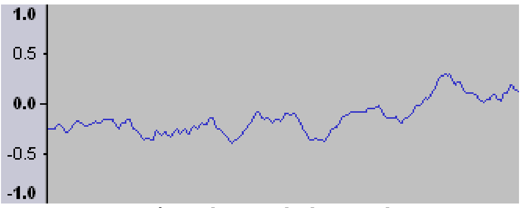
Echantillonnage, le théorème de Shannon

Les disques compacts, les DVD, les appareils photos numériques ont un succès retentissant auprès du grand public : l'heure est au numérique. Contrairement aux stockages analogiques où le bruit des composants détériore irrémédiablement le signal, les sources numériques proposent des enregistrements de meilleure qualité, facilement manipulables et inaltérables. Cependant le signal initial, qu'il soit audio, photographique ou d'une autre nature reste analogique. Pour un enregistrement audio la membrane d'un micro vibre en fonction de l'onde sonore perçue, cette vibration est traduite en une variation d'intensité de courant qu'il faut ensuite numériser. Plus tard, lors de la restitution de l'enregistrement, il faudra reconstruire le signal analogique à partir de sa numérisation.



5 centièmes de seconde d'une onde sonore

Echantillonnage et quantification

Une numérisation consiste en deux étapes :

- l'échantillonnage : on mesure le signal analogique à intervalle de temps régulier,
- la quantification : la mesure est exprimée comme multiple entier d'une quantité élémentaire appelée quantum.

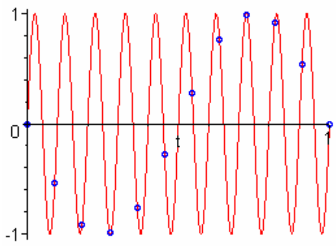
La quantification est à l'origine d'une altération du signal initial : c'est ce qu'on appelle le bruit de quantification. Néanmoins les composants électroniques actuels sont plus précis que la perception humaine et, pour une onde sonore, une quantification sur 16 bits (c'est-à-dire sur 65536 niveaux) est parfaitement satisfaisante. C'est la quantification pratiquée sur les enregistrements CD ou dans les fichiers « .wav ». Nous n'allons pas nous appesantir plus sur le problème de la quantification mais allons présenter dans cet article le théorème de Shannon qui résout deux problèmes liés à l'échantillonnage :

- comment reconstruire le signal analogique à partir de son échantillonnage ?
- quel laps de temps T_e prendre entre deux mesures ?

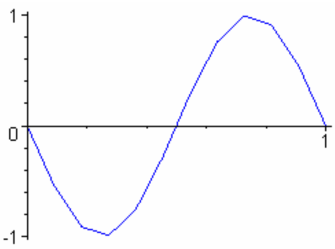
Plus la fréquence d'échantillonnage $\nu_e = 1/T_e$ est élevée, plus le nombre d'échantillons sera grand et le document numérisé volumineux. Sachant que l'oreille humaine est insensible aux fréquences supérieures à 20 kHz, on pourrait présumé qu'un échantillonnage à une fréquence légèrement supérieure à cette barre serait suffisant, nous allons voir que cela n'est pas si simple à cause du phénomène de repliement.

Repliement (ou aliasing)

Imaginons une onde sinusoïdale de fréquence $\nu = 10$ Hz échantillonnée à la fréquence $\nu_e = 11$ Hz :



Le signal apparent est alors le suivant :



Ainsi, par échantillonnage, il y a repliement des fréquences élevées parmi les fréquences basses. C'est le même phénomène, qui dans les Western, fait tourner les roues des diligences à l'envers,… au cinéma les films sont tournés à 24 images par seconde.

D'un point de vue audio, les instruments de musique génèrent d'autres vibrations que les ondes perçues par l'oreille humaine. Le phénomène de repliement se traduit alors par un durcissement du son, celui-ci devient métallique voire désagréable. Pour résoudre ce problème, il convient maintenant d'avoir une compréhension en fréquence du signal à numériser

Dualité temps-fréquence

D'un premier abord, il ne paraît peut-être pas naturel d'étudier le contenu en fréquence d'un signal, pourtant, lorsqu'on écoute une mélodie, ce qui différencie les notes les unes des autres est leur contenu fréquentiel. Par exemple le « la » du diapason correspond à la fréquence de 440 Hz. Pour connaître le contenu fréquentiel d'un signal, le mathématicien dispose d'un outil : la transformation de Fourier.

Sous réserve d'existence, la transformée de Fourier d'une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ de la variable t est la fonction :

$$\hat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-2i\pi\xi t}\,\mathrm{d}t$$

Le nombre complexe $\hat{f}(\xi)$ se comprend comme le contenu du signal $t\mapsto f(t)$ à la fréquence $\nu=\xi$. Par exemple, la transformée de Fourier de la fonction $1_{[-a,a]}$ indicatrice de l'intervalle $[-a,a]$ est $\xi\mapsto 2a\,\mathrm{sinc}(2\pi\xi a)$ où sinc est la fonction sinus cardinal, fonction continue sur $\mathbb{R}$ égale à $\dfrac{\sin x}{x}$ pour $x\neq 0$.

Présentons maintenant quelques propriétés utiles.

