Les infinitésimaux en analyse non standard

Le calcul infinitésimal à fait son apparition au XVII$^{\text{ème}}$ siècle, notamment sous l'impulsion du mathématicien allemand G. Leibniz. Son objectif était d'adjoindre aux nombres réels des quantités infiniment petites, et d'autres infiniment grandes, afin de manipuler au mieux le concept de passage à la limite. Au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, une définition précise et rigoureuse de la notion de limite, définition attribuée au mathématicien français A. Cauchy, éclaircit le ce concept et fait par conséquent disparaître les quantités infinitésimales jusqu'alors manipulées. Ces derniers font néanmoins leur retour en 1961 suite aux grands progrès réalisés en logique mathématique. En effet, cette année là, le mathématicien américain A. Robinson publie « Non-Standard Analysis » : il y construit une extension de $\mathbb{R}$ où figurent des quantités infiniment petites à partir desquelles il reconstruit l'analyse moderne.

Nous allons présenter ici une démarche qui permet de construire cette extension de $\mathbb{R}$, dont les éléments seront appelés nombres hyperréels. Nous verrons ensuite comment s'y traduit le calcul infinitésimal, puis le principe de transfert qui permet d'exploiter les nombres hyperréels en vue de l'étude des fonctions réelles.

Ultrafiltre sur N

Le point de départ de notre construction est la notion d'ultrafiltre. On appelle ultrafiltre sur un ensemble E tout ensemble $\mathcal{U}$ formé de parties de E vérifiant les axiomes suivants :

$$\text{a) } \varnothing \notin \mathcal{U}\,,$$

$$\text{b) } \forall A,B \in \mathcal{U}, A \cap B \in \mathcal{U}\,,$$

$$\text{c) } \forall A \in \mathcal{U}, \forall B \in \mathcal{P}(E), A \subset B \Rightarrow B \in \mathcal{U}\,,$$

$$\text{d) } \forall A \in \mathcal{P}(E), A \in \mathcal{U} \Leftrightarrow E \setminus A \notin \mathcal{U}\,.$$

L'axiome du choix assure l'existence d'ultrafiltres sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, ultrafiltre ne contenant aucune partie finie. Malheureusement, nous ne savons pas en exhiber. Cela n'a guère d'importance, il en existe, cela suffira. Dans la suite de notre étude nous supposons nous être donné un tel ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{N}$. Afin d'adopter un vocabulaire imagé, bien qu'approximatif, on convient de dire qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée « à l'infini » lorsqu'elle l'est au moins pour tout n d'une partie A de l'ultrafiltre $\mathcal{U}$.

Les nombres hyperréels

Nous formons une extension, notée $\overline{\mathbb{R}}$, de l'ensemble des nombres réels à partir de l'ensemble des suites réelles. On dit que deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont équivalentes lorsque l'égalité $u_n = v_n$ est vérifiée à l'infini. Par exemple, deux suites égales à partir d'un certain rang sont équivalentes.

On identifie entre elles les suites équivalentes pour former des objets appelés nombres hyperréels et on note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble formé par ceux-ci[1]. Ainsi un hyperréel est représenté par une suite (x_n) et toute suite (y_n) équivalente à (x_n) représente le même hyperréel, celui est noté $\overline{(x_n)}$. L'idée sous-jacente ici est semblable à celle de la représentation des nombres rationnels : plusieurs rapports d'entiers peuvent représenter un même nombre rationnel.

En identifiant un réel r avec l'hyperréel représenté par la suite constante égale à r, on peut dire que $\mathbb{R}$ est inclus dans $\overline{\mathbb{R}}$. Cependant $\overline{\mathbb{R}}$ possède d'autres nombres que les réels comme par exemple :

$$\upsilon = \overline{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \text{ et } \omega = \overline{(n)}\,.$$

En posant :

$$\overline{(x_n)} + \overline{(y_n)} = \overline{(x_n + y_n)} \text{ et } \overline{(x_n)}.\overline{(y_n)} = \overline{(x_n y_n)} \text{ [2]}$$

on définit une opération additive et une opération multiplicative sur $\overline{\mathbb{R}}$. On munit aussi $\overline{\mathbb{R}}$ d'une relation d'ordre définie par :

$$\overline{(x_n)} \leq \overline{(y_n)} \Leftrightarrow \text{ l'inégalité } x_n \leq y_n \text{ est vérifiée à l'infini.}$$

