Cours Mathématiques MP

david Delaunay

5 novembre 2013

Première partie

Algèbre

Chapitre 1

Eléments d'algèbre générale

1.1 Relation d'équivalence

1.1.1 Relation binaire

Définition

On appelle relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E toute propriété vraie pour certains couples (x, y) d'éléments de E et fausse pour les autres. Lorsqu'un couple (x, y) vérifie la relation $\mathcal{R}$, on écrit $x\mathcal{R}y$; sinon, on écrit $x \not\mathcal{R} y$.

Exemple Egalité, inférieur ou égal et inclusion sont des relations binaires classiques.

Exemple Sur $E = \mathbb{R}$, on définit une relation binaire $\mathcal{R}$ par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \sin x = \sin y$$

Pour celle-ci : $0\mathcal{R}\pi$ et $0 \not\mathcal{R}\pi/2$.

Définition

Si $\mathcal{R}$ est une relation binaire sur E, on dit que :
- $\mathcal{R}$ est réflexive si $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$;
- $\mathcal{R}$ est symétrique si $\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$;
- $\mathcal{R}$ est transitive si $\forall x, y, z \in E, x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$;
- $\mathcal{R}$ est antisymétrique si $\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$.

Exemple Les relations d'ordre sont, par définition, les relations réflexives, antisymétriques et transitives.

1.1.2 Relation d'équivalence

Définition

On appelle relation d'équivalence toute relation binaire à la fois réflexive, symétrique et transitive.

Exemple L'égalité est une relation d'équivalence sur E.

Exemple L'équivalence des suites (ou de fonctions au voisinage de $a \in \bar{\mathbb{R}}$) est une relation d'équivalence.

Exemple Sur $E = \mathbb{R}$, considérons la relation $\mathcal{R}$ définie par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \sin x = \sin y$$

On vérifie aisément que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Remarque Plus généralement, pour $f : E \to F$, la relation $\mathcal{R}$ donnée par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

est une relation d'équivalence sur E.

Remarque En fait une relation d'équivalence se comprend comme « une égalité modulo certains critères ».

1.1.3 Classe d'équivalence

Ici $\mathcal{R}$ désigne une relation d'équivalence sur E.

Définition

On appelle classe d'équivalence d'un élément x de E pour la relation $\mathcal{R}$, le sous-ensemble noté $Cl(x)$ formé des éléments qui sont en relation avec x

$$Cl(x) := \{y \in E / x\mathcal{R}y\}$$

La classe d'équivalence de x est encore parfois notée $\dot{x}, \bar{x}, \hat{x}$,...

Exemple Sur $\mathbb{R}$, considérons à nouveau

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \sin x = \sin y$$

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$Cl(x) = \{x + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - x + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} = \{x, \pi - x\} + 2\pi\mathbb{Z}$$

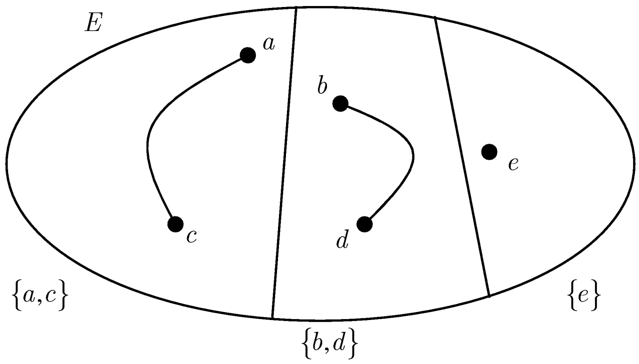
Exemple Considérons $E = \{a, b, c, d, e\}$ et $f : E \to \{0, 1, 2\}$ définie par

$$f(a) = 0, f(b) = 1, f(c) = 0, f(d) = 1 \text{ et } f(e) = 2$$

La relation $\mathcal{R}$ définie par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

est une relation d'équivalence que l'on peut visualiser ainsi



Pour celle-ci $Cl(a) = Cl(c) = \{a, c\}$, $Cl(b) = Cl(d) = \{b, d\}$ et $Cl(e) = \{e\}$.

Remarque $Cl(x)$ réunit les éléments de E qui sont « égaux modulo la relation $\mathcal{R}$ ».

Proposition

On a les propriétés

$$\forall x \in E, x \in Cl(x),$$

$$\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \Rightarrow Cl(x) = Cl(y),$$

$$\forall x, y \in E, x \not\mathcal{R} y \Rightarrow Cl(x) \cap Cl(y) = \emptyset$$

Ainsi une classe d'équivalence n'est jamais vide et deux classes d'équivalence distinctes sont disjointes.

dém. :
$x \in Cl(x)$ car la relation $\mathcal{R}$ est réflexive.
Si $x\mathcal{R}y$ alors pour tout $z \in Cl(y)$ on a $y\mathcal{R}z$ et donc $x\mathcal{R}z$ par transitivité. Ainsi $Cl(y) \subset Cl(x)$ et par symétrie on a l'autre inclusion et donc l'égalité.
Enfin, par contraposée, si $Cl(x) \cap Cl(y) \neq \emptyset$ alors pour un certain $z \in Cl(x) \cap Cl(y)$, on a $x\mathcal{R}z$ et $y\mathcal{R}z$ donc par symétrie et transitivité, on obtient $x\mathcal{R}y$.
□

Remarque Si y est élément d'une classe d'équivalence $Cl(x)$ alors $x\mathcal{R}y$ et donc $Cl(x) = Cl(y)$. Ainsi, tout élément d'une classe d'équivalence détermine celle-ci.

Définition

Tout élément y d'une classe d'équivalence est appelé représentant de celle-ci.

Remarque Les classes d'équivalence réalisent une partition de E ; cette partition est obtenue en regroupant entre eux les éléments qui sont « égaux modulo la relation $\mathcal{R}$ ».

Exemple Considérons la relation d'équivalence précédente sur $E = \{a, b, c, d, e\}$.
Celle-ci réalise une partition de E en 3 classes d'équivalence.

Définition

On appelle ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence pour relation $\mathcal{R}$.
On le note $E/\mathcal{R}$.

Remarque $E/\mathcal{R}$ se comprend comme l'ensemble obtenu lorsqu'on « identifie entre eux les éléments qui sont égaux modulo $\mathcal{R}$ ».

Exemple L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels se construit comme l'ensemble quotient de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\star$ pour la relation

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

La classe d'équivalence d'un coupe (a, b) est alors notée a/b.

1.1.4 Ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

Définition

On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation de congruence modulo n par

$$a \equiv b \quad [n] \Leftrightarrow n \mid (b - a)$$

Proposition

La relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

dém. :
Sans difficultés, on vérifie que la relation est réflexive, symétrique et transitive.
□

Définition

Pour $a \in \mathbb{Z}$, on note $\bar{a}$ la classe d'équivalence de $a \in \mathbb{Z}$ pour la relation de congruence modulo n.
Ainsi

$$\bar{a} = \{a + kn/k \in \mathbb{Z}\} = a + n\mathbb{Z}$$

Définition

On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble quotient de $\mathbb{Z}$ par la relation de congruence modulo n.

Théorème

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un ensemble fini à n éléments qui sont

$$\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{(n-1)}$$

dém. :
$\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{(n-1)}$ sont des éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Pour $a, b \in \{0, \ldots, n-1\}$,

$$\bar{a} = \bar{b} \Rightarrow n \mid (b-a) \Rightarrow a = b$$

Par suite, les classes $\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{(n-1)}$ sont deux à deux distinctes.
Pour tout $\bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, en considérant le reste $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ de la division euclidienne de a par n, on obtient $\bar{a} = \bar{r}$. Ainsi toutes les classes d'équivalence figurent parmi $\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{(n-1)}$.

□

Exemple $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$.

Proposition

On a

$$\forall a, b, a', b' \in \mathbb{Z}, a \equiv a' \quad [n] \text{ et } b \equiv b' \quad [n] \Rightarrow a + b \equiv a' + b' \quad [n] \text{ et } ab \equiv a'b' \quad [n]$$

dém. :
$n \mid a' - a$ et $n \mid b' - b$ entraînent $n \mid (a' + b') - (a + b) = (a' - a) + (b' - b)$ et $n \mid (a'b') - (ab) = (a' - a)b' + a(b' - b)$

□

Définition

On définit deux opérations $+$ et $\times$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en posant

$$\bar{a} + \bar{b} \underset{\text{déf}}{=} \overline{a + b} \text{ et } \bar{a} \times \bar{b} \underset{\text{déf}}{=} \overline{ab}$$

Remarque La définition ci-dessus est cohérente puisque le résultat de ces opérations ne dépend pas des représentants a, b choisis pour chaque classe.

Exemple Dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$,
$\bar{3} + \bar{5} = \bar{8} = \bar{2}$ ou encore $\bar{3} + \bar{5} = \bar{3} + \overline{-1} = \bar{2}$.
$\bar{3} \times \bar{5} = \overline{15} = \bar{3}$ ou encore $\bar{3} \times \bar{5} = \bar{3} \times \overline{-1} = \overline{-3} = \bar{3}$.

1.2 Groupes

1.2.1 Structure de groupe

1.2.1.1 Définition

Définition

On appelle groupe tout couple $(G, \star)$ formé d'un ensemble G et d'une loi de composition interne $\star$ sur G vérifiant :
1) $\star$ est associative i.e. $\forall a, b, c \in G, (a \star b) \star c = a \star (b \star c)$;
2) $\star$ possède un neutre i.e. $\exists e \in G, \forall a \in G, a \star e = a = e \star a$
(cet élément e est alors unique) ;
3) tout élément de G est symétrisable $\star$ i.e. $\forall a \in G, \exists b \in G, a \star b = e = b \star a$
(cet élément b est alors unique et appelé symétrique de a, noté a^{-1}).
Si de plus $\star$ est commutative, on parle de groupe abélien.
Lorsque la loi est notée $\times$ ou., on dit que le groupe est noté multiplicativement ($e \rightarrow 1$, $a \star b \rightarrow ab$)
Lorsque la loi est notée +, on dit que le groupe est noté additivement ($e \rightarrow 0$, $a \star b \rightarrow a + b$, $a^{-1} \rightarrow -a$). Cette dernière notation est réservée au groupe commutatif.

Attention : Si la loi $\star$ n'est pas commutative :
- la neutralité de e se vérifie par deux compositions ;
- l'inversibilité d'un élément se vérifie par deux compositions ;
- on a $(a \star b)^{-1} = b^{-1} \star a^{-1}$.

Exemple $(\mathbb{C}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{Z}, +)$ sont des groupes abéliens de neutre 0.

Exemple $(\mathbb{C}^\star, \times), (\mathbb{R}^\star, \times), (\mathbb{R}^{+\star}, \times)$ sont des groupes abéliens de neutre 1.

1.2.1.2 Itéré d'un élément

Soit $(G, \star)$ un groupe de neutre e.

Définition

Pour $a \in G$ et $k \in \mathbb{Z}$, on note a^k l'itéré d'ordre k de l'élément a :
- pour $k > 0$, $a^k = a \star \cdots \star a$ (k termes) ;
- pour $k = 0$, $a^0 = e$;
- pour $k < 0$, $a^k = a^{-1} \star \cdots \star a^{-1}$ ($|k|$ termes).

Proposition

On a

$$\forall k, \ell \in \mathbb{Z}, a^k \star a^\ell = a^{k+\ell} \text{ et } (a^k)^\ell = a^{k\ell}$$

dém. :
Il suffit de discuter selon les signes des exposants d'itérations considérés, c'est un peu lourd. . .
□

Remarque Si le groupe est noté additivement, on note $k.a$ l'itéré d'ordre k de a. On a alors

$$k.a + \ell.a = (k+\ell).a \text{ et } \ell.(k.a) = (k\ell).a$$

1.2.1.3 Groupe symétrique

Définition

On note $\mathfrak{S}(E)$ l'ensemble des permutations de E i.e. des bijections de E vers E.

Théorème

$(\mathfrak{S}(E), \circ)$ est un groupe de neutre Id_E.
Ce groupe est non commutatif dès que Card$E \geqslant 3$.

Exemple $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}(\{1,\ldots,n\})$ est un groupe de cardinal $n!$.
Parmi ses éléments signalons :
- les transpositions $\tau = \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}$ vérifiant $\tau^2 = \mathrm{Id}$;
- les p-cycles $c = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_p \end{pmatrix}$ vérifiant $c^p = \mathrm{Id}$.

1.2.1.4 le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$

Théorème

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien à n éléments de neutre $\bar{0}$.
De plus

$$\forall \bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ -\bar{a} = \overline{(-a)}$$

dém. :
$\bar{a} + \bar{b} = \overline{(a+b)} = \overline{(b+a)} = \bar{b} + \bar{a}$ donc $+$ est commutative sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \overline{a+b} + \bar{c} = \overline{(a+b)+c} = \overline{a+(b+c)} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ donc $+$ est associative sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
$\bar{a} + \bar{0} = \overline{a+0} = \bar{a} = \bar{0} + \bar{a}$ donc $\bar{0}$ est élément neutre de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.
$\bar{a} + \overline{(-a)} = \overline{a-a} = \bar{0} = \overline{(-a)} + \bar{a}$ donc $\bar{a}$ est symétrisable et $-\bar{a} = \overline{(-a)}$.
□

Exemple $n = 2$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$.

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

Exemple $n = 3$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$.

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Remarque Dans une table d'opérations sur chaque ligne figure chaque élément de groupe ; cela provient de la bijectivité de l'application $x \mapsto a \star x$ sur G.
On a la même propriété sur les colonnes.

Proposition

$\forall k \in \mathbb{Z}, k.\bar{a} = \overline{ka}$.

dém. :
Par récurrence pour $k \in \mathbb{N}$.
Cas $k = 0$: $0.\bar{a} = \bar{0} = \overline{0.a}$.
Supposons la propriété vraie au rang $k \geqslant 0$.

$$(k+1).\bar{a} = k.\bar{a} + \bar{a} \underset{HR}{=} \overline{ka} + \bar{a} = \overline{ka + a} = \overline{(k+1)a}$$

Récurrence établie.
Pour $k \in \mathbb{Z}^-$, on peut écrire $k = -p$ avec $p \in \mathbb{N}$.
On a alors

$$k.\bar{a} = -(p.\bar{a}) = -\overline{pa} = \overline{-pa} = \overline{ka}$$

□

1.2.2 Structure produit

1.2.2.1 Produit cartésien

Définition

Soient $\star_1, \ldots, \star_n$ des lois de composition interne sur des ensembles $E_1, \ldots, E_n$. On appelle loi produit sur $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ la loi $\star$ définie par

$$(x_1, \ldots, x_n) \star (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 \star_1 y_1, \ldots, x_n \star_n y_n)$$

Proposition

Si $(G_1, \star_1)$,..., $(G_n, \star_n)$ sont des groupes de neutres $e_1, \ldots, e_n$ alors $G = G_1 \times \ldots \times G_n$ muni de la loi produit $\star$ est un groupe de neutre $e = (e_1, \ldots, e_n)$.
De plus :
- l'inverse d'un élément $(x_1, \ldots, x_n) \in G$ est $(x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1})$;
- si tous les groupes $(G_1, \star_1)$,..., $(G_n, \star_n)$ sont commutatifs, le groupe $(G, \star)$ l'est aussi.

Exemple Pour $(G_1, \star_1) = (G_2, \star_2) = (\mathbb{Z}, +)$, la loi produit sur $\mathbb{Z}^2$ que nous notons $+$ est définie par :

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$(\mathbb{Z}^2, +)$ est un groupe abélien de neutre $0_{\mathbb{Z}^2} = (0, 0)$.

Exemple Pour $(G_1, \star_1) = (\mathbb{R}^{+\star}, \times)$ et $(G_2, \star_2) = (\mathbb{R}, +)$, la loi produit sur $\mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}$ que nous notons $\star$ est définie par :

$$(r, \theta) \star (r', \theta') = (rr', \theta + \theta')$$

$(\mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}, \star)$ est alors un groupe abélien de neutre $e = (1, 0)$.
De plus

$$(r, \theta)^{-1} = (1/r, -\theta)$$

1.2.2.2 Structure fonctionnelle

Soit X un ensemble.

Définition

> Si $\star$ est une loi de composition interne sur un ensemble E, on appelle loi produit sur $\mathcal{F}(X, E)$ la loi encore notée $\star$ définie par
>
> $$\forall x \in X, (f \star g)(x) := f(x) \star g(x)$$

Proposition

> Si $(G, \star)$ est un groupe alors $\mathcal{F}(X, G)$ muni de la loi produit est une groupe de neutre $\tilde{e} : x \mapsto e$.
> De plus :
> - l'inverse d'un élément $f : X \to G$ est $x \mapsto (f(x))^{-1}$;
> - si le groupe $(G, \star)$ est commutatif, le groupe $(\mathcal{F}(X, G), \star)$ l'est aussi.

Exemple Soit X un ensemble quelconque. L'ensemble $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ des fonctions réelles définies sur X est un groupe abélien pour l'addition des fonctions.

1.2.3 Sous-groupe

$(G, \star)$ désigne un groupe de neutre e.

1.2.3.1 Définition

Définition

> On appelle sous-groupe d'un groupe $(G, \star)$ toute partie H de G vérifiant :
> 1) $e \in H$;
> 2) $\forall x, y \in H, x \star y^{-1} \in H$.

Exemple $\{e\}$ et G des sont sous-groupes de $(G, \star)$.

Remarque Le point 1) peut aussi être transposé en $H \neq \emptyset$ car alors $H \neq \emptyset$ et 2) entraîne $e \in H$.
Le point 2) peut aussi être transposé en 2a) $\forall x, y \in H, x \star y \in H$ et 2.b) $\forall x \in H, x^{-1} \in H$.

Remarque Si le groupe est noté additivement 1) et 2) se relisent $0 \in H$ et $\forall x, y \in H, x - y \in H$.

Théorème

> Si H est un sous-groupe d'un groupe $(G, \star)$ alors $(H, \star)$ est un groupe de même neutre.

Exemple L'ensemble des racines n-ième de l'unité

$$U_n = \{z \in \mathbb{C}/z^n = 1\}$$

est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^\star, \times)$.
$(U_n, \times)$ est le groupe des racines n-ième de l'unité.
Rappellons

$$U_n = \left\{ \mathrm{e}^{2ik\pi/n}/k \in [\![0, n-1]\!] \right\} = \left\{ \omega^k/k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$$

avec $\omega = \mathrm{e}^{2i\pi/n}$.

1.2.3.2 les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$

Théorème

> Les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont les $n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

dém. :
$n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ car $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$, $0 = n \times 0 \in n\mathbb{Z}$ et si $x, y \in n\mathbb{Z}$, on peut écrire $x = nk$ et $y = n\ell$ avec $k, \ell \in \mathbb{Z}$ de sorte que $x - y = n(k - \ell) \in n\mathbb{Z}$.
Inversement, soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
Cas $H = \{0\}$:
On a $H = n\mathbb{Z}$ avec $n = 0$.
Cas $H \neq \{0\}$:
On introduit $H^+ = \{x \in H/x > 0\}$.
Il existe $x_0 \in H$ tel que $x_0 \neq 0$. Si $x_0 > 0$ alors $x_0 \in H^+$, sinon $-x_0 \in H^+$. Dans les deux cas $H^+ \neq \emptyset$.
Rappelons : Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
Ici H^+ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, on peut donc introduire $n = \min H^+$.
On a $n \in H$ et $n > 0$.
Montrons $n\mathbb{Z} \subset H$ i.e. $\forall k \in \mathbb{Z}, nk \in H$.
Par récurrence pour $k \in \mathbb{N}$.
Cas $k = 0$, $nk = 0 \in H$.
Supposons la propriété vraie au rang $k \geqslant 0$.
$n(k+1) = nk + k \in H$ car $nk, k \in H$.
Récurrence établie.
Pour $k \in \mathbb{Z}^-$, on peut écrire $k = -p$ avec $p \in \mathbb{N}$.
On a alors $nk = -(np) \in H$ car $np \in H$.
Ainsi $n\mathbb{Z} \subset H$.
Inversement, soit $x \in H$. Par division euclidienne, $x = qn + r$ avec $0 \leqslant r < n$.
On a alors $r = x - qn \in H$ car $qn \in n\mathbb{Z} \subset H$.
Si $r > 0$ alors $r \in H^+$ ce qui est impossible car $r < n = \min H^+$.
Il reste $r = 0$ et donc $x = qn \in n\mathbb{Z}$.
Ainsi $H \subset n\mathbb{Z}$ puis par double inclusion $H = n\mathbb{Z}$.
□

Remarque Le naturel n tel que $H = n\mathbb{Z}$ est unique car
Si $H = \{0\}$ alors $n = 0$ et si $H \neq \{0\}$ alors $n = \min \{x \in H/x > 0\}$.

1.2.4 Morphisme de groupes

Soient $(G, \star)$ et $(H, \top)$ deux groupes.

1.2.4.1 Définition

Définition

On appelle morphisme d'un groupe $(G, \star)$ vers un groupe $(H, \top)$ toute application $\varphi : G \to H$ vérifiant

$$\forall x, y \in G, \varphi(x \star y) = \varphi(x) \top \varphi(y)$$

Exemple L'exponentielle complexe $z \mapsto \mathrm{e}^z$ est un morphisme du groupe $(\mathbb{C}, +)$ vers $(\mathbb{C}^\star, \times)$.

Exemple La signature $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \to \{1, -1\}$ avec

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

est un morphisme du groupe $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ vers $(\{1, -1\}, \times)$.
Rappelons :
- si τ est une transposition $\varepsilon(\tau) = -1$;
- si c est un p cycle alors $\varepsilon(c) = (-1)^{p-1}$.

1.2.4.2 Propriétés

Proposition

La composée de deux morphismes de groupes en est un.

Proposition

Si φ est un morphisme d'un groupe $(G, \star)$ vers un groupe $(H, \top)$ alors

$$\varphi(e_G) = e_H \text{ et } \forall x \in G, \varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$$

Plus généralement

$$\forall x \in G, \forall n \in \mathbb{Z}, \varphi(x^n) = \varphi(x)^n$$

dém. :
$\varphi(e_G) = \varphi(e_G \star e_G) = \varphi(e_G) \top \varphi(e_G)$ et en composant par $\varphi(e_G)^{-1}$ on obtient $e_H = \varphi(e_G)$.
Aussi $\varphi(x) \top \varphi(x^{-1}) = \varphi(x \star x^{-1}) = \varphi(e_G) = e_H$ donc en composant par $\varphi(x)^{-1}$ à gauche on obtient $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$.
□

Proposition

L'image directe (resp. réciproque) d'un sous-groupe par un morphisme de groupes est un sous-groupe.

dém. :
Soit $\varphi : G \to H$ morphisme de groupes.
Soit K un sous-groupe de $(G,\star)$. Montrons que

$$\varphi(K) = \{\varphi(x)/x \in K\}$$

est un sous-groupe de $(H,\top)$.
D'une part $e_H \in \varphi(K)$ car $e_H = \varphi(e_G)$ avec $e_G \in K$.
D'autre part, pour $y, y' \in f(K)$, on peut écrire $y = \varphi(x)$ et $y' = \varphi(x')$ avec $x, x' \in K$ et alors $y \top y'^{-1} = \varphi(x \star x'^{-1}) \in \varphi(K)$ car $x \star x'^{-1} \in K$.
Ainsi $\varphi(K)$ est un sous-groupe de $(H,\top)$.
Soit L un sous-groupe de $(H,\top)$. Montrons que

$$\varphi^{-1}(L) = \{x \in G/\varphi(x) \in L\}$$

est un sous-groupe de $(G,\star)$.
D'une part $e_G \in \varphi^{-1}(L)$ car $\varphi(e_G) = e_H \in L$.
D'autre part, pour $x, x' \in \varphi^{-1}(L)$, on a $\varphi(x \star x'^{-1}) = \varphi(x) \top \varphi(x')^{-1} \in L$ car $\varphi(x), \varphi(x') \in L$.
Ainsi $\varphi^{-1}(L)$ est un sous-groupe de $(G, \star)$.
□

1.2.4.3 Noyau et image

Définition

Si φ est un morphisme d'un groupe $(G,\star)$ vers un groupe $(H,\top)$ on introduit
- son noyau $\ker\varphi = \varphi^{-1}(\{e_H\})$ qui est un sous-groupe de $(G,\star)$;
- son image $\text{Im}\varphi = \varphi(G)$ qui est un sous-groupe de $(H,\top)$.

Exemple Déterminons image et noyau du morphisme $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\star$.
Pour $z = a + ib$, on a $\exp(z) = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^{ib}$.
Pour $Z \in \mathbb{C}^\star$, on peut écrire $Z = r\mathrm{e}^{i\theta}$.
En posant $z = \ln r + i\theta$, on a $\exp(z) = Z$. Ainsi

$$\text{Im}(\exp) = \mathbb{C}^\star$$

Aussi, pour $z = a + ib$

$$\exp(z) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^a = 1 \text{ et } \mathrm{e}^{ib} = 1$$

Par suite

$$\ker(\exp) = 2i\pi\mathbb{Z}$$

Proposition

Soit φ un morphisme du groupe $(G,\star)$ vers le groupe $(H,\top)$.
φ est injectif si, et seulement si, $\ker\varphi = \{e_G\}$ et
φ est surjectif si, et seulement si, $\text{Im}\varphi = H$.

1.2.4.4 Notion d'isomorphisme

Définition

On appelle isomorphisme tout morphisme de groupe bijectif.

Exemple $\ln : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ est un isomorphisme de $\left(\mathbb{R}^{+\star}, \times\right)$ vers $(\mathbb{R}, +)$.

Proposition

La composée de deux isomorphismes est un isomorphisme.

Proposition

La bijection réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

Définition

S'il existe un isomorphisme entre deux groupes, ceux-ci sont dits isomorphes.

Exemple Les groupes $\left(\mathbb{R}^{+\star}, \times\right)$ et $(\mathbb{R}, +)$ sont isomorphes, cela signifie que, d'un point de vue calculatoire, ces groupes sont identiques.

Exemple Comparons les tables d'opérations dans $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ et $(U_4, \times)$:

$$\begin{array}{c|cccc|} + & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \hline \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{3} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \hline \end{array} \text{ et } \begin{array}{c|cccc|} \times & 1 & i & -1 & -i \\ \hline 1 & 1 & i & -1 & -i \\ i & i & -1 & -i & 1 \\ -1 & -1 & -i & 1 & i \\ -i & -i & 1 & i & -1 \\ \hline \end{array}$$

Les deux groupes $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ et $(U_4, \times)$ se comportent de façon semblables ; ils sont isomorphes via l'application φ qui envoie $\bar{k}$ sur i^k.

Exemple Considérons en revanche la table d'opération dans $\left((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2, +\right)$:

$$\begin{array}{c|cccc|} + & e & a & b & c \\ \hline e & e & a & b & c \\ a & a & e & c & b \\ b & b & c & e & a \\ c & c & b & a & e \\ \hline \end{array} \text{ en notant } \begin{cases} e = (\bar{0}, \bar{0}) \\ a = (\bar{1}, \bar{0}) \\ b = (\bar{0}, \bar{1}) \\ c = (\bar{1}, \bar{1}) \end{cases}$$

$\left((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2, +\right)$ se comporte d'une façon différente ; il n'est pas isomorphe aux précédents.

1.2.5 Groupe engendré par un élément

1.2.5.1 Définition

Définition

On appelle groupe engendré par un élément $a \in G$ l'ensemble

$$\langle a \rangle \underset{\text{déf}}{=} \left\{a^k / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Remarque En notation additive,

$$\langle a \rangle = \{k.a / k \in \mathbb{Z}\}$$

Théorème

$\langle a \rangle$ est un sous-groupe de $(G, \star)$ contenant a.
De plus, pour tout sous-groupe H de G

$$a \in H \Rightarrow \langle a \rangle \subset H$$

Ainsi $\langle a \rangle$ apparaît comme le plus petit sous-groupe contenant a.

dém. :
On introduit $\varphi : \mathbb{Z} \to G$ définie par $\varphi(k) = a^k$.
φ est un morphisme du groupe $(\mathbb{Z}, +)$ vers $(G, \star)$ car

$$\varphi(k + \ell) = a^{k+\ell} = a^k \star a^\ell = \varphi(k) \star \varphi(\ell)$$

Par suite $\langle a \rangle = \mathrm{Im}\varphi$ est un sous-groupe de $(G, \star)$.
De plus, si H est un sous-groupe de $(G, \star)$ contenant a alors
$a^0 = e \in H$, $a^1 = a \in H$, $a^2 = a \star a \in H$, $a^3 = a^2 \star a \in H$,...
Par une récurrence facile,

$$\forall k \in \mathbb{N}, a^k \in H$$

Pour $k \in \mathbb{Z}^-$, $k = -p$ avec $p \in \mathbb{N}$, $a^k = a^{-p} = (a^p)^{-1} \in H$ car $a^p \in H$.
Ainsi

$$\forall k \in \mathbb{Z}, a^k \in H$$

ce qui signifie $\langle a \rangle \subset H$.
□

Remarque Même si la loi $\star$ n'est pas commutative, le sous-groupe $\langle a \rangle$ est commutatif car

$$a^k \star a^\ell = a^{k+\ell} = a^{\ell+k} = a^\ell \star a^k$$

Exemple Dans $(\mathbb{C}, +)$,

$$\langle a \rangle = \{ak / k \in \mathbb{Z}\} = a\mathbb{Z}$$

Exemple Dans $(\mathbb{C}^\star, \times)$,

$$\langle a \rangle = \left\{a^k / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

En particulier

$$\langle 2 \rangle = \left\{2^k / k \in \mathbb{Z}\right\} = \{\dots, 1/8, 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8, \dots\}$$

et pour $\omega = \mathrm{e}^{2i\pi/n}$

$$\langle \omega \rangle = \left\{\omega^k / k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{1, \omega, \dots, \omega^{n-1}\right\} = U_n$$

car $\omega^n = 1$.

1.2.5.2 Ordre d'un élément

Soit $(G, \star)$ un groupe de neutre e.

Définition

On appelle ordre d'un élément $a \in G$, le cardinal du groupe engendré par a. Ainsi

$$\text{ordre de } a \underset{\text{déf}}{=} \text{Card}\,\langle a \rangle$$

Exemple Dans $(\mathbb{C}^\star, \times)$, 2 est d'ordre $+\infty$ alors que $\omega = \mathrm{e}^{2i\pi/n}$ est d'ordre n.

Exemple e est l'unique élément d'ordre 1 du groupe $(G, \star)$.

Théorème

Soit a un élément de G.
Si a est d'ordre infini alors $< a >$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$ via l'application

$$\varphi : k \in \mathbb{Z} \mapsto a^k$$

Si a est d'ordre fini égal à $n \in \mathbb{N}^\star$ alors $\langle a \rangle$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ via l'application

$$\psi : \bar{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mapsto a^k$$

dém. :
Considérons l'application $\varphi : k \in \mathbb{Z} \to a^k$.
φ est morphisme de groupes surjectif de $(\mathbb{Z}, +)$ sur $(\langle a \rangle, \star)$.
En effet

$$\varphi(k + \ell) = a^{k+\ell} = a^k \star a^\ell = \varphi(k) \star \varphi(\ell)$$

$\ker \varphi$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ donc il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\ker \varphi = n\mathbb{Z}$$

Cas $n = 0$
$\ker \varphi = \{0\}$, le morphisme φ est injectif et induit donc un isomorphisme de $(\mathbb{Z}, +)$ vers $\text{Im}\varphi = \langle a \rangle$. L'ensemble $\langle a \rangle$ est en particulier infini et donc a est alors d'ordre infini.
Cas $n \neq 0$
On remarque

$$\forall k, \ell \in \mathbb{Z}, a^k = a^\ell \Leftrightarrow k \equiv \ell \quad [n]$$

On peut alors considérer l'application $\psi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to G$ déterminée par $\psi(\bar{k}) = a^k$.
ψ est un morphisme de groupes car

$$\psi(\bar{k} + \bar{\ell}) = \psi(\overline{k + \ell}) = a^{k+\ell} = a^k \star a^\ell = \psi(\bar{k}) \star \psi(\bar{\ell})$$

D'une part $\text{Im}\psi = \langle a \rangle$ et d'autre part

$$\bar{k} \in \ker \psi \Leftrightarrow a^k = a^0 \Leftrightarrow \bar{k} = \bar{0}$$

donc $\ker \psi = \{\bar{0}\}$. On en déduit que ψ définit un isomorphisme de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ vers $\langle a \rangle$
En particulier Card $\langle a \rangle = \mathrm{Card}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = n$ et donc a est un élément d'ordre fini n.
□

Remarque Si a est d'ordre infini $\langle a \rangle = \left\{a^k / k \in \mathbb{Z}\right\}$ et les éléments a^k sont deux à deux distincts.
Si a est d'ordre fini n alors $\langle a \rangle = \left\{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\right\}$ et les éléments $e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$ sont deux à deux distincts.

Corollaire

> Si a est d'ordre infini alors
> $$\forall n \in \mathbb{N}^\star, a^n \neq e$$
> Si a est d'ordre fini alors son ordre apparaît comme le plus petit $n \in \mathbb{N}^\star$ vérifiant
> $$a^n = e$$
> (ou $n.a = 0$ en notation additive).

dém. :
Si a est d'ordre infini alors le morphisme φ_a est injectif.
Si a est d'ordre n, on a
$$\forall k, \ell \in \mathbb{Z}, a^k = a^\ell \Leftrightarrow k = \ell \quad [n]$$
Par suite $a, a^2, \ldots, a^{n-1} \neq e$ et $a^n = e$.
□

Exemple Dans $(\mathbb{C}^\star, \times)$.
Pour $a = 2$,
$$\langle 2 \rangle = \left\{2^k / k \in \mathbb{Z}\right\}$$
2 est un élément d'ordre infini et $\langle 2 \rangle$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ via l'application $\varphi : k \mapsto 2^k$.
Pour $a = \omega = \mathrm{e}^{2i\pi/n}$,
$$\langle \omega \rangle = \left\{1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}\right\} = U_n$$
ω est d'ordre n et U_n est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ via l'application $\psi : \bar{k} \mapsto \omega^k$.
Cet isomorphisme concrétise mathématiquement les manipulations intuitive du type
$$\omega^{n+2} = \omega^2, j^{19} = j, \ldots$$

Exemple Dans $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +)$
$$\langle \bar{2} \rangle = \{k.\bar{2} / k \in \mathbb{Z}\} = \left\{\overline{2k} / k \in \mathbb{Z}\right\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$$
$\bar{2}$ est d'ordre 4 et $\langle \bar{2} \rangle$ est isomorphisme à $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$.

1.2.6 Groupe cyclique

Définition

Un groupe $(G, \star)$ est dit monogène s'il existe $a \in G$ tel que $G = \langle a \rangle$.
Cet élément a est alors appelé générateur du groupe.

Remarque Un groupe monogène est commutatif car

$$a^k \star a^\ell = a^{k+\ell} = a^\ell \star a^k$$

Exemple $(\mathbb{Z}, +)$ est monogène car $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$.

Exemple $(U_n, \times)$ est monogène car $U_n = \langle \omega \rangle$ avec $\omega = \mathrm{e}^{2i\pi/n}$.

Exemple $(\mathbb{C}, +)$ et $(\mathbb{C}^\star, \times)$ ne sont pas des groupes monogènes.

Exemple Pour $n \geqslant 3$, le groupe $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ n'est pas monogène car non commutatif.

Définition

Un groupe est dit cyclique s'il est monogène et fini.

Exemple $(U_n, \times)$ est un groupe cyclique.

Théorème

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe cyclique dont les générateurs sont les $\bar{m}$ avec $m \wedge n = 1$.

dém. :
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle \bar{1} \rangle$ car

$$\langle \bar{1} \rangle = \{k.\bar{1}/k \in \mathbb{Z}\} = \left\{\bar{k}/k \in \mathbb{Z}\right\} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

Si $\bar{m}$ est générateur de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k.\bar{m} = \bar{1}$ et donc $km \equiv 1 \quad [n]$. Il existe alors $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que

$$km + n\ell = 1$$

et ainsi $m \wedge n = 1$ en vertu du théorème de Bézout.
Inversement, si $m \wedge n = 1$ alors il existe $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tel que $km + \ell n = 1$ et donc

$$km \equiv 1 \quad [n]$$

d'où $k.\bar{m} = \bar{1}$. Ainsi $\bar{1} \in \langle \bar{m} \rangle$ or $\langle \bar{1} \rangle = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ donc

$$\langle \bar{m} \rangle = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

□

Théorème

Si $(G, \star)$ est un groupe cyclique de cardinal n alors $(G, \star)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ via l'application
$$\bar{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mapsto a^k$$
où a désigne un génératrice du groupe $(G, \star)$.

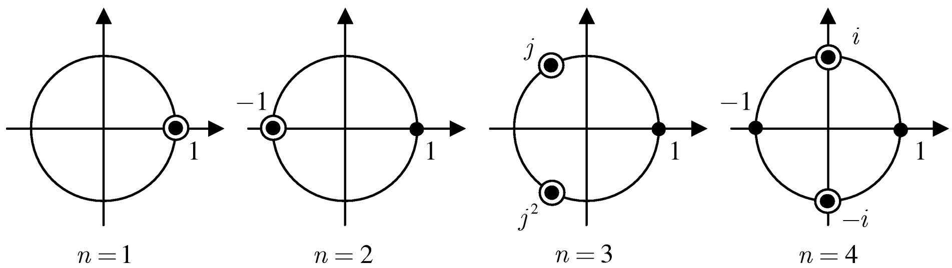
dém. :
On a $G = \langle a \rangle$ et Card$G = n$ donc a est un élément d'ordre n.
Par suite $G = \langle a \rangle$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ via l'application $\psi : \bar{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mapsto a^k$.
□

Corollaire

Les générateurs de $(U_n, \times)$ sont les $\omega^m = \mathrm{e}^{2im\pi/n}$ avec $m \wedge n = 1$
Ces éléments sont appelés racines primitives n-ième de l'unité.

dém. :
$(U_n, \times)$ est un groupe cyclique engendré par $\omega = \mathrm{e}^{2i\pi/n}$.
L'application $\psi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to U_n$ définie par $\psi(\bar{k}) = \omega^k$ est alors un isomorphisme de groupes, celui-ci échange les générateurs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ avec ceux de $(U_n, \times)$.
□

Exemple Dans la figure ci-dessous, les générateurs des groupes $(U_1, \times), (U_2, \times), (U_3, \times), (U_4, \times)$ sont entourés



1.2.7 Partie génératrice d'un groupe

Soit $(G, \star)$ un groupe de neutre e.

Définition

On appelle groupe engendré par une partie A de G l'intersection de tous les sous-groupes de $(G, \star)$ qui contiennent A. On le note $\langle A \rangle$

Théorème

$\langle A \rangle$ est un sous-groupe de $(G, \star)$ qui contient A.
De plus, pour tout sous-groupe H de $(G, \star)$,
$$A \subset H \Rightarrow \langle A \rangle \subset H$$
Ainsi $\langle A \rangle$ apparaît comme le plus petit sous-groupe contenant A.

dém. :
Posons $\mathcal{S} = \{H \text{ sous - groupe de } (G, \star)/A \subset H\}$. Par définition

$$\langle A \rangle = \bigcap_{H \in \mathcal{S}} H$$

On a $\langle A \rangle \subset G$, $e \in \langle A \rangle$ car pour tout $H \in \mathcal{S}$, $e \in H$ et pour tout $x, y \in \langle A \rangle$, $x \star y^{-1} \in \langle A \rangle$ car pour tout $H \in \mathcal{S}$, $x \star y^{-1} \in H$ puisque $x, y \in H$. Ainsi $\langle A \rangle$ est un sous-groupe de $(G, \star)$.
Puisque A est inclus dans tout $H \in \mathcal{S}$, on a $A \subset \langle A \rangle$.
Enfin, si H est un sous-groupe de $(G, \star)$

$$A \subset H \Rightarrow H \in \mathcal{S} \Rightarrow \langle A \rangle \subset H$$

□

Exemple Pour $a \in G$,

$$\langle \{a\} \rangle = \left\{a^k / k \in \mathbb{Z}\right\} = \langle a \rangle$$

Exemple Pour $a, b \in G$,

$$\langle \{a, b\} \rangle = \left\{a^{k_1} b^{\ell_1} \dots a^{k_n} b^{\ell_n} / n \in \mathbb{N}^\star, k_1, \dots, k_n, \ell_1, \dots, \ell_n \in \mathbb{Z}\right\}$$

En fait

$$\langle \{a, b\} \rangle = \{\text{produits finis d'itérés de } a \text{ et } b\}$$

Si a et b commutent alors on peut simplifier

$$\langle \{a, b\} \rangle = \left\{a^k b^\ell / k, \ell \in \mathbb{Z}\right\}$$

Définition

On appelle partie génératrice d'un groupe toute partie engendrant le groupe en question.

Exemple Les groupes monogènes sont ceux possédant une partie génératrice à un élément.

Exemple $\{(1, 0), (0, 1)\}$ est une partie génératrice du groupe $(\mathbb{Z}^2, +)$.

Exemple Tout élément de $\mathfrak{S}_n$ pouvant s'écrire comme produit de transpositions, l'ensemble des transpositions constitue donc une partie génératrice de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$.

1.3 Anneaux et corps

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.3.1 Structure d'anneau

1.3.1.1 Définition

Définition

On appelle anneau tout triplet $(A, +, \times)$ formé d'un ensemble A et de deux lois de composition interne $+$ et $\times$ sur A vérifiant :
1) $(A, +)$ est un groupe abélien de neutre 0 ;
2) $\times$ est associative et possède un neutre 1 ;
3) $\times$ est distributive sur $+$ i.e.

$$\forall a, b, c \in A, a(b + c) = ab + ac \text{ et } (b + c)a = ba + ca$$

Si de plus la loi $\times$ est commutative, on dit que l'anneau $(A, +, \times)$ est commutatif.

Exemple $(\mathbb{Z}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$, $(\mathbb{C}, +, \times)$ sont des anneaux commutatifs de neutre 0 et 1.

Exemple $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif de neutre 0 et 1 (polynômes constants).

Exemple $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau de neutres O_n et I_n.

Exemple Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau de neutre $\tilde{0}$ et Id_E.

Exemple $A = \{0_A\}$ est un anneau (c'est le seul pour lequel $1_A = 0_A$).

1.3.1.2 Règle de calcul dans un anneau

Proposition

$\forall a, b \in A$, $0_A \times a = a \times 0_A = 0_A$, $(-a) \times b = -(ab) = a \times (-b)$
Plus généralement
$\forall n \in \mathbb{Z}$, $(n.a) \times b = n.(ab) = a \times (n.b)$

Théorème

Si a et b sont deux éléments commutant (i.e. $ab = ba$) d'un anneau A on a pour tout $n \in \mathbb{N}$
$(ab)^n = a^n b^n$,
$(ab)^n = a^n b^n$, $(a + b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ et
$a^n - b^n = (a - b) \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$

1.3.1.3 Éléments inversible

Définition

Un élément a d'un anneau $(A,+,\times)$ est dit inversible s'il existe $b \in A$ tel que

$$ab = ba = 1$$

Cet élément b est alors unique, on l'appelle inverse de a et il est noté a^{-1}.

