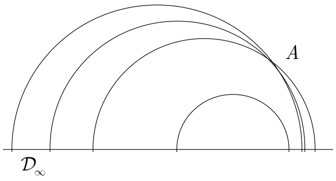
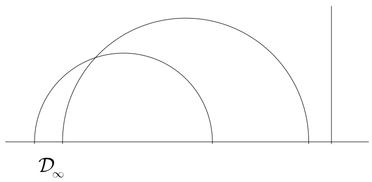
Géométries non euclidiennes

Au troisième siècle avant Jésus-Christ, le premier livre des éléments d'Euclide posait les définitions et les axiomes de la géométrie (dite euclidienne). Parmi ces axiomes, certains sont acceptés sans discussion comme par exemple, l'existence et l'unicité d'une droite passant par deux points, ou encore l'existence et l'unicité d'un cercle de centre et de rayon donné. En revanche, le cinquième axiomes a été source de maintes polémiques : il exige que par tout point en dehors d'une droite passe une et seule droite qui ne coupe pas la première (on parle de droites parallèles). De nombreux mathématiciens ont essayé d'établir que cette propriété découlait des autres axiomes sans pleinement y parvenir. Au début du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, Gauss et Lobatchevsky abordent le problème à l'envers et construisent, séparément, des géométries où ce cinquième axiome n'est pas vérifié. Ces géométries sont de deux types : les *géométries elliptiques*, où par un point ne passe pas toujours une parallèle à une droite donnée (voir l'encadré : un modèle de géométrie elliptique : la sphère) et les *géométries hyperboliques*, où par un point peut passer une infinité de parallèles à une droite donnée. Nous allons présenter ici un modèle de géométrie hyperbolique, à savoir :

Le demi-plan de Poincaré : P

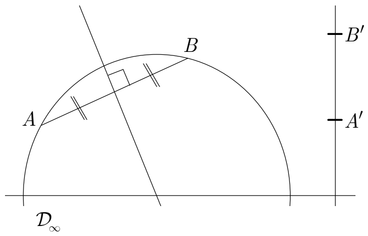


On suppose le plan euclidien muni d'un repère orthonormé. Le demi-plan de Poincaré correspond à l'ensemble P des points d'ordonnée strictement positive, sa droite limite, notée $\mathcal{D}_\infty$, est l'axe des abscisses. On définit les droites du demi-plan de Poincaré comme étant :



- les demi-cercles centrés sur $\mathcal{D}_\infty$ et
- les demi-droites verticales dont l'origine est sur $\mathcal{D}_\infty$.

Afin de distinguer les objets de la géométrie euclidienne de ceux de la géométrie étudiée ici, nous précéderons d'un P ces derniers : on parlera désormais de P-droites pour les demi-cercles et les demi-droites évoqués ci-dessus.



Il est clair que deux P-droites se coupent en au plus un point et que par deux points de P, passe une et une seule P-droite qu'il est facile de construire à la règle et au compas.

En revanche, et contrairement au cadre euclidien, par tout point A en dehors d'une P-droite passe une infinité de P-droites qui lui soient parallèles (i.e. non sécantes). Nous avons donc affaire ici à une géométrie hyperbolique comme annoncée.

Distance sur P

Etant donné un point A de P, et par analogie avec les nombres complexes, on convient de noter $\bar{A}$ son symétrique par rapport à la droite $\mathcal{D}_\infty$. Pour tous A,B points de P, on pose :

$$d(A,B) = \operatorname{argth}\frac{AB}{\bar{A}B} = \operatorname{argth}\frac{AB}{A\bar{B}}.$$

où, rappelons-le, $x \mapsto \operatorname{argth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ réalise une bijection continue strictement croissante de $[0,1[$ vers $[0,+\infty[$.

L'application $(A,B) \mapsto d(A,B)$ est une distance sur P car on a les propriétés immédiates : $d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$, $d(A,B) = d(B,A)$ et l'inégalité triangulaire $d(A,B) \le d(A,C) + d(C,B)$ démontrée dans l'encadré ci-contre.

