Trois problèmes antiques

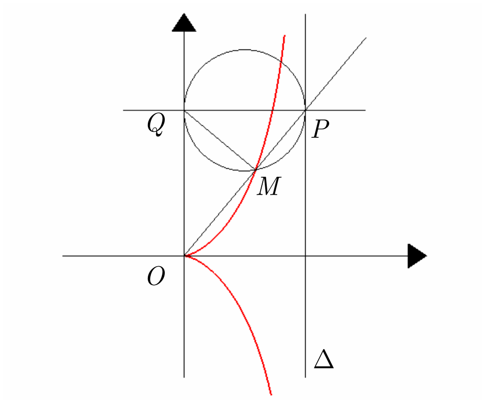
Les mathématiciens de la Grèce antique ont laissé à leurs successeurs trois problèmes de construction à la règle et au compas devenus célèbres. Ces problèmes sont :

- la duplication du cube : construire la racine cubique de 2 en vue de savoir réaliser un cube dont le volume soit le double de celui d'un cube donné
- la trisection de l'angle : construire un angle égal au tiers d'un angle donné.
- la quadrature du cercle : construire un carré dont l'aire est égale à celle d'un cercle donné.

Ces trois problèmes se sont avérés insolubles (voir « L'impossible quadrature du cercle »). Néanmoins, nous allons voir dans cet article, comment ces problèmes peuvent être résolus par des courbes dont les points peuvent être construits à la règle et au compas.

La cissoïde de Dioclès

La cissoïde de Dioclès (ou cissoïde droite) est une duplicatrice, c'est à dire une courbe permettant de résoudre le problème de duplication du cube. Pour la construire, on introduit un point P évoluant sur la droite Δ d'équation $x=1$. Notons Q le projeté orthogonal de P sur l'axe (Oy) et M le projeté de Q sur la droite (OP). La cissoïde de Dioclès est la courbe décrite par le point M lorsque le point P parcourt la droite Δ.



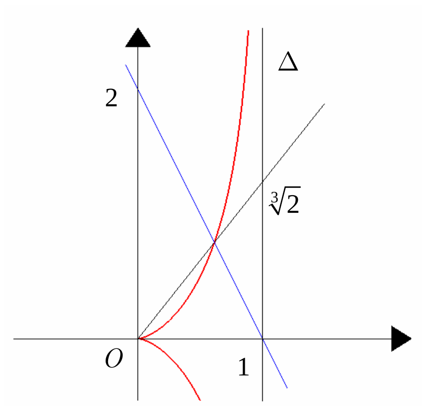
En introduisant θ une mesure de l'angle entre le vecteur $\vec{i}$ et le vecteur $\overrightarrow{OP}$, on observe que les coordonnées du point M sont $x=\sin^2\theta$ et $y=\sin^2\theta\tan\theta$. Cela permet d'établir que notre courbe a pour équation cartésienne

$$x(x^2+y^2)=y^2.$$

Quand le point P a pour ordonnée $\sqrt[3]{2}$, les coordonnées de M sont

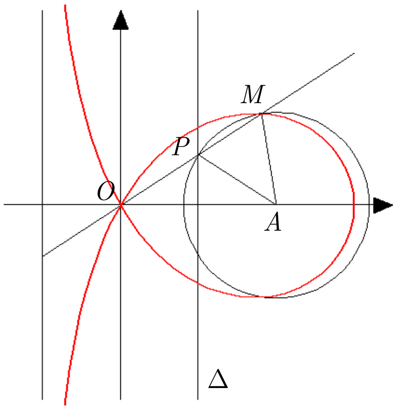
$$x=\frac{\sqrt[3]{4}}{1+\sqrt[2]{4}} \text{ et } y=\frac{2}{1+\sqrt[3]{4}}.$$

Le point M appartient donc à la droite d'équation cartésienne $2x+y=2$. En construisant l'intersection de cette droite et de la cissoïde de Dioclès, on obtient le point M et on en déduit le point P et donc une construction géométrique du nombre $\sqrt[3]{2}$.



La trisectrice de Mac Laurin

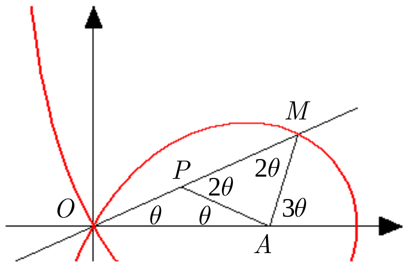
La trisectrice de Mac Laurin est, comme son nom l'indique, une courbe résolvant le problème de la trisection de l'angle. Pour la construire, on introduit à nouveau un point P évoluant sur la droite Δ d'équation $x=1$. Notons A le symétrique de O par rapport à Δ et M la deuxième intersection de la droite (OP) avec le cercle de centre A passant par P. La trisectrice de Mac Laurin est la courbe parcourue par le point M lorsque P décrit Δ.