Exemple 1_A est inversible et $1_A^{-1} = 1_A$.

Exemple Si A n'est pas l'anneau nul, 0_A n'est pas inversible.

Théorème

L'ensemble $U(A)$ des éléments inversibles de l'anneau $(A,+,\times)$ est un groupe multiplicatif.

Exemple $U(\mathbb{Z}) = \{1,-1\}$,
$U(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^\star$,
$U(\mathbb{K}[X]) = \{\text{polynômes constants non nuls}\}$,
$U(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $U(\mathcal{L}(E)) = \text{GL}(E)$.

Exemple Montrons que si a est nilpotent alors $1_A - a \in U(A)$.
Puisque a est nilpotent, il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $a^n = 0$.
Puisque 1_A et a commutent,

$$1_A = 1_A^n - a^n = (1-a)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k\right)(1-a)$$

Ainsi $1_A - a$ est inversible et

$$(1_A - a)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k$$

1.3.2 Structure produit

Proposition

Si $(A_1,+,\times)$,..., $(A_n,+,\times)$ sont des anneaux alors l'ensemble $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ muni des lois produits est un anneau de neutres

$$0_A = (0_{A_1},\ldots,0_{A_n}) \text{ et } 1_A = (1_{A_1},\ldots,1_{A_n})$$

De plus un élément $(a_1,\ldots,a_n) \in A$ est inversible si, et seulement si, les $a_1,\ldots,a_n$ le sont et son inverse est alors $(a_1^{-1},\ldots,a_n^{-1})$.

Exemple $(\mathbb{Z}^2,+,\times)$ est un anneau commutatif où
$(a,b)+(c,d) = (a+c,b+d)$ et $(a,b)\times(c,d) = (ac,bd)$.
On a $U\left(\mathbb{Z}^2\right) = \{(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\}$

Proposition

Si X est un ensemble et $(A, +, \times)$ est un anneau alors l'ensemble $\mathcal{F}(X, A)$ muni des lois produits est un anneau de neutres

$$\tilde{0} : x \mapsto 0_A \text{ et } \tilde{1} : x \mapsto 1_A$$

De plus un élément $f \in \mathcal{F}(X, A)$ est inversible si, et seulement si, pour tout $x \in X$, $f(x)$ l'est et son inverse est alors $x \mapsto [f(x)]^{-1}$.

Exemple $(\mathcal{F}(X, \mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau commutatif et $U(\mathcal{F}(X, \mathbb{K})) = \mathcal{F}(X, \mathbb{K}^\star)$

1.3.3 Sous-anneau

$(A, +, \times)$ désigne un anneau

Définition

On appelle sous-anneau de $(A, +, \times)$ toute partie B de A vérifiant :
1) $1_A \in B$;
2) $\forall x, y \in B, x - y \in B$;
3) $\forall x, y \in B, xy \in B$.

Attention : Vérifier $1_A \in B$ et non $0_A \in B$ ou seulement $B \neq \emptyset$.

Exemple $\mathbb{Z}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$ mais pas $2\mathbb{Z}$.

Exemple A est un sous-anneau de $(A, +, \times)$ mais généralement pas $\{0_A\}$.

Théorème

Si B est un sous-anneau de $(A, +, \times)$ alors B peut être muni des lois $+$ et $\times$ définies par restriction des lois sur A et $(B, +, \times)$ est alors un anneau de mêmes neutres que A.

Exemple On vérifie sans peine que

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib / a, b \in \mathbb{Z}\}$$

est un anneau pour les lois usuelles car sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$.

1.3.4 Morphisme d'anneaux

$(A, +, \times)$ et $(B, +, \times)$ désignent des anneaux.

Définition

On appelle morphisme d'un anneau $(A, +, \times)$ vers un anneau $(B, +, \times)$ toute application $\varphi : A \to B$ vérifiant :
1) $\varphi(1_A) = 1_B$;
2) $\forall x, y \in A, \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$;
3) $\forall x, y \in A, \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.

Attention : Ne pas oublier d'étudier $\varphi(1_A)$!
L'application $x \in \mathbb{R} \mapsto (x, 0) \in \mathbb{R}^2$ n'est pas un morphisme d'anneaux.

Exemple Soient $a \in U(A)$ et $\tau : A \to A$ définie par $\tau(x) = axa^{-1}$.
On vérifie que τ est un automorphisme d'anneaux.

Proposition

Si φ est un morphisme de l'anneau $(A, +, \times)$ vers $(B, +, \times)$ alors

$$\varphi(0_A) = 0_B\,;$$

$$\forall x \in A, \varphi(-x) = -\varphi(x)\,;$$
$$\forall x \in A, \forall n \in \mathbb{Z}, \varphi(n.x) = n.\varphi(x)\,;$$
$$\forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N}, \varphi(x^n) = \varphi(x)^n \text{ et}$$
$$\forall x \in A, x \in U(A) \Rightarrow \varphi(x) \in U(B) \text{ avec } \varphi(x)^{-1} = \varphi(x^{-1})$$

Proposition

La composée de deux morphismes d'anneaux est un morphisme d'anneaux.

Proposition

L'application réciproque d'un isomorphisme d'anneaux est un isomorphisme d'anneaux.

Proposition

L'image directe (ou réciproque) d'un sous-anneau par un morphisme d'anneaux est un sous-anneau.

Exemple Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme d'anneau.
Son image Im$\varphi = \varphi(A)$ est un sous-anneau de $(B, +, \times)$.
En revanche $\ker \varphi = \varphi^{-1}(\{0_B\})$ n'est généralement pas un sous-anneau de $(A, +, \times)$.

1.3.5 L'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$

Théorème

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif de neutres $\bar{0}$ et $\bar{1}$.
De plus, dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\bar{m}$ est inversible si, et seulement si, $m \wedge n = 1$.

dém. :
$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien de neutre $\bar{0}$.
On vérifie aisément que la loi $\times$ est commutative, associative sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et possède un neutre $\bar{1}$. On vérifie aussi que la loi $\times$ est distributive sur $+$.
Soit $\bar{m} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

$\bar{m}$ inversible si, et seulement si, il existe $\bar{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ vérifiant $\bar{k}\bar{m} = \bar{1}$ i.e. si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que. $km \equiv 1 \quad [n]$. Ainsi $\bar{m}$ est inversible si, et seulement si, il existe $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tels que

$$km + \ell n = 1$$

Par le théorème de Bézout, cela revient à affirmer $m \wedge n = 1$.
□

Remarque Si $m \wedge n = 1$ alors une égalité de Bézout $um + vn = 1$ donne $\bar{m}^{-1} = \bar{u}$.

Exemple Résolvons l'équation

$$4x + 2 \equiv 0 \quad [11]$$

Dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ l'équation dévient

$$\bar{4}\bar{x} + \bar{2} = \bar{0}$$

Par opérations

$$\bar{4}\bar{x} + \bar{2} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{4}\bar{x} = \bar{9}$$

Puisque $4 \wedge 11 = 1$, $\bar{4}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ et on observe

$$\bar{4}^{-1} = \bar{3}$$

On a alors

$$\bar{4}\bar{x} = \bar{9} \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{3} \times \bar{9}$$

Ainsi

$$\bar{4}\bar{x} + \bar{2} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{5}$$

Les solutions de l'équation étudiées sont donc les $5 + 11k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque Pour la résolution d'une équation $4x \equiv 6 \quad [10]$, 4 et 10 ne sont pas premiers entre eux. Cependant

$$4x \equiv 6 \quad [10] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, 4x = 6 + 10k \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, 2x = 3 + 5k$$

ce qui nous ramène à l'équation $2x \equiv 3 \quad [5]$ avec $2 \wedge 5 = 1$ qu'on peut résoudre.
Pour l'équation $4x \equiv 7 \quad [10]$, une étude similaire assure l'inexistence de solution.

Exemple Résolvons le système

$$\begin{cases} 9x \equiv 3 & [21] \\ 5x \equiv 2 & [8] \end{cases}$$

On a

$$9x \equiv 3 \quad [21] \Leftrightarrow 3x \equiv 1 \quad [7] \Leftrightarrow \bar{3}\bar{x} = \bar{1} \text{ dans } \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$$

Puisque $3 \wedge 7 = 1$, $\bar{3}$ est inversible et $\bar{3}^{-1} = \bar{5}$.
Ainsi

$$3x \equiv 1 \quad [7] \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{5}$$

On a alors

$$\begin{cases} 9x \equiv 3 & [21] \\ 5x \equiv 2 & [8] \end{cases} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x = 5 + 7k \\ 5x \equiv 2 & [8] \end{cases} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x = 5 + 7k \\ 3k \equiv 1 & [8] \end{cases}$$

On a

$$3k \equiv 1 \quad [8] \Leftrightarrow \bar{3}\bar{k} = \bar{1} \text{ dans } \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$$

Après résolution, on parvient à $k \equiv 3 \quad [8]$.
Ainsi

$$\begin{cases} 9x \equiv 3 & [21] \\ 5x \equiv 2 & [8] \end{cases} \Leftrightarrow \exists k, \ell \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x = 26 + 56\ell \\ k = 3 + 8\ell \end{cases} \Leftrightarrow \exists \ell \in \mathbb{Z}, x = 26 + 56\ell$$

Les solutions de l'équation étudiées sont donc les $x = 26 + 56\ell$ avec $\ell \in \mathbb{Z}$.

1.3.6 Intègrité

Soit $(A, +, \times)$ un anneau.

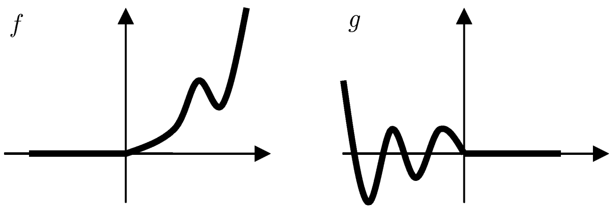
Attention : On a

$$\forall a, b \in A, a = 0_A \text{ ou } b = 0_A \Rightarrow ab = 0_A$$

La réciproque n'est pas toujours vraie !

Exemple Dans l'anneau $(\mathbb{Z}^2, +, \times)$, on a $(1, 0) \times (0, 1) = (0, 0)$ alors que $(1, 0), (0, 1) \neq (0, 0)$

Exemple Dans l'anneau $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \times)$, considérons les fonctions données par



On a $fg = \tilde{0}$ alors que $f, g \neq \tilde{0}$.

Exemple Dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$, pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, on a $AB = O_2$ alors que $A, B \neq O_2$.

Exemple Dans $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +, \times)$, $\bar{2} \times \bar{3} = \bar{0}$ alors que $\bar{2}, \bar{3} \neq \bar{0}$.

Définition

Lorsque $a, b \in A$ vérifient $ab = 0_A$ avec $a, b \neq 0_A$, on dit que a et b sont des diviseurs de zéro.

Exemple En général les anneaux $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$, $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possèdent des diviseurs de zéros.

Définition

Un anneau $(A,+,\times)$ est dit intègre si
1) A est commutatif ;
2) A non réduit à $\{0_A\}$;
3) A ne possède pas de diviseurs de zéros.

Exemple $(\mathbb{Z},+,\times)$ et $(\mathbb{K}[X],+,\times)$ sont des anneaux intègres.

Proposition

Dans un anneau intègre $(A,+,\times)$:

$$\forall a,b\in A, ab=0_A \Rightarrow a=0_A \text{ ou } b=0_A$$

dém. :
C'est l'absence de diviseurs de zéro !
□

Proposition

Dans un anneau intègre $(A,+,\times)$:

$$\forall a,b,c\in A, (ab=ac \text{ et } a\neq 0)\Rightarrow b=c$$

dém. :
Si $ab=ac$ alors $ab-ac=0$ et donc $a(b-c)=0$.
Si de plus $a\neq 0$ alors, par intégrité $b-c=0$ et donc $b=c$.
□

Remarque Dans un anneau intègre l'équation $x^2=1$ a pour seules solutions 1 et -1 car

$$x^2=1_A \Leftrightarrow (x-1_A)(x+1_A)=0_A$$

Dans $(\mathbb{R}^2,+,\times)$, l'équation $x^2=1_{\mathbb{R}^2}$ a pour solutions

$$(1,1), (-1,-1), (1,-1), (-1,1)$$

Dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$, l'équation $A^2=I_2$ a pour solutions

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&-3\\1&-2\end{pmatrix},\dots$$

Théorème

L'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$ est intègre si, et seulement si, n est un nombre premier.

dém. :
Supposons n premier.
$n\geqslant 2$ et puisque $\mathrm{Card}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=n$, on a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\neq\{\bar{0}\}$.
$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$ est commutatif.

Si $\bar{a}\bar{b} = \bar{0}$ alors $n \mid ab$. Par le lemme d'Euclide, $n \mid a$ ou $n \mid b$ i.e. $\bar{a} = \bar{0}$ ou $\bar{b} = \bar{0}$.
Ainsi l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est intègre.
Supposons n non premier.
Si $n = 1$ alors $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}\}$ et donc $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est pas intègre.
Si $n \geqslant 2$ alors n est composé.
On peut écrire $n = ab$ avec $1 < a, b < n$. On a alors $\bar{a}\bar{b} = \bar{0}$ avec $\bar{a}, \bar{b} \neq \bar{0}$ et l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ n'est pas intègre.
□

1.3.7 Corps

1.3.7.1 Définition

Définition

On appelle corps tout anneau $(K, +, \times)$ vérifiant
1) $(K, +, \times)$ est commutatif ;
2) K est non réduit à $\{0_K\}$ et
3) Tous les éléments de K, sauf le nul, sont inversibles.

Exemple $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$, $(\mathbb{C}, +, \times)$ et $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ sont des corps usuels.

Proposition

Tout corps est intègre.

dém. :
Soit K un corps. K est commutatif et non réduit à $\{0\}$.
Pour $a, b \in K$, si $ab = 0_K$ et $a \neq 0_K$ alors on peut introduire a^{-1} et on a $b = a^{-1}(ab) = 0_K$.
Ainsi, K ne possède pas de diviseurs de zéro et donc intègre.
□

1.3.7.2 Sous-corps

Soit $(K, +, \times)$ un corps.

Définition

On appelle sous-corps d'un corps $(K, +, \times)$ toute partie L de K vérifiant :
1) L est un sous-anneau de $(K, +, \times)$;
2) $\forall x \in L, x \neq 0_K \Rightarrow x^{-1} \in L$.

Exemple $\mathbb{Q}$ est un sous-corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Théorème

Si L est un sous-corps d'un corps $(K, +, \times)$ alors L peut être muni des lois $+$ et $\times$ définies par restriction des lois sur K et alors $(L, +, \times)$ est un corps.

Exemple On vérifie aisément que

$$\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2}/a, b \in \mathbb{Q}\right\}$$

est un corps pour les lois usuelles car sous-corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

1.3.8 Le corps $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,\times)$

Théorème

$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,\times)$ est un corps si, et seulement si, p est un nombre premier.

dém. :
Supposons que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,\times)$ est un corps.
$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,\times)$ est intègre et donc p est nombre premier.
Supposons que p est un nombre premier.
$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,\times)$ est un anneau commutatif et puisque $p = \text{Card}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \geqslant 2$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \neq \{\bar{0}\}$.
Pour tout $\bar{m} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, si $\bar{m} \neq \bar{0}$ alors p ne divise pas m et donc, puisque p est un nombre premier,

$$m \wedge p = 1$$

et donc $\bar{m}$ est inversible.
□

Exemple Soit p un nombre premier. Montrons

$$a \not\equiv 0 \quad [p] \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$$

Retraduit dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,\times)$, l'énoncé devient

$$\forall \bar{a} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \setminus \{\bar{0}\}, \bar{a}^{p-1} = \bar{1}$$

Soit $\bar{a} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \setminus \{\bar{0}\}$ et considérons l'application $f : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ définie par $f(\bar{k}) = \bar{a}\bar{k}$.
L'application f est bijective car :

$$\forall \bar{\ell} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \forall \bar{k} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \bar{k} = f(\bar{\ell}) \Leftrightarrow \bar{\ell} = \bar{a}^{-1}\bar{k}$$

(on peut introduit $\bar{a}^{-1}$ car $\bar{a} \neq \bar{0}$ et $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,\times)$ est un corps).
Puisque f est une permutation de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$,

$$f(\bar{0}), f(\bar{1}), \ldots, f(\overline{p-1}) = \bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{p-1} \text{ à l'ordre près}$$

Or $f(\bar{0}) = \bar{0}$ donc

$$f(\bar{1}), \ldots, f(\overline{p-1}) = \bar{1}, \ldots, \overline{p-1} \text{ à l'ordre près}$$

En faisant le produit des termes

$$f(\bar{1}) \ldots f(\overline{p-1}) = \bar{1} \ldots \overline{p-1}$$

puis

$$\bar{a}^{p-1} \times \bar{1} \ldots \overline{p-1} = \bar{1} \ldots \overline{p-1}$$

Enfin, les éléments $\bar{1}, \ldots, \overline{p-1}$ étant inversibles dans l'anneau $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on obtient par simplification

$$\bar{a}^{p-1} = \bar{1}$$

Remarque La démarche se généralise à l'étude des itérés d'un groupe abélien fini.

1.3.9 Caractéristique d'un corps

Soit $(K, +, \times)$ un corps. Pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$k.1_K = \begin{cases} 1_K + \cdots + 1_K \text{ (k termes)} & \text{si } k > 0 \\ 0_K & \text{si } k = 0 \\ (-1_K) + \cdots + (-1_K) \text{ ($|k|$ termes)} & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

Considérons

$$I = \{k \in \mathbb{Z}/k.1_K = 0_K\}$$

Exemple Si $K = \mathbb{C}$ alors $I = \{0\}$.
Si $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (avec p nombre premier),

$$I = \left\{k \in \mathbb{Z}/\bar{k} = \bar{0}\right\} = p\mathbb{Z}$$

Proposition

I est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

dém. :
$I \subset \mathbb{Z}$, $0 \in I$ et pour $k, \ell \in I$ on a $k - \ell \in I$ car

$$(k - \ell).1_K = k.1_K - \ell.1_K = 0_K - 0_K = 0_K$$

□

Remarque Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $I = n\mathbb{Z}$ et de plus ce naturel n est unique.

Définition

L'entier n ainsi introduit est appelé caractéristique du corps K.

Exemple $\mathbb{C}$ (et aussi ses sous-corps) sont de caractéristique nulle.

Exemple Le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (avec p premier) est de caractéristique p.

Remarque Dans un corps de caractéristique nulle, aucune somme non triviale de 1_K n'est égale à 0_K.
Dans un corps de caractéristique non nulle, celle-ci est le plus petit nombre de 1_K qu'il faut sommer pour obtenir 0_K.

Théorème

Quand elle n'est pas nulle, la caractéristique d'un corps est un nombre premier.

dém. :
Par l'absurde. Supposons qu'un corps K soit de caractéristique p non nulle et non première.

Si $p = 1$ alors $1_K = 0_K$ et $K = \{0_K\}$ ce qui est exclu.
Sinon on peut écrire $p = rs$ avec $1 < r, s < p$.
On a alors
$$(r.1_K) \times (s.1_K) = (rs).1_K = n.1_K = 0_K$$
Donc, par intégrité,
$$r.1_K = 0_K \text{ ou } s.1_K = 0_K$$
ce qui est absurde car contredit la minimalité de l'entier p.
□

1.4 Élément d'arithmétique

1.4.1 Idéal d'un anneau commutatif

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif.
1.4.1.1 Définition

Définition

> On appelle idéal de l'anneau $(A, +, \times)$ toute partie I de A vérifiant :
> 1) $0_A \in I$;
> 2) $\forall x, y \in I, x + y \in I$;
> 3) $\forall a \in A, \forall x \in I, ax \in I$ [absorption].

Remarque Un idéal est en particulier un sous-groupe additif (il suffit de prendre 3) avec $a = -1$)

Exemple $n\mathbb{Z}$ est un idéal de $(\mathbb{Z}, +, \times)$.

Exemple $\{0_A\}$ et A sont des idéaux de $(A, +, \times)$.

Exemple Le noyau d'un morphisme d'anneaux $\varphi : A \to B$ est un idéal de $(A, +, \times)$. En effet :
$\ker \varphi \subset A$, $0_A \in \ker \varphi$ car $\varphi(0_A) = 0_B$.
Soient $x, y \in \ker \varphi$.
$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) = 0_A + 0_A = 0_A$ donc $x + y \in \ker \varphi$.
Soit de plus $a \in A$.
$\varphi(ax) = \varphi(a)\varphi(x) = \varphi(a) \times 0_A = 0_A$ donc $ax \in \ker \varphi$.

Proposition

> Soit I un idéal de l'anneau $(A, +, \times)$
> Si $1_A \in I$ alors $I = A$.
> Idem si $I \cap U(A) \neq \emptyset$.

dém. :
Par absorption $1_A \in I$ entraîne $A \subset I$ puis $=$.
De même, pas absorption, $I \cap U(A) \neq \emptyset$ entraîne $1_A \in I$ puis $I = A$.
□

Remarque Les seuls idéaux d'un corps sont $\{0_K\}$ et lui-même.

1.4.1.2 Opérations

Proposition

Si I et J sont deux idéaux de $(A, +, \times)$ alors $I \cap J$ est un idéal.
De plus $I \cap J$ est inclus dans I et J et contient tout idéal inclus dans I et J.

dém. :
$I \cap J \subset A$, $0 \in I$ et $0_A \in J$ donc $0 \in I \cap J$.
Si $x, y \in I \cap J$ alors $x, y \in I$ donc $x + y \in I$. De même $x + y \in J$ donc $x + y \in I \cap J$.
Si $a \in A$ et $x \in I \cap J$ alors $x \in I$ donc $ax \in I$. De même $ax \in J$ donc $ax \in I \cap J$.
□

Proposition

Si I et J sont deux idéaux de $(A, +, \times)$ alors

$$I + J \underset{\text{déf}}{=} \{x + y / x \in I, y \in J\}$$

est un idéal.
De plus $I + J$ contient I et J et est inclus dans tout idéal contenant I et J.

dém. :
Pour $x \in I$, $x = x + 0 \in I + J$ car $0 \in J$. Ainsi $I \subset I + J$ et de même $J \subset I + J$.
$0 \in I + J$ car $0 = 0 + 0$ et $0 \in I, J$.
Pour $x, y \in I + J$, on peut écrire $x = x' + x''$ et $y = y' + y''$ avec $x', y' \in I$ et $x'', y'' \in J$.
On a alors $x + y = (x' + y') + (x'' + y'') \in I + J$ car $x' + y' \in I$ et $x'' + y'' \in J$.
Enfin, pour $a \in A$, $ax = (ax') + (ax'') \in I + J$ car $ax' \in I$ et $ax'' \in J$.
Enfin si K est un idéal contenant I et J alors K contient $I + J$ car stable pour l'addition.
□

1.4.1.3 Idéaux principaux

Définition

On appelle idéal engendré par $x \in A$ l'ensemble

$$xA \underset{\text{déf}}{=} \{xu / u \in A\}$$

Proposition

xA est un idéal contenant l'élément x et inclus dans tout idéal contenant x.

dém. :
$x = x \times 1 \in xA$ et si I est un idéal contenant x alors par absorption, il contient xA.
Il reste à montrer que xA est un idéal.
On a $xA \subset A$ et $0_A = x \times 0_A \in xA$.
Pour $y, z \in xA$, on peut écrire $y = xu$ et $z = xv$ avec $u, v \in A$ et alors $y + z = x(u + v) \in xA$.
Enfin pour $a \in A$, $ay = x(au) \in xA$.
□

Définition

Un idéal I de l'anneau $(A, +, \times)$ est dit principal s'il est de la forme xA pour un certain $x \in A$.

Théorème

> Les idéaux de $(\mathbb{Z}, +, \times)$ sont tous principaux.

dém. :
Les idéaux de $(\mathbb{Z}, +, \times)$ sont des sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ donc de la forme $n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}$.
□

Théorème

> Si $\mathbb{K}$ est un corps, les idéaux de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ sont tous principaux.

dém. :
Soit I un idéal de $\mathbb{K}[X]$.
Si $I = \{0\}$ alors $I = P\mathbb{K}[X]$ avec $P = 0$.
Sinon, soit P un polynôme non nul de I de degré minimal.
Par absorption $P\mathbb{K}[X] \subset I$.
Pour $A \in I$, par division euclidienne $A = PQ + R$ avec $\deg R < \deg P$. $R = A - P \in I$ car $A \in I$ et $P \in P\mathbb{K}[X] \subset I$.
Or $\deg R < \deg P$ donc par minimalité du degré de P parmi les polynômes non nuls de I, on peut affirmer $R = 0$ et donc $A \in P\mathbb{K}[X]$. Ainsi $I \subset P\mathbb{K}[X]$ puis $I = P\mathbb{K}[X]$.
□

1.4.2 Divisibilité dans un anneau intègre

Soit $(A, +, \times)$ un anneau intègre.

1.4.2.1 Divisibilité

Définition

> On dit que $a \in A$ divise $b \in A$ s'il existe $u \in A$ tel que $b = au$. On note alors $a \mid b$.

Exemple 1_A divise a et a divise a.

Exemple a divise 0_A et $0_A \mid a \Rightarrow a = 0_A$.
La notion de diviseurs de zéro dans le cadre arithmétique ne doit pas être confondue avec celle du cadre de l'intégrité !

Théorème

> On a équivalence entre :
> (i) $a \mid b$;
> (ii) $b \in aA$;
> (iii) $bA \subset aA$.

dém. :
Par définition (i) $\Leftrightarrow$ (ii)
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Si $b \in aA$ alors $bA \subset aA$ car aA est un idéal.
(iii) $\Rightarrow$ (ii) Supposons $bA \subset aA$. Puisque $b \in bA$, on a $b \in aA$.
□

Proposition

> Soient $a, b, c \in A$.
> $a \mid b$ et $b \mid c \Rightarrow a \mid c$.

dém. :
$bA \subset aA$ et $cA \subset bA \Rightarrow cA \subset aA$.
□

Proposition

Soient $a, b, c \in A$.

$$a \mid b \text{ et } a \mid c \Rightarrow a \mid (b + c)$$

dém. :
$bA \subset aA$ et $cA \subset aA \Rightarrow (b + c)A \subset bA + cA \subset aA$ car aA est un idéal.
□

1.4.2.2 Association

Définition

On dit que $a \in A$ est associé à $b \in A$ si a et b se divise mutuellement.

Proposition

Ceci définit une relation d'équivalence sur A.

Théorème

Soient $a, b \in A$. On a équivalence entre :
(i) a et b sont associés ;
(ii) $aA = bA$;
(iii) $\exists u \in U(A), b = au$.

dém. :
(i) $\Leftrightarrow bA \subset aA$ et $aA \subset bA \Leftrightarrow$ (ii)
(i) $\Rightarrow$ (iii) Supposons a et b associés.
il existe $u, v \in A$ tels que $b = au$ et $a = bv$.
On a alors $a = a(uv)$.
Cas $a = 0_A$: $b = au = 0_A$ et donc $b = a \times 1$.
Cas $a \neq 0_A$: Par intégrité, $uv = 1$ et donc $u \in U(A)$ puis $b = au$ avec $u \in U(A)$.
(iii) $\Rightarrow$ (i) Supposons qu'il existe $u \in U(A)$ tel que $b = au$.
On a donc $b \in aA$ puis $bA \subset aA$.
Aussi $a = bu^{-1}$ donc $aA \subset bA$ puis $=$.
□

Exemple Dans $\mathbb{Z}$, a et b sont associés si, et seulement si, $|a| = |b|$.
Ainsi tout entier est associé à un unique entier naturel.

Exemple Dans $\mathbb{K}[X]$, A et B sont associés si, et seulement si,

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}^\star, A = \lambda B$$

Ainsi tout polynôme non nul est associé à un unique polynôme unitaire.

1.4.3 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Par ce qui précède

$$a \mid b \Leftrightarrow b\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z}$$

Dans la suite nous exploitons cette interprétation pour revoir l'arithmétique des entiers.

1.4.3.1 Pgcd et ppcm

Théorème

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Il existe unique $d \in \mathbb{N}$ tel que

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$$

On a alors

$$d \mid a,\, d \mid b \text{ et } \forall c \in \mathbb{Z},\, (c \mid a \text{ et } c \mid b) \Rightarrow c \mid d$$

dém. :
$a\mathbb{Z}$ et $b\mathbb{Z}$ sont des idéaux de $\mathbb{Z}$ donc $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ aussi.
Par suite, il existe $d \in \mathbb{N}$ unique vérifiant $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$.
Puisque $a\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$, on a $d \mid a$. De même $d \mid b$.
Si $c \mid a$ et $c \mid b$ alors $a\mathbb{Z} \subset c\mathbb{Z}$ et $b\mathbb{Z} \subset c\mathbb{Z}$ donc $d\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \subset c\mathbb{Z}$ puis $c \mid d$.
□

Définition

Ce naturel d est appelé pgcd de a et b :

$$d \underset{\text{déf}}{=} \text{pgcd}(a, b)$$

Corollaire

Si d est le pgcd de a et b alors il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ vérifiant $d = au + bv$.

Théorème

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Il existe unique $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$$

On a alors

$$a \mid m,\, b \mid m \text{ et } \forall c \in \mathbb{Z},\, (a \mid c \text{ et } b \mid c) \Rightarrow m \mid c$$

dém. :
$a\mathbb{Z}$ et $b\mathbb{Z}$ sont des idéaux de $\mathbb{Z}$ donc $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ aussi. Par suite, il existe $m \in \mathbb{N}$ unique vérifiant $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$.
Puisque $m\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z}$, on a $a \mid m$ et de même $b \mid m$.
Si $a \mid c$ et $b \mid c$ alors $c\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$ donc $m \mid c$.
□

Définition

Ce naturel m est appelé ppcm de a et b :

$$m \underset{\text{déf}}{=} \text{ppcm}(a, b)$$

Remarque On définit aussi le pgcd d et le ppcm m de plusieurs entiers $a_1, \ldots, a_n$ par

$$d\mathbb{Z} = a_1\mathbb{Z} + \cdots + a_n\mathbb{Z} \text{ et } m\mathbb{Z} = a_1\mathbb{Z} \cap \ldots \cap a_n\mathbb{Z}$$

1.4.3.2 Primauté de deux entiers

Définition

Deux entiers a et b sont dits premiers entre eux si $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ (autrement dit si leur pgcd vaut 1).
On note $a \wedge b = 1$.

Rappel :
Deux entiers sont premiers entre eux si, et seulement si, ils ne possèdent pas de facteurs premiers en commun.

Théorème

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. On a équivalence entre :
(i) a et b sont premiers entre eux ;
(ii) $\exists u, v \in \mathbb{Z}, au + bv = 1$.

dém. :
(i) $\Rightarrow$ (ii) via l'égalité de Bézout.
(ii) $\Rightarrow$ (i) via $1 \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ donc $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.
□

Corollaire

On a

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, (a \wedge b = 1 \text{ et } a \wedge c = 1) \Rightarrow a \wedge (bc) = 1$$

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \wedge b = 1 \Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}, a^\alpha \wedge b^\beta = 1$$

Théorème

On a

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, (a \mid bc \text{ et } a \wedge b = 1) \Rightarrow a \mid c$$

dém. :
$c\mathbb{Z} = c(a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}) = ac\mathbb{Z} + bc\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z}$ donc $a \mid c$.
□

Proposition

On a

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, (a \mid c, b \mid c \text{ et } a \wedge b = 1) \Rightarrow ab \mid c$$

dém. :
$c\mathbb{Z} = c(a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}) = ac\mathbb{Z} + bc\mathbb{Z} \subset ab\mathbb{Z} + ab\mathbb{Z} = ab\mathbb{Z}$
□

1.4.4 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Dans $\mathbb{K}[X]$,

$$A \mid B \Leftrightarrow B.\mathbb{K}[X] \subset A.\mathbb{K}[X]$$

De plus

$$A, B \text{ sont associés } \Leftrightarrow A.\mathbb{K}[X] = B.\mathbb{K}[X] \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^\star, B = \lambda A$$

Enfin rappelons que si I est un idéal de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ alors il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $I = P\mathbb{K}[X]$. Quitte à choisir un polynôme associé, on peut supposer P unitaire ou nul et ce qui le détermine alors de façon unique.
On peut alors reprendre l'arithmétique dans $\mathbb{Z}$ présentée ci-dessus et l'adapter à $\mathbb{K}[X]$:

Définition

On appelle pgcd de deux polynômes $A, B \in \mathbb{K}[X]$ l'unique polynôme $D \in \mathbb{K}[X]$ unitaire ou nul tel que

$$A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] = D\mathbb{K}[X]$$

Définition

On appelle ppcm de deux polynômes $A, B \in \mathbb{K}[X]$ l'unique polynôme $M \in \mathbb{K}[X]$ unitaire ou nul tel que

$$A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X] = M\mathbb{K}[X]$$

Définition

On dit que deux polynômes $A, B \in \mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux si, et seulement si, leur pgcd vaut 1.

Rappel :
Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux si, et seulement si, ils n'ont pas de racines complexes en commun.

Exemple Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.
Le polynôme P est à racines simples si, et seulement si, $P \wedge P' = 1$.

1.4.5 Fonction indicatrice d'Euler

Définition

On appelle fonction indicatrice d'Euler l'application $\varphi : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$ définie par

$$\varphi(n) = \text{Card}\left\{k \in [\![1, n]\!] \,/\, k \wedge n = 1\right\}$$

Exemple $\varphi(12) = \text{Card}\{1, 5, 7, 11\} = 4$.

Remarque $\varphi(n)$ est aussi :
- le nombre de générateurs du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$;
(c'est aussi le nombre de racines primintives n-ième de l'unité)
- le nombre d'éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$.
(c'est donc le cardinale de $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$)

Lemme

Si p est un nombre premier et $\alpha\in\mathbb{N}^\star$ alors
$$\varphi(p^\alpha)=p^\alpha-p^{\alpha-1}$$

dém. :
Pour $k\in[\![1,p^\alpha]\!]$, le pgcd de k et p^α est un diviseur de p^α.
Puisque p est premier les naturels diviseurs de p^α sont $1,p,p^2,\dots,p^\alpha$.
Par suite $\text{pgcd}(k,p^\alpha)=1,p,\dots$ ou p^α.
On en déduit que
$$k\wedge p^\alpha\neq 1\Leftrightarrow p\mid k$$
Par suite, les entiers $k\in[\![1,p^\alpha]\!]$ qui ne sont pas premiers avec p^α sont ceux qui sont les multiples de p suivants : $p,2p,\dots,p^\alpha$.
Il y en a $p^{\alpha-1}$ et donc
$$\varphi(p^\alpha)=\text{Card}\,[\![1,p^\alpha]\!]-p^{\alpha-1}=p^\alpha-p^{\alpha-1}$$

□

Lemme

Si n et m sont deux entiers naturels non nuls premiers entre eux alors $\varphi(nm)=\varphi(n)\varphi(m)$.

dém. :
Pour $k\in\mathbb{Z}$, on note $\bar{k}$, $\hat{k}$ et $\dot{k}$ les classes d'équivalence de k dans $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Considérons l'application $\pi:\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ définie par $\pi(\bar{k})=(\dot{k},\hat{k})$.
Cette application est bien définie car
$$k=\ell\quad[mn]\Rightarrow k=\ell\quad[m]\text{ et }k=\ell\quad[n]$$
et ainsi
$$\bar{k}=\bar{\ell}\Rightarrow\hat{k}=\hat{\ell}\text{ et }\dot{k}=\dot{\ell}$$
On vérifie aisément que cette application est un morphisme d'anneaux.
Etudions le noyau de π.
Si $\bar{x}\in\ker\pi$ alors $\pi(\bar{x})=(\dot{0},\hat{0})$ i.e. $\bar{x}=\bar{0}$ et $\dot{x}=\dot{0}$. On alors $m\mid x$ et $n\mid x$ donc $mn\mid x$ puisque $m\wedge n=1$. Ainsi $\bar{x}=\bar{0}$ ce qui permet d'affirmer $\ker\pi=\{\bar{0}\}$.
Le morphisme π est donc injectif.
Puisque
$$\text{Card}(\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z})=nm=\text{Card}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\text{Card}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})<+\infty$$
on peut affirmer par cardinalité que π est bijective et finalement π est un isomorphisme.
Par cet isomorphisme, il y a autant d'éléments inversibles dans $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ que dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Il y a exactement $\varphi(mn)$ éléments inversibles dans $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$.
Les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont les couples formés par un élément inversible de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

et un élément inversible de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Il y en a exactement $\varphi(m)\varphi(n)$.
Au final, on peut conclure

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$$

□

Théorème

Si $n \geqslant 2$ a pour décomposition primaire

$$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_N^{\alpha_N}$$

avec $p_1, \dots, p_N$ nombres premiers deux à deux distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{N}^\star$ alors

$$\varphi(n) = n \prod_{i=}^{N} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

dém. :
On a

$$\varphi(n) = \varphi(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_N^{\alpha_N}) = \varphi(p_1^{\alpha_1})\varphi(p_2^{\alpha_2} \dots p_N^{\alpha_N})$$

car $p_1^{\alpha_1} \wedge (p_2^{\alpha_2} \dots p_N^{\alpha_N}) = 1$ puisque les nombres premiers p_i sont deux à deux distincts.
De même

$$\varphi(n) = \varphi(p_1^{\alpha_1})\varphi(p_2^{\alpha_2}) \dots \varphi(p_N^{\alpha_N}) = \prod_{i=1}^{N} \varphi(p_i^{\alpha_i})$$

Or

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^\alpha(1 - 1/p)$$

donc

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{N} p_i^{\alpha_i} \prod_{i=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = n \prod_{i=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

□

Exemple Les facteurs premiers de 12 sont 2 et 3.

$$\varphi(12) = 12 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 4$$

1.4.6 Musculation

1.4.6.1 Une relation

Proposition

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \varphi(n) = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

dém. :
Considérons les n nombres rationnels

$$\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,\frac{k}{n},\dots,\frac{n}{n}$$

Par réduction au même dénominateur, on peut écrire

$$\frac{k}{n}=\frac{p}{d}\text{ avec } d\mid n \text{ et } p\wedge d=1$$

Il y a exactement $\varphi(d)$ fractions qui se réduisent sous cette forme et donc

$$\varphi(n)=\sum_{d|n}\varphi(d)$$

□

1.4.6.2 Nombre de diviseurs

Pour $n\in\mathbb{N}^\star$, notons

$$\text{Div}(n)=\{d\in\mathbb{N}^\star/d\mid n\} \text{ et } \delta(n)=\text{Card}\text{Div}(n)$$

Pour $n=6$, $\text{Div}(6)=\{1,2,3,6\}$ et $\delta(6)=4$.
Exprimons $\delta(n)$.
Pour $n=p^\alpha$ avec p nombre premier on a

$$\text{Div}(p^\alpha)=\{1,p,\dots,p^\alpha\} \text{ et } \delta(p^\alpha)=\alpha+1$$

Pour $m\wedge n=1$, montrons $\delta(mn)=\delta(m)\delta(n)$.
Considérons l'application $f:\text{Div}(m)\times\text{Div}(n)\to\text{Div}(mn)$ définie par $f(a,b)=ab$.
L'application considérée est bien définie par

$$(a\mid m \text{ et } b\mid n)\Rightarrow ab\mid mn$$

Montrons que f est bijective.
Supposons $f(a,b)=f(c,d)$. On a $ab=cd$.
a divise cd or $a\wedge d=1$ (car a et d sont diviseurs de m et n premiers entre eux) donc a divise c.
De même c divise a et donc $a=c$ puis $b=d$.
Ainsi f est injective.
Soit $d\in\text{Div}(mn)$.
Posons $a=\text{pgcd}(d,m)$ et $b=\text{pgcd}(d,n)$.
On a $(a,b)\in\text{Div}(m)\times\text{Div}(n)$. Montrons que $f(a,b)=ab=d$.
On a $a\mid d$, $b\mid d$ et $a\wedge b=1$ (car a et b sont diviseurs de m et n premiers entre eux) donc $ab\mid d$.
Inversement, par égalité de Bézout on peut écrire $a=du+mv$ et $b=du'+nv'$ donc $ab=dw+mnvv'$.
Puisque d divise mn alors d divise ab puis finalement $d=ab$.
Ainsi f est surjective et donc bijective.
De la bijectivité de f, on déduit

$$\delta(mn)=\delta(m)\delta(n)$$

Par suite, si

$$n=p_1^{\alpha_1}\dots p_N^{\alpha_N}$$

avec $p_1,\dots,p_N$ nombres premiers deux à deux distincts, on obtient

$$\delta(n)=(\alpha_1+1)\dots(\alpha_N+1)$$

Chapitre 2

Eléments d'algèbre linéaire

$(\mathbb{K}, +, \times)$ désigne un corps : $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$,...

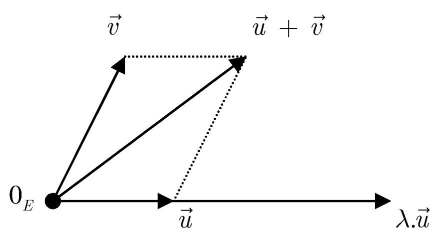
2.1 Structure d'espace vectoriel

2.1.1 Espace vectoriel

Définition

On appelle $\mathbb{K}$-espace vectoriel tout triplet $(E, +, .)$ formé d'un ensemble E, d'une loi de composition interne $+$ sur E et d'un produit extérieur . opérant de $\mathbb{K}$ sur E vérifiant :
(1) $(E, +)$ est un groupe abélien ;
(2) $\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$, $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$, $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ et $1.x = x$.
Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires, ceux de E sont appelés vecteurs, en particulier le neutre additif de E est appelé vecteur nul.

Exemple On peut visualiser géométriquement les opérations à l'intérieur d'un espace vectoriel en commençant par visualiser le vecteur nul 0_E et en convenant que tout vecteur sera représenté en partant de celui-ci.



Exemple Espaces vectoriels usuels : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$.

Exemple $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Ici, vecteurs et scalaires se confondent et le produit extérieur correspond à la multiplication sur $\mathbb{K}$.

Proposition

Si $\mathbb{L}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}$ alors par restriction du produit extérieur, tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel est encore un $\mathbb{L}$-espace vectoriel.

dém. :
La propriété (1) est conservée alors que la propriété (2) valant pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ vaut a fortiori pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{L}$.
□

Exemple Tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
En particulier $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exemple $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

2.1.2 Structure produit

Proposition

Si $E_1, \ldots, E_n$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels alors $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois + et . définies par :

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) \underset{\text{déf}}{=} (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \text{ et } \lambda.(x_1, \ldots, x_n) \underset{\text{déf}}{=} (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

De plus le vecteur nul de E est alors $0_E = (0_{E_1}, \ldots, 0_{E_n})$.