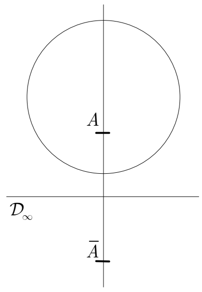
Les P-droites apparaissent comme étant des géodésiques pour la distance ci-dessus i.e. comme étant des courbes allant d'un point à un autre selon le chemin le plus court. Pour le constater, commençons par souligner $\operatorname{argth} x \underset{x\to 0}{\sim} x$ et donc :

$$d(M(t), M(t+\mathrm{d}t)) \sim \frac{M(t)M(t+\mathrm{d}t)}{M(t)\overline{M(t)}} = \frac{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}{2y(t)}\mathrm{d}t$$

en notant $x(t), y(t)$ les coordonnées cartésiennes d'un point courant $M(t)$. La longueur ℓ de l'arc décrit par $M(t)$ pour t allant de a à b est alors donnée par l'intégrale :

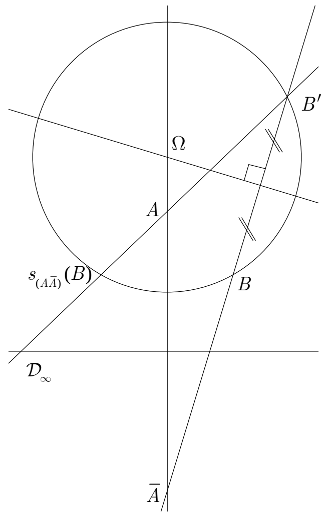
$$\ell = \int_a^b \frac{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}{2y(t)} \mathrm{d}t \, .$$

Un calcul intégral suffit alors pour constater que la longueur de l'arc de la P-droite joignant un point A à un point B est égale à la distance entre ces deux points. Les P-droites sont donc bien des géodésiques pour la distance considérée.



Les P-cercles

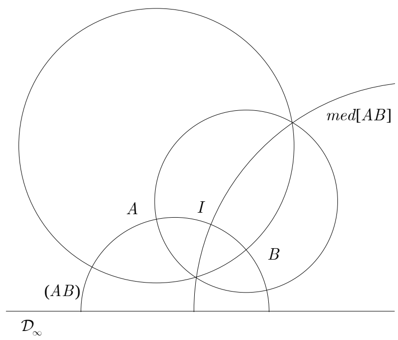
Maintenant que nous connaissons la distance naturelle sur P, on peut s'intéresser aux P-cercles. Un P-cercle de P-centre A et de rayon R est l'ensemble des points M tels que $d(A,M) = R$, c'est à dire tels que $\dfrac{AM}{\bar{A}M} = k$ avec $k = \operatorname{th} R$. Or il bien connu qu'un tel ensemble est un cercle de centre situé sur la droite $(A\bar{A})$, cercle entièrement inclus dans P.



Pour construire ce cercle, il faut déterminer son centre géométrique Ω qui est généralement différent du P-centre A. Si on connaît un point B du cercle, non situé sur la verticale passant par A, on peut montrer l'appartenance à celui-ci du point B' intersection de la droite $(\bar{A}B)$ et de la droite joignant A au symétrique de B par rapport à $(A\bar{A})$. Cela permet de construire le centre géométrique Ω.

Les P-médiatrices

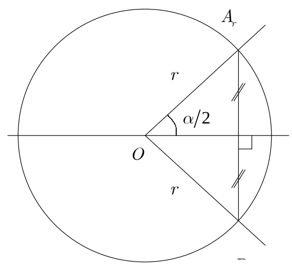
La P-médiatrice de deux points distincts A et B regroupent les points M équidistants de A et B. La résolution de l'équation $d(A,M) = d(B,M)$ permet d'observer qu'une P-médiatrice est une P-droite. Pour construire celle-ci, il suffit de construire les P-cercles de P-centres A et B passant respectivement par B et A. Ceux-ci se coupent en deux points équidistants de A et B, la P-droite passant par ses points est la P-médiatrice cherchée. On peut alors définir, et construire, le P-milieu de A et B qui est l'intersection de la P-droite joignant A et B et de la médiatrice précédente.



Pour poursuivre ses constructions à la règle et au compas, vous pourrez résoudre les problèmes suivants :

- Construire le P-centre d'un cercle inclus dans P.
- Construire le symétrique d'un point par rapport à une P-droite.
- Justifier que les P-médiatrices et les médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes.

