
3. $\mathrm{Sup}\, A + \mathrm{Sup}\, B$ est un majorant de $A+B$ d'après la partie 1. Mais, d'après la partie 2., dès qu'on prend un $\varepsilon > 0$, $\mathrm{Sup} A + \mathrm{Sup} B - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $A+B$. Donc $\mathrm{Sup} A + \mathrm{Sup} B$ est bien le plus petit des majorants de $A+B$, i.e. $\mathrm{Sup}\,(A+B) = \mathrm{Sup}\, A + \mathrm{Sup}\, B$.

Correction 56 de l'exercice 275

1. Vrai.
2. Vrai.
3. Vrai.

4. Faux. L'égalité peut ne pas être stricte.
5. Vrai.
6. Vrai.

Correction 57 de l'exercice 285

$$\begin{aligned}&\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant 2\sqrt{a+b}\\ &\Leftrightarrow (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\leqslant 2(a+b)\end{aligned}$$

car les termes sont positifs, et la fonction $x\mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow a+b+2\sqrt{a}\sqrt{b}\leqslant 2(a+b)\\ &\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{a}\sqrt{b}\geqslant 0\\ &\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 2.\end{aligned}$$

La denière proposition est toujours vraie, et donc par équivalence, nous obtenons l'inégalité recherchée.

Correction 58 de l'exercice 290

1. Calculons d'abord $f(0)$. $f(1)=f(1+0)=f(1)+f(0)$ Donc $f(0)=0$. Montrons le résultat demandé par récurrence : pour $n=1$, nous avons bien $f(1)=1\times f(1)$. Si $f(n)=nf(1)$ alors $f(n+1)=f(n)+f(1)=nf(1)+f(1)=(n+1)f(1)$.
2. $0=f(0)=f(-1+1)=f(-1)+f(1)$. Donc $f(-1)=-f(1)$. Puis comme ci-dessus $f(-n)=nf(-1)=-nf(1)$.
3. Soit $q=\frac{a}{b}$. Alors $f(a)=f(\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\cdots\frac{a}{b})=f(\frac{a}{b})+\cdots+f(\frac{a}{b})$ (b termes dans cette somme). Donc $f(a)=bf(\frac{a}{b})$. Soit $af(1)=bf(\frac{a}{b})$. Ce qui s'écrit aussi $f(\frac{a}{b})=\frac{a}{b}f(1)$.
4. Soit $x\in\mathbb{R}$ Soit (α_i) une suite croissante de rationnels qui tend vers x. Soit (β_i) une suite décroissante de rationnels qui tend vers x :

$$\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\alpha_3\leqslant\ldots\leqslant x\leqslant\cdots\leqslant\beta_2\leqslant\beta_1.$$

Alors comme $\alpha_i\leqslant x\leqslant\beta_i$ et que f est croissante nous avons $f(\alpha_i)\leqslant f(x)\leqslant f(\beta_i)$. D'après la question précédent cette inéquation devient : $\alpha_i f(1)\leqslant f(x)\leqslant\beta_i f(1)$. Comme (α_i) et (β_i) tendent vers x. Par le théorème des "gendarmes" nous obtenons en passant à la limite : $xf(1)\leqslant f(x)\leqslant xf(1)$. Soit $f(x)=xf(1)$.

Correction 59 de l'exercice 297

1. Vraie. Toute sous-suite d'une suite convergente est convergente et admet la même limite.
2. Faux. Un contre-exemple est la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n=(-1)^n$. Alors $(u_{2n})_n$ est la suite constante (donc convergente) de valeur 1, et $(u_{2n+1})_n$ est constante de valeur -1. Cependant la suite $(u_n)_n$ n'est pas convergente.
3. Vraie. La convergence de la suite $(u_n)_n$ vers ℓ, que nous souhaitons démontrer, s'écrit :

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists N\in\mathbb{N}\quad\text{tel que}\quad(n\geqslant N\Rightarrow|u_n-\ell|<\varepsilon.$$

Fixons $\varepsilon>0$. Comme, par hypothèse, la suite $(u_{2p})_p$ converge vers ℓ alors il existe N_1 tel

$$2p\geqslant N_1\Rightarrow|u_{2p}-\ell|<\varepsilon.$$

Et de même, pour la suite $(u_{2p+1})_p$ il existe N_2 tel que

$$2p+1 \geqslant N_1 \Rightarrow |u_{2p+1} - \ell| < \varepsilon.$$

Soit $N = \max(N_1, N_2)$, alors

$$n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Ce qui prouve la convergence de $(u_n)_n$ vers ℓ.

Correction 60 de l'exercice 298 Soit (u_n) une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. Par définition

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geqslant N \quad |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Choisissons $\varepsilon = 1$, nous obtenons le N correspondant. Alors pour $n \geqslant N$, nous avons $|u_n - \ell| < 1$, soit $\ell - 1 < u_n < \ell + 1$. Notons $M = \max_{n=1,\dots,N}\{u_n\}$ et puis $M' = \max(M, \ell+1)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \leqslant M'$. De même en posant $m = \min_{n=1,\dots,N}\{u_n\}$ et $m' = \min(m, \ell - 1)$ nous obtenons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m'$.

Correction 61 de l'exercice 299 Beaucoup d'entre vous ont compris que u_n n'avait pas de limite, mais peu sont arrivé à en donner une démonstration formelle. En effet, dès lors qu'on ne sait pas qu'une suite (u_n) converge, on ne peut pas écrire $\lim u_n$, c'est un nombre qui n'est pas défini. Par exemple l'égalité

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n + 1/n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n$$

n'a pas de sens. Par contre voilà ce qu'on peut dire : *Comme la suite $1/n$ tend vers 0 quand $n \to \infty$, la suite u_n est convergente si et seulement si la suite $(-1)^n$ l'est. De plus, dans le cas où elles sont toutes les deux convergentes, elles ont même limite.* Cette affirmation provient tout simplement du théorème suivant

Théorème : Soient u_n et v_n deux suites convergeant vers deux limites l et l'. Alors la suite $w_n = u_n + v_n$ est convergente (on peut donc parler de sa limite) et $\lim w_n = l + l'$.

De plus, il n'est pas vrai que toute suite convergente doitforcément être croissante et majorée ou décroissante et minorée. Par exemple, $(-1)^n/n$ est une suite qui converge vers 0 mais qui n'est ni croissante, ni décroissante. A ce propos d'ailleurs, on ne dit pas d'une suite qu'elle est *croissante pour n pair et décroissante pour n impair* même si je comprends ce que cela signifie. On dit qu'une telle suite n'est ni croissante ni décroissante (et c'est tout).

Voici maintenant un exemple de rédaction de l'exercice. On veut montrer que la suite u_n n'est pas convergente. Supposons donc par l'absurde qu'elle soit convergente et notons $l = \lim_{n\to\infty} u_n$. (Cette expression a un sens puisqu'on suppose que u_n converge).

Rappel 1. Une *sous-suite* de u_n (on dit aussi *suite extraite* de u_n) est une suite v_n de la forme $v_n = u_{\phi(n)}$ où ϕ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Cette fonction ϕ correspond "au choix des indices qu'on veut garder" dans notre sous-suite. Par exemple, si on ne veut garder dans la suite u_n que les termes pour lesquels n est un multiple de trois, on pourra poser $\phi(n) = 3n$, c'est à dire $v_n = u_{3n}$.

Considérons maintenant les sous-suites $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ de (u_n). On a que $v_n = 1 + 1/2n \to 1$ et que $w_n = -1 + 1/(2n+1) \to -1$. Or on a le théorème suivant sur les sous-suites d'une suite convergente :

Théorème : Soit u_n une suite convergeant vers la limite l (le théorème est encore vrai si $l = +\infty$ ou $l = -\infty$). Alors, toute sous suite v_n de u_n a pour limite l.

Par conséquent, ici, on a que $\lim v_n = l$ et $\lim w_n = l$ donc $l = 1$ et $l = -1$ ce qui est une contradiction. L'hypothèse disant que (u_n) était convergente est donc fausse. Donc u_n ne converge pas.

Montrons que u_n est bornée. On a que

$$-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$$

$$0 \leqslant 1/n \leqslant 1$$

donc

$$-1 \leqslant u_n \leqslant 2$$

donc u_n est bornée.

Rappel 2. Le théorème de Bolzano-Weïerstrass dit ceci : Soit (u_n) une suite de réels bornée. Alors, il existe une sous-suite de (u_n) qui est convergente. (C'est un théorème très puissant).
Ici, on nous demande d'exhiber une sous-suite de u_n qui soit convergente. Mais on a déjà vu que $v_n = u_{2n} \to 1$. $v_n = u_{2n}$ est donc une suite extraite convergente.
Remarque : Il y a d'autres sous-suites convergentes : (u_{4n}) (u_{2^n}), $(u_{n!})$ et (u_{3^n}) sont des sous-suites convergentes de u_n.

Correction 62 de l'exercice 302

1. Suite non convergente car non bornée.
2. Suite convergente vers 0.
3. Suite non convergente car la sous-suite $u_{2p} = 1 + \frac{1}{2p}$ est toujours plus grande que 1. Alors que la sous-suite $u_{2p+1} = -1 + \frac{1}{2p+1}$ est toujours plus petite que 0.

Correction 63 de l'exercice 303 Soit $(u_n)_n$ une suite d'entiers qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.
Dans l'intervalle $I =]\ell - \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}[$ de longueur 1, il existe au plus un élément de $\mathbb{N}$. Donc $I \cap \mathbb{N}$ est soit vide soit un singleton $\{a\}$.
La convergence de $(u_n)_n$ s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad (n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Fixons $\varepsilon = \frac{1}{2}$, nous obtenons le N correspondant. Et pour $n \geqslant N$, $u_n \in I$. Mais de plus u_n est un entier, donc

$$n \geqslant N \Rightarrow u_n \in I \cap \mathbb{N}.$$

En conséquent, $I \cap \mathbb{N}$ n'est pas vide (par exemple u_N en est un élément) donc $I \cap \mathbb{N} = \{a\}$. L'implication précédente s'écrit maintenant :

$$n \geqslant N \Rightarrow u_n = a.$$

Donc la suite $(u_n)_n$ est stationnaire (au moins) à partir de N. En prime, elle est bien évidemment convergente vers $\ell = a \in \mathbb{N}$.

Correction 64 de l'exercice 304

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[n, n+1]$ donc

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{n}$$

(C'est un encadrement de l'aire de l'ensemble des points (x,y) du plan tels que $x \in [n,n+1]$ et $0 \leqslant y \leqslant 1/x$ par l'aire de deux rectangles.) Nous obtenons l'inégalité :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}.$$

2. $H_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{2} + 1$, nous majorons chaque terme de cette somme en utilisant l'inégalité $\frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$ obtenue précédemment : nous obtenons $H_n \leqslant \ln(n) - \ln(n-1) + \ln(n-1) - \ln(n-2) + \cdots + \ln 2 - \ln 1 + 1$. Cette somme est télescopique (la plupart des termes s'éliminent et en plus $\ln 1 = 0$) et donne $H_n \leqslant \ln n + 1$.
   L'autre inégalité s'obtient de la façon similaire en utilisant l'inégalité $\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$.
3. Comme $H_n \geqslant \ln(n+1)$ et que $\ln(n+1) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$ alors $H_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.
4. $u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$. En étudiant la fonction $x \mapsto x + \ln(1-x)$ pour $x \in]0,1[$ nous obtenons que $f(x) \leqslant 0$. Donc $u_{n+1} - u_n = f(\frac{1}{n+1}) \leqslant 0$. Donc $u_{n+1} \leqslant u_n$ et la suite (u_n) est décroissante.
   Enfin comme $H_n \geqslant \ln(n+1)$ alors $H_n \geqslant \ln n$ et donc $u_n \geqslant 0$.
5. La suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0) donc elle converge vers un réel γ. Ce réel γ est la constante d'Euler (Leonhard Euler, 1707-1783, mathématicien d'origine suisse). Cette constante vaut environ $0,5772156649\ldots$ mais on ne sait pas si γ est rationnel ou irrationnel.

Correction 65 de l'exercice 316

1. La fonction polynomiale $P(x) := x^3 - 3x + 1$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $P'(x) = 3x^2 - 3$, qui est strictement négative sur $]-1,+1[$. Par conséquent P est strictement décroissante sur $]-1,+1[$. Comme $P(0) = 1 > 0$ et $P(1/2) = -3/8 < 0$ il en résulte grâce au théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe un réel unique $\alpha \in]0,1/2[$ tel que $P(\alpha) = 0$.
2. Comme $f(x) - x = (x^3 - 3x + 1)/9$ il en résulte que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans $]0,1/2[$.
3. Comme $f'(x) = (x^2+2)/3 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $f(0) = 1/9$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, on en déduit que $f(\mathbb{R}^+) = [1/9,+\infty[$. Comme $x_1 = f(x_0) = 1/9 > 0 = x_0$, et que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit par récurrence que $x_{n+1} > x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui prouve que la suite (x_n) est croissante.
4. Un calcul simple montre que $f(1/2) < 1/2$. Comme $0 = x_0 < 1/2$ et que f est croissante on en déduit par récurrence que $x_n < 1/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. D'après les questions précédentes, la suite (x_n) est croissante et majorée elle converge donc vers un nombre réel $l \in]0,1/2]$. De plus comme $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit par continuité de f que $\ell = f(\ell)$. Comme $f(1/2) < 1/2$, On en déduit que $\ell \in]0,1/2[$ et vérifie l'équation $f(\ell) = \ell$. D'après la question 2, on en déduit que $\ell = \alpha$ et donc (x_n) converge vers α.

Correction 66 de l'exercice 322

1.
$$\begin{aligned}
u_{n+1}^2 - a &= \frac{1}{4}\left(\frac{u_n^2+a}{u_n}\right)^2 - a \\
&= \frac{1}{4u_n^2}(u_n^4 - 2au_n^2 + a^2) \\
&= \frac{1}{4}\frac{(u_n^2-a)^2}{u_n^2}
\end{aligned}$$

2. Il est clair que pour $n \geqslant 0$ on a $u_n \geqslant 0$. D'après l'égalité précédente pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1}^2 - a$ et comme u_{n+1} est positif alors $u_{n+1} \geqslant \sqrt{a}$.

   Soit $n \geqslant 1$. Calculons le quotient de u_{n+1} par u_n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{u_n^2}\right)$ or $\frac{a}{u_n^2} \leqslant 1$ car $u_n \geqslant \sqrt{a}$. Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ et donc $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est donc décroissante.
3. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$ donc elle converge vers une limite $\ell > 0$. D'après la relation
$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$
   quand $n \to +\infty$ alors $u_n \to \ell$ et $u_{n+1} \to \ell$. À la limite nous obtenons la relation
$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right).$$
   La seule solution positive est $\ell = \sqrt{a}$. Conclusion (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.
4. La relation
$$u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2-a)^2}{4u_n^2}$$
   s'écrit aussi
$$(u_{n+1}-a)(u_{n+1}+a) = \frac{(u_n-a)^2(u_n+a)^2}{4u_n^2}.$$
   Donc
$$\begin{aligned}
u_{n+1} - a &= (u_n-a)^2 \frac{1}{4(u_{n+1}+\sqrt{a})}\left(\frac{u_n+\sqrt{a}}{u_n}\right)^2 \\
&\leqslant (u_n-a)^2 \frac{1}{4(2\sqrt{a})}\left(1+\frac{\sqrt{a}}{u_n}\right)^2 \\
&\leqslant (u_n-a)^2 \frac{1}{2\sqrt{a}}
\end{aligned}$$

5. Par récurrence pour $n = 1$, $u_1 - \sqrt{a} \leqslant 1$. Si la proposition est vraie rang n, alors
$$\begin{aligned}
u_{n+1} - a &\leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}(u_n-a)^2 \\
&\leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}(2\sqrt{a})^2\left(\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}\right)^2 \\
&\leqslant 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n}
\end{aligned}$$

6. Soit $u_0 = 3$, alors $u_1 = \frac{1}{2}(3 + \frac{10}{3}) = 3,166\ldots$. Comme $3 \leqslant \sqrt{10} \leqslant u_1$ donc $u_1 - \sqrt{10} \leqslant 0.166\ldots$. Nous pouvons choisir $k = 0,17$. Pour que l'erreur $u_n - \sqrt{a}$ soit inférieure à 10^{-8} il suffit de calculer le terme u_4 car alors l'erreur (calculée par la formule de la question précédente) est inférieure à $1,53 \times 10^{-10}$. Nous obtenons $u_4 = 3,16227766\ldots$

Correction 67 de l'exercice 324

1. Si $u_0 \leqslant u_1$ alors comme f est croissante $f(u_0) \leqslant f(u_1)$ donc $u_1 \leqslant u_2$, ensuite $f(u_1) \leqslant f(u_2)$ soit $u_2 \leqslant u_3$... Par récurrence on montre que (u_n) est décroissante. Comme elle est minorée par a alors elle converge. Si $u_0 \leqslant u_1$ alors la suite (u_n) est croissante et majorée par b donc converge.

   Notons ℓ la limite de $(u_n)_n$. Comme f est continue alors $(f(u_n))$ tend vers $f(\ell)$. De plus la limite de $(u_{n+1})_n$ est aussi ℓ. En passant à la limite dans l'expression $u_{n+1} = f(u_n)$ nous obtenons l'égalité $\ell = f(\ell)$.