$\overline{\mathbb{R}}$ est alors muni d'une structure de corps totalement ordonné prolongeant la structure de $\mathbb{R}$. A ce stade, nous pouvons poser des opérations, résoudre des équations et étudier des inéquations dans le cadre des nombres

---

[1] Plus rigoureusement, $\overline{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation d'équivalence présentée.

[2] On vérifie que les résultats de ces opérations sont indépendants des suites (x_n) et (y_n) choisies pour représenter les hyperréels manipulés.

hyperréels. On peut aussi définir la valeur absolue d'un hyperréel en fonction de son signe et on observe aisément :

$$\left|\overline{(x_n)}\right| = \overline{(|x_n|)}\ .$$

Calcul infinitésimal

On adopte le vocabulaire suivant :

- Un hyperréel a est dit infiniment petit ssi $\forall r \in \mathbb{R}^{+}*, |a| \leq r$.
- Un hyperréel a est dit infiniment grand ssi $\forall r \in \mathbb{R}$, $|a| \geq r$.
- Enfin, un hyperréel a est dit limité ssi il n'est pas infiniment grand.

L'hyperréel υ présenté ci-dessus est un infiniment petit mais ce n'est pas le seul, tout hyperréel associé à une suite de limite nulle est un infiniment petit. De même, il existe de nombreux infiniment grands parmi lesquels l'hyperréel ω. A partir de ces définitions, c'est sans difficultés qu'on établit les résultats suivants du calcul infinitésimal :

- La somme de deux infiniment petits en est un.
- Le produit d'un infiniment petit et d'un limité est un infiniment petit.
- L'inverse d'un infiniment grand est un infiniment petit,...

Halo d'un réel et ombre d'un hyperréel limité

Nous avons ainsi défini une extension de $\mathbb{R}$ où figurent des nombres infiniment grands et infiniment petits. La présence de ces nombres implique, pour chaque réel, l'existence de nombres infiniment proches de ce réel. Précisons-nous, deux hyperréels x et y sont dits infiniment proches lorsque leur différence est un infiniment petit, on note alors $x \approx y$. L'ensemble des hyperréels infiniment proches d'un réel donné est appelé halo de ce réel. Par exemple, les infiniment petits sont les éléments du halo de 0.

En dehors des infiniment grands et des hyperréels appartenant au halo d'un réel, il n'existe pas d'autres nombres hyperréels. En effet, lorsqu'un hyperréel limité x est donné, on peut montrer (voir encadré) que celui-ci est infiniment proche d'un et d'un seul nombre réel et donc appartient à son halo. Ce nombre réel est appelé ombre de x et est noté $^\circ x$. Il se comprend comme étant la partie visible sur la droite réelle de l'hyperréel x. Par exemple, l'ombre de l'hyperréel $\upsilon\omega$ est 1.

Ombre d'un hyperréel

Considérons x une hyperréel limité. Etablissons l'existence et l'unicité d'un réel r tel que $x \approx r$.

Unicité : Si r et r' conviennent alors $r \approx r'$ donc $r - r'$ est un infiniment petit. Or $r - r'$ est un réel, donc $r - r' = 0$.

Existence : Considérons l'ensemble A formé des nombres réels inférieurs à x. Cet ensemble est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée car l'hyperréel x est supposé limité. Posons r la borne supérieure de A. Pour tout $\varepsilon > 0$, on montre $r - \varepsilon \leq x < r + \varepsilon$ donc $r \approx x$.

Un hyperréel limité ne différant de son ombre que d'un infiniment petit, il est aisé, par calcul infinitésimal, d'établir

$$\forall x, y \in \overline{\mathbb{R}} \text{ limités, } {}^\circ(x+y) = {}^\circ x + {}^\circ y\ ,\ {}^\circ(xy) = {}^\circ x\, {}^\circ y \text{ et } x < y \Rightarrow {}^\circ x \leq {}^\circ y\ .$$

Extension des objets réels aux hyperréels

Etant donnée une partie A de $\mathbb{R}$, on note $\overline{A}$ l'ensemble des hyperréels $\overline{(x_n)}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$.

