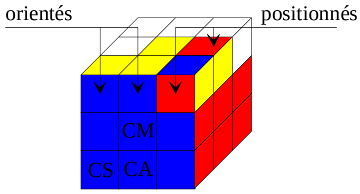
Résoudre le Rubik's Cube

Introduit par Erno Rubik en 1974, le Rubik's Cube est l'un des casse-tête les plus connus. Nous présentons ici une démarche qui va résoudre celui-ci, mais aussi, et surtout, permettre à chacun d'inventer sa propre résolution.

I. Formalisme :

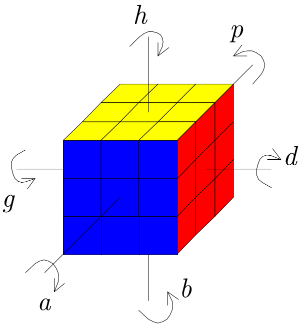
1°) description du cube

Le Rubik's cube est constitué de six faces, les milieux de ces faces sont appelés cubes milieux (CM). Les cubes situés aux sommets des faces sont appelés cubes sommets (CS), il y en a 8. Les cubes attenants aux cubes sommets sont appelés cubes arêtes (CA), il y en a 12.
Un CS, ou un CA, qui se trouve à la bonne place par rapport aux CM sera dit positionné. Si de plus ses étiquettes sont correctement disposées, il sera dit orienté.

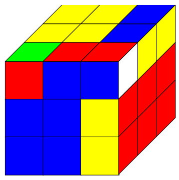


2°) description des mouvements

Posons notre cube sur une table. Les mouvements notés a, p, g, d, h et b correspondent respectivement aux rotations de $90°$ dans le sens horaire des faces antérieure, postérieure, gauche, droite, haute et basse.



Les mouvements a', p', g', d', h' et b' correspondent aux mouvements inverses des précédents.
On appelle combinaison, toute succession de mouvements.



Par exemple $R = a'dad'$ est une combinaison qui se comprend comme la réalisation successive des mouvements d', a, d puis a' (lecture de droite à gauche).

La figure ci-contre, représente le cube après action de cette combinaison.

Notons G l'ensemble des combinaisons imaginables. La réalisation successive de deux combinaisons munit G d'une structure de groupe. L'inverse de la combinaison R ci-dessus étant alors $R^{-1} = da'd'a$

La concrétisation d'un mouvement sur le Rubik's Cube peut alors se comprendre comme étant une action du groupe G sur un ensemble qui peut être l'ensemble des cubes ou encore l'ensemble des étiquettes de ces cubes...

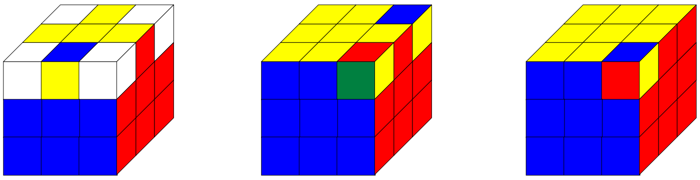
II. Configurations impossibles

Si on démonte le Rubik's Cube puis qu'on le reconstruit au hasard, il peut devenir insoluble... Cela provient de l'existence d'invariants sur le cube conduisant à ces configurations impossibles :

(1) Il est impossible que tous les CA soient bien orientés sauf 1.

(2) Il est impossible que tous les cubes soient positionnés sauf 2 CS.

(3) Il est impossible que tous les CS soient bien orientés sauf 1.



1ère impossibilité 2ème impossibilité 3ème impossibilité

La première impossibilité peut se justifier ainsi :

Sur l'ensemble des étiquettes des CA, un mouvement agit comme la composée de deux 4-cycles. Cela correspond à une permutation paire. Pour parvenir à ce qu'un seul CA soit mal orienté, il faut une combinaison qui agisse telle une transposition, ce qui correspond à une permutation impaire. C'est impossible.

La deuxième impossibilité peut se justifier ainsi :

Considérons E l'ensemble des CS et F l'ensemble des CA. Un mouvement opère sur E et sur F comme des 4-cycles, cela correspond à des permutations impaires. Une combinaison qui positionne tous les CA agit sur F comme l'identité qui est une permutation paire, cette combinaison se décompose donc en un nombre pair de mouvements. Une combinaison qui échange deux CS agit sur E tel une transposition, elle se décompose donc en un nombre impair de mouvements. L'impossibilité décrite en découle.

La dernière impossibilité est plus délicate, elle découle d'un invariant d'ordre 3, on pourra consulter [2]...

III. Algorithme de résolution

1°) Démarche générale

On présume que chacun est capable de réaliser une face accompagnée de la première couronne. On réalise ensuite la deuxième couronne (figure 1), puis on forme la troisième couronne en positionnant et en orientant les CA (figure 2) puis les CS (figure 3).

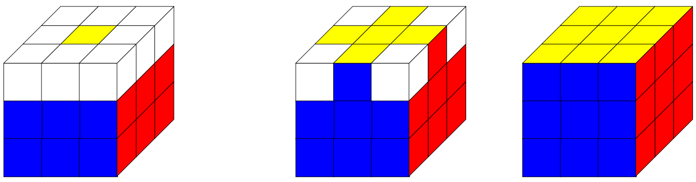


figure 1 figure 2 figure 3

2°) Réalisation de la deuxième couronne

On pose le cube sur la face résolue et on positionne les CM de la deuxième couronne. Pour disposer un CA sur la deuxième couronne on le positionne de sorte de se trouver dans l'un des deux cas de figure :

Dans le premier cas, on positionne le CA par la combinaison $aha'h'd'h'dh$.

