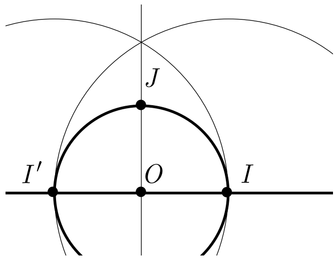
Constructions à la règle et au compas

Les constructions à la règle et au compas répondent à un idéal de précision qui a fasciné les mathématiciens de toutes les époques. Dans le présent article, nous allons voir ce qu'il est possible de construire avec ces outils.

Points constructibles

Partons de deux points distincts O et I. A partir de ceux-ci, nous construisons la droite (OI) et le cercle de centre O passant par I. L'intersection de ces deux objets définit le point I', symétrique de I par rapport à O. A l'aide des points I et I', on construit la perpendiculaire en O à la droite (OI) puis un point J sur cette droite vérifiant $OJ = OI$.



Ainsi, de proche en proche, à partir des premiers points O et I, nous pouvons construire des droites et des cercles et les intersections de ces objets déterminent de nouveaux points qui sont qualifiés de constructibles. Rappelons qu'il est facile à la règle et au compas de construire :

- la médiatrice d'un segment, et donc son milieu,
- la perpendiculaire à une droite passant par un point donné,
- la parallèle à une droite passant par un point donné,

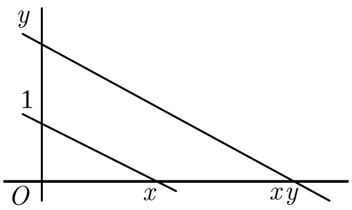
et bien d'autres choses encore...

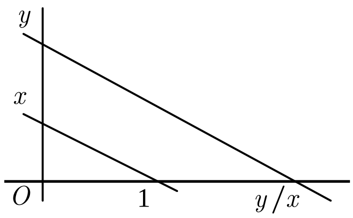
Nombre constructibles

Munissons le plan du repère d'origine O et de vecteurs de base $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$. Un réel est dit constructible lorsqu'il est en valeur absolue égal à la distance entre deux points constructibles. A partir de deux réels constructibles, il est facile de construire un point dont les coordonnées sont les réels en question. La détermination des points constructibles est donc équivalente à celle des réels constructibles.

Comme il est possible de graduer la droite (OI) en y reportant la distance OI, nous pouvons affirmer que les nombres entiers sont constructibles et donc que tout point à coordonnées entières est constructible.

Il est facile de faire la somme ou la différence de réels constructibles. Il est aussi possible de faire le produit ou le rapport de deux réels constructibles en exploitant le théorème de Thalès.

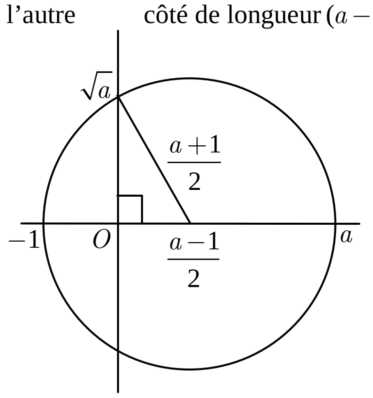




Les nombres rationnels sont donc des réels constructibles. Ce ne sont pas les seuls, le nombre irrationnel $\sqrt{2}$ l'est aussi car égal à la longueur IJ. Plus généralement si a est un réel positif constructible, il est possible d'en construire la racine carrée en exploitant la relation :

$$\sqrt{a} = \sqrt{\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-1}{2}\right)^2}$$

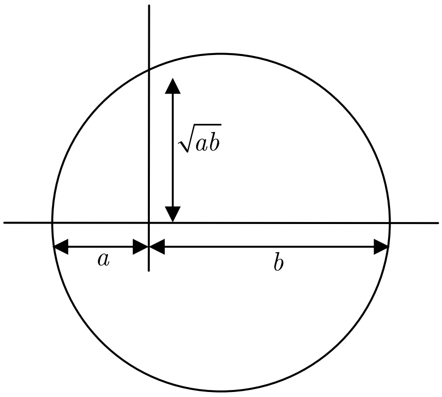
Cette relation permet de percevoir $\sqrt{a}$ comme étant la longueur d'un côté d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est de longueur $(a+1)/2$ et l'autre côté de longueur $(a-1)/2$. La construction de ce triangle est illustrée ci-contre :



Suite aux résultats qui précèdent, on peut affirmer que tout nombre réel obtenu par additions, soustractions, multiplications, rapports et passages à la racine carrée à partir de nombres entiers est constructible. La réciproque de ce résultat est présentée dans l'article « L'impossible quadrature du cercle ».