Par construction, on a la double égalité :

$$OP = AP = AM$$

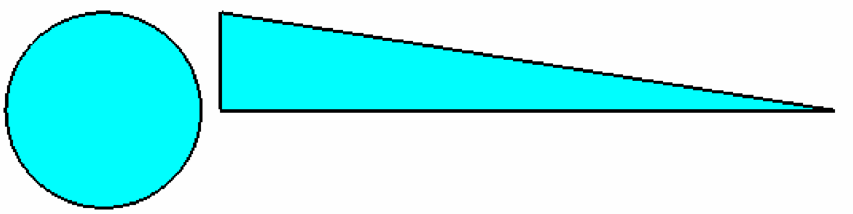
qui assure que les triangles (OPA) et (PAM) sont isocèles. En posant θ une mesure de l'angle entre le vecteur $\vec{i}$ et le vecteur $\overrightarrow{OM}$, on observe que l'angle entre $\vec{i}$ et $\overrightarrow{AM}$ est égal à 3θ.



Il est maintenant facile de réaliser une trisection : à partir d'un angle α on positionne un point M sur la courbe de sorte que α soit une mesure de l'angle entre le vecteur $\vec{i}$ et le vecteur $\overrightarrow{AM}$, l'angle entre $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OM}$ est alors égal au tiers de l'angle α.

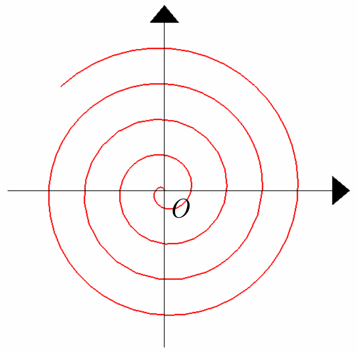
La spirale d'Archimède

Il ne reste plus qu'a évoquer le plus célèbre de nos trois problèmes : la quadrature du cercle. Archimède sait que l'aire d'un disque de rayon R et de périmètre $p=2\pi R$ est égale à celle d'un triangle rectangle dont les deux côtés adjacents à l'angle droit ont pour longueur R et p.

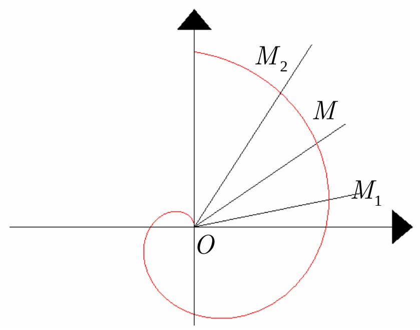


Il cherche alors à construire ce triangle à la règle et au compas. Il introduit pour cela une spirale obtenue par la composée de deux mouvements :

- une droite, initialement confondue avec l'axe (Oy) pivote autour de O dans un mouvement uniforme,
- sur cette droite, un mobile initialement en O, avance à vitesse constante.

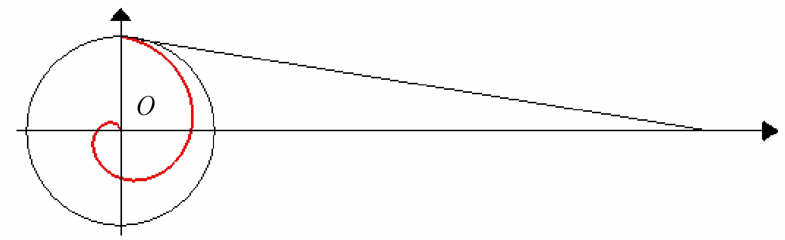


Si l'on connaît les positions M_1 et M_2 du mobile aux instants t_1 et t_2, il est facile de construire la position M de ce mobile à l'instant $(t_1+t_2)/2$ car on a la relation $OM=\dfrac{OM_1+OM_2}{2}$.



Partant des deux extrémités d'une spirale, il est donc possible de construire autant de points que l'on veut de celle-ci.

Plus précisément, Archimède considère la spirale atteignant le bord du disque à la fin de sa première révolution. En combinant la vitesse radiale du mobile qui est constante, et sa vitesse orthoradiale, qui est proportionnelle à sa distance au centre, il observe que la tangente en l'extrémité finale de cette spirale coupe l'axe (Ox) en un point dont l'abscisse est le périmètre p du cercle. La construction de cette tangente permet alors de tracer le



triangle voulu.
Malheureusement, cette tangente n'est pas constructible à la règle et au compas, on doit donc se contenter d'une approximation de celle-ci, approximation qui est possible puisque l'on sait construire autant de points que voulus de cette spirale.