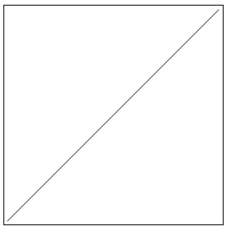
Epaisseur de la continuité

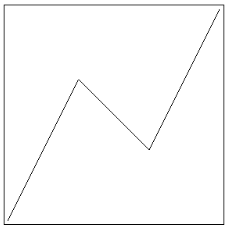
Il est commun de penser qu'une fonction continue d'une variable est représentée par une ligne au sens d'Euclide : une longueur sans largeur. La réalité est cependant plus complexe. Nous allons construire ici des fonctions continues dont les courbes représentatives n'ont de tangente en aucun point et semblent, en fait, posséder une épaisseur. Cela nous conduira à nous interroger sur ce qu'est la dimension d'un objet puis à caractériser l'épaisseur des précédentes courbes par une dimension non entière.
Les fonctions qui vont suivre ne seront pas définies par simples opérations sur les fonctions usuelles, en effet, ces dernières sont dérivables partout où elles sont définies, sauf peut-être, en un nombre « limité » de points. Ici, les fonctions étudiées seront définies par limite uniforme de suites de fonctions continues, le cours de math spé assure la continuité de telles fonctions.

La fonction de Bolzano

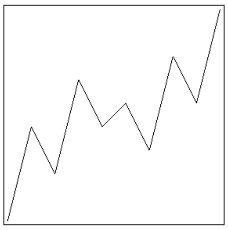
Pour représenter la fonction de Bolzano, on part d'un segment joignant l'origine au point de coordonnées $(1,1)$ du plan (étape 0). On le coupe en trois segments égaux, on fixe les extrémités initiales et on double la pente des deux segments extrêmes, enfin, on transforme le segment intermédiaire de sorte de maintenir la continuité (étape 1). On applique de nouveau le mécanisme précédent à chacun des trois segments de cette ligne brisée (étape 2) et on recommence à l'infini. Chaque ligne brisée obtenue est la courbe représentative d'une fonction réelle continue définie sur le segment $[0,1]$. On peut montrer que cette suite de fonctions converge uniformément, la fonction limite est appelée fonction de Bolzano.
La fonction de Bolzano est continue mais dérivable en aucun point car les pentes des segments des lignes brisées intermédiaires tendent vers l'infini. Le graphe d'une telle fonction fait penser à un mouvement brownien, c'est à dire un mouvement changeant de direction à chaque instant.



étape 0



étape 1



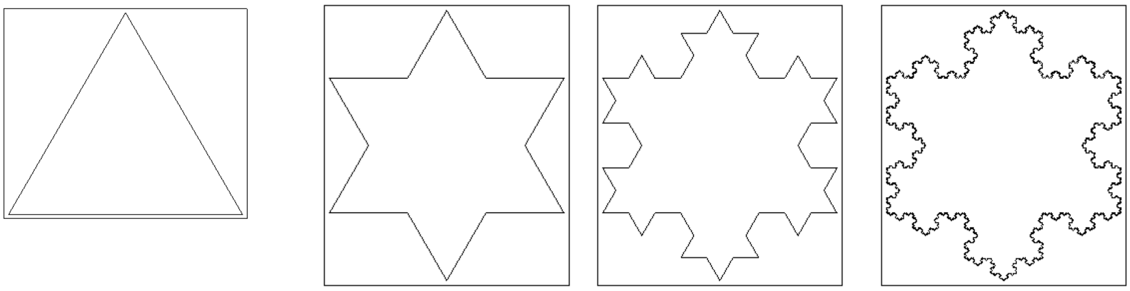
étape 2

Courbe de Bolzano

Flocon de Von Koch

Pour former le flocon de Von Koch, on part d'un triangle équilatéral (étape 0). On découpe chacun de ses côtés en trois segments égaux dont on conserve les segments extrémités, le segment intermédiaire, étant, quant à lui, remplacé par les deux côtés du triangle équilatéral extérieur qu'on peut construire sur celui-ci. On obtient ainsi une étoile à 12 côtés (étape 1). On applique le mécanisme précédent à chaque côté de cette étoile pour former un polygone à 48 cotés (étape 2) et on recommence à l'infini. La courbe limite obtenue est appelée flocon de Von Koch, on peut montrer que c'est la représentation d'une fonction continue limite uniforme d'une suite de fonctions continues définies sur $[0,1]$ et à valeurs dans le plan.