2. La fonction f est continue et dérivable sur l'intervalle $[0,4]$ et $f([0,4]) \subset [0,4]$. La fonction f est croissante (calculez sa dérivée). Comme $u_0 = 4$ et $u_1 = 3$ alors (u_n) est décroissante. Calculons la valeur de sa limite ℓ. ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$ soit $4x+5 = x(x+3)$. Comme $u_n \geqslant 0$ pour tout n alors $\ell \geqslant 0$. La seule solution positive de $4x+5 = x(x+3)$ est $\ell = \frac{1+\sqrt{21}}{2} = 2,7912\ldots$

3. Si f est décroissante alors $f \circ f$ est croissante (car $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y) \Rightarrow f \circ f(x) \leqslant \circ f \circ f(y)$). Nous appliquons la première question avec la fonction $f \circ f$. La suite $(u_0, u_2 = f \circ f(u_0), u_4 = f \circ f(u_2), \ldots)$ est monotone et convergente. De même pour la suite $(u_1, u_3 = f \circ f(u_1), u_5 = f \circ f(u_3), \ldots)$.

4. La fonction $f(x) = (1-x)^2$ est continue et dérivable de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Elle est décroissante sur cette intervalle. Nous avons $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_1 = \frac{1}{4}$, $u_2 = \frac{9}{16}$, $u_3 = 0,19\ldots$,... Donc la suite (u_{2n}) est croissante, nous savons qu'elle converge et notons ℓ_p sa limite. La suite (u_{2n+1}) et décroissante, notons ℓ_i sa limite. Les limites ℓ_p et ℓ_i sont des solutions de l'équation $f \circ f(x) = x$. Cette équation s'écrit $(1-f(x))^2 = x$, ou encore $(1-(1-x)^2)^2 = x$ soit $x^2(2-x)^2 = x$. Il y a deux solutions évidentes 0 et 1. Nous factorisons le polynôme $x^2(2-x)^2 - x$ en $x(x-1)(x-\lambda)(x-\mu)$ avec λ et μ les solutions de l'équation $x^2 - 3x + 1$: $\lambda = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0,3819\ldots$ et $\mu = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$. Les solutions de l'équation $f \circ f(x) = x$ sont donc $\{0, 1, \lambda, \mu\}$. Comme (u_{2n}) est croissante et que $u_0 = \frac{1}{2}$ alors (u_{2n}) converge vers $\ell_p = 1$ qui est le seule point fixe de $[0,1]$ supérieur à $\frac{1}{2}$. Comme (u_{2n+1}) est décroissante et que $u_1 = \frac{1}{4}$ alors (u_{2n+1}) converge vers $\ell_i = 0$ qui est le seule point fixe de $[0,1]$ inférieur à $\frac{1}{4}$.

Correction 68 de l'exercice 325

1. Soient $a, b > 0$. On veut démontrer que $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$. Comme les deux membres de cette inégalité sont positifs, cette inégalité est équivalente à $ab \leqslant (\frac{a+b}{2})^2$. De plus,

$$ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4ab \leqslant a^2 + 2ab + b$$

$$\Leftrightarrow 0 \leqslant a^2 - 2ab + b^2$$

   ce qui est toujours vrai car $a^2 - 2ab + b^2$ est un carré parfait. On a donc bien l'inégalité voulue.

2. Quitte à échanger a et b (ce qui ne change pas les moyennes arithmétique et géométrique, et qui préserve le fait d'être compris entre a et b), on peut supposer que $a \leqslant b$. Alors en ajoutant les deux inégalités

$$a/2 \leqslant a/2 \leqslant b/2$$

$$a/2 \leqslant b/2 \leqslant b/2,$$

on obtient

$$a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b.$$

De même, comme tout est positif, en multipliant les deux inégalités

$$\sqrt{a} \leqslant \sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b} \leqslant \sqrt{b}$$

on obtient

$$a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b.$$

3. Il faut avant tout remarquer que $\forall n$, u_n et v_n sont strictement positifs, ce qui permet de dire que les deux suites sont bien définies. On le démontre par récurrence : c'est clair pour u_0 et v_0, et si u_n et v_n sont strictement positifs alors leurs moyennes géométrique (u_{n+1}) et arithmétique (v_{n+1}) sont strictement positives.
   (a) On veut montrer que $\forall n \ u_n \leqslant v_n$. L'inégalité est claire pour $n = 0$ grâce aux hypothèses faites sur u_0 et v_0. Si maintenant n est plus grand que 1, u_n est la moyenne géométrique de u_{n-1} et v_{n-1} et v_n est la moyenne arithmétique de u_{n-1} et v_{n-1}, donc, par 1., $u_n \leqslant v_n$.
   (b) On sait d'après 2. que $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_n$. En particulier, $u_n \leqslant u_{n+1}$ i.e. (u_n) est croissante. De même, d'après 2., $u_n \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$. En particulier, $v_{n+1} \leqslant v_n$ i.e. (v_n) est décroissante.
   (c) Pour tout n, on a $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. (u_n) est donc croissante et majorée, donc converge vers une limite l. Et (v_n) est décroissante et minorée et donc converge vers une limite l'. De plus comme $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et puisque $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$, l et l' doivent vérifier

$$l = \sqrt{ll'} \text{ et } l' = \frac{l+l'}{2}$$

   d'où $l = l'$.

Il y a une autre méthode un peu plus longue mais toute aussi valable.
Définition Deux suites u_n et v_n sont dites *adjacentes* si

1. $u_n \leqslant v_n$,
2. u_n est croissante et v_n est décroissante,
3. $\lim(u_n - v_n) = 0$.

Alors, on a le théorème suivant :
Théorème : Si u_n et v_n sont deux suites adjacentes, elles sont toutes les deux convergentes et ont la même limite.
Pour appliquer ce théorème, vu qu'on sait déjà que u_n et v_n vérifient les points 1 et 2 de la définition, il suffit de démontrer que $\lim(u_n - v_n) = 0$. On a d'abord que $v_n - u_n \geqslant 0$. Or, d'après (a)

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant v_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2}.$$

Donc, si on note $w_n = v_n - u_n$, on a que $0 \leqslant w_{n+1} \leqslant w_n/2$. Donc, on peut démontrer (par récurrence) que $0 \leqslant w_n \leqslant \frac{w_0}{2^n}$, ce qui implique que $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$. Donc $v_n - u_n$ tend vers 0, et ceci termine de démontrer que les deux suites u_n et v_n sont convergentes et ont même limite en utilisant le théorème sur les suites adjacentes.

Correction 69 de l'exercice 327 Notons $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} x^k \quad - 1.$$

1. La fonction f_n est continue sur $[0,1]$. De plus $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = n - 1 \geqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f_n, admet un zéro dans l'intervalle $[0,1]$. De plus elle strictement croissante (calculez sa dérivée) sur $[0,1]$ donc ce zéro est unique.
2. Calculons $f_n(a_{n-1})$.

$$\begin{aligned} f_n(a_{n-1}) &= \sum_{i=1}^{n} a_{n-1}^k - 1 \\ &= a_{n-1}^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-1}^k - 1 \\ &= a_{n-1}^n + f_{n-1}(a_{n-1}) \\ &= a_{n-1}^n \quad (\text{car } f_{n-1}(a_{n-1}) = 0 \text{ par définition de } a_{n-1}). \end{aligned}$$

Nous obtenons l'inégalité

$$0 = f_n(a_n) < f_n(a_{n-1}) = a_{n-1}^n.$$

Or f_n est strictement croissante, l'inégalité ci-dessus implique donc

$$a_n < a_{n-1}.$$

Nous venons de démontrer que la suite $(a_n)_n$ est décroissante.
Remarquons avant d'aller plus loin que $f_n(x)$ est la somme d'une suite géométrique :

$$f_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - 2.$$

Évaluons maintenant $f_n(\frac{1}{2})$, à l'aide de l'expression précédente

$$f_n(\frac{1}{2}) = \frac{1 - \frac{1}{2}^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - 2 = -\frac{1}{2^n} < 0.$$

Donc $f_n(\frac{1}{2}) < f_n(a_n) = 0$ entraîne $\frac{1}{2} < a_n$.
Pour résumé, nous avons montrer que la suite $(a_n)_n$ est Strictement décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$.
3. Comme $(a_n)_n$ est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$ alors elle converge, nous notons ℓ sa limite :

$$\frac{1}{2} \leqslant \ell < a_n.$$

Appliquons f_n (qui est strictement croissante) à cette inégalité :

$$f_n(\frac{1}{2}) \leqslant f_n(\ell) < f_n(a_n),$$

qui s'écrit aussi :

$$-\frac{1}{2^n} \leqslant f(\ell) < 0,$$

et ceci quelque soit $n \geqslant 1$. La suite $(f_n(\ell))_n$ converge donc vers 0 (théorème des «gendarmes»). Mais nous savons aussi que

$$f_n(\ell) = \frac{1-\ell^{n+1}}{1-\ell} - 2;$$

donc $(f_n(\ell))_n$ converge vers $\frac{1}{1-\ell} - 2$ car $(\ell^n)_n$ converge vers 0. Donc

$$\frac{1}{1-\ell} - 2 = 0, \text{ d'où } \ell = \frac{1}{2}.$$

Correction 70 de l'exercice 379 Réponse : $\frac{2}{3}$

Correction 71 de l'exercice 380 Réponses : $\frac{1}{e}, 0, e$.

Correction 72 de l'exercice 381 Réponse : 1.

Correction 73 de l'exercice 382 Réponse : $\sup(a, b)$.

Correction 74 de l'exercice 383 Réponse : $\sqrt{ab}$.

Correction 75 de l'exercice 384

1. On a pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ $|x-y| \geqslant |\,|x|-|y|\,|$ (c'est la deuxième formulation de l'inégalité triangulaire). Donc pour tout $x \in I$:$|\,|f(x)|-|f(a)|\,| \leqslant |f(x)-f(a)|$. L'implication annoncée résulte alors immédiatement de la définition de l'assertion $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
2. Si f, g sont continues alors $\alpha f + \beta g$ est continue sur I, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Donc les fonctions $f+g$ et $f-g$ sont continues sur I. L'implication de 1. prouve alors que $|f-g|$ est continue sur I, et finalement en réutilisant l'argument donné ci dessus, on peut conclure : La fonction $\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$ est continue sur I.

Correction 76 de l'exercice 414

1. Pour tout $x \in]a, b[$, on a $x \in [a, b]$ donc $f(x) \leqslant \sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$. Par conséquent $\sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$ est un majorant de f sur l'intervalle $]a, b[$, donc il est plus grand que le plus petit des majorants : $\sup_{a<x<b} f(x) \leqslant \sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$.
2. f est continue sur un intervalle fermé et borné, donc elle est bornée et elle atteint ses bornes. Soit x_0 le réel où le maximum est atteint :$f(x_0) = \sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$.
   - si $x_0 = a$, considérons la suite $a_n = a+1/n$. Pour $n \geqslant \frac{1}{b-a}$ on a $a_n \in [a, b]$, donc on peut considérer la suite $(f(a_n))_{n\geqslant\frac{1}{b-a}}$. Or a_n tend vers a quand n tend vers $+\infty$, et comme f est continue, ceci implique que $f(a_n)$ tend vers $f(a)$ quand n tend vers $+\infty$. Donc $\forall\varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, f(x_0)-\varepsilon \leqslant f(a_n) \leqslant f(x_0)$, ce qui implique que $f(x_0) = \sup_{a<x<b} f(x)$.
   - si $x_0 = b$ on obtient le résultat de manière identique en considérant la suite $b_n = b-1/n$.
   - si $a < x_0 < b$: $f(x_0)$ est majoré par le sup de f sur $]a, b[$, donc

   $$f(x_0) \leqslant \sup_{a<x<b} f(x) \leqslant \sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x) = f(x_0)$$

   donc $f(x_0) = \sup_{a<x<b} f(x)$.
3. Avec la fonction g, on a $\sup_{0<x<1} g(x) = 0$ car $\forall x \in]0, 1[, g(x) = 0$, et $\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} g(x) = 1$ car $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. La propriété démontrée précédemment n'est pas vraie dans notre cas, car la fonction g ne remplit pas la condition essentielle d'être continue.

Correction 77 de l'exercice 432 Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$0 \leqslant |f(x)| = \frac{|\cos x|}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1.$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in [-1,1]$ donc f est minorée (-1 est un minorant), majorée (1 est un majorant) et $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) \leqslant 1$. Comme $f(0) = 1$ on a nécessairement $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) \geqslant 1$. Conclusion :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 1.$$

Correction 78 de l'exercice 455 Le résultat est évident si $n \leqslant 3$. On suppose donc $n \geqslant 3$. Soit P_n l'application $X \mapsto X^n + aX + b$ de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Alors $P_n'(X) = nX^{n-1} + a$ s'annulle en au plus deux valeurs.

Correction 79 de l'exercice 456 Comme f' est dérivable, elle est continue. Comme f s'annulle $n+1$ fois, f' change de signe (au moins) $n+1$ fois donc s'annulle (au moins) n fois. On peut bien sûr recommencer, le résultat en découle.

Correction 80 de l'exercice 476

1. Le théorème de Rolle dit que si $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$ et dérivable sur l'ouvert $]a,b[$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$.
2. (a) Supposons par l'absurde, qu'il existe $x_0 \in]a,b]$ tel que $g(x_0) = g(a)$. Alors en appliquant le théorème de Rolle à la restriction de g à l'intervalle $[a,x_0]$ (les hypothèses étant clairement vérifiées), on en déduit qu'il existe $c \in]a,x_0[$ tel que $g'(c) = 0$, ce qui contredit les hypothèses faites sur g. Par conséquent on a démontré que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in]a,b]$.

   (b) D'après la question précédente, on a en particulier $g(b) \neq g(a)$ et donc p est un nombre réel bien défini et $h = f - p \cdot g$ est alors une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Un calcul simple montre que $h(a) = h(b)$. D'après le théorème de Rolle il en résulte qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$. Ce qui implique la relation requise.

   (c) Pour chaque $x \in]a,b[$, on peut appliquer la question 2.b aux restrictions de f et g à l'intervalle $[x,b]$, on en déduit qu'il existe un point $c(x) \in]x,b[$, dépendant de x tel que

   $$(*) \qquad \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}.$$

   Alors, comme $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(t)}{g'(t)} = \ell$ et $\lim_{x\to b^-} c(x) = b$, on en déduit en passant à la limite dans $(*)$ que

   $$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \ell.$$

   Ce résultat est connu sous le nom de “Théorème de l'Hôpital”.
3. Considérons les deux fonctions $f(x) = \operatorname{Arccos} x$ et $g(x) = \sqrt{x^2-1}$ pour $x \in [0,1]$. Il est clair que ces fonctions sont continues sur $[0,1]$ et dérivables sur $]0,1[$ et que $f'(x) = -1/\sqrt{x^2-1}$ et que $g'(x) = -x/\sqrt{x^2-1} \neq 0$ pour tout $x \in]0,1[$. En appliquant les résultats de la question 2, on en déduit que

   $$\lim_{x\to 1^-} \frac{\operatorname{Arccos} x}{\sqrt{x^2-1}} = 1.$$

Correction 81 de l'exercice 477

1. (a) Il est clair que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ puisque c'est une fonction rationnelle sans pôle dans cet intervalle. De plus d'après la formule de la dérivée d'un quotient, on obtient
$$f'(x) = \frac{n(x^n-1)}{(1+x)^{n+1}},\ x \geqslant 0.$$
   (b) Il résulte clairement de l'expression précédente que $f'(x)$ est du signe de $x^{n+1}-1$ sur $\mathbb{R}^+$. Par conséquent on obtient : $f'(x) \leqslant 0$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $f'(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 1$. Il en résulte que f est décroissante sur $[0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$ et par suite f atteint son minimum sur $\mathbb{R}^+$ au point 1 et ce minimum vaut $f(1) = 2^{1-n}$.
2. (a) Il résulte de la question 1.b que $f(x) \geqslant f(1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et donc
$$(1+x)^n \leqslant 2^{n-1}(1+x^n),\quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$
   (b) En appliquant l'inégalité précédente avec $x = b/a$, on en déduit immédiatement l'inégalité requise.

