Histoire et équations algébriques

Une équation algébrique de degré $n \in \mathbb{N}^*$ est une équation de la forme $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ d'inconnue x et de coefficients $a_{n-1}, \ldots, a_0$ complexes. Le théorème fondamental de l'algèbre assure qu'une telle équation possède exactement n solutions comptées avec multiplicité. A travers une approche historique, on se propose de présenter l'apparition des équations algébriques en mathématiques et de voir comment on résout les équations de degré 3 et 4.

Antiquité

Les égyptiens se sont intéressés à la résolution d'équations algébriques de degré 1. On trouve dans le papyrus de Rhind, vers 1700 avant J-C des problèmes du style : « Une quantité et une portion de celle-ci vaut tant, quelle est celle quantité ? ». Les babyloniens savaient même résoudre des problèmes conduisant à des équations de degré 2, comme par exemple : « La surface d'un carré, ajoutée à son côté, est égale à $3/4$, quelle est le côté du carré ? » Les problèmes posés étaient toujours numériquement concrets et la résolution des équations était alors purement verbale. Il n'existait pas encore de symbolisme mathématique. Les grecs savaient eux aussi résoudre des équations du premier et du second degré, mais n'abordaient celles-ci que d'un point de vue géométrique.

L'algèbre arabe

L'essor de l'algèbre a lieu au début du IXème siècle dans les bibliothèques de Bagdad. Les arabes découvrent, en les traduisant, les écrits grecs et de plus, ils les complètent. De surcroît, ils profitent de la notation décimale de position moderne découverte par les indiens. Al Khwarizmi étudie et résout les équations algébriques de degré 2, en commençant par ajouter, de part et d'autre de chaque membre, des quantités égales de sorte de faire disparaître les quantités négatives. Cette manipulation, appelée al-jabr est à l'origine de la dénomination. Al Kharizmi présente alors chaque type d'équations possibles $ax^2 = bx$, $ax^2 = bx + c$ etc... puis donne les règles de résolution de celles-ci accompagnées de démonstrations de nature géométrique. La démarche d'Al Khwarizmi est nouvelle, il ne part plus d'un problème concret pour le résoudre, mais donne des méthodes de résolutions générales qu'il suffit d'appliquer pas à pas. Le mot algorithme est une déformation du nom de ce mathématicien.

Renaissance

Dès lors, on sait résoudre les équations algébriques de degré 2, mais que se passe-t-il pour les équations de degrés supérieurs ? Fibonacci (XIIIème siècle) pense qu'il n'est pas possible de résoudre algébriquement les équations du troisième degré, les mathématiciens du nord de l'Italie vont le contredire. Au XVIème siècle, le mathématicien Del Ferro parvint à trouver certaines solutions d'équations troisième degré. Il garde sa méthode secrète mais Del Fiore en prend connaissance et l'exploite dès la mort de Del Ferro. En 1535, il lance un défit à Tartaglia en vue de résoudre trente problèmes, chacun conduisant à une équation de degré 3. L'un d'eux est par exemple : « trouver un nombre qui ajouté à sa racine cubique fasse 6 ». Tartaglia découvre une démarche générale de résolutions de ces équations et remporte le duel, mais il garde le secret sur ses méthodes de résolutions. Cardan après maintes supplications arrache ce secret et le publie dans l'ouvrage Ars Magna en 1545. Comme Al Kharizmi, il commence par réorganiser l'équation de sorte que chaque quantité engagée soit positive, puis en fonction du type d'équation obtenu, il présente la résolution de celle-ci. Présentons la démarche générale qui porte désormais son nom :

Méthode de Cardan-Tartaglia

Pour résoudre l'équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, on commence par réaliser une translation d'inconnue de sorte de se ramener à l'équation $x^3 + px + q = 0$. On écrit ensuite l'inconnue x sous la forme $u + v$ avec la condition $3uv + p = 0$. x est alors solution de l'équation étudiée si et seulement si $u^3 + v^3 + q = 0$. En posant $U = u^3$ et $V = v^3$, on est alors amené à résoudre le système somme-produit : $\begin{cases} U + V = -q \\ UV = -p^3/27 \end{cases}$ dont les solutions sont les deux racines de l'équation $t^2 + qt - p^3/27 = 0$. Une fois U et V trouvés, u et v s'obtiennent par extraction de racines cubiques sachant aussi $3uv+p=0$. Sachant $x=u+v$, l'équation est résolue. On obtient ainsi $x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$ solution particulière de l'équation $x^3+px+q=0$.

Dans la pratique, cette démarche peut conduire à des expressions complexes des solutions, par exemple, la résolution de $x^3-6x-40=0$ donne, entre autres solutions, $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ qui est en fait égale à 4 car $20+14\sqrt{2}=(2+\sqrt{2})^3$. Pire, pour mener à terme certaines résolutions, Cardan et Bombelli introduisent des racines carrées de nombres négatifs avant de parvenir à simplifier ses calculs pour les faire disparaître. C'est là la première apparition des nombres imaginaires. Paradoxalement, les nombres imaginaires apparaissent alors que les mathématiciens de cette époque faisaient en sorte de ne pas avoir à manipuler de nombres négatifs et appelaient « racines moins pures » les solutions négatives de leurs équations.