Si f_a désigne la fonction translatée $t\mapsto f(t-a)$, un changement de variable permet d'établir

$$\hat{f}_a(\xi)=\mathrm{e}^{-2i\pi\xi a}\hat{f}(\xi)$$

On peut reconstruire une fonction à partir de sa transformée de Fourier, c'est la formule d'inversion

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{2i\pi\xi t}\,\mathrm{d}\xi$$

Par suite deux signaux ayant même transformée de Fourier sont égaux. Ce résultat permet aussi de justifier que la fonction $t\mapsto \mathrm{sinc}(2\pi\nu t)$ est celle dont la transformée de Fourier est $\xi\mapsto\dfrac{1}{2\nu}1_{[-\nu,\nu]}(\xi)$.

Enfin, présentons la formule de Poisson :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}(\xi+k\nu)=\frac{1}{\nu}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n/\nu)\mathrm{e}^{-2i\pi n\xi/\nu}$$

Celle-ci s'établit en observant que le membre de gauche est une fonction ν-périodique dont on peut réaliser la décomposition en série de Fourier :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}(\xi+k\nu)=\frac{1}{\nu}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\int_0^{\nu}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}(\omega+k\nu)\mathrm{e}^{-2i\pi n\omega/\nu}\mathrm{d}\omega\right)\mathrm{e}^{2i\pi n\nu\xi}$$

En permutant la somme en k et l'intégrale puis en translatant les intégrales de sorte de pourvoir les recoller on parvient à

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}(\xi+k\nu)=\frac{1}{\nu}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{-2i\pi n\omega/\nu}\mathrm{d}\omega\,\mathrm{e}^{2i\pi n\nu\xi}$$

et on conclut par la formule d'inversion.

A l'aide de ces résultats d'analyse fréquentielle, nous pouvons maintenant énoncer et démontrer le théorème suivant qui résout les problèmes liés à l'échantillonnage précédemment évoqués :

> Par intégrations par parties, on peut établir que pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^n$: $\widehat{f^{(n)}}(\xi)=(2i\pi\xi)^n\hat{f}(\xi)$. Lorsqu'une fonction est régulière sa transformée de Fourier décroît rapidement en $\pm\infty$: cette fonction présente peu de fréquences fortes. La réciproque est aussi vraie, et par suite, si un signal a un contenu fréquentiel nul en dehors de $[-\nu,\nu]$, il est extrêmement régulier. Il est alors raisonnable de penser pouvoir reconstruire ce signal à partir d'un échantillonnage.

Le théorème de Shannon-Whittaker-Nyquist

Si la transformée de Fourier d'une fonction f est nulle en dehors du segment $[-\nu_c,\nu_c]$ (ν_c est appelée fréquence de coupure) alors on peut reconstruire la fonction f par la formule qui suit à partir de n'importe quel échantillonnage réalisé à une fréquence $\nu_e\geq 2\nu_c$:

$$f(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT_e)\,\mathrm{sinc}\big(\pi\nu_e(t-nT_e)\big)$$

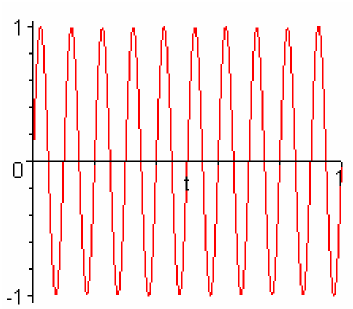
Présentons les grandes étapes de la démonstration de cette formule. Notons g la fonction qui à t associe le membre de droite de la relation ci-dessus. Nous allons établir l'égalité de f et g par l'égalité de leurs transformées de Fourier. Connaissant la transformée de Fourier de la fonction sinc, nous obtenons :

$$\hat{g}(\xi)=\frac{1}{\nu_e}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT_e)\mathrm{e}^{-2i\pi nT_e\xi}1_{[-\nu_e/2,\nu_e/2]}(\xi)$$

puis en exploitant la formule de Poisson, nous parvenons à :

$$\hat{g}(\xi)=1_{[-\nu_e/2,\nu_e/2]}(\xi)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(\xi+n\nu_e)$$

Enfin, sachant que $\hat{f}$ est nulle en dehors de $[-\nu_c,\nu_c]\subset[-\nu_e/2,\nu_e/2]$, nous obtenons $\hat{g}(\xi)=\hat{f}(\xi)$ et le théorème est démontré.



reconstruction de la sinusoïde initiale à partir de 75 échantillons à 25 Hz :
25 sur la fenêtre de visualisation et 25 de part et d'autres.
L'erreur relative par rapport au signal initial est de l'ordre de 1%

Conséquence pratique

Sachant que l'oreille humaine n'entend pas les fréquences supérieures à 20 kHz, on se doit d'effectuer un échantillonnage à une fréquence $\nu_e\geq 40$ kHz. Cependant les instruments de musique émettent des fréquences supérieures qui par repliement vont altérer le message échantillonné en y adjoignant des fréquences fantômes. Afin de supprimer celles-ci avant échantillonnage, on positionne un filtre passe-bas à une hauteur voisine de ν_e, filtre qui peut être réalisé par des moyens électroniques élémentaires. En pratique, l'échantillonnage est réalisé à la fréquence 44,1 kHz, fréquence que l'on peut voir figurer sur certains matériels Hi-Fi.