Si on note a l'arête du triangle équilatéral de départ la longueur du polygone obtenu à l'étape n est $\left(\frac{4}{3}\right)^n a$. Le flocon de Von Koch apparaît donc comme étant de périmètre infini. Il s'agit ici d'une courbe de longueur infinie enfermant un domaine borné : cette courbe maximise la surface de contact entre son intérieur et son extérieur. Nous retrouvons ce genre de figure dans nos poumons où les surfaces d'échanges de nos alvéoles sont maximisées alors que celles-ci sont enfermées dans un volume borné.



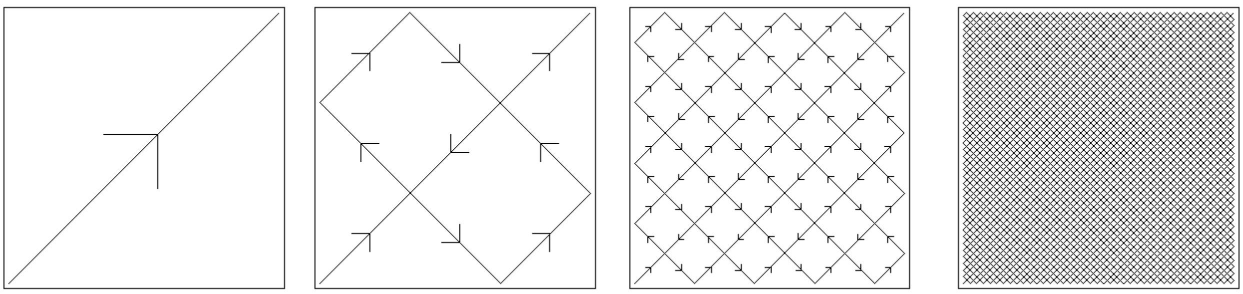
étape 0 étape 1 étape 2 Flocon de Von Koch

Dimension par repérage

Usuellement, la dimension d'un objet correspond au nombre minimal de paramètres permettant de se repérer continûment sur cet objet. La dimension d'une droite est égale à 1 car on s'y repère par une abscisse, la dimension du plan est égale à 2 car on s'y repère par une abscisse et une ordonnée, la dimension d'une sphère est, elle aussi, égale à 2 car on s'y repère par une latitude et une longitude. Cette définition paraît a priori satisfaisante mais nous allons voir, par le contre exemple de Peano, qu'elle est incorrecte.

Courbe de Peano

Pour construire une courbe de Peano, on part d'un carré dont on considère une diagonale (étape 0). On partage ce carré en neuf carrés égaux puis on considère une ligne brisée formée par des diagonales de chacun de ces neuf carrés, ligne brisée de mêmes extrémités que la diagonale de départ (étape 1). On applique ensuite ce mécanisme à chacune des diagonales des neufs carrés (étape 2) et on recommence à l'infini. Les lignes brisées ainsi formées sont les courbes représentatives d'une suite uniformément convergeante de fonctions continues définies sur le segment $[0,1]$ et à valeurs dans le plan. La limite de cette suite de fonctions est appelée fonction de Peano, c'est une fonction définie et continue sur $[0,1]$, on peut montrer qu'elle passe par tous les points du carré initial.



étape 0 étape1 étape 2 étape 4

A l'aide de la fonction de Peano, on peut se repérer continûment dans le carré à l'aide d'un seul paramètre ! Par conséquent, il nous faut abandonner la définition de la dimension par repérage. Nous allons la remplacer par une définition plus géométrique :

Dimension de contenu

Pour simplifier, on se place dans le cadre du plan.

On considère une partie A bornée du plan. Pour $r>0$, on note $N(r)$ le nombre minimal de carrés d'arête r permettant de recouvrir cette partie. Par exemple, si A est un segment de longueur a, $N(\sqrt{2}a/n)=n$, si A est un carré d'arête a, $N(a/n)=n^2$.

On définit la dimension de la partie A par :

$\dim A = \inf\left\{d \in \mathbb{R}^+ / r^d N(r) \text{ est bornée quand } r \to 0^+\right\}$.

