# Démonstrations d'existence par compacité

Il est souvent délicat en mathématique de justifier des existences. L'une des possibilités consiste à exhiber une solution comme lors de résolutions d'équations. Malheureusement cela n'est pas toujours possible. Une autre possibilité consiste à faire appel à des théorèmes fondamentaux comme le théorème des valeurs intermédiaires qui assure une existence en exploitant la propriété de complétude de la droite réelle. Dans cet ordre d'idée, nous allons présenter ici plusieurs théorèmes permettant d'affirmer des existences, théorèmes justifiés par un argument topologique : la compacité.

**Valeur d'adhérence d'une suite**

On appelle valeur d'adhérence d'une suite tout point dont les voisinages contiennent une infinité de termes de la suite : il y a accumulation de termes de la suite au voisinage de ce point. Si la suite est convergente elle ne possède qu'une seule valeur d'adhérence : sa limite. Sinon la suite peut avoir plusieurs valeurs d'adhérence ou bien ne pas en avoir.

Une partie est dite compacte ssi toute suite d'éléments de celle-ci possède au moins une valeur d'adhérence dans cette partie. Cela a pour conséquence que cet espace est relativement petit : on ne peut y repartir les termes d'une suite sans qu'il y ait au moins une accumulation de ces termes quelque part. De part sa définition, l'argument de compacité assure l'existence de valeurs d'adhérences, c'est ce qui nous permettra de justifier l'existence d'éléments particuliers vérifiant une certaine propriété. Mais avant cela il est nécessaire de connaître quelques parties compactes.

**Les segments de $\mathbb{R}$ sont des compacts**

Considérons une suite d'éléments d'un segment $[a,b]$. En découpant ce segment en son milieu, au moins l'un des deux segments formés contient une infinité de termes de la suite. En reprenant le processus à partir de ce segment, on construit par dichotomie une suite de segments emboîtés de longueur $(b-a)/2^n$ contenant chacun une infinité de termes de la suite. L'intersection de ces segments déterminent alors une valeur d'adhérence à la suite étudiée : nous pouvons affirmer que les segments de $\mathbb{R}$ sont des parties compactes. Plus généralement, et à l'aide de ce résultat, on démontre que les parties compactes d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont les parties fermées et bornées.

**Image continue d'un compact**

L'un des principaux résultats de compacité est le suivant : l'image d'un compact $K$ par une application $f$ continue est un compact. En effet, considérons $y_n = f(x_n)$ le terme général d'une suite d'éléments de $f(K)$, les éléments $x_n$ évoluant dans le compact $K$, la suite $(x_n)$ présente une valeur d'adhérence $x$, par continuité de $f$, $y = f(x)$ sera valeur d'adhérence de la suite $(y_n)$. On peut donc conclure que $f(K)$ est compact.

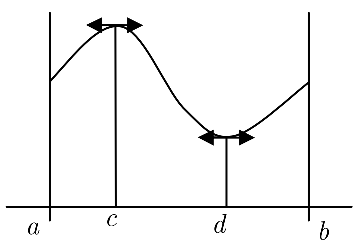
Pour une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles, ce résultat, ainsi que le théorème des valeurs intermédiaires, permet d'établir que l'image d'un segment est un segment. Dès lors nous disposons du principe suivant :

« toute fonction réelle continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes »

Ce résultat permet donc de justifier l'existence de maximum et de minimum à une fonction continue sur un segment.

**Théorème de Rolle**

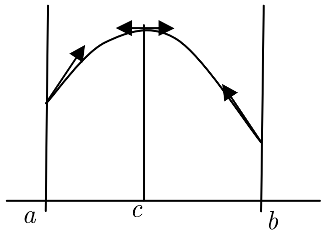
Considérons une fonction réelle définie et continue sur un segment $[a,b]$ (avec $a < b \in \mathbb{R}$ ). Par le principe établi ci-dessus, cette fonction présente un minimum et un maximum en des points $c$ et $d$ de $[a,b]$. Supposons que cette fonction soit de plus dérivable sur $]a,b[$ et prenne la même valeur en $a$ et $b$. A moins que cette fonction ne soit constante au quel cas sa dérivée serait nulle, l'un au moins des extremum $c$ et $d$ n'est pas une extrémité de l'intervalle $[a,b]$. En cet extremum, la tangente est horizontale et le nombre dérivé correspondant est nul. Ainsi nous justifions l'existence d'une valeur d'annulation à la dérivée de la fonction étudiée.



