L'impossible quadrature du cercle

Les mathématiciens de la Grèce antique manipulaient les nombres par le biais de leur représentation géométrique. Ainsi les nombres entiers se comprenaient comme étant les multiples d'une longueur unité, les radicaux carrés comme les hypoténuses de triangles rectangles. Dans cette perspective, le rapport du périmètre d'un cercle à son diamètre, c'est à dire le nombre π, se devait d'être constructible à la règle et au compas. Obtenir une construction du nombre π équivaut à savoir construire un carré délimitant une surface égale à celle délimitée par un cercle donné, c'est le problème de la quadrature du cercle : la transformation d'un cercle en un carré équivalent.

Pendant près de 2 millénaires, les mathématiciens essaieront en vain de réaliser cette construction, mais vers le XVI$^{\text{ème}}$ siècle commence à apparaître l'idée :

La quadrature du cercle est-elle vraiment possible ?

C'est en 1882 que F. Lindemann clos le débat en établissant l'impossibilité d'une telle construction. Désormais l'expression quadrature du cercle est devenue dans le langage courant synonyme de problème insoluble.

Dans cet article nous verrons la démarche intellectuelle qui a permit de résoudre ce problème antique. Nous verrons aussi comment il est possible de résoudre par la négative les problèmes de duplication du cube et de trisection de l'angle.

Construction à la règle et au compas

Partons de deux points distincts O et I. Réaliser une construction géométrique à la règle et au compas à partir de ces deux points revient à définir une suite de points (A_n) avec $A_0 = O$, $A_1 = I$ et pour tout $n \geq 2$, A_n déterminé par intersection de droite et/ou de cercles construits à partir des points précédents $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$.

Munissons le plan d'un repère orthonormé dont O est l'origine et I le point de coordonnées $(1,0)$. Les droites et les cercles du plan possèdent des équations cartésiennes du type :

$$ax + by = c \text{ et } (x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$$

où les paramètres a,b,c sont déterminés par opérations algébriques sur les coordonnées des points définissant ces droites et ces cercles. Les coordonnées d'un point A_n s'obtiennent donc par résolution de systèmes de la forme :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}, \begin{cases} ax + by = c \\ (x-a')^2 + (y-b')^2 = c'^2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2 \\ (x-a')^2 + (y-b')^2 = c'^{2'} \end{cases}.$$

En résolvant ces systèmes, on observe que les coordonnées du point A_n sont solutions d'équation algébriques de degré 1 ou 2, équations dont les coefficients sont obtenus à partir des coordonnées des points $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$.

Cela permet de justifier le résultat du à P. Wantzel :

les coordonnées des points constructibles sont obtenues par succession d'additions, de soustractions, de multiplications, de divisions et de passages à la racines carrés à partir de nombres entiers.

De tels nombres sont dits constructibles car inversement, il est possible de construire un point dont les coordonnées soient de la forme ci-dessus (voir « Constructions à la règle et au compas »).

Par exemple le réel suivant est constructible :

$$x = \frac{3 + \sqrt{\sqrt{5} - 1}}{2}$$

Pour un tel nombre, on observe que

$$(2x-3)^2 = \sqrt{5} - 1 \text{ donc } ((2x-3)^2 + 1) = 5$$

Ainsi x est racine d'une équation algébrique à coefficients entiers de degré 4. Un tel nombre est dit algébrique (voir « Nombres algébriques et nombres transcendants »). Plus généralement, on peut montrer grâce à la théorie des extensions de corps que tout nombre constructible est algébrique et de degré égal à une puissance de deux, c'est à dire que le plus petit degré d'une équation annulée par ce nombre est une puissance de deux.

La quadrature du cercle

Réaliser la quadrature du cercle revient à construire à la règle et au compas une suite de points (A_n) dont deux éléments A_k et A_ℓ vérifient :

$$A_k A_\ell = \pi .$$

Si cette quadrature était possible, les coordonnées des points étant des nombres constructibles, π serait lui aussi un nombre constructible. En prouvant en 1882 que le nombre π est transcendant, c'est à dire qu'il n'est racine d'aucune équation algébrique, F. Lindemann établit par la même occasion que π n'est pas constructible : la quadrature du cercle est impossible.

La duplication du cube

Il s'agit de construire à la règle et au compas un cube dont le volume soit le double de celui d'un cube donné. Le problème revient à savoir construire le nombre $\sqrt[3]{2}$. Or celui-ci est un nombre algébrique de degré 3, ce ne peut donc être un réel constructible et la duplication du cube est impossible.

La trisection de l'angle

La trisection consiste à découper un angle en trois angles égaux. Il est possible de réaliser la trisection de certains angles, par exemple, l'angle $\pi/6$ étant constructible puisque $\sin\pi/6 = 1/2$, il est possible de réaliser la trisection d'un angle droit. Le problème de la trisection de l'angle consiste à disposer d'une technique permettant de réaliser à la règle et au compas la trisection de n'importe quel angle. Si ce problème était résoluble, on saurait construire l'angle $\alpha = 2\pi/9$ par trisection de l'angle constructible $2\pi/3$, par conséquent $\cos\alpha$ serait un nombre constructible. Or on observe :

$$\cos 3\alpha = -\frac{1}{2} \text{ et } \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

ce qui permet d'affirmer que $\cos\alpha$ est racine de l'équation algébrique :

$$8x^3 - 6x + 1 = 0$$

Cette équation ne possédant pas de racines rationnelles, il n'existe pas d'équation algébrique à coefficients entiers de degré strictement inférieur à 3 dont $\cos\alpha$ serait solution. Le réel $\cos\alpha$ est donc un nombre algébrique de degré 3 , il n'est pas constructible : la trisection de l'angle est aussi impossible.

Encadré

La construction de l'heptagone

Est-il possible de construire à la règle et au compas un heptagone régulier ? Si tel était le cas alors le nombre $x = \cos 2\pi/7$ serait constructible. Le centre d'un heptagone étant aussi l'isobarycentre de ces sommets, on peut établir l'égalité suivante par calcul barycentrique sur les abscisses des sommets d'un pentagone de centre O et dont I est sommet :

$$1 + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} + \cos\frac{10\pi}{7} + \cos\frac{12\pi}{7} = 0$$

Or, on a $\cos\frac{12\pi}{7} = \cos\frac{2\pi}{7} = x$, $\cos\frac{10\pi}{7} = \cos\frac{4\pi}{7} = 2x^2 - 1$ et $\cos\frac{8\pi}{7} = \cos\frac{6\pi}{7} = 4x^3 - 3x$ donc x est solution de l'équation :

$$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$$

Cette équation ne possède pas de racines rationnelles, x est un nombre algébrique de degré 3 et n'est donc pas constructible.