Pour calculer celle-ci, on peut exploiter le résultat suivant :

Si (r_n) est une suite décroissant vers 0 telle que le rapport r_{n+1}/r_n converge et alors si le rapport $\dfrac{\ln N(r_n)}{\ln r_n}$ converge, sa limite est égale à la dimension de A.

Si A est un segment de longueur a alors, en prenant $r_n = \sqrt{2}a/n$, on obtient $\dim A = 1$.

Si A est un carré d'arête a alors, en prenant $r_n = a/n$, on obtient $\dim A = 2$.

Notons aussi que si A est un singleton alors $\dim A = 0$.

Remarquons de plus que si $A \subset B$ alors $\dim A \le \dim B$ mais l'égalité des dimensions n'implique par l'égalité des ensembles.

Finalement, la définition proposée correspond bien à la notion intuitive de dimension, mais notons qu'elle ne s'applique ici qu'aux parties bornées. En fait, il est facile d'étendre celle-ci aux parties A non bornées en considérant la borne supérieure des dimensions des intersections de A avec tout disque du plan.

Dimension non entière

Contrairement à la dimension par repérage, la dimension de contenu peut conduire à des valeurs non entières.

Par exemple, pour le flocon de Von Koch construit à partir d'un triangle rectangle d'arête égale à a, on constate que l'on peut recouvrir celui-ci par 3.4^n carrés d'arête $a/\left(\sqrt{2}3^n\right)$; de plus, il y a nécessairement autant de ces carrés que les 3.4^n sommets de la ligne brisée construite à l'étape n. On en déduit que la dimension du flocon de Von Koch est $d = \dfrac{\ln 4}{\ln 3} = 1,26$ à 10^{-2} près.

Pour la courbe de Bolzano, les considérations à mener sont plus complexes, néanmoins on parvient à démontrer que sa dimension est $d = \dfrac{\ln 5}{\ln 3} = 1,46$ à 10^{-2} près, car, entre autres arguments, il est possible de la recouvrir par 5^n carrés d'arête $1/3^n$.

Qu'est-ce qu'une courbe ?

Les considérations qui précédent montrent qu'il n'est pas aisé de définir ce qu'est une courbe du plan, c'est pourquoi, dans la pratique, on appelle courbe le support d'un arc de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Encadré : Démonstration des propriétés relatives à la fonction de Peano

On définit les fonctions $f_n : [0,1] \to [0,1]\times[0,1]$ de sorte qu'elles paramètrent sur les intervalles $\left[k/3^n, (k+1)/3^n\right]$. les 3^n segments successifs de la ligne brisée construite à l'étape n. Pour $m \ge n$, on observe que $f_m(t)$ et $f_n(t)$ appartiennent à un même carré de côté $1/3^n$. La distance entre ces deux points est donc inférieure à la diagonale de ce carré : $\sqrt{2}/3^n$. La suite de points $(f_n(t))$ étant alors de Cauchy, elle converge, et sa limite $f(t)$ appartient encore au carré, donc $d(f_n(t), f(t)) \le \sqrt{2}/3^n$. Cette majoration uniforme assure que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ et que la fonction limite f est continue.

Pour observer que f est surjective, commençons par souligner que l'ensemble $\operatorname{Im} f$ des valeurs prises par f est un fermé car image d'un compact par une fonction continue. Puisque les sommets des lignes brisées construites à chaque étape sont des valeurs prises par f et que ceux-ci forment une partie dense dans $[0,1]\times[0,1]$, on peut affirmer que $\operatorname{Im} f = [0,1]\times[0,1]$ i.e. que f est surjective.

La fonction f n'est pas injective, en effet les points de coordonnées $(1/3, 1/3)$ et $(2/3, 2/3)$ sont des valeurs prises deux fois. On peut même approfondir en soulignant que les restrictions de f aux intervalles $\left[k/3^n, (k+1)/3^n\right]$ remplissent chacun des carrés construit à l'étape n et que ces derniers ne sont pas deux à deux disjoints.

Encadré : Dimension de l'ensemble de Cantor

Deux carrés de côtés $1/3$ permettent de recouvrir l'ensemble de Cantor, quatre carrés de côté $1/9$ aussi. Plus généralement, on peut recouvrir cet ensemble à l'aide de 2^n carrés de côté $1/3^n$ et donc $N(1/3^n) \le 2^n$. De plus, les 4^n extrémités des segments obtenus à l'étape n appartiennent à l'ensemble de Cantor et, à cause de leurs distances mutuelles, il y en a au plus 2 dans un carré de côté $1/3^n$. Il faut donc donc au moins 2^n carrés de côté $1/3^n$ pour recouvir cet ensemble et finalement $N(1/3^n) = 2^n$. Comme dans l'exemple de Bolzano, on peut alors donner la dimension de l'ensemble de Cantor : $d = \dfrac{\ln 2}{\ln 3} = 0,63$ à 10^{-2} près.