L'ensemble $\overline{A}$ se comprend comme étant l'extension naturelle de A dans $\overline{\mathbb{R}}$. Parmi ces extensions figure $\overline{\mathbb{N}}$ dont les éléments sont appelés nombres hypernaturels. Par exemple ω en est un hypernaturel.

Une fonction réelle f définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ s'étend naturellement en une fonction $\overline{f} : \overline{\mathcal{D}} \to \mathbb{R}$ en posant pour tout $x \in \overline{\mathcal{D}}$ représenté par une suite (x_n) d'éléments de $\mathcal{D}$, $\overline{f}(x) = \overline{(f(x_n))}$.

Le principe de transfert

Tout énoncé relatif aux fonctions réelles peut se transposer aux hyperréels à l'aide des extensions précédentes. Par exemple l'énoncé traduisant la croissance de $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ s'écrit $\forall x, y \in \mathcal{D}, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ et se transpose $\forall x, y \in \overline{\mathcal{D}}, x \leq y \Rightarrow \overline{f}(x) \leq \overline{f}(y)$.

La théorie des langages permet d'établir le théorème suivant :

Un énoncé réel est vrai ssi l'énoncé hyperréel qui lui correspond l'est.

Ce résultat est connu sous le nom de principe de transfert, c'est le théorème essentiel de la théorie ici présentée. Grâce à lui toute propriété réelle se transpose aux hyperréels. Par exemple la formule de développement du cosinus d'une somme devient par transfert

$$\overline{\cos}(a+b)=\overline{\cos}\,a\,\overline{\cos}\,b-\overline{\sin}\,a\,\overline{\sin}\,b$$

valable pour tout $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$.

Le principe de transfert permet aussi de transposer des propriétés hyperéelles aux réels et donc de suivre la démarche intellectuelle que Leibniz avait initiée :

- on transpose un problème réel aux hyperréels,
- on le résout dans ce cadre en ayant la possibilité d'exploiter le calcul infinitésimal,
- par transfert, le problème est résolu dans le cadre réel.

Nous allons illustrer cette démarche à travers les concepts de limite et de continuité puis observer l'élégance de celle-ci dans le cadre des fonctions uniformément continues.

Limite

Considérons une fonction $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ définie au voisinage d'un réel a . En analyse classique, dire que la fonction f tend vers un réel ℓ s'écrit :

$$\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\forall x\in\mathcal{D},\left|x-a\right|\le\alpha\Rightarrow\left|f(x)-\ell\right|\le\varepsilon\ .$$

En analyse non standard cette définition équivaut à :

$$\forall x\in\overline{\mathcal{D}},x\approx a\Rightarrow\overline{f}(x)\approx\ell$$ [3].

Avec cette nouvelle optique, il est particulièrement facile d'établir les différents résultats d'opérations sur les limites. Par exemple, supposons que f et g tendent vers ℓ et ℓ' en a . Pour tout $x\in\overline{\mathcal{D}}$ tel que $x\approx a$, on a $\overline{f}(x)\approx\ell$ et $\overline{g}(x)\approx\ell'$ donc $\overline{(f+g)}(x)=\overline{f}(x)+\overline{g}(x)\approx\ell+\ell'$.

Equivalence des concepts de limite

Supposons que f tende vers ℓ en a au sens classique. Considérons $\varepsilon>0$, il existe $\alpha\in\mathbb{R}^{+}*$ tel que

$$\forall x\in\mathcal{D},\left|x-a\right|\le\alpha\Rightarrow\left|f(x)-\ell\right|\le\varepsilon\ .$$

Par transfert du réel à l'hyperréel, on obtient :

$$\forall x\in\overline{\mathcal{D}},\left|x-a\right|\le\alpha\Rightarrow\left|\overline{f}(x)-\ell\right|\le\varepsilon$$

Ainsi pour tout $x\in\overline{\mathcal{D}}$ tel que $x\approx a$, ayant $\left|x-a\right|\le\alpha$, on a $\left|\overline{f}(x)-\ell\right|\le\varepsilon$. Comme ceci vaut pour tout $\varepsilon>0$, on conclut $f(x)\approx\ell$.