Correction 82 de l'exercice 478

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que composée de fonctions dérivables, et sur $\mathbb{R}_-^*$ car elle est nulle sur cet intervalle ; étudions donc la dérivabilité en 0.
   On a
$$\frac{f(t)-f(0)}{t} = \begin{cases} e^{1/t}/t & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$
   or $e^{1/t}/t$ tend vers 0 quand t tend vers 0 par valeurs négatives. Donc f est dérivable à gauche et à droite en 0 et ces dérivées sont identiques, donc f est dérivable et $f'(0) = 0$.
2. On a
$$f'(t) = \begin{cases} -e^{1/t}/t^2 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$
   donc le taux d'accroissement de f' au voisinage de 0 est
$$\frac{f'(t)-f'(0)}{t} = \begin{cases} -e^{1/t}/t^3 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$
   et il tend vers 0 quand t tend vers 0 par valeurs supérieures comme inférieures. Donc f admet une dérivée seconde en 0, et $f''(0) = 0$.
3. (a) On a déjà trouvé que $f'(t) = -e^{1/t}/t^2$, donc $f'(t) = P_1(t)/t^2 e^{1/t}$ si on pose $P_1(t) = 1$. Par ailleurs, $f''(t) = e^{1/t}/t^4 + e^{1/t}(-2/t^3) = \frac{1-2t}{t^4}e^{1/t}$ donc la formule est vraie pour $n = 2$ en posant $P_2(t) = 1-2t$.
   (b) Supposons que la formule est vraie au rang n. Alors $f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}}e^{1/t}$ d'où
$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(t) &= \frac{P_n'(t)t^{2n} - P_n(t)(2n)t^{2n-1}}{t^{4n}}e^{1/t} + \frac{P_n(t)}{t^{2n}}e^{1/t}(-1/t^2) \\ &= \frac{P_n'(t)t^2 - (2nt+1)P_n(t)}{t^{2(n+1)}}e^{1/t} \end{aligned}$$
   donc la formule est vraie au rang $n+1$ avec
$$P_{n+1}(t) = P_n'(t)t^2 - (2nt+1)P_n(t).$$

4. Sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ f est indéfiniment dérivable, donc il suffit d'étudier ce qui se passe en 0.
   Montrons par récurrence que f est indéfiniment dérivable en 0, et que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)} = 0$. On sait que c'est vrai au rang 1. Supposons que f est n-fois dérivable, et que $f^{(n)} = 0$. Alors le taux d'accroissement de $f^{(n)}$ en 0 est :
   $$\frac{f^{(n)}(t) - f^{(n)}(0)}{t} = \begin{cases} P_n(t)e^{1/t}/t^{2n} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$
   et sa limite est 0 quand t tend vers 0 par valeurs supérieures comme inférieures. Donc $f^{(n)}$ est dérivable en 0, et $f^{(n+1)}(0) = 0$. Donc l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang $n+1$.
   Par conséquent, f est de classe C^∞.

Correction 83 de l'exercice 568

1. On cherche une solution particulière de (E), de la forme $y(x) = ax$ pour $x \in]0, \infty[$. Alors en injectant $y(x)$ dans (E) on a
   $$a - \frac{ax}{x} - a^2x^2 = -9x^2$$
   donc $a^2 = 9$. On prend donc $y_0(x) = 3x$ comme solution particulière de (E) définie sur $]0, \infty[$.
2. On fait le changement de fonction inconnue suivant : $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ où z est une fonction définie sur $]0, \infty[$ à trouver. Ici $y_0(x) = 3x$ donc $y(x) = 3x - \frac{1}{z(x)}$. On calcule les dérivées et le carré de $y(x)$ pour l'injecter dans (E) : On a
   $$y'(x) = 3 + \frac{z'(x)}{z^2(x)} \text{ et } y^2(x) = 9x^2 - \frac{6x}{z(x)} + \frac{1}{z^2(x)},$$
   donc en injectant dans (E) on a
   $$3 + \frac{z'(x)}{z^2(x)} - 3 + \frac{1}{xz(x)} - 9x^2 + \frac{6x}{z(x)} - \frac{1}{z^2(x)} = 9x^2,$$
   d'où en simplifiant et en arrangeant on a :
   $$(E1) \qquad z'(x) + \big(6x + \frac{1}{x}\big)z(x) = 1.$$

Correction 84 de l'exercice 572 Les primitives de la fonction $a(x) = 2x$ sont les fonctions $A(x) = x^2/2 + k$ où $k \in \mathbb{R}$ est une constante réelle quelconque. Donc les solutions de l'équation homogène associée à E sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ du type : $y(x) = ce^{-x^2}$ où $c \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire. On cherche maintenant une solution particulière de E sous la forme $y_p(x) = c(x)e^{-x^2}$ (méthode de la variation de la constante). On a :
$y_p'(x) + 2xy_p(x) = c'(x)e^{-x^2}$. Donc y_p est solution de E si et seulement si : $c'(x) = xe^{x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On choisit la fonction c parmi les primitives de la fonction xe^{x^2}, par exemple : $c(x) = 1/2e^{x^2}$. Donc la fonction y_p telle que $y_p(x) = 1/2e^{x^2}e^{-x^2} = 1/2$ est solution de E.
Par conséquent les solutions de E sont toutes les fonctions de la forme :
$$y(x) = ce^{-x^2} + \frac{1}{2} \; c \in \mathbb{R}.$$
Pour y solution de E_1, la condition $y(0) = 1$ équivaut à : $c = 1/2$.

Correction 85 (Remarque générale) Considérons l'équation différentielle $\mathcal{E}$ suivante :

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = Q(x)e^{\alpha x}$$

où a, b, c sont des réels ($a \neq 0$), Q est un polynôme à coefficients réels et α est un nombre complexe. On sait que les racines du polynôme caractéristique :

$$f(r) = ar^2 + br + c$$

permettent de déterminer les solutions de l'équation homogène. Ensuite on peut chercher une solution particulière de $\mathcal{E}$ de la forme $y(x) = P(x)e^{\alpha x}$ où P est un polynôme, dont on sait déterminer le degré après une discussion bien connue. *Sans utiliser ces informations sur P* on peut déjà établir que :

$$(*) \quad P(x)e^{\alpha x} \text{ est solution de } \mathcal{E} \Leftrightarrow aP'' + f'(\alpha)P' + f(\alpha)P = Q.$$

En effet $(P(x)e^{\alpha x})' = (P'(x)+\alpha P(x))e^{\alpha x}$, $(P(x)e^{\alpha x})'' = (P''(x)+2\alpha P'(x)+\alpha^2 P(x))e^{\alpha x}$ et $\mathcal{E}$ appliquée à $P(x)e^{\alpha x}$ amène après un calcul immédiat l'équation :

$$aP'' + (2a\alpha + b)P' + (a\alpha^2 + b\alpha + c)P = Q$$

Le coefficient de P est $f(\alpha)$ et le coefficient de P' est donné par l'évaluation du polynôme dérivé de f en α, $f'(\alpha)$. On retrouve ainsi ce qui a été dit en TD :
($\imath$) Si α n'est pas racine de l'équation caractéristique, on pourra chercher P parmi les polynômes de degré égal à $\deg(Q)$.
($\imath\imath$) Si α est racine simple (ie $f(\alpha) = 0$ et $f'(\alpha) \neq 0$), la condition sur P est : $aP'' + f'(\alpha)P' = Q$ donc on prendra $\deg(P) = \deg(Q) + 1$, et comme la condition ne porte que sur P'' et P', on peut fixer le coeff. constant de P égal à 0.
($\imath\imath\imath$) Si α est racine double (ie $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$) la condition sur P est $aP'' = Q$ et la détermination d'un P convenable est immédiate...

Correction 86 de l'exercice 584 $y'' - 3y' + 2y = e^x$. Le polynôme caractéristique est $f(r) = (r-1)(r-2)$ et les solutions de l'équation homogène sont donc toutes les fonctions :

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = P(x)e^x$, on est dans la situation ($\imath\imath$) la condition $(*)$ sur P est : $P'' - P' = 1$, et $P(x) = -x$ convient. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions :

$$y(x) = (c_1 - x)e^x + c_2 e^{2x} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Correction 87 de l'exercice 585 $y'' - y = -6\cos x + 2x\sin x$. Ici $f(r) = (r-1)(r+1)$ et l'équation homogène a pour solutions :

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

On remarque que la fonction $3\cos x$ vérifie l'équation : $y'' - y = -6\cos x$, il nous reste donc à chercher une solution y_1 de l'équation $y'' - y = 2x\sin x$, car $y_p(x) = 3\cos x + y_1(x)$ sera une solution de l'équation considŕée. Pour cela, on remarque que $2x\sin x = \mathrm{Im}(2xe^{ix})$ et on utilise la méthode décrite plus haut pour trouver une solution z_1 de l'équation : $y'' - y = 2xe^{ix}$. On cherche z_1 sous la forme $P(x)e^{ix}$ où P est un polynôme de degré 1 car $f(i) = -2 \neq 0$. On a $f'(i) = 2i$, la condition $(*)$ sur P est donc : $2iP'(x) - 2P(x) = 2x$ ce qui donne après identification $P(x) = -x - i$. Alors $y_1(x) = \mathrm{Im}((-x+i)e^{ix}) = -x\sin x - \cos x$. Les solutions sont par conséquent les fonctions :

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + 2\cos x - x\sin x \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Autre méthode pour trouver une solution de $y'' - y = 2x\sin x$: On la cherche de la forme $y_1(x) = A(x)\sin x + B(x)\cos x$ où A, B sont des polynômes de degré 1 car i n'est pas racine de l'équation caractéristique (*danger* : pour un second membre du type $Q(x)\sin(\beta x)e^{\alpha x}$ la discussion porte sur $\alpha + i\beta$ et non sur α ou β...). On calcule y_1', y_1'' et on applique l'équation étudiée à y_1 ...on obtient la condition :

$$(A'' - A - 2B')\sin x + (B'' - B - 2A') = 2x\sin x$$

qui sera réalisée si : $\left\{\begin{array}{l} A'' - A - 2B' = 2x \\ B'' - B - 2A' = 0 \end{array}\right.$.

On écrit : $A(x) = ax + b$ et $B(x) = cx + d$, après identification on obtient : $a = d = -1$, $b = c = 0$, ce qui détermine y_1.

Correction 88 de l'exercice 586 $4y'' + 4y' + 5y = \sin xe^{-x/2}$. L'équation caractéristique a 2 racines complexes $r_1 = -1/2 + i$ et $r_2 = \overline{r_1}$ et les solutions de l'équation homogène sont :

$$y(x) = e^{-x/2}(c_1\cos x + c_2\sin x) \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

On a $\sin xe^{-x/2} = \mathrm{Im}(e^{(-1/2+i)x})$, on commence donc par chercher une solution z_p de l'équation avec le nouveau second membre $e^{(-1/2+i)x}$.Comme $-1/2+i$ est racine de l'équation caractéristique, on cherchera $z_p(x) = P(x)e^{(-1/2+i)x}$ avec P de degré 1. Par conséquent la condition $(*)$ sur P :

$$4P'' + f'(-1/2+i)P' + f(-1/2+i)P = 1$$

s'écrit ici : $8iP' = 1$ ($P'' = 0$, $f(-1/2+i) = 0$ et $f'(-1/2+i) = 8i$), on peut donc prendre $P(x) = -i/8x$ et $z_p(x) = -i/8xe^{(-1/2+i)x}$, par conséquent sa partie imaginaire $y_p(x) = \mathrm{Im}(-i/8xe^{(-1/2+i)x}) = 1/8x\sin xe^{-x/2}$ est une solution de notre équation. Les solutions sont donc toutes les fonctions de la forme :

$$y(x) = e^{-x/2}(c_1\cos x + (c_2 + 1/8x)\sin x) \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Correction 89 de l'exercice 587

1. Le polynôme caractéristique associé à E est : $p(x) = x^2 + 2x + 4$; son discriminant est $\Delta = -12$ et il a pour racines les 2 nombres complexes $-1+i\sqrt{3}$ et $-1-i\sqrt{3}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc toutes fonctions :

   $$y(x) = e^{-x}(a\cos\sqrt{3}x + b\sin\sqrt{3}x)$$

   obtenues lorsque a, b décrivent $\mathbb{R}$.

2. Le second membre est de la forme $e^{\lambda x}Q(x)$ avec $\lambda = 1$ et $Q(x) = x$. On cherchera une solution de l'équation sous la forme : $y_p(x) = R(x)e^x$ avec R polynôme de degré égal à celui de Q puisque $p(1) \neq 0$. On pose donc $R(x) = ax + b$. On a

   $$y_p''(x) + 2y_p'(x) + 4y_p(x) = (7ax + 7b + 4a)e^x.$$

   Donc y_p est solution si et seulement si $7ax + 7a + 4b = x$. On trouve après identification des coefficients :

   $$a = \frac{1}{7} \quad \text{et} \quad b = \frac{-4}{49}.$$

La fonction $y_p(x) = \frac{1}{7}(x - \frac{4}{7})e^x$ est donc solution de E et la forme générale des solutions de E est :

$$y(x) = e^{-x}(a\cos\sqrt{3}x + b\sin\sqrt{3}x) + \frac{1}{7}(x - \frac{4}{7})e^x \ ; \ a, b \in \mathbb{R}.$$

3. Soit h une solution de E. Les conditions $h(0) = 1$, $h(1) = 0$ sont réalisées ssi

$$a = \frac{53}{49} \qquad \text{et} \qquad b = -\frac{53\cos\sqrt{3} + 3e^2}{49\sin\sqrt{3}}.$$

4. (a) On a : $g'(x) = e^x f'(e^x)$ et $g''(x) = e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x)$ d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g''(x) + 2g'(x) + 4g(x) = e^{2x} f''(e^x) + 2e^x f'(e^x) + 4f(e^x) = e^x \log e^x = xe^x$$

donc g est solution de E.

(b) Réciproquement pour $f(t) = g(\log t)$ où g est une solution de E on montre que f est 2 fois dérivable et vérifie l'équation donnée en 4. Donc les fonctions f recherchées sont de la forme :

$$\frac{1}{t}(a\cos(\sqrt{3}\log t) + b\sin(\sqrt{3}\log t)) + \frac{t}{7}(\log t - \frac{4}{7}) \ ; \ a, b \in \mathbb{R}.$$

Correction 90 de l'exercice 593

1. L'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$ a une racine (double) $r = 2$ donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions :

$$y(x) = (c_1 x + c_2)e^{2x} \text{ où } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Pour $d(x) = e^{-2x}$ on peut chercher une solution particulière de la forme : $y_1(x) = ae^{-2x}$ car -2 n'est pas racine de l'équation caractéristique. On a $y_1'(x) = -2e^{-2x}$ et $y_1''(x) = 4ae^{-2x}$. Par conséquent y_1 est solution si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (4a - 4(-2a) + 4a)e^{-2x} = e^{-2x}$$

donc si et seulement si $a = \frac{1}{16}$.
Pour $d(x) = e^{2x}$ on cherche une solution de la forme $y_2(x) = ax^2e^{2x}$, car 2 est racine double de l'équation caractéristique. On a $y_2'(x) = (2ax + 2ax^2)e^{2x}$ et $y_2''(x) = (2a + 4ax + 4ax + 4ax^2)e^{2x} = (4ax^2 + 8ax + 2a)e^{2x}$. Alors y_2 est solution si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (4ax^2 + 8ax + 2a - 4(2ax + 2ax^2) + 4ax^2)e^{2x} = e^{2x}$$

donc si et seulement si $a = \frac{1}{2}$.

3. On déduit du principe de superposition que la fonction

$$y_p(x) = \frac{1}{4}(y_1(x) + y_2(x)) = \frac{1}{64}e^{-2x} + \frac{1}{8}x^2e^{2x}$$

est solution de l'équation pour le second membre donné dans cette question, et la forme générale des solutions est alors :

$$y(x) = (c_1 x + c_2)e^{2x} + \frac{1}{64}e^{-2x} + \frac{1}{8}x^2e^{2x} \text{ où } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Correction 91 de l'exercice 601 Réponse : $(\lambda x + \mu)\, e^{-x} + \frac{e^x}{25}\left[(3x - 4)\cos x - (4x - 2)\sin x\right] + (\sin x - x\cos x)\, e^{-x}$.

Correction 92 de l'exercice 602 Réponse : $\frac{1}{2}(-x\cos x + \sin x) + \lambda\cos x + \mu\sinh x$.

Correction 93 de l'exercice 605 Réponse : $x \to \frac{\lambda x + \mu}{\sqrt{1+x^2}}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Correction 94 de l'exercice 606 Réponse : $x \to \lambda x\sinh x + \mu x\cosh x, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

52 ALGÈBRE 2

Correction 95 de l'exercice 607

1. E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En effet :
   (a) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix} \in E_1$.
   (b) Soient $\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x' & y' & z'\end{pmatrix}$ deux éléments de E_1. On a donc $x+y-z = x+y+z = 0$ et $x'+y'-z' = x'+y'+z' = 0$. Donc $(x+x')+(y+y')-(z+z') = (x+x')+(y+y')+(z+z') = 0$ et $\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x' & y' & z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(x+x') & (y+y') & (z+z')\end{pmatrix}$ appartient à E_1.
   (c) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix} \in E_1$. Alors la relation $x+y-z = x+y+z = 0$ implique que $\lambda x+\lambda y-\lambda z = \lambda x+\lambda y+\lambda z = 0$ donc que $\lambda\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda x & \lambda y & \lambda z\end{pmatrix}$ appartient à E_1.

   Posons $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y+z = 0\}$. F_1 est un plan passant par l'origine donc F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On a les inclusions *strictes* : $\{0\} \subset E_1$ et $E_1 \subset F_1 \subset \mathbb{R}^3$. Par la première on obtient $0 < \dim(E_1)$, par la seconde $\dim(F_1) < 3$ puis $\dim(E_1) < 2$ c'est à dire $\dim(E_1) = 1$.
2. $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 - z^2 = 0\}$ c'est à dire $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x = z \text{ ou } x = -z\}$. Donc $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ appartiennent à E_1 mais $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\end{pmatrix}$ n'appartient pas à E_1 qui n'est en conséquence pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix} \notin E_3$ donc E_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
4. Les vecteurs $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ appartiennent à E_4 mais leur somme $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ ne lui appartient pas donc E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Correction 96 de l'exercice 609

- E_1 : non si $a \neq 0$ car alors $0 \notin E_1$; oui, si $a = 0$ car alors E_1 est l'intersection des sous-espaces vectoriels $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y = 0\}$ et $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x = 0\}$.
- E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
- E_3 : non, car la fonction nulle n'appartient pas à E_3.
- E_4 : non car le polynôme nul n'appartient pas à E_4.
- E_5 : non, en fait E_5 n'est même pas un sous-groupe de $(\mathbb{R}^2,+)$ car $(2,0) \in E_5$ mais $-(2,0) = (-2,0) \notin E_5$.

