L'aiguille de Buffon

C'est en 1777 qu'a lieu la première apparition inattendue du nombre π en calcul des probabilités. Le comte Leclerc de Buffon (plus connu comme naturaliste) soulève le problème suivant :

« si on lance une aiguille de longueur ℓ sur un parquet dont les lames sont de largeur a, quelle est la probabilité p pour que l'aiguille tombe à cheval sur 2 lames ? ».

Vocabulaire

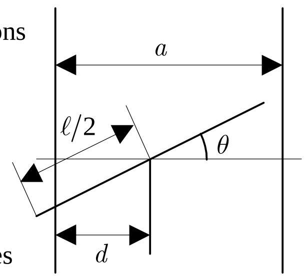
Pour résoudre ce problème, adoptons un vocabulaire probabiliste :

- un lancer d'aiguille est appelé expérience aléatoire,
- l'ensemble des lancers d'aiguille possibles est noté Ω, c'est notre espace de probabilité,
- une application X au départ de Ω est appelée variable aléatoire.,
- la valeur moyenne d'une variable aléatoire X est appelée espérance de celle-ci et est notée $E(X)$.

Par exemple, l'application X, qui à un lancer ω associe 1 s'il y a chevauchement et 0 sinon est une variable aléatoire (dite de Bernoulli, car elle ne prend que pour seules valeurs 0 et 1). Son espérance est $(1-p)\times 0+p\times 1=p$ car elle prend la valeur 0 avec la probabilité $1-p$ et la valeur 1 avec la probabilité p.

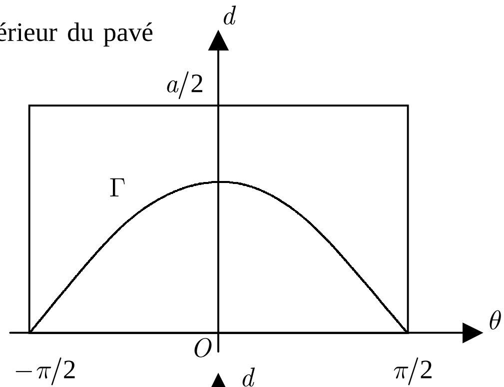
Résolution du problème

Dans un premier temps on suppose $\ell \le a$ et on se donne un lancer ω. Posons $d\in\left[0,\frac{a}{2}\right]$ la distance du milieu de l'aiguille à la lame la plus proche et posons $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ une mesure de l'angle que fait l'aiguille avec la direction orthogonale à celle des lames. Les applications $\omega\mapsto d$ et $\omega\mapsto\theta$ sont des variables aléatoires. Celles-ci sont susceptibles de prendre n'importe quelles valeurs dans les intervalles respectifs $\left[0,\frac{a}{2}\right]$ et $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ sans qu'aucunes de ces valeurs ne soient plus probables que d'autres (on dit que ce sont des variables aléatoires uniformes).



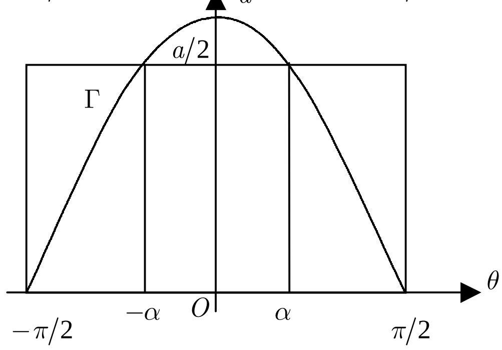
Lorsque d et θ sont connus, nous pouvons assurer qu'il y a aura chevauchement ssi $\frac{\ell}{2}\cos(\theta)\le d$.

Traçons alors la courbe Γ représentant le fonction $\theta\mapsto\frac{\ell}{2}\cos\theta$ à l'intérieur du pavé $\mathcal{P}=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{a}{2}\right]$.



A un lancer d'aiguille correspond un point de coordonnées (θ,d) dans $\mathcal{P}$. Il y aura chevauchement ssi ce point est en dessous de la courbe Γ. Puisque la variable aléatoire $\ell\mapsto(\theta,d)$ est uniforme, la probabilité p de chevauchement est égale à l'aire sous la courbe Γ (les cas favorables) divisée par l'aire du pavé $\mathcal{P}$ (les cas possibles). Ainsi :

$$p=\frac{\frac{\ell}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{\pi\times\frac{a}{2}}=\frac{2\ell}{\pi a}.$$



Supposons maintenant que $\ell>a$. Le raisonnement qui précède reste encore valable, mais la courbe Γ sort désormais du pavé. Pour déterminer l'aire sous la courbe incluse dans le pavé il faut évaluer les abscisses $-\alpha < \alpha$ pour lesquels Γ intercepte le segment supérieur du pavé. On obtient $\alpha = \arccos\left(\frac{a}{\ell}\right)$ et alors

$$p = \frac{\frac{\ell}{2}\int_{-\pi/2}^{-\alpha}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta + 2\alpha\frac{a}{2} + \frac{\ell}{2}\int_{\alpha}^{\pi/2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{\pi\times\frac{a}{2}} = \frac{2\ell(1-\sin\alpha)+2a\alpha}{\pi a}$$

Extension

Lorsque l'aiguille a une longueur $\ell \geq a$, celle-ci est susceptible de chevaucher plusieurs lames... Nous allons déterminer le nombre moyen de lames chevauchées. Pour cela introduisons la variable aléatoire X donnant le nombre de lames chevauchées à chaque lancer et déterminons son espérance $E(X)$ qui correspond au nombre moyen cherché. Cette espérance peut se voir comme une fonction de ℓ, ce qui permet d'écrire $E(X) = f(\ell)$ avec $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$.