Quadrature d'un rectangle

Ce problème consiste à construire un carré dont l'aire est la même que celle d'un rectangle donné. En notant a et b les longueurs des côtés de ce rectangle, le problème revient à savoir construire le nombre $\sqrt{ab}$. En introduisant la longueur unité, nous avons vu ci-dessus comment construire le produit de deux nombres et nous saurons en extraire la racine carrée. Plus simplement, on obtient directement $\sqrt{ab}$ par la construction suivante inspirée du calcul d'une racine carrée :



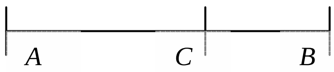
A partir de cette construction on peut résoudre le problème d'optimisation suivant :

La somme de la largeur et de la longueur d'un rectangle étant donnée,
quel sera le rectangle d'aire maximale ?

Sur la figure ci-dessus, la somme de la largeur et de la longueur du rectangle détermine le diamètre du cercle, la position du point O détermine quant à elle la proportion relative de la largeur par rapport à la longueur. L'aire du rectangle est maximale quand la longueur OM l'est c'est dire quand O est le centre du cercle. Ce cas de figure correspond au cas où est le rectangle est un carré.

Le nombre d'or

Un segment AB est dit partagé selon une section dorée lorsque le rapport du moyen segment avec le petit segment est égal à celui du grand segment avec le moyen.

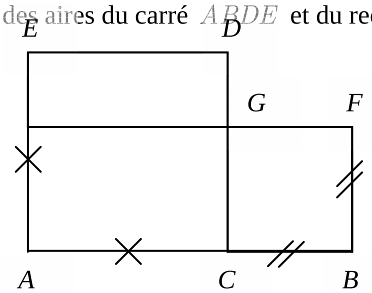


La section est dite dorée lorsque $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AB}{AC}$

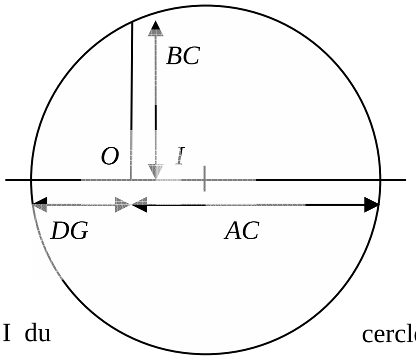
Ce rapport est appelé nombre d'or et est couramment noté φ . Ce nombre a longtemps joué un rôle majeur en architecture. Pour le construire à la règle et au compas, nous allons choisir la longueur BC pour unité de sorte que $\varphi = AC$. L'égalité des rapports définissant φ donne la relation

$$AC^2 = AB.BC$$

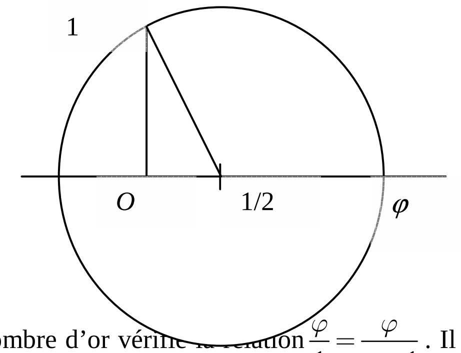
Celle-ci s'interprète comme l'égalité des aires du carré $ABDE$ et du rectangle $BCFG$ de la figure ci-dessous.



L'égalité de ces aires équivaut encore à celle des aires du rectangle et du carré hachuré. Le problème se rapproche alors de celui de la quadrature d'un rectangle comme dans la figure ci-dessous :

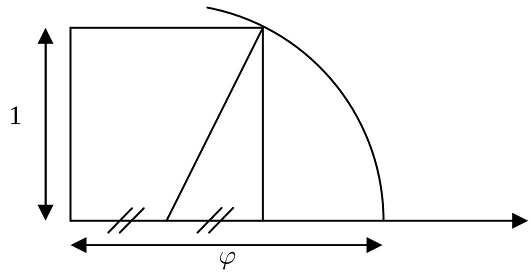


Puisque $DG = AC - BC$, le centre I du cercle est obtenu par $OI = \frac{1}{2}BC$. Cela permet de construire le nombre d'or φ comme dans la figure ci-dessous :



En fait de part sa définition le nombre d'or vérifie la relation $\frac{\varphi}{1} = \frac{\varphi}{\varphi+1}$. Il apparaît donc comme étant solution de l'équation algébrique $x^2 + x - 1 = 0$. La construction ci-dessus a en fait réalisé une résolution géométrique de cette équation comme les mathématiciens grecs aimaient le faire !