Correction 97 de l'exercice 617 Pour que deux ensembles X et Y soient égaux, il faut et il suffit que $X \subset Y$ et $Y \subset X$.Dans le cas des espaces vectoriels de dimension finie, la situation est un peu plus simple : pour que $E = F$ il faut et il suffit que $F \subset E$ et $\dim(E) = \dim(F)$. Appliquons ce critère : E est engendré par deux vecteurs donc $\dim(E) \leqslant 2$. Les deux vecteurs $\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants donc $\dim(E) \geqslant 2$ c'est à dire $\dim(E) = 2$.

Un raisonnement identique montre $\dim(F) = 2$. Enfin, les égalités $\begin{pmatrix}3\\7\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}5\\0\\-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ montrent que $F \subset E$ c'est à dire $E = F$.

Correction 98 de l'exercice 622 $v \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ est équivalent à l'existence de deux réels λ, μ tels que $v = \lambda e_1 + \mu e_2$.
Alors $(-2, x, y, 3) = \lambda(1, -1, 1, 2) + \mu(-1, 2, 3, 1)$ est équivalent à

$$\begin{cases} -2 & = \lambda - \mu \\ x & = -\lambda + 2\mu \\ y & = \lambda + 3\mu \\ 3 & = 2\lambda + \mu \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda & = 1/3 \\ \mu & = 7/3 \\ x & = 13/3 \\ y & = 22/3 \end{cases}.$$

Le couple qui convient est donc $(x, y) = (13/3, 22/3)$.

Correction 99 de l'exercice 624 À partir de la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ nous considérons une combinaison linéaire (qui ne correspond qu'à un nombre *fini* de termes).
Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels distincts, considérons La famille (finie) : $(f_{\alpha_i})_{i=1,\ldots,n}$. Supposons qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{\alpha_i} = 0$. Cela signifie que, quelque soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{\alpha_i}(x) = 0$; en particulier pour $x = \alpha_j$ l'égalité devient $\lambda_j = 0$ car $f_{\alpha_i}(\alpha_j)$ vaut 0 si $i \neq j$ et 1 si $i = j$. En appliquant le raisonnement ci-dessus pour $j = 1$ jusqu'à $j = n$ on obtient : $\lambda_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Donc la famille $(f_\alpha)_\alpha$ est une famille libre.

Correction 100 de l'exercice 628 Les fonctions de E qui ne sont pas dans F sont Les fonctions h qui vérifient $h(0) \neq 0$ **ou** $h'(0) \neq 0$. Par exemple les fonctions constantes $x \mapsto b$, $(b \in \mathbb{R})$, ou les homothéties $x \mapsto ax$, $(a \in \mathbb{R})$ n'appartiennent pas à F.
Posons
$$G = \left\{x \mapsto ax + b; (a, b) \in Rr^2\right\}.$$
Montrons que G est un supplémentaire de F dans E.
Soit $f \in F \cap G$ alors $f(x) = ax + b$ (car $f \in G$) et $f(0) = b$ et $f'(0) = a$; mais $f \in F$ donc $f(0) = 0$ donc $b = 0$ et $f'(0) = 0$ donc $a = 0$. Maintenant f est la fonction nulle : $F \cap G = \{0\}$.
Soit $h \in E$, alors remarquons que pour $f(x) = h(x) - h(0) - h'(0)x$ la fonction f vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$ donc $f \in F$. Si nous écrivons l'égalité différemment nous obtenons

$$h(x) = f(x) + h(0) + h'(0)x.$$

Posons $g(x) = h(0) + h'(0)x$, alors la fonction $g \in G$ et

$$h = f + g,$$

ce qui prouve que toute fonction de E s'écrit comme somme d'une fonction de F et d'une fonction de G : $E = F + G$.
En conclusion nous avons montrer que $E = F \oplus G$.

Correction 101 de l'exercice 634 Montrons que la famille $\{x, \ldots, \varphi^{n-1}(x)\}$ est libre. Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_0 x + \cdots + \lambda_{n-1}\varphi^{n-1}(x) = 0$. Alors : $\varphi^{n-1}(\lambda_0 x + \cdots + \lambda_{n-1}\varphi^{n-1}(x)) = 0$. Mais comme de plus $\varphi^n = 0$, on a l'égalité $\varphi^{n-1}(\lambda_0 x + \cdots + \lambda_{n-1}\varphi^{n-1}(x)) = \varphi^{n-1}(\lambda_0 x) + \varphi^n(\lambda_1 x + \cdots + \lambda_{n-1}\varphi^{n-2}(x)) = \lambda_0\varphi^{n-1}(x)$. Comme $\varphi^{n-1}(x) \neq 0$ on obtient $\lambda_0 = 0$.
En calculant ensuite $\varphi^{n-2}(\lambda_1\varphi(x) + \cdots + \lambda_{n-1}\varphi^{n-1}(x))$ on obtient $\lambda_1 = 0$ puis, de proche en proche, $\lambda_{n-1} = \cdots = \lambda_0 = 0$. La famille $\{x, \ldots, \varphi^{n-1}(x)\}$ est donc libre. Elle compte n vecteurs. Comme $\dim\,(E) = n$ elle est libre maximale et forme donc une base de E.

Correction 102 de l'exercice 635 Montrons ceci par récurence : Pour $n = 1$, l'assertion est triviale : $x \notin \ker \varphi \Rightarrow \varphi(x) \neq 0$. Supposons que si $x \notin \ker \varphi$ alors $\varphi^{n-1}(x) \neq 0$, $(n \geqslant 2)$. Fixons $x \notin \ker \varphi$, Alors par hypothèses de récurrence $\varphi^{n-1}(x) \neq 0$, mais $\varphi^{n-1}(x) = \varphi(\varphi^{n-2}(x)) \in \Im\varphi$ donc $\varphi^{n-1}(x) \notin \ker \varphi$ grâce à l'hypothèse sur φ. Ainsi $\varphi(\varphi^{n-1}(x)) \neq 0$, soit $\varphi^n(x) \neq 0$. Ce qui termine la récurrence.

Correction 103 de l'exercice 637

(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons $\ker f = \operatorname{Im} f$. Soit $x \in E$, alors $f(x) \in \operatorname{Im} f$ donc $f(x) \in \ker f$, cela entraine $f(f(x)) = 0$; donc $f^2 = 0$. De plus d'après la formule du rang $\dim \ker f + \operatorname{rg} f = n$, mais $\dim \ker f = \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f$, ainsi $2 \operatorname{rg} f = n$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Si $f^2 = 0$ alors $\operatorname{Im} f \subset \ker f$ car pour $y \in \operatorname{Im} f$ il existe x tel que $y = f(x)$ et $f(y) = f^2(x) = 0$. De plus si $2 \operatorname{rg} f = n$ alors par la formule Du rang $\dim \ker f = \operatorname{rg} f$ c'est-à-dire $\dim \ker f = \dim \operatorname{Im} f$. Nous savons donc que $\operatorname{Im} f$ est inclus dans $\ker f$ mais ces espaces sont de même de dimension donc sont égaux : $\ker f = \operatorname{Im} f$.

Correction 104 de l'exercice 643 Pour montrer l'égalité $\ker f \cap \operatorname{Im} f = f(\ker f^2)$, nous montrons la double inclusion.
Soit $y \in \ker f \cap \operatorname{Im} f$, alors $f(y) = 0$ et il existe x tel que $y = f(x)$. De plus $f^2(x) = f(f(x)) = f(y) = 0$ donc $x \in \ker f^2$. Comme $y = f(x)$ alors $y \in f(\ker f^2)$. Donc $\ker f \cap \operatorname{Im} f \subset f(\ker f^2)$. Pour l'autre inclusion, nous avons déjà que $f(\ker f^2) \subset f(E) = \operatorname{Im} f$. De plus $f(\ker f^2) \subset \ker f$, car si $y \in f(\ker f^2)$ il existe $x \in \ker f^2$ tel que $y = f(x)$, et $f^2(x) = 0$ implique $f(y) = 0$ donc $y \in \ker f$. Par conséquent $f(\ker f^2) \subset \ker f \cap \operatorname{Im} f$.

Correction 105 de l'exercice 654

1. Montrons que si φ est un isomorphisme, l'image de toute base de E est une base de F : soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E et nommons $\mathcal{B}'$ la famille $\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\}$.
   (a) $\mathcal{B}'$ est libre. Soient en effet $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1\varphi(e_1) + \dots + \lambda_n\varphi(e_n) = 0$. Alors $\varphi(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = 0$ donc, comme φ est injective, $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$ puis, comme $\mathcal{B}$ est libre, $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.
   (b) $\mathcal{B}'$ est génératrice. Soit $y \in F$. Comme φ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = \varphi(x)$. Comme $\mathcal{B}$ est génératrice, on peut choisir $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$. Alors $y = \lambda_1\varphi(e_1) + \dots + \lambda_n\varphi(e_n)$.
2. Supposons que l'image par φ de toute base de E soit une base F. Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ la base $\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\}$.
   (a) Im (φ) contient $\mathcal{B}'$ qui est une partie génératrice de F. Donc φ est surjective.
   (b) Soit maintenant $x \in E$ tel que $\varphi(x) = 0$. Comme $\mathcal{B}$ est une base, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$. Alors $\varphi(x) = 0 = \lambda_1\varphi(e_1) + \dots + \lambda_n\varphi(e_n)$ donc puisque $\mathcal{B}'$ est libre : $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. En conséquence si $\varphi(x) = 0$ alors $x = 0$: φ est injective.

Correction 106 de l'exercice 669 det $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$ donc la famille $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont donc $(1/3, -1/3, 1/3)$.

$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$. Ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont donc $(1/3, -1/3, -2/3)$.
$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Donc ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $(2/3, -2/3, -1/3)$.

Correction 107 de l'exercice 691 E est engendré par trois vecteurs et F est engendré par deux vecteurs. Donc $\dim(E) \leqslant 3$ et $\dim(F) \leqslant 2$. Clairement e_4 et e_5 ne sont pas liés donc $\dim(F) \geqslant 2$ c'est à dire $\dim(F) = 2$. Enfin, $\det\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\3&1&1\end{pmatrix} = -1 \neq 0$. La famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est donc libre, soit $\dim(E) \geqslant 3$ i.e. $\dim(E) = 3$.
$E \cap F \subset F$ donc $\dim(E\cap F) \leqslant 2$. De plus : $\dim(E+F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E\cap F)$. Comme $E + F \subset \mathbb{R}^5$, on a $\dim(E+F) \leqslant 5$ d'où on tire l'inégalité $1 \geqslant \dim(E\cap F)$. Donc soit $\dim(E\cap F) = 1$ soit $\dim(E\cap F) = 2$.
Supposons que $\dim(E\cap F)$ soit égale à 2. Comme $E\cap F \subset F$ on aurait dans ce cas $E \cap F = F$. En particulier il existerait $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $e_4 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$. On vérifie aisément que ce n'est pas le cas, donc que $\dim(E\cap F)$ n'est pas égale à 2.
On peut donc conclure : $\dim(E\cap F) = 1$ puis $\dim(E+F) = 4$.

Correction 108 de l'exercice 714 Un calcul donne $A^3 - A = 4I$. Donc $A \times \frac{1}{4}(A^2 - I) = I$, ainsi A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&-4&2\\1&-2&-1\\1&2&-1\end{pmatrix}.$$

Correction 109 de l'exercice 715

$$A = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

Correction 110 de l'exercice 718 Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$. Soient $M = \begin{pmatrix}a&0&c\\0&b&0\\c&0&a\end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix}a'&0&c'\\0&b'&0\\c'&0&a'\end{pmatrix}$ deux éléments de E. Alors $M + M' = \begin{pmatrix}a+a'&0&c+c'\\0&b+b'&0\\c+c'&0&a+a'\end{pmatrix} \in E$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda M = \begin{pmatrix}\lambda a&0&\lambda c\\0&\lambda b&0\\\lambda c&0&\lambda a\end{pmatrix}$ appartient à E, tout comme la matrice 0. Donc E est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.
Soit $M = \begin{pmatrix}a&0&c\\0&b&0\\c&0&a\end{pmatrix}$ un élément de E. Alors $M = a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.
Posons $M_1 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$. Les matrices M_1, M_2 et M_3 appartiennent à E et la relation qui précéde montre que elles engendrent E. D'autre part, si $\alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 = 0$, alors $\begin{pmatrix}\alpha&0&\gamma\\0&\beta&0\\\gamma&0&\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La famille $\{M_1, M_2, M_3\}$ est libre et engendre E. C'est une base de E.

Correction 111 de l'exercice 719 F est un sous espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ donc dim $(F) \in \{0,\dots,4\}$. Comme $F \neq M_2(\mathbb{R})$ on a aussi dim $(F) \neq 4$. D'autre part les matrices $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ appartiennent à F et sont linéairement indépendantes. En effet, si $\alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 = 0$ alors $\begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \beta & -\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ c'est à dire $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Donc dim $(F) \geqslant 3$ c'est à dire dim $(F) = 3$. Enfin $\{M_1, M_2, M_3\}$ est une famille libre de trois vecteurs dans F qui est un espace de dimension 3. C'est donc une base de F.

Correction 112 de l'exercice 742

1. $A = \begin{pmatrix} -9 & -18 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$
2. $U_n = A^n U_0$
3. C'est la droite engendrée par $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le rang est 1.
4. C'est la droite engendrée par $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
5. Ce sont deux vecteurs non colinéaires. On a
$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
6. On a $A = PDP^{-1}$ donc $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -3^{n+1} & -2 \cdot 3^{n+1} \\ 2 \cdot 3^n & 4 \cdot 3^n \end{pmatrix}$
7. Donc
$$\begin{cases} x_n &= -137 \cdot 3^{n+1} - 36 \cdot 3^{n+1} \\ y_n &= 274(3^n) + 72 \cdot 3^n \end{cases}$$

Correction 113 de l'exercice 754 Posons : $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_{3,\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $e_{4,\beta} = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Notons $\varphi_{\alpha,\beta}$ l'application linéaire associée à $M_{\alpha,\beta}$ et $F = \text{Vect}\ \{e_1, e_2\}$. Par définition de la matrice associée à une application linéaire, Im $(\varphi_{\alpha,\beta}) = \text{Vect}\ \{e_1, e_2, e_{3,\alpha}, e_{4,\beta}\}$. En particulier, $F \subset$ Im $(\varphi_{\alpha,\beta})$. Comme e_1 et e_2 sont linéairement indépendants, $\text{rg}(\varphi_{\alpha,\beta}) \geqslant 2$. Ainsi $\varphi_{\alpha,\beta}$ est surjective si et seulement si l'un des deux vecteurs $e_{3,\alpha}$ ou $e_{4,\beta}$ n'appartient pas à F. En ce cas en effet, $\text{rg}(\varphi_{\alpha,\beta}) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Or $e_{3,\alpha}$ et $e_{4,\beta}$ appartiennent à F si et seulement si il existe $\lambda, \lambda', \mu, \mu' \in \mathbb{R}$ tels que : $e_{3,\alpha} = \lambda e_1 + \mu e_2$ et $e_{4,\beta} = \lambda' e_1 + \mu' e_2$. Un petit calcul montre donc que $\varphi_{\alpha,\beta}$ n'est pas surjective si et seulement si $\alpha = 22$ et $\beta = 4$. Donc $\varphi_{\alpha,\beta}$ est surjective si et seulement si $\alpha \neq 22$ ou $\beta \neq 4$.

Correction 114 de l'exercice 756 $\mathcal{L}(E)$ est isomorphe à $M_n(\mathbb{R})$ donc est de dimension finie n^2. La famille $\{id_E, \varphi, \dots, \varphi^{n^2}\}$ compte $n^2 + 1$ vecteurs donc est liée c'est à dire : il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_{n^2}$ dans $\mathbb{R}$, non tous nuls et tels que $\lambda_0 id_E + \lambda_1 \varphi + \dots + \lambda_{n^2} \varphi^{n^2} = 0$. Le polynôme $P(X) = \lambda_0 + \lambda_1 X + \dots + \lambda_{n^2} X^{n^2}$ répond donc à la question.

Correction 115 de l'exercice 772

– Dans le cas $n = 2$, $n = 4$ les matrice suivantes conviennent :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J' = \begin{pmatrix} J & (0) \\ (0) & J \end{pmatrix}.$$

– Supposons qu'un tel morphisme existe. Soit J sa matrice pour une base fixée. Alors $J^2 = -I_n$ où I_n est la matrice identité de taille n. En termes de déterminant nous avons : $\det(J^2) = \det I_n$, ce qui s'écrit $(\det J)^2 = (-1)^n$. Donc n est pair car $(\det J)^2$ est positif.

Correction 116 de l'exercice 777 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $\det A = 0$, mais $\det B = a^2$ est non nul si $a \neq 0$.

