Accélération de convergence

Au troisième siècle avant notre ère, Archimède avait évalué le nombre π, en mesurant les périmètres des polygones réguliers à 96 côtés inscrit et circonscrit à un cercle donné, il obtenait $3+\dfrac{1}{7}<\pi<3+\dfrac{10}{71}$.

De nos jours 1,2411 billions de décimales sont connues (record en date du 6 décembre 2002). Entre temps, les premières décimales de π furent obtenues en s'appuyant sur une écriture de la fonction $x\mapsto \arctan x$ sous la forme de somme d'une série :

Série de James Gregory

Pour $x\in[-1,1]$, en intégrant la somme géométrique : $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k}=\dfrac{1}{1+t^2}+\dfrac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}$ entre 0 et x, on parvient à l'identité de Gregory : $\arctan x=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}=\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}$.

En partant de $\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$, on obtient la formule de Leibniz : $\pi=\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{4(-1)^k}{2k+1}$. On peut alors approcher π par les sommes partielles : $\ell_n=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{4(-1)^k}{2k+1}$. De plus, π est encadré par deux sommes consécutives, ce qui permet de connaître la qualité de l'approximation réalisée. Malheureusement celle-ci n'est pas bonne car $\left|\ell_{n+1}-\ell_n\right|=O(1/n)$.

Au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle, John Machin reprend néanmoins cette idée mais part de la formule « qui porte son nom » (il y a un adjectif pour cela mais je l'ai oublié) : $\dfrac{\pi}{4}=4\arctan\dfrac{1}{5}-\arctan\dfrac{1}{239}$. Il obtient alors $\pi=\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{4(-1)^k}{2k+1}\left(\dfrac{4}{5^{2k+1}}-\dfrac{1}{239^{2k+1}}\right)$ ce qui permet d'approcher π par les sommes partielles : $m_n=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{4(-1)^k}{2k+1}\left(\dfrac{4}{5^{2k+1}}-\dfrac{1}{239^{2k+1}}\right)$. Comme ci-dessus, π est encadré par deux sommes consécutives mais cette fois-ci $\left|m_{n+1}-m_n\right|=O\left(\dfrac{1}{n.5^{2n+1}}\right)$ ce qui est beaucoup mieux. Il parvint ainsi à obtenir une centaine de décimales de π.

Méthode du delta-2 d'Aitken :

Pour obtenir plus de décimales, à moinde coût, nous allons accélérer la convergence de nos suites à l'aide du procédé d'Alexander Aitken (1895-1967). On dit qu'une suite numérique (v_n) converge plus rapidement vers ℓ qu'une suite (u_n) ssi $\dfrac{v_n-\ell}{u_n-\ell}\to 0$. Ainsi la suite $\left(1/n^2\right)$ converge plus rapidement vers 0 que la suite $(1/n)$.

L'idée d'Aitken est la suivante : présumons que (u_n) converge vers ℓ géométriquement, i.e. $u_n=\ell+C.q^n$, à l'aide des termes consécutifs u_n,u_{n+1},u_{n+2}, on peut déterminer C,q et $\ell=\dfrac{u_{n+2}u_n-u_{n+1}^2}{u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n}$. Si maintenant, on a $u_n=\ell+C.q^n+o(q^n)$ alors on peut justifier que $\dfrac{u_{n+2}u_n-u_{n+1}^2}{u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n}=\ell+o(q^n)$.

Pour être plus précis, on peut montrer que si $u_n\to\ell$ avec $\dfrac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}\to q\in[-1,1[$ alors la suite (v_n) de terme général $v_n=\dfrac{u_{n+2}u_n-u_{n+1}^2}{u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n}$ tend vers ℓ plus rapidement que (u_n).

Notons que l'hypothèse $\dfrac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell} \to q \in [-1,1[$ induit :

- une convergence lente mais alternée pour $q=-1$ (exemple : $\left((-1)^n/n\right)$)
- assez rapide pour $|q|<1$ (exemple : $\left(e^{-n}\right)$)
- rapide pour $q=0$ (exemple : $\left(e^{-n^2}\right)$)

En revanche les suites $(1/n)$ et $\left(1/n^2\right)$ ne vérifient pas cette hypothèse.