Lorsque $\ell \in [0,a]$, X se confond avec la variable de Bernoulli présentée dans la portion vocabulaire dont l'espérance $E(X)$ vaut p avec p que nous avons vu égal à $\frac{2\ell}{\pi a}$. Par suite $f(\ell) = \frac{2\ell}{\pi a}$ pour tout $\ell \in [0,a]$.

Considérons maintenant deux aiguilles de longueurs ℓ_1 et ℓ_2 dont on accole les extrémités pour former une troisième aiguille de longueur $\ell_3 = \ell_1 + \ell_2$. On a $X_3 = X_1 + X_2$ en notant X_i le nombre de chevauchement associé à la i ème aiguille. L'espérance étant linéaire, on a : $E(X_3) = E(X_1) + E(X_2)$

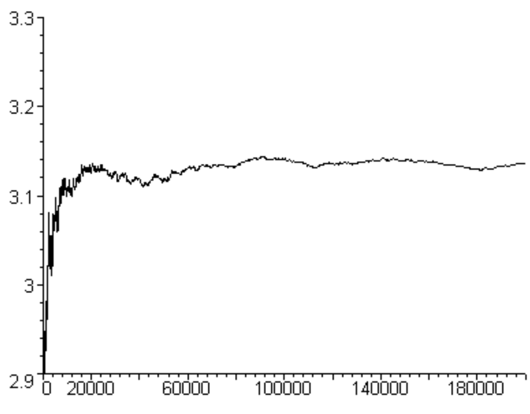
(prosaïquement : la valeur moyenne d'une somme est la somme des valeurs moyennes)

Par suite, $f(\ell_1+\ell_2) = f(\ell_1) + f(\ell_2)$ et on peut alors facilement démontrer $f(\ell) = \frac{2\ell}{\pi a}$ pour tout $\ell \in \mathbb{R}^+$ ce qui résout notre problème.

Le raisonnement qui précède peut se généraliser à la détermination du nombre moyen de chevauchements réalisés par une ligne brisée que l'on jette sur le plancher. Notons $\ell_1,\ldots,\ell_n$ les longueurs des segments la formant et $\ell = \ell_1 + \cdots + \ell_n$ sa longueur totale. Le nombre de chevauchements réalisés par la ligne brisée est $X = X_1 + \cdots + X_n$ en notant X_i le nombre de chevauchements associé au i ème segment. On a alors $E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2\ell_i}{\pi a} = \frac{2\ell}{\pi a}$. On peut pressentir que la formule se généralise un fil de fer courbe, mais cette fois-ci les étapes à franchir sont plus délicates...

Encadré :

En lancent une boîte d'épingles sur votre plancher et en comptant le nombre de chevauchements, vous pouvez réaliser une estimation probabiliste du nombre π. A vrai dire, ce n'est pas très performant... une simulation réalisée avec Maple en prenant $\ell/a = 1/2$ a donné la valeur décimale 3.137 pour un lancer de 200.000 aiguilles. Ci-dessous est représenté l'évolution de l'estimation de π en fonction du nombre d'aiguilles lancées. A l'adresse http://www-sop.inria.fr/mefisto/java/tutorial1/node14.html vous découvrirez une applet réalisant cette expérience.



Encadré

Choisissons deux entiers naturels non nuls au hasard, la probabilité que ceux-ci soient premiers entre 1 est : $6/\pi^2$. Pour le justifier notons $A_d = \{(x,y) \in \mathbb{N}^{*2} / \operatorname{pgcd}(x,y) = d\}$ et p_d la probabilité que deux entiers naturels non nuls choisit au hasard aient un pgcd égal à d. Puisque $\bigcup_{d=1}^{+\infty} A_d = (\mathbb{N}^*)^2$, on a $\sum_{d=1}^{+\infty} p_d = 1$. Mais $p_d = \lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{Card} A_d \cap \{1,\dots,n\}^2}{\operatorname{Card}\{1,\dots,n\}^2}$ donc par extraction $p_d = \lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{Card} A_d \cap \{1,\dots,nd\}^2}{\operatorname{Card}\{1,\dots,nd\}^2}$, or $\operatorname{Card} A_d \cap \{1,\dots,nd\}^2 = \operatorname{Card} A_1 \cap \{1,\dots n\}^2$ car $(x,y) \mapsto (dx,dy)$ réalise une bijection entre ces deux ensembles. Par suite $p_d = \lim_{n+\infty} \frac{\operatorname{Card} A_1 \cup \{1,\dots,n\}^2}{d^2 \operatorname{Card}\{1,\dots,n\}^2} = \frac{p_1}{d^2}$. La relation $\sum_{d=1}^{+\infty} p_d = 1$ donne alors $p_1 \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{1}{d^2} = p_1 \frac{\pi^2}{6} = 1$ d'où $p_1 = \frac{\pi^2}{6}$.