53 ANALYSE 2

Correction 117 de l'exercice 800 L'équation caractéristique est :

$$r^2 - r - 1 = 0$$

dont les solution sont $\lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\mu = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Donc u_n est de la forme

$$u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n$$

pour α, β des réels que nous allons calculer grâce à u_0 et u_1. En effet $u_0 = 1 = \alpha\lambda^0 + \beta\mu^0$ donc $\alpha + \beta = 1$. Et comme $u_1 = 1 = \alpha\lambda^1 + \beta\mu^1$ nous obtenons $\alpha\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \beta\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1$. En résolvant ces deux équations nous obtenons $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\lambda)$ et $\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\mu)$. Nous écrivons donc pour finir :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\mu^{n+1} - \lambda^{n+1}\right).$$

Correction 118 de l'exercice 802 L'équation caractéristique est :

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

dont les solutions sont $\lambda = 2$ et $\mu = 1$. Donc u_n est de la forme

$$u_n = \alpha 2^n + \beta 1^n = \alpha 2^n + \beta$$

Or la suite $(2^n)_n$ tend vers $+\infty$. Donc si $(u_n)_n$ est bornée alors $\alpha = 0$. Donc $(u_n)_n$ est la suite constante égale à β. Réciproquement toute suite constante qui vérifie $u_n = \beta$ pour $n \in \mathbb{N}$ vérifie bien la relation de récurrence $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Donc les suites cherchées sont les suites constantes.

Correction 119 de l'exercice 810

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+x+1} = -1/2.$$

Correction 120 de l'exercice 811

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)\ln(1+x^2)}{x\tan(x)} = 0.$
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin(x))}{\tan(6\,x)} = 1/6.$
3. $\lim_{x\to 0} (\ln(e+x))^{x^{-1}} = e^{e^{-1}}.$
4. $\lim_{x\to\infty} \left(\ln(1+e^{-x})\right)^{x^{-1}} = e^{-1}.$

Correction 121 de l'exercice 813

1. $\frac{2}{3}$
2. $\frac{\sqrt{2}}{8\,x^3}$
3. $\frac{a^3}{b^3}$
4. -1
5. $-\frac{\sqrt{2}}{4}$
6. $\frac{1}{2}x^2$
7. $-\frac{3}{2}\left(-\frac{\pi}{4}+x\right)$
8. $\sqrt{e}$
9. $\frac{1}{\pi}$
10. 1
11. x

Correction 122 de l'exercice 822

1. Pour tout $n \geqslant 2$ on a : $P_n(0) = -1$ et $P_n(1) = 3$. Comme l'application $X \mapsto P_n(X)$ est continue, elle s'annulle en (au moins) un point de l'intervalle $]0,1[$. Comme par ailleurs, pour tout X positif, $P_n'(X) = nX^{n-1} + (n-1)X^{n-2} + 2X + 1$ est strictement positif, l'application $X \mapsto P_n(X)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et s'annule en au plus un point de $\mathbb{R}_+$. En conséquence P_n a une unique racine positive λ_n qui de plus satisfait à l'inégalité $0 < \lambda_n < 1$.
2. Pour tout $X \in]0,1[$, $P_n(X) - P_{n-1}(X) = X^n - X^{n-2} < 0$. En particulier $P_n(\lambda_{n-1}) < 0$ donc $\lambda_n > \lambda_{n-1}$. La suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 2}$ est donc croissante et majorée (cf 1.) : elle est convergente.
3. Pour tout $n \geqslant 2$ on a : $\lambda_n^n + \lambda_n^{n-1} = -\lambda_n^2 - \lambda_n + 1$. Or $P_n\left(\dfrac{3}{4}\right) > \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 + \dfrac{3}{4} - 1 > 0$ donc la suite $(\lambda_n^n + \lambda_n^{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait aux inégalités $0 < \lambda_n^n + \lambda_n^{n-1} < \left(\dfrac{3}{4}\right)^n + \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}$ et converge vers 0. Il en va de même de la suite $(-\lambda_n^2 - \lambda_n + 1)_{n\geqslant 2}$. En passant à la limite, on obtient l'égalité : $\ell^2 + \ell - 1 = 0$. La seule solution positive de cette équation étant $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, on a l'égalité : $\ell = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Remarques

1. L'inégalité $0 < \lambda_n < 1$ (pour tout $n \geqslant 2$) n'implique pas que $(\lambda_n^n)_{n\geqslant 2}$ converge vers 0. Par exemple la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $v_n = (1 - \dfrac{1}{n})^n$ converge vers $\dfrac{1}{e}$. (Pour le vérifier appliquer le 1. du problème à $\log(v_n)$.)

2. La propriété $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+k}\varepsilon\Big(\frac{1}{n+k}\Big) = 0$ n'implique pas que $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}\varepsilon\Big(\frac{1}{n+k}\Big) = 0$.

   Par exemple... $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} = \log(2)$.

Correction 123 de l'exercice 826

1. $\varepsilon(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c)$. Comme f est continue, ε est continue sur $]a,b[-\{c\}$ et la continuité en c de ε équivaut à la dérivabilité de f en c. L'unicité est évidente.
2. Pour tout $n \geqslant 1, S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} < 0$ (par exemple parce que $\frac{1}{2n+2} < \frac{1}{2n}$ et $\frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n}$ donc $\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} < 2 \times \frac{1}{2n}$) donc la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. Elle est minorée (par 0) donc elle converge.
3. Pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, $\frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{n+k} \leqslant \frac{1}{n}$ donc $(n+1)\times\frac{1}{2n} \leqslant S_n \leqslant (n+1)\times\frac{1}{n}$ d'où, en passant à la limite, l'inégalité $\frac{1}{2} \leqslant S \leqslant 1$.
4. Soit ε l'application de $]-1,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = f'(0)x + \varepsilon(x)$. Pour tous $n,k \in \mathbb{N}, n > 0$, on a l'égalité :

$$f\Big(\frac{1}{n+k}\Big) = \frac{1}{n+k}f'(0) + \frac{1}{n+k}\varepsilon\Big(\frac{1}{n+k}\Big)$$

   donc $\sigma_n(f) - f'(0)S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}\varepsilon\Big(\frac{1}{n+k}\Big)$. Comme, pour tout $k \geqslant 0$, on a $\frac{1}{n+k} \leqslant \frac{1}{n}$, on en déduit les inégalités :

$$|\sigma_n(f) - f'(0)S_n| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\Big|\varepsilon\Big(\frac{1}{n+k}\Big)\Big| \leqslant \frac{n+1}{n}\max_{0\leqslant k\leqslant n}\Big|\varepsilon\Big(\frac{1}{n+k}\Big)\Big|.$$

   Comme $\max_{0\leqslant k\leqslant n}\Big|\varepsilon\Big(\frac{1}{n+k}\Big)\Big| \leqslant \sup_{x\in[0,\frac{1}{n}]}|\varepsilon(x)|$, cette quantité converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini (puisque ε est continue et s'annulle en 0).
5. Des égalités $\log\left(1+\frac{1}{n+k}\right) = \log\left(\frac{n+k+1}{n+k}\right) = \log(n+k+1) - \log(n+k)$ on déduit que :

$$\sigma_n(f) = \log(2n+1) - \log(n) = \log\left(\frac{2n+1}{n}\right) = \log\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

   Comme la fonction logarithme est continue, $(\sigma_n(f))_{n\geqslant 1}$ converge vers $\log(2)$ lorsque n tend vers l'infini. Ainsi $S = \log(2)$.
6. Par les deux questions qui précédent il est immédiat que $\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \log(2)$.
7. Soit $f :]-1,1[\to\mathbb{R}$ une application continue, dérivable en 0 et telle que $f(0) = 0$. Soit ε l'application de $]-1,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = f'(0)x + \varepsilon(x)$.
   On pose, pour tous $n,k \in \mathbb{N}, n > 0$:

$$\sigma_n(p,f) = \sum_{k=0}^{pn} f\Big(\frac{1}{n+k}\Big) \text{ et } S_{n,p} = \sum_{k=0}^{pn}\frac{1}{n+k}.$$

Pour tous $n, k \in \mathbb{N}, n > 0$ on a l'égalité : $f\Big(\frac{1}{n+k}\Big) = \frac{1}{n+k}f'(0) + \frac{1}{n+k}\varepsilon\Big(\frac{1}{n+k}\Big)$ d'où

$$|\sigma_n(p,f) - f'(0)S_{n,p}| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{pn}\Big|\varepsilon\Big(\frac{1}{n+k}\Big)\Big| \leqslant \frac{pn+1}{n}\sup_{x\in[0,\frac{1}{n}]}\Big|\varepsilon\Big(\frac{1}{n+k}\Big)\Big|$$

donc cette différence converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
Lorsque f est la fonction $x \mapsto \log(1+x)$, on obtient (comme précédemment) que :

$$\sigma_n(p,f) = \log\,((p+1)n+1) - \log\,(n) = \log\,\left(1 + p + \frac{1}{n}\right)$$

puis que $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(p,f) = \log\,(p+1)$ c'est à dire $S_p = \log\,(p+1)$.

Correction 124 de l'exercice 828

1. $\ln(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o\left(x^6\right)$.
2. $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o\left(x^7\right)$.
3. $\sin(\tan x) = x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{55}{1008}x^7 + o\left(x^7\right)$.
4. $(\ln(1+x))^2 = x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o\left(x^4\right)$.
5. $\exp(\sin x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^3\right)$.
6. $\sin^6 x = x^6 + o\left(x^6\right)$.

Correction 125 de l'exercice 830

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x) - \sin(x)}{\tan(x) - \arcsin(x)} = -1.$$

Correction 126 de l'exercice 831

1. $\ln\cos x = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o\left(x^7\right)$.
2. $\dfrac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x} = 2 - \frac{11}{10}x^2 + o\left(x^3\right)$.
3. $\ln(\tan(1/2\,x + 1/4\,\pi)) = x + \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^4\right)$.
4. $\ln\sin x = \ln(1/2\sqrt{2}) + x - \frac{\pi}{4} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right)$.
5. $\sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt[3]{x^3-x} = 2/3\,\frac{1}{x} + o(\frac{1}{x^4})$.
6. $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e - 1/2\,ex + \frac{11}{24}\,ex^2 - \frac{7}{16}\,ex^3 + o\left(x^3\right)$.
7. $x\left(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}\right) = 1/8\,\frac{\sqrt{2}}{x^2} + o(x^{-5})$.

Correction 127 de l'exercice 839

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(x) - x}{x^2} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \arctan(x) - x^4}{\cos(x^2) - 1} = 0.$$

Correction 128 de l'exercice 866

1. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$ est convergente (en fait elle vaut $\sqrt{\pi}$).
2. $\displaystyle\int_1^{\infty} x^x dx$ est divergente.
3. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\sin(x^{-1})}{\ln(1+x)} dx$ est divergente.
4. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \ln(2+\sqrt{3})$.
5. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^5}{x^{12}+1} dx = 1/12\,\pi$.
6. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx = 2$.
7. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sinh(x)} dx = -\ln \operatorname{th}(1/2)$.

54 ALGÈBRE 3

Correction 129 de l'exercice 893

1. Oui.
2. Non. Le seul élément qui peut être l'élément neutre est 1 qui n'appartient pas à l'ensemble.
3. Non. 0 n'a pas d'inverse.
4. Oui.

Correction 130 de l'exercice 896 Le premier ensemble n'est pas un groupe car, par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ne peut avoir pour inverse que $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ qui n'appartient pas à l'ensemble.
Notons $G = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) : \det M = 1\}$ et montrons que G est un sous-groupe de $Gl(2,\mathbb{R})$.
- la matrice identité appartient à G.
- si $A, B \in G$ alors $AB \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ et $\det AB = \det A \times \det B = 1 \times 1 = 1$, et donc $AB \in G$.
- Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(a,b,c,d \in \mathbb{Z})$ alors $\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ appartient à G et est l'inverse de A.

Correction 131 de l'exercice 904

1. L'ensemble G des matrices $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ avec $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tels que $ad - bc \neq 0$ et $a^2 - b^2 - c^2 - d^2 \leqslant 1$ n'est pas un sous-groupe de $Gl_2(\mathbb{R})$. En effet les deux matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$ appartiennent à G et leur produit $\begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à G.

2. L'ensemble H des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ est un sous groupe de $Gl_2(\mathbb{R})$.
   En effet,
   - I_2 élément neutre de $Gl_2(\mathbb{R})$ appartient à H.
   - Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$ deux éléments de H alors $MM' = \begin{pmatrix} ac & ad + bc^{-1} \\ 0 & (ac)^{-1} \end{pmatrix}$ donc le produit de deux éléments de H appartient à H.
   - Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$. Alors $M^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ appartient à H.
3. Soit K_M l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $ad - bc \neq 0$ et $a \leqslant M$.
   Nous allons montrer, en raisonnant par l'absurde, qu'il n'existe pas de valeur $M \in \mathbb{R}$ telle que K_M forme un sous-groupe de $Gl_2(\mathbb{R})$.
   Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que K_M forme un sous-groupe de $Gl_2(\mathbb{R})$. Alors I_2 appartient à K_M donc $M \geqslant 1$. Ainsi, les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n & 1 \end{pmatrix}$ appartiennent à K_n donc le produit $AA_n = \begin{pmatrix} 1+n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ appartient à K_n. En conséquence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 + n \leqslant M$, ce qui est absurde.

Correction 132 de l'exercice 905

- Si $H \subset K$ alors $H \cup K = K$, qui est un sous-groupe de H. Même chose si $K \subset H$.
- Réciproquement, supposons que $H \cup K$ est un sous-groupe de G. Par l'absurde supposons que $H \not\subset K$ et $K \not\subset H$. Alors il existe $x \in H \setminus K$ et $y \in K \setminus H$. Comme $x, y \in H \cup K$ et que $H \cup K$ est un groupe alors $x.y \in H \cup K$. Donc $x.y \in H$ ou $x.y \in K$. Par exemple supposons $x.y \in H$ alors comme $x \in H$, $x^{-1} \in H$ et donc comme H est un groupe $x^{-1}.x.y \in H$ et donc $y \in H$. Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $y \in K \setminus H$. En conclusion, parmi les sous-groupes H, K l'un est inclus dans l'autre.

Correction 133 de l'exercice 908 Soit $G = \langle a, b \rangle$, tout élément g de G S'écrit $g = a^{\alpha_1} b^{\beta_1} a^{\alpha_2} b^{\beta_2} \ldots a^{\alpha_n} b^{\beta_n}$ avec $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}$. Si $h \in \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$, alors en particulier $h \in \langle a \rangle$ et $h = a^{\mu}$ avec $\mu \in \mathbb{Z}$, donc h commute avec a^{α_i} pour tout α_i dans $\mathbb{Z}$ (en effet $a^{\alpha_i} a^{\mu} = a^{\alpha_i + \mu} = a^{\mu} a^{\alpha_i}$. De même $h \in \langle b \rangle$ donc h s'écrit également $h = b^{\nu}$ ($\nu \in \mathbb{Z}$) et h commute avec b^{β_i}. Donc $hg = (ha^{\alpha_1}) b^{\beta_1} \ldots = (a^{\alpha_1} h) b^{\beta_1} \ldots = a^{\alpha_1} (h b^{\beta_1}) \ldots = a^{\alpha_1} (b^{\beta_1} h) \ldots = \cdots$ Finalement $hg = a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \ldots a^{\alpha_n} b^{\beta_n} h = gh$. Ainsi h commute avec tout élément de G et appartient ainsi au centre de G.

Correction 134 de l'exercice 911 Notons G l'ensemble des éléments d'ordre fini de H. Montrons que G est un sous-groupe de H.

– $G \subset H$ et $0 \in G$.
– Si $x \in G$ alors $(-x) + (-x) + \cdots + (-x) = -(x + x + \cdots + x) = 0$. Donc $-x \in G$.
– Si $x, y \in G$ alors $(x + y) + \cdots + (x + y) = (x + \cdots + x) + (y + \cdots + y) = 0 + 0 = 0$. Donc $x + y \in G$.

Nous venons de montrer que G est un sous-groupe de H. De plus comme H est commutatif alors G l'est aussi !

Correction 135 de l'exercice 912

1. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est d'ordre 2. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas d'ordre fini puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Notons e_G et e_H les éléments neutres respectifs de G et de H. Soit g un élément de G d'ordre n.

   - Alors $\varphi(g)^n = \varphi(g^n) = \varphi(e_G) = e_H$. Donc $\varphi(g)$ est d'ordre inférieur ou égal à n, ordre de g.

   - Supposons φ injectif et $\varphi(g)$ d'ordre strictement inférieur à n, c'est à dire qu'il existe $p < n$ tel que : $\varphi(g)^p = e_H$. Alors $\varphi(g^p) = e_H$ donc, puisque φ est injectif et $\varphi(e_G) = e_H$, on a aussi : $g^p = e_G$, ce qui est impossible puisque l'ordre de g est n.

3. Raisonnons par l'absurde : Soit G un groupe fini. Supposons qu'il existe dans G un élément g n'étant pas d'ordre fini. Comme G est un groupe, on peut considérer $X = \{g^k\ k \in \mathbb{N}\}$. Or, pour $i \neq j\ :\ g^i \neq g^j$. En effet, supposons $i < j$. Si $g^i = g^j$ alors $g^{j-i} = e_G$ et g est d'ordre inférieur ou égal à $j - i$, donc fini, ce qui est impossible. X est donc un ensemble infini. G contient un ensemble infini donc est infini, ce qui est absurde, donc g ne peut être que d'ordre fini.

Correction 136 de l'exercice 915 Rappelons d'abord que pour x un élément d'ordre n, alors

$$x^q = e \Longrightarrow n|q.$$

– Si n est pair alors $ord(x^2) = n/2$: en effet $(x^2)^{\frac{n}{2}} = x^n = e$ et pour $p \geqslant 1$ tel que $(x^2)^p = e$ alors $x^{2p} = e$ et $n|2p$ donc $p \geqslant \frac{n}{2}$. Donc $n/2$ est le plus petit des entiers q (non nul) tel que $x^q = e$ et par conséquent $n/2$ est l'ordre de x.
– Si n est impair alors $ord(x) = n$. Tout d'abord $(x^2)^n = (x^n)^2 = e$ et pour p tel que $(x^2)^p = e$ alors $n|2p$ mais 2 et n sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, $n|p$ et en particulier $p \geqslant n$.