A l'aide de la résolution algébrique bien connue, on obtient $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Cette expression algébrique permet d'ailleurs de justifier la construction classique du nombre φ à partir d'un carré réalisée ci-contre :



Construction d'un pentagone

Il est facile de construire à la règle et au compas un triangle équilatéral, un carré ou un hexagone inscrit dans un cercle. La construction d'un pentagone est en revanche plus délicate. Elle est néanmoins possible car l'angle selon lequel deux sommets consécutifs d'un pentagone sont vus du centre est égal à $2\pi/5$. Or on peut montrer que

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

ce qui est un réel constructible.

Calcul de $\cos(2\pi/5)$.

Posons $\alpha = 2\pi/5$. Le centre d'un pentagone étant l'isobarycentre de ses sommets, on obtient l'égalité suivante par calcul barycentrique sur les abscisses des sommets d'un pentagone de centre O et dont I est un sommet :

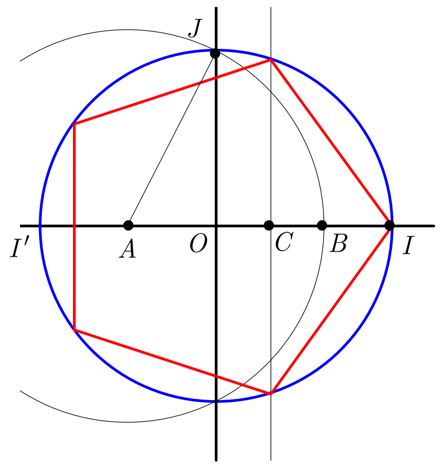
$$1 + \cos 2\alpha + \cos 4\theta + \cos 6\alpha + \cos 8\alpha = 0$$

Or $\cos 8\alpha = \cos 2\alpha$ et $\cos 6\alpha = \cos 4\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ donc $\cos\alpha$ est racine de l'équation :

$$4x^2 - 4x - 1 = 0 .$$

Il ne reste plus qu'à résoudre celle-ci et observer que $\cos\alpha$ en est la racine positive.

Pour construire le pentagone de centre O et dont I est sommet, on introduit le milieu A du segment $[O,I']$. Le cercle centré en A passant par J coupe la demi-droite $[OI)$ en un point B. Le milieu C du segment $[O,B]$ a pour abscisse α. Par suite, la médiatrice du segment $[O,B]$ coupe le cercle de centre O et de rayon unité en deux points qui sont sommets du pentagone cherché. Il ne reste alors plus qu'à compléter celui-ci.



Polygones constructibles

Est-il possible de construire tous les polygones réguliers à la règle et au compas ? Ce problème déjà soulevé depuis l'antiquité grecque a trouvé une réponse négative au XIX$^{\text{ème}}$ siècle : il n'est pas possible de construire un heptagone (polygone régulier à 7 sommets) à la règle et au compas (voir « L'impossible quadrature du cercle »). Quels sont alors les polygones constructibles ?

Si nous savons construire un polygone régulier à n sommets, il est facile par construction de bissectrices d'obtenir un polygone régulier à $2n$ sommets. Si nous savons construire un polygone à pq sommets, il est possible de construire des polygones réguliers à p et q sommets, il suffit de ne conserver que les sommets qui nous intéressent. Inversement, si l'on sait construire des polygones réguliers à p et q sommets alors on sait construire les angles $2\pi/p$ et $2\pi/q$. Si de plus p et q sont premiers entre eux, par l'égalité de Bézout, il existe des entiers u et v tels que $pu+qv=1$ et alors

$$\frac{2\pi}{pq}=u\frac{2\pi}{q}+v\frac{2\pi}{p}$$

ce qui permet de construire l'angle $2\pi/pq$ puis un polygone régulier à pq sommets.

Partant de la décomposition d'un entier en produit de nombres premiers et des remarques précédentes, pour savoir quels sont les polygones réguliers constructibles, il suffit de connaître ceux qui le sont parmi les polygones à p^α sommets avec p nombre premier supérieur à 3 et α entier naturel non nul. Le mathématicien C. F. Gauss a établi que de tels polygones sont constructibles si et seulement si α est égal à 1 et p est un nombre de Fermat, c'est à dire un nombre premier de la forme

$$p=2^{2^n}+1 \text{ avec } n\in\mathbb{N}$$

On peut alors énoncer le théorème de Gauss :

Un polygone régulier à n sommets est constructible à la règle et au compas
si et seulement si l'entier n peut s'écrire $n=2^\alpha F_1F_2\ldots F_n$
avec $F_1,\ldots,F_n$ nombres de Fermat distincts.

A l'heure actuelle, les seuls nombres de Fermat connus sont $3,5,17,257$ et 65537. Ainsi, il est notamment possible de construire un polygone régulier à 17 sommets à la règle et au compas. Cette construction fût l'un des premiers résultats obtenus par C. F. Gauss.