Angles de demi-droite



Dans le plan euclidien usuel, pour définir l'écart angulaire $\alpha \in [0, \pi]$ entre deux demi-droites de même origine O, on introduit le cercle de centre O et de rayon 1.
L'écart angulaire α apparaît alors comme étant la longueur du plus petit arc de cercle compris entre ces deux demi-droites. On peut calculer α en constatant que :

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{A_r B_r}{2r}$$

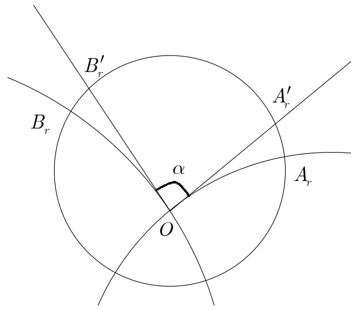
où A_r, B_r désignent les points d'intersection d'un cercle de centre O et de rayon r avec les demi-droites en question.

En nous inspirant de cette définition, on définit le P-écart angulaire entre deux demi-P-droites de même origine O comme étant l'unique $\theta \in [0,\pi]$ déterminé par :

- si les demi-P-droites sont confondues : $\theta = 0$,
- si les demi-P-droites sont les deux parties d'une même P-droites : $\theta = \pi$,
- sinon :

$$\sin\frac{\theta}{2} = \lim_{r\to 0}\frac{d(A_r, B_r)}{2r}$$

où A_r, B_r désignent les points d'intersection du P-cercle de centre O et de rayon r avec les demi-P-droites étudiées. Pour calculer θ, on observe que, quand $r \to 0$:



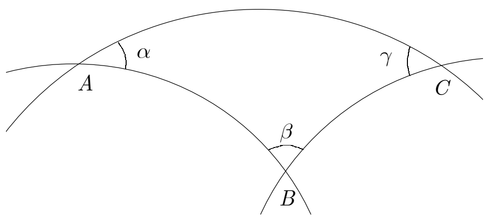
$$d(A_rB_r) = \operatorname{argth}\frac{A_rB_r}{\overline{A_rB_r}} \sim \frac{A_rB_r}{2y_0} \text{ et } r = d(O, A_r) \sim \frac{OA_r}{2y_0}$$

avec y_0 l'ordonné du point O. En notant A'_r et B'_r les projetés de A_r et B_r sur les demi-tangentes en O aux demi-P-droites étudiées, on montre que $A_rB_r \sim A'_rB'_r$, $OA_r \sim OA'_r$ et donc $\dfrac{d(A_r, B_r)}{2r} \sim \dfrac{A'_rB'_r}{2OA'_r} = \sin\dfrac{\alpha}{2}$ avec α l'écart angulaire entre les demi-tangentes.

Ainsi, l'écart angulaire entre deux demi-P-droites de même origine correspond à l'écart angulaire euclidien entre leurs demi-tangentes en O.

Somme des angles d'un triangle

La donnée de trois points A, B, C, non alignés sur une même P-droite, définit un triangle du demi-plan de Poincaré. On peut considérer les angles aux sommets de ce triangle, respectivement α, β, γ. Contrairement au cadre euclidien, où la somme de ces angles est égale à π, ici elle est strictement inférieure à π.

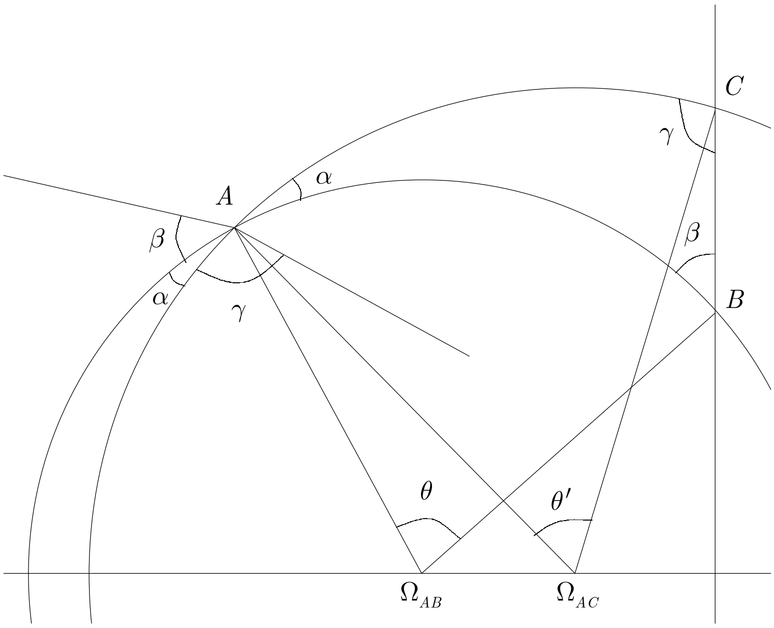


Contentons-nous de donner les grandes lignes d'une démonstration de ce résultat.