Correction 137 de l'exercice 916

1. Déjà $(xy)^{mn} = x^{mn}y^{mn} = (x^m)^n(y^n)^m = e.e = e$. Soit p tel que $(xy)^p = e$, alors $e = (xy)^{mp} = x^{mp}y^{mp} = y^{mp}$, et donc mp est divisible par l'ordre de y , c'est-à-dire n. Comme m et n sont premiers entre eux alors d'après le théorème de Gauss n divise p. Un raisonnement semblable à partir de $(xy)^{np} = e$ conduit à : m divise p. Finalement $m|p$ et $n|p$ donc $mn|p$ car m et n sont premiers entre eux.

   Voici un contre exemple dans le cas où m et n ne sont pas premiers entre eux : dans le groupe $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$: $\bar{2}$ est d'ordre 6, $\bar{4}$ est d'ordre 3, mais $\bar{2} + \bar{4} = \bar{6}$ est d'ordre $2 \neq 3 \times 6$.

2. A est d'ordre 4, B est d'ordre 3, $(AB)^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est jamais la matrice identité pout $n \geqslant 1$.

Correction 138 de l'exercice 917 Par l'absurde supposons que $(\mathbb{Q}, +)$ est engendré par un seul élément $\frac{p}{q}$ (p et q premiers entre eux) alors tout élément de $\mathbb{Q}$ s'écrit $n\frac{p}{q}$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Il s'ensuit que $\frac{p}{2q}$ (qui appartient à $\mathbb{Q}$) doit s'écrire $n\frac{p}{q}$, mais alors $2n = 1$ avec $n \in \mathbb{Z}$ ce qui est impossible. Conclusion $(\mathbb{Q}, +)$ n'est pas monogène.

Correction 139 de l'exercice 918 Soit $f : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$ un morphisme de groupe. Comme tout morphisme f vérifie $f(0) = 0$. Notons $a = f(1)$. Alors

$$f(2) = f(1 + 1) = f(1) + f(1) = a + a = 2.a.$$

De même, pour $n \geqslant 0$:

$$f(n) = f(1 + \cdots + 1) = f(1) + \cdots + f(1) = n.f(1) = n.a.$$

Enfin comme

$$0 = f(0) = f(1 + (-1)) = f(1) + f(-1) = a + f(-1),$$

alors $f(-1) = -a$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$f(n) = n.a.$$

Donc tous les morphisme sont de la forme $n \mapsto n.a$, avec $a \in \mathbb{Z}$.

Un morphisme $n \mapsto n.a$ est injectif si et seulement si $a \neq 0$, et surjectif si et seulement si $n = \pm 1$.

Correction 140 de l'exercice 920

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}, +) &\longrightarrow (\mathbb{C}^*, \times) \\ x &\mapsto e^{ix} \end{aligned}$$

Vérifions que f est un morphisme de groupe. Soit $x, y \in \mathbb{R}$, alors

$$f(x + y) = e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy} = f(x) \times f(y),$$

et

$$f(x^{-1}) = e^{i(-x)} = \frac{1}{e^{ix}} = f(x)^{-1}.$$

Donc f est un morphisme de groupe.
Montrons que f n'est pas injective en prouvant que le noyau n'est pas réduit à 0 :

$$\operatorname{Ker} f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } f(x) = 1\} = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } e^{ix} = 1\right\} = \{x = 0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$

Enfin

$$\operatorname{Im} f = \left\{y \in \mathbb{C}^*, y = e^{ix}\right\}$$

est l'ensemble des complexes de module 1, c'est-à-dire le cercle de centre 0 et de rayon 1.

Correction 141 de l'exercice 928 Soit $\phi : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ un morphisme entre les deux groupes multiplicatifs $\mathbb{C}^*$ et $\mathbb{R}^*$. Notons $a = \phi(i) \in \mathbb{R}^*$. Alors $\phi(-1) = \phi(i^2) = \phi(i)^2 = a^2$, de même $1 = \phi(1) = \phi((-1)^2) = \phi(-1)^2 = a^4$; donc $a^4 = 1$ et nécessairement $a^2 = 1$. Le morphisme ϕ n'est pas injectif car $\phi(1) = \phi(-1) = 1$, *a fortiori* ϕ n'est pas un isomorphisme.

Correction 142 de l'exercice 957 Soit $x \neq e$ un élément de G, soit $H = \{e, x, x^2, \ldots\}$ le sous-groupe engendré par x. H est un sous-groupe de G donc $\operatorname{Card} H$ divise $\operatorname{Card} G = p$ qui un nombre premier. En conséquent $\operatorname{Card} H = 1$ ou p mais $H \neq \{e\}$ donc $\operatorname{Card} H = p$ et $H = G$. Nopus venons de montrer que G est engendré par x donc G est cyclique, de plus le raisonnement est valide quelque soit $x \neq e$ alors tout élément de $G \setminus \{e\}$ est un générateur de G.

Correction 143 de l'exercice 958

1. $H \cap H'$ est un sous-groupe de H donc $\operatorname{Card} H \cap H'$ divise $\operatorname{Card} H = p$. Or p est premier donc $\operatorname{Card} H \cap H' = 1$ ou p. Mais $H \cap H' \neq H$ donc $\operatorname{Card} H \cap H' \neq p$ et donc $H \cap H' = \{e\}$.

2. Soit E l'ensemble des éléments d'ordre p que l'on suppose non vide. Notons que pour $x \in E$ le sous-groupe H_x engendré par x est d'ordre p et de plus tout $z \in H_x \setminus \{e\}$ est d'ordre p car H_x est cyclique et p est premier. Donc H_x contient $p-1$ élément d'ordre p.
   Si E ne contient qu'un seule élément x alors $E = H_x \setminus \{e\}$ et donc E contienet $p-1$ éléments.
   Sinon, soit $x, y \in E$ avec $x \neq y$. Alors d'après la première question $H_x \cap H_y = \{e\}$. Donc E se décompose en une union disjointe de $H_x \setminus \{e\}$. Donc $\operatorname{Card} E$ est multiple de $p-1$.

Correction 144 de l'exercice 960

1. Notons d'abord que pour $x \in G$ $x^2 = e$ et donc $x^{-1} = x$. Soit maintenant $x, y \in G$. Alors $xy \in G$ et $(xy)^2 = e$ donc $xy = (xy)^{-1}$ et par suite $xy = y^{-1}x^{-1} = yx$ car x et y sont d'ordre 2. Le produit de deux éléments quelconques de G commute donc G est commutatif.
2. Notons E l'ensemble des éléments d'ordre 2.
$$E = \{x \in G \ / \ x^2 = e \text{ et } x \neq e\} = \{x \in G \ / \ x = x^{-1} \text{ et } x \neq e\}.$$
   Par l'absurde supposons que H est l'ensemble vide. Alors quelque soit $x \neq e$ dans G $x \neq x^{-1}$. Donc nous pouvons décomposer $G \setminus \{e\}$ en deux ensembles disjoints $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $F' = \{{x_1}^{-1}, \ldots, {x_n}^{-1}\}$ qui sont de même cardinal n. Donc le cardinal de G est $2n+1$ (le $+1$ provient de l'élément neutre). Ce qui contredit l'hypothèse ¡¡ G d'orde pair ¿¿.

Correction 145 de l'exercice 973

1. $|S_n| = n!$ donc $|S_3| = 3! = 6$. Montrons plus généralement qu'il n'existe pas d'élément d'ordre $n!$ dans S_n ($n \geqslant 3$). Par l'absurde soit α un tel élément. Alors par hypothèse S_n est engendré par α et donc S_n est un groupe commutatif. Mais $(1,2)(2,3) \neq (2,3)(1,2)$ ce qui est absurde. En conclusion il n'existe pas d'éléments d'ordre 6.
2. Explicitons S_3 :
$$S_3 = \left\{id; \tau_1 = (1,2); \tau_2 = (2,3); \tau_3 = (1,3); \sigma_1 = (1,2,3); \sigma_2 = \sigma_1^{-1} = (3,2,1)\right\}.$$
   Remarquons
   Les sous-groupes d'ordre 2 sont de la forme $\{id; \tau\}$ avec $\tau^2 = id$. Les seuls éléments d'ordre 2 sont les transpositions et donc se sont les groupes $\{id; (1,2)\}$,{ id ; (1,3) }, $\{id; (2,3)\}$.
   Les sous-groupes d'ordre trois sont de la forme $\{id, \sigma, \sigma^2\}$ avec $\sigma^2 = \sigma^{-1}$. Et donc le seul sous-groupe d'ordre 3 est $\{id; (1,2,3); (3,2,1)\}$.
3. Les sous-groupes de S_3 ont un ordre qui divise $|S_3| = 6$. Donc un sous-groupe peut-être d'ordre $1, 2, 3$ ou 6. L'unique sous-groupe d'ordre 1 est $\{id\}$, et l'unique sous-groupe d'ordre 6 est S_3. Les sous-groupes d'ordre 2 et 3 ont étés donnés à la question précédente.

Correction 146 de l'exercice 979

1. $\sigma = (1,3)(2,7,9,5) = (2,7,9,5)(1,3)$ et $\sigma^k = (1,3)^k(2,7,9,5)^k$. Les transpositions sont d'ordre 2 donc $(1,3)^k = \text{id}$ si $k \equiv 0 \pmod 2$ et $(1,3)^k = (1,3)$ si $k \equiv 1 \pmod 2$. Le cycle $(2,7,9,5)$ est d'ordre 4, et $(2,7,9,5)^k$ est respectivement égale à id, $(2,7,9,5)$, $(2,9)(7,5)$, $(5,9,7,2)$ si k est respectivement congru à $0,1,2,3$ modulo 4. Le calcul de σ^k donne donc id, $(1,3)(2,7,9,5)$, $(2,9)(7,$ ou $(1,3)(5,9,7,2)$ selon que k est congru à $0,1,2$ ou 3 modulo 4.

2. L'écriture de $\varphi = (10,3,4,1)(8,7)(4,7)(5,6)(2,6)(2,9)$ est une décomposition en produit de cycles mais ils ne sont pas à supports disjoints. Écrivons φ sous la forme :

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 4 & 8 & 6 & 2 & 1 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Ce qui se décompose $\varphi = (1,10,3,4,8,7)(2,9,5,6) = (2,9,5,6)(1,10,3,4,8,7)$. Le calcul de $\varphi^k = (1,10,3,4,8,7)^k(2,9,5,6)^k$ est similaire au calcul précédent (selon $k(\mod 12)$)

Correction 147 de l'exercice 987

1. $\mathcal{S}_N$ est l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1,2,\dots,N\}$. Dans $\mathcal{S}_{n+2}$ notons τ la permutation $(n+1,n+2)$. Nous définissons une application $\phi : \mathcal{S}_n \longrightarrow \mathcal{S}_{n+2}$ par les relations
$$\phi(\sigma) = \sigma \text{ si } \varepsilon(\sigma) = +1 \quad ; \quad \phi(\sigma) = \sigma \circ \tau \text{ sinon} ;$$
où ε désigne la signature. Alors ϕ est un morphisme de groupe, de plus quelque soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ alors $\varepsilon(\phi(\sigma)) = +1$ (si $\varepsilon(\sigma) = +1$ c'est clair, sinon $\varepsilon(\phi(\sigma)) = \varepsilon(\sigma) \times \varepsilon(\tau) = (-1) \times (-1) = +1$). Donc $\phi(\mathcal{S}_n)$ est un sous-groupe de $\mathcal{A}_{n+2}$.

   Enfin ϕ est injective : en effet soit σ tel que $\phi(\sigma) = \text{id}$. Soit $\varepsilon(\sigma) = +1$ et alors $\phi(\sigma) = \sigma = \text{id}$; soit $\varepsilon(\sigma) = -1$ et alors $\phi(\sigma) = \sigma \circ \tau$, pour $j \in \{1,2,\dots,n\}$ $j = \phi(\sigma)(j) = \sigma \circ \tau(j) = \sigma(j)$, et donc quelque soit $j \in \{1,2,\dots,n\}$ $\sigma(j) = j$ et donc $\sigma = \text{id}$. On vient de démontrer que la composée de deux permutations à supports disjoint est l'identité si et seulement si les permutations sont déjà l'identité !

   Notons encore $\phi : \mathcal{S}_n \longrightarrow \phi(\mathcal{S}_n)$ le morphisme induit par ϕ. Il est injectif et surjectif, donc $\mathcal{S}_n$ est isomorphe $\phi(\mathcal{S}_n)$ qui est un sous-groupe de $\mathcal{A}_{n+2}$.
2. $\mathcal{A}_5$ est de cardinal $5!/2 = 60$, et comme $24 = \operatorname{Card} \mathcal{S}_4$ ne divise pas 60 alors $\mathcal{A}_5$ n'a pas de sous-groupe d'ordre 24.
3. C'est un peu plus délicat car $\operatorname{Card} \mathcal{S}_5 = 5! = 120$ divise $\operatorname{Card} \mathcal{A}_6 = 6!/2 = 360$ donc l'argument ci-dessus n'est pas valide. Cependant s'il existe un isomorphisme entre $\mathcal{S}_5$ et un sous-groupe de $\mathcal{A}_6$ alors un cycle d'ordre 5 de $\mathcal{S}_5$ est envoyé sur une permutation $\sigma \in \mathcal{A}_6$ d'ordre 5.

   Décomposons σ en produit de cycles à supports disjoints, $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots$. Comme les cycles σ_i sont à supports disjoints, il y a au plus trois cycles (de longueur $\geqslant 2$) dans la décomposition (car dans $\mathcal{A}_6$ on peut permuter au plus 6 éléments).
   - Le cas $\sigma = \sigma_1$ n'est pas possible car alors σ_1 serait un cycle d'ordre 5 et donc de signature -1 dans $\mathcal{A}_6$.
   - Si $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$ alors les longueurs de σ_1 et σ_2 sont $(4,2)$ ou $(2,2)$, et l'ordre de leur composée $\sigma_1 \circ \sigma_2$ est donc 4 ou 2 mais pas 5.
   - Si $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$ alors les σ_i sont des transpositions, et la signature de σ est alors -1 ce qui contredit $\sigma \in \mathcal{A}_6$.

Correction 148 de l'exercice 989 $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$.

1. Soit $\phi : H \times K \to HK$ définie par $\phi(h,k) = hk$. Montrons que ϕ est bijective : ϕ est surjective par définition de HK et si $\phi(h,k) = \phi(h',k')$ alors $hk = h'k'$ et donc $h'^{-1}h = k'k^{-1}$ or $H \cap K = \{e_G\}$ et donc $h'^{-1}h = e_G$ et donc $h = h'$, de même $k = k'$ et donc ϕ est injective.

   Comme ϕ est bijective $\operatorname{Card} H \times K = \operatorname{Card} HK$ et donc $\operatorname{Card} HK = \operatorname{Card} H.\operatorname{Card} K$.

2. Supposons qu'il existe deux sous-groupes H et K distincts et d'ordre p. Montrons d'abord que $H \cap K = \{e_G\}$. En effet $H \cap K$ est un sous-groupe de H et donc le cardinal de $H \cap K$ divise $\operatorname{Card} H = p$ avec p premier. Or comme $H \neq K$ alors $H \cap K \neq H$ et donc $\operatorname{Card} H \cap K = 1$, c'est ce que nous voulions démontrer.

   Maintenant d'après la première question HK est un sous-groupe de cardinal p^2 dans le groupe G de cardinal $pq < p^2$. Donc il ne peut exister deux sous-groupe d'ordre p.

   Supposons maintenant que H soit un sous-groupe d'ordre p, c'est donc l'unique sous-groupe d'ordre p d'après ce que nous venons de démontrer. Pour $g \in G$ le sous-groupe gHg^{-1} est du même ordre que H (car pour g fixé le morphisme θ_g de G dans G, $\theta_g(h) = ghg^{-1}$ est un automorphisme et en particulier un biction donc $\operatorname{Card} \theta_g(H) = \operatorname{Card} H$). Par conséquent $gHg^{-1} = H$ et donc H est un sous-groupe distingué.

Correction 149 de l'exercice 995 Soit G sous-groupe de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, alors $\operatorname{Card} G$ divise $\operatorname{Card} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} = 8$. Donc $\operatorname{Card} G \in \{1, 2, 4, 8\}$. De plus si G contient la classe $\bar{n}$ d'un nombre impair, alors G contient le sous-groupe engendré par $\bar{n}$ qui est $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ car alors n et 8 sont premiers entre eux, donc $G = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.
Étude des cas. Si $\operatorname{Card} G = 8$ alors $G = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Si $\operatorname{Card} G = 4$ alors G ne peut contenir que des classes d'entiers pairs d'après la remarque précédente, mais comme il y a exactement 4 classes d'entiers pairs alors $G = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$. Si $\operatorname{Card} G = 2$ alors $G = \{\bar{0}, x\}$ et x est un élément d'ordre 2, le seul élément d'ordre 2 de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ est $\bar{4}$. Donc $G = \{\bar{0}, \bar{4}\}$. Enfin si $\operatorname{Card} G = 1$ alors $G = \{\bar{0}\}$.