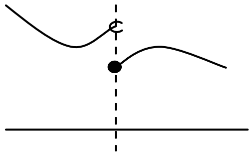
Le théorème de Rolle est un outil très fort en analyse, il permet d'établir le théorème des accroissements finis (qui exprime que la vitesse moyenne d'un mobile et égale à l'une des vitesses instantanées) ou sa généralisation qu'est l'égalité de Taylor-Lagrange.

**Théorème de Darboux**

En suivant des idées quelques peu semblables à celles présentées ci-dessus, considérons une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ dérivable vérifiant $f'(a)>0$ et $f'(b)<0$. Cette fonction présente un maximum car continue sur le segment $[a,b]$, ce maximum ne peut être en $a$ ni en $b$ compte tenu des hypothèses sur les nombres dérivés en ces points. En ce maximum, la dérivée de $f$ s'annule.

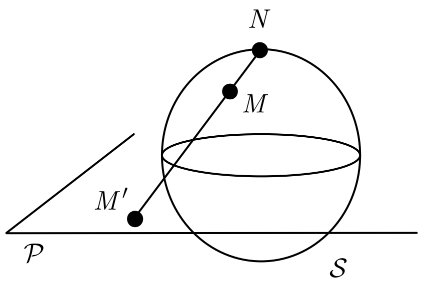



Par ce résultat, on établit que même si la dérivée d'une fonction n'est pas nécessairement continue, elle satisfait néanmoins la propriété du théorème des valeurs intermédiaires : c'est le théorème de Darboux. En application de celui-ci, nous pouvons justifier l'inexistence de primitives à une fonction continue par morceaux présentant un saut.



**Théorème de d'Alembert-Gauss**

Le théorème de d'Alembert-Gauss affirme que tout polynôme non constant possède au moins une racine complexe. Pour établir ce résultat nous allons compactifier l'ensemble $\mathbb{C}$. Partons d'une sphère $\mathcal{S}$ de l'espace. Toute droite menée du pôle nord $N$ à un autre point $M$ de la sphère coupe en un unique point $M'$ le plan équatorial $\mathcal{P}$. La transformation correspondante est appelée projection stéréographique.




Cette transformation réalise une bijection continue de $\mathcal{S}\setminus\{N\}$ vers $\mathcal{P}$. En identifiant le plan géométrique $\mathcal{P}$ et le plan complexe $\mathbb{C}$ et en adjoignant à $\mathbb{C}$ un élément $\omega$ qui correspondrait à l'image du point $N$ on obtient une bijection continue de $\mathcal{S}$ vers $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\omega\}$. L'élément $\omega$ ainsi introduit se comprend comme un élément rejeté à l'infini. La sphère $\mathcal{S}$ est compacte car fermée et bornée donc son image par l'application continue précédente l'est aussi. Ainsi $\overline{\mathbb{C}}$ est un compact : on l'appelle compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{C}$.

Considérons alors $p$ une fonction polynomiale complexe non constante. On prolonge $p$ à $\overline{\mathbb{C}}$ en posant $p(\omega)=\omega$ et on vérifie que la fonction ainsi formée est continue. La fonction $|p|$ étant alors une fonction continue sur le compact $\overline{\mathbb{C}}$, elle admet un minimum en un point $a$ qui ne peut être en $\omega$. Il reste alors à établir que $|p(a)|=0$ pour assurer que $p$ possède une racine. La démarche est ici assez technique mais sous l'hypothèse absurde $|p(a)|>0$, on parvient à établir l'existence d'un complexe $b$ voisin de $a$ tel que $|p(b)|<|p(a)|$ ce qui contredit la définition de $a$ et permet de conclure.

**Conclusion**

Les différents théorèmes présentés ci-dessus justifient des existences de solutions à des équations mais ne permettent malheureusement pas de déterminer celles-ci. Cependant une existence apporte déjà beaucoup, par exemple, en logique mathématique, il arrive qu'on établit la validité d'un théorème en justifiant par un argument de compacité l'existence d'une démonstration mais sans pour autant en exhiber une !