Modèle du tas de sable

Imaginons une grille rectangulaire. A l'intérieur de chaque case figure un certain nombre de grains de sable. Lorsqu'il y a au moins quatre grains dans une même case, celle-ci est instable, elle distribue alors un grain à chacune des quatre cases voisines. Si cette case instable est sur le bord de notre grille, il y aura un grain de perdu lors de cet éboulement, si cette case est à l'un des coins, il y aura deux grains de perdus. Un éboulement peut en entraîner un autre et il peut alors se créer une réaction en chaîne :

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&2&1\\\hline 3&3&2\\\hline 1&2&3\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&3&1\\\hline 4&3&2\\\hline 1&2&3\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&1\\\hline 0&4&2\\\hline 2&2&3\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&4&1\\\hline 1&0&3\\\hline 2&3&3\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&0&2\\\hline 1&1&3\\\hline 2&3&3\\\hline\end{array}$$

Ce modèle a été introduit pour l'étude des avalanches et des propagations des feux de forêts. Il a été étudié par le physicien indien Deepak Dhar au début des années 90.

Formalisation

Notons $n \geq 2$ le nombre de lignes et $p \geq 2$ le nombre de colonnes de notre grille. Pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, notons $a_{i,j}$ le nombre de grains de sable se trouvant dans la case en i ème ligne et j ème colonne. La famille A des $a_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$ est appelée configuration de notre tas de sable (en fait A est une matrice à n lignes et p colonnes). Une configuration A est dite stable si et seulement si tous les $a_{i,j}$ sont inférieurs ou égaux à 3, il n'y alors aucun éboulement possible. Sinon, la configuration A est dite instable et tout couple (i,j) tel que $a_{i,j} \geq 4$ est appelé case critique de la configuration A.

Eboulements et avalanche

On appelle éboulement de case $x = (i,j)$ la fonction notée Δ_x qui à une configuration A associe la configuration B obtenue par :

$b_{i,j} = a_{i,j} - 4$,

$b_{k,\ell} = a_{k,\ell} + 1$ si (k,ℓ) est une case voisine de (i,j)

$b_{k,\ell} = a_{k,\ell}$ sinon

Cette fonction Δ_x est définie sur l'ensemble des configurations A dont x est une case critique de A. Un éboulement de case x conserve les cases critiques autres que x et peut aussi entraîner l'apparition de nouvelles cases critiques, d'où la formation d'une réaction en chaîne. Néanmoins celle-ci s'arrête nécessairement comme cela est démontré dans l'encadré ci-contre. De plus, la configuration finale obtenue ne dépend pas de l'ordre dans lequel sont réalisés les éboulements, car si x et y sont des cases critiques d'une configuration A, on observe aisément que $\Delta_x \circ \Delta_y(A) = \Delta_y \circ \Delta_x(A)$. On appelle avalanche l'application p qui associe à une configuration A, la configuration stable $p(A)$ obtenue par succession d'éboulements. L'application p ne modifie pas les configurations stables et donc $p \circ p = p$.

Opérations sur les configurations

Etant donnés deux configurations A et B, on note $A+B$ la configuration obtenue en sommant pour chaque case de la grille, le nombre de grains figurant dans A et B. On note $A \oplus B$ la configuration stable obtenue par avalanche de $A+B$ i.e. $A \oplus B = p(A+B)$.

Puisque l'ordre des éboulements n'a pas d'incidence, si, pour évaluer $p(A+B)$, on commence par réaliser les éboulements transformant A en $p(A)$, on constate que $p(A+B) = p(p(A)+B)$. Autrement dit : $A \oplus B = p(A) \oplus B$. Par suite, on a aussi l'égalité $A \oplus B = p(A) \oplus p(B)$. Ces deux relations seront essentielles pour les manipulations à venir.

L'opération $\oplus$ ainsi définie est commutative, associative et possède la configuration nulle (i.e. celle sans grain de sable notée O) pour élément neutre. Cependant, il n'y a pas d'éléments symétrisables autres que O pour cette loi car, après un éboulement, il y a toujours au moins deux cases non vides. Néanmoins, nous allons voir que la loi $\oplus$ munit d'une structure de groupe l'ensemble des configurations dites effectives

Configuration effective

On appelle configuration totalement instable, toute configuration possédant au moins trois grains de sable dans chaque case. La configuration, notée δ, dont toutes les cases sont formées de trois grains est totalement instable.