Inversement, supposons que pour tout $x\in\overline{\mathcal{D}}$ infiniment proche de a , on ait $\overline{f}(x)$ infiniment proche de ℓ . Considérons un réel $\varepsilon>0$, en prenant pour α un hyperréel infiniment petit strictement positif, on peut affirmer

$$\exists\alpha\in\overline{\mathbb{R}^{+}*},\forall x\in\overline{\mathcal{D}},\left|x-a\right|\le\alpha\Rightarrow\left|\overline{f}(x)-\ell\right|\le\varepsilon\ .$$

Par transfert de l'hyperréel au réel, on obtient

$$\exists\alpha\in\mathbb{R}^{+}*,\forall x\in\mathcal{D},\left|x-a\right|\le\alpha\Rightarrow\left|f(x)-\ell\right|\le\varepsilon$$

L'équivalence souhaitée est ainsi établie.

Continuité

Une fonction $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ est dite continue lorsque pour tout $a\in\mathcal{D}$, $f(x)$ tend vers $f(a)$ quand $x\to a$. A l'aide de ce qui précède, cela se retraduit :

$$\forall a\in\mathcal{D},\forall x\in\overline{\mathcal{D}},x\approx a\Rightarrow\overline{f}(x)\approx f(a)$$

ou encore, en exploitant le concept d'ombre :

$$\forall x\in\overline{\mathcal{D}},{}^{\circ}\overline{f}(x)=f({}^{\circ}x)\ .$$

Considérons maintenant une fonction $f:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$ continue. Le théorème des valeurs intermédiaires assure que tout y intermédiaire à $f(a)$ et $f(b)$ possède un antécédent par f . Donnons une démonstration non standard de ce résultat. Pour tout entier naturel n non nul, on découpe régulièrement le segment $\left[a,b\right]$ en les points $a_k=a+k(b-a)/n$. Il existe au moins un indice k tel que y soit intermédiaire à $f(a_k)$ et $f(a_{k+1})$. Posons $\alpha_n=a_k$, $\beta_n=a_{k+1}$ puis, en faisant varier n , considérons les hyperréels $\alpha=\overline{(\alpha_n)}$ et $\beta=\overline{(\beta_n)}$ éléments de $\overline{\left[a,b\right]}$. Par la définition de $\overline{f}$, on obtient aisément $\overline{f}(\overline{\alpha})\le y\le\overline{f}(\overline{\beta})$. Or $\beta_n-\alpha_n\to0$ donc $\alpha\approx\beta$. Pour conclure, considérons le réel $\gamma={}^{\circ}\alpha={}^{\circ}\beta\in\left[a,b\right]$, on a $f(\gamma)={}^{\circ}\overline{f}(\alpha)\le y$ et $f(\gamma)={}^{\circ}\overline{f}(\beta)\ge y$ donc $f(\gamma)=y$.

De manière assez semblable, et à titre d'exercice, on peut établir que toute fonction réelle définie et continue sur un segment y est bornée et atteint ses bornes.

---

[3] On peut noter la proximité de cette assertion et de la caractérisation séquentielle des limites.

L'uniforme continuité

Une fonction $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ est dite uniformément continue lorsque :

$$\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\forall x,y\in\mathcal{D},|x-y|\le\alpha\Rightarrow|f(x)-f(y)|\le\varepsilon\,.$$

Ce concept, un peu délicat à comprendre, et à manipuler, se retraduit simplement en analyse non standard :

$$\forall x,y\in\overline{\mathcal{D}},x\approx y\Rightarrow\overline{f}(x)\approx\overline{f}(y)\,.$$

La démonstration de l'équivalence entre ces deux définitions est très semblable à celle croisée ci-dessus lors de la traduction non standard du concept de limite.