Exemple On retrouve que $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de nul $0_{\mathbb{K}^n} = (0, \ldots, 0)$

Exemple Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels alors $E \times F$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition

Si X désigne un ensemble et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel alors $\mathcal{F}(X, E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois + et . définies par :

$$f + g : x \mapsto f(x) + g(x) \text{ et } \lambda.f : x \mapsto \lambda.f(x)$$

De plus, le vecteur nul de $\mathcal{F}(X, E)$ est la fonction nulle : $\tilde{0} : x \mapsto 0_E$.

Exemple On retrouve que $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2.1.3 Sous-espace vectoriel

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

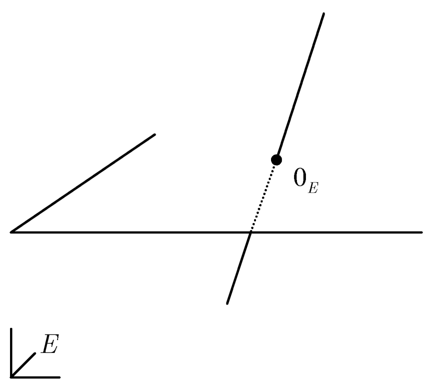
2.1.3.1 Définition

Définition

On appelle sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E toute partie F de E vérifiant :
1) $0_E \in F$;
2) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x, y \in F$, $\lambda x + \mu y \in F$.

Exemple $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.

Exemple Géométriquement, les sous-espaces vectoriels non triviaux se visualisent comme des droites et des plans contenant le vecteur nul.



Théorème

Si F est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors F est aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois restreintes.

Exemple $\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel car sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

2.1.3.2 Opérations

Proposition

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors

$$F \cap G = \{x \in E / x \in F \text{ et } x \in G\}$$

est un sous-espace vectoriel de E.
De plus $F \cap G$ est inclus à la fois dans F et G et contient tout sous-espace vectoriel de E inclus à la fois dans F et G.

dém. :
$F \cap G \subset E$.
$0_E \in F \cap G$ car $0_E \in F$ et $0_E \in G$.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in F \cap G$.
On a $\lambda x + \mu y \in F \cap G$ car $\lambda x + \mu y \in F$ puisque $x, y \in F$ et F est un sous-espace vectoriel et de même $\lambda x + \mu y \in G$.
$\square$

Proposition

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors

$$F + G = \{a + b / a \in F, b \in G\}$$

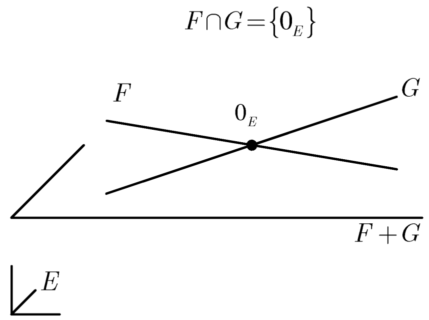
est un sous-espace vectoriel de E.
De plus, $F + G$ contient à la fois F et G et est inclus dans tout sous-espace vectoriel de E contenant à la fois F et G.

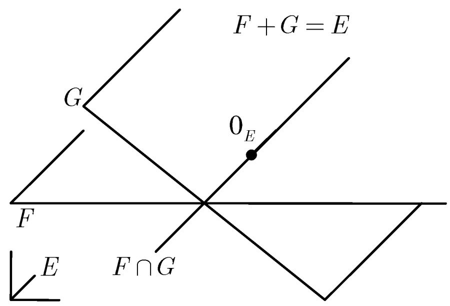
dém. :
$F + G \subset E$.
$0_E = 0_E + 0_E \in F + G$ car $0_E \in F$ et $0_E \in G$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in F + G$.
On peut écrire $x = a + b$ et $y = a' + b'$ avec $a, a' \in F$ et $b + b' \in G$ donc

$$\lambda x + \mu y = (\lambda a + \mu a') + (\lambda b + \mu b') \in F + G$$

De plus $F \subset F + G$ car pour tout $x \in F$, on peut écrire $x = x + 0$ avec $0 \in G$. De même $G \subset F + G$.
Enfin, si H est un sous-espace vectoriel contenant F et G alors pour tout $x \in F + G$, on peut écrire $x = a + b$ avec $a \in F \subset H$ et $b \in G \subset H$ donc $x \in H$. Ainsi $F + G \subset H$.
$\square$

Exemple





Remarque Les opérations d'intersection et de somme de sous-espaces vectoriels :
? sont commutatives ;
? sont associatives ;
? possèdent des neutres E et $\{0_E\}$ respectivement.
En particulier, pour $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E, on peut introduire les sous-espaces vectoriels

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_i = F_1 \cap \ldots \cap F_n \text{ et } \sum_{i=1}^{n} F_i = F_1 + \cdots + F_n = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i / x_i \in F_i \right\}$$

2.1.3.3 Espace vectoriel engendré

Définition

On appelle espace vectoriel engendré par une partie A de E l'intersection Vect$A$ de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A.

Théorème

Vect$A$ est un sous-espace vectoriel de E contenant A.
De plus, pour tout sous-espace vectoriel F de E :

$$A \subset F \Rightarrow \text{Vect}A \subset F$$

Vect$A$ apparaît comme étant le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A.

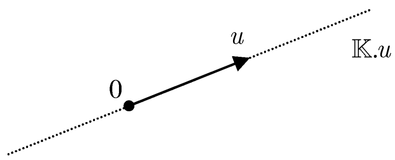
dém. :
Posons

$$\mathcal{S} = \{F \text{ sous - espace vectoriel de } E/A \subset F\}$$

Par définition

$$\text{Vect}A = \bigcap_{F \in \mathcal{S}} F$$

Vect$A \subset E$.
$0 \in$ Vect$A$ car pour tout $F \in \mathcal{S}$, $0 \in F$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in$ Vect$A$, $\lambda x + \mu y \in$ Vect$A$ car pour tout $F \in \mathcal{S}$, $x, y \in F$ donc $\lambda x + \mu y \in F$.
Enfin, pour tout $F \in \mathcal{S}$, on a $A \subset F$ donc $A \subset$ Vect$A$.
De plus, si F est un sous-espace vectoriel de E contenant A alors $F \in \mathcal{S}$ et donc Vect$A \subset F$ par la définition de Vect$A$.
Ex :Pour $A = \{u\}$, Vect$(u) = \mathbb{K}.u = \{\lambda.u/\lambda \in \mathbb{K}\}$.



□

Proposition

$A \subset B \Rightarrow$ Vect$A \subset$ Vect$B$.

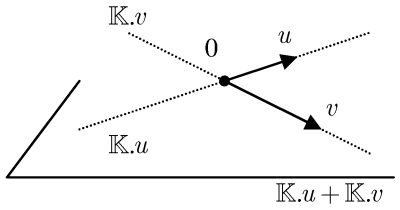
dém. :
Supposons $A \subset B$. On a alors $A \subset$ Vect$B$ or Vect$B$ est un sous-espace vectoriel donc Vect$A \subset$ Vect$B$
□

Proposition

Vect$(A \cup B) =$ Vect$A +$ Vect$B$.

dém. :
$A \subset$ Vect$A$ donc $A \subset$ Vect$A +$ Vect$B$. De même, $B \subset$ Vect$A +$ Vect$B$ donc $A \cup B \subset$ Vect$A +$ Vect$B$.
Or Vect$A +$ Vect$B$ est un sous-espace vectoriel donc Vect$(A \cup B) \subset$ Vect$A +$ Vect$B$.
Inversement $A \subset A \cup B$ donc Vect$A \subset$ Vect$(A \cup B)$. Aussi Vect$B \subset$ Vect$(A \cup B)$. Or Vect$(A \cup B)$ est un sous-espace vectoriel donc Vect$A +$ Vect$B \subset$ Vect$(A \cup B)$.
□

Exemple Vect$(u, v) = \mathbb{K}.u + \mathbb{K}.v = \{\lambda u + \mu v / \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$.



Remarque Par récurrence

$$\text{Vect}(u_1, \ldots, u_n) = \mathbb{K}.u_1 + \cdots + \mathbb{K}.u_n = \{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n / \lambda_i \in \mathbb{K}\}$$

Proposition

Si F est un sous-espace vectoriel de E alors Vect$F = F$.

dém. :
$F \subset$ Vect$F$ et puisque F est un sous-espace vectoriel contenant F, on a aussi Vect$F \subset F$.
□

Exemple Pour F et G sous-espaces vectoriels

$$\text{Vect}(F \cup G) = F + G$$

2.1.4 Application linéaire

Soient E et E' des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

2.1.4.1 Vocabulaire

Définition

On appelle application linéaire de E vers E' toute application $f : E \to E'$ vérifiant :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

Théorème

L'ensemble $\mathcal{L}(E, E')$ des applications linéaires de E vers E' est un espace vectoriel pours les lois usuelles de neutre l'application linéaire nulle $\tilde{o}$.

dém. :
C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, E')$.
□

Définition

Lorsque $E' = \mathbb{K}$, on parle de forme linéaire et on note $E^\star$ au lieu de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.
L'espace $E^\star$ est appelé espace dual de E.

Définition

Lorsque $E' = E$, on parle d'endomorphisme et on note $\mathcal{L}(E)$ au lieu de $\mathcal{L}(E, E)$.
$\mathcal{L}(E)$ est un anneau pour les lois + et $\circ$ de neutres $\tilde{0}$ et Id_E.

Définition

Lorsque f est bijective, on parle d'isomorphisme et on dit que les espaces E et E' sont isomorphes.
On note $\mathrm{GL}(E, E')$ l'ensemble des isomorphismes de E vers E'.

Définition

Lorsque f est bijective et $E' = E$, on parle d'automorphisme et on note $\mathrm{GL}(E) = \mathrm{GL}(E, E)$ l'ensemble des automorphismes de E. $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ est le groupe des inversibles de l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$, on l'appelle groupe linéaire de E.

2.1.4.2 Propriétés

Proposition

Si $f \in \mathcal{L}(E, E')$ alors $f(0_E) = 0_F$ et

$$\forall (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n, \forall (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in E^n \; f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

dém. :
$f(0_E) + f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E)$ donc $f(0_E) = 0_{E'}$.
La deuxième relation s'obtient en raisonnant par récurrence.
□

Proposition

L'image directe (resp. réciproque) d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel.

dém. :
Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$.
Considérons F un sous-espace vectoriel de E et étudions $f(F)$.
$f(F) \subset E'$ et $0_F = f(0_E) \in f(F)$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in f(F)$. On peut écrire $x = f(a)$ et $y = f(b)$ avec $a, b \in F$.
On a alors $\lambda x + \mu y = f(\lambda a + \mu b) \in f(F)$. Ainsi $f(F)$ est un sous-espace vectoriel de E'.
Considérons F' un sous-espace vectoriel de E' et étudions $f^{-1}(F')$.
$f^{-1}(F') \subset E$ et $0_E \in f^{-1}(F')$ car $f(0_E) = 0_{E'} \in F'$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in f^{-1}(F')$. $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \in F'$ donc $\lambda x + \mu y \in f^{-1}(F')$. Ainsi $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.
□

Proposition

Si $f \in \mathcal{L}(E, E')$ et $A \subset E$ alors $f(\mathrm{Vect}(A)) = \mathrm{Vect}(f(A))$.

dém. :
$A \subset \mathrm{Vect}A$ donc $f(A) \subset f(\mathrm{Vect}A)$. Or $f(\mathrm{Vect}A)$ est un sous-espace vectoriel donc $\mathrm{Vect}f(A) \subset f(\mathrm{Vect}A)$.
Inversement, $f(A) \subset \mathrm{Vect}f(A)$ donc $f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\mathrm{Vect}f(A))$. Or $A \subset f^{-1}(f(A))$ donc $A \subset f^{-1}(\mathrm{Vect}f(A))$. Or $f^{-1}(\mathrm{Vect}f(A))$ est un sous-espace vectoriel donc $\mathrm{Vect}A \subset f^{-1}(\mathrm{Vect}f(A))$ puis

$f(\text{Vect}A) \subset f(f^{-1}(\text{Vect}A))$. Or $f(f^{-1}(\text{Vect}f(A))) \subset \text{Vect}f(A)$ donc $f(\text{Vect}A) \subset \text{Vect}f(A)$.
□

Exemple $f(\text{Vect}(u_1, \ldots, u_n)) = \text{Vect}(f(u_1), \ldots, f(u_n))$.

2.1.4.3 Noyau et image

Définition

On appelle noyau et image d'une application linéaire f de E vers E' les ensembles $\ker f = f^{-1}(\{0_{E'}\})$ et $\text{Im}f = f(E)$. Ce sont des sous-espaces vectoriels de respectivement E et E'.

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$.
f est injective si, et seulement si, $\ker f = \{0\}$,
f est surjective si, et seulement si, $\text{Im}f = E'$.

Exemple Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrons $g \circ f = \tilde{0} \Leftrightarrow \text{Im}f \subset \ker g$.
($\Leftarrow$) Supposons $\text{Im}f \subset \ker g$.
Pour tout $x \in E$, $f(x) \in \text{Im}f$ donc $f(x) \in \ker g$ puis $g(f(x)) = 0$. Ainsi $g \circ f = \tilde{0}$
($\Rightarrow$) Supposons $g \circ f = \tilde{0}$.
Pour tout $y \in \text{Im}f$, on peut écrire $y = f(x)$ avec $x \in E$. Mezalor $g(y) = g(f(x)) = 0$ donc $y \in \ker g$.

Exemple Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Comparons $\ker f$ et $\ker f^2$.
Soit $x \in \ker f$. On a $f(x) = 0$ donc $f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$. Ainsi $\ker f \subset \ker f^2$.
Comparons $\text{Im}f$ et $\text{Im}f^2$.
Soit $y \in \text{Im}f^2$. On peut écrire $y = f^2(x)$ donc $y = f(f(x)) \in \text{Im}f$. Ainsi $\text{Im}f^2 \subset \text{Im}f$.
Plus généralement, on montre $\ker f^n \subset \ker f^{n+1}$ et $\text{Im}f^{n+1} \subset \text{Im}f^n$.

2.1.5 Application multilinéaire

Définition

Soient E_1, E_2 et E' des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $b : E_1 \times E_2 \to E'$ est dite bilinéaire si
(1) $\forall x_2 \in E_2$, l'application $x_1 \mapsto b(x_1, x_2)$ est linéaire ;
(2) $\forall x_1 \in E_1$, l'application $x_2 \mapsto b(x_1, x_2)$ est linéaire.

Exemple Produit scalaire et produit vectoriel sont bilinéaires.

Exemple L'application $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$ est une application bilinéaire de $\mathbb{K} \times E$ vers E.

Exemple L'application $(f, g) \mapsto g \circ f$ est une application bilinéaire de $\mathcal{L}(E, E') \times \mathcal{L}(E', E'')$ vers $\mathcal{L}(E, E'')$.

Définition

Soient $E_1, \dots, E_n$ et E' des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $m : E_1 \times \dots \times E_n \to E'$ est dite multilinéaire si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et tout $x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times \hat{E}_i \times \dots \times E_n$, l'application $x_i \mapsto m(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ est linéaire de E_i vers E'.

Exemple $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ définie par $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \dots x_n$ est une forme n-linéaire.

2.2 Décomposition en somme directe

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2.2.1 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

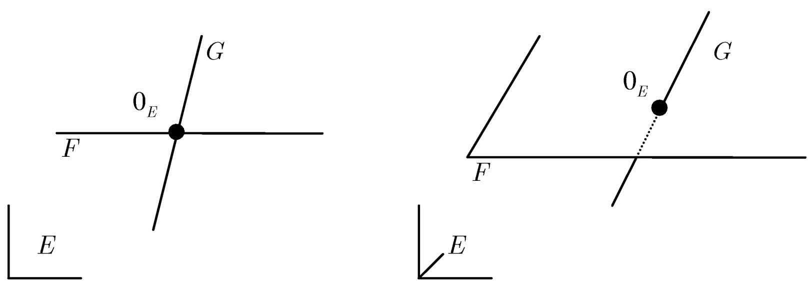
Définition

Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits supplémentaires si

$$F \cap G = \{0_E\} \text{ et } F + G = E$$

Exemple E et $\{0_E\}$ sont supplémentaires dans E.

Exemple



Théorème

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires alors

$$\forall x \in E, \exists!(a, b) \in F \times G, x = a + b$$

dém. :
Existence :
Soit $x \in E$. Puisque $E = F + G$, on peut écrire $x = a + b$ avec $(a, b) \in F \times G$.
Unicité :
Supposons $(a, b) \in F \times G$ et $(a', b') \in F \times G$ vérifiant

$$a + b = a' + b'$$

On a alors

$$a - a' = b' - b \in F \cap G = \{0\}$$

donc $a = a'$ et $b = b'$.
□

Corollaire

L'application

$$\varphi : \begin{cases} F \times G \to E \\ (a, b) \mapsto a + b \end{cases}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2.2.2 Projection vectorielle

2.2.2.1 Définition

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires.
Tout $x \in E$ s'écrit de façon unique $x = a + b$ avec $a \in F$ et $b \in G$.

Définition

Le vecteur a est appelé projeté de x sur F parallèlement à G.
Le vecteur b est appelé projeté de x sur G parallèlement à F.

Posons $p(x) = a$ et $q(x) = b$ ce qui définit des applications $p, q : E \to E$

Définition

p est appelé projection sur F parallèlement à G.
q est appelé projection sur G parallèlement à F.
p et q sont les projections associées à la supplémentarité de F et G.

Théorème

p et q sont des endomorphismes de E vérifiant

$$p + q = \mathrm{Id}_E,\ p^2 = p,\ q^2 = q \text{ et } q \circ p = p \circ q = \tilde{0}$$

De plus $F = \mathrm{Im}p = \ker q$ et $G = \ker p = \mathrm{Im}q$.

dém. :
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$.
On a $x = p(x) + q(x)$ et $y = p(y) + q(y)$ avec $p(x), p(y) \in F$ et $q(x), q(y) \in G$.
On a alors $\lambda x + \mu y = (\lambda p(x) + \mu p(y)) + (\lambda q(x) + \mu q(y))$ avec $\lambda p(x) + \mu p(y) \in F$ et $\lambda q(x) + \mu q(y) \in G$ donc

$$p(\lambda x + \mu y) = \lambda p(x) + \mu p(y) \text{ et } q(\lambda x + \mu y) = \lambda q(x) + \mu q(y)$$

Ainsi p et q sont des endomorphismes de E.
Pour tout $x \in E$, on a $x = p(x) + q(x) = (p + q)(x)$ donc $p + q = \mathrm{Id}$.
Aussi $p(x) = p(x) + 0$ avec $p(x) \in F$ et $q(x) \in G$ donc $p(p(x)) = p(x)$ et $q(p(x)) = 0$.
Ainsi $p \circ p = p$ et $q \circ p = \tilde{0}$.
De même $q \circ q = q$ et $p \circ q = \tilde{0}$.
De plus, pour tout $x \in F$, $p(x) = x$ donc $x \in \mathrm{Im}p$.
Puisque $q \circ p = \tilde{0}$, $\mathrm{Im}p \subset \ker q$.
Enfin pour tout $x \in \ker q$, $x = p(x) + q(x) = p(x) \in F$.

Finalement $F \subset \text{Im}p \subset \ker q \subset F$ donc $F = \text{Im}p = \ker q$.
De même $G = \ker p = \text{Im}q$.

□

Corollaire

> On a aussi $F = \ker(p - \text{Id})$ l'espace des vecteurs invariants par p.

dém. :
$F = \ker q = \ker(\text{Id} - p) = \ker(p - \text{Id}) = \{x \in E/p(x) = x\}$.

□

2.2.2.2 Projecteur

Définition

> On appelle projecteur tout endomorphisme p de E vérifiant $p^2 = p$.

Théorème

> Si p est un projecteur de E alors
> - $F = \text{Im}p$ et $G = \ker p$ sont des sous-espaces vectoriels de E supplémentaires ;
> - p est la projection vectorielle sur F parallèlement à G.

dém. :
Commençons par établir que $\text{Im}p = \ker(p - \text{Id})$.
L'inclusion $\ker(p - \text{Id}) \subset \text{Im}p$ est immédiate et l'inclusion $\text{Im}p \subset \ker(p - \text{Id})$ découle de l'égalité $p^2 = p$.
Soit $x \in \text{Im}p \cap \ker p$.
On a $p(x) = x$ et $p(x) = 0$ donc $x = 0$.
Ainsi $\text{Im}p \cap \ker p = \{0\}$.
Soit $x \in E$.
Analyse : Supposons $x = a + b$ avec $a \in \text{Im}p$ et $b \in \ker p$.
On a $p(x) = a$ et donc $b = x - p(x)$.
Synthèse : Posons $a = p(x)$ et $b = x - p(x)$.
On a $a \in \text{Im}p$, $x = a + b$ et $p(b) = p(x) - p^2(x) = 0$ donc $b \in \ker p$.
Ainsi $\text{Im}p + \ker p = E$ et finalement $\text{Im}p$ et $\ker p$ sont supplémentaires dans E.
Enfin, pour tout $x \in E$, $x = p(x) + (x - p(x))$ avec $p(x) \in \text{Im}p$ et $x - p(x) \in \ker p$ donc $p(x)$ est le projeté de x sur $\text{Im}p$ parallèlement à $\ker p$.

□

2.2.3 Somme directe de plusieurs sous-espaces vectoriels

Soient $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.

Définition

> On dit que les sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_n$ sont en somme directe si
>
> $$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n, x_1 + \cdots + x_n = 0_E \Rightarrow x_1 = \ldots = x_n = 0_E$$

Théorème

Si $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe alors

$$\forall x \in \sum_{i=1}^{n} F_i, \exists!(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n, x = x_1 + \cdots + x_n$$

dém. :
Existence : Par définition d'une somme.
Unicité : Supposons $x = x_1 + \cdots + x_n = x'_1 + \cdots + x'_n$ avec $x_i, x'_i \in F_i$.
On a $(x_1 - x'_1) + \cdots + (x_n - x'_n) = 0$ avec $x_i - x'_i \in F_i$ donc $x_1 - x'_1 = \ldots = x_n - x'_n = 0$ puis $(x_1, \dots, x_n) = (x'_1, \dots, x'_n)$.

□

Définition

Lorsque les espaces $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe, leur somme $\sum\limits_{i=1}^{n} F_i$ est notée $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} F_i$ ou $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$ afin de souligner la propriété précédente.

Proposition

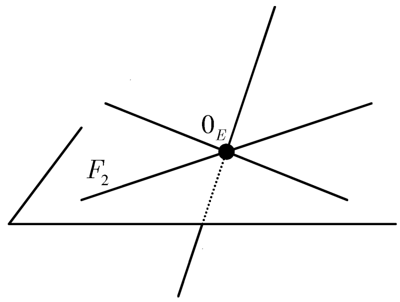
On a équivalence entre :
(i) les sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe ;
(ii) $\forall i \in \{2, \dots, n\}$, $\left(\sum\limits_{j=1}^{i-1} F_j\right) \cap F_i = \{0_E\}$.

dém. :
(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons les sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_n$ en somme directe.
Soient $i \in \{2, \dots, n\}$ et $x \in \left(\sum\limits_{j=1}^{i-1} F_j\right) \cap F_i$.
On peut écrire $x = \sum\limits_{j=1}^{i-1} x_j$ avec $x_j \in F_j$.
Posons alors $x_i = -x$ et $x_k = 0_E$ pour $k > i$. On a $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j = 0_E$ avec pour tout j, $x_j \in F_j$.
Puisque les $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe, on obtient $x_j = 0_E$ pour tout j et on en déduit $x = 0_E$.
Ainsi $(\sum\limits_{j \neq i} F_j) \cap F_i \subset \{0_E\}$ puis $=$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons (ii).
Soit $(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \ldots \times F_n$.
Si $x_1 + \cdots + x_n = 0_E$ alors $x_n = -(x_1 + \cdots + x_{n-1}) \in \left(\sum\limits_{j=1}^{n-1} F_j\right) \cap F_n$ donc $x_n = 0_E$.
On simplifie alors la relation précédente et on obtient $x_1 + \cdots + x_{n-1} = 0_E$.
En reprenant le procédé, on obtient successivement $x_{n-1} = 0_E, \dots, x_1 = 0_E$.
Ainsi les sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe.

□

Exemple Deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 sont en somme directe si, et seulement si, $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

Exemple Trois sous-espace vectoriel F_1, F_2, F_3 sont en somme directe si, et seulement si, $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ et $(F_1 \oplus F_2) \cap F_3 = \{0_E\}$



Exemple Si $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe et si $\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} F_i\right) \cap F_{n+1} = \{0_E\}$ alors les espaces $F_1, \dots, F_n$ et F_{n+1} sont en somme directe.

2.2.4 Décomposition en somme directe

Définition

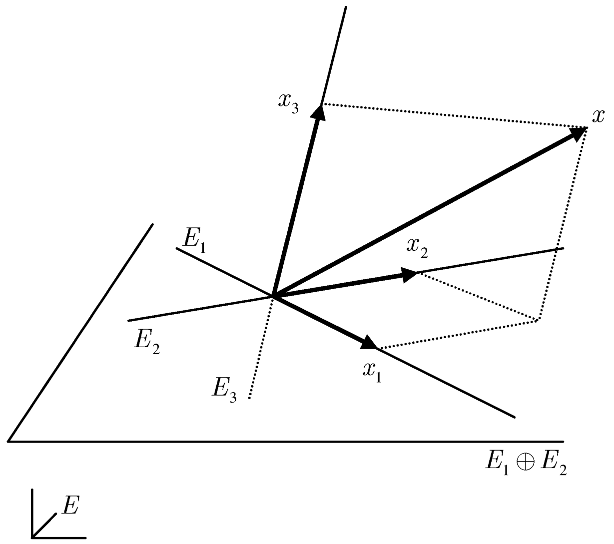
On dit que des sous-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_n$ de E forment une décomposition en somme directe si :
- les sous-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_n$ sont en somme directe ;
- la somme des sous-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_n$ est égale à E.

Autrement dit

$$E = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i$$

Exemple Deux sous-espaces vectoriels F et G de E supplémentaires réalisent une décomposition en somme directe car $E = F \oplus G$.

Exemple



Théorème

Si $E_1, \dots, E_n$ réalisent une décomposition en somme directe de E alors

$$\forall x \in E, \exists!(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n, x = x_1 + \cdots + x_n$$

Corollaire

L'application

$$\begin{aligned} E_1 \times \dots \times E_n &\to E \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto x_1 + \cdots + x_n \end{aligned}$$

est alors un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2.2.5 Projecteurs associés

Soient $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E réalisant une décomposition en somme directe.

$$\forall x \in E, \exists!(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n, x = x_1 + \cdots + x_n$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on pose $p_i(x) = x_i$ ce qui définit $p_i : E \to E$.

Définition

Les applications $p_1, \dots, p_n$ ainsi définies sont appelées projecteurs associés à la décomposition $E = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i$

Proposition

p_i est la projection sur $F = E_i$ parallèlement à $G = \underset{j \neq i}{\oplus} E_j$.

dém. :
Les espaces F et G sont supplémentaires car $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ donne $E = F \oplus G$ (si la somme d'un vecteur de F et de G est nulle, en transitant par les E_i, on obtient que les deux vecteurs sont nuls).
Pour tout $x \in E$, on peut écrire

$$x = p_1(x) + \cdots + p_n(x) = p_i(x) + \sum_{j \neq i} p_j(x)$$

avec $p_i(x) \in F$ et $\sum_{j \neq i} p_j(x) \in G$ donc $p_i(x)$ est le projeté de x sur F parallèlement à G.
□

Théorème

$\mathrm{Id}_E = \sum_{i=1}^{n} p_i$, $p_i^2 = p_i$ et $p_i \circ p_j = \tilde{0}$ si $i \neq j$.

dém. :
$\mathrm{Id}_E = \sum_{i=1}^{n} p_i$ car on a l'égalité $x = x_1 + \cdots + x_n$ avec $x_i = p_i(x)$ pour tout $x \in E$.
$p_i^2 = p_i$ car p_i est une projection.
Pour $i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$ car $\mathrm{Im} p_j = F_j \subset \ker p_i$.
□

2.2.6 Définition d'une application linéaire par ses restrictions linéaires

Théorème

On suppose $E = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i$.
Si, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, f_i désigne une application linéaire de E_i vers E' alors il existe une unique application linéaire f de E vers E' prolongeant les f_i i.e. vérifiant

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n, \forall x \in E_i, f(x) = f_i(x)$$

dém. :
Analyse / Unicité :
Supposons f solution
Pour $x \in E$, on peut écrire $x = \sum_{i=1}^{n} p_i(x)$ avec $x_i \in E_i$ et alors par linéarité,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(p_i(x)) = \sum_{i=1}^{n} f_i(p_i(x))$$

ce qui détermine entièrement par la relation $f = \sum_{i=1}^{n} f_i \circ p_i$.
Synthèse / Existence :
Considérons $f = \sum_{i=1}^{n} f_i \circ p_i$.
Par opérations (composition et somme) sur les applications linéaires, f est application linéaire de E

vers E'.
Soit $x \in E_i$. On a $x = p_i(x)$ donc

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(p_j \circ p_i(x)) = f_i(p_i(x)) = f_i(x)$$

□

Corollaire

Si deux applications linéaires sont égales sur chacun des espaces d'une décomposition en somme directe, elles sont égales.

Exemple Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires.
On appelle symétrie vectorielle par rapport à F et parallèlement à G l'endomorphisme s de E déterminé par

$$\forall x \in F, s(x) = x \text{ et } \forall x \in G, s(x) = -x$$

On vérifie

$$s^2 = \mathrm{Id}_E \text{ et } s = p - q = 2p - \mathrm{Id}_E$$

car ces identités valent sur F et G donc sur $E = F \oplus G$.
De plus

$$\ker(s - \mathrm{Id}) = \ker(2p - 2\mathrm{Id}) = \ker(p - \mathrm{Id}) = F$$

et

$$\ker(s + \mathrm{Id}) = \ker(2p) = \ker p = G$$

2.3 Base d'un espace vectoriel

I désigne un ensemble, éventuellement infini.
E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2.3.1 Famille à support fini

Définition

On note E^I l'ensemble des familles $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments de E indexées sur I.

Exemple Si $I = \{1, \ldots, n\}$ il est usuel d'identifier la famille $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et le n-uplet $(a_1, \ldots, a_n)$.

Proposition

E^I est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois

$$(a_i)_{i\in I} + (b_i)_{i\in I} = (a_i + b_i)_{i\in I} \text{ et } \lambda.(a_i)_{i\in I} = (\lambda.a_i)_{i\in I}$$

dém. :
$(E^I, +, .) = (\mathcal{F}(I, E), +, .)$.
□

Définition

Une famille $(a_i)_{i\in I} \in E^I$ est dite à support fini si l'ensemble $\{i \in I/a_i \neq 0_E\}$ est fini (autrement dit, tous les a_i sont nuls sauf un nombre fini). On note $E^{(I)}$ l'ensemble de ces familles.

Exemple Si I est fini alors $E^{(I)} = E^I$.

Exemple Cas $I = \mathbb{N}$.
$E^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E.
$E^{(\mathbb{N})} = \big\{(u_n) \in E^{\mathbb{N}}/\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n = 0_E\big\}$.

Proposition

$E^{(I)}$ est un sous-espace vectoriel de E^I.

dém. :
$E^{(I)} \subset E^I$, $(0)_{i\in I} \in E^{(I)}$ et une combinaison linéaire de deux familles à support fini est évidemment à support fini.
□

Définition

Si $(a_i)_{i\in I} \in E^{(I)}$ alors on introduit la somme de ses éléments notée $\sum_{i\in I} a_i$ qui est un vecteur de E.

Exemple Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ avec $u_{-1} = 1$, $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et $u_n = 0$ pour $|n| \geqslant 2$.
On a $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = 4$.

2.3.2 Combinaison linéaire

Définition

On appelle combinaison linéaire d'une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E tout vecteur de E pouvant s'écrire

$$\sum_{i\in I} \lambda_i x_i \text{ avec } (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$$

Exemple Cas $I = \emptyset$:
Seul le vecteur nul est combinaison linéaire de la famille vide.
Cas Card$I = 1$:
Les combinaisons linéaires de (x) sont les λx avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
Cas Card$I = n$:
Quitte à réindexer, on peut supposer $I = \{1, \dots, n\}$.
Les combinaisons linéaires de $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont les $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ avec $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

Proposition

Les combinaisons linéaires d'une famille infinie correspondent aux combinaisons linéaires des sous-familles finies.

Exemple Dans $\mathbb{K}[X]$, les combinaisons linéaires des monômes X^k avec $k \in \mathbb{N}$ sont exactement les polynomes.

Proposition

Si F est un sous-espace vectoriel de E alors

$$\forall (x_i)_{i\in I} \in F^I, \forall (\lambda_i) \in \mathbb{K}^{(I)}, \sum_{i\in I} \lambda_i x_i \in F$$

dém. :
La propriété est immédiate pour Card$I \leqslant 2$.
On l'établit par récurrence, pour I fini.
Enfin, par simplification des zéros superflus, on l'obtient pour I quelconque à partir d'une sous-famille finie.
□

Proposition

Si $f \in \mathcal{L}(E, E')$ alors

$$\forall (x_i)_{i\in I} \in E^I, \forall (\lambda_i) \in \mathbb{K}^{(I)}, f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i\in I} \lambda_i f(x_i)$$

dém. :
La propriété est immédiate pour Card$I \leqslant 2$. On l'établit par récurrence, pour I fini. Enfin, par simplification des zéros superflus, on l'obtient pour I quelconque.
□

2.3.3 Famille génératrice

Définition

On note Vect$(x_i)_{i\in I}$ l'espace vectoriel engendré par $\{x_i / i \in I\}$.

Proposition

Vect$(x_i)_{i\in I}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(x_i)_{i\in I}$.

dém. :
Notons F l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(x_i)_{i\in I}$.
On a évidemment $F \subset$ Vect$(x_i)_{i\in I}$ car Vect$(x_i)_{i\in I}$ est un sous-espace vectoriel donc stable par combinaison linéaire. Inversement, on vérifie que F est un sous-espace vectoriel de E et puisqu'il contient chaque x_i, il est inclus dans Vect$(x_i)_{i\in I}$.
□

Définition

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est dite génératrice si $\text{Vect}(x_i)_{i\in I} = E$ ce qui signifie que tout vecteur de E est combinaison linéaire de cette famille :

$$\forall x \in E, \exists (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}, x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$$

Exemple La famille vide est génératrice de $\{0_E\}$.

Exemple Dans $\mathbb{K}^n$, considérons $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$.
La famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est génératrice.

Exemple Dans $\mathbb{K}[X]$, la famille $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est génératrice.

2.3.4 Famille libre

Définition

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est dite libre si

$$\forall (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}, \sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0$$

Sinon, la famille est dite liée et toute égalité $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0_E$ avec $(\lambda_i)_{i\in I} \neq 0$ est appelée relation linéaire sur la famille $(x_i)_{i\in I}$.

Exemple La famille vide est libre.

Exemple (x) est libre si, et seulement si, $x \neq 0_E$.

Exemple (u, v) est liée si, et seulement si, il existe $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ tel que $\alpha u + \beta v = 0_E$.
Cela équivaut encore à dire

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, u = \lambda v \text{ ou } \exists \mu \in \mathbb{K}, u = \mu v$$

Attention : (u, v) liée n'implique pas qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $v = \lambda u$ (prendre $u = 0_E$ et $v \neq 0_E$ quelconque)
Cependant

$$(u, v) \text{ liée et } u \neq 0_E \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, v = \lambda u$$

Exemple Dans $\mathbb{K}^n$, la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre.

Proposition

Une famille infinie est libre si, et seulement si, toutes ses sous-familles finies le sont.

dém. :
($\Rightarrow$) Soit $J \subset I$ un ensemble fini. Supposons $\sum_{j\in J} \lambda_j x_j = 0_E$ avec $(\lambda_j) \in \mathbb{K}^J$.
Pour $i \in I \backslash J$ posons $\lambda_i = 0$. On a $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0_E$ avec $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$ donc $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in I$ et en particulier pour tout $i \in J$.
($\Leftarrow$) Supposons $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0_E$ avec $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$.
Posons $J = \{i \in I/\lambda_i \neq 0\}$. En supprimant les zéros, on obtient $\sum_{i\in J} \lambda_i x_i = 0_E$ avec J fini.
Puisque la sous-famille finie $(x_i)_{i\in J}$ est supposée libre, on obtient

$$\forall i \in J, \lambda_i = 0$$

et l'on peut conclure que l'ensemble J est vide i.e. $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in I$.
□

Exemple La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre car

$$\forall n \in \mathbb{N}, (X^k)_{0\leqslant k\leqslant n} \text{ est libre}$$

Exemple $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note e_a l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $e_a(t) = \mathrm{e}^{at}$.
Montrons que $(e_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est une famille libre d'élément de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts.
Supposons

$$\lambda_1 e_{a_1} + \cdots + \lambda_n e_{a_n} = 0$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_1 \mathrm{e}^{a_1 t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{a_2 t} + \cdots + \lambda_n \mathrm{e}^{a_n t} = 0$$

Quitte à réindexer, on peut supposer $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$
En multipliant la relation par $\mathrm{e}^{-a_1 t}$, on obtient

$$\lambda_1 + \lambda_2 \mathrm{e}^{(a_2-a_1)t} + \cdots + \lambda_n \mathrm{e}^{(a_n-a_1)t} = 0$$

Quand $t \to -\infty$, la relation précédente donne $\lambda_1 = 0$.
On obtient alors

$$\lambda_2 \mathrm{e}^{a_2 t} + \cdots + \lambda_n \mathrm{e}^{a_n t} = 0$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et on peut reprendre la démarche pour obtenir successivement $\lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.
Ainsi la famille $(e_{a_1}, \ldots, e_{a_n})$ est libre et puisque toutes ses sous-familles finies sont libre, la famille $(e_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.

2.3.5 Base

Définition

On appelle base de E toute famille $(e_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E à la fois libre et génératrice.

Exemple La famille vide est base de $E = \{0_E\}$.

Exemple $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}^n$ (dite canonique).

Exemple $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ (dite canonique).

Exemple (1) est base de $\mathbb{K}$ (dite canonique).

Exemple $(1, i)$ est base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ (dite canonique).

Théorème

Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E alors

$$\forall x \in E, \exists!(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}, x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$$

dém. :
Existence : car la famille $(e_i)_{i\in I}$ est génératrice.
Unicité : Supposons $\sum_{i\in I} \lambda_i e_i = \sum_{i\in I} \mu_i e_i$ avec $(\lambda_i)_{i\in I}, (\mu_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$. On a $\sum_{i\in I} (\lambda_i - \mu_i)e_i = 0$ donc $\lambda_i = \mu_i$ pour tout $i \in I$ car la famille $(e_i)_{i\in I}$ est libre.
□

Définition

La famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ est alors appelée famille des coordonnées (ou composantes) de x dans la base $(e_i)_{i\in I}$.

Exemple Les coordonnées de $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ dans la base canonique sont ses éléments x_i.

Exemple Les coordonnées de $P \in \mathbb{K}[X]$ dans la base canonique sont ses coefficients.

Exemple Soit $j \in I$. On peut écrire

$$e_j = \sum_{i\in I} \delta_{i,j} e_i \text{ avec } \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La famille $(\delta_{i,j})_{i\in I}$ est donc la famille des coordonnées de e_j dans la base $(e_i)_{i\in I}$.

2.3.6 Définition d'une application linéaire par l'image d'une base

Théorème

Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et $(y_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E' alors il existe une unique application linéaire $f : E \to E'$ vérifiant

$$\forall i \in I, f(e_i) = y_i$$

dém. :
Analyse/Unicité : Supposons f solution.
Pour $e \in E$, on peut écrire $e = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$ avec $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ et alors $f(e) = \sum_{i\in I} \lambda_i f(e_i) = \sum_{i\in I} \lambda_i y_i$ ce qui détermine entièrement f.
Synthèse/Existence : Considérons l'application f qui à $e = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$ associe $f(e) = \sum_{i\in I} \lambda_i y_i$.
On vérifie aisément que f est linéaire et transforme e_i en y_i.
□

Corollaire

Si deux applications linéaires $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ sont égales sur chacun des vecteurs d'une base de E alors elles sont égales sur E.

2.3.7 Image linéaire d'une famille de vecteurs

Proposition

Si $(x_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de vecteurs de E et si $f \in \mathcal{L}(E, E')$ est surjective alors $(f(x_i))_{i\in I}$ est une famille de vecteurs de E' génératrice.

dém. :
Pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Or, il existe aussi $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$ telle que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$ et alors $y = \sum_{i\in I} \lambda_i f(x_i)$.
Ainsi, $(f(x_i))_{i\in I}$ est génératrice.
□

Proposition

Si $(x_i)_{i\in I}$ une famille libre de vecteurs de E et si $f \in \mathcal{L}(E, E')$ est injective alors $(f(x_i))_{i\in I}$ est une famille libre de E'.

dém. :
Supposons $\sum_{i\in I} \lambda_i f(x_i) = 0_{E'}$.
On a $f(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i) = 0$ donc $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i \in \ker f = \{0_E\}$ puis $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0_E$.
Or la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre donc $\forall i \in I, \lambda_i = 0$.
Ainsi $(f(x_i))_{i\in I}$ est libre.
□

Théorème

Soient $f \in \mathcal{L}(E, E')$ et $(e_i)_{i\in I}$ une base de E.
1) f est injective si, et seulement si, $(f(e_i))_{i\in I}$ est libre.
2) f est surjective si, et seulement si, $(f(e_i))_{i\in I}$ est génératrice de E'.
3) f est un isomorphisme si, et seulement si, $(f(e_i))_{i\in I}$ est une base de E'.

dém. :
1) ($\Rightarrow$) déjà vue.
($\Leftarrow$) Supposons $(f(e_i))_{i\in I}$ libre.
Soit $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$ tel que $f(x) = 0_{E'}$. On a $\sum_{i\in I} \lambda_i f(e_i) = 0_{E'}$ donc $\lambda_i = 0$ pour tout i puis $x = 0_E$.
2) ($\Rightarrow$) déjà vue.
($\Leftarrow$) Supposons $(f(e_i))_{i\in I}$ génératrice.
Pour tout $y \in F$, on peut écrire $y = \sum_{i\in I} \lambda_i f(e_i)$ et donc $y = f(e)$ avec $e = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$.
3) via 1) et 2)
□

2.4 Dimension et codimension

2.4.1 Dimension

Définition

On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie. On sait qu'un tel espace possède alors une base finie et que toute base de cet espace est formée du même nombre de vecteurs appelé dimension de celui-ci.