On appelle configuration effective toute configuration obtenue par avalanche d'une configuration totalement instable. La configuration δ est effective. La configuration $\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}$ l'est aussi car obtenue par éboulement de $\begin{array}{|c|c|}\hline 5 & 6 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}$. En revanche la configuration O n'est pas effective.

Etant donné une configuration stable A, on appelle complément de A, la configuration $\overline{A}$ définie par $\overline{a_{i,j}} = 3 - a_{i,j}$ de sorte que $A \oplus \overline{A} = \delta$.

Groupe des configurations effectives.

L'ensemble G des configurations effectives est stable pour la loi $\oplus$, en effet si A, B sont des configurations effectives alors il existe A', B' totalement instables telles que $A = p(A')$ et $B = p(B')$. On a alors $A \oplus B = p(A') \oplus p(B') = A' \oplus B' = p(A' + B')$ avec $A' + B'$ totalement instable. En fait, en adaptant la démonstration précédente, on a le résultat plus fort : pour $A \in G$ et B quelconque, $A \oplus B \in G$.

Considérons maintenant l'élément $\varepsilon = \delta \oplus \overline{\delta \oplus \delta} \in G$. Pour tout $A \in G$, on a $A \oplus \varepsilon = A$. En effet, écrivons $A = p(A')$ avec $A' = A'' + \delta$ totalement instable. On a $A = A'' \oplus \delta$ et $A \oplus \varepsilon = A'' \oplus \delta \oplus \delta \oplus \overline{\delta \oplus \delta} = A'' \oplus \delta = A$

Ainsi ε est neutre pour G muni de la loi $\oplus$.

De plus pour $B = \overline{A \oplus \delta}$ on a

$$A \oplus \overline{A \oplus \delta} = A'' \oplus \delta \oplus \overline{A \oplus \delta} = A'' \oplus \left(\delta \oplus \delta \oplus \overline{\delta \oplus \delta}\right) \oplus \overline{A \oplus \delta}$$
$$= A \oplus \delta \oplus \overline{A \oplus \delta} \oplus \overline{\delta \oplus \delta}) = \delta \oplus \overline{\delta \oplus \delta} = \varepsilon$$

Ainsi A est symétrisable, de symétrique B.

Finalement G est un groupe abélien pour la loi $\oplus$.

Pour $n = p = 2$, $\operatorname{Card} G = 192$ et le neutre est $\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array}$.

Pour $n = 2, p = 3$, $\operatorname{Card} G = 2415$ et le neutre est $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$.

Pour $n = p = 3$, $\operatorname{Card} G = 100352$ et le neutre est $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$.

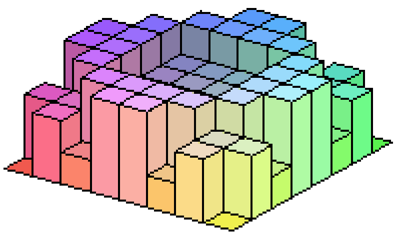
Le modèle présenté ici, dans le cadre simple de grains de sable disposés sur une grille, se généralise à des configurations plus complexes, où chaque case est reliée à un certain nombre de voisines et où chaque éboulement d'une case redistribue un ou plusieurs grains à chacune de ses voisines. L'étude de ce modèle général est assez semblable à celle qui précède et conduit aussi à l'existence d'un groupe des configurations effectives.

Encadré

Montrons qu'il n'existe pas de succession infinie d'éboulements. Par l'absurde, supposons qu'une telle succession existe. Comme il y a un nombre fini de grains au départ et un nombre fini de cases sur la grille, il n'y a qu'un nombre fini de configurations possibles. Notre réaction en chaîne infinie doit donc passer plusieurs fois par les mêmes configurations et il doit donc exister une suite d'éboulements qui conserve une certaine configuration. Lors de cette suite d'éboulements il ne doit y avoir aucun grain perdu. Par suite, il n'y aura aucun éboulement sur le bord de notre grille. Mais il ne peut y avoir non plus d'éboulement sur le bord du bord de la grille, car un tel éboulement envoie un grain sur le bord de la grille, grain qui ne pourra plus revenir à l'intérieur. En reprenant ce raisonnement, on constate qu'il n'y a pas d'éboulement du tout. Nous avons notre absurdité. Une autre méthode, moins visuelle, pour établir ce résultat, consiste à observer que l'application Δ_x fait systématiquement croître la quantité $I_A = \sum_{i,j} a_{i,j}(i^2 + j^2)$ lorsque le nombre de grains est constant.

Visualisation sous forme d'histogramme du neutre

Cas $n = p = 8$



Cas $n = 3$ **,** $p = 10$