Correction 150 de l'exercice 998 La relation d'équivalence associée au quotient $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^*_+$ est :

$$x \sim y \Leftrightarrow xy^{-1} > 0.$$

Si $x > 0$ alors $x \sim +1$ car $x(1)^{-1} > 0$ (en fait x est équivalent à n'importe quel réel strictement positif) ; si $x < 0$ alors $x \sim -1$ car $x(-1)^{-1} > 0$, enfin -1 et $+1$ ne sont pas équivalents. Il y a donc deux classes d'équivalence : $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^*_+ = \{\overline{+1}, \overline{-1}\}$.
L'application $\phi : \mathbb{R}^*/\mathbb{R}^*_+ \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ définie par $\phi(\overline{+1}) = \tilde{0}$ et $\phi(\overline{-1}) = \tilde{1}$ est un isomorphisme entre les deux groupes.

Correction 151 de l'exercice 1002

1. Il faut montrer que pour $x \in G$ et $y \in D(G)$, $xyx^{-1} \in D(G)$. Commençons par montrer ceci pour y un générateur de $D(G)$. Si $y = ghg^{-1}h^{-1}$ avec $g, h \in G$. Nous remarquons que :
$$xyx^{-1} = \left(xghx^{-1}(gh)^{-1}\right)\left(ghg^{-1}h^{-1}\right)\left(hgx(hg)^{-1}x^{-1}\right)$$
   qui est un produit d'éléments de $D(G)$. Donc xyx^{-1} est un élément de $D(G)$.

   Soit maintenant y un élément quelconque de $D(G)$, alors il s'écrit comme produit de générateurs :
$$y = y_1y_2 \dots y_n, \qquad \text{avec } y_i = g_ih_ig_i^{-1}h_i^{-1}.$$
   Écrivons $xyx^{-1} = (xy_1x^{-1})(xy_2x^{-1}) \dots (xy_nx^{-1})$. Chaque xy_ix^{-1} appartient à $D(G)$. Et donc xyx^{-1}. Donc $D(G)$ est un sous-groupe distingué de G.
2. Soit $\alpha, \beta \in G/D(G)$, alors il existe $a, b \in G$ tels que $\bar{a} = \alpha$ et $\bar{b} = \beta$. Nous savons que $aba^{-1}b^{-1} \in D(G)$ et donc $\overline{aba^{-1}b^{-1}} = \varepsilon$ où ε est l'élément neutre de $G/D(G)$. Mais
$$\overline{aba^{-1}b^{-1}} = \bar{a}\overline{ba^{-1}b^{-1}} = \bar{a}\bar{b}\bar{a}^{-1}\bar{b}^{-1} = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}.$$
   Donc $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = \varepsilon$, autrement dit $\alpha\beta = \beta\alpha$. Et ceci quelque soit α et β, donc $G/D(G)$ est commutatif. Généralisation : si H est un sous-groupe distingué.

- Si $D(G) \subset H$ alors $G/D(G)$ est un sous-groupe de G/H donc G/H est commutatif car $G/D(G)$ l'est.
- Si G/H est commutatif alors pour $g, h \in G$ la classe de $ghg^{-1}h{-}1$ dans G/H vérifie :

$$\overline{ghg^{-1}h{-}1} = \overline{g}\overline{hg^{-1}h^{-1}} = \overline{g}\overline{g^{-1}}\overline{h}\overline{h^{-1}} = \varepsilon.$$

Mais les éléments dont la classe dans G/H est l'élément neutre sont exactement les éléments de H. Donc $ghg^{-1}h^{-1}$ appartient à H. Ainsi tous les générateurs de $D(G)$ sont dans H et donc $D(G) \subset H$.

Correction 152 de l'exercice 1006 Notons $C = AB = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Un calcul donne $C^8 = I$ et pour $1 \leqslant k \leqslant 7$, $C^k \neq I$. Donc le groupe H engendré par C est d'ordre 8. Attention ! même si $A^2 = I$ et $B^2 = I$ on a $(AB)^2 \neq I$ car $AB \neq BA$.
2. Pour montrer que H est distingué il suffit de montrer que ACA^{-1} et BCB^{-1} sont dans H. Mais $ACA^{-1} = ACA = AABA = BA = (AB)^{-1} \in H$. De même $BCB^{-1} = (AB)^{-1}$. Donc H est distingué dans H.

   Un élément M de G s'écrit

   $$M = A^{a_1}B^{b_1}A^{a_2}\dots A^{a_n}B^{b_n} \quad a_i, b_i \in \mathbb{Z}.$$

   Mais dans G/H tout terme $\overline{AB}$ ou $\overline{BA}$ vaut $\overline{I}$ Donc $G/H = \{\overline{I}, \overline{A}, \overline{A}^2, \overline{A}^3, \dots, \overline{B}, \overline{B}^2, \overline{B}^3, \dots\}$ mais comme $A^2 = B^2 = I$ et $AB \in H$ alors G/H s'écrit simplement :

   $$G/H = \left\{\overline{I}, \overline{A}\right\}.$$

   Enfin, par la formule $|G| = |H| \times |G/H|$ nous obtenons $|G| = 8 \times 2 = 16$.

Correction 153 de l'exercice 1007

1. (a) $f((x,y)+(x',y')) = f(x+x', y+y') = 3(x+x') + 6(y+y') = 3x+6y+3x'+6y' = f(x,y) + f(x',y')$.
   (b) $\operatorname{Ker} f = \{(x,y); f(x,y) = 0\} = \{(x,y); 3x+6y = 0\} = \{(x,y); x = -2y\} = \{(-2k,k); k \in \mathbb{Z}\}$. Si $\operatorname{Ker} f = p\mathbb{Z} \times q\mathbb{Z}$ alors $f(p,0) = 0$ donc $3p = 0$ soit $p = 0$. De même $f(0,q) = 0$ implique $q = 0$ et alors $\operatorname{Ker} f = \{(0,0)\}$, ceci contredit le fait que $f(-2,1) = 0$.
   (c) On a $f(\mathbb{Z}^2) = 3\mathbb{Z}$, le morphisme $f : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow 3\mathbb{Z}$ définit par passage au quotient par le noyau un morphisme injectif $\bar{f} : \mathbb{Z}^2/\operatorname{Ker} f \longrightarrow 3\mathbb{Z}$ (c'est le théorème de factorisation). De plus comme f est surjectif alors $\bar{f}$ l'est aussi. Ainsi $\bar{f}$ est un isomorphisme entre $\mathbb{Z}^2/\operatorname{Ker} f = \mathbb{Z}^2/(-2,1)\mathbb{Z}$ et $3\mathbb{Z}$.
2. Définissons $g : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par $g(x,y) = (\bar{x}, \bar{y})$ où $\bar{n}$ désigne la classe de n dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le noyau de g est $2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} = \langle (2,0); (0,2) \rangle = G$. Le passage au quotient par le noyau définit l'isomorphisme $\bar{g}$ cherché.

Correction 154 de l'exercice 1151 $\operatorname{tr} a = \operatorname{tr} A = -1$, $\det a = \det A = -6$

$$P_a(X) = X^2 - \operatorname{tr} X + \det a = X^2 + X - 6 = (X-2)(X+3).$$

Donc le spectre est $\{2, -3\}$, il est de taille 2 comme l'espace est de dimension 2. D'après le cours, a est diagonalisable et les espaces propres de dimension 1. L'espace propre associé à la valeur propre 2 est l'ensemble des (x,y) tels que $7x-10y=2x$ ou $x=2y$. On peut prendre $\vec{f_1}=(2,1)$ pour base de cet espace propre. L'espace propre associé à la valeur propre -3 est l'ensemble des (x,y) tels que $7x-10y=-3x$ ou $x=y$. On peut prendre $\vec{f_2}=(1,1)$ pour base de cet espace propre. Alors si $f=(\vec{f_1},\vec{f_2})$ on a

$$P=[\mathrm{id}_E]^e_f=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix},\quad P^{-1}=[\mathrm{id}_E]^f_e=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\end{bmatrix},\quad D=[a]^f_f=\begin{bmatrix}2&0\\0&-3\end{bmatrix}.$$

$$D^{50}=[a^{50}]^f_f=\begin{bmatrix}2^{50}&0\\0&(-3)^{50}\end{bmatrix},\ A^{50}=[a^{50}]^e_e=PD^{50}P^{-1}=\begin{bmatrix}2.2^{50}-(-3)^{50}&-2.2^{50}+2.(-3)^{50}\\2^{50}-(-3)^{50}&-2^{50}+2.(-3)^{50}\end{bmatrix}$$

Donc $\lim_{n\infty}\frac{1}{3^{2n}}[a^{2n}]^f_f=L=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$, et $\lim_{n\infty}\frac{1}{3^{2n}}[a^{2n}]^e_e=PLP^{-1}=\begin{bmatrix}-1&2\\-1&2\end{bmatrix}$.

Correction 155 de l'exercice 1152 Si $X=(x_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in F$, il est clair que $X=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_{ij}F_{ij}$. C'est donc une famille génératrice. Elle est indépendante, car si $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_{ij}F_{ij}$ est la matrice nulle, cela implique que $x_{ij}=0$ pour tous i et j. C'est donc une base de F. Elle est de taille n^2, donc F est de dimension n^2. Ensuite, si $D=\mathrm{diag}(d_1,\dots,d_n)$ et si $X=(x_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ alors le coefficient (i,j) de la matrice $\Phi(X)=\alpha XD+\beta DX$ est $(\alpha d_j+\beta d_i)x_{ij}$. Donc $\Phi(F_{ij})=(\alpha d_j+\beta d_i)F_{ij}$, ce qui est dire que F_{ij} est un vecteur propre de Φ pour la valeur propre $\alpha d_j+\beta d_i$. L'espace F admet donc une base de vecteurs propres de Φ. D'après le cours, cela entraîne que Φ est diagonalisable. Si on le représente dans la base de vecteurs propres, le déterminant de Φ est donc le produit des éléments diagonaux, c'est à dire $\det\Phi=\prod_{i=1}^n\prod_{j=1}^n(\alpha d_j+\beta d_i)$. Plus généralement $\det(\Phi-\lambda\mathrm{id}_F)=\prod_{i=1}^n\prod_{j=1}^n(\alpha d_j+\beta d_i-\lambda)$.

Correction 156 de l'exercice 1153 Notons $D_n=\det B$. Alors $D_1=2\cos\theta=\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}$ et $D_2=4\cos^2\theta-1=\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}$. Si n¿2, développons D_n par rapport à la dernière ligne, en recommencant encore une fois avec un des déterminants d'ordre $n-1$ obtenus. On obtient $D_n=2\cos\theta D_{n-1}-D_{n-2}$. Faisons l'hypothèse de récurrence que $D_k=\frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$ pour $k<n$. On a vu que c'est vrai pour $k=1$ et 2. Alors par des identités trigonométriques classiques $D_n=\frac{2\cos\theta\sin n\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin(n-1)\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$, et la récurrence est étendue. Puisque $\sin x=0\Leftrightarrow$ il existe un entier relatif k tel que $x=k\pi$ alors $D_n=0$ si et seulement si il existe $k=1,2,\dots,n$ tel que $\theta=\frac{k\pi}{n+1}$ les autres valeurs de k étant exclues car $0<\theta<\pi$. Par définition de P_A on a $P_A(-2\cos\theta)=D_n=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ qui s'annule pour les n nombres distincts $-2\cos\frac{k\pi}{n+1}$, $k=1,2,\dots,n$ qui sont nécessairement toutes les valeurs propres de A. Les valeurs propres de $2I_n+A$ sont donc $2-2\cos\frac{k\pi}{n+1}=4\sin^2\frac{k\pi}{2n+2}>0$. Le spectre de $2I_n-A$ est le même.

55 ANALYSE 3

Correction 157 de l'exercice 1296 Réponse : $m=n^2$, $M=\sqrt{30}$.

56 GÉOMÉTRIE

Neuvième partie
QCM et FORMULAIRES

QCM de révisions

Répondre en cochant la ou les cases correspondant à des assertions vraies (et seulement celles-ci).

Logique

Question 1 Soit l'équation $E : x^n = 27$.

1. ☐ E a une unique solution réelle quel que soit $n \geqslant 1$.
2. ☐ E a au moins une solution réelle quel que soit $n \geqslant 1$.
3. ☐ E a n solutions réelles quel que soit $n \geqslant 1$.
4. ☐ E a au moins n solutions complexes quel que soit $n \geqslant 1$.
5. ☐ E a exactement n solutions complexes quel que soit $n \geqslant 1$.

Question 2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + 1$.

1. ☐ f est injective.
2. ☐ f n'est pas injective.
3. ☐ f est surjective.
4. ☐ f n'est pas surjective.
5. ☐ La restriction de f, $f_| : [1, 2] \to [2, 5]$ est bijective.

Question 3 Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2 + 1$.

1. ☐ f est injective.
2. ☐ f n'est pas injective.
3. ☐ f est surjective.
4. ☐ f n'est pas surjective.
5. ☐ La restriction de f, $f_| : [1, 2] \to [2, 5]$ est bijective.

Question 4 Pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $z = x + iy$, on pose $e^z = e^x \times e^{iy} = e^{x+iy}$.

1. ☐ $|e^z| = e^x$.
2. ☐ $|e^z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
3. ☐ $\text{Arg } e^z = y$.
4. ☐ $\text{Arg } e^z = x + y$.
5. ☐ La fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto e^z$ est injective.

Question 5 Par quoi doit on compléter les pointillés pour que les **deux** assertions suivantes soient vraies :

$$z \in \mathbb{C} \quad z = \overline{z} \ldots\ldots z \in \mathbb{R} \quad ; \quad z \in \mathbb{C} \quad z^3 = -1 \ldots\ldots z = -1$$

1. ☐ $\Rightarrow$ et $\Leftarrow$.
2. ☐ $\Leftrightarrow$ et $\Leftrightarrow$.
3. ☐ $\Leftarrow$ et $\Leftrightarrow$.
4. ☐ $\Rightarrow$ et $\Rightarrow$.
5. ☐ $\Leftrightarrow$ et $\Leftarrow$.

Question 6 Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

1. ☐ $\exists N > 0 \ \ \forall n \ \ (n \geqslant N \Rightarrow x_n \geqslant 0)$.
2. ☐ $\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}^* \ \ x_n \leqslant \varepsilon$.
3. ☐ $\forall N \in \mathbb{N}^* \ \ \exists n \geqslant N \ / \ x_n < 0$.
4. ☐ $\exists n \in \mathbb{N}^* \ \ x_n = 0$.
5. ☐ $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N}^* \ \ \forall n \in \mathbb{N}^* \ \ (n \geqslant N \Rightarrow |x_n| \leqslant \varepsilon)$.

Question 7 Soit E un ensemble, $A, B \subset E$, soit $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Les assertions suivantes sont elles vraies quels que soient A et B inclus dans E ?

1. ☐ $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. ☐ $A\Delta B = \complement A \cap \complement B$.
3. ☐ Si $B \subset A$ alors $A\Delta B = A$.
4. ☐ Si E est un ensemble fini, $\operatorname{Card}(A\Delta B) \leqslant \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B$.
5. ☐ Si E est un ensemble fini, $\operatorname{Card}(A\Delta B) < \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B$.

Question 8 Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 1$ puis pour $n \geqslant 1$ $x_n = \frac{x_{n-1}}{n}$.

1. ☐ $\forall n \in \mathbb{N} \ \ x_n > 0$.
2. ☐ $\forall n \in \mathbb{N} \ \ x_{n+1} \leqslant x_n$.
3. ☐ $\exists N \in \mathbb{N} \ \ \exists c \in \mathbb{R} \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ \ (n \geqslant N \Rightarrow x_n = c)$.
4. ☐ $\forall n \in \mathbb{N} \ \ x_n \geqslant \frac{1}{2}\frac{1}{n!}$.
5. ☐ $\forall n \in \mathbb{N} \ \ x_n \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{n!}$.

Question 9 On lance de façon aléatoire deux dés identiques à 6 faces (numérotées de 1 à 6). On ne tient pas compte de l'ordre, par exemple le tirage 1 puis 5 est le même que 5 puis 1, mais les tirages 3 puis 3, et 3 puis 4 sont distincts.

1. ☐ Il y a 36 tirages distincts possibles.
2. ☐ Il y a 30 tirages distincts possibles.
3. ☐ Il y a 21 tirages distincts possibles.
4. ☐ La somme des deux chiffres a plus de chances d'être 7 que 2.
5. ☐ La somme des deux chiffres a strictement plus de chances d'être $\geqslant 11$ que $\leqslant 3$.

Question 10 Soit E un ensemble fini de cardinal n, soit $A \subset E$ un ensemble à p éléments, et $B \subset E$ un ensemble à q éléments. On note $\mathcal{S} = \{(a, b) \in A \times B \ / \ a \neq b\}$ et $\mathcal{T} = \{(I, b)$ avec $I \subset A; \operatorname{Card} I = r; b \in B\}$.

1. ☐ Si $A \cap B = \emptyset$ alors $\operatorname{Card} \mathcal{S} = p + q$.
2. ☐ Si $A \cap B = \emptyset$ alors $\operatorname{Card} \mathcal{S} = pq$.
3. ☐ Si $A \subset B$ alors $\mathcal{S} = \emptyset$.
4. ☐ $\operatorname{Card} \mathcal{T} = C_n^p \times r$.
5. ☐ $\operatorname{Card} \mathcal{T} = C_p^r \times q$.

