Nombres algébriques et transcendants

Les mathématiciens de la Grèce antique ont longtemps pensé que la droite réelle n'était constituée que de nombres rationnels. En effet ils présumaient que si l'on se donnait deux segments de longueurs quelconques ceux-ci étaient commensurables, c'est à dire qu'ils étaient multiples entiers d'une même longueur. La découverte par l'école Pythagoricienne de l'incommensurabilité de la diagonale et de l'arête d'un carré a contredit l'hypothèse de commensurabilité : c'est l'irrationalité du nombre $\sqrt{2}$.

Nombres algébrique

Le nombre $\sqrt{2}$ est solution de l'équation à coefficients entiers $x^2-2=0$, on dit que c'est un nombre algébrique. Plus généralement :

Un nombre réel ou complexe est dit algébrique si et seulement si
il existe une équation algébrique à coefficients entiers dont il est solution.

Un nombre rationnel p/q est algébrique car racine de l'équation à coefficients entiers $qx-p=0$. Le nombre complexe i est aussi un nombre algébrique car solution de l'équation $x^2+1=0$. Quand un nombre algébrique est racine d'une équation de degré n, mais d'aucune de degré strictement inférieur, ce nombre est dit de degré n. Par exemple $\sqrt[3]{2}$ est un nombre algébrique de degré 3 car il est racine de l'équation $x^3-2=0$ sans être racine d'aucune équation algébrique à coefficients entiers de degré inférieur à 2. Pour des raisons semblables, $\sqrt{2}$ et i sont des nombres algébriques de degré 2 tandis que les nombres rationnels correspondent exactement aux nombres algébriques de degré 1.

Opérations sur les nombres algébriques

Quand un nombre α non nul est solution d'une équation

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

alors les nombres $-\alpha$ et $1/\alpha$ sont racines des équations

$$(-1)^n a_n x^n + \cdots - a_1 x + a_0 = 0 \text{ et } a_0 x^n + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

Par conséquent, l'opposé et l'inverse d'un nombre algébrique non nul est un nombre algébrique. On peut aussi montrer que la somme et le produit de deux nombres algébriques sont aussi des nombres algébriques mais ce résultat est beaucoup plus complexe et s'obtient en faisant appel à la théorie des extensions de corps. A titre d'exemple, obtenons une équation à coefficients entiers dont le nombre $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ soit racine. On commence par développer $(\alpha-\sqrt{2})^3=2$, ce qui donne

$$(2+3a^2)\sqrt{2} = a^3+6a-2$$

puis en élevant au carré :

$$a^6-6a^4-4a^3+12a^2-24a-4=0$$

Enfin, on peut aussi montrer que les racines d'une équation algébrique dont les coefficients sont des nombres algébriques sont elles-mêmes des nombres algébriques. Ainsi, si α un nombre algébrique positif alors $\sqrt{\alpha}$ est un nombre algébrique car racine de l'équation

$$x^2-\alpha=0$$

dont les coefficients sont des nombres algébriques.

Nombres transcendants

Au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle, peu de temps après l'apparition du concept de nombre algébrique, les mathématiciens s'interrogent :

Tous les nombres de la droite réelle sont-ils algébriques ?

Et en particulier, le nombre π est-il algébrique ? En 1844, J. Liouville est le premier a exhiber un nombre qui ne soit pas algébrique (voir encadré). Un tel nombre est dit transcendant. En 1872, C. Hermite démontre que le nombre e, la base des logarithmes népériens, est un nombre transcendant. Avec une démarche semblable, bien que plus complexe, F. Lindemann, établit en 1882 la transcendance du nombre π. Il résout ainsi

La constante de Liouville

Pour exhiber des nombres transcendants, J. Liouville exploite la propriété suivante :

Si x *est un nombre algébrique de degré* n, il n'existe qu'un nombre fini de rationnels p/q tels que

$$\left|x-\frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^n}$$

Il introduit alors le nombre

$$L = 10^{-1!}+10^{-2!}+\cdots+a_n 10^{-n!}+\cdots$$
$$= 0{,}11000100...00100...$$

et vérifie que pour tout $m \geq n$, les nombres rationnels $10^{-1!}+10^{-2!}+\cdots+10^{-m!}=\dfrac{p}{10^{m!}}$ satisfont l'inégalité ci-dessus. Il en découle que le nombre L est transcendant.

par la négative le problème millénaire de la quadrature du cercle (voir « L'impossible quadrature du cercle »)

Vers d'autres nombres transcendants

A partir de ces premiers nombres transcendants, il est facile d'en construire d'autres. Par exemple $1/\mathrm{e}$ ne peut être algébrique car sinon son inverse le serait aussi. Un argument semblable permet aussi de justifier la transcendance des nombres $\sqrt{\pi}$ ou π^2.