Dans le second cas, on positionne le CA par la combinaison $a'h'ahghg'h'$.

De telles combinaisons peuvent se déterminer « à la main ». Partez du cube résolu, réalisez un mouvement asymétrique simple qui préserve une face et sa couronne. Regardez l'effet global, si un seul CA de la deuxième couronne a bougé, alors le mouvement inverse permet de positionner un CA. C'est ainsi qu'a été obtenue la première combinaison, l'autre s'en déduisant par symétrie.

3°) Réalisation de la troisième couronne

Pour achever la résolution du cube, on procède en 4 étapes :

Etape 1 : On positionne les quatre CA en exploitant la combinaison

$C_1 = h'a'd'hdhd'h'da$ dont l'effet est donné en figure 1.

Etape 2 : On oriente les quatre CA en exploitant la combinaison

$C_2 = hahd'h^2gh'g'h'^2dh'a'$ dont l'effet est donné en figure 2.

L'utilisation de cette combinaison s'avère suffisante pour orienter les CA car il est impossible que tous les CA soient orientés sauf 1.

Etape 3 : On positionne les quatre CS en exploitant la combinaison

$C_3 = h'g'b'dbd'ghg'db'd'bg$ dont l'effet est donné en figure 3.

L'utilisation de cette combinaison s'avère suffisante pour positionner les CS car il est impossible que tous ceux-ci soient positionnés sauf deux.

Etape 4 : On oriente les quatre CS en exploitant la combinaison

$C_4 = hdb'd^2ada'h'ad'a'd'^2bd'$ dont l'effet est donné en figure 4.

Encore une fois cette combinaison s'avère suffisante car il est impossible que tous les CS soient orientés sauf 1.

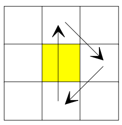


figure 1

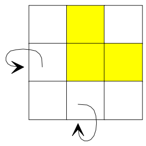


figure2

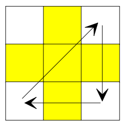


figure 3

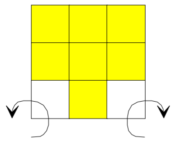


figure 4

Quelle est l'origine de ces combinaisons ?

4°) <u>La Formule</u> $sX^{-1}s^{-1}X$

Soit E l'ensemble des cubes et C un sous-ensemble formé par les cubes d'une même face F.

Considérons $X: E \to E$ une combinaison opérant sur E telle que :

a. X permute 2 éléments a et b de C,

b. X laisse invariants les autres éléments de C,

c. X opère de manière quelconque sur $E \setminus C$.

Considérons ensuite s un mouvement sur la face F :

a. s opère sur C et transforme notamment a en $s(a)$ et b en $s(b)$.

b. s laisse invariants les éléments de $E \setminus C$.

Considérons enfin la combinaison $sX^{-1}s^{-1}X$. Par celle-ci :

a. les éléments de $E \setminus C$ sont invariants,

b. les éléments de $C \setminus \{a,b,s(a),s(b)\}$ le sont aussi,

c. les éléments de $\{a,b,s(a),s(b)\}$ sont permutés, par exemple :

Si $a,b,s(a),s(b)$ sont deux à deux distincts : a,b sont échangés et $s(a),s(b)$ aussi.

Si $s(a) \neq b$ et $s(b) = a$ alors a est envoyé sur b, b est envoyé sur $s(a)$ et enfin $s(a)$ est envoyé sur a.

La combinaison C_3 est construite selon ce principe : $C_3 = \underbrace{h'}_{s}\underbrace{g'b'dbd'g}_{X^{-1}}\underbrace{h}_{s^{-1}}\underbrace{g'db'd'bg}_{X}$.

Considérons maintenant E l'ensemble constitué des étiquettes du cube et C le sous-ensemble constitué des étiquettes d'une même face F. On peut reprendre le principe précédent avec ces nouveaux ensembles et ainsi opérer sur les étiquettes au lieu des cubes.

La combinaison C_4 est construite selon ce principe :

$C_4 = \underbrace{h}_{s}\underbrace{db'd^2ada'}_{X^{-1}}\underbrace{h'}_{s^{-1}}\underbrace{ad'a'd^2bd'}_{X}$.

Enfin, les combinaisons C_1 et C_2 sont aussi construites ainsi mais en autorisant des modifications sur les 4 CS de la dernière couronne, ceci afin d'être plus courtes.

Finalement, vous disposez maintenant d'une démarche vous permettant de composer votre propre résolution du Rubik's Cube.

Bibliographie :

[1] La Recherche : Numéro exceptionnel Mai-Juin 2000
« Comment trouver sa solution du Rubik's Cube » par J-C Novelli
[2] http://trucsmaths.free.fr/rubik_groupe.htm de P.Picart
[3] http://sinfo.umh.ac.be/~maesa/math-j.htm#2 de A. Maes