Exemple $\dim\{0\} = 0$, $\dim \mathbb{K}^n = n$, $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$, $\dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1$, $\dim \mathbb{K} = 1$, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ et $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

Définition

Si un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E n'est pas de dimension finie, on pose $\dim E = +\infty$.

Exemple $\dim \mathbb{K}[X] = +\infty$.

Théorème

Deux espaces vectoriels isomorphes ont même dimension.
La réciproque est vrai en situation de dimension finie.

dém. :
Car un isomorphisme transforme une base de l'un en une base de l'autre.
□

Exemple Si E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions p et n alors via représentation matricielle

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = \dim E \times \dim F$$

En particulier $\dim \mathcal{L}(E) = (\dim E)^2$ et $\dim E^\star = \dim E$

Théorème

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies alors $E \times F$ est de dimension finie et

$$\dim E \times F = \dim E + \dim F$$

dém. :
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $(f_1, \dots, f_m)$ une base de F.
L'application

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{K}^{n+m} & \to & E \times F \\ (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) & \mapsto & (x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n, y_1 f_1 + \cdots + y_m f_m) \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
□

Corollaire

Si $E_1, \dots, E_n$ $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies alors

$$\dim E_1 \times \cdots \times E_n = \dim E_1 + \cdots + \dim E_n$$

2.4.2 Construction de base

Théorème

Toute famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie peut être complétée en une base à l'aide de vecteurs bien choisis dans une famille génératrice.

Corollaire

Si E est de dimension finie, toute famille de vecteurs de E a au plus $\dim E$ vecteurs et toute famille génératrice de vecteurs de E a au moins $\dim E$ vecteurs.

Théorème

Soit E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E.
On suppose

$$\text{Card} I = \dim E$$

On a équivalence entre :
(i) $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E ;
(ii) $(e_i)_{i \in I}$est une famille libre ;
(iii) $(e_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E.

Exemple Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]^{\mathbb{N}}$ une famille de polynômes de degrés étagés (i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, \deg P_n = n$)
Montrons que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.
Commençons par étudier la sous-famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$.
Supposons

$$\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_n P_n = 0$$

On a

$$\lambda_n P_n = -(\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_{n-1} P_{n-1})$$

donc $\deg(\lambda_n P_n) < n$ puis $\lambda_n = 0$.
En reprenant le procédé, on obtient successivement $\lambda_{n-1} = 0, \dots, \lambda_0 = 0$.
Ainsi la famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est libre, or cette famille est formée de $n + 1 = \dim \mathbb{K}_n[X]$ vecteurs de $\mathbb{K}_n[X]$ c'est donc une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
La famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors libre car chacune de ses sous-familles finies est libre et génératrice car pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P \in \mathbb{K}_n[X]$ ce qui permet d'écrire

$$P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k P_k \text{ en posant } \lambda_k = 0 \text{ pour } k > n$$

Finalement $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

2.4.3 Sous-espace vectoriel en dimension finie

Théorème

Si F est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie alors F est de dimension finie et

$$\dim F \leqslant \dim E$$

De plus

$$\dim F = \dim E \Leftrightarrow F = E$$

Théorème

Tout sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie admet au moins un supplémentaire.

dém. :
Soit F un sous-espace vectoriel de dimension p d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n.
F possède une base $(e_1, \dots, e_p)$ qui est aussi une famille libre de vecteurs de E et peut donc être complétée en une base $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E. Posons alors $G = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$.
On a $F \cap G = \{0\}$ car la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre et $F + G = E$ car la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E. Ainsi les vecteurs complétant une base de F en une base de E engendrent un supplémentaire de F.
□

Définition

On appelle base adaptée au sous-espace vectoriel F de E toute base de E obtenue en complétant une base de F en une base de E.

2.4.4 Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels

Théorème

Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors $F + G$ et $F \cap G$ sont de dimensions finies et

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

dém. :
On complète une base de $F \cap G$, d'une part, en une base de F et, d'autre part, en une base de G puis on forme une base de $F + G$ en considérant la famille de tous ses vecteurs.
□

Corollaire

Si F et G sont en somme directe alors

$$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$$

Théorème

Si $F_1, \ldots, F_n$ sont des sous-espaces vectoriels de dimensions finies alors $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est de dimension finie et

$$\dim \sum_{i=1}^{n} F_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$$

De plus, il y a égalité si, et seulement si, les sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_n$ sont en somme directe.
Ainsi

$$\dim \bigoplus_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$$

dém. :
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$.
Pour $n = 1$: ok
Supposons la propriété vraie au rang $n \geqslant 1$.
Soient $F_1, \ldots, F_n, F_{n+1}$ des sous-espaces vectoriels de E. On a

$$\sum_{i=1}^{n+1} F_i = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) + F_{n+1}$$

donc

$$\dim \sum_{i=1}^{n+1} F_i \leqslant \dim \sum_{i=1}^{n} F_i + \dim F_{n+1} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim F_i + \dim F_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \dim F_i$$

De plus, il y a égalité si, et seulement si, $\dim \sum_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$ et $\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) \cap F_{n+1} = \{0_E\}$ ce qui signifie que $F_1, \ldots, F_n, F_{n+1}$ sont en somme directe.
Récurrence établie.
□

Corollaire

Si $F_1, \ldots, F_n$ sont en somme directe alors

$$\dim \bigoplus_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

2.4.5 Caractérisation d'une décomposition en somme directe

Théorème

Soient $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie vérifiant

$$\dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$$

On a équivalence entre :
(i) $E = \underset{i=1}{\overset{n}{\oplus}} E_i$;
(ii) $E = \sum_{i=1}^{n} E_i$;
(iii) $E_1, \dots, E_n$ sont en somme directe.

dém. :
(i) $\Leftrightarrow$ (ii) et (iii) : ok
(ii) $\Rightarrow$ (iii) : car $\dim \sum_{i=1}^{n} E_i = \dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$.
(iii) $\Rightarrow$ (ii) : car $\dim \sum_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i = \dim E$.
□

Corollaire

Si F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie vérifiant

$$\dim E = \dim F + \dim G$$

alors on a équivalence entre :
(i) F et G sont supplémentaires ;
(ii) $F \cap G = \{0_E\}$;
(iii) $F + G = E$.

Exemple Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de E.
Soient $0 = n_0 \leqslant n_1 < n_2 < \dots < n_{p-1} \leqslant n$ des entiers.
Posons $E_j = \text{Vect}(e_{n_{j-1}+1}, \dots, e_{n_j})$ pour $1 \leqslant j \leqslant p$.
Les sous-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_p$ forment une décomposition en somme directe de E.

Définition

Inversement, si $E = \underset{j=1}{\overset{p}{\oplus}} E_j$ alors en accolant des bases des sous-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_p$, on forme une base de E. Une telle base est dite adaptée à la décomposition $E = \underset{i=1}{\overset{p}{\oplus}} E_i$.

Exemple Supposons F et G supplémentaires dans E.
Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de F et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de G alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.

2.4.6 Codimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème

Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$.
Si G est un supplémentaire de $\ker f$ dans E alors f induit par restriction un isomorphisme de G vers $\mathrm{Im} f$.

dém. :
Considérons la restriction $f_{\upharpoonright G} : G \to \mathrm{Im} f$. Celle-ci est bien définie et linéaire.
Soit $x \in \ker f_{\upharpoonright G}$. $x \in G$ est $f_{\upharpoonright G}(x) = 0$ i.e. $f(x) = 0$. Ainsi $x \in \ker f \cap G = \{0\}$. Par suite $f_{\upharpoonright G}$ est injective.
Pour $y \in \mathrm{Im} f$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Or on peut écrire $x = a + b$ avec $a \in G$ et $b \in \ker f$ et on a alors $y = f(x) = f(a) + f(b) = f_{|G}(a)$ donc $y \in \mathrm{Im} f_{\upharpoonright G}$. Ainsi $f_{\upharpoonright G}$ est surjective.
□

Corollaire

Deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un même sous-espace vectoriel sont isomorphes.

dém. :
Soient G et H deux supplémentaires d'un sous-espace vectoriel F dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
La projection q sur H parallèlement à F a pour noyau F et pour image H. Comme G est un supplémentaire de F, on peut conclure.
□

Définition

On appelle codimension d'un sous-espace vectoriel F de E, la dimension commune des supplémentaires de F dans E. On la note

$$\mathrm{codim} F \text{ ou } \mathrm{codim}_E F$$

Exemple Cas $\dim E < +\infty$.
Si F est un sous-espace vectoriel de E alors F possède un supplémentaire G et alors $E = F \oplus G$ donne $\dim E = \dim F + \dim G$ donc

$$\mathrm{codim}_E F = \dim E - \dim F$$

Exemple Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n + 1 \in \mathbb{N}^\star$ et $F = P.\mathbb{K}[X]$.
F est un sous-espace vectoriel de E de dimension infinie (car isomorphisme à $\mathbb{K}[X]$)
Considérons $G = \mathbb{K}_n[X]$.
On a $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = \mathbb{K}[X]$ (par division euclidienne).
Par suite $\mathbb{K}_n[X]$ est un supplémentaire de F. Ainsi

$$\mathrm{codim} F = \dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1$$

2.5 Rang

2.5.1 Rang d'une famille de vecteurs

Définition

On appelle rang d'une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel la dimension de l'espace qu'elle engendre

$$\operatorname{rg}(x_i)_{i\in I} \underset{\text{déf}}{=} \dim \operatorname{Vect}\{x_i / i \in I\}$$

Proposition

Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
$\operatorname{rg}(x_1, \ldots, x_p) \leqslant p$ avec égalité si, et seulement si, la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre.

dém. :
$\dim \operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_p) \leqslant p$ et il y a égalité si, et seulement si, $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre.
□

Proposition

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n.
$\operatorname{rg}(x_i)_{i\in I} \leqslant n$ avec égalité si, et seulement si, la famille $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice de E.

dém. :
$\dim \operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_p) \leqslant \dim E$ avec égalité si, et seulement si, $(x_1, \ldots, x_p)$ est génératrice de E.
□

2.5.2 Rang d'une application linéaire

Définition

On appelle rang d'une application linéaire f la dimension de son image :

$$\operatorname{rg} f := \dim \operatorname{Im} f$$

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$ avec $\dim E < +\infty$
On a $\operatorname{rg} f \leqslant \dim E$ avec égalité si, et seulement si, f injective.

dém. :
Introduisons $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E avec $n = \dim E$
$\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = \dim f(E)$, or $f(E) = f(\operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_n)) = \operatorname{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.
Par suite $\operatorname{rg} f \leqslant n$ avec égalité si, et seulement si, $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre i.e. f injective.
□

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$ avec $\dim E' < +\infty$
On a $\operatorname{rg} f \leqslant \dim E'$ avec égalité si, et seulement si, f surjective.

dém. :
$\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f$ avec $\operatorname{Im} f \subset F$.
Par suite $\operatorname{rg} f \leqslant \dim F$ avec égalité si, et seulement si, $\operatorname{Im} f = F$ i.e. f surjective.
□

Théorème

Soient $f \in \mathcal{L}(E, E')$ et $g \in \mathcal{L}(E', E'')$.
On a

$$\text{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\text{rg}f, \text{rg}g)$$

De plus, si f surjective $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}g$ et si g injective $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}f$.

dém. :
$\text{rg}(g \circ f) = \dim \text{Im}(g \circ f) = \dim g(f(E))$.
D'une part, $g(f(E)) = \text{Im}g_{\restriction f(E)}$ donc $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}g_{\restriction f(E)} \leqslant \dim f(E) = \text{rg}f$ avec égalité quand g est injective.
D'autre part, $g(f(E)) \subset g(F) = \text{Im}g$ donc $\text{rg}(g \circ f) \leqslant \text{rg}g$ avec égalité quand f est surjective.

□

Corollaire

On ne modifie pas le rang d'une application linéaire en composant celle-ci avec un isomorphisme.

2.5.3 Formule du rang

Théorème

Si $f \in \mathcal{L}(E, E')$ est de rang fini alors $\ker f$ est de codimension finie et $\text{rg}f = \text{codim} \ker f$.

dém. :
Posons $r = \text{rg}f$ et considérons $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ une base de $\text{Im}f$.
Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, considérons x_i un antécédent de y_i par f et introduisons $G = \text{Vect}(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$.
La famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ est libre car son image par f est libre, c'est donc une base de G et donc $\dim G = r$.
Montrons que G est supplémentaire de $\ker f$.
Soit $x \in \ker f \cap G$ alors $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i$ et $f(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_i = 0$. Or la famille $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ est libre donc $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$ puis $x = 0$. Ainsi $\ker f \cap G = \{0\}$.
Pour tout $x \in E$, $f(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i$.
Posons $a = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i \in G$ de sorte que $f(a) = f(x)$.
En introduisons $b = x - a$, on obtient $x = a + b$ avec $a \in G$ et $b \in \ker f$.
Ainsi $E = G + \ker f$.
Finalement $E = G \oplus \ker f$ et on peut conclure.

□

Corollaire

Si $\dim E < +\infty$ alors

$$\text{rg}f + \dim \ker f = \dim E$$

Théorème

Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$.
On suppose $n = \dim E = \dim E' < +\infty$.
On a équivalence entre :
(i) f est un isomorphisme ;
(ii) f est injective ;
(iii) f est surjective ;
(iv) $\text{rg} f = n$;
(v) $\exists g \in \mathcal{L}(E', E), g \circ f = \text{Id}_E$;
(vi) $\exists h \in \mathcal{L}(E', E), f \circ h = \text{Id}_{E'}$.
De plus si tel est le cas $f^{-1} = g = h$.

dém. :
(i) $\Leftrightarrow$ (ii) et (iii)
(ii) $\Rightarrow$ (iv) car $\text{rg} f = \dim E - \dim \ker f = n$.
(iv) $\Rightarrow$ (iii) car $\text{rg} f = n = \dim F$ donc f surjective.
(iii) $\Rightarrow$ (ii) car $\dim \ker f = \dim E - \text{rg} f = n - n = 0$
(i) $\Rightarrow$ (v) et (vi) ok
(v) $\Rightarrow$ (ii) car $g \circ f$ injective entraîne f injective.
(vi) $\Rightarrow$ (iii) car $f \circ h$ surjective entraîne f surjective.
□

Corollaire

Si $\dim E < +\infty$, ce qui précède permet de caractériser les automorphismes de E.

2.5.4 Application : interpolation de Lagrange

Soient $a_0, \ldots, a_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts.

Théorème

L'application $\varphi : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}^{n+1}$ définie par $\varphi(P) = (P(a_0), \ldots, P(a_n))$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

dém. :
φ est évidemment linéaire.
$\dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1 = \dim \mathbb{K}^{n+1} < +\infty$.
Soit $P \in \ker \varphi$. On a $P(a_0) = \ldots = P(a_n) = 0$. Ainsi P admet au moins $n + 1$ racines, or $\deg P \leqslant n$ donc $P = 0$. Ainsi $\ker \varphi = \{0\}$ puis, par le théorème d'isomorphisme, φ est un isomorphisme.
□

Corollaire

$\forall (b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}, \exists! P \in \mathbb{K}_n[X], \forall i \in [\![0, n]\!], P(a_i) = b_i$.

dém. :
C'est la bijectivité de φ.
Exprimons P.
Notons $(e_0, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$.
$b = (b_0, \ldots, b_n) = \sum_{k=0}^{n} b_k e_k$ et $P = \varphi^{-1}(b) = \sum_{k=0}^{n} b_k \varphi^{-1}(e_k) = \sum_{k=0}^{n} b_k L_k$ en posant $L_k = \varphi^{-1}(e_k)$
Exprimons L_k
Puisque $\varphi(L_k) = e_k$, on a $L_k(a_i) = 0$ si $i \neq k$ et $L_k(a_k) = 1$.
Ainsi $a_0, \ldots, \hat{a}_k, \ldots, a_n$ sont racines distinctes de L_k et donc $\prod_{i \neq k} (X - a_i) \mid L_k$.

Or $\deg \prod_{i\neq k}(X-a_i)=n$ et $\deg L_k\leqslant n$ donc on peut écrire $L_k=\lambda\prod_{i\neq k}(X-a_i)$ avec $\lambda\in\mathbb{K}$.

Sachant $L_k(a_k)=1$ on a $\lambda=\left(\prod_{i\neq k}(a_k-a_i)\right)^{-1}$ puis $L_k=\prod_{i\neq k}\frac{X-a_i}{a_k-a_i}$.

□

Définition

Les polynômes $L_0,\dots,L_n$ sont appelés polynômes interpolateurs de Lagrange en les $a_0,\dots,a_n$. Ils forment une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

2.5.5 Application : Hyperplan

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque.

Définition

On appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel de E de codimension 1.

Exemple En dimension finie $n\in\mathbb{N}^\star$, les hyperplans sont les sous-espaces vectoriels de dimension $n-1$.

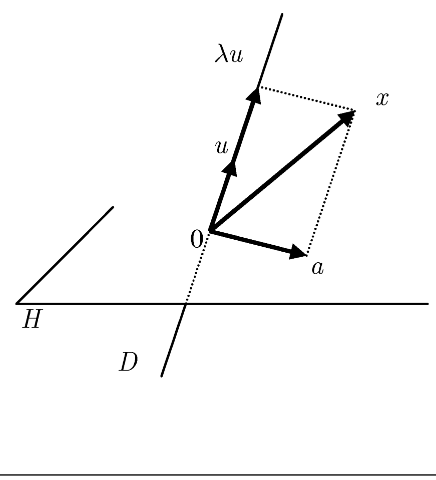
Théorème

Les hyperplans sont les noyaux des formes linéaires non nulles.

dém. :
Soit $\varphi\in E^\star$, $\varphi\neq 0$.
On a Im$\varphi\subset\mathbb{K}$ donc rg$\varphi\leqslant 1$.
Si rg$\varphi=0$ alors $\varphi=0$ ce qui est exclu.
Par suite rg$\varphi=1$ et par le théorème du rang, on obtient $\ker\varphi$ est de codimension 1.
Inversement, soit H est un hyperplan, $D=$ Vect(u) une droite vectorielle supplémentaire de H.

$$\forall x\in E,\exists!(a,\lambda)\in H\times\mathbb{K},x=a+\lambda u$$

Considérons l'application $\varphi : x\mapsto\lambda$.
φ est une forme linéaire non nulle de noyau H.
□



Exemple $H = \left\{ f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C}) / \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ est un hyperplan de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$.

Définition

Si un hyperplan H noyau d'une forme linéaire non nulle φ, on dit que l'équation $\varphi(x) = 0$ définit l'hyperplan H.

Proposition

Si H est un hyperplan et si $u \notin H$ alors H et $D = \text{Vect}(u)$ sont supplémentaires dans E.

dém. :
$H \cap \text{Vect}u = \{0\}$ car $u \notin H$
Soit φ une forme linéaire non nulle de noyau H. On a $\varphi(u) \neq 0$.
Soit $x \in E$ et $\lambda = \varphi(x)/\varphi(u)$. On a $\varphi(\lambda u) = \varphi(x)$ donc $x - \lambda u \in H$. Ainsi $x \in H + \text{Vect}u$.
Finalement H et Vect$u$ sont supplémentaires.
□

Proposition

Si ψ est une forme linéaire s'annulant sur un hyperplan $H : \varphi(x) = 0$ (avec φ forme linéaire non nulle) alors ψ est colinéaire à φ.

dém. :
Introduisons $u \notin H$ et posons $\alpha = \psi(u)/\varphi(u)$ de sorte que $\psi(u) = \alpha\varphi(u)$.
Pour tout $x \in \text{Vect}u$, $\psi(x) = \alpha\varphi(x)$ et pour tout $x \in H$, $\psi(x) = 0 = \alpha\varphi(x)$.
Puisque les applications linéaires ψ et $\alpha\varphi$ coïncident sur deux sous-espaces vectoriels supplémentaires, elles sont égales.
□

Remarque Si deux formes linéaires non nulles définissent le même hyperplan, elles sont colinéaires.

2.6 Dualité en dimension finie

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$.

2.6.1 Base duale

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

$$\forall x \in E, \exists!(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n, x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, posons $\varphi_i(x) = x_i$ ce qui définit $\varphi_i : E \to \mathbb{K}$ forme linéaire.

Définition

Les formes linéaires $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont appelées formes linéaires coordonnées (ou composantes) associées à la base $\mathcal{B}$. Il est d'usage de noter $e_i^\star$ au lieu de φ_i.

Exemple $\forall x \in E$, $x = e_1^\star(x)e_1 + \cdots + e_n^\star(x)e_n$.

Exemple $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $e_i^\star(e_j) = \delta_{i,j}$.

Théorème

La famille $\mathcal{B}^\star = (e_1^\star, \dots, e_n^\star)$ est une base de $E^\star$ appelée base duale de $\mathcal{B}$.

dém. :
$\dim E^\star = \dim E = n$
$\mathcal{B}^\star = (e_1^\star, \dots, e_n^\star)$ est formée de $n = \dim E^\star$ éléments de $E^\star$.
Supposons $\lambda_1 e_1^\star + \cdots + \lambda_n e_n^\star = 0$.
Pour tout $x \in E$, $\lambda_1 e_1^\star(x) + \cdots + \lambda_n e_n^\star(x) = 0$.
En $x = e_i$, on obtient $\lambda_i = 0$.
Ainsi la famille $\mathcal{B}^\star$ est libre et c'est donc une base de $E^\star$.
□

Corollaire

$\forall \varphi \in E^\star, \exists!(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n, \varphi = a_1 e_1^\star + \cdots + a_n e_n^\star$.

Remarque Si l'on note $x_1, \dots, x_n$ les coordonnées dans $\mathcal{B}$ d'un vecteur générique $x \in E$ alors les formes linéaires sur E sont les applications de la forme

$$\varphi : x \mapsto a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$$

Les hyperplans sur E sont alors définis par des équations de la forme

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$$

avec $(a_1, \dots, a_n) \neq 0$.

2.6.2 Base antéduale

Lemme

Soit $x \in E$.

$$\forall \varphi \in E^\star, \varphi(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$$

dém. :
Par contraposée, supposons $x \neq 0_E$. La famille libre (x) peut être complétée en une base $\mathcal{B}$ et l'application $\varphi = x^\star$ de la base duale $\mathcal{B}^\star$ vérifie $\varphi(x) = 1 \neq 0$.
□

Théorème

Si $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base de $E^\star$, il existe une unique base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{B}^\star = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.
Cette base $\mathcal{B}$ est appelée base antéduale (ou préduale) de $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

dém. :
Considérons l'application $\phi : E \to \mathbb{K}^n$ définie par $\phi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$.
ϕ est linéaire.
$\dim E = n = \dim \mathbb{K}^n < +\infty$.
Si $\phi(x) = 0$ alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\varphi_i(x) = 0$ donc, puisque la famille $\mathcal{L}$ est génératrice, pour tout $\varphi \in E^\star$, $\varphi(x) = 0$. En vertu du lemme, on peut affirmer $x = 0$.
L'application linéaire φ est injective et par le théorème d'isomorphisme, c'est un isomorphisme.
Introduisons $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
Unicité :

Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base vérifiant $\mathcal{L} = \mathcal{B}^\star$ alors $\varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$ et donc $\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \phi(e_j) = \varepsilon_j$.
Par suite $e_j = \phi^{-1}(\varepsilon_j)$ ce qui détermine $\mathcal{B}$ de façon unique.
Existence :
Posons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ avec pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $e_i = \phi^{-1}(\varepsilon_i)$.
$\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E. On peut introduire sa base duale $\mathcal{B}^\star = (e_1^\star, \ldots, e_n^\star)$.
Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\phi(e_j) = \varepsilon_j$ donc $\varphi_i(e_j) = \delta_{i,j} = e_i^\star(e_j)$.
Les applications linéaires φ_i et $e_i^\star$ coïncident sur une base, elles sont donc égales.
□

2.6.3 Application : définition d'un sous-espace vectoriel par système d'équations

Lemme

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension p de E alors l'ensemble F° constitué des formes linéaires de E s'annulant sur F est un sous-espace vectoriel de dimension $q = n - p$.

dém. :
Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F complétée en $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E.
Soit $\mathcal{B}^\star = (e_1^\star, \ldots, e_n^\star)$ la base duale de $\mathcal{B}$.
Soit $\varphi \in E^\star$, on peut écrire $\varphi = a_1 e_1^\star + \cdots + a_n e_n^\star$.

$$\varphi \in F^\circ \Leftrightarrow \forall 1 \leqslant j \leqslant p, \varphi(e_j) = 0$$

donc

$$\varphi \in F^\circ \Leftrightarrow \forall 1 \leqslant j \leqslant p, a_j = 0$$

Ainsi $F^\circ = \text{Vect}(e_{p+1}^\star, \ldots, e_n^\star)$ est un sous-espace vectoriel de dimension $q = n - p$.
□

Lemme

Si $(\varphi_1, \ldots, \varphi_q)$ est une famille libre de formes linéaires alors $F = \{x \in E / \forall 1 \leqslant k \leqslant q, \varphi_k(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de dimension $p = n - q$.

dém. :
Complétons la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_q)$ en une base de $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ de $E^\star$ de base antéduale $(e_1, \ldots, e_n)$.
Soit $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \in E$.

$$x \in F \Leftrightarrow \varphi_1(x) = \ldots = \varphi_q(x) = 0$$

donc $F = \text{Vect}(e_{q+1}, \ldots, e_n)$ est un sous-espace vectoriel de dimension $p = n - q$.
□

Théorème

Les sous-espaces vectoriels de dimension p de E correspondent aux ensembles solutions des systèmes

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 0 \\ \ldots \\ \varphi_q(x) = 0 \end{cases}$$

avec $q = n - p$ et $\varphi_1, \ldots, \varphi_q$ des formes linéaires indépendantes.

dém. :
Les ensembles solutions des systèmes proposés sont des sous-espaces vectoriels de dimension p.
Inversement, si F est un sous-espace vectoriel de dimension p alors en introduisant $(\varphi_1, \ldots, \varphi_q)$ une

base de F° l'ensemble G des solutions du système formé est un sous-espace vectoriel de dimension p contenant F, c'est donc F.
□

Exemple Dans $\mathbb{R}^4$.
Notons $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.
Le système
$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$
définit un sous-espace vectoriel de dimension $4 - 2 = 2$.

Corollaire

Si F est le sous-espace vectoriel solution du système

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 0 \\ \dots \\ \varphi_q(x) = 0 \end{cases}$$

avec $\varphi_1, \dots, \varphi_q$ formes linéaires indépendantes alors

$$F^\circ = \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_q)$$

dém. :
On a $\text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_q) \subset F^\circ$ et il y a égalité des dimensions.
□

2.7 Structure d'algèbre

2.7.1 Définition

Définition

On appelle $\mathbb{K}$-algèbre tout quadruplet $(A, +, \times, .)$ formé d'un ensemble A, de deux lois de composition interne $+, \times$ sur A et d'un produit extérieur opérant de $\mathbb{K}$ sur A vérifiant :
(1) $(A, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ;
(2) $(A, +, \times)$ est un anneau ;
(3) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in A$, $(\lambda.x)y = \lambda.(xy) = x(\lambda.y)$.

Exemple $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ sont des $\mathbb{K}$-algèbres commutatives.

Exemple $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{L}(E)$ sont des $\mathbb{K}$-algèbres.

Remarque Si $\mathbb{L}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}$ alors toute $\mathbb{K}$-algèbre est aussi par restriction une $\mathbb{L}$-algèbre.

Exemple $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{C}$-algèbre mais aussi une $\mathbb{R}$-algèbre.

2.7.2 Sous-algèbre

Définition

On appelle sous-algèbre d'une $\mathbb{K}$-algèbre A toute partie B de A vérifiant :
1) $1_A \in B$;
2) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x, y \in B, \lambda x + \mu y \in B$;
3) $\forall x, y \in B, xy \in B$.

Remarque sous-algèbre = sous-espace vectoriel + sous-anneau.

Exemple $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.
$\mathcal{C} = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/(u_n) \text{ converge}\right\}$ est une sous-algèbre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
$\mathcal{C}_0 = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/u_n \to 0\right\}$ n'est pas une sous-algèbre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ car ne contient par la suite $(1)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
L'ensemble $\mathcal{C} = \{v \in \mathcal{L}(E)/u \circ v = v \circ u\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

Théorème

Une sous-algèbre est une $\mathbb{K}$-algèbre pour les lois restreintes possédant les mêmes neutres.

dém. :
C'est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau et la propriété calculatoire 3) est évidemment conservée.
□

Exemple Soient I un intervalle, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$
$\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre car sous-algèbre de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

2.7.3 Morphisme d'algèbres

Définition

Soient A et B deux $\mathbb{K}$-algèbres. On appelle morphisme d'algèbres de A vers B toute application $\varphi : A \to B$ vérifiant :
1) $\varphi(1_A) = 1_B$;
2) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x, y \in A, \varphi(\lambda x + \mu y) = \varphi(x) + \varphi(y)$;
3) $\forall x, y \in A$, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.
On parle encore d'isomorphisme, endomorphisme et d'automorphisme d'algèbres.

Remarque morphisme d'algèbre = application linéaire + morphisme d'anneaux.

Exemple L'application $z \in \mathbb{C} \mapsto \bar{z}$ est un automorphisme de la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{C}$.

Exemple Pour $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est un automorphisme de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2.7.4 Exemple : algèbre des fonctions polynomiales en n variables

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Ici $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition

On appelle fonction monôme (unitaire) sur $\mathbb{K}^n$ toute application de $\mathbb{K}^n$ vers $\mathbb{K}$ de la forme :

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{N}$.

Définition

On appelle fonction polynôme sur $\mathbb{K}^n$ toute combinaison linéaire de fonctions monômes sur $\mathbb{K}^n$.
On note $\mathcal{P}(\mathbb{K}^n)$ l'ensemble de ces fonctions.

Exemple $p : (x, y) \mapsto 1 + 2y - xy + x^2y$ est une fonction polynôme sur $\mathbb{K}^2$.

Remarque L'écriture générale d'une fonction polynôme sur $\mathbb{K}^n$ est de la forme :

$$p : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n} \lambda_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

avec $(\lambda_{\alpha_1,\dots,\alpha_n})$ famille de scalaires à support fini.

Théorème

$\mathcal{P}(\mathbb{K}^n)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$.
De plus la famille des fonctions monômes $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ avec $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ en est une base.

dém. :
$\mathcal{P}(\mathbb{K}^n) \subset \mathcal{F}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$, $\tilde{1} \in \mathcal{P}(\mathbb{K}^n)$, $\mathcal{P}(\mathbb{K}^n)$ est l'espace vectoriel engendré par les fonctions monômes et enfin $\mathcal{P}(\mathbb{K}^n)$ est stable par produit car le produit de deux fonctions monômes est une fonction monôme.
Ainsi $\mathcal{P}(\mathbb{K}^n)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$.
Par définition, la famille des fonctions monômes est génératrice. Montrons sa liberté en raisonnant par récurrence sur $n \geqslant 1$.
Pour $n = 1$: ok.
Supposons la propriété de liberté établie au rang $n \geqslant 1$.
Soit $(\lambda_{\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_{n+1}})$ une famille de scalaires à support fini.
Supposons

$$\sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_{n+1})\in\mathbb{N}^{n+1}} \lambda_{\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_{n+1}} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} x_{n+1}^{\alpha_{n+1}} = 0$$

pour tout $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$.
On a alors

$$\sum_{\alpha_{n+1}\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{N}} \lambda_{\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_{n+1}} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \Big) x_{n+1}^{\alpha_{n+1}} = 0$$

pour tout $x_{n+1} \in \mathbb{K}$.
Par liberté des fonctions $x_{n+1} \mapsto x_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$, on obtient pour tout α_{n+1} :

$$\sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{N}} \lambda_{\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_{n+1}} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} = 0$$

Or ceci vaut pour tout $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ donc par hypothèse de récurrence, on a $\lambda_{\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}} = 0$ pour tout $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$.
Récurrence établie.
□

Corollaire

La description d'une fonction polynôme sur $\mathbb{K}^n$ comme combinaison linéaire de monômes est unique. Cela permet par exemple de définir le degré d'une fonction polynôme.

2.8 Sous-espace affine

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2.8.1 Définition

Définition

On appelle sous-espace affine passant $a \in E$ et dirigé par F sous-espace vectoriel E l'ensemble

$$V = a + F = \{a + x / x \in F\}$$

Exemple Géométriquement les sous-espaces affines se visualisent comme étant des points, des droites ou des plans ne passant pas nécessairement par $\vec{o}$.

Proposition

Soient $V = a + F$ un sous-espace affine et b un vecteur

$$b \in V \Leftrightarrow b - a \in F$$

De plus, si tel est le cas,

$$V = b + F$$

dém. :
Si $b \in V$ alors on peut écrire $b = a + u$ avec $u \in F$ donc $b - a = u \in F$.
Si $b - a \in F$ alors $b = a + (b - a) \in a + F$.
De plus, si $b \in V$ alors pour tout $u \in F$, $b + u = a + (b - a + u) \in a + F$. Ainsi $b + F \subset a + F$ et de façon semblable $a + F \subset b + F$ puis $=$.
□

Proposition

L'intersection de deux sous-espaces affines V et W de directions F et G est soit vide, soit égal à un sous-espace affine de direction $F \cap G$.

dém. :
Supposons $V \cap W \neq \emptyset$. Considérons $a \in V \cap W$. On a $V = a + F$ et $W = a + G$.
Par suite, pour $x \in E$, $x \in V \cap W \Leftrightarrow x - a \in F \cap G$ et ainsi $V \cap W = a + F \cap G$.
□

Proposition

Si $f \in \mathcal{L}(E, E')$ et si V est un sous-espace affine de E de direction F alors $f(V)$ est un sous-espace affine de E' de direction $f(F)$.

dém. :
Soit $a \in V$. On peut écrire $V = a + F$ et alors $f(V) = f(a) + f(F)$ est un sous-espace affine de direction $f(F)$.
□

Proposition

Si $f \in \mathcal{L}(E, E')$ et si V' est un sous-espace vectoriel de E' de direction F' alors $f^{-1}(V')$ est soit vide, soit égal à un sous-espace affine de E de direction $f^{-1}(F')$.

dém. :
Si $f^{-1}(V') \neq \emptyset$, on peut introduire $a \in f^{-1}(V')$. On a alors $f(a) \in V'$ et donc $V' = f(a) + F'$. Par suite, pour $x \in E$, $x \in f^{-1}(V') \Leftrightarrow f(x - a) \in F'$. Ainsi $f^{-1}(V') = a + f^{-1}(F')$ est un sous-espace affine de direction $f^{-1}(H)$.
□

2.8.2 Equation linéaire

On considère l'équation $f(x) = y$ avec $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $y \in F$ et d'inconnue $x \in E$.
Si $y \notin \mathrm{Im} f$: l'équation n'est pas compatible.
Si $y \in \mathrm{Im} f$, l'ensemble des solutions est un sous-espace affine de direction $\ker f$.
Protocole de résolution d'une équation linéaire compatible
- on résout l'équation homogène (ce qui détermine $\ker f$) ;
- on détermine une solution particulière ;
- on exprime la solution générale comme somme de la solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.

Chapitre 3

Matrices et déterminants

$\mathbb{K}$ désigne un corps : $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$,...

3.1 Calcul matriciel

3.1.1 Matrice rectangle

Définition

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de type (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ i.e. l'ensemble des familles $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ d'éléments de $\mathbb{K}$. Une telle matrice est généralement figurée par un tableau

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Exemple On note

$$E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

appelée matrice élémentaire d'indice (i,j) de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Théorème

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension np et d'élément nul $O_{n,p}$.
La famille des matrices élémentaires $(E_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition

Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{j,k}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on pose $AB = (c_{i,k}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ avec

$$c_{i,k} \underset{\text{déf}}{=} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} b_{j,k}$$

Exemple Pour $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $E_{k,\ell} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
Si $j \neq k$ alors $E_{i,j} \times E_{k,\ell} = O_{n,q}$.
Si $j = k$ alors $E_{i,j}E_{k,\ell} = E_{i,\ell} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$.
On retient $E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$.

Définition

Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on pose ${}^tA = (a'_{j,i}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ avec

$$a'_{j,i} \underset{\text{déf}}{=} a_{i,j}$$

Remarque Si $A = (a_{i,j})_{i,j}$ alors ${}^tA = (a_{i,j})_{j,i}$.

Proposition

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), {}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^tA + \mu {}^tB$
$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), {}^t(AB) = {}^tB{}^tA$.
$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), {}^t\left({}^tA\right) = A$

3.1.2 Matrice carrée

Définition

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n.

Théorème

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension n^2 de neutres O_n et I_n.
Celle-ci est non commutative dès que $n \geqslant 2$.

Exemple L'ensemble $D_n(\mathbb{K})$ formé des matrices diagonales est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On observe

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$

Exemple L'ensemble $T_n^+(\mathbb{K})$ formé des matrices triangulaires supérieures est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On observe

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & & \star' \\ & \ddots & \\ (0) & & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & \star'' \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$

Proposition

Les matrices commutant avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les matrices scalaires i.e. les matrices λI_n avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

dém. :
Les matrices scalaires commutent avec toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Inversement, soit $A = (a_{i,j})$ une matrice commutant avec tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AM = MA$$

Pour $M = E_{i,j}$ avec $i \neq j$, on a $E_{i,j}A = AE_{i,j}$.
Or $[E_{i,j}A]_{i,j} = a_{i,i}$ et $[AE_{i,j}]_{i,j} = a_{j,j}$ donc $a_{i,i} = a_{j,j}$.
Aussi $[E_{i,j}A]_{i,i} = a_{j,i}$ et $[AE_{i,j}]_{i,i} = 0$ donc $a_{j,i} = 0$.
Ainsi, la matrice A est diagonale de diagonale constante.
□

3.1.3 Noyau, image et rang d'une matrice

Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on introduit l'application linéaire $\varphi_A : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mapsto \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ définie par

$$\varphi_A(X) = AX$$

Définition

On pose
$\ker A = \ker \varphi_A = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) / AX = 0\}$,
ImA = Im$\varphi_A = \{Y = AX / X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}$
et rg$A = \dim \mathrm{Im} A$.

Proposition

Si $C_1, \dots, C_p$ désignent les colonnes de A alors

$$\mathrm{Im}A = \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p) \text{ et } \mathrm{rg}A = \mathrm{rg}(C_1, \dots, C_p)$$

dém. :
Notons $(E_1, \dots, E_p)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

$$\mathrm{Im}A = \mathrm{Im}\varphi_A = \varphi_A(\mathrm{Vect}(E_1, \dots, E_p)) = \mathrm{Vect}(\varphi_A(E_1), \dots, \varphi_A(E_p))$$

donc

$$\mathrm{Im}A = \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p)$$

car $AE_j = C_j$.
□

Proposition

$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \mathrm{rg}(A) \leqslant \min(n, p)$,
$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \mathrm{rg}(AB) \leqslant \min(\mathrm{rg}A, \mathrm{rg}B)$.

dém. :
$\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}\varphi_A \leqslant \min(\dim \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})) = \min(p, n)$.
On vérifie aisément $\varphi_{AB} = \varphi_A \circ \varphi_B$.
$\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(\varphi_A \circ \varphi_B) \leqslant \min(\mathrm{rg}\varphi_A, \mathrm{rg}\varphi_B) = \min(\mathrm{rg}A, \mathrm{rg}B)$.
□

Théorème

On a la formule du rang
$$\text{rg}A + \dim\ker A = p$$

Exemple Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

On a
$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_3 = -x_1 \end{cases}$$

Donc
$$\ker A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} / x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Par la formule du rang $\text{rg}A = 2$.
Puisque les colonnes
$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = AE_1, C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = AE_2$$
appartiennent à l'image de A et puisque celle-ci sont indépendantes $\text{Im}A = \text{Vect}(C_1, C_2)$.

Remarque Il est très courant d'identifier $\mathbb{K}^p$ et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ via l'isomorphisme
$$\begin{cases} \mathbb{K}^p \to \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \\ (x_1, \ldots, x_p) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \end{cases}$$

Par cette identification φ_A se comprend comme étant l'application linéaire
$$\begin{cases} \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n \\ x \mapsto y = Ax \end{cases}$$

On a alors
$$\ker A = \{x \in \mathbb{K}^p / Ax = 0\} \text{ et } \text{Im}A = \{y = Ax / x \in \mathbb{K}^p\}$$

3.1.4 Matrices inversibles

Définition

On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$AB = BA = I_n$$

Cette matrice B est unique, on l'appelle inverse de A et on la note A^{-1}.

Exemple Une matrice triangulaire supérieure est inversible si, et seulement si, ses coefficients diagonaux sont non nuls et alors

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \star \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_1 & & \star \\ & \ddots & \\ (0) & & 1/a_n \end{pmatrix}$$

Théorème

L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un groupe multiplicatif de neutre I_n.

dém. :
C'est le groupe des inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
□

Attention : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Proposition

On ne modifie pas le rang d'une matrice en la multipliant par une matrice inversible.

dém. :
Soient $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On a $\mathrm{rg}(PA) \leqslant A$ et $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}(P^{-1}PA) \leqslant \mathrm{rg}(PA)$ puis $=$.
□

Théorème

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a équivalence entre :
(i) A est inversible ;
(ii) $\ker A = \{0\}$;
(iii) $\mathrm{Im}A = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$;
(iv) $\mathrm{rg}A = n$;
(v) $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = I_n$;
(vi) $\exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), CA = I_n$.
De plus si tel est le cas $B = C = A^{-1}$.

dém. :
(i) $\Leftrightarrow$ (iv) est connu et le reste est alors immédiat.
□

Exemple Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A + B = AB$.
Montrons $AB = BA$.

On a $(I_n - A)(I_n - B) = I_n - (A + B) + AB = I_n$ donc $I_n - A$ est inversible d'inverse $I_n - B$.
Par suite $(I_n - B)(I_n - A) = I_n$ donc $BA = A + B = AB$.

3.1.5 Calcul par blocs

Définition

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{K})$.
On note :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} & b_{1,1} & \cdots & b_{1,q} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} & b_{n,1} & \cdots & b_{n,q} \\ c_{1,1} & \cdots & c_{1,p} & d_{1,1} & \cdots & d_{1,q} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m,1} & \cdots & c_{m,p} & d_{m,1} & \cdots & d_{m,q} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+m,p+q}(\mathbb{K})$$

Exemple ${}^t\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ {}^tB & {}^tD \end{pmatrix}$.