Arithmétique

Question 11 Les propositions suivantes sont-elles vraies quels que soient $l \geqslant 2$ et $p_1, \ldots, p_l$ des nombres premiers > 2.

1. ☐ $p_1 p_2 \ldots p_l$ est un nombre premier.
2. ☐ le carré de p_1 est un nombre premier.
3. ☐ $p_1 p_2 \ldots p_l + 1$ est un nombre premier.
4. ☐ $\prod_{i=1}^{l} p_i$ est un nombre impair.
5. ☐ $\sum_{i=1}^{l} p_i$ est un nombre impair.

Question 12

1. ☐ Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier, alors $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ est divisible par 24.
2. ☐ Soit $n \geqslant 4$ un entier pair alors $\frac{n}{2}$ est impair.
3. ☐ La somme et le produit de deux nombres pairs est un nombre pair.
4. ☐ $a|b$ et $a'|b' \quad \Rightarrow \quad aa'|bb'$.
5. ☐ $a|b$ et $a'|b' \quad \Rightarrow \quad a+a'|b+b'$.

Question 13

1. ☐ Le pgcd de 924, 441 et 504 est 21.
2. ☐ 627 et 308 sont premiers entre eux.
3. ☐ Si $p \geqslant 3$ est premier, alors $p!$ est premier.
4. ☐ Soit $n \geqslant 2$ alors n et $n+1$ sont premiers entre eux.
5. ☐ Soit $n \geqslant 2$ un entier, le pgcd de $\{in^i$ pour $i = 1, \ldots, 100\}$ est n.

Question 14

1. ☐ $ab = \mathrm{pgcd}(a,b) \times \mathrm{ppcm}(a,b)$.
2. ☐ $abc = \mathrm{pgcd}(a,b,c) \times \mathrm{ppcm}(a,b,c)$.
3. ☐ $\mathrm{ppcm}(a,b,c)$ est divisible par c.
4. ☐ $\mathrm{ppcm}(1932, 345) = 19320$.
5. ☐ $\mathrm{ppcm}(5, 10, 15) = 15$.

Question 15

1. ☐ Si $a|bc$ et a ne divise pas b alors $a|c$.
2. ☐ Sachant que 7 divise 86419746×111 alors 7 divise 86419746.
3. ☐ Si $a = bq + r$ est la division euclidienne de a par b alors $\mathrm{pgcd}(a,b) = \mathrm{pgcd}(b,r)$.
4. ☐ Il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $195u + 2380v = 5$.
5. ☐ Sachant qu'il existe u, v tels que $2431u + 65520v = 39$ alors $\mathrm{pgcd}(2431, 65520) = 39$.

Question 16

1. ☐ $\exists P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) > 0$.
2. ☐ $\forall P \in \mathbb{Z}[X] \quad \exists x \in \mathbb{R}\ P(x) > 0$.
3. ☐ $\forall P \in \mathbb{Q}[X] \quad x \in \mathbb{Q} \Rightarrow P(x) \in \mathbb{Q}$.

4. $\square$ $\forall P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $\geqslant 1 \quad \exists z \in \mathbb{C} \mid P(z) = 0$.
5. $\square$ Tout polynôme de degré 2 est positif.

Question 17 Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ des polynômes non nuls $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, soit $I_P = \{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\}$, soit $\mathrm{val}(P) = \min I_P$.

1. $\square$ $\mathrm{val}(-X^7 + X^3 + 7X^2) = 2$.
2. $\square$ $\mathrm{val}(P + Q) \geqslant \min(\mathrm{val}(P), \mathrm{val}(Q))$.
3. $\square$ $\mathrm{val}(P \times Q) = \mathrm{val}(P) + \mathrm{val}(Q)$.
4. $\square$ $\mathrm{val}(k.P) = k.\mathrm{val}(P)$ où $k \in \mathbb{N}^*$.
5. $\square$ Si $Q|P$ alors $\mathrm{val}(P/Q) = \mathrm{val}(P) - \mathrm{val}(Q)$.

Question 18

1. $\square$ $X^4 + X^3 - X^2 - X$ est divisible par $X(X-1)$.
2. $\square$ Le reste la division euclidienne de $X^3 + X^2 + 3$ par $X - 1$ est $X + 4$.
3. $\square$ Le quotient de $X^5 + 2X^3 + X^2 + 2X + 1$ par $X^2 + 1$ est $X^3 + X + 1$.
4. $\square$ $X - 1$ divise $X^n - 1$ pour $n \geqslant 1$
5. $\square$ $X + 1$ divise $X^n + 1$ pour $n \geqslant 1$

Question 19

1. $\square$ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. $X - a$ divise P ssi $P(a) = 0$.
2. $\square$ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(x) = 0$.
3. $\square$ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, les racines de P^2 sont d'ordre au moins 2.
4. $\square$ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, x est racine simple ssi $P(x) = 0$.
5. $\square$ Un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n a n racines réelles.

Question 20

1. $\square$ $X^4 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
2. $\square$ $X^2 + 7$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
3. $\square$ $X^2 + 7$ est irréductible dans $\mathbb{C}[X]$.
4. $\square$ Dans $\mathbb{Z}[X]$, $\mathrm{pgcd}(X(X-1)^2(X^2+1), X^2(X-1)(X^2-1)) = X(X-1)$.
5. $\square$ Dans $\mathbb{Z}[X]$, $\mathrm{pgcd}(X^4 + X^3 + X^2 + X, X^3 - X2 - X + 1) = X + 1$.

Réels

Question 21 Réel et rationnels

1. $\square$ $(x \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{Q}) \Rightarrow x + y \in \mathbb{Q}$
2. $\square$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \Rightarrow x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
3. $\square$ $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})\ (\forall y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})\ x < y \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{Q} \mid x < z < y)$
4. $\square$ $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})\ (\forall y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})\ x < y \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid x < z < y)$
5. $\square$ Pour $n \geqslant 3$, n impair $\Rightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Question 22 Soient A, B, C des parties de $\mathbb{R}$

1. ☐ Si $\sup A$ existe alors $\max A$ existe.
2. ☐ Si $\max A$ existe alors $\sup A$ existe.
3. ☐ Pour A, B majorées et $C \subset A \cap B$ alors $\sup C \leqslant \sup A$ et $\sup C \leqslant \sup B$.
4. ☐ Si $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} + 1 \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ alors $\inf A = 0$ et $\sup A = 1$.
5. ☐ Si $B = \left\{ \frac{E(x)}{x} \mid x > 0 \right\}$ alors $\inf B = 0$ et $\sup B = 1$.

Question 23 Limites de suites

1. ☐ Si $u_n = n \sin(\frac{1}{n})$ alors (u_n) tend vers 1.
2. ☐ Si $u_n = \ln(\ln(n))$ alors (u_n) a une limite finie.
3. ☐ $u_n = \frac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}}$ alors (u_n) tend vers $+\infty$.
4. ☐ $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ alors (u_n) diverge.
5. ☐ $u_n = \sin(n)$, il existe une sous-suite de (u_n) convergente.

Question 24 Suites définies par récurrence. Soit $f(x) = 2x(1-x)$ et la suite définie par $u_0 \in [0,1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. ☐ $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \in [0,1]$
2. ☐ Quelque soit u_0 dans $[0,1]$, (u_n) est monotone.
3. ☐ Si (u_n) converge vers ℓ alors $\ell = 0$ ou $\ell = 1$.
4. ☐ Si (u_n) converge vers ℓ alors $\ell = 0$ ou $\ell = \frac{1}{2}$.
5. ☐ Si $u_0 \in]0,1[$ alors (u_n) ne converge pas vers 0.

Question 25 Fonctions continues

1. ☐ La somme, le produit et le quotient de deux fonctions continues est continue.
2. ☐ La fonction $\sqrt{\sqrt{x}} \ln x$ est prolongeable par continuité en 0.
3. ☐ Il existe $a, b \geqslant 0$ tels que fonction définie par $f(x) = -e^x$ si $x < 0$ et $f(x) = ax^2 + b$ si $x \geqslant 0$ soit continue.
4. ☐ Toute fonction impaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue en 0.
5. ☐ La fonction $\frac{\sqrt{|x|}}{x}$ est prolongeable par continuité en 0.

Question 26 Théorème des valeurs intermédiaires, fonctions bornées

1. ☐ La méthode de dichotomie est basée sur le théorème des valeurs intermédiaires.
2. ☐ Tout polynôme de degré $\geqslant 3$ a au moins une racine réelle.
3. ☐ La fonction $f(x) = \frac{1}{x^3(x^2+1)}$ admet au moins une racine réelle sur $]-1,+1[$.
4. ☐ Pour $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue admettant une limite finie en $+\infty$, f est bornée.
5. ☐ Pour $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue admettant une limite finie qui vaut $f(0)$ en $+\infty$ alors f est bornée et atteint ses bornes.

Question 27 Dérivation

1. ☐ La fonction $f(x) = 1/x$ est décroissante sur $\mathbb{R}^*$.
2. ☐ La fonction $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ est continue et dérivable en 0.
3. ☐ La fonction définie par $x \mapsto 0$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $x \mapsto x^2$ si $x \notin \mathbb{Q}$ est dérivable en 0.

4. ☐ Si $f(x) = P(x)e^x$ avec P un polynôme alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un polynôme Q_n tel que $f^{(n)}(x) = Q_n(x)e^x$.
5. ☐ Si $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ si $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(0) = 0$ alors f est dérivable en 0.

Question 28 Théorème de Rolle et des accroissements finis

1. ☐ Si f est dérivable sur $[a, b]$ avec $f(a) = f(b)$ il existe un unique $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. ☐ Si f fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et $f'(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.
3. ☐ Soit $f(x) = \ln x$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$, pour $x > 0$ il existe $c \in]0, x[$ tel que $\ln x = \frac{x}{c}$.
4. ☐ Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\lim f(x) = +1$ quand $x \to +\infty$ et $\lim f(x) = +1$ quand $x \to -\infty$ alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.
5. ☐ $\forall x > 0 \ e^x \leqslant xe^x + 1$

Question 29 Fonctions usuelles

1. ☐ $\forall n \in \mathbb{N} \ \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
2. ☐ $\forall x \in \mathbb{R} \ \operatorname{ch} x \geqslant \operatorname{sh} x$
3. ☐ $\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$.
4. ☐ $\operatorname{ch} 2x = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 x$
5. ☐ $\operatorname{th}(a + b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 - \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$

Question 30 Fonctions réciproques

1. ☐ Un fonction continue $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ strictement décroissante est bijective.
2. ☐ Si f est une fonction continue bijective croissante alors f^{-1} est croissante.
3. ☐ Si f est une fonction continue bijective ne s'annulant jamais alors $(\frac{1}{f})^{-1} = f$.
4. ☐ $\operatorname{Arcsin}(\sin x) = x$ pour tout $x \in [0, 2\pi[$.
5. ☐ Si $f(x) = \operatorname{Arctan}(x^2)$ alors $f'(x) = \frac{1}{1+x^4}$.

Primitives usuelles

C désigne une constante arbitraire. Les intervalles sont à préciser.

$$\int e^{\alpha t}\, dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} + C \quad (\alpha \in \mathbb{C}^*)$$

$$\int t^{\alpha}\, dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \text{Arctan } t + C$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \text{Arcsin } t + C$$

$$\int \cos t\, dt = \sin t + C$$

$$\int \sin t\, dt = -\cos t + C$$

$$\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \tan t + C$$

$$\int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\text{cotan } t + C$$

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

$$\int \frac{dt}{\sin t} = \ln\left|\tan \frac{t}{2}\right| + C$$

$$\int \tan t\, dt = -\ln|\cos t| + C$$

$$\int \text{cotan } t\, dt = \ln|\sin t| + C$$

$$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$$

$$\int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\alpha}} = \ln\left|t + \sqrt{t^2+\alpha}\right| + C$$

$$\int \text{ch } t\, dt = \text{sh } t + C$$

$$\int \text{sh } t\, dt = \text{ch } t + C$$

$$\int \frac{dt}{\text{ch}^2 t} = \text{th } t + C$$

$$\int \frac{dt}{\text{sh}^2 t} = -\text{coth } t + C$$

$$\int \frac{dt}{\text{ch } t} = 2\text{Arctan } e^t + C$$

$$\int \frac{dt}{\text{sh } t} = \ln\left|\text{th } \frac{t}{2}\right| + C$$

$$\int \text{th } t\, dt = \ln(\text{ch } t) + C$$

$$\int \text{coth } t\, dt = \ln|\text{sh } t| + C$$

Développements limités usuels

(au voisinage de 0)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\mathrm{ch}\ x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\mathrm{sh}\ x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\mathrm{th}\ x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n.\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n.\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}.\frac{1.1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \cdots + (-1)^n.\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}.\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\mathrm{argth}\ x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n.\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\mathrm{argsh}\ x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n.\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

Fonctions circulaires et hyperboliques

Propriétés trigonométriques : remplacer cos par ch et sin par $i.\mathrm{sh}$.

$$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \sin b.\cos a$$
$$\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \sin b.\cos a$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a.\tan b}$$

$$\begin{aligned}\cos 2a &= 2.\cos^2 a - 1\\ &= 1 - 2.\sin^2 a\\ &= \cos^2 a - \sin^2 a\\ \sin 2a &= 2.\sin a.\cos a\\ \tan 2a &= \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}\end{aligned}$$

$$\cos a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$
$$\sin a.\sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$
$$\sin a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

$$\cos p + \cos q = 2.\cos\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2.\sin\frac{p+q}{2}.\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p + \sin q = 2.\sin\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p - \sin q = 2.\sin\frac{p-q}{2}.\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}\,a.\mathrm{ch}\,b + \mathrm{sh}\,a.\mathrm{sh}\,b$$
$$\mathrm{ch}(a-b) = \mathrm{ch}\,a.\mathrm{ch}\,b - \mathrm{sh}\,a.\mathrm{sh}\,b$$
$$\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}\,a.\mathrm{ch}\,b + \mathrm{sh}\,b.\mathrm{ch}\,a$$
$$\mathrm{sh}(a-b) = \mathrm{sh}\,a.\mathrm{ch}\,b - \mathrm{sh}\,b.\mathrm{ch}\,a$$
$$\mathrm{th}(a+b) = \frac{\mathrm{th}\,a + \mathrm{th}\,b}{1 + \mathrm{th}\,a.\mathrm{th}\,b}$$
$$\mathrm{th}(a-b) = \frac{\mathrm{th}\,a - \mathrm{th}\,b}{1 - \mathrm{th}\,a.\mathrm{th}\,b}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}\,2a &= 2.\mathrm{ch}^2 a - 1\\ &= 1 + 2.\mathrm{sh}^2 a\\ &= \mathrm{ch}^2 a + \mathrm{sh}^2 a\\ \mathrm{sh}\,2a &= 2.\mathrm{sh}\,a.\mathrm{ch}\,a\\ \mathrm{th}\,2a &= \frac{2\,\mathrm{th}\,a}{1+\mathrm{th}^2 a}\end{aligned}$$

$$\mathrm{ch}\,a.\mathrm{ch}\,b = \frac{1}{2}\left[\mathrm{ch}(a+b) + \mathrm{ch}(a-b)\right]$$
$$\mathrm{sh}\,a.\mathrm{sh}\,b = \frac{1}{2}\left[\mathrm{ch}(a+b) - \mathrm{ch}(a-b)\right]$$
$$\mathrm{sh}\,a.\mathrm{ch}\,b = \frac{1}{2}\left[\mathrm{sh}(a+b) + \mathrm{sh}(a-b)\right]$$

$$\mathrm{ch}\,p + \mathrm{ch}\,q = 2.\mathrm{ch}\frac{p+q}{2}.\mathrm{ch}\frac{p-q}{2}$$
$$\mathrm{ch}\,p - \mathrm{ch}\,q = 2.\mathrm{sh}\frac{p+q}{2}.\mathrm{sh}\frac{p-q}{2}$$
$$\mathrm{sh}\,p + \mathrm{sh}\,q = 2.\mathrm{sh}\frac{p+q}{2}.\mathrm{ch}\frac{p-q}{2}$$
$$\mathrm{sh}\,p - \mathrm{sh}\,q = 2.\mathrm{sh}\frac{p-q}{2}.\mathrm{ch}\frac{p+q}{2}$$

$$\text{avec } t = \tan\frac{x}{2} \begin{cases} \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin x &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \tan x &= \frac{2t}{1-t^2} \end{cases}$$

$$\text{avec } t = \operatorname{th}\frac{x}{2} \begin{cases} \operatorname{ch} x &= \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ \operatorname{sh} x &= \frac{2t}{1-t^2} \\ \operatorname{th} x &= \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

Dérivées : la multiplication par i n'est plus valable

$$\begin{aligned} \cos' x &= -\sin x \\ \sin' x &= \cos x \\ \tan' x &= 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \\ \operatorname{cotan}' x &= -1 - \operatorname{cotan}^2 x = \frac{-1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}' x &= \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh}' x &= \operatorname{ch} x \\ \operatorname{th}' x &= 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \\ \operatorname{coth}' x &= 1 - \operatorname{coth}^2 x = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Arccos}' x &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1) \\ \operatorname{Arcsin}' x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1) \\ \operatorname{Arctan}' x &= \frac{1}{1+x^2} \\ \operatorname{Arccotan}' x &= \frac{-1}{1+x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Argch}' x &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1) \\ \operatorname{Argsh}' x &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ \operatorname{Argth}' x &= \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| < 1) \\ \operatorname{Argcoth}' x &= \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| > 1) \end{aligned}$$