Par exemple, la fonction racine carrée est uniformément continue car pour $x\approx y$ infiniment petit ou non, $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ est un infiniment petit. En revanche la fonction logarithme népérien n'est pas uniformément continue car pour ε infiniment petit strictement positif $2\varepsilon\approx\varepsilon$ alors que $\overline{\ln}2\varepsilon\not\approx\overline{\ln}\varepsilon$.

Il est connu que toute fonction continue sur un segment y est uniformément continue. Donnons une démonstration non standard de ce résultat. Supposons que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ soit continue. Pour tous hyperréels $x,y\in\overline{[a,b]}$ tels que $x\approx y$, on a ${}^{\circ}x={}^{\circ}y\in[a,b]$ et donc ${}^{\circ}\overline{f}(x)=f({}^{\circ}x)=f({}^{\circ}y)={}^{\circ}\overline{f}(y)$ ce qui assure $\overline{f}(x)\approx\overline{f}(y)$. Cette démonstration est particulièrement élégante et, en la comparant avec la démonstration de l'analyse classique, on peut percevoir à quel point les nombres hyperréels gèrent efficacement les raisonnements basés sur la notion de suites extraites et sur l'application du théorème de Bolzano-Weierstrass.

Pour conclure

Nous avons esquissé ici, les prémices d'une théorie qui permet de redéfinir les notions d'analyse fonctionnelle usuelles par le biais de manipulations de quantités infinitésimales. Certains concepts y sont particulièrement élégants et y trouvent des démonstrations simples. Cependant, l'analyse non standard, bien que construite sur une base axiomatique indiscutable (l'IST ou Internal Set Théory), n'a pas encore su s'imposer par rapport à l'analyse classique. En effet, en dehors de quelques résultats relatifs aux perturbations de systèmes dynamiques dans le cadre de la mécanique des fluides, l'analyse non standard n'a pas encore permis de mettre à jour des théorèmes forts ignorés de l'analyse classique héritée du XIX$^{\text{ème}}$ siècle.

Encadré

Concept	Définition non standard
$f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ tend vers ℓ en a	$\forall x\in\overline{\mathcal{D}},x\approx a\Rightarrow\overline{f}(x)\approx\ell$
$f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ tend vers $+\infty$ en a	$\forall x\in\overline{\mathcal{D}},x\approx a\Rightarrow\overline{f}(x)$ est un infiniment grand positif
$f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ est continue	$\forall x\in\overline{\mathcal{D}},{}^{\circ}\overline{f}(x)=f({}^{\circ}x)$
$f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ est uniformément continue	$\forall x,y\in\overline{\mathcal{D}},x\approx y\Rightarrow\overline{f}(x)\approx\overline{f}(y)$
f est dérivable en a de nombre dérivé α	$\alpha={}^{\circ}\left(\dfrac{\overline{f}(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}\right)$ pour tout ε infiniment petit
intégrale d'une fonction continue $f:[a,b]\to\mathbb{R}$	$\int_a^b f={}^{\circ}\overline{\left(\dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n}f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)\right)}$

Bibliographie :

Ballade en analyse non standard sur les traces de A. Robinson, André Petry,
http://www.ulb.ac.be/assoc/bms/Bulletin/sup961/petry.pdf

Correction de l'exercice

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $a_k^n=a+k\dfrac{b-a}{n}$ pour $k\in\{0,\dots,n\}$.

Notons k_n l'entier tel que $f(a_{k_n}^n)=\max\limits_{0\le k\le n}f(a_k^n)$ et considérons $\alpha=\overline{(a_{k_n}^n)}$ et $x={}^{\circ}\alpha\in[a,b]$.

Pour tout $t \in [a,b]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, posons ℓ_n tel que $\left|t - a_{\ell_n}\right| \leq \frac{b-a}{n}$ et considérons ensuite $\beta = \overline{(a^n_{\ell_n})}$.
On observe $t = {}^{\circ}\beta$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}, f(a^n_{\ell_n}) \leq f(a^n_{k_n})$ on a $\overline{f}(\beta) \leq \overline{f}(\alpha)$ puis ${}^{\circ}\overline{f}(\beta) \leq {}^{\circ}\overline{f}(\alpha)$ i.e. $f(t) \leq f(x)$.