Théorème

Sous réserve de compatibilité des types matriciels

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + A' & B + B' \\ C + C' & D + D' \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$

Exemple Soit

$$A = \begin{pmatrix} O_n & -I_n \\ I_n & O_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} -I_n & O_n \\ O_n & -I_n \end{pmatrix} = -I_{2n}$$

Exemple Soit

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ O_n & A \end{pmatrix} \text{ avec } A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

On a

$$M^2 = \begin{pmatrix} A^2 & AB + BA \\ O_n & A^2 \end{pmatrix}$$

Si l'on sait $AB = BA$, on simplifie

$$M^2 = \begin{pmatrix} A^2 & 2AB \\ O_n & A^2 \end{pmatrix}$$

Par récurrence, on montre

$$\forall k \in \mathbb{N}^\star, M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ O_n & A^k \end{pmatrix}$$

Exemple Si P et Q sont inversibles alors

$$M = \begin{pmatrix} P & A \\ O & Q \end{pmatrix}$$

est inversible et

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & \star \\ O & Q^{-1} \end{pmatrix}$$

En effet, il suffit de prendre $\star = -P^{-1}AQ^{-1}$

On peut généraliser la notion et parler de décompositions en $N \times P$ blocs :

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,P} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{N,1} & \cdots & A_{N,P} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

avec $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i,p_j}(\mathbb{K})$, $n = \sum_{i=1}^N n_i$ et $p = \sum_{j=1}^P p_j$.
On peut alors opérer sur ces décomposition par blocs sous réserve de compatibilité des types.

Exemple Soit

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ avec } A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Pour

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \text{ avec } X_1, X_2 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

on a

$$MX = \begin{pmatrix} AX_1 + BX_2 \\ CX_1 + DX_2 \end{pmatrix}$$

Exemple Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
On peut écrire $B = (C_1 \mid \ldots \mid C_q)$ avec $C_1, \ldots, C_q$ les colonnes de B et alors

$$AB = (AC_1 \mid \ldots \mid AC_q)$$

On peut aussi écrire

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$$

avec $L_1,\dots,L_n$ les lignes de A et alors

$$AB = \begin{pmatrix} L_1B \\ \vdots \\ L_nB \end{pmatrix}$$

Enfin, on a encore

$$AB = \begin{pmatrix} L_1C_1 & \cdots & L_1C_q \\ \vdots & & \vdots \\ L_nC_1 & \cdots & L_nC_q \end{pmatrix}$$

et on retrouve derrière cette expression la démarche du produit matricielle qui calcule le coefficient d'indice (i,j) de la matrice AB en faisant le produit de la i-ème ligne de A par la j-ème colonne de B.

3.2 Représentations matricielles

3.2.1 Matrice des coordonnées d'un vecteur

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
On considère une base $e = (e_1,\dots,e_n)$ de E. On a

$$\forall x \in E, \exists!(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \lambda_1.x_1 + \cdots + \lambda_n.x_n$$

Définition

On note

$$\mathrm{Mat}_e(x) \underset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

la matrice des coordonnées de x dans la base e.

Exemple $\mathrm{Mat}_e(e_i) = \begin{pmatrix} (0) \\ 1 \\ (0) \end{pmatrix} = E_i$

Théorème

L'application $x \mapsto \mathrm{Mat}_e(x)$ est un isomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vers $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Définition

Soit $x_1,\dots,x_p \in E$. On note

$$\mathrm{Mat}_e(x_1,\dots,x_p) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

la matrice dont les colonnes sont

$$\mathrm{Mat}_e x_1,\dots,\mathrm{Mat}_e x_p$$

Exemple $\text{Mat}_e e = (E_1 \mid \dots \mid E_n) = I_n$.

Proposition

Si $A = \text{Mat}_\mathcal{B}(x_1, \dots, x_p)$ alors $\text{rg}A = \text{rg}(x_1, \dots, x_p)$.

dém. :
Notons φ l'isomorphisme $x \in E \mapsto \text{Mat}_e(x)$.
Les colonnes $C_1, \dots, C_p$ de A sont données pas $C_j = \varphi(x_j)$.

$$\text{rg}A = \text{rg}(C_1, \dots, C_p) = \dim \text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$$

donc

$$\text{rg}A = \dim \text{Vect}(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_p)) = \dim \varphi(\text{Vect}(x_1, \dots, x_p))$$

Mais l'application φ est un isomorphisme donc

$$\text{rg}A = \dim \varphi(\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)) = \dim \text{Vect}(x_1, \dots, x_p) = \text{rg}(x_1, \dots, x_p)$$

□

Exemple Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \dots, C_p \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Soit $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour $1 \leqslant j \leqslant p$,

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} = a_{1,j}E_1 + \dots + a_{n,j}E_n$$

donc $\text{Mat}_{(E_1,\dots,E_n)}(C_j) = C_j$
Par suite

$$\text{Mat}_{(E_1,\dots,E_n)}(C_1, \dots, C_p) = A$$

Exemple Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de lignes $L_1, \dots, L_n \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$.
Soit $(E_1, \dots, E_p)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \dots, E_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$L_i = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_p \end{pmatrix} = x_1E_1 + \dots + x_pE_p$$

donc $\text{Mat}_{(E_1,\dots,E_p)}L_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = {}^tL_i$.

Par suite

$$\text{Mat}_{(E_1,\dots,E_p)}(L_1, \dots, L_n) = {}^tA$$

3.2.2 Matrice d'une application linéaire

Soient E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions p et n.
On considères deux $e = (e_1, \ldots, e_p)$ et $f = (f_1, \ldots, f_n)$ des espaces E et F.

Définition

Pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on note

$$\text{Mat}_{e,f}(u) \underset{\text{déf}}{=} \text{Mat}_f\,(u(e_1), \ldots, u(e_p)) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

la matrice de l'application linéaire u relative aux base e et f.

Exemple Soient $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.
Considérons l'application linéaire $\varphi : \mathbb{K}_n\,[X] \to \mathbb{K}^{n+1}$ définie par

$$\varphi(P) = (P(a_0), \ldots, P(a_n))$$

Soient $(1, X, \ldots, X^n)$ et $c = (c_0, \ldots, c_n)$ les bases canoniques de $\mathbb{K}_n\,[X]$ et $\mathbb{K}^{n+1}$.
Formons

$$A = \text{Mat}_{(1,X,\ldots,X^n),c}(\varphi)$$

On a $\varphi(X^k) = \left(a_0^k, \ldots, a_n^k\right)$ donc

$$\text{Mat}_c(\varphi(X^k)) = \begin{pmatrix} a_0^k \\ \vdots \\ a_n^k \end{pmatrix}$$

et alors

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

Soit $(L_0, \ldots, L_n)$ la base de $\mathbb{K}_n\,[X]$ formée des polynômes d'interpolation de Lagrange en $a_0, \ldots, a_n$.
Puisque $\varphi(L_k) = c_k$, la matrice de φ dans $(L_0, \ldots, L_n)$ et $\mathcal{C}$ est I_{n+1}.

Théorème

Pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$ on a est l'unique matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ vérifiant

$$\forall x \in E, \forall y \in F, y = u(x) \Leftrightarrow Y = AX$$

avec $A = \text{Mat}_{e,f}(u)$ $X = \text{Mat}_e(x)$ et $Y = \text{Mat}_f(y)$.

Théorème

L'application $u \in \mathcal{L}(E, F) \mapsto \text{Mat}_{e,f}(u) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

3.2.3 Matrice d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
On considère $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Définition

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on note
$$\text{Mat}_e(u) \underset{\text{déf}}{=} \text{Mat}_{e,e}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$
la matrice de l'endomorphisme u dans la base e.

Exemple $\text{Mat}_e(\text{Id}_E) = I_n$.

Théorème

L'application $u \in \mathcal{L}(E) \mapsto \text{Mat}_e(u) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.

3.2.4 Transport du vectoriel au matriciel

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension p, n munis de bases e et f.

Vecteur	Matrice colonne
$x \in E$	$X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$
0	$O_{p,1}$
$\lambda x + \mu x'$	$\lambda X + \mu X'$
Application linéaire	Matrice rectangle
$u \in \mathcal{L}(E, F)$	$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
$\tilde{o}$	$O_{n,p}$
$y = u(x)$	$Y = AX$
$\lambda u + \mu v$	$\lambda A + \mu B$
$u \circ v$	AB
u isomorphisme, u^{-1}	A inversible, A^{-1}
Imu, $\ker u$ et rg$u$	ImA, $\ker A$ et rg$A$
Endomorphisme	Matrice carrée
$u \in \mathcal{L}(E)$	$A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$
Id_E	I_p
u^n	A^n
$u \in \text{GL}(E)$, u^{-1}	$A \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$, A^{-1}
$\det u$	$\det A$
Formes linéaires	Matrice ligne
$\varphi \in E^\star$	$L \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$
$y = \varphi(x) \in \mathbb{K}$	$(y) = LX$

3.2.5 Formules de changement de bases

3.2.5.1 Matrice de passage

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
On considère e et e' deux bases de E.

Définition

On appelle matrice de passage de e à e' la matrice
$$P_e^{e'} = \text{Mat}_e e' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Proposition

$P_e^{e'} = \text{Mat}_{e,e'}(\text{Id}_E) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\left(P_e^{e'}\right)^{-1} = P_{e'}^e$

3.2.5.2 Nouvelle coordonnées d'un vecteur

Théorème

Si P est la matrice de passage d'une base e à une base e' d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors

$$\forall x \in E, X = PX'$$

avec $X = \text{Mat}_e(x)$ et $X' = \text{Mat}_{e'}(x)$.

dém. :

$$\text{Mat}_e(x) = \text{Mat}_e\left(\text{Id}_E(x)\right) = \text{Mat}_{e',e}(\text{Id}_E) \times \text{Mat}_{e'}(x) = PX'$$

□

3.2.5.3 Nouvelle matrice d'une application linéaire

Théorème

Si P est la matrice de passage d'une base e à une base e' d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et si Q est la matrice de passage d'une base f à une base f' d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F alors

$$\forall u \in \mathcal{L}(E,F), A' = Q^{-1}AP$$

avec $A = \text{Mat}_{e,f}(u)$ et $A' = \text{Mat}_{e',f'}(u)$.

dém. :
Soient $x \in E$ et $y \in F$. On note

$$X = \text{Mat}_e(x),\ X' = \text{Mat}_{e'}(x),\ Y = \text{Mat}_f(y) \text{ et } Y' = \text{Mat}_{f'}(y)$$

On a $X = PX'$ et $Y = QY'$. Si $y = u(x)$ alors

$$Y = AX \text{ et } Y' = A'X'$$

donc $AX = QA'X'$ puis

$$AX = QA'P^{-1}X$$

Or ceci doit être valable pour toute colonne X donc

$$A = QA'P^{-1}$$

□

Corollaire

On a

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), A' = P^{-1}AP$$

avec $A = \text{Mat}_e(u)$, $A' = \text{Mat}_{e'}(u)$.

3.2.6 Matrices équivalentes

Définition

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est équivalente à une matrice $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ s'il existe $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$B = Q^{-1}AP$$

Exemple Les matrices d'une même application linéaire sont équivalentes.

Proposition

L'équivalence de matrice est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Théorème

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $r \in \mathbb{N}$ avec $0 \leqslant r \leqslant \min(n,p)$.

$$\mathrm{rg}A = r \Leftrightarrow A \text{ est équivalente à } J_r$$

avec

$$J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O_{r,p-r} \\ \hline O_{n-r,r} & O_{n-r,p-r} \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

dém. :
($\Leftarrow$) Car $\mathrm{rg}(J_r) = r$ et l'on ne modifie pas le rang en multipliant par des matrices inversibles.
($\Rightarrow$) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions p et n munis de bases e et f.
On considère $u \in \mathcal{L}(E,F)$ déterminée par

$$\mathrm{Mat}_{e,f}(u) = A$$

Si $r = \mathrm{rg}A$ alors $r = \mathrm{rg}u$ et donc $\dim\ker u = p - r$.
Soit G un supplémentaire de $\ker u$ dans E :

$$E = G \oplus \ker u$$

avec $\dim G = r$.
Soit une base $e' = (e'_1, \dots, e'_r, e'_{r+1}, \dots, e'_p)$ adaptée à la décomposition $E = G \oplus \ker u$.
L'application $u_{\restriction G} : G \to \mathrm{Im}u$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Posons

$$f'_1 = u(e'_1), \dots, f'_r = u(e'_r)$$

La famille $(f'_1, \dots, f'_r)$ est base de $\mathrm{Im}u$, on peut la compléter en une base $f' = (f'_1, \dots, f'_p)$ de F.
On obtient $\mathrm{Mat}_{e',f'}(u) = J_r$ donc A et J_r sont équivalentes car représentent la même application linéaire.
□

Corollaire

Deux matrices sont équivalentes si, et seulement si, elles ont le même rang.

Corollaire

$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}A$.
Ainsi $\mathrm{rg}A$ est le rang de la famille des colonnes de A mais aussi le rang de la famille de ses lignes.

dém. :
Si A est équivalente à J_r alors ${}^tA$ est équivalente à ${}^tJ_r$ qui est de rang r.
□

3.2.7 Matrices semblables

Définition

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$B = P^{-1}AP$$

Proposition

Ceci définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple Les matrices d'un même endomorphisme sont semblables.

Exemple Si A est semblable à une matrice scalaire λI_n alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}(\lambda I_n)P$ et donc $A = \lambda P^{-1}P = \lambda I_n$.

Proposition

Deux matrices semblables sont équivalentes et ont donc même rang.
La réciproque est fausse.

Protocole :
Pour montrer qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice B simple, il est fréquent de transposer le problème en termes vectoriels.
- on choisit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$;
- on introduit un endomorphisme u représenté par A dans $\mathcal{B}$,
- on détermine (souvent par analyse-synthèse) une nouvelle base de E dans laquelle u est représentée par B.

Exemple Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^{n-1} \neq O$ et $A^n = O$.
Montrons que A est semblable à

$$B = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$ et soit u l'endomorphisme de E représenté par A dans $\mathcal{B}$. On a $u^n = \tilde{0}$ et $u^{n-1} \neq \tilde{0}$.
Déterminons une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle f est représenté par B.
Analyse :
Supposons $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ convenable.
On a $u(\varepsilon_1) = \varepsilon_2, \ldots, u(\varepsilon_{n-1}) = \varepsilon_n$ et $u(\varepsilon_n) = 0$.

On en déduit $\varepsilon_2 = u(\varepsilon_1)$, $\varepsilon_3 = u^2(\varepsilon_1)$,..., $\varepsilon_n = u^{n-1}(\varepsilon_1)$.
Notons que la propriété $u(\varepsilon_n) = 0$ sera obtenue et que nécessairement $\varepsilon_1 \notin \ker u^{n-1}$ pour que $\varepsilon_n \neq 0$.
Synthèse :
Soit $\varepsilon_1 \notin \ker u^{n-1}$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_2 = u(\varepsilon_1)$, $\varepsilon_3 = u^2(\varepsilon_1)$,..., $\varepsilon_n = u^{n-1}(\varepsilon_1)$.
On a $u(\varepsilon_1) = \varepsilon_2, \dots, u(\varepsilon_{n-1}) = \varepsilon_n$ et $u(\varepsilon_n) = 0$.
Il reste à montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E.
Supposons $\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \cdots + \lambda_n\varepsilon_n = 0$.
On a $\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2 u(\varepsilon_1) + \cdots + \lambda_n u^{n-1}(\varepsilon_1) = 0$.
En appliquant f plusieurs fois, on obtient successivement
$\lambda_1 u(\varepsilon_1) + \cdots + \lambda_{n-1}u^{n-1}(\varepsilon_1) = 0$,..., $\lambda_1 u^{n-2}(\varepsilon_1) + \lambda_2 u^{n-1}(\varepsilon_1) = 0$ et $\lambda_1 u^{n-1}(\varepsilon_1) = 0$.
Or $u^{n-1}(\varepsilon_1) \neq 0$ donc on résout le système triangulaire formé pour obtenir $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.
Finalement $\mathcal{B}'$ est une famille libre formée de $n = \dim E$ vecteurs de E, c'est donc une base de E.

3.2.8 Traces

3.2.8.1 Trace d'une matrice carrée

Définition

On appelle trace d'une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le scalaire

$$\mathrm{tr}A = a_{1,1} + \cdots + a_{n,n}$$

Proposition

La trace définit une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

dém. :
$\mathrm{tr} = E_{1,1}^\star + \cdots + E_{n,n}^\star \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^\star \setminus \{\tilde{0}\}$.
□

Exemple L'ensemble des matrices de trace nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un hyperplan car noyau d'une forme linéaire non nulle.

Théorème

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}), \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$

dém. :
Introduisons les coefficients des matrices A et B : $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{j,i}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
Les matrices AB et BA sont carrées donc on peut calculer leur trace et on a

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} [AB]_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}b_{j,i}$$

et

$$\mathrm{tr}(BA) = \sum_{j=1}^{p} [BA]_{j,j} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} b_{j,i}a_{i,j}$$

En permutant les deux sommes, on obtient tr$(BA) = $ tr(AB).
□

Corollaire

Deux matrices semblables ont même trace.

dém. :
Si $B = P^{-1}AP$ alors tr$B = $ tr $\left(P^{-1}(AP)\right) = $ tr $\left((AP)P^{-1}\right) = $ tr$A$
□

3.2.8.2 Trace d'un endomorphisme

Définition

On appelle trace d'un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie la trace commune aux matrices représentant l'endomorphisme.

Exemple tr$(\mathrm{Id}_E) = n = \dim E$

Exemple Soit p une projection vectorielle d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
On sait

$$E = \mathrm{Im}p \oplus \ker p$$

Dans une base adaptée à cette décomposition, la matrice de p est de la forme

$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

avec $r = \dim \mathrm{Im}p = \mathrm{rg}p$. Par suite tr$p = \mathrm{rg}p$.

Théorème

La trace définit une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$ vérifiant

$$\forall u \in \mathcal{L}(E,F), \forall v \in \mathcal{L}(F,E), \mathrm{tr}(u \circ v) = \mathrm{tr}(v \circ u)$$

3.3 Algorithme du pivot de Gauss

3.3.1 Opérations élémentaires

3.3.1.1 Dilatation

Soient $i \in \{1,\dots,n\}$ et $\alpha \in \mathbb{K}^\star$.
On pose

$$D_i(\alpha) = \mathrm{diag}(1,\dots,\alpha,\dots 1) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$D_i(\alpha)$ est inversible et $D_i(\alpha)^{-1} = D_i(1/\alpha)$.

Théorème

$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $D_i(\alpha)A$ est obtenue par $L_i \leftarrow \alpha L_i$.
$\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $AD_i(\alpha)$ est obtenue par $C_i \leftarrow \alpha C_i$.

dém. :
Plus généralement étudions le produit matriciel par une matrice diagonale.
Pour $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $DA = (\lambda_i a_{i,j})$ et $AD = (\lambda_j a_{i,j})$.
□

3.3.1.2 Transvection

Soient $i \neq j \in \{1, \ldots, n\}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On pose
$$T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$
$T_{i,j}(\lambda)$ est inversible et $T_{i,j}(\lambda)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$.

Théorème

$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $T_{i,j}(\lambda)A$ est obtenue par $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.
$\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $AT_{i,j}(\lambda)$ est obtenue par $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$.

dém. :
Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $T_{i,j}(\lambda)A = A + \lambda E_{i,j}A$.
Or $E_{i,j}A$ est la matrice $\begin{pmatrix} & O & \\ a_{j,1} & \cdots & a_{j,p} \\ & O & \end{pmatrix}$ où la j-ème ligne de A figure en i-ème ligne.
□

3.3.1.3 Permutation

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
On pose
$$P(\sigma) = (\delta_{i,\sigma(j)}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Exemple $P(\text{Id}_{\mathbb{N}_n}) = (\delta_{i,j})_{i,j} = I_n$.

Exemple Pour $n = 4$ et $\sigma = (1\ 4\ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ on a
$$P(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Théorème

$$\forall \sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n, P(\sigma' \circ \sigma) = P(\sigma')P(\sigma)$$

dém. :
$[P(\sigma')P(\sigma)]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} [P(\sigma')]_{i,k} [P(\sigma)]_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma'(k)}\delta_{k,\sigma(j)} = \delta_{i,\sigma'\circ\sigma(j)}$.
□

Corollaire

$P(\sigma)$ est inversible et $P(\sigma)^{-1} = P(\sigma^{-1})$.

Théorème

$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice $P(\sigma)A$ est obtenue par $L_{\sigma(i)} \leftarrow L_i$.
$\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, la matrice $AP(\sigma)$ est obtenue par $C_j \leftarrow C_{\sigma(j)}$.

dém. :

$$[P(\sigma)A]_{\sigma(i),j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{\sigma(i),\sigma(k)} a_{k,j} = a_{i,j}.$$

□

3.3.2 Matrice échelonnée

Définition

Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est dite échelonnée de rang r si elle est de la forme

$$\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & p_1 & & & & & & & (\star) & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_2 & & & & & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \ddots & p_3 & & & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & 0 & \ddots & & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & p_r & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & (0)
\end{pmatrix}$$

avec $p_1, \ldots, p_r \neq 0$ (appelés pivots)

Exemple

$$\begin{pmatrix}
0 & p_1 & \star & \star & \star & \star \\
0 & 0 & 0 & p_2 & \star & \star \\
0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & \star \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \text{ avec } p_1, p_2, p_3 \neq 0$$

est une matrice échelonnée de rang 3

Proposition

Une telle matrice échelonnée de rang r est de rang r.

dém. :
Par opérations sur les colonnes, il est aisé de la transformer en J_r.
□

3.3.3 Algorithme du pivot de Gauss

Théorème

Par transvections sur les lignes, on peut transformer n'importe quelle matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ en une matrice échelonnée de rang $r = \text{rg}A$

dém. :
Si $A = O_{n,p}$: ok
Sinon, on considère l'indice j de la première colonne non nulle de la matrice A.

Si $a_{1,j} = 0$, on transforme ce coefficient en un coefficient non nul par une opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_i$ avec i choisi de sorte que $a_{i,j} \neq 0$. On parvient alors a

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & \cdots & 0 & p_1 & (\star) \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \alpha_2 & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & (\star) \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n & \end{array}\right) \text{ avec } p_1 \neq 0$$

On annule tous les coefficients en dessous de p_1 par l'opération $L_i \leftarrow L_i - \alpha_i/p_1 L_1$ et on parvient à

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & \cdots & 0 & p_1 & (\star) \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & A' \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

On reprend alors le processus précédent avec A'.
□

3.3.4 Applications : inversion d'une matrice

Proposition

On peut transformer $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ en I_n en opérant sur les lignes.

dém. :
Dans le cas où $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, l'algorithme du pivot de Gauss transforme A en

$$\begin{pmatrix} p_1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ & & p_n \end{pmatrix}$$

par transvections sur les lignes. Par dilatation des lignes on peut poursuivre la transformation en

$$\begin{pmatrix} 1 & & \star \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

puis en I_n par transvections sur les lignes de A.
□

Proposition

Les opérations sur les lignes qui transforment A en I_n transforment parallèlement I_n en A^{-1}.

dém. :
Notons $T_1, \ldots, T_m$ les matrices associées aux opérations sur les lignes transformant A en I_n.
On a $T_m \ldots T_1.A = I_n$ donc $T_m \ldots T_1.I_n = A^{-1}$.
□

Exemple On peut ainsi déterminer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ en transformant par opérations sur les lignes

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ en } \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

3.4 Déterminants

3.4.1 Définitions

3.4.1.1 Déterminant d'une matrice carrée

Définition

On appelle déterminant d'une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le scalaire :

$$\det A \underset{\text{déf}}{=} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$$

encore noté

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exemple Un déterminant d'ordre 0 vaut 1.

Exemple Un déterminant d'ordre 1 est égal à son coefficient.

Exemple Un déterminant d'ordre 2 se calcule par un produit en croix

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Exemple Un déterminant d'ordre 3 peut se calculer par la règle de Sarrus.

Exemple Si $A = (a_{i,j}) \in T_n^+(\mathbb{K})$ alors $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

En effet pour $i > j$, $a_{i,j} = 0$ donc $\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} = 0$ dès qu'il existe i vérifiant $\sigma(i) > i$.
En simplifiant les termes correspondants de la somme définissant le déterminant, il ne reste que les permutations σ vérifiant

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \sigma(i) \leqslant i$$

Or pour une telle permutation $\sigma(1) \leqslant 1$ donc $\sigma(1) = 1$ puis $\sigma(2) \leqslant 2$ donc $\sigma(2) = 2$ car σ est injective, etc. Au final $\sigma = \mathrm{Id}$ et il ne reste qu'un terme dans la somme donnant le déterminant de A d'où la formule.

Proposition

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \det\left({}^tA\right) = \det A$$

et donc

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

Théorème

Pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\det(AB) = \det A. \det B$$

De plus A est inversible si, et seulement si, $\det A \neq 0$ et alors $\det A^{-1} = 1/\det A$.

Attention : $\det(A+B) = ??$ et $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

Corollaire

$\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / \det A = 1\}$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ appelé groupe spécial linéaire d'ordre n.

dém. :
$\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est le noyau du morphisme de groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^\star$ qui envoie A sur $\det A$.
□

Corollaire

Deux matrices semblables ont même déterminant.

dém. :
Si $B = P^{-1}AP$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ alors $\det B = \det P^{-1} \det A \det P = \det A$.
□

3.4.1.2 Déterminant d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$.

Définition

On appelle déterminant de $u \in \mathcal{L}(E)$ la valeur commune des déterminants des matrices représentant l'endomorphisme u .

Exemple $\det(\mathrm{Id}_E) = \det(I_n) = 1$.

Théorème

Pour tout $u, v \in \mathcal{L}(E)$,

$$\det(u \circ v) = \det u \det v$$

De plus u est inversible si, et seulement si, $\det u \neq 0$ et alors $\det u^{-1} = 1/\det u$.

Corollaire

$\mathrm{SL}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) / \det u = 1\}$ est un sous groupe de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ appelé groupe spécial linéaire de E.

3.4.1.3 Déterminant d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$ muni d'une base $e = (e_1, \ldots, e_n)$.

Définition

On appelle déterminant dans la base e de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ de vecteurs de E le scalaire

$$\det_e(x_1, \ldots, x_n) \underset{\text{déf}}{=} \det \mathrm{Mat}_e(x_1, \ldots, x_n)$$

Exemple $\det_e e = \det \mathrm{Mat}_e e = \det I_n = 1$.

Proposition

Si $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ est une autre base de E alors

$$\det_e(x_1, \ldots, x_n) = \det_e e' \det_{e'}(x_1, \ldots, x_n)$$

dém. :
Soient P la matrice de passage de e à e' et $A = \mathrm{Mat}_e(x_1, \ldots, x_n)$, $A' = \mathrm{Mat}_{e'}(x_1, \ldots, x_n)$.
Notons $X_1, \ldots, X_n$ les colonnes de A et $X'_1, \ldots, X'_n$ celles de A'.
Par formule de changement de bases : $X_j = PX'_j$ donc $A = PA'$.
En effet

$$PA' = P\begin{pmatrix} X'_1 & \cdots & X'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PX'_1 & \cdots & PX'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & \cdots & X_n \end{pmatrix} = A$$

Par suite $\det A = \det P \det A'$ puis la relation proposée.
□

Théorème

L'application

$$\begin{aligned} E^n &\to \mathbb{K} \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto \det_e(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

est une forme n-linéaire alternée (donc antisymétrique)
De plus $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E si, et seulement si, $\det_e(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$.

Rappel :
Pour $\varphi : E^n \to F$ multilinéaire :
alternée signifie :

$$\exists i \neq j, x_i = x_j \Rightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0_F$$

antisymétrique signifie :

$$\varphi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Remarque Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
En introduisant $(E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ on sait

$$A = \mathrm{Mat}_{(E_1, \ldots, E_n)}(C_1, \ldots, C_n)$$

donc $\det A = \det\limits_{(E_1,\dots,E_n)}(C_1,\dots,C_n)$.
Ainsi le déterminant d'une matrice est une forme n-linéaire alternée de ses colonnes.
Par transposition, on peut aussi dire que le déterminant d'une matrice est une forme n-linéaire alternée de ses lignes.

Exemple Pour $n \geqslant 3$, calculons

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & & 0 & 1 \\ & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \\ (1) & & & 1 \end{vmatrix}_{[n]}$$

En décomposant la dernière colonne en somme de deux colonnes :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & & 0 & 1 \\ & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \\ (1) & & & 1 \end{vmatrix}_{[n]} = \begin{vmatrix} 1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ (1) & & & 1 \end{vmatrix}_{[n]} + \begin{vmatrix} 1 & & 0 & 1 \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ (1) & & & 0 \end{vmatrix} = 1 + 0$$

car le dernier déterminant présente deux lignes identiques.

3.4.2 Opérations élémentaires sur les déterminants

Théorème

Les transvections $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ et $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ne modifient pas le déterminant.
Les dilatations $C_i \leftarrow \alpha C_i$ et $L_i \leftarrow \alpha L_i$ multiplient par α le déterminant.
La permutation des lignes ou des colonnes d'une matrice selon une permutation σ multiplie le déterminant par $\varepsilon(\sigma)$.

dém. :
L'application $\det\limits_{(E_1,\dots,E_n)}$ étant une forme linéaire alternée et antisymétrique

$$\det_{(E_1,\dots,E_n)}(C_1,\dots,C_i+\lambda C_j,\dots,C_n) = \det_{(E_1,\dots,E_n)}(C_1,\dots,C_i,\dots,C_n) + \lambda \det_{\mathcal{B}_C}(C_1,\dots,C_j,\dots,C_n)$$

puis

$$\det_{(E_1,\dots,E_n)}(C_1,\dots,C_i+\lambda C_j,\dots,C_n) = \det_{(E_1,\dots,E_n)}(C_1,\dots,C_i,\dots,C_n)$$

car le déterminant multipliant λ possède deux colonnes identiques C_j étant positionné à l'indice j.

$$\det_{(E_1,\dots,E_n)}(C_1,\dots,\alpha C_i,\dots,C_n) = \alpha \det_{(E_1,\dots,E_n)}(C_1,\dots,C_i,\dots,C_n)$$

et

$$\det_{(E_1,\dots,E_n)}(C_{\sigma(1)},\dots,C_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \det_{(E_1,\dots,E_n)}(C_1,\dots,C_n)$$

On obtient les relations analogues sur les lignes.
□

Attention : L'opération $C_i \leftarrow C_j + \lambda C_i$ modifie le déterminant : c'est la combinaison de deux opérations élémentaires.

Attention : Les opérations élémentaires sont à réaliser successivement et non simultanément. Les opérations $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$ et $C_2 \leftarrow C_1 + C_2$ transforment $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et non en $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple Calculons

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix}$$

En retranchant à chaque ligne la précédente (en commençant par la dernière)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & 1 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Exemple Soient $a, b \in \mathbb{K}$, $n \geqslant 2$. Calculons

$$D_n = \begin{vmatrix} a & & b \\ & \ddots & \\ b & & a \end{vmatrix}_{[n]}$$

En ajoutant toutes les colonnes à la première

$$D_n = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & & (b) \\ \vdots & & \ddots & \\ a+(n-1)b & (b) & & a \end{vmatrix}$$

En retranchant la première ligne à chaque autre

$$D_n = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & (0) & & a-b \end{vmatrix}$$

Finalement

$$D_n = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$$

3.4.3 Développement d'un déterminant selon une rangée

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on appelle mineur d'indice (i, j) de A le scalaire

$$\Delta_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \hat{a}_{i,j} & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

et cofacteur d'indice (i, j) de A le scalaire

$$A_{i,j} = (-1)^{i+j} \times \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \hat{a}_{i,j} & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

Théorème

Développement de $\det A$ selon sa i-ème ligne :

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$$

Développement de $\det A$ selon sa j-ème colonne :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$$

Remarque Le signe de $(-1)^{i+j}$ est donné par

$$\begin{pmatrix} + & - & + & & (-1)^{n+1} \\ - & + & - & & \\ + & - & + & & \\ & & & \ddots & \\ (-1)^{n+1} & & & & + \end{pmatrix}$$

Exemple Pour $n \geqslant 2$, calculons

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & (0) \\ 1 & (0) & 1 \end{vmatrix}_{[n]}$$

En développant selon la dernière ligne

$$D_n = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & & (0) & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ (0) & & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n-1]} + D_{n-1}$$

En permutant les colonnes selon le cycle $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}$

$$D_n = (-1)^{n+1} \times (-1)^{n-2} \times \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & (0) \\ (0) & & 1 \end{vmatrix}_{[n-1]} + D_{n-1} = -1 + D_{n-1}$$

Puisque $D_2 = 2$, on obtient $D_n = 2 - n$.

3.4.4 Déterminant tridiagonal

Exemple Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ et

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & & (0) \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & c & a \end{vmatrix}_{[n]}$$

En développant selon la première colonne,

$$D_n = aD_{n-1} - c \begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ c & a & b & & (0) \\ 0 & c & a & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ 0 & (0) & & c & a \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

puis en développant le second déterminant selon la première ligne,

$$D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$$

Ainsi (D_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Rappel :
On appelle suite récurrente linéaire d'ordre 2 toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + pu_{n+1} + qu_n = 0$$

avec $(p, q) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^\star$.
Pour exprimer son terme général, on introduit l'équation caractéristique associée

$$r^2 + pr + q = 0$$

de discriminant Δ.
Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Si $\Delta \neq 0$: 2 racines r_1, r_2 et $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
Si $\Delta = 0$: 1 racine double r et $u_n = (\lambda n + \mu) r^n$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Si $\Delta > 0$ ou $\Delta = 0$: semblable avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Si $\Delta < 0$: 2 racines conjuguées $r\mathrm{e}^{\pm i\theta}$ et $u_n = (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))\, r^n$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Dans chaque cas, λ, μ se déterminent à partir des deux rangs initiaux de la suite (u_n).

3.4.5 Déterminant de Vandermonde

Pour $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, on pose

$$V_n(a_1,...,a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Théorème

$$V_n(a_1,...,a_n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_j - a_i)$$

dém. :
Par récurrence sur $n \geqslant 1$.
Cas $n = 1$: ok
Supposons la propriété vraie au rang $n \geqslant 1$.
Soient $a_1, \dots, a_n, a_{n+1} \in \mathbb{K}$
Cas : les $a_1, \dots, a_n$ ne sont pas deux à deux distincts

$$V_{n+1}(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = 0 = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} (a_j - a_i)$$

Cas : les $a_1, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts.
Considérons la fonction

$$f : x \mapsto V_{n+1}(a_1, \dots, a_n, x)$$

En développant selon la dernière ligne

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n \text{ avec } \alpha_n = V_n(a_1, \dots, a_n)$$

Or $f(x) = 0$ pour $x \in \{a_1, \dots, a_n\}$ car le déterminant comporte deux lignes égales.
On peut donc factoriser le polynôme

$$f(x) = \alpha_n \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)$$

et ainsi on affirme

$$V_{n+1}(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = V_n(a_1, \dots, a_n) \prod_{i=1}^{n} (a_{n+1} - a_i)$$

Récurrence établie.
□

3.4.6 Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Théorème

Si

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O & D \end{array}\right)$$

avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$
alors

$$\det M = \det A \times \det D$$

dém. :
On a

$$M = \left(\begin{array}{c|c} I_p & O \\ \hline O & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O & I_q \end{array}\right)$$

Or, en développant selon les premières lignes

$$\det \left(\begin{array}{c|c} I_p & O \\ \hline O & D \end{array}\right) = \det D$$

et en développant selon les dernières lignes

$$\det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O & I_q \end{array}\right) = \det A$$

□

Corollaire

$$\begin{vmatrix} A_1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_n \end{vmatrix} = \det A_1 \times \cdots \times \det A_n$$

Exemple Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, exprimons le déterminant de

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$$

Via les opérations $C_1 \leftarrow C_1 + C_{n+1}, \ldots, C_n \leftarrow C_n + C_{2n}$,

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A+B & B \\ B+A & A \end{pmatrix}$$

Via les opérations $L_{n+1} \leftarrow L_{n+1} - L_1, \ldots, L_{2n} \leftarrow L_{2n} - L_{n+1}$,

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A+B & B \\ O & A-B \end{pmatrix} = \det(A+B)\det(A-B)$$

Si A et B commutent, on obtient

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det\left(A^2 - B^2\right)$$

3.4.7 Comatrice

Définition

On appelle comatrice de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice des cofacteurs de A, on la note

$$\text{com}A \underset{\text{déf}}{=} (A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Théorème

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), {}^t(\text{com}A)\,A = A\,{}^t(\text{com}A) = \det(A) I_n$$

dém. :

$$\left[{}^t(\text{com}A)A\right]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A'_{i,k} a_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} A_{k,i} = \det A.\delta_{i,j}$$

car se comprend comme le développement selon la i-ème colonne de la matrice obtenue en remplaçant dans A sa i-ème colonne par sa j-ème colonne.

□

Corollaire

Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^t(\text{com}A)$$

3.4.8 Calcul de rang

Définition

On appelle matrice extraite de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ toute matrice obtenue en retirant des lignes et/ou de colonnes de A.

Exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice extraire de

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition

Le rang d'une matrice extraite est inférieur au rang de la matrice dont elle est issue.

dém. :
Car le rang d'une matrice est le rang de la famille de ses lignes ou de ses colonnes.

□

Définition

On appelle déterminant d'ordre r extrait de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ tout déterminant d'une matrice carrée d'ordre r extraite de A.

Exemple Les mineurs de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont exactement ses déterminants extraits d'ordre $n-1$.

Théorème

Le rang de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est l'ordre maximal des déterminants non nuls extraits de A.

dém. :
Si A possède un déterminant extrait d'ordre r non nul alors $\text{rg}A \geqslant r$ car A admet une matrice extraite de rang r.
Inversement, posons r le rang de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
A possède r colonnes indépendantes.
Notons B la matrice extraite formée par ces colonnes. $B \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et B est de rang r.
B possède r lignes indépendantes.
Notons C la matrice extraite de B constituée pas ces lignes. $C \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ et C est de rang r.
La matrice C est une matrice carrée inversible donc $\det C \neq 0$ et par suite A possède un déterminant extrait d'ordre r non nul.
□

Exemple Calculons le rang de

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & \ddots & 1 \\ 1 & (0) & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

En développant selon la première colonne

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 \\ 0 & & & 1 \end{vmatrix}_{[n-1]} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & & & (0) \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 1 \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

Ainsi $\det M = 1 + (-1)^{n+1}$.
Si n est impair alors $\det M = 2$ et donc $\text{rg}M = n$.
Si n est pair alors $\det M = 0$ et donc $\text{rg}M < n$. Or M possède un mineur non nul donc $\text{rg}M \geqslant n-1$ puis $\text{rg}M = n-1$.

3.4.9 Système d'équations linéaires

3.4.9.1 Résolution de système d'équations linéaires

Considérons le système

$$\Sigma : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

d'équation matricielle $AX = B$.

Définition

On dit que le système Σ est échelonné si la matrice A l'est.

Un système échelonné est facile à résoudre. En effet, quitte à permuter les inconnues, un tel système est de la forme

$$\begin{cases} p_1x_1 + \star x_2 + \cdots + \star x_r + \star x_{r+1} + \cdots + \star x_p = b_1 \\ \quad p_2x_2 + \cdots + \star x_r + \star x_{r+1} + \cdots + \star x_p = b_2 \\ \vdots \\ p_rx_r + \star x_{r+1} + \cdots + \star x_p = b_r \\ 0 = b_{r+1} \\ \vdots \\ 0 = b_n \end{cases}$$

Définition

Les r premières équations sont appelées équations principales.
Les $n - r$ dernières équations sont appelées équations de compatibilité.
Les inconnues $x_1, \ldots, x_r$ sont appelées inconnues principales.
Les inconnues $x_{r+1}, \ldots, x_p$ sont appelées inconnues paramètres.

Si les équations de compatibilité sont toutes vérifiées (i.e. de la forme $0 = 0$) alors le système peut-être transformée en le système équivalent

$$\begin{cases} x_1 = \star x_{r+1} + \cdots + \star x_p + \star \\ x_2 = \star x_{r+1} + \cdots + \star x_p + \star \\ \vdots \\ x_r = \star x_{r+1} + \cdots + \star x_p + \star \end{cases}$$

qui permet d'exprimer la solution.

Théorème

Par opérations de transvection les équations

$$(i) \leftarrow (i) + \lambda(j)$$

on peut transformer Σ en un système échelonné équivalent.

dém. :
Il suffit de transposer aux équations les transvections sur les lignes transformant A en une matrice échelonnée en notant que les transvections sur les équations transforme un système en un système équivalent.
$\square$

Exemple Résolution de

$$\Sigma : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + az = b \end{cases}$$

en fonction de $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\Sigma \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ (a-1)z = b - 1 \end{cases}$$

Cas $a \neq 1$

$$\Sigma \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 1 - y \\ (a-1)z = b - 1 \end{cases}$$

et donc

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{a-b}{a-1} - y, y, \frac{b-1}{a-1} \right) / y \in \mathbb{R} \right\}$$

Cas $a = 1$

$$\Sigma \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 0 = b - 1 \end{cases}$$

Sous-cas $b \neq 1$: $\mathcal{S} = \emptyset$.
Sous-cas $b = 1$:

$$\Sigma \Leftrightarrow x = 1 - y - z$$

et

$$\mathcal{S} = \{(1 - y - z, y, z)/y, z \in \mathbb{R}\}$$

3.4.9.2 Formules de Cramer

Soit Σ un système linéaire à n équations et n inconnues :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

d'équation matricielle $AX = B$.

Définition

On dit qu'un tel système est de Cramer si la matrice A est inversible.

Théorème

Le système Σ est de Cramer si, et seulement si, $\det A \neq 0$.
De plus, si tel est le cas, son unique solution est le n uplet $(x_1, ..., x_n)$ avec pour tout $j \in \{1, \ldots n\}$

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}}$$

dém. :
Le système Σ est de Cramer si, et seulement si, la matrice A est inversible i.e. $\det A \neq 0$.

On a alors $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$.
Posons

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{\det A}{}^t(\text{com}A)B$$

Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$x_j = \frac{1}{\det A}\sum_{i=1}^{n}\left[{}^t(\text{com}A)\right]_{i,j} b_j = \frac{1}{\det A}\sum_{i=1}^{n} A_{j,i}b_j$$

avec $\sum_{i=1}^{n} A_{j,i}b_j$ qui se comprend comme le développement selon la j-ème colonne du déterminant suivant

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

□

Exemple Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et $d \in \mathbb{K}$.
Considérons le système

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$$

Puisque

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \neq 0$$

ce système est de Cramer et sa solution (x, y, z) est donnée par

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ d & b & c \\ d^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}} = \frac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)}, \text{ etc}$$

3.4.10 Musculation

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Etudions rg(com$A$).
Si rg$A = n$ alors A est inversible donc ^{t}com$A$ aussi puis rg(com$A$) $= n$.
Si rg$A \leqslant n-2$ alors tous les mineurs de A sont nuls donc com$A = O_n$ puis rg(com$A$) $= 0$.
Si rg$A = n-1$ alors A^tcom$A = O_n$ donne Im^{t}com$A \subset \ker A$. Or $\dim\ker A = 1$ donc rgcom$A \leqslant 1$.
Or com$A \neq O_n$ car A possède un mineur non nul donc rg$A = 1$.