En dehors de l'article, mais pour mémoire :

Von Koch.

Supposons que le flocon de Von Koch soit recouvert par N carrés d'arête $a/\sqrt{2}3^n$. Chaque sommet de la courbe de Von Koch appartient au moins à l'un des carrés. Un carré contient au plus deux sommets, lorsque c'est le cas, ceux-ci sont consécutifs disposés au coin du carré et appartiennent aussi à un autre carré. On élimine les carrés qui ne contiennent pas de sommets, et on ne garde qu'un carré lorsque plusieurs contiennent le seul sommet i, il en reste $N' \le N$. On numérote les carrés restant dans l'ordre de parcours par les sommets de la courbe, le carré possédant le sommet i précédant celui possédant les sommets i et $i+1$.

Considérons l'application qui à un sommet associe le premier carré qui le contient. Cette application injective. En effet si deux sommets appartiennent à un même carré, ils sont d'indices i et $i+1$ et le sommet d'indice i appartient alors un carré précédent celui qui contient i et $i+1$. L'injectivité de cette application donne $N \ge N' \ge 3.4^n$

Bolzano.

La ligne brisée formée à l'étape n est formée par 3^n arêtes reliant 3^n+1 sommets.

Il y a $\dbinom{n}{k}2^{n-k}$ arêtes dont la valeur absolue de la pente est 2^{n-k}. Une telle arête peut être recouverte par 2^{n-k} carrés d'arêtes $1/3^n$ superposés l'un au-dessus de l'autre. La courbe de Bolzano sera entièrement incluse dans le pavé ainsi formé. Au total $(1+4)^n = 5^n$ carrés.

Notons que la longueur de ligne brisée formée à l'étape n est $L_n = \sum_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}2^{n-k}\dfrac{\sqrt{1+2^{2(n-k)}}}{3^n} \ge \dfrac{1}{3^n}(1+4)^n = \dfrac{5^n}{3^n}$.

Considérons un recouvrement de la courbe de Bolzano formés de N carrés d'arêtes $1/3^n$ numérotés de 1 à N.

Pour $i = 1,\dots,3^n$, notons A_i l'ensemble des indices des carrés interceptant la portion de la courbe de Bolzano joignant les sommets d'indices i et $i+1$. Les A_i ne sont pas nécessairement disjoints mais $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour $|j-i| \ge 4$.

Dans A_i, il existe un carré contenant le sommet d'indice i, par continuité, (et si le sommet d'indice $i+1$ n'appartient pas à ce carré) considérons le point de sortie de ce carré (dans le sens ou aucun point qui suit n'appartiendra au carré) de la courbe de Bolzano. Par topologie, ce point est sur le bord du carré. De plus il ne peut pas ne pas appartenir à aucun autre carré. On détermine alors un nouveau carré contenant ce point. Si le sommet d'indice $i+1$ n'appartient pas à ce carré, on détermine le nouveau point de sortie et on reprend le processus jusqu'à atteindre le sommet d'indice $i+1$. Chaque carré indexé par A_i est considéré au plus une fois dans cette démarche qui permet finalement de construire une ligne brisée joignant les sommets i et $i+1$ d'une longueur L_i avec $L_i \le \dfrac{\sqrt{2}}{3^n}\operatorname{Card} A_i$. En rejoignant chacune de ces lignes brisées on en forme une de longueur $L = \sum_{i=1}^{3^n} L_i \le \dfrac{\sqrt{2}}{3^n}\sum_{i=1}^{3^n}\operatorname{Card} A_i \le \dfrac{\sqrt{2}}{3^n}4N$. Cette dernière est nécessairement plus longue que la ligne brisée construite à l'étape n ce qui nous donne $N \ge \dfrac{5^n}{4\sqrt{2}}$. Finalement $\dfrac{5^n}{4\sqrt{2}} \le N(\dfrac{1}{3^n}) \le 5^n$.