Accélération de la convergence vers π

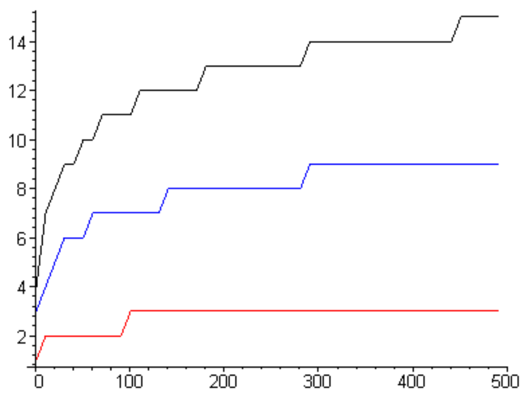
Nous allons maintenant appliquer la méthode d'Aitken, à l'accélération des convergences des sommes de Leibniz et de Machin. Pour justifier l'accélération, commençons par déterminer un équivalent de $R_n = \arctan x - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$ (pour $x \in [0,1]$ fixé) :

D'une part $R_n - R_{n+1} = \dfrac{(-1)^n}{2n+1} x^n$, d'autre part $R_n + \dfrac{1}{x^2} R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{2(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)(2k+3)} = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $R_n \sim \dfrac{(-1)^n}{2(2n+1)} x^n$.

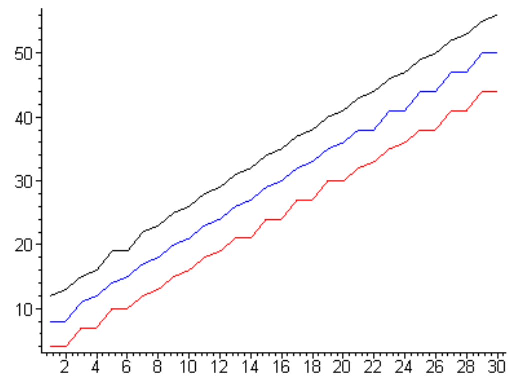
Pour la méthode d'Euler : $\dfrac{\ell_{n+1}-\pi}{\ell_n-\pi} \to -1$, pour la méthode de Machin : $\dfrac{m_{n+1}-\pi}{m_n-\pi} \to -\dfrac{1}{5}$.

Les graphiques ci-dessous illustrent ces accélérations en se reférant à la valeur de π dont Maple a en mémoire les premières décimales. On y trouve en abscisse, le rang n de calcul et en ordonnée le nombre de décimales correctes obtenues. La courbe du bas est associée à la suite initiale, la courbe intermédiaire est obtenue en accélérant la première, la courbe du haut, en accélérant la suite accélérée...

Accélération d'Euler



Accélération de Machin



Dans les deux cas, le gain est décimales est significatif, mais il subsiste un problème puisque cette fois-ci on ne connaît plus la qualité de notre approximation, autrement dit : on a gagné des décimales, mais on ne sait pas combien !

Encadré :

Quelle est la 100$^{\text{ème}}$ décimale de π ? La commande **`evalf(x,n)`** de Maple permet de connaître les **`n`** premières décimales d'une variable **`x`**. **`evalf(Pi,100)`** donne 3.14159...7068

On pourrait être tenté de s'en satisfaire et de conclure que la décimale cherchée vaut 8, mais **`evalf(Pi,102)`** donne 3.14159...706798. Finalement la décimale cherchée est 7. La prochaine fois nous nous méfierons des arrondis !

Formulaire sur π

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{\pi}{4} \text{ et } \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t\,\mathrm{d}t=\binom{2n}{n}\frac{\pi}{2^{2n+1}}$$ (intégrale de Wallis)

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$ (intégrale de Gauss)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.$$

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$ (intégrales de Fresnel)

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$ (Formule de Stirling)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{4(-1)^k}{2k+1}=\pi$$ (formule de Leibniz)

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{4(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{4}{5^{2k+1}}-\frac{1}{239^{2k+1}}\right)=\pi$$ (formule de Machin)

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{n+1}}{(2n+1)}\binom{2n}{n}=\pi$$ (somme d'Euler)

$$\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(4n)!}{(n!)^4}\frac{1103+26390n}{396^{4n}}=\frac{1}{\pi}$$ (formule de Ramanujan)

Celle-ci permet, en passant d'une somme partielle à la suivante, d'obtenir 8 décimales supplémentaires de π.

Et enfin, la plus jolie de toutes car reliant les constantes mathématiques fondamentales : $\mathrm{e}^{i\pi}+1=0$ Formule d'Euler.