Chapitre 4

Réduction des endomorphismes

$\mathbb{K}$ désigne un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

4.1 Evaluations polynomiales

4.1.1 Valeur d'un polynôme sur un endomorphisme

Définition

On appelle valeur de $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ en $u \in \mathcal{L}(E)$ l'application

$$P(u) := \sum_{k=0}^{N} a_k u^k \in \mathcal{L}(E)$$

Exemple La valeur de $P = X^3$ en u est $P(u) = u^3$.
La valeur de $P = X^3 + 2X - 1$ en u est $P(u) = u^3 + 2u - \mathrm{Id}$.

Attention : La valeur de $P(u)$ en $x \in E$ est notée $P(u)(x)$ à comprendre $[P(u)](x)$.
Ne pas écrire $P(u(x))$ qui n'a pas de sens. Voir le cas $P = X^2$.

Théorème

L'application $\varphi_u : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E)$ définie par $\varphi_u(P) = P(u)$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.

dém. :
L'application φ_u est bien définie entre deux $\mathbb{K}$-algèbres.
$\varphi_u(1) = \mathrm{Id}_E$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.
On peut écrire $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$ avec $(a_k), (b_k)$ suites nulles à partir d'un certain rang.

On a

$$\varphi_u(\lambda P + \mu Q) = \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) u^k = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k + \mu \sum_{k=0}^{+\infty} b_k u^k = \lambda \varphi_u(P) + \mu \varphi_u(Q)$$

et

$$\varphi_u(PQ) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} u^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k u^k \circ b_{n-k} u^{n-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k \circ \sum_{\ell=0}^{+\infty} b_\ell u^\ell = P(u) \circ Q(u)$$

□

Remarque Par ce morphisme, toute identité polynomiale se transpose aux endomorphismes.

Exemple Puisque

$$X^3 - 2X + 1 = (X-1)(X^2 + X - 1)$$

on a

$$u^3 - 2u + \mathrm{Id}_E = (u - \mathrm{Id}_E)(u^2 + u - \mathrm{Id}_E)$$

Exemple Si

$$P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 = \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)$$

alors

$$P(u) = \prod_{k=1}^{n} (u - \alpha_k \mathrm{Id}_E)$$

4.1.2 Polynôme en un endomorphisme

Définition

On dit que $v \in \mathcal{L}(E)$ est un polynôme en $u \in \mathcal{L}(E)$ s'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $v = P(u)$.
On note $\mathbb{K}[u]$ l'ensemble des polynômes en u :

$$\mathbb{K}[u] := \{P(u) / P \in \mathbb{K}[X]\}$$

Exemple $u^3 + 3u + \mathrm{Id}_E$ et $(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^\alpha$ sont des polynômes en u.

Théorème

$\mathbb{K}[u]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.
De plus, si A est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ contenant u alors $\mathbb{K}[u] \subset A$.
Ainsi $\mathbb{K}[u]$ est la plus petite sous-algèbre de E contenant u, on l'appelle algèbre engendrée par u.

dém. :
$\mathbb{K}[u] \subset \mathcal{L}(E)$, $\text{Id}_E \in \mathbb{K}[u]$ car pour $P(X) = 1$ on a $P(u) = \text{Id}_E$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $v, w \in \mathbb{K}[u]$. Il existe $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $v = P(u)$ et $w = Q(u)$.
On a alors $\lambda v + \mu w = (\lambda P + \mu Q)(u) \in \mathbb{K}[u]$ et $v \circ w = (PQ)(u) \in \mathbb{K}[u]$ donc $\mathbb{K}[u]$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.
De plus, $w \circ v = (QP)(u) = (PQ)(u) = v \circ w$ donc $\mathbb{K}[u]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.
Si A est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ contenant u alors par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u^n \in A$$

puis $\mathbb{K}[u] = \text{Vect}\left\{u^k / k \in \mathbb{N}\right\} \subset A$.
□

Corollaire

Si v commute avec u alors v commute avec les polynômes en u.

dém. :
Introduisons $\mathcal{C}_v = \{w \in \mathcal{L}(E) / w \circ v = v \circ w\}$.
On vérifie aisément que $\mathcal{C}_v$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ et puisque $u \in \mathcal{C}_v$ on a $\mathbb{K}[u] \subset \mathcal{C}_v$.
□

4.1.3 Polynôme en une matrice carrée

Définition

On appelle valeur de $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ en $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice

$$P(M) := \sum_{k=0}^{N} a_k M^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Exemple La valeur de $P = X^3 - 3X + 1$ en $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est $P(M) = M^3 - 3M + I_n$.

Exemple Si $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}} u$ alors $P(M) = \text{Mat}_{\mathcal{B}} P(u)$.

Exemple Si $M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, M^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

puis par linéarité

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], P(M) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Exemple Si $M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, M^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \star \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

puis par linéarité

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], P(M) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \star \\ & \ddots & \\ (0) & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Exemple De même si $M = \begin{pmatrix} A & \star \\ O & B \end{pmatrix}$ (avec A, B carrées) alors

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & \star \\ O & P(B) \end{pmatrix}$$

Exemple Puisque

$$\forall k \in \mathbb{N}, ({}^tM)^k = {}^t(M^k)$$

par linéarité

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], P({}^tM) = {}^tP(M)$$

Théorème

L'application $\varphi_M : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $\varphi_M(P) = P(M)$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.

Définition

On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un polynôme en $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = P(M)$.
On note $\mathbb{K}[M] := \{P(M)/P \in \mathbb{K}[X]\}$ l'ensemble des polynômes en M

Théorème

$\mathbb{K}[M]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ incluse dans toute sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contenant M ; on l'appelle algèbre engendrée par M.

Corollaire

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec M alors A commute avec les polynômes en M.

4.1.4 Lemme de décomposition des noyaux

Théorème

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Si P et Q sont premiers entre eux alors

$$\ker(PQ)(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)$$

dém. :
Puisque $P \wedge Q = 1$, il existe des polynômes V et W tel que $VP + WQ = 1$.
On a alors $\mathrm{Id} = V(u) \circ P(u) + W(u) \circ Q(u)$.
Soit $x \in \ker P(u) \cap \ker Q(u)$
On a

$$x = (V(u) \circ P(u))(x) + (W(u) \circ Q(u))(x) = 0$$

donc $\ker P(u)$ et $\ker Q(u)$ sont en somme directe.
Montrons $\ker P(u) \oplus \ker Q(u) \subset \ker(PQ)(u)$
Puisque $(PQ)(u) = Q(u) \circ P(u)$ on a $\ker P(u) \subset \ker PQ(u)$.
De même $\ker Q(u) \subset \ker(PQ)(u)$ et donc $\ker P(u) \oplus \ker Q(u) \subset \ker(PQ)(u)$.
Inversement
Soit $x \in \ker(PQ)(u)$.
On a

$$x = (W(u) \circ Q(u))(x) + (V(u) \circ P(u))(x) = a + b$$

avec $a = (W(u) \circ Q(u))(x)$ et $b = (V(u) \circ P(u))(x)$.
On a

$$P(u)(a) = (P(u) \circ W(u) \circ Q(u))(x) = (W(u) \circ (PQ)(u))(x) = 0$$

De même $Q(u)(b) = 0$ et donc $a \in \ker P(u)$ et $b \in \ker Q(u)$.
Ainsi $\ker(PQ)(u) \subset \ker P(u) \oplus \ker Q(u)$ puis l'égalité.
□

Corollaire

Si $P_1, \ldots, P_m$ sont des polynômes deux à deux premiers entre eux alors :

$$\ker\left(\prod_{k=1}^{m} P_k\right)(u) = \bigoplus_{k=1}^{m} \ker P_k(u)$$

Rappel Si $a \neq b$ alors $(X - a) \wedge (X - b) = 1$ et, plus généralement, $(X - a)^\alpha \wedge (X - b)^\beta = 1$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

Rappel Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux si, et seulement si, ils n'ont pas de racines complexes en commun.

Exemple On appelle projecteur de E tout $p \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $p^2 = p$.
Puisque $p^2 - p = \tilde{0}$, on a $E = \ker\left(p^2 - p\right)$.

Or $X^2 - X = (X-1)X$ avec $(X-1) \wedge X = 1$
donc $E = \ker(p^2 - p) = \ker(p - \mathrm{Id}) \oplus \ker p$.
Posons $F = \ker(p - \mathrm{Id})$ et $G = \ker p$.
$\forall x \in F, p(x) = x$ et $\forall x \in G, p(x) = 0$ donc p est la projection sur F parallèlement à G.

Exemple On appelle symétrie de E tout $s \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $s^2 = \mathrm{Id}$.
Puisque $s^2 - \mathrm{Id}_E = \tilde{0}$, on a $E = \ker\left(s^2 - \mathrm{Id}_E\right)$.
Or $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ avec $(X-1) \wedge (X+1) = 1$ donc $E = \ker(s - \mathrm{Id}) \oplus \ker(s + \mathrm{Id})$.
Posons $F = \ker(s - \mathrm{Id})$ et $G = \ker(s + \mathrm{Id})$.
$\forall x \in F, s(x) = x$ et $\forall x \in G, s(x) = -x$ donc s est la symétrie par rapport à F et parallèlement à G.

4.1.5 Application : Equations différentielles linéaires

On étudie l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants :

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

avec $a_i \in \mathbb{C}$ d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ n fois dérivable.

Proposition

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de cette équation sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Considérons $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $D : y \mapsto y'$.
Pour $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ on a

$$\mathcal{S} = \ker P(D)$$

Dans $\mathbb{C}[X]$, on peut factoriser

$$P = (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \ldots (X - \lambda_m)^{\alpha_m}$$

avec $\lambda_k \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts et $\alpha_k \in \mathbb{N}^\star$.
Pour $k \neq \ell$, $(X - \lambda_k)^{\alpha_k} \wedge (X - \lambda_\ell)^{\alpha_\ell} = 1$ donc

$$\ker P(D) = \underset{k=1}{\overset{m}{\oplus}} \ker(D - \lambda_k \mathrm{Id})^{\alpha_i}$$

Reste à déterminer : $\ker(D - \lambda\mathrm{Id})^\alpha$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^\star$.
Cas $\alpha = 1$:

$$(D - \lambda\mathrm{Id})(y) = 0 \Leftrightarrow y' - \lambda y = 0 \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{C}, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = C\mathrm{e}^{\lambda t}$$

Introduisons $e_\lambda : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$. On a donc

$$\ker(D - \lambda\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(e_\lambda)$$

Cas général :
Soit $y \in E$ et z la fonction définie de sorte $y = e_\lambda z$ i.e. $z : t \to \mathrm{e}^{-\lambda t} y(t)$. On a

$$(D - \lambda\mathrm{Id})(y) = e_\lambda D(z),\ (D - \lambda\mathrm{Id})^2(y) = e_\lambda D^2(z), \ldots, (D - \lambda\mathrm{Id})^\alpha(y) = e_\lambda D^\alpha(z)$$

donc

$$y \in \ker(D - \lambda\mathrm{Id})^\alpha \Leftrightarrow z \in \ker D^\alpha$$

Or la solution générale de l'équation $z^{(c)} = 0$ est

$$z(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_{\alpha-1} t^{\alpha-1}$$

avec $c_0, c_1, \ldots, c_{\alpha-1} \in \mathbb{C}$.
Ainsi

$$\ker(D - \lambda \mathrm{Id})^c = \left\{ tc(c_0 + c_1 t + \cdots + c_{\alpha-1} t^{\alpha-1}) \mathrm{e}^{\lambda t} / c_0, c_1, \ldots, c_{\alpha-1} \in \mathbb{C} \right\}$$

Exemple Résolution de l'équation $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$.
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 4 homogène à coefficients constants d'équation caractéristique $r^4 - 2r^2 + 1 = 0$ i.e. $(r-1)^2(r+1)^2 = 0$.
1 et -1 sont racines doubles.
La solution générale est $y : t \mapsto (at+b)\mathrm{e}^t + (ct+d)\mathrm{e}^{-t}$.

Remarque $\dim \ker P(D) = \sum_{k=1}^{m} \dim \ker(D - \lambda_k \mathrm{Id})^{\alpha_k} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k = n$.

4.2 Sous-espace stable

4.2.1 Définition

Définition

Un sous-espace vectoriel F de E est dit stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ si $u(F) \subset F$ i.e.

$$\forall x \in F, u(x) \in F$$

Exemple $\{0_E\}$ et E sont stables par u.
F est stable par $\tilde{0}$, par Id_E et plus généralement par $\lambda \mathrm{Id}_E$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exemple $E = \mathbb{K}[X]$, $D : P \mapsto P'$, $D \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$
$\mathbb{K}_n[X]$ est stable par D car $\forall P \in \mathbb{K}[X], \deg P' \leqslant \deg P$.

Exemple $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $T : (u_n) \mapsto (u_{n+1})$, $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.
On note $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des suites réelles bornées. $\ell^\infty(\mathbb{R})$ est stable par T.

Proposition

Si F et G sont stables par u alors $F + G$ et $F \cap G$ aussi.

dém. :
$u(F+G) = u(F) + u(G) \subset F + G$.
$u(F \cap G) \subset u(F) \cap u(G) \subset F \cap G$.
□

Théorème

Si u et v commutent alors Imu et $\ker u$ sont stables par v.

dém. :
Pour tout $x \in \ker u$, $u(v(x)) = v(u(x)) = v(0) = 0$ donc $v(x) \in \ker u$.
Pour tout $y \in$ Imu, on peut écrire $y = u(x)$ et alors $v(y) = v(u(x)) = u(v(x)) \in$ Imu.
□

Exemple Imu et $\ker u$ sont stables par u.
Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, Im$P(u)$ et $\ker P(u)$ sont stables par u.

4.2.2 Endomorphisme induit

Définition

Si F est un sous-espace vectoriel stable par $u \in \mathcal{L}(E)$, on peut considérer la restriction $u_F : F \to F$ qui définit un endomorphisme de F appelé endomorphisme induit par u sur F.

Exemple $\ker u$ est stable par u et $u_{\ker u} = \tilde{0}$.

Exemple Imu est stable par u et $u_{\text{Im}u}$ est surjective si, et seulement si, Im$u^2 =$ Imu car Im$u_{\text{Im}u} =$ Imu^2

Exemple Soient $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $D : f \mapsto f'$.
$F =$ Vect$(\cos, \sin)$ est stable par D car $D(\cos), D(\sin) \in F$ et

$$\text{Mat}_{(\cos,\sin)}(D_F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = R_{-\pi/2}$$

Théorème

Si F est stable par u et $v \in \mathcal{L}(E)$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, F est stable par λu, $u + v$ et $u \circ v$.
De plus $(\lambda u)_F = \lambda u_F$, $(u + v)_F = u_F + v_F$ et $(u \circ v)_F = u_F \circ v_F$

dém. :
$(\lambda u)(F) = \lambda u(F) \subset \lambda F \subset F$.
$(u + v)(F) \subset u(F) + v(F) \subset F + F \subset F$.
$(u \circ v)(F) = u(v(F)) \subset u(F) \subset F$.
Pour tout $x \in F$
$(\lambda u)_F(x) = (\lambda u)(x) = \lambda u(x) = \lambda u_F(x) = (\lambda u_F)(x)$.
$(u + v)_F(x) = (u + v)(x) = u(x) + v(x) = u_F(x) + v_F(x) = (u_F + v_F)(x)$.
$(u \circ v)_F(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x)) = u(v_F(x)) = u_F(v_F(x)) = (u_F \circ v_F)(x)$.
□

Corollaire

Si F est stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ alors F est stable par tout polynôme en u et

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], P(u)_F = P(u_F)$$

dém. :
$\{v \in \mathcal{L}(E)/F$ est stable par $v\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ contenant u donc contenant $\mathbb{K}[u]$.
Pour $P = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$,

$$P(u)_F = (a_n u^n + \cdots + a_1 u + a_0 \mathrm{Id})_F = a_n (u_F)^n + \cdots + a_1 u_F + a_0 \mathrm{Id}_F = P(u_F)$$

□

Proposition

Si F est stable par u alors $\ker u_F = \ker u \cap F$ et $\mathrm{Im} u_F \subset \mathrm{Im} u \cap F$.

dém. :
Soit $x \in \ker u_F$. On a $x \in F$ et $u(x) = u_F(x) = 0$ donc $x \in \ker u \cap F$.
Soit $x \in \ker u \cap F$. On a $u_F(x) = u(x) = 0$ donc $x \in \ker u_F$.
$\mathrm{Im} u_F \subset \mathrm{Im} u$ car u_F est restriction de u et $\mathrm{Im} u_F \subset F$ car F est stable par u.
□

Remarque Si u est injectif alors u_F est injectif.

Remarque Si u est surjectif, on ne peut rien dire a priori sur u_F.
Par exemple la dérivation sur $\mathbb{K}[X]$ est surjective mais l'endomorphisme induit sur $\mathbb{K}_n[X]$ ne l'est pas.

4.2.3 Visualisation en dimension finie

Ici E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie

Théorème

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension p muni d'une base $\mathcal{B}_F$ complétée en une base $\mathcal{B}_E$ de E.
Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on a équivalence entre :
(i) F est stable par u ;
(ii) la matrice de u dans $\mathcal{B}_E$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} \text{ avec } A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$$

De plus, si tel est le cas, A est alors de la matrice de u_F dans $\mathcal{B}_F$.

dém. :
$\mathcal{B}_F = (e_1, \ldots, e_p)$ base de F complétée en $\mathcal{B}_E = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ base de E.
(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons F stable par u. On peut introduire $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u_F) = (a_{i,j})$ et on a

$$\forall 1 \leqslant j \leqslant p, u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} e_j$$

et alors la matrice de u dans $\mathcal{B}_E$ est de la forme

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} & \\ \vdots & & \vdots & (\star) \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,p} & \\ & (0) & & (\star) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons la matrice de u dans $\mathcal{B}$ de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Pour tout $1 \leqslant j \leqslant p$, $u(e_j) \in \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ donc $u(e_j) \in F$ puis, par linéarité, pour tout $x \in F$, $u(x) \in F$.

□

Théorème

On suppose $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_m$ et avec $E_1, \ldots, E_m$ des sous-espaces vectoriels de E munis de bases $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m$. On note $\mathcal{B}$ la base de E obtenue en accolant $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m$.
Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ on a équivalence entre :
(i) chaque E_k est stable par u ;
(ii) la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ obtenue en accolant les bases $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} A_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & A_m \end{pmatrix}$$

avec $A_k \in \mathcal{M}_{\dim E_k}(\mathbb{K})$.
De plus, on a alors,

$$A_k = \text{Mat}_{\mathcal{B}_k}(u_{E_k})$$

Remarque La réduction d'un endomorphisme u de E consiste à écrire $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ avec F_i stable par u et u_{F_i} « simple ». En dimension finie, la réduction d'un endomorphisme correspond à l'obtention d'une représentation matricielle simple (la plus diagonale possible)

4.3 Eléments propres

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$ de dimension quelconque et u un endomorphisme de E.

4.3.1 Valeur propre et vecteur propre

Proposition

Soient $x \in E \setminus \{0_E\}$ et $D = \text{Vect}x$ droite vectorielle.
On a équivalence entre :
(i) D est stable pour $u \in \mathcal{L}(E)$;
(ii) il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.

dém. :
(i) $\Rightarrow$ (ii) Si D est stable par u alors $u(x) \in D$ et donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Si $u(x) = \lambda x$ alors $u(D) = u(\text{Vect}x) = \text{Vect}u(x) \subset \text{Vect}x$.
□

Définition

On dit que $x \in E$ est vecteur propre de u si

$$x \neq 0_E \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{K}, u(x) = \lambda x$$

Attention : Par définition un vecteur propre est un vecteur non nul.

Remarque Il y a alors unicité de la valeur λ car

$$\lambda x = \mu x \text{ avec } x \neq 0_E \Rightarrow \lambda = \mu$$

Définition

On dit que λ est valeur propre de u s'il existe un vecteur $x \in E$ vérifiant

$$u(x) = \lambda x \text{ et } x \neq 0_E$$

Définition

Lorsque $u(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0_E$, on dit que x est vecteur propre associée à la valeur propre λ ou encore que λ est valeur propre associée au vecteur propre x.

Définition

On appelle spectre de u l'ensemble des valeurs propres de u, on le note Spu.

Exemple $0 \in \text{Sp}u \Leftrightarrow \exists x \neq 0_E, u(x) = 0$
Ainsi : $0 \in \text{Sp}u \Leftrightarrow u$ non injectif.

4.3.2 Sous-espace propre

Définition

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, on note $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \text{Id}_E)$ le sous-espace vectoriel formé des vecteurs $x \in E$ solution de l'équation $u(x) = \lambda x$.

Exemple $E_0(u) = \ker u$.
$E_1(u)$ est l'espace des vecteurs invariants par u.

Théorème

On a équivalence entre :
(i) λ est valeur propre de u ;
(ii) $E_\lambda(u) \neq \{0_E\}$;
(iii) l'endomorphisme $u - \lambda\text{Id}$ n'est pas injectif.

Définition

Si λ est valeur propre de u alors $E_\lambda(u)$ est appelé sous-espace propre associé à la valeur propre λ.

Remarque Si $\lambda \notin \text{Sp}(u)$ alors $E_\lambda(u) = \{0_E\}$.
Si $\lambda \in \text{Sp}(u)$ alors $E_\lambda(u) = \{0_E\} \cup \{\text{vecteur propre associé à la valeur propre } \lambda\}$.

4.3.3 Propriétés des sous-espaces propres

Théorème

Les sous-espaces propres de $u \in \mathcal{L}(E)$ sont stables par u et

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}u, u_{E_\lambda(u)} = \lambda \mathrm{Id}$$

dém. :
u et $u - \lambda\mathrm{Id}$ commutent donc $E_\lambda(u)$ est stable par u.
De plus, pour tout $x \in E_\lambda(u)$, $u(x) = \lambda x$ donc $u_{E_\lambda(u)} = \lambda\mathrm{Id}$.
□

Remarque Si u et v commutent alors les sous-espaces propres de u sont stables pas v.
En effet $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda\mathrm{Id})$ et v commute avec $u - \lambda\mathrm{Id}$ qui est un polynôme en u.

Théorème

Les sous-espaces propres de $u \in \mathcal{L}(E)$ sont en somme directe.

dém. :
Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ des valeurs propres deux à deux distinctes de u.
Puisque les polynômes $(X - \lambda_1), \dots, (X - \lambda_m)$ sont deux à deux premiers entre eux, en appliquant le lemme de décomposition des noyaux à $P = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_m)$ on obtient

$$\ker P(u) = \bigoplus_{k=1}^{m} \ker(u - \lambda_k \mathrm{Id})$$

En particulier, les sous-espaces propres de u sont en somme directe.
□

Corollaire

Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.

dém. :
Soit $x_1, \dots, x_m$ des vecteurs propres associés à des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ deux à deux distinctes.
Supposons $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m = 0_E$.
Puisque $\alpha_k x_k \in E_{\lambda_k}(u)$ et puisque les sous-espaces vectoriels $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_m}(u)$ sont en somme directe, on a

$$\forall k \in \{1, \dots, m\}, \alpha_k x_k = 0_E$$

Or $x_k \neq 0_E$ (car c'est un vecteur propre) donc $\alpha_k = 0$.
□

4.3.4 Détermination pratique

Protocole Pour déterminer les valeurs propres de u, on étudie pour quel scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, l'équation $u(x) = \lambda x$ possède d'autres solutions que la solution nulle.

Exemple Soient $E = \mathbb{K}[X]$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ défini par $\varphi(P) = XP'(X)$.
Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

$$\varphi(P) = \lambda P \Leftrightarrow XP'(X) = \lambda P(X)$$

Analyse :
Si cette équation possède une solution $P \neq 0$ alors en posant $n = \deg P$, on peut écrire
$P = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ avec $a_n \neq 0$. L'équation $XP'(X) = \lambda P(X)$ donne

$$\forall 0 \leqslant k \leqslant n, \lambda a_k = n a_k$$

Sachant $a_n \neq 0$, on obtient $\lambda = n$ et $a_{n-1} = \ldots = a_1 = a_0 = 0$.
Ainsi $\lambda \in \mathbb{N}$ et $P = a_\lambda X^\lambda$.
Synthèse :
Pour $\lambda \in \mathbb{N}$ et $P = a_\lambda X^\lambda$ avec $a_\lambda \neq 0$, on vérifie $XP'(X) = \lambda P(X)$ avec $P \neq 0$ donc $\lambda \in \mathrm{Sp}\varphi$.
Finalement $\mathrm{Sp}\varphi = \mathbb{N}$ et

$$\forall \lambda \in \mathbb{N}, E_\lambda(\varphi) = \mathrm{Vect}(X^\lambda)$$

Exemple Soient $E = \mathbb{K}[X]$ et $\psi \in \mathcal{L}(E)$ défini par $\psi(P) = XP(X)$.
Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

$$\psi(P) = \lambda P(X) \Leftrightarrow XP(X) = \lambda P(X) \Leftrightarrow (X - \lambda)P(X) = 0 \Leftrightarrow P(X) = 0$$

donc $\mathrm{Sp}\psi = \emptyset$.

Exemple Soient $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $D : f \mapsto f'$.
Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f \in E$.

$$D(f) = \lambda f \Leftrightarrow f' = \lambda f \Leftrightarrow f \in \mathrm{Vect}(e_\lambda)$$

avec $e_\lambda : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$ fonction non nulle.
On en déduit $\mathrm{Sp}D = \mathbb{C}$ et

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, E_\lambda(D) = \mathrm{Vect}(e_\lambda)$$

Exemple Soient $E = \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et $T : (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u = (u_n) \in E$.

$$T(u) = \lambda u \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \lambda u_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda^n u_0$$

Si $|\lambda| > 1$ alors la suite $(\lambda^n u_0)$ est bornée si, et seulement si, $u_0 = 0$ et c'est alors la suite nulle.
Si $|\lambda| \leqslant 1$ alors la suite $(\lambda^n u_0)$ est bornée et non nulle pour tout $u_0 \neq 0$.
Finalement $\mathrm{Sp}T = [-1, 1]$ et

$$\forall \lambda \in [-1, 1], E_\lambda(T) = \mathrm{Vect}\left((\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}\right)$$

4.4 Eléments propres en dimension finie

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$ et u un endomorphisme de E.

4.4.1 Eléments propres d'une matrice

Définition

On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ vérifiant

$$AX = \lambda X \text{ et } X \neq 0$$

On dit alors que la colonne X est vecteur propre associé à la valeur propre λ.
On appelle spectre l'ensemble SpA formé des valeurs propres de A.

Remarque En identifiant $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ on peut aussi percevoir les vecteurs propres de A comme étant les $x \in \mathbb{K}^n$ vérifiant $Ax = \lambda x$ et $x \neq 0$.

Définition

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on note $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n)$ l'espace des solutions de l'équation $AX = \lambda X$.
Lorsque λ est valeur propre de A, $E_\lambda(A)$ est appelé sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ.

Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $\mathcal{B}$ une base de E.
Si $A = \text{Mat}_\mathcal{B} u$ alors SpA = Spu et les sous-espaces propres associés à une même valeur propre se correspondent via représentation matricielle dans la base $\mathcal{B}$.

dém. :
Pour $x \in E$ et $X = \text{Mat}_\mathcal{B}(x)$ on a

$$u(x) = \lambda x \Leftrightarrow AX = \lambda X \text{ et } x \neq 0_E \Leftrightarrow X \neq 0$$

□

Corollaire

Deux matrices semblables ont le même spectre.

dém. :
Car elles représentent le même endomorphisme.
□

4.4.2 Polynôme caractéristique d'une matrice carrée

La théorie des déterminants vaut pour des matrices à coefficients dans un corps. Puisque que $\mathbb{K}(X)$ est un corps, on peut parler de déterminants de matrices à coefficients dans $\mathbb{K}(X)$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $A - XI_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}(X))$ et on peut introduire $\chi_A = \det(A - XI_n)$.

Théorème

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_A = \det(A - XI_n)$ est un polynôme de degré n de la forme

$$\chi_A(X) = (-1)^n \left(X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A\right)$$

De plus

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

dém. :
$A = (a_{i,j})$, $A - XI_n = (a_{i,j} - X\delta_{i,j})$ et

$$\chi_A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (a_{i,\sigma(i)} - \delta_{i,\sigma(i)} X) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) P_\sigma$$

Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, P_σ est un polynôme de degré $\leqslant n$ donc χ_A est un polynôme de degré $\leqslant n$.
Pour $\sigma \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{N}_n}$, il existe au moins deux indices i, j tels que $\sigma(i) \neq i$ et $\sigma(j) \neq j$, le polynôme P_σ est alors de degré $\leqslant n - 2$.
Pour $\sigma = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}_n}$

$$P_{\mathrm{Id}} = \prod_{i=1}^{n} (a_{i,i} - X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}(a_{1,1} + \cdots + a_{n,n}) X^{n-1} + \cdots$$

Ainsi

$$\chi_A = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \mathrm{tr}(A) X^{n-1} + \cdots$$

Le coefficient constant de χ_A est $\chi_A(0)$.
Or pour $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\chi_A(\lambda) = \sum_{\varepsilon \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (a_{\sigma(i),i} - \delta_{\sigma(i),i}\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

donc $\chi_A(0) = \det A$.
□

Définition

$\chi_A = \det(A - X.I_n)$ est appelé polynôme caractéristique de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Attention : Il arrive parfois que χ_A soit défini par $\chi_A = \det(X.I_n - A)$

Exemple Pour $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\chi_A = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - X)$.

Exemple Pour $M = \begin{pmatrix} A & \star \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec A, B carrées $\chi_M = \chi_A \chi_B$.

4.4.3 Polynôme caractéristique et valeurs propres

Théorème

Les valeurs propres de A sont exactement les racines de χ_A.

dém. :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}A \Leftrightarrow \ker(A - \lambda I_n) \neq \{0\} \Leftrightarrow A - \lambda I_n \text{ non inversible} \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$$

□

Corollaire

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède au plus n valeurs propres.

dém. :
Car un polynôme de degré n admet au plus n racines.
□

Corollaire

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possède au moins une valeur propre complexe.

dém. :
$\chi_A \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme non constant, il possède donc au moins une racine dans $\mathbb{C}$.
□

Remarque Aussi $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ possède au moins une valeur propre réelle.

Corollaire

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\text{Sp}({}^tA) = \text{Sp}A$.

dém. :
$\chi_{{}^tA} = \det({}^tA - XI_n) = \det\left({}^t(A - XI_n)\right) = \det(A - XI_n) = \chi_A$.
□

Exemple Si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ alors $\text{Sp}A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

Exemple Si $M = \begin{pmatrix} A & \star \\ O & B \end{pmatrix}$ avec A, B carrées alors $\text{Sp}M = \text{Sp}A \cup \text{Sp}B$

Exemple Etude des éléments propres de

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a

$$\det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} -2-X & 1 & -1 \\ 1 & -2-X & 1 \\ 1 & -1 & -X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-X & 1 & -1 \\ -1-X & -1-X & 0 \\ -1-X & 0 & -1-X \end{vmatrix}$$

$$\det(A - XI_3) = (1+X)^2 \begin{vmatrix} -(2+X) & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(1+X)^2(2+X)$$

Ainsi $\text{Sp}(A) = \{-1, -2\}$

Etudions $E_{-2}(A)$

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_{-2}(A)\Leftrightarrow AX=-2X\Leftrightarrow (A+2I_3)X=0\Leftrightarrow\begin{cases}y-z=0\\x+z=0\\x-y+2z=0\end{cases}$$

donc

$$E_{-2}(A)=\text{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Etudions $E_{-1}(A)$

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_{-1}(A)\Leftrightarrow (A+I_3)X=0\Leftrightarrow\begin{cases}-x+y-z=0\\x-y+z=0\\x-y+z=0\end{cases}$$

donc

$$E_{-1}(A)=\text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Exemple Etude des éléments propres de

$$A=\begin{pmatrix}0 & & (1)\\ & \ddots & \\ (1) & & 0\end{pmatrix}$$

Via $C_1\leftarrow C_1+\cdots+C_n$

$$\det(A-XI_n)=\begin{vmatrix}-X & & (1)\\ & \ddots & \\ (1) & & -X\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}n-1-X & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & -X & & (1)\\ \vdots & & \ddots & \\ n-1-X & (1) & & -X\end{vmatrix}$$

puis via $L_2\leftarrow L_2-L_1,\ldots,L_n\leftarrow L_n-L_1$

$$\det(A-XI_n)=\begin{vmatrix}n-1-X & 1 & \cdots & 1\\ 0 & -X-1 & & (0)\\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & (0) & & -X-1\end{vmatrix}$$

Ainsi

$$\chi_A=(-1)^n(X-(n-1))(X+1)^{n-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_{-1}(A) \Leftrightarrow (A + I_n)X = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \cdots + x_n = 0 \\ \vdots \\ x_1 + \cdots + x_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 + \cdots + x_n = 0$$

Ainsi $E_{-1}(A)$ est l'hyperplan formé des colonnes de somme nulle.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_{n-1}(A) \Leftrightarrow (A + I_n)X = nX$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \cdots + x_n = nx_1 \\ \vdots \\ x_1 + \cdots + x_n = nx_n \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = \ldots = x_n$$

Ainsi $E_{n-1}(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

4.4.4 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Proposition

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables alors $\chi_A = \chi_B$.

dém. :
Si $B = P^{-1}AP$ avec $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ alors $\chi_B = \det(P^{-1}AP - XI_n) = \det\left(P^{-1}(A - XI_n)P\right) = \det(A - XI_n) = \chi_A$.
□

Définition

On appelle polynôme caractéristique de $u \in \mathcal{L}(E)$, le polynôme caractéristique commun aux matrices représentant l'endomorphisme u ; on le note χ_u.

Exemple $\chi_{\lambda \text{Id}_E} = \chi_{\lambda I_n} = (\lambda - X)^n = (-1)^n (X - \lambda)^n$ avec $n = \dim E$.

Exemple Supposons $E = F \oplus G$ et considérons la projection sur F parallèlement à G.
Dans une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$, la matrice de p est de la forme $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O_{n-r} \end{pmatrix}$ avec $r = \dim F$. On a alors $\chi_p = (-1)^n (X - 1)^r X^{n-r}$.

Théorème

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, χ_u est un polynôme de degré exactement $n = \dim E$ de la forme

$$\chi_u(X) = (-1)^n \left(X^n - \text{tr}(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u)\right)$$

De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\chi_u(\lambda) = \det(u - \lambda \text{Id}_E)$ et les valeurs propres de u sont exactement les racines de χ_u.

dém. :
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice de u dans une base de E, $\chi_u = \chi_A$ avec tr$A =$ tr$u$ et $\det A = \det u$.
De plus, $\chi_u(\lambda) = \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \det(u - \lambda \text{Id}_E)$ et $\chi_u(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \ker(u - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0\} \Leftrightarrow \lambda \in \text{Sp}u$.
□

Corollaire

$u \in \mathcal{L}(E)$ possède au plus $\dim E$ valeurs propres.

Corollaire

Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie alors tout $u \in \mathcal{L}(E)$ possède au moins une valeur propre.

Remarque Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension impaire alors tout $u \in \mathcal{L}(E)$ possède au moins une valeur propre.

4.4.5 Multiplicité d'une valeur propre

Rappel Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme non nul, on appelle ordre de multiplicité de λ en tant que racine de P le plus grand $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $(X - a)^\alpha$ divise P.
Un polynôme P non constant est dit scindé dans $\mathbb{K}[X]$ si, et seulement si, on peut le factoriser sous la forme

$$P = \mu \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ ses racines comptées avec multiplicité.
En regroupant les racines égales, on obtient l'écriture

$$P = \mu \prod_{k=1}^{m} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ leurs multiplicités respectives.

Définition

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle multiplicité de λ en tant que valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$, l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine de χ_u ; on la note $m_\lambda(u)$ (idem en $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour $m_\lambda(A)$)

Remarque Abusivement λ valeur propre de multiplicité 0 signifie que λ n'est pas valeur propre.

Exemple Soit $A = \begin{pmatrix} \lambda & & \star \\ & \lambda & \\ 0 & & \mu \end{pmatrix}$ avec $\lambda \neq \mu$.
On a $\chi_A = -(X-\lambda)^2(X-\mu)$
λ est valeur propre double et μ est valeur propre simple de A.

Exemple Soit $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$
On a $\chi_A = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$.
Les valeurs propres de A sont les $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ comptées avec multiplicité.

Théorème

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp} u} m_\lambda(u) \leqslant \dim E$$

avec égalité si, et seulement si, le polynôme χ_u est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.
(idem pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)

dém. :
La somme des multiplicités des racines d'un polynôme non nul est inférieur à son degré avec égalité si, et seulement si, ce polynôme est scindé.
□

Corollaire

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors $u \in \mathcal{L}(E)$ possède exactement n valeurs propres comptées avec multiplicité.
(idem en $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

dém. :
Dans $\mathbb{C}[X]$, tout polynôme non constant est scindé.
□

4.4.6 Multiplicité et sous-espace propre

Proposition

Si F est un sous-espace vectoriel stable par u alors $\chi_{u_F} \mid \chi_u$.

dém. :
Dans une base adaptée à F, la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$ avec A matrice de u_F.
On a alors $\chi_u = \chi_A \chi_C$ avec $\chi_A = \chi_{u_F}$.
□

Théorème

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp} u, 1 \leqslant \dim E_\lambda(u) \leqslant m_\lambda(u)$$

(idem avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)

dém. :
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}u$.
D'une part, $F = E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda\mathrm{Id}) \neq \{0\}$ donc $\dim F \geqslant 1$.
D'autre part, F est stable par u donc $\chi_{u_F} \mid \chi_u$.
Or $\chi_{u_F} = (\lambda - X)^{\dim F}$ car $u_F = \mathrm{Id}_F$ donc λ est racine de multiplicité au moins $\dim F$ de χ_u.
□

Corollaire

Si λ est une valeur propre simple alors le sous-espace propre associé est de dimension 1.

4.5 Diagonalisation

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$

4.5.1 Endomorphisme diagonalisable

Définition

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit diagonalisable lorsqu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale. Une telle base est appelée base de diagonalisation de u.

Exemple Id_E est diagonalisable et n'importe qu'elle base de E est base de diagonalisation.

Exemple Les projections vectorielles sont diagonalisables.
En effet si $E = F \oplus G$ alors la projection sur F parallèlement à G a pour matrice

$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O_{n-r} \end{pmatrix}$$

dans une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.
C'est analogue pour une symétrie vectorielle.

Théorème

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on a équivalence entre :
(i) u est diagonalisable ;
(ii) il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.

dém. :
(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons u diagonalisable et considérons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de diagonalisation de u.
La matrice de u dans $\mathcal{B}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $u(e_i) = \lambda_i e_i$ avec $e_i \neq 0$ donc e_i vecteur propre de u.
La famille $\mathcal{B}$ est donc une base de vecteurs propres de u.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons l'existence d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs propres de u.
Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $u(e_i) = \lambda_i e_i$ avec λ_i la valeur propre associée au vecteur propre e_i.
La matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est alors de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

□

Exemple Si u est diagonalisable et si $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda\}$ alors $u = \lambda \mathrm{Id}_E$.
En effet, la matrice de u dans une base de vecteurs propres est λI_n.

Proposition

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable alors
1) u possède n valeurs propres comptées avec multiplicité ;
2) les matrices diagonales représentant u sont celles dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de u comptées avec multiplicité.

dém. :
Si $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ représente l'endomorphisme u dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ alors

$$\chi_u = \chi_D = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$$

est donc les $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont exactement les valeurs propres de u comptées avec multiplicité.
Ainsi u possède n valeurs propres comptées avec multiplicité et une matrice diagonale représentant u a pour coefficients diagonaux ses valeurs propres.
Inversement, soit $\Delta = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ avec $\mu_1, \dots, \mu_n = \lambda_1, \dots, \lambda_n$ à l'ordre près.
Il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mu_i = \lambda_{\sigma(i)}$.
Considérons alors la famille $\mathcal{B}_\sigma = (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$. Par permutation d'une base, la famille $\mathcal{B}_\sigma$ est une base de E et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $u(e_{\sigma(i)}) = \lambda_{\sigma(i)} e_{\sigma(i)}$ donc la matrice de u dans $\mathcal{B}_\sigma$ est la matrice Δ.
□

Théorème

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ possède $n = \dim E$ valeurs propres distinctes alors u est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

dém. :
Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u.
Soient $e_1, \dots, e_n$ des vecteurs propres associés.
La famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est libre car formée de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes. Etant formée de $n = \dim E$ vecteurs de E, c'est une base de E diagonalisant u.
On a alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} u = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D$$

et donc

$$\chi_u = \chi_D = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$$

Puisque les $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont deux à deux distincts, les valeurs propres de u sont toutes simples et les sous-espaces propres sont donc de dimension 1.

□

Exemple Ici $E = \mathbb{K}_n[X]$ de dimension $n+1$.
Considérons l'application $\varphi : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_n[X]$ définie par $\varphi(P) = nXP - (X^2 - 1)P'$.

L'application φ est bien définie car si $P = aX^n + \cdots$, $nXP = aX^{n+1} + \cdots$,
$n(X^2-1)P' = naX^{n+1} + \cdots$ et donc $\varphi(P) = 0.X^{n+1} + \cdots \in \mathbb{K}_n[X]$.
Puisque $\varphi(X^k) = (n-k)X^{k+1} + kX^{k-1}$, la matrice de φ dans $(1, X, \ldots, X^n)$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ n & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & n \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le calcul du polynôme caractéristique n'est alors pas simple.
Considérons alors la base de Taylor $\mathcal{B} = (1, (X-1), \ldots, (X-1)^n)$.
Puisque $\varphi\left((X-1)^k\right) = (n-k)(X-1)^{k+1} + (n-2k)(X-1)^k$, la matrice de φ dans $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} n & & & (0) \\ n & n-2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & -n \end{pmatrix}$$

On en déduit $\chi_\varphi = \prod_{k=0}^{n} (n-2k-X) = (-1)^n \prod_{k=0}^{n} (X-(n-2k))$ et $\text{Sp}\varphi = \{n-2k/k \in [\![0,n]\!]\}$.
Puisque $\text{CardSp}\varphi = n+1 = \dim E$, l'endomorphisme φ est diagonalisable et sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

4.5.2 Diagonalisabilité et sous-espaces propres

Théorème

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :
(i) u est diagonalisable ;
(ii) E est la somme directe des sous-espaces propres de u i.e. :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$$

(iii) $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E$.

dém. :
Rappelons que les sous-espaces propres d'un endomorphisme sont en somme directe.
(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons u diagonalisable.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de diagonalisation. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, e_i est vecteur propre de u donc $e_i \in \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ puis $E \subset \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ et enfin $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Car l'on sait $\dim \bigoplus_{i=1}^{m} F_i = \sum_{i=1}^{m} \dim F_i$.
(iii) $\Rightarrow$ (i) Une famille formée par concaténation de bases des espaces $E_\lambda(u)$ est une famille libre formée de $\dim E$ vecteurs, c'est donc une base de vecteurs propres.
□

Corollaire

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :
(i) u est diagonalisable ;
(ii) χ_u est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\dim E_\lambda(u) = m_\lambda(u)$.

dém. :
(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons u diagonalisable.
Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres de u.
Dans une base adaptée à $E = \overset{m}{\underset{j=1}{\oplus}} E_{\lambda_j}(u)$ la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m I_{\alpha_m} \end{pmatrix}$$

avec $\alpha_k = \dim E_{\lambda_k}(u)$.
On a alors

$$\chi_u = \prod_{k=1}^{m} (\lambda_k - X)^{\alpha_k} = (-1)^n \prod_{k=1}^{m} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$$

χ_u est scindé et pour tout $k \in \{1, \ldots, m\}$, λ_k est racine de χ_u de multiplicité $n_k = \dim E_{\lambda_k}(u)$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons (ii)
Puisque χ_u est scindé, la somme des multiplicités de ses racines égale son degré.
Ainsi $\deg \chi_u = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} m_\lambda(u)$ et donc $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E$ ce qui entraîne la diagonalisabilité de u.
□

4.5.3 Matrice diagonalisable

Définition

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonalisable lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale i.e. il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D \in D_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$P^{-1}AP = D \text{ ou, et c'est équivalent, } A = PDP^{-1}$$

Exemple Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} u$ alors l'endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement si, la matrice A l'est.