Méthode de Ferrari

Dans la foulée, Ferrari, serviteur de Cardan, détermine comment résoudre l'équation de degré 4 :

Pour résoudre l'équation $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$, on commence par réaliser une translation d'inconnue pour se ramener à l'équation $x^4=px^2+qx+r$. On introduit alors un paramètre t pour écrire $x^4+2x^2t+t^2=(2t+p)x^2+qx+t^2+r$. Le premier membre est un carré : $(x^2+t)^2$. Le second peut le devenir si $4(t^2+r)(2t+p)=q^2$. Cela nous ramène à la résolution d'une équation de degré 3 en t. Pour t_0 solution, on est alors amené à résoudre une équation du type $(x^2+t_0)^2=(\alpha x+\beta)^2$ ce qui nous conduit à deux équations de degré 2.

Romantisme

Pour résoudre les équations algébriques de degré 2, 3 ou 4, on s'est à chaque fois ramené aux degrés inférieurs, sera-ce toujours possible ? Le mathématicien norvégien Abel démontre en 1824 qu'il n'est pas possible de résoudre par radicaux l'équation de degré 5, malheureusement son travail ne trouve pas de lecteurs et, malgré son génie, il meurt dans la pauvreté à l'âge de 27 ans. Le mathématicien français Galois, s'intéresse lui aussi aux équations algébriques et afin d'établir l'impossibilité de résoudre les équations de degré supérieur à 5, il ébauche les concepts algébriques modernes (groupes, morphismes,...). Mais provoqué en duel par un officier républicain, il meurt à l'âge de 21 ans « victime d'une infâme coquette ». Néanmoins, la veille du duel, il rédige en hâte les idées essentielles de sa théorie. Celles-ci ne seront comprises que trente ans plus tard. La théorie de Galois est actuellement enseignée en université au niveau Maîtrise.

Finalement, il est désormais démontré qu'il n'existe pas de formule par radicaux permettant de résoudre systématiquement les équations de degré 5 ou supérieure. Il ne reste alors plus qu'à rechercher des solutions apparentes ou d'essayer quelques changements d'inconnues !

<u>Bibliographie :</u>

Des mathématiciens de A à Z, B. Hauchecorne et D. Suratteau. Ed. Ellipses

Le Théorème de perroquet, D. Huedj, Ed. Seuil

L'histoire de l'algèbre et des équations algébriques jusqu'au XIXème siècle, E. Cousquer, http://www.lille.iufm.fr/labo/cream/ressources/Histoire/E/Equation/Equation.pdf

Encadré :

Lorsqu'une équation algébrique de degré n : $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ est a coefficients entiers (i.e. $a_k \in \mathbb{Z}$) il est facile d'en déterminer les solutions rationnelles. En effet, si $x = p/q$ (avec $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$ et p, q premiers entre eux) est solution de cette équation alors $q \mid a_n$ et $p \mid a_0$. Par suite, les seuls nombres rationnels susceptibles d'être solutions sont les rapports d'un diviseur de a_0 par un diviseur de a_n, cela ne laisse qu'un nombre fini de solutions rationnels possibles. Il ne reste plus qu'à les tester. Ainsi, on obtient que $-3/2$ est solution de $2x^3 + x^2 + x + 6 = 0$ et que l'équation $x^3 - x + 1 = 0$ n'a pas de solutions rationnelles.

Encadré :

Soit à résoudre l'équation $y^3 + 3y^2 - 1 = 0$. Le changement de variable $y = x + a$ conduit à l'équation $x^3 + 3(a+1)x^2 + \cdots = 0$ qui est de la forme $x^3 + px + q = 0$ ssi $a = -1$. Posons $y = x - 1$ qui nous conduit à l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$. On écrit $x = u + v$ avec $uv = 1$ et on parvient à $u^3 + v^3 = -1$. u^3 apparaît comme solution de l'équation $t^2 + t + 1 = 0$ dont les racines sont $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$ et $\overline{j}$. Par suite $u = \mathrm{e}^{2i\pi/9}, \mathrm{e}^{8i\pi/9}$ ou $\mathrm{e}^{14i\pi/9}$, de plus $v = 1/u = \overline{u}$, $x = u + v$ et $y = x - 1$ nous donne comme solutions : $2\cos\frac{2\pi}{9} - 1, 2\cos\frac{8\pi}{9} - 1$ et $2\cos\frac{14\pi}{9} - 1$.

Encadré :

Soit à résoudre l'équation $x^4 = 12x - 3$. On introduit $t \in \mathbb{R}$ et on réécrit l'équation étudiée $x^4 + 2tx^2 + t^2 = 2tx^2 + 12x - 3 + t^2$. Le second membre peut s'écrire comme un carré si $t^3 - 3t - 18 = 0$, or $t = 3$ en est solution apparente et donc on réécrit l'équation de départ : $(x^2 + 3)^2 = (\sqrt{6}x + \sqrt{6})^2$. Il reste à résoudre $x^2 - \sqrt{6}x + 3 - \sqrt{6} = 0$ et $x^2 + \sqrt{6}x + 3 + \sqrt{6} = 0$ qui donne respectivement : $\dfrac{\sqrt{6} \pm \sqrt{4\sqrt{6} - 6}}{2}$ et $\dfrac{-\sqrt{6} \pm i\sqrt{6 + 4\sqrt{6}}}{2}$.