On peut aussi former des nombres transcendants par opérations avec des nombres algébriques. Par exemple, le nombre $\alpha = \pi + 2$ est transcendant car sinon $\pi = \alpha - 2$ serait algébrique. Plus généralement la somme et le produit d'un nombre algébrique non nul et d'un nombre transcendant sont des nombres transcendants.

Transcendances de $\mathrm{e}+\pi$ *ou de* $\mathrm{e}\pi$.

Les nombres e et π sont tous deux racines de l'équation

$$x^2 - (\mathrm{e}+\pi)x + \mathrm{e}\pi = 0$$

Si les deux nombres $\mathrm{e}+\pi$ et $\mathrm{e}\pi$ étaient algébriques, il en serait de même des nombres e et π ! Par suite, au moins l'un des deux nombres $\mathrm{e}+\pi$ ou $\mathrm{e}\pi$ est transcendant, mais lequel ? A ce jour, on l'ignore, sans doute le sont-ils tous les deux.

Le septième problème de Hilbert

En 1900, au deuxième congrès international de mathématiques, D. Hilbert énonça une liste de 23 problèmes dont la pertinence devait guider les recherches mathématiques durant le XXème siècle. Il a estimé que l'étude de la transcendance de certains réels comme $2^{\sqrt{2}}$ ou e^{π} était suffisamment digne d'intérêt pour constituer le septième problème de sa liste.

En 1934, A. Gelfond et T. Schneider résolvent ce problème en établissant séparément le théorème suivant :

Si α *est un nombre algébrique strictement positif et différent de 1 alors* α^{β} est transcendant pour tout nombre algébrique β irrationnel

Ce résultat permet bien entendu d'établir la transcendance de $2^{\sqrt{2}}$ mais aussi celle de e^{π} car dans la théorie des exposants complexes

$$(-1)^{-i} = (\mathrm{e}^{i\pi})^{-i} = \mathrm{e}^{\pi}$$

Plus tard, A. Baker établit grâce à la transcendance du nombre e et la théorie des fonctions holomorphes le théorème suivant :

Si $\alpha \in \mathbb{C}^*$ alors α et e^{α} *ne sont pas tous deux algébriques*

Ce résultat particularisé à $\alpha = i\pi$ permet de retrouver la transcendance du nombre π. Il permet aussi de justifier la transcendance, et donc a fortiori l'irrationalité, des nombres $\ln 2$, $\ln 3$,... Baker a obtenu la médaille Fields en 1970 pour ses travaux sur les nombres transcendants.

Conclusion

Il y a infiniment plus de nombres transcendants qu'il y a de nombres algébriques. Même si certains résultats récents ont permit d'établir la transcendance de nombres tels que $\sin(1)$, $\ln(3)/\ln(2)$, il reste néanmoins beaucoup de nombres simples dont la transcendance n'est que conjecture : π^{e}, $\mathrm{e}+\pi$, $\mathrm{e}\pi$ ou la constante d'Euler définie par la relation :

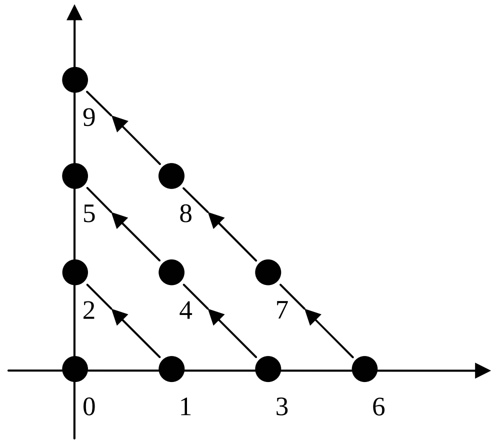
$$\gamma = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0{,}57722$$

à 10^{-5} près

Pire, à ce jour, on ignore encore si cette constante est ou non rationnelle !

Il y a infiniment plus de nombres transcendants

Un ensemble dont on peut numéroter les éléments est dit dénombrable. Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont dénombrables, il en est de même de $\mathbb{N}^2$ dont on peut numéroter les éléments via le schéma suivant :



L'ensemble $\mathbb{Q}$ est lui aussi dénombrable mais la droite réelle $\mathbb{R}$ ne l'est pas, ce la signifie qu'il y a infiniment de nombre réels de nombres rationnels. A fortiori, l'ensemble $\mathbb{C}$ n'est pas dénombrable. On peut montrer que l'ensemble des nombres algébriques est lui aussi dénombrable, son complémentaire dans $\mathbb{C}$, c'est à dire l'ensemble des nombres transcendants, ne l'est donc pas :

Il y a infiniment plus de nombres transcendants qu'il y a de nombres algébriques.