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a équivalence entre :
(i) A est diagonalisable ;
(ii) $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \overset{m}{\underset{i=1}{\oplus}} E_{\lambda_i}(A)$;
(iii) $n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A)$;
(iv) χ_A est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $\dim E_\lambda(A) = m_\lambda(A)$.
De plus, les matrices diagonales semblables à A sont alors celles dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A comptées avec multiplicité.

dém. :
On transpose ce qui précède au cadre matriciel.
□

Théorème

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet n valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable et de plus ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Exemple Une matrice triangulaire à coefficients diagonaux distincts est diagonalisable.

4.5.4 Mise en pratique

4.5.4.1 Étude de diagonalisabilité

Exemple Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
$\chi_A = X^2 - 2X + 2$.
Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A n'est pas diagonalisable car χ_A n'est pas scindé.
Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A est diagonalisable car admet deux valeurs propres $1+i$ et $1-i$.
La matrice A est alors semblable à

$$\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

Exemple Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
$\chi_A(X) = (1-X)^2$, Sp$A = \{1\}$.
Si A est diagonalisable alors A est semblable à I_2 donc égale à I_2.
Ainsi A est diagonalisable si, et seulement si, $a = 0$.

Exemple Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
$\chi_A = -(X-1)^2(X-2)$, Sp$A = \{1,2\}$.
$\dim E_1(A) = 3 - \text{rg}(A - I_3)$, or $\text{rg}(A - I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$ donc
$\dim E_1(A) = 1 < 2 = m_1(A)$.
La matrice A n'est donc pas diagonalisable.

Exemple Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geqslant 2$.
$\chi_A = (n-X)X^{n-1}$, Sp$(A) = \{0, n\}$.
$\dim E_0(A) = n - \text{rg}A = n-1$ et $\dim E_1(A) = 1$ (valeur propre simple).
Puisque $\dim E_0(A) + \dim E_n(A) = n$, A est diagonalisable semblable à $D = \text{diag}(n, 0, \dots, 0)$.

Bilan - n valeurs propres distinctes $\Rightarrow A$ diagonalisable ;
- $\sum \dim E_\lambda(A) = n \Rightarrow A$ diagonalisable ;
- χ_A non scindé $\Rightarrow A$ non diagonalisable ;
- $\exists \lambda \in \mathrm{Sp}A, \dim E_\lambda(A) < m_\lambda(A) \Rightarrow A$ non diagonalisable.

4.5.4.2 Diagonalisation effective d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.
Pour diagonaliser l'endomorphisme u, il suffit d'exhiber une base de vecteurs propres en considérant, par exemple, une base adaptée à la décomposition $E = \underset{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)}{\oplus} E_\lambda(u)$.

Exemple Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ déterminé dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\chi_u = -X(X-1)(X-2)$, $\mathrm{Sp}u = \{0, 1, 2\}$.
$\mathrm{CardSp}u = 3 = \dim E$ donc u est diagonalisable.
$E_0(u) = ?$

Soit $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in E$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

$$u(x) = 0 \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Ainsi $E_0(u) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2)$ et de même on obtient $E_1(u) = \mathrm{Vect}(-e_1 + e_2 + e_3)$,
$E_2(u) = \mathrm{Vect}(e_2 + e_3)$.
Soient $\varepsilon_1 = e_1 - e_2$, $\varepsilon_2 = -e_1 + e_2 + e_3$ et $\varepsilon_3 = e_2 + e_3$.
La famille $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E (famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes ou base adaptée à la décomposition de E en somme directe de sous-espaces propres).
La matrice de u dans $\mathcal{B}'$ est

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

En notant P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, on a $A = PDP^{-1}$.
Ici

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.5.4.3 Diagonalisation effective d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable.
On a $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}A} E_\lambda(A)$, on peut donc former une base $(C_1, \ldots, C_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à partir de vecteurs propres de A. Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, notant λ_j la valeur propre associée au vecteur propre C_j : $AC_j = \lambda_j C_j$.
Considérons P la matrice de colonnes $C_1, \ldots, C_n$: $P = (C_1 \mid \ldots \mid C_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
rg$P$ = rg$(C_1, \ldots, C_n) = n$ donc P est inversible.
$P^{-1}AP = P^{-1}\left(AC_1 \mid \ldots \mid AC_n\right) = P^{-1}(\lambda_1 C_1 \mid \ldots \mid \lambda_n C_n) = \left(\lambda_1 P^{-1}C_1 \mid \ldots \mid \lambda_n P^{-1}C_n\right)$.
Or $P^{-1}P = \left(P^{-1}C_1 \mid \ldots \mid P^{-1}C_n\right) = I_n$ donc $P^{-1}AP = D$ (ou encore $A = PDP^{-1}$)

Bilan Si A est diagonalisable alors on a $A = PDP^{-1}$ avec P matrice dont les colonnes forme une base de vecteurs propres de A et D matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres respectives des colonnes formant P.

Exemple Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\chi_A = (X-1)^2(X+1)^2$ via $C_1 \leftarrow C_1 + C_4$ et $C_2 \leftarrow C_2 + C_3$.
Sp$(A) = \{1, -1\}$.

$$E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), E_{-1}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$\dim E_1(A) + \dim E_{-1}(A) = 4$ donc A est diagonalisable.
Pour

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

on a $A = PDP^{-1}$.

Exemple Pour $\theta \neq 0 \quad [\pi]$, considérons $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
$\chi_{R(\theta)} = X^2 - 2\cos\theta X + 1$.
$\Delta = -4\sin^2\theta < 0$
Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
La matrice $R(\theta)$ n'est pas diagonalisable car $\chi_{R(\theta)}$ non scindé.
Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
On a

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(R_\theta) = \left\{\mathrm{e}^{i\theta}, \mathrm{e}^{-i\theta}\right\}$$

et

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{e^{i\theta}}(R(\theta)) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta x - \sin\theta y = e^{i\theta} x \\ \sin\theta x + \cos\theta y = e^{i\theta} y \end{cases} \Leftrightarrow ix + y = 0$$

$E_{e^{i\theta}}(R(\theta)) = \text{Vect}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Par conjugaison $E_{e^{-i\theta}}(R(\theta)) = \text{Vect}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour $P = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $R(\theta) = PD(\theta)P^{-1}$ avec $D(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$.

4.5.5 Applications de la diagonalisabilité

4.5.5.1 Calcul des puissances d'une matrice

Idée :Si A est diagonalisable alors on peut écrire $A = PDP^{-1}$ avec $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et D diagonale.
On a alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1}$.

Exemple Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
$\chi_A = X^2 - 5X + 6$. Sp$A = \{2, 3\}$.
$E_2(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_3(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
$A^n = PD^nP^{-1} = P\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} + P\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = 2^n\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 3^n\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4.5.5.2 Résolution d'équation matricielle

Exemple Résolvons l'équation matricielle

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Posons $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
Si M est solution alors $MD = M^3 = DM$.
Les solutions sont à rechercher parmi les matrices commutant avec D.
Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la relation $MD = DM$ donne $\begin{pmatrix} a & 4b \\ c & 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4c & 4d \end{pmatrix}$ et donc $b = c = 0$.
Ainsi la matrice M est diagonale.
Pour $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, l'équation $M^2 = D$ équivaut à $\begin{cases} a^2 = 1 \\ d^2 = 4 \end{cases}$.
Ainsi les solutions de l'équation sont $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $D_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et
$D_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Exemple Résolvons l'équation matricielle

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Posons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. $\chi_A = X^2 - 5X + 4 = (X-1)(X-4)$.
Sp$A = \{1, 4\}$ et A est diagonalisable.
$E_1(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $E_4(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
$M^2 = A \Leftrightarrow M^2 = PDP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}M^2P = D \Leftrightarrow (P^{-1}MP)^2 = D$.
Ainsi les solutions de l'équation étudiée sont $PD_1P^{-1}, PD_2P^{-1}, PD_3P^{-1}$ et PD_4P^{-1}.

Remarque L'équation de degré 2 ici résolue possède plus de deux solutions car l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas intègre.

Remarque Plus généralement, cette démarche permet de résoudre des équations de la forme
$P(M) = A$ avec $P(M)$ polynôme en la matrice inconnue M.

4.5.6 Décomposition spectrale

4.5.6.1 D'un endomorphisme diagonalisable

Soit u un endomorphisme diagonalisable et $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ses valeurs propres deux à deux distinctes
On a la décomposition $E = \overset{m}{\underset{k=1}{\oplus}} E_{\lambda_k}(u)$ et dans une base adaptée à celle-ci la matrice de u est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m I_{\alpha_m} \end{pmatrix}$$

avec $\alpha_k = \dim E_{\lambda_1}(u) = m_{\lambda_k}(u)$.
Par représentation matricielle, il est facile de comprendre l'action de u et de manipuler celui-ci. Nous allons transposer cette compréhension en restant dans le cadre vectoriel.
Notons $(p_k)_{1\leqslant k\leqslant m}$ la famille de projecteurs associée à cette somme directe :
p_k est la projection sur E_{λ_k} parallèlement à $\overset{m}{\underset{j=1, j\neq k}{\oplus}} E_{\lambda_j}(u)$,
On a

$$p_1 + \cdots + p_m = \text{Id}_E \text{ et } p_j \circ p_k = \delta_{j,k} p_k$$

Pour tout $x \in E$, on peut écrire $x = p_1(x) + \cdots + p_m(x)$ avec $p_k(x) \in E_{\lambda_k}(u)$.
et donc $u(x) = \lambda_1 p_1(x) + \cdots + \lambda_m p_m(x) = (\lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_m p_m)(x)$.
Ainsi on a la relation $u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k p_k$.

Définition

L'écriture $u = \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_m p_m$ est appelée décomposition spectrale de l'endomorphisme diagonalisable u.

Théorème

$\forall q \in \mathbb{N}, u^q = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^q p_k.$

dém. :
Par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$.
Pour $q = 0$: ok
Supposons la propriété établie au rang $q \geqslant 0$.
$u^{q+1} = u \circ u^q = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j p_j \circ \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^q p_k = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \lambda_j \lambda_k^q \delta_{j,k} p_k = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^{q+1} p_k.$
Récurrence établie.
□

Corollaire

$\forall P \in \mathbb{K}[X], P(u) = \sum_{k=1}^{m} P(\lambda_k) p_k.$

Remarque Si $L_1, \ldots, L_m$ sont les polynômes interpolateur de Lagrange en $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ alors $L_k(\lambda_k) = 1$ et $L_k(\lambda_j) = 0$ pour $j \neq k$, donc $L_k(u) = p_k$.

4.5.6.2 D'une matrice diagonalisable

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ deux à deux distinctes.
Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m I_{\alpha_m} \end{pmatrix}$$

et $\alpha_k = \dim E_{\lambda_k}(A) = m_{\lambda_k}(A)$
On peut écrire $D = \lambda_1 D_1 + \cdots + \lambda_m D_m$ avec

$$D_1 = \begin{pmatrix} I_{\alpha_1} & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}, \ldots, D_m = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & I_{\alpha_m} \end{pmatrix}$$

$D_1, \ldots, D_m$ vérifient $D_1 + \cdots + D_m = I_n$ et $D_j D_k = \delta_{j,k} D_k$.
On a alors $A = \lambda_1 P D_1 P^{-1} + \cdots + \lambda_m P D_m P^{-1} = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_m A_m$
avec $A_1 + \cdots + A_m = I_n$ et $A_j A_k = \delta_{j,k}$.

Définition

L'écriture $A = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k A_k$ est appelée décomposition spectrale de la matrice diagonalisable A.

Théorème

$\forall q \in \mathbb{N}, A^q = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^q A_k.$

Corollaire

$\forall P \in \mathbb{K}[X], P(A) = P(\lambda_1)A_1 + \cdots + P(\lambda_m)A_m.$

Remarque A l'aide de polynôme de Lagrange, on peut calculer directement les A_k.

Exemple Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
$\chi_A = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$.
Sp$A = \{1, 2\}$, A est diagonalisable.
Déterminons sa décomposition spectrale : $A = A_1 + 2A_2$.
Considérons L polynôme tel que $L(1) = 1$ et $L(2) = 0$.
$L(X) = 2 - X$ convient et alors

$$A_1 = L(A) = 2I_2 - A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } A_2 = I_2 - A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

4.5.7 Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Théorème

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable et $v \in \mathcal{L}(E)$.
On a équivalence entre :
(i) v commute avec u ;
(ii) les sous-espaces propres de u sont stables par v.

dém. :
(i) $\Rightarrow$ (ii) déjà vue.
(ii) $\Leftarrow$ (i) Supposons (ii).
Puisque u est diagonalisable $E = \underset{\lambda \in \mathrm{Sp}u}{\oplus} E_\lambda(u)$.
Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}u$ et $x \in E_\lambda(u)$: $(v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$ et $(u \circ v)(x) = u(v(x)) = \lambda v(x)$ car $v(x) \in E_\lambda(u)$. Ainsi les endomorphismes $u \circ v$ et $v \circ u$ coïncident sur tous les sous-espaces propres de u et puisque $E = \underset{\lambda \in \mathrm{Sp}u}{\oplus} E_\lambda(u)$, ces endomorphismes sont égaux.

□

Corollaire

L'ensemble des endomorphismes $v \in \mathcal{L}(E)$ commutant avec u diagonalisable est une algèbre de dimension

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (\dim E_\lambda(u))^2$$

dém. :
Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres de u diagonalisable.

Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $E = \overset{m}{\underset{k=1}{\oplus}} E_{\lambda_k}(u)$ la matrice de u est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m I_{\alpha_m} \end{pmatrix}$$

avec $\alpha_k = \dim E_{\lambda_k}(u)$.
Les endomorphismes commutant avec u étant ceux laissant stables les sous-espaces propres de u, ce sont les endomorphismes dans la matrice dans la base adaptée $\mathcal{B}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m \end{pmatrix}$$

avec $A_k \in \mathcal{M}_{\alpha_k}(\mathbb{K})$.
L'ensemble de ces matrices est une algèbre de dimension $\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k^2$.
Par l'isomorphisme de représentation matricielle, l'ensemble des endomorphismes commutant avec u est une algèbre de même dimension.
□

Remarque Matriciellement , on obtient que les matrices commutant avec

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m I_{\alpha_m} \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ deux à deux distincts, sont les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m \end{pmatrix}$$

avec $A_j \in \mathcal{M}_{\alpha_j}(\mathbb{K})$.

Exemple Les matrices commutant avec :
- $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$;
- $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$;
- $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont les matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & e & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix}$.

4.6 Trigonalisation

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$.

4.6.1 Trigonalisabilité

Définition

Un endomorphisme u de E est dit trigonalisable lorsqu'il existe une base E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure. Une telle base est dite base de trigonalisation de l'endomorphisme u.

Exemple Un endomorphisme diagonalisable est a fortiori trigonalisable.

Définition

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable lorsqu'elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Exemple Si $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}} u$ alors A est trigonalisable si, et seulement si, u l'est.

4.6.2 Caractérisation

Théorème

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on a équivalence entre :
(i) u est trigonalisable ;
(ii) χ_u est scindé dans $\mathbb{K}[X]$;
De plus, les matrices triangulaire supérieure représentant u ont pour coefficients diagonaux les valeurs propres de u comptées avec multiplicité.
(Idem pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)

dém. :
(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons u trigonalisable. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\chi_u = \chi_T = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$$

Ainsi χ_u est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et les valeurs propres de u sont les $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ comptées avec multiplicité.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$
Pour $n = 1$, c'est immédiat car une matrice de taille 1 est considérée triangulaire supérieure.
Supposons la propriété établie au rang $n \geqslant 1$.
Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n + 1$.
On suppose χ_u scindé. Celui-ci possède donc une racine λ et celle-ci est alors valeur propre de u. Soit e un vecteur propre associé. Considérons $D = \text{Vect}(e)$ et H un sous-espace vectoriel supplémentaire de

D de sorte que $D \oplus H = E$. Considérons $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de H. La matrice de u dans la base $\mathcal{B} = (e, e_1, \ldots, e_n)$ est de la forme

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & \star \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \text{ avec } B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Considérons v l'endomorphisme de H représenté par la matrice B dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.
On a

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n, u(e_i) - v(e_i) \in \text{Vect}(e)$$

et donc

$$\forall x \in H, u(x) - v(x) \in \text{Vect}(e)$$

Puisque $\chi_u = \chi_A = (\lambda - X)\chi_B = (\lambda - X)\chi_v$ et puisque χ_u est scindé, le polynôme χ_v est aussi scindé. Par hypothèse de récurrence, v est trigonalisable et donc il existe une base $(e_1', \ldots, e_n')$ de H dans laquelle la matrice de v est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

La matrice de u dans la base $\mathcal{B}' = (e, e_1', \ldots, e_n')$ est alors de la forme

$$\left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & & \star & \\ \hline & \lambda_1 & & \star \\ 0 & & \ddots & \\ & (0) & & \lambda_n \end{array}\right)$$

puisque

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n, u(e_i') - v(e_i') \in \text{Vect}(e)$$

Récurrence établie.
□

Remarque Le résultat qui précède peut être approfondi pour établir que dans un espace euclidien il existe une base orthonormée de trigonalisation. Pour cela on choisit e_1 unitaire et on prend $H = \text{Vect}(e_1)^\perp$.

Corollaire

Tout endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E est trigonalisable.

Corollaire

Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

dém. :
Car de polynôme caractéristique scindé.
□

Corollaire

Si χ_u est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ alors $\text{tr} u$ et $\det u$ sont la somme et le produit des valeurs propres comptées avec multiplicité.
(Idem pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)

Exemple Si A est une matrice de rang 1 alors $\dim\ker A = n-1$ et donc 0 est valeur propre de multiplicité au moins $n-1$ de la matrice A. Le polynôme χ_A est alors scindé et la matrice A est donc semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & & \star \\ & \ddots & \\ & & 0 & \\ (0) & & & \lambda \end{pmatrix}$$

On alors $\mathrm{tr}A = \lambda$ et λ valeur propre de A car racine $\chi_A(X) = (-1)^{n-1}X^{n-1}(X-\lambda)$

4.6.3 Trigonalisation effective

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que χ_A soit scindé dans $\mathbb{K}[X]$. On peut écrire

$$\chi_A = (-1)^n \prod_{k=1}^{m} (X-\lambda_k)^{\alpha_k}$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres deux à deux distinctes et $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ leurs multiplicités respectives. On admet qu'il est possible de rendre la matrice A semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme

$$\begin{pmatrix} T_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & T_m \end{pmatrix}$$

avec $T_k \in \mathcal{M}_{\alpha_k}(\mathbb{K})$ de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & \varepsilon_1 & & (0) \\ & \lambda_k & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon_{\alpha_k-1} \\ (0) & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

où $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\alpha_k-1} = 0$ ou 1.

Concrètement, si $\chi_A(X) = (X+1)(X-1)^3$, on peut rendre la matrice A semblable à l'une des matrices

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$\chi_A = -(X+1)^3$. $\mathrm{Sp}A = \{-1\}$

La matrice A est trigonalisable sans être diagonalisable car $A \neq -I_3$.

Rendons A semblable à l'une des matrices

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$E_{-1}(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.
Puisque $\dim E_{-1}(A) = 1$, seule la forme

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\0 & -1 & 1\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

est possible.
En effet pour les deux autres formes, le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est de dimension 2.
D'un point de vue vectoriel, si u est représenté par la matrice A, il s'agit de trouver des vecteurs e_1, e_2, e_3 vérifiant $u(e_1) = -e_1$, $u(e_2) = -e_2 + e_1$ et $u(e_3) = -e_3 + e_2$.
En restant dans le cadre matriciel, nous cherchons des colonnes C_1, C_2, C_3 vérifiant $AC_1 = -C_1$, $AC_2 = -C_2 + C_1$ et $AC_3 = -C_3 + C_2$.
Prenons $C_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.
Après résolution de l'équation matricielle $(A + I_3)C_2 = C_1$,
$C_2 = \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ convient.
Après résolution de l'équation matricielle $(A + I_3)C_3 = C_2$,
$C_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ convient
Finalement, pour

$$P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 2 & 0\\0 & -1 & 0\end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$$

on a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\0 & -1 & 1\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Exemple Soit $A = \begin{pmatrix}-1 & -3 & -1\\-1 & 1 & 1\\-2 & -3 & 0\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
$\chi_A = -(X+2)(X-1)^2$.
1 est valeur propre double et -2 est valeur propre simple
$E_{-2}(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $E_1(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

La matrice A n'est pas diagonalisable, cependant elle est trigonalisable, essayons de la rendre semblable

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminons C_1, C_2, C_3 vérifiant $AC_1 = -2C_1$, $AC_2 = C_2$ et $AC_3 = C_3 + C_2$.

$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et, après résolution de l'équation $AC_3 = C_3 + C_2$, $C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ conviennent.

Pour

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$$

on a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.7 Polynôme annulateur

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension quelconque.

4.7.1 Définition

Définition

On appelle polynôme annulateur de $u \in \mathcal{L}(E)$ tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant $P(u) = \tilde{0}$.

Exemple Le polynôme nul annule tout endomorphisme.

Exemple Le polynôme $X - \lambda$ annule l'endomorphisme $\lambda\mathrm{Id}_E$

Exemple Le polynôme $X^2 - X$ est annulateur des projections vectorielles.

Définition

On appelle polynôme annulateur de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant $P(A) = O_n$.

Remarque Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ alors les polynômes annulateurs de A et de u se correspondent.

Exemple Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

On vérifie par le calcul que $P = X^2 - (a+d)X + (ad - bc)$ est annulateur de A.

Exemple Soit

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, on a

$$P(D) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Par suite $P = (X - \lambda_1)\dots(X - \lambda_n)$ est annulateur de D.

Remarque Si A est diagonalisable semblable à D alors P est aussi annulateur de A.
Plus généralement, deux matrices semblables sont annulées par les mêmes polynômes.

4.7.2 Idéal des polynômes annulateurs

Théorème

L'ensemble des polynômes annulateurs de $u \in \mathcal{L}(E)$ est un sous-espace vectoriel et un idéal de $\mathbb{K}[X]$.
Idem en $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

dém. :
Notons $I = \left\{P \in \mathbb{K}[X] / P(u) = \tilde{0}\right\}$.
$I \subset \mathbb{K}[X]$, $0 \in I$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $P, Q \in I$.
$(\lambda P + \mu Q)(u) = \lambda P(u) + \mu Q(u) = \tilde{0}$.
Ainsi $\lambda P + \mu Q \in I$.
Soient $P \in I$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$.
$(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = \tilde{0}$ car $P(u) = \tilde{0}$.
Ainsi $PQ \in I$.
Plus rapidement, on pouvait aussi remarque que I est le noyau du morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$.
□

Corollaire

Si P annule u et si $P \mid Q$ alors Q annule u.
Idem en $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

4.7.3 Valeurs propres et polynômes annulateurs

Lemme

Si λ est valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$ alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$.

dém. :
Soit λ une valeur propre de u. Il existe $x \neq 0_E$ tel que $u(x) = \lambda x$.
On a $u^2(x) = u(\lambda x) = \lambda^2 x, \dots, u^n(x) = \lambda^n x$.
Soit $P = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$.

On a $P(u)(x) = (a_n u^n + \cdots + a_1 u + a_0 \mathrm{Id})(x) = (a_n \lambda^n x + \cdots + a_1 \lambda x + a_0 x) = P(\lambda)x$ avec $x \neq 0_E$ donc $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$.
□

Théorème

Les valeurs propres de $u \in \mathcal{L}(E)$ figurent parmi les racines des polynômes annulateurs de u.
Idem avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

dém. :
Soient $P(X)$ un polynôme annulateur de u et λ une valeur propre de u.
On a $P(\lambda)$ valeur propre de $P(u) = \tilde{0}$ donc $P(\lambda) = 0$.
□

Attention : Des racines d'un polynôme annulateur peuvent ne pas être valeur propre.

Exemple Si p est une projection vectorielle alors $X^2 - X = X(X-1)$ est annulateur de p et donc Sp$p \subset \{0, 1\}$.

Exemple Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 = I_n$.
Le polynôme $X^3 - 1$ est annulateur de A.
Dans $\mathbb{R}$, $X^3 - 1 = (X-1)(X^2 + X + 1)$ donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} A \subset \{1\}$.
Or A est une matrice réelle de taille impaire donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} A \neq \emptyset$ puis

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} A = \{1\}$$

Dans $\mathbb{C}$, $X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-j^2)$ donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} A \subset \left\{1, j, j^2\right\}$.
Puisque 1 est valeur propre et puisque les valeurs propres de A sont deux à deux conjuguées

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} A = \{1\} \text{ ou } \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} A = \left\{1, j, j^2\right\}$$

On en déduit $\mathrm{tr}(A) = 3$ ou $\mathrm{tr}(A) = 0$ et $\det A = 1$ (car χ_A est scindé)

4.8 Polynômes annulateurs en dimension finie

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$.

4.8.1 Théorème de Cayley Hamilton

Théorème

Le polynôme caractéristique χ_u de $u \in \mathcal{L}(E)$ est annulateur de u.
Idem en $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $\chi_A = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A)$ est annulateur de A.

Exemple Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$.
Montrons qu'il y a équivalence entre
(i) u est nilpotent ;
(ii) $\mathrm{Sp}u = \{0\}$;
(iii) $u^n = \tilde{0}$.
(i) $\Rightarrow$ (ii) Si u est nilpotent alors il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ vérifiant $u^p = \tilde{0}$.
Le polynôme X^p est annulateur de u et puisque 0 est sa seule racine $\mathrm{Sp}u \subset \{0\}$.
De plus $\mathrm{Sp}u \neq \emptyset$ car le corps de base est $\mathbb{C}$ et donc $\mathrm{Sp}u = \{0\}$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Supposons $\mathrm{Sp}u = \{0\}$.
Puisque χ_u est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et que sa seule racine est 0, $\chi_u = (-1)^n X^n$.
En vertu du théorème de Cayley Hamilton, $\chi_u(u) = \tilde{0}$ et donc $u^n = \tilde{0}$.
(iii) $\Rightarrow$ (i) C'est immédiat.

4.8.2 Polynôme minimal

Théorème

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique polynôme Π_u vérifiant :
1) Π_u est annulateur de u ;
2) Π_u est unitaire ;
2) $\forall P \in \mathbb{K}[X], P(u) = \tilde{0} \Rightarrow \Pi_u \mid P$.
Ce polynôme Π_u est appelé polynôme minimal de l'endomorphisme u.
Idem en $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

dém. :
Existence :
Considérons $I = \left\{P \in \mathbb{K}[X] / P(u) = \tilde{0}\right\}$.
Puisque I est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $I = Q.\mathbb{K}[X]$.
Puisque $\chi_u \in I$, l'idéal I est non nul et $Q \neq 0$. Notons λ le coefficient dominant de u et considérons $\Pi_u = Q/\lambda$. Le polynôme Π_u est unitaire et vérifie $I = \Pi_u.\mathbb{K}[X]$.
Unicité :
Supposons Π_u et $\tilde{\Pi}_u$ solutions.
Puisque $\tilde{\Pi}_u(u) = \tilde{0}$, $\Pi_u \mid \tilde{\Pi}_u$. De façon symétrique, $\tilde{\Pi}_u \mid \Pi_u$ et donc Π_u et $\tilde{\Pi}_u$ sont associés.
Or ils sont tous deux unitaires donc égaux.
□

Remarque On a $1 \leqslant \deg \Pi_u \leqslant n$.
En effet, χ_u annule u donc le polynôme minimal Π_u divise χ_u et en particulier $\deg \Pi_u \leqslant n$.
De plus Π_u ne peut être le polynôme constant égal à 1 donc $\deg \Pi_u \geqslant 1$.

Exemple Soit $u = \lambda\mathrm{Id}$.
$X - \lambda$ annule u et donc $\Pi_u \mid X - \lambda$.
Puisque Π_u est unitaire de degré au moins 1, on obtient $\Pi_u = X - \lambda$.

Exemple Soit p une projection autre que $\tilde{0}$ et Id_E,
$p^2 = p$ donne $\Pi_p \mid X(X-1)$.
Puisque Π_p est unitaire de degré au moins $\Pi_p = X, X - 1$ ou $\Pi_p = X(X-1)$.

Puisque $p \neq \tilde{0}$ et $p \neq \mathrm{Id}_E$ les cas $\Pi_p = X$ et $\Pi_p = X - 1$ sont à exclure.
Il reste $\Pi_p = X(X-1)$.

Exemple Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
$\chi_A = X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$.
Puisque $\Pi_A \mid \chi_A$ donc $\Pi_A = X-1, X-2$ ou $(X-2)(X-3)$.
Les cas $\Pi_A = 1, X-1$ ou $X-2$ sont à exclure et il reste $\Pi_A = (X-2)(X-3)$.

Exemple Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
$\chi_D = -(X-1)^2(X-2)$ et $\Pi_D = (X-1)(X-2)$.

4.8.3 Polynôme minimal et valeur propre

Théorème

Les valeurs propres de $u \in \mathcal{L}(E)$ sont exactement les racines de son polynôme minimal.
Idem en $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

dém. :
On sait déjà que les valeurs propres de u sont racines de Π_u car Π_u est annulateur.
Inversement, si λ est racine de Π_u alors λ est aussi racine de χ_u donc λ est valeur propre de u.
$\square$

Exemple Le polynôme $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp} u} (X - \lambda)$ divise Π_u.

4.8.4 Application : calcul des puissances d'un endomorphisme

Si $m = \deg \Pi_u$ alors on peut écrire $u^m = a_0 \mathrm{Id} + a_1 u + \cdots + a_{m-1} u^{m-1}$ puis de même $u^{m+1} = u \circ u^m$ peut s'écrire sous cette forme…

Théorème

Si $m = \deg \Pi_u$ alors

$$\mathbb{K}[u] = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}, u, \ldots, u^{m-1})$$

est une algèbre de dimension m.
(Idem avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

dém. :
Commençons par montrer $\mathbb{K}[u] = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}, u, \ldots, u^{m-1})$
On a déjà l'inclusion $\mathrm{Vect}(\mathrm{Id}, u, \ldots, u^{m-1}) \subset \mathbb{K}[u]$.
Inversement, soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
Par division euclidienne, on peut écrire $P = Q\Pi_u + R$ avec $\deg R < m$.
On a alors $P(u) = Q(u) \circ \Pi_u(u) + R(u) = R(u) \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}, u, \ldots, u^{m-1})$.

Ainsi $\mathbb{K}[u] \subset \text{Vect}(\text{Id}, u, \ldots, u^{m-1})$ puis l'égalité.
Montrons maintenant que la famille $(\text{Id}, u, \ldots, u^{m-1})$ est libre.
Supposons $a_0\text{Id} + a_1 u + \cdots + a_{m-1}u^{m-1} = \tilde{0}$.
Pour $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{m-1}X^{m-1}$, on a $P(u) = 0$.
Or $\deg P < \deg \Pi_u$ donc $P = 0$ puis $a_0 = a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0$.
Ainsi la famille $(\text{Id}, u, \ldots, u^{m-1})$ est libre et c'est donc une base de $\mathbb{K}[u]$.
□

Corollaire

$\dim \mathbb{K}[u] \leqslant \dim E$ et $\dim \mathbb{K}[A] \leqslant n$.

dém. :
Car le polynôme minimal diviseur du polynôme caractéristique est de degré inférieur à n.
□

Exemple Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculons A^n.
On sait $\Pi_A = (X-2)(X-3)$.
Par division euclidienne :

$$X^n = \Pi_A(X)Q(X) + \alpha X + \beta \ (1)$$

En évaluant la relation (1) en 2 et en 3, on obtient

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 2^n \\ 3\alpha + \beta = 3^n \end{cases} \text{donc} \begin{cases} \alpha = 3^n - 2^n \\ \beta = 3.2^n - 2.3^n \end{cases}$$

En évaluant la relation (1) en A, on obtient

$$A^n = (3^n - 2^n)A + (3.2^n - 2.3^n)I_2$$

4.8.5 Diagonalisabilité et polynôme annulateur

Théorème

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :
(i) u est diagonalisable ;
(ii) u annule le polynôme $\prod_{\lambda \in \text{Sp}u} (X - \lambda)$.
De plus, on a alors

$$\Pi_u = \prod_{\lambda \in \text{Sp}u} (X - \lambda)$$

(idem pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)

dém. :
Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres de u. Posons $P = \prod_{k=1}^{m} (X - \lambda_k)$.
(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons u diagonalisable.
Dans une base adaptée la matrice de u est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_m I_{\alpha_m} \end{pmatrix}$$

Dans cette base, la matrice de $P(u)$ est

$$\begin{pmatrix} P(\lambda_1)I_{\alpha_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & P(\lambda_m)I_{\alpha_m} \end{pmatrix} = O_n$$

Ainsi $P(u) = \tilde{0}$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons $P(u) = \tilde{0}$.
Puisque les facteurs $X - \lambda_k$ sont deux à deux premiers entre eux, le lemme de décomposition des noyaux donne

$$E = \ker P(u) = \overset{m}{\underset{k=1}{\oplus}} \ker(u - \lambda_k \mathrm{Id}) = \overset{m}{\underset{k=1}{\oplus}} E_{\lambda_k}(u)$$

Ainsi u est diagonalisable.
De plus, si tel est le cas, $\Pi_u \mid P$ et puisque les valeurs propres sont racines de Π_u, $P \mid \Pi_u$.
□

Corollaire

u est diagonalisable si, et seulement si, Π_u est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ à racines simples.

dém. :
Si u est diagonalisable alors $\Pi_u = \prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp} u} (X - \lambda)$ est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ à racines simples.
Inversement, si Π_u est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ à racines simples alors $\Pi_u = \prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp} u} (X - \lambda)$ car les valeurs propres de u sont exactement les racines de Π_u.
Puisque $\Pi_u(u) = 0$, ce qui précède donne u est diagonalisable.
□

Définition

On dit qu'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est scindé simple lorsqu'il est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ à racines simples

Théorème

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :
(i) u est diagonalisable ;
(ii) u annule un polynôme scindé simple.
(idem pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)

dém. :
(i) $\Rightarrow$ (ii) Ci-dessus
(ii) $\Leftarrow$ (i) Si u annule un polynôme scindé simple alors Π_u divise celui-ci et est donc lui-même scindé simple.
□

Exemple Soit $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $T(M) = {}^tM$. $T \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
On a $T^2 = \mathrm{Id}$ donc $X^2 - 1$ annule T.
Puisque le polynôme $X^2 - 1$ est scindé simple, l'endomorphisme T est diagonalisable.
De plus Sp$T \subset \{1, -1\}$.
$E_1(T) = \ker(T - \mathrm{Id}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $E_{-1}(T) = \ker(I + \mathrm{Id}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
On en déduit tr$T = \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) - \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = n$ et $\det T = (-1)^{\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R})} = (-1)^{n(n-1)/2}$.
En fait, l'endomorphisme T est la symétrie vectorielle par rapport à $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Exemple Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I = 0$.
Montrons que n est pair et calculons $\det A$ et tr$A$.
A annule $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ scindé simple donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
De plus Sp$A \subset \{i, -i\}$ or Sp$A \neq \emptyset$ et les valeurs propres de A sont conjuguées car $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc Sp$A = \{i, -i\}$.
De plus, les multiplicités des valeurs propres conjuguées sont égales car $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$ donc $\dim E_i(A) = \dim E_{-i}(A)$.
En posant p cette valeur commune, on peut affirmer que A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à
$\begin{pmatrix} iI_p & O \\ O & -iI_p \end{pmatrix}$
On en déduit $n = 2p$, $\det A = 1$ et tr$A = 0$.

4.8.6 Application : sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme diagonalisable

Théorème

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable et si F est un sous-espace vectoriel stable par u alors u_F est diagonalisable.

dém. :
Si u est diagonalisable alors u annule un polynôme scindé simple P et alors $P(u_F) = (P(u))_F = \tilde{0}$ donc u_F annule un polynôme scindé simple et est donc diagonalisable.
□

Corollaire

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.
Les sous-espaces vectoriels stables par u sont ceux admettant une base de vecteurs propres.

dém. :
Si F est stable par u alors u_F est diagonalisable donc F admet une base de vecteurs propres de u_F qui sont aussi vecteurs propres de u.
Inversement, si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de F formée de vecteurs propres alors pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, $u(e_j) \in$ Vect$(e_j) \subset F$ et donc F est stable par u.
□

Exemple Soient u et $v \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisables.
Montrons que si u et v commutent alors il existe une base de E formée de vecteurs propres communs à u et v [base de diagonalisation commune].
Puisque u est diagonalisable, $E = \underset{\lambda \in \mathrm{Sp}u}{\oplus} E_\lambda(u)$.
Pour $\lambda \in$ Spu, $E_\lambda(u)$ est stable par v, or v est diagonalisable donc $v_{E_\lambda(u)}$ l'est aussi. Ainsi, il existe une base $\mathcal{B}_\lambda$ de $E_\lambda(u)$ formée de vecteurs propres de v. Cette base est a fortiori formée de vecteur propre de u. En accolant les bases $\mathcal{B}_\lambda$, on forme une base de E formée de vecteurs propres communs à u et v.
Matriciellement, on a obtenu que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont diagonalisables et commutent alors il existe $P \in$ GL$_n(\mathbb{K})$ vérifiant $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont diagonales.

4.8.7 Trigonalisabilité et polynôme annulateur

Théorème

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on a équivalence entre :
(i) u est trigonalisable ;
(ii) u annule un polynôme scindé.
(idem pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)

dém. :
(i) $\Rightarrow$ (ii) Si u est trigonalisable alors χ_u est scindé et on conclut en vertu du théorème de Cayley-Hamilton.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$, montrons que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ annule un polynôme scindé alors A est trigonalisable.
Cas $n = 1$: ok
Supposons la propriété vraie au rang $n \geqslant 1$.
Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ annulant un polynôme scindé P.
Le polynôme minimal Π_A divisant P, celui-ci aussi est scindé et possède donc une racine λ qui est valeur propre de A. Soit $C_1 \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{K})$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ de A.
On complète la famille libre (C_1) en une base $(C_1, C_2, \ldots, C_{n+1})$ de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{K})$ et on considère la matrice $Q \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ formée de ces colonnes. Par changement de base

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda & \star \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{ avec } B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Le polynôme P annulant A, il annule aussi B et donc B est trigonalisable en vertu de l'hypothèse de récurrence. Il existe donc $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$R^{-1}BR = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Considérons alors

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

La matrice T est inversible et

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$(QT)^{-1}AQT = \begin{pmatrix} \lambda & & & \star \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Récurrence établie.
□

Exemple Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente. Il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que $A^p = O_n$.
Ainsi le polynôme scindé X^p annule A et donc A est trigonalisable.
De plus $\mathrm{Sp}A \subset \{0\}$ et donc A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.
On en déduit $\chi_A = (-1)^n X^n$ et $A^n = O_n$.

Corollaire

Tout endomorphisme induit par un endomorphisme trigonalisable est lui-même trigonalisable.

dém. :
Car l'endomorphisme induit est annulé par le même polynôme scindé.
□

4.8.8 Musculation : trigonalisation simultanée

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ commutant. On suppose u et v trigonalisables et $u \circ v = v \circ u$. Montrons par récurrence sur $n = \dim E \in \mathbb{N}^\star$ qu'il existe une base de E trigonalisant à la fois u et v.
Cas $n = 1$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n \geqslant 1$.
Puisque u est trigonalisable, u possède au moins une valeur propre λ. Le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est alors stable par v et donc l'endomorphisme induit par v sur $E_\lambda(u)$ est aussi trigonalisable. Il existe donc un vecteur propre e_1 de v dans $E_\lambda(u)$. Le vecteur e_1 est vecteur propre commun à u et v. On peut compléter la famille libre (e_1) en une base $(e_1, e_2, \ldots, e_{n+1})$ de E et les matrices de u et v dans cette base sont de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \star \\ 0 & A' \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \mu & \star \\ 0 & B' \end{pmatrix} \text{ avec } A', B' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Puisque u et v est trigonalisable, cet endomorphisme annule un polynôme scindé et la matrice A est aussi annulé par celui-ci. On en déduit que A' est trigonalisable et de même B' est trigonalisable.
De plus $u \circ v = v \circ u$ entraîne $AB = BA$ puis $A'B' = B'A'$. Par application de l'hypothèse de récurrence, on peut affirmer qu'il existe $P' \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que les matrices $P'^{-1}A'P'$ et $P'^{-1}B'P'$ sont triangulaires supérieures. Considérons alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$$

On a $\det P = \det P' \neq 0$ donc P est inversible et en opérant par produit par blocs, on obtient $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ triangulaires supérieures.
Récurrence établie.

Chapitre 5

Espaces préhilbertiens

5.1 Structure réelle

5.1.1 Produit scalaire

Définition

On appelle produit scalaire (euclidien) sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E toute application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant :
1) φ est bilinéaire ;
2) φ est symétrique i.e. $\forall x, y \in E, \varphi(y, x) = \varphi(x, y)$;
3) φ est positive i.e. $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geqslant 0$;
4) φ est définie i.e. $\forall x \in E, \varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$.
On dit qu'un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Remarque Les points 3) et 4) peuvent aussi être obtenus en observant

$$\forall x \in E \backslash \{0_E\}, \varphi(x, x) > 0$$

Exemple Sur $E = \mathbb{R}^n$ considérons

$$\varphi : (x, y) \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

$\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est bien définie.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

$$\varphi(x, \lambda y + \mu z) = \sum_{k=1}^{n} x_k(\lambda y_k + \mu z_k) = \lambda\varphi(x, y) + \mu\varphi(x, z)$$

φ est linéaire en sa deuxième variable.

$$\varphi(y, x) = \sum_{k=1}^{n} y_k x_k = \varphi(x, y)$$

φ est symétrique et donc bilinéaire.

$$\varphi(x,x) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geqslant 0$$

Si $\varphi(x,x) = 0$ alors $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 0$ donc $\forall k \in \{1,\dots,n\}, x_k = 0$ d'où $x = 0$.
φ est donc définie positive.
Finalement φ est un produit scalaire.

