Permutation de termes d'une série semi-convergente

L'infini est souvent source de résultats paradoxaux. Par exemple, imaginons un cinéma comportant une infinité de places assises numérotées $1, 2, \ldots, n, \ldots$. Même si celui-ci est complet, il peut encore admettre un nouveau spectateur ! En effet, il suffit pour cela que ce spectateur prenne la place 1 et que chaque autre spectateur passe de la place n à la place $n+1$. Il est même possible de « doubler » la capacité du cinéma, il suffit pour cela que chaque spectateur passe de la place n à la place $2n$ pour accueillir les nouveaux arrivants. Nous allons étudier ici un autre paradoxe de « réorganisation » de l'infini : nous allons observer qu'on peut permuter les termes de certaines sommes infinies afin d'en modifier la valeur !

Vocabulaire

Etant donnée une suite réelle $(u_n)_{n\geq 1}$, on appelle série de terme général u_n la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ définie par $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Cette série est dite convergente si la suite (s_n) converge, elle est dite divergente sinon. Lorsque la série converge, sa limite est appelée somme de la série, on la note $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

Pour qu'une série converge, il est nécessaire que son terme général soit de limite nulle ; cette condition n'est pas suffisante. Par exemple, on peut montrer que la série harmonique, i.e. la série de terme général $u_n = 1/n$, est divergente. Plus précisément, on a $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$ avec γ une constante (appelée constante d'Euler) et (ε_n) une suite de limite nulle, ainsi $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to +\infty$, on dit que la série harmonique diverge vers $+\infty$.

Série harmonique alternée

La série harmonique alternée, i.e. la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge. En effet :

$$\begin{aligned}
s_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\
&= h_{2n} - h_n = \ln 2n + \gamma + \varepsilon_{2n} - \ln n - \gamma - \varepsilon_n \to \ln 2
\end{aligned}$$

et $s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{2n+1} \to \ln 2$.

Ainsi cette série converge vers $\ln 2$ et on peut donc écrire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

Cependant, en permutant les termes de cette série, nous allons faire converger celle-ci vers une autre limite. Pour cela considérons la série formée en prenant un terme positif puis deux termes négatifs dans l'ordre où ceux-ci apparaissent dans la suite des $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)_{n\geq 1}$.

La série obtenue est la suite (s'_n) avec :

$$\begin{aligned}
s'_{3n} &= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+4}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+4}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right) \to \frac{\ln 2}{2}
\end{aligned}$$

$$s'_{3n+1} = s'_{3n} + \frac{1}{2n+3} \to \frac{\ln 2}{2} \text{ et } s'_{3n+2} = s'_{3n+1} - \frac{1}{4n+6} \to \frac{\ln 2}{2}.$$

Ainsi, la série formée converge vers $\frac{\ln 2}{2}$!

Série semi-convergente

Lorsqu'une série de terme général u_n converge mais que la série de terme général $|u_n|$ diverge, on dit qu'elle est semi-convergente. Par exemple, la série harmonique alternée est semi-convergente.

Considérons une série de terme général u_n qui soit semi-convergente. On a $\sum_{k=1}^{n} u_k \to \ell \in \mathbb{R}$ et $\sum_{k=1}^{n} |u_k| \to +\infty$.

Pour tout $n \geq 1$, posons $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$ de sorte que $u_n = u_n^+ - u_n^-$ et $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$.

On a $\sum_{k=1}^{n} u_n^+ - \sum_{k=1}^{n} u_n^- \to \ell \in \mathbb{R}$ et $\sum_{k=1}^{n} u_n^+ - \sum_{k=1}^{n} u_n^- \to +\infty$ donc $\sum_{k=1}^{n} u_n^+ \to +\infty$ et $\sum_{k=1}^{n} u_n^- \to +\infty$. Ainsi les séries des termes positifs et négatifs de la suite (u_n) tendent vers l'infini.

Réorganisation de la convergence

Soit $L \in \mathbb{R}$ quelconque. En réorganisant judicieusement les termes de la suite (u_n) nous allons construire une suite (v_n) telle que la série de terme général v_n converge vers L. Pour cela, posons $v_1, \ldots, v_n$ égaux aux premiers termes consécutifs $u_k \geq 0$, jusqu'à ce que $v_1 + \cdots + v_n$ excède L.

Ensuite, posons $v_{n+1}, \ldots, v_{n+m}$ égaux aux premiers termes consécutifs $u_k < 0$, jusqu'à ce que $v_1 + \cdots + v_{n+m}$ soit strictement inférieur à L. Poursuivons alors la construction de la suite (v_n) en choisissant les premiers termes consécutifs $u_k \geq 0$ non encore pris jusqu'à ce que la somme des termes obtenus de (v_n) excède de nouveau L, et ainsi de suite.

Puisque les séries des termes positifs et négatifs de (u_n) tendent vers $+\infty$, il y a toujours un nombre fini de termes u_k qui permettent de basculer d'un côté de L à l'autre. Il y a donc aussi un nombre infini de basculements. Ainsi la suite (v_n) est constituée de tous les termes de la suite (u_n) et est donc obtenue par permutation de l'ordre de ceux-ci. De plus, $\left|\sum_{k=1}^{n} v_k - L\right|$ est inférieure à la valeur absolue du précédent terme de la suite (u_n) qui a fait passer d'un côté à l'autre de L. Puisque la suite (u_n) tend vers 0, la série de terme général v_n converge vers L.

Organisation d'une divergence

De même, on peut former à partir de (u_n) une série qui diverge vers $+\infty$.

Il suffit pour cela de choisir les premiers termes positifs de (u_n) jusqu'à excéder 1, puis le premier terme strictement négatif, puis de choisir les termes positifs suivant de (u_n) jusqu'à excéder 2, puis le second terme strictement négatif et ainsi de suite. La série obtenue diverge vers $+\infty$ et est formée par permutation des termes de la suite (u_n).

Si une série est de terme général positif, les manipulations qui précèdent ne sont plus possibles et on peut montrer que la somme d'une telle série est indépendante de l'ordre de sommation. Il en est de même pour les séries absolument convergentes, c'est à dire les séries de terme général u_n telle que la série des $|u_n|$ converge.