Comme cela a été vu dans l'encadré « Inégalité triangulaire », on peut, par une inversion, se ramener au cas où B et C figureraient sur une même demi-droite verticale. Une inversion étant une P-isométrie, elle conservera les angles tels que définis ci-dessus. Quitte à appliquer une réflexion d'axe (BC), on peut supposer le point A à gauche de la droite (BC). Enfin, quitte à échanger B et C, on peut supposer le point C au dessus de B. Notons Ω_{AB} et Ω_{AC} les centres des P-droites (AB) et (AC).

Une étude fonctionnelle permet de justifier que l'angle euclidien $\theta = \widehat{A\Omega_{AB}B}$ est strictement inférieur à $\theta' = \widehat{A\Omega_{AC}C}$. La rotation de centre Ω_{AB} et d'angle θ transforme la demi-droite $[BC)$ en une demi-droite d'origine A permettant de visualiser l'angle β au point A. De même, la rotation de centre Ω_{AC} et d'angle θ', transforme la demi-droite $[CB)$ en une demi-droite permettant de visualiser l'angle γ. Les trois angles α, β, γ apparaissent alors comme des angles successifs d'un secteur angulaire d'amplitude $\pi - \theta' + \theta < \pi$. Ainsi :

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi$$



Conclusion

Nous avons présenté ici les prémices d'une géométrie non euclidienne, en observant des similarités, mais aussi des différences, avec la géométrie euclidienne. Soulignons que ce modèle de géométrie n'est pas plus « absurde » que celui de la géométrie standard. En effet, le demi-plan de Poincaré, et ses objets, sont définis et construits à partir de la géométrie euclidienne !

Encadré : Inégalité triangulaire

Nous allons ici démontrer l'inégalité triangulaire : $d(A,B) \le d(A,C) + d(C,B)$.

Commençons par étudier le cas où A et B sont sur une même verticale. On introduit le projeté C' de C sur cette verticale et on observe que $\frac{AC'}{\bar{A}C'} \le \frac{AC}{\bar{A}C}$. Par la croissance de la fonction $x \mapsto \operatorname{argth} x$, on obtient $d(A,C') \le d(A,C)$. De même $d(C',B) \le d(C,B)$. Enfin, en discutant selon la position relative de C' par rapport à A et B, on observe que $d(A,B) \le d(A,C') + d(C',B)$ puis on obtient $d(A,B) \le d(A,C) + d(C,B)$.

Poursuivons en étudiant le cas où A et B figurent sur un cercle $\mathcal{C}$ centré sur $\mathcal{D}_\infty$ et posons S un des points d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}_\infty$. Considérons l'application (appelée inversion de pôle S) qui à tout point M du plan π associe le point M' de la demi-droite $[SM)$ déterminé par $SM.SM' = 1$. Si M' et N' sont les images des points M et N, on a la relation $M'N' = \frac{MN}{SM.SN}$ qui permet d'établir l'égalité $d(M',N') = d(M,N)$. Notre inversion apparaît donc comme étant une isométrie pour la distance considérée. Puisque celle-ci transforme le cercle $\mathcal{C}$ en une demi-droite verticale où figurent les images A' et B' des points A et B, on a

$$d(A,B) = d(A',B') \le d(A',C') + d(C',B') \le d(A,C) + d(C,B)$$

en notant C' l'image de C.

Encadré : Un modèle de géométrie elliptique : la sphère

La sphère correspond ici à notre plan, les points sont les couples de points diamétralement opposés et les droites sont les grands cercles inscrits sur la sphère (i.e. les cercles obtenus par section avec un plan passant par le centre de la sphère). Par deux points distincts passe une et une seule droite. Deux droites se coupent toujours en un point (rappelons qu'ici les points sont des couples de points diamétralement opposés).

La distance entre deux points est définie comme étant l'écart angulaire aigu selon lequel ses points sont vus du centre. L'angle entre deux demi-droites de même origine O correspond à l'angle euclidien formé par les demi-tangentes en O. Le Théorème de Picard assure que si α, β, γ sont les angles aux sommets d'un triangle alors :

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi$$

Dans ce modèle, il existe des triangles à trois angles droits : quels sont-ils ?