Exemple Sur $E = \mathbb{C}$ considérons

$$\varphi : (z,z') \mapsto \text{Re}(\bar{z}z')$$

$\varphi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ est bien définie.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $z, z', z'' \in \mathbb{R}$.

$$\varphi(z, \lambda z' + \mu z'') = \text{Re}\left(\bar{z}(\lambda z' + \mu z'')\right) = \lambda \text{Re}(\bar{z}z') + \mu \text{Re}(\bar{z}z'') = \lambda\varphi(z,z') + \mu\varphi(z,z'')$$

$$\varphi(z',z) = \text{Re}(\bar{z}'z) = \text{Re}\left(\overline{\bar{z}'z}\right) = \text{Re}\left(z'\bar{z}\right) = \varphi(z,z')$$

Ainsi φ est un forme bilinéaire symétrique.

$$\varphi(z,z) = \text{Re}\left(\bar{z}z\right) = \text{Re}\left(|z|^2\right) = |z|^2 \geqslant 0$$

et

$$\varphi(z,z) = 0 \Rightarrow z = 0$$

Ainsi φ est définie positive et donc φ est un produit scalaire sur $\mathbb{C}$.
En fait, pour $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$, $\varphi(z,z') = aa' + bb'$.

Exemple Sur $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, considérons

$$\varphi : (A,B) \mapsto \text{tr}({}^tAB)$$

$\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est bien définie car ${}^tAB$ est une matrice carrée.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

$$\varphi(A, \lambda B + \mu C) = \text{tr}\left({}^tA(\lambda B + \mu C)\right) = \lambda\varphi(A,B) + \mu\varphi(A,C)$$

$$\varphi(B,A) = \text{tr}\left({}^tBA\right) = \text{tr}^t\left({}^tBA\right) = \text{tr}\left({}^tAB\right) = \varphi(A,B)$$

Ainsi φ est une forme bilinéaire symétrique.

$$\varphi(A,A) = \text{tr}\left({}^tAA\right) = \sum_{j=1}^{p} \left[{}^tAA\right]_{j,j}$$

Or

$$\left[{}^tAA\right]_{j,j} = \sum_{i=1}^{n} \left[{}^tA\right]_{j,i} [A]_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2$$

en notant $a_{i,j}$ les coefficients de A.

$$\varphi(A,A)=\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}^2$$

Ainsi $\varphi(A,A)\geqslant 0$ et $\varphi(A,A)=0\Rightarrow A=O_{n,p}$.
φ est donc définie positive et par suite c'est un produit scalaire.
En fait

$$\varphi(A,B)=\operatorname{tr}({}^tAB)=\sum_{j=1}^{p}\left[{}^tAB\right]_{j,j}=\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}b_{i,j}$$

Remarque Sur $E=\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\varphi(X,Y)=\operatorname{tr}({}^tXY)={}^tXY$ car ${}^tXY$ est une matrice uni-coefficient.
Ainsi le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est donné par

$$\varphi(X,Y)={}^tXY=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$$

avec $X={}^t\begin{pmatrix}x_1&\cdots&x_n\end{pmatrix}$ et $Y={}^t\begin{pmatrix}y_1&\cdots&y_n\end{pmatrix}$.
L'action de ce produit scalaire est la même que celles du produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple Soit

$$E=\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})=\left\{u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\sum_{n=0}^{+\infty}u_n^2<+\infty\right\}$$

Pour $u,v\in\ell^2(\mathbb{R})$, la série $\sum u_nv_n$ est absolument convergente car $|u_nv_n|\leqslant\frac{1}{2}\left(u_n^2+v_n^2\right)$.
On pose

$$\varphi(u,v)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_nv_n$$

Sans peine, on vérifie que φ est produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$.

Exemple Soient I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$ et

$$E=L^2(I,\mathbb{R})=\left\{f\in\mathcal{C}(I,\mathbb{R})/\int_I f^2<+\infty\right\}$$

Pour $f,g\in L^2(I,\mathbb{R})$, la fonction fg est intégrable sur I car $|fg|\leqslant\frac{1}{2}\left(f^2+g^2\right)$.
Posons

$$\varphi(f,g)=\int_I f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Sans peine, on vérifie que φ est un produit scalaire sur $L^2(I,\mathbb{R})$.

Remarque Si $I=[a,b]$ alors $L^2\left([a,b],\mathbb{R}\right)=\mathcal{C}\left([a,b],\mathbb{R}\right)$.
L'application

$$\varphi:(f,g)\mapsto\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}\left([a,b],\mathbb{R}\right)$.

5.1.2 Espace préhilbertien

Définition

On appelle espace préhilbertien réel tout couple (E, φ) formé d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et d'un produit scalaire φ sur E. Il est alors usuel de noter $(x \mid y)$, $\langle x, y\rangle$ ou $x.y$ au lieu de $\varphi(x, y)$ le produit scalaire de deux vecteurs de E.

Définition

On appelle espace euclidien tout espace préhilbertien réel de dimension finie.

Exemple $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sont des espaces euclidiens pour le produit scalaire canonique.

5.1.3 Norme euclidienne

E désigne un espace préhilbertien réel et $(. \mid .)$ désigne son produit scalaire.

Définition

On appelle norme euclidienne sur E l'application $\|\,.\,\| : E \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$$

Exemple Sur $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \|x\|_2$$

Dans le cas $n = 1$, $\|x\| = \sqrt{x^2} = |x|$.

Exemple Sur $E = \mathbb{C}$ muni du produit scalaire canonique

$$\|z\| = \sqrt{\mathrm{Re}(\bar{z}z)} = |z|$$

Exemple Sur $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique

$$\|A\| = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}^2\right)^{1/2} = \|A\|_2$$

Exemple Sur $E = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$,

$$\|u\| = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2\right)^{1/2} = \|u\|_2$$

Exemple Sur $E = L^2(I, \mathbb{R})$,

$$\|f\| = \left(\int_I f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} = \|f\|_2$$

Proposition

$\forall x \in E$, $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0_E$.
$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$.

dém. :
$\|x\| = 0 \Rightarrow (x \mid x) = 0$ donc $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0_E$.
$\|\lambda x\|^2 = (\lambda x \mid \lambda x) = \lambda^2 (x \mid x) = \lambda^2 \|x\|^2$ donc $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$.
□

Proposition

$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + 2(a \mid b) + \|b\|^2$,
$\|a-b\|^2 = \|a\|^2 - 2(a \mid b) + \|b\|^2$,
$(a - b \mid a + b) = \|a\|^2 - \|b\|^2$.

dém. :
$\|a+b\|^2 = (a+b \mid a+b) = (a \mid a+b) + (b \mid a+b)$ par linéarité en la première variable.
$\|a+b\|^2 = (a \mid a) + (a \mid b) + (b \mid a) + (b \mid b)$ par linéarité en la deuxième variable.
$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + 2(a \mid b) + \|b\|^2$ par symétrie.
Les autres identités s'obtiennent de façon analogue.
□

Proposition

$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$

dém. :
En sommant les deux premières identités remarquables.
□

Proposition

$(a \mid b) = \dfrac{1}{4}\left(\|a+b\|^2 - \|a-b\|^2\right)$

dém. :
En faisant la différence des deux premières identités remarquables.
□

Théorème

$$\forall x, y \in E, |(x \mid y)| \leqslant \|x\| . \|y\|$$

avec égalité si, et seulement si, la famille (x, y) est liée.

dém. :
Cas $x = 0_E$: immédiat.
Cas $x \neq 0_E$: Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\|\lambda x + y\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda(x \mid y) + \|y\|^2 = a\lambda^2 + b\lambda + c \geqslant 0$$

donc $\Delta = 4(x \mid y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leqslant 0$. On en déduit $(x \mid y)^2 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2$.
De plus, il y a égalité si, et seulement si, $\Delta = 0$ c'est-à-dire si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant

$\lambda x + y = 0$. Sachant $x \neq 0_E$, ceci équivaut à dire que la famille (x, y) est liée.
□

Exemple Sur $\mathbb{R}^n$,

$$\left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right)^{1/2}$$

Exemple Sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$,

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left(\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

Théorème

$$\forall x, y \in E,\ \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

avec égalité si, et seulement si, x et y colinéaires et $(x \mid y) \geqslant 0$.
(on dit que x et y sont positivement liés)

dém. :
On a

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2(x \mid y) + \|y\|^2 \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\,|(x \mid y)| + \|y\|^2 \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

avec égalité si, et seulement si, $(x \mid y) = |(x \mid y)| = \|x\|\,\|y\|$ i.e. x, y colinéaires et $(x \mid y) \geqslant 0$.
□

Exemple Dans $\mathbb{C}$, il y a égalité dans l'inégalité $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ si, et seulement si, z et z' figurent sur une même demi-droite droite issue de O.

Corollaire

La norme euclidienne est une norme : tout espace préhilbertien réel est automatiquement un espace normé.

Théorème

Le produit scalaire est une application bilinéaire continue pour la norme euclidienne.

dém. :
$(. \mid .)$ est une application bilinéaire vérifiant $|(x \mid y)| \leqslant 1 \times \|x\|\,\|y\|$ est elle est donc continue.
□

5.1.4 Espace de Hilbert réel

Définition

On appelle espace de Hilbert réel tout espace préhilbertien réel complet (pour la norme euclidienne).

Exemple Les espaces euclidiens sont des espaces de Hilbert réels.

Exemple On peut montrer que $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ est un espace de Hilbert.

5.2 Structure complexe

5.2.1 Sesquilinéarité

E et F désignent des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

Définition

Une application $u : E \to F$ est dite semi-linéaire si

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \forall x, y \in E, u(\lambda x + \mu y) = \bar{\lambda} u(x) + \bar{\mu} u(y)$$

Exemple L'application $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mapsto (\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$ est semi-linéaire.

Exemple Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, on pose $A^\star = {}^t\bar{A}$.
L'application $A \mapsto A^\star$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ vers $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C})$ est semi-linéaire.

Définition

Une application $\varphi : E \times E \to F$ est dite sesquilinéaire si
1) $\forall y \in E$, l'application $x \mapsto \varphi(x, y)$ est semi-linéaire,
2) $\forall x \in E$, l'application $y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire.

Exemple $\varphi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi(x, y) = \bar{x} y$ est sesquilinéaire.
$\varphi : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ définie par $\varphi(A, B) = A^\star B$ est sesquilinéaire.

5.2.2 Produit scalaire

Définition

On appelle produit scalaire (hermitien) sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E toute application $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ vérifiant :
1) φ est sesquilinéaire ;
2) φ est hermitienne i.e. $\forall x, y \in E$, $\overline{\varphi(y, x)} = \varphi(x, y)$ [symétrie hermitienne] ;
3) φ est positive i.e. $\forall x \in E$, $\varphi(x, x) \in \mathbb{R}^+$;
4) φ est définie i.e. $\forall x \in E, \varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$.
Un produit scalaire hermitien est une forme sesquilinéaire définie positive.

Exemple Sur $E = \mathbb{C}^n$ considérons $\varphi : (x, y) \mapsto \sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k y_k = \bar{x}_1 y_1 + \cdots + \bar{x}_n y_n$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $x, y, z \in \mathbb{C}^n$.

$$\varphi(x, \lambda y + \mu z) = \sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k(\lambda y_k + \mu z_k) = \lambda\varphi(x, y) + \mu\varphi(x, z)$$

φ est linéaire en sa deuxième variable.

$$\overline{\varphi(y, x)} = \overline{\sum_{k=1}^{n} \bar{y}_k x_k} = \sum_{k=1}^{n} y_k \bar{x}_k = \varphi(x, y)$$

φ est hermitienne donc sesquilinéaire.

$$\varphi(x, x) = \sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k x_k = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2$$

donc $\varphi(x, x) \in \mathbb{R}^+$ et $\varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
φ est définie positive et finalement φ est un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}^n$.

Exemple Sur $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'application $\varphi : (A, B) \mapsto \mathrm{tr}\,(A^\star B)$ définit un produit scalaire hermitien.

Remarque Sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $\varphi(X, Y) = \mathrm{tr}(X^\star Y) = X^\star Y$

Exemple Sur

$$E = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) = \left\{ u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} / \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 < +\infty \right\}$$

$\varphi(u, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{u}_n v_n$ définit un produit scalaire hermitien.

Exemple Sur

$$E = L_c^2(I, \mathbb{C}) = \left\{ f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C}) / \int_I |f|^2 < +\infty \right\}$$

$\varphi(f, g) = \int_I \bar{f} g$ définit un produit scalaire hermitien.

Remarque En particulier

$$\varphi(f, g) = \int_a^b \overline{f(t)} g(t)\, \mathrm{d}t$$

définit un produit scalaire hermitien sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$

5.2.3 Espace préhilbertien

Définition

On appelle espace préhilbertien complexe tout couple (E, φ) formé d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E et d'un produit scalaire hermitien φ sur E.

Définition

On appelle espace hermitien tout espace préhilbertien complexe de dimension finie.

Exemple $\mathbb{C}^n$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ sont des espaces hermitiens pour le produit scalaire canonique.

5.2.4 Norme hermitienne

E désigne un espace préhilbertien complexe et $(. \mid .)$ désigne son produit scalaire.

Définition

On appelle norme hermitienne sur E l'application $\| . \| : E \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$$

Exemple Sur $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire canonique

$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2} = \|x\|_2$$

Exemple Sur $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$,

$$\|u\| = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2\right)^{1/2} = \|u\|_2$$

Exemple Sur $L^2(I, \mathbb{C})$,

$$\|f\| = \left(\int_I |f|^2\right)^{1/2} = \|f\|_2$$

Proposition

$\forall x \in E, \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0_E$.
$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.

dém. :
$\|x\| = 0 \Rightarrow (x \mid x) = 0$ donc $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0_E$.
$\|\lambda x\|^2 = (\lambda x \mid \lambda x) = \bar{\lambda}\lambda \, (x \mid x) = |\lambda|^2 \|x\|^2$ donc $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.
□

Proposition

$\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + 2\mathrm{Re}(a \mid b) + \|b\|^2$,
$\|a - b\|^2 = \|a\|^2 - 2\mathrm{Re}(a \mid b) + \|b\|^2$.

dém. :
$\|a+b\|^2 = (a+b \mid a+b) = (a \mid a) + (a \mid b) + (b \mid a) + (b \mid b)$ par sesquilinéarité.
Or $(a \mid b) + (b \mid a) = (a \mid b) + \overline{(a \mid b)} = 2\mathrm{Re}(a \mid b)$.
□

Proposition

$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$

dém. :
En sommant les deux premières identités remarquables.
□

Proposition

$(a \mid b) = \frac{1}{4}\left(\|a+b\|^2 - \|a-b\|^2\right) - \frac{i}{4}\left(\|a+ib\|^2 - \|a-ib\|^2\right)$

dém. :
$(a \mid b) = \mathrm{Re}(a \mid b) + i\mathrm{Im}(a \mid b)$
avec $\mathrm{Re}(a \mid b) = \frac{1}{4}\left(\|a+b\|^2 - \|a-b\|^2\right)$ et $\mathrm{Im}(a \mid b) = -\mathrm{Re}(i(a \mid b)) = -\mathrm{Re}(a \mid ib)$.
□

Théorème

$\forall x, y \in E, |(x \mid y)| \leqslant \|x\| \|y\|$ avec égalité si, et seulement si, la famille (x, y) est liée.

dém. :
Cas $x = 0_E$: ok.
Cas $x \neq 0_E$: Considérons le vecteur $u = (x \mid y)x - \|x\|^2 y$.
$\|u\|^2 \geqslant 0$ donne $|(x \mid y)|^2 \|x\|^2 - 2|(x \mid y)|^2 \|x\|^2 + \|x\|^4 \|y\|^2 \geqslant 0$ donc $\|x\|^4 \|y\|^2 \geqslant |(x \mid y)|^2 \|x\|^2$
puis $|(x \mid y)|^2 \leqslant \|x\|^2 \|y\|^2$
De plus, il y a égalité si, et seulement si, $u = 0$.
Or si $u = 0$ alors la famille (x, y) est liée.
Inversement, si la famille (x, y) est liée alors, puisque $x \neq 0$, on peut écrire $y = \lambda x$ et $u = \lambda \|x\|^2 x - \lambda \|x\|^2 x = 0$.
□

Théorème

$\forall x, y \in E, \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

dém. :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(x \mid y) + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2|(x \mid y)| + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

donc $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.
□

Corollaire

La norme hermitienne est une norme : tout espace préhilbertien complexe est automatiquement un espace normé.

Proposition

Le produit scalaire hermitien est une application continue pour la norme hermitienne.

dém. :

Pour $(x_0, y_0) \in E^2$,

$$\begin{aligned}|(x \mid y) - (x_0 \mid y_0)| &\leqslant |(x - x_0 \mid y)| + |(x_0 \mid y - y_0)| \\ &\leqslant \|x - x_0\| \, \|y\| + \|x_0\| \, \|y - y_0\| \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y_0)]{} 0\end{aligned}$$

donc le produit scalaire hermitien est continue en tout $(x_0, y_0) \in E^2$.
□

5.2.5 Espace de Hilbert complexe

Définition

On appelle espace de Hilbert complexe tout espace préhilbertien complexe complet (pour la norme hermitienne).

Exemple Les espaces hermitiens sont des espaces de Hilbert complexes.

5.3 Base orthonormée

E désigne un espace préhilbertien sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de produit scalaire $(. \mid .)$

5.3.1 Vecteurs orthogonaux

Définition

Deux vecteurs x et y de E sont dits orthogonaux si $(x \mid y) = 0$.

Exemple Le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à lui-même :

$$(x \mid x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$$

Exemple Le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à tout autre.

Définition

On dit qu'une famille $(e_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est orthogonale si elle est constituée de vecteurs deux à deux orthogonaux i.e.

$$\forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow (e_i \mid e_j) = 0$$

Proposition

Toute famille orthogonale ne comportant pas le vecteur nul est libre.

dém. :
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille orthogonale finie ne comportant pas le vecteur nul.
Supposons $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E$.
Pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$, $(e_j \mid \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = (e_j \mid 0_E)$ donne $\lambda_j \|e_j\|^2 = 0$ et donc $\lambda_j = 0$.

On peut conclure que la famille est libre.
On étend le résultat aux familles infinies aisément car la liberté d'une famille infinie correspond à la liberté des ses sous-familles finies.
□

Proposition

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille orthogonale

$$\|e_1 + \cdots + e_n\|^2 = \|e_1\|^2 + \cdots + \|e_n\|^2$$

dém. :
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$.
Pour $n = 1$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n \geqslant 1$.
Soit $(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1})$ une famille orthogonale.
En exploitant $\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + 2\text{Re}(a \mid b) + \|b\|^2$ avec $a = e_1 + \cdots + e_n$ et $b = e_{n+1}$, on obtient

$$\|e_1 + \cdots + e_n + e_{n+1}\|^2 = \|e_1 + \cdots + e_n\|^2 + \|e_{n+1}\|^2$$

car $(a \mid b) = 0$.
Par hypothèse de récurrence $\|e_1 + \cdots + e_n + e_{n+1}\|^2 = \|e_1\|^2 + \cdots + \|e_n\|^2 + \|e_{n+1}\|^2$.
Récurrence établie.
□

5.3.2 Base orthonormée

Définition

Une famille $(e_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite orthonormée si elle est constituée de vecteurs unitaires deux à deux orthogonaux i.e.

$$\forall i, j \in I, (e_i \mid e_j) = \delta_{i,j}$$

Proposition

Toute famille orthonormée est libre.

dém. :
Car orthogonale sans le vecteur nul.
□

Définition

On appelle base orthonormée de E toute base de E qui soit aussi une famille orthonormée.

Exemple La base canonique de $\mathbb{K}^n$ est orthonormée pour le produit scalaire canonique.

Exemple La base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est orthonormée pour le produit scalaire canonique.
En effet $(E_{i,j} \mid E_{k,\ell}) = \text{tr}({}^t\overline{E_{i,j}}E_{k,\ell}) = \text{tr}(E_{j,i}E_{k,\ell}) = \text{tr}(\delta_{i,k}E_{j,\ell}) = \delta_{i,k}\delta_{j,\ell}$.

5.3.3 Existence de base orthonormée en dimension finie

Théorème

> Toute famille orthonormée d'un espace euclidien (ou hermitien) E peut être complétée en une base orthonormée.

dém. :
Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille orthonormée de E.
Considérons m le plus grand entier tel qu'il existe une famille orthonormée de E de la forme

$$(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_m)$$

Si $m = \dim E$ alors on a obtenu une base orthonormée.
Si $m < \dim E$ alors Vect$(e_1, \dots, e_m) \neq E$ et donc il existe $x \in E$ tel que $x \notin$ Vect$(e_1, \dots, e_m)$.
Considérons alors $y = x - \sum_{k=1}^{m} (e_k \mid x) e_k$.
Le vecteur y est non nul est

$$\forall 1 \leqslant j \leqslant m, (e_j \mid y) = (e_j \mid x) - \sum_{k=1}^{m} (e_k \mid x)(e_j \mid e_k) = (e_j \mid x) - (e_j \mid x) = 0$$

Le vecteur $e_{m+1} = y/\|y\|$ est alors tel que la famille $(e_1, \dots, e_p, \dots, e_{m+1})$ soit orthonormée : cela contredit la définition de m.
□

Corollaire

> Tout espace euclidien E (ou hermitien) possède au moins une base orthonormée.

dém. :
Il suffit de compléter en une base orthonormée la famille orthonormée vide.
□

5.3.4 Coordonnées dans une base orthonormée

Soit E un espace euclidien (resp. hermitien) de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de celui-ci.

5.3.4.1 Calcul des coordonnées d'un vecteur

Théorème

> Les coordonnées $x_1, \dots, x_n$ d'un vecteur x de E dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ sont données par $x_k = (e_k \mid x)$ de sorte que
>
> $$x = \sum_{k=1}^{n} (e_k \mid x) e_k$$

dém. :
$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ donc $(e_k \mid x) = \left(e_k \mid \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell e_\ell \right) = \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell (e_k \mid e_\ell) = x_k$.
□

Corollaire

> La matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'un endomorphisme u de A dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est déterminée par $a_{i,j} = (e_i \mid u(e_j))$.

dém. :
Le coefficient d'indice (i,j) de A est la i-ème composante dans $\mathcal{B}$ du vecteur $u(e_j)$.
□

Exemple Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $\operatorname{tr} u = \sum_{k=1}^{n} (e_k \mid u(e_k))$.

5.3.4.2 Calcul d'un produit scalaire

Théorème

Pour $x, y \in E$ de coordonnées $x_1, \dots, x_n$ et $y_1, \dots, y_n$ dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ on a
Cas euclidien :

$$(x \mid y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = {}^t XY \text{ et } \|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 = {}^t XX$$

Cas hermitien :

$$(x \mid y) = \bar{x}_1 y_1 + \dots + \bar{x}_n y_n = X^\star Y \text{ et } \|x\|^2 = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 = X^\star X$$

dém. :
$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ et $y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$ donc

$$(x \mid y) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k \mid \sum_{\ell=1}^{n} y_\ell e_\ell \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \bar{x}_k y_\ell (e_k \mid e_\ell) = \sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k y_k$$

car $(e_k \mid e_\ell) = \delta_{k,\ell}$.
□

Corollaire

Considérons $\varphi : E \to \mathbb{K}^n$ définie par $\varphi(x) = (x_1, \dots, x_n)$ avec $x_k = (e_k \mid x)$.
L'application φ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel qui conserve le produit scalaire.
Ainsi, quand E est rapporté à une base orthonormée, E se comporte comme $\mathbb{K}^n$.

5.4 Sous-espaces vectoriels orthogonaux

E désigne un espace préhilbertien réel ou complexe.

5.4.1 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

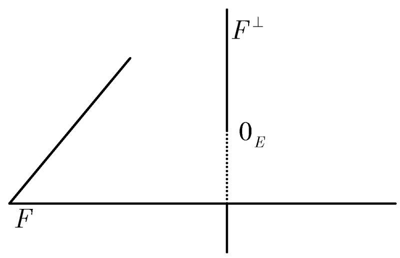
Définition

On appelle orthogonal d'un sous-espace vectoriel F de E l'ensemble noté F° ou $F^\perp$ constitué des vecteurs orthogonaux à tout vecteur de F i.e.

$$F^\perp = \{x \in E / \forall a \in F, (a \mid x) = 0\}$$

Exemple $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$.

Exemple



Exemple Si $F = \text{Vect}(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant m}$ alors

$$F^\perp = \{x \in E / \forall 1 \leqslant k \leqslant m, (e_k \mid x) = 0\}$$

En effet, si $x \in F^\perp$ alors pour tout $1 \leqslant k \leqslant m$, $(e_k \mid x) = 0$ car $e_k \in F$ et $x \in F^\perp$.
Inversement, si pour tout $1 \leqslant k \leqslant m$, $(e_k \mid x) = 0$ alors pour tout $a \in F$, puisqu'on peut écrire $a = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_m e_m$, on a $(a \mid x) = \sum_{k=1}^{m} \overline{\lambda_k}(e_k \mid x) = 0$ et donc $x \in F^\perp$.

Exemple Considérons $E = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel.
Soit

$$F = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n = 0\right\}$$

F est un sous-espace vectoriel de E. Déterminons $F^\perp$.
Soit $u \in F^\perp$.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Considérons $e_p \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ déterminée par $e_p = (\delta_{n,p})_{n \in \mathbb{N}}$.
On a $e_p \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ donc $(e_p \mid u) = 0$ or $(e_p \mid u) = u_p$ donc $u_p = 0$.
Finalement pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_p = 0$ et donc $u = 0$.
Finalement $F^\perp \subset \{0\}$ puis $F^\perp = \{0\}$.

Remarque Ici $F^\perp = \{0\}$ alors que $F \neq E$.

Attention : $F^\perp = G^\perp$ n'implique pas $F = G$.

5.4.2 Propriétés

Théorème

$F^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de E.

dém. :
$F^\perp \subset E$ et $0_E \in F^\perp$ car 0_E est orthogonal à tous les vecteurs de E, notamment ceux de F.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in F^{\perp}$.
Pour tout $a \in F$, $(a \mid \lambda x + \mu y) = \lambda(a \mid x) + \mu(a \mid y) = 0$ donc $\lambda x + \mu y \in F^{\perp}$.
Soit $(x_n) \in (F^{\perp})^{\mathbb{N}}$ convergeant vers un élément x_∞.
Soit $a \in F$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a \mid x_n) = 0$ donc à la limite $(a \mid x_\infty) = 0$ car le produit scalaire est continue.
On en déduit $x_\infty \in F^{\perp}$.
$\ker \varphi_a$ sous-espace vectoriel fermé de E.
□

Proposition

1) $F \subset F^{\perp\perp}$;
2) $F \subset G \Rightarrow G^{\perp} \subset F^{\perp}$;
3) $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$;
4) $(F \cap G)^{\perp} \supset F^{\perp} + G^{\perp}$.

dém. :
1) Soit $x \in F$. Pour tout $y \in F^{\perp}$, $(x \mid y) = 0$ donc $x \in F^{\perp\perp}$.
2) Supposons $F \subset G$.
Soit $x \in G^{\perp}$. Pour tout $y \in F$ on a $(x \mid y) = 0$ car $x \in G^{\perp}$ et $y \in G$. Par suite $x \in F^{\perp}$.
Ainsi $F \subset G \Rightarrow G^{\perp} \subset F^{\perp}$.
3) Puisque $F \subset F + G$ et $G \subset F + G$, on a $(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp}$, $(F+G)^{\perp} \subset G^{\perp}$ et donc $(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
Inversement, soit $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$. Pour tout $y \in F + G$, on peut écrire $y = a + b$ avec $a \in F$ et $b \in G$ et alors $(x \mid y) = (x \mid a) + (x \mid b) = 0$. Ainsi $F^{\perp} \cap G^{\perp} \subset (F+G)^{\perp}$ puis l'égalité.
4) Puisque $F \cap G \subset F$ et $F \cap G \subset G$ alors $F^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$, $G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$ et donc $F^{\perp} + G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$ car $(F \cap G)^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel
□

Attention : Il se peut que l'inclusion $F \subset F^{\perp\perp}$ soit stricte.

Exemple Dans $E = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, considérons $F = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$.
On a $F^{\perp} = \{0\}$ et donc $F^{\perp\perp} = E \neq F$.

Attention : Il se peut que l'inclusion $(F \cap G)^{\perp} \supset F^{\perp} + G^{\perp}$ soit stricte.

Exemple Considérons $E = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, $F = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ et $G = \text{Vect}(u)$ avec $u \in E \backslash F$.
On a $(F \cap G)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = E$ et $F^{\perp} + G^{\perp} = \{0\} + G^{\perp} = G^{\perp} \neq E$ car $u \notin G^{\perp}$.

5.4.3 Sous-espaces vectoriels orthogonaux

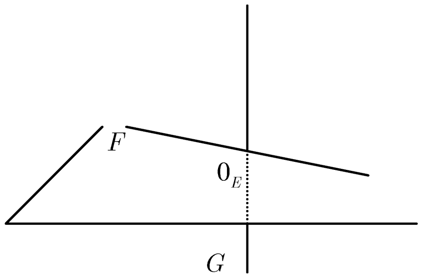
Définition

Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits orthogonaux s'ils sont formés de vecteurs deux à deux orthogonaux i.e.

$$\forall (x, y) \in F \times G, (x \mid y) = 0$$

Exemple F et $F^{\perp}$ sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux.

Exemple



Proposition

> On a équivalence entre :
> (i) F et G sont orthogonaux ;
> (ii) $F \subset G^{\perp}$;
> (iii) $G \subset F^{\perp}$.

dém. :
(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons F et G sont orthogonaux.
Soit $x \in F$. Pour tout $y \in G$, $(x \mid y) = 0$ donc $x \in G^{\perp}$. Ainsi $F \subset G^{\perp}$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons $F \subset G^{\perp}$.
Pour tout $x \in F$ et $y \in G$, $(x \mid y) = 0$ car $x \in G^{\perp}$ et $y \in G$. Ainsi F et G sont orthogonaux.
Par un argument de symétrie, on a aussi (i) $\Leftrightarrow$ (ii).
□

Remarque Une orthogonalité est une inclusion dans un orthogonal.

5.4.4 Somme directe orthogonale

Remarque Si F et G sont orthogonaux alors $F \cap G = \{0_E\}$ car

$$x \in F \cap G \Rightarrow (x \mid x) = 0$$

Ainsi deux sous-espaces vectoriels orthogonaux sont en somme directe.
Plus généralement :

Proposition

> Si $F_1, \dots F_m$ sont des sous-espaces vectoriels de E deux à deux orthogonaux alors ceux-ci sont en somme directe.

dém. :
Supposons $x_1 + \dots + x_m = 0$ avec chaque x_k dans F_k.
Pour tout $1 \leqslant k \leqslant m$, $(x_k \mid x_1 + \dots + x_m) = (x_k \mid 0) = 0$ donne $\|x_k\|^2 = 0$ car $(x_k \mid x_j) = 0$

pour $j \neq k$.
Ainsi $x_k = 0$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant m$.
□

Définition

Lorsque les sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_m$ sont deux à deux orthogonaux, on dit qu'ils sont en somme directe orthogonale et leur somme est notée $\overset{n}{\underset{k=1}{\oplus}}{}^{\perp} F_k$.

Exemple Les espaces F et $F^{\perp}$ sont en somme directe orthogonale.

5.4.5 Supplémentaire orthogonal

Définition

Deux sous-espaces vectoriels F et G sont dits supplémentaires orthogonaux s'ils sont supplémentaires et orthogonaux i.e. si

$$E = F \oplus^{\perp} G$$

Exemple Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique les sous-espaces vectoriels $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.
En effet :
Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
$(A \mid B) = \text{tr}({}^tAB) = \text{tr}(AB)$ et $(A \mid B) = (B \mid A) = \text{tr}({}^tBA) = -\text{tr}(BA) = \text{tr}(AB)$ donc $(A \mid B) = 0$.
Ainsi $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ orthogonaux et donc en somme directe.
De plus, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut écrire

$$M = \frac{1}{2}\left(M + {}^tM\right) + \frac{1}{2}\left(M - {}^tM\right)$$

avec $\frac{1}{2}\left(M + {}^tM\right) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}\left(M - {}^tM\right) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
Ainsi

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus^{\perp} \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

Théorème

Si F et G sont supplémentaires orthogonaux alors

$$F^{\perp} = G \text{ et } G^{\perp} = F$$

dém. :
On sait déjà $G \subset F^{\perp}$.
Pour tout $x \in F^{\perp}$, on peut écrire $x = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$.
Or $(x \mid u) = 0$ donc $u = 0_E$ puis $x = v \in G$. Ainsi $F^{\perp} \subset G$ puis l'égalité.
□

Corollaire

Si F admet un supplémentaire orthogonal, celui-ci est unique et c'est $F^\perp$.
On dit alors que $F^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de F.

Attention : Il se peut que F et $F^\perp$ ne soient pas supplémentaires.

Exemple Dans $E = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel, considérons $F = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$.
$F^\perp = \{0\}$ donc F et $F^\perp$ ne sont pas supplémentaires.

Corollaire

Si F admet un supplémentaire orthogonal alors $F^{\perp\perp} = F$.

dém. :
Car $F^{\perp\perp} = G^\perp = F$.
□

5.4.6 Supplémentaire orthogonal et dimension finie

Théorème

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie alors

$$E = F \oplus^\perp F^\perp$$

dém. :
On sait déjà que F et $F^\perp$ sont orthogonaux.
Montrons $F + F^\perp = E$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$ une base orthonormée de F.
Analyse : Soit $x \in E$. Supposons $x = a + b$ avec $a \in F$ et $b \in G$.
On a $a = \sum_{k=1}^{m} (e_k \mid a) e_k$ or $(e_k \mid a) = (e_k \mid x) - (e_k \mid b) = (e_k \mid x)$ car $e_k \in F$ et $b \in F^\perp$.
On en déduit $a = \sum_{k=1}^{m} (e_k \mid x) e_k$ et $b = x - a$.
Synthèse : Soient $x \in E$, $a = \sum_{k=1}^{m} (e_k \mid x) e_k$ et $b = x - a$.
On a évidemment $a \in F$ et $x = a + b$. Reste à vérifier $b \in F^\perp$.
$F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_m)$ et $(e_k \mid b) = (e_k \mid x) - (e_k \mid a) = 0$ donc $b \in F^\perp$.
□

Corollaire

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie alors

$$F^{\perp\perp} = F$$

Corollaire

Si F et G sont des sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien ou hermitien E alors
1) $F \oplus^{\perp} F^{\perp} = E$ et $F^{\perp\perp} = F$;
2) $\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F$;
3) $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$;
4) $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

dém. :
1) Car F est de dimension finie.
2) Car F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires.
3) Toujours vraie.
4) En exploitant 3) avec $F^{\perp}$ et $G^{\perp}$ on obtient $(F^{\perp} + G^{\perp})^{\perp} = F \cap G$ puis $F^{\perp} + G^{\perp} = (F \cap G)^{\perp}$
□

5.4.7 Application : hyperplan et forme linéaire

5.4.7.1 Droite normale d'un hyperplan en dimension finie

Définition

Si H est un hyperplan d'un espace euclidien ou hermitien E alors $H^{\perp}$ est une droite de E appelée droite normale de H. Les vecteurs non nuls de cette droite sont appelés vecteurs normaux à H.

Théorème

Si a est un tel vecteur normal à l'hyperplan H alors

$$\forall x \in E, x \in H \Leftrightarrow (a \mid x) = 0$$

dém. :
En effet

$$(a \mid x) = 0 \Leftrightarrow x \in \text{Vect}(a)^{\perp} = H^{\perp\perp} = H$$

□

5.4.7.2 Représentation d'une forme linéaire

Pour $a \in E$, l'application $x \in E \mapsto (a \mid x)$ est une forme linéaire

Théorème

Si E est un espace euclidien ou hermitien alors

$$\forall \varphi \in E^{\star}, \exists! a \in E, \forall x \in E, \varphi(x) = (a \mid x)$$

dém. :
Soit $\varphi \in E^{\star}$. Introduisons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base orthonormée de E.
Unicité : Soit a solution, s'il en existe.

$$a = \sum_{k=1}^{n} (e_k \mid a) e_k = \sum_{k=1}^{n} \overline{(a \mid e_k)} e_k = \sum_{k=1}^{n} \overline{\varphi(e_k)} e_k$$

ce qui détermine a de façon unique.
Existence : Soit

$$a = \sum_{k=1}^{n} \overline{\varphi(e_k)} e_k$$

Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\varphi_a(e_k) = (a \mid e_k) = \left(\sum_{\ell=1}^{n} \overline{\varphi(e_\ell)} e_\ell \mid e_k \right) = \sum_{\ell=1}^{n} \overline{\overline{\varphi(e_\ell)}} (e_\ell \mid e_k) = \varphi(e_k)$$

Les applications linéaires φ_a et φ coïncident sur une base, elles sont donc égales.
□

Remarque Si $H = \ker \varphi$ avec φ forme linéaire non nul, alors $a \in E$ tel que $\varphi : x \mapsto (a \mid x)$ est un vecteur normal à H.

Exemple $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \text{tr}(M) = 0\}$.
H est un hyperplan car noyau de la forme linéaire non nulle trace.
Puisque $\text{tr}(M) = \text{tr}({}^t I_n M) = (I_n \mid M)$, la matrice I_n est vecteur normal à H.

Exemple Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.
Le déterminant dans une base orthonormée directe de 3 vecteurs u, v, w est indépendant du choix de celle-ci, c'est leur produit mixte :

$$[u, v, w]$$

Pour $u, v \in E$, l'application $x \mapsto [u, v, x]$ est une forme linéaire sur E donc il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que

$$\forall x \in E, [u, v, x] = (a \mid x)$$

Ce vecteur est noté $a = u \wedge v$.

5.5 Distance à un sous-espace vectoriel

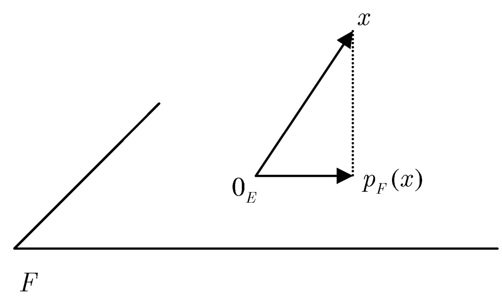
E désigne un espace préhilbertien réel ou complexe.

5.5.1 Projection et symétrie orthogonale

Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que F et $F^\perp$ sont supplémentaires (par exemple, F sous-espace vectoriel de dimension finie)

Définition

On appelle projection orthogonale sur F la projection p_F sur F parallèlement à $F^\perp$.



Exemple Si $F = \{0_E\}$ alors $p_F = \tilde{0}$.
Si $F = E$ alors $p_F = \mathrm{Id}_E$.

Exemple Si $E = \overset{m}{\underset{k=1}{\oplus}}{}^{\perp} E_k$ alors les projecteurs $p_1, \dots, p_m$ associés à cette décomposition sont des projections orthogonales. En effet p_k est sur E_k parallèlement à $\underset{j\neq k}{\oplus} E_j = E_k^\perp$.

Proposition

$p_F^2 = p_F$, $\mathrm{Im} p_F = \ker(p_F - \mathrm{Id}) = F$, $\ker p_F = F^\perp$ et $\mathrm{Id} - p_F = p_{F^\perp}$.

dém. :
Ce sont les propriétés usuelles des projections et symétries qui sont ici particularisées.
□

Théorème

$\forall x \in E, \|p_F(x)\| \leqslant \|x\|$

dém. :
Soit $x \in E$.
On peut écrire $x = a + b$ avec $a \in F$ et $b \in F^\perp$.
Par Pythagore $\|x\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$ car a et b sont orthogonaux donc $\|x\| \geqslant \|a\| = \|p_F(x)\|$.
□

Théorème

$\forall x, y \in E, (p_F(x) \mid y) = (x \mid p_F(y))$

dém. :
Soient $x, y \in E$.
On peut écrire $x = a + b$ et $y = c + d$ avec $a \in F, b \in F^\perp, c \in F$ et $d \in F^\perp$.
$(p_F(x) \mid y) = (a \mid c + d) = (a \mid c) + (a \mid d) = (a \mid c)$ car $a \in F$ et $d \in F^\perp$.
$(x \mid p_F(y)) = (a + b \mid c) = (a \mid c) + (b \mid c) = (a \mid c)$ car $b \in F^\perp$ et $c \in F$.
Par suite $(p_F(x) \mid y) = (x \mid p_F(y))$.
De même
$(s_F(x) \mid y) = (a-b \mid c+d) = (a \mid c) - (b \mid d) = (a+b \mid c-d) = (x \mid s_F(y))$ car $(a \mid d) = (b \mid c) = 0$.
□

Théorème

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de base orthonormée $(e_1,\dots,e_m)$ alors

$$\forall x\in E, p_F(x)=\sum_{k=1}^{m}(e_k\mid x)e_k$$

dém. :
$p(x)=\sum_{k=1}^{m}(e_k\mid p(x))e_k=\sum_{k=1}^{m}(p(e_k)\mid x)e_k=\sum_{k=1}^{m}(e_k\mid x)e_k$
□

Exemple Soient $a\neq 0_E$ et $F=D=\text{Vect}(a)$.
$(a/\|a\|)$ forme une base orthonormée de D donc

$$\forall x\in E, p_D(x)=\frac{(a\mid x)}{\|a\|^2}a$$

Exemple Soit $a\neq 0_E$ et $F=H=\text{Vect}(a)^\perp$ (H hyperplan de vecteur normal a)
H est le supplémentaire orthogonal de $D=\text{Vect}(a)$ donc $p_H=\text{Id}-p_D$.

$$\forall x\in E, p_H(x)=x-\frac{(a\mid x)}{\|a\|^2}a$$

Corollaire

Si $(e_1,\dots,e_n)$ est une famille orthonormée de vecteurs de E alors

$$\forall x\in E,\sum_{k=1}^{n}|(e_k\mid x)|^2\leqslant\|x\|^2$$

dém. :
Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une famille orthonormée.
En posant $F=\text{Vect}(e_1,\dots,e_n)$. La relation $\|p_F(x)\|\leqslant\|x\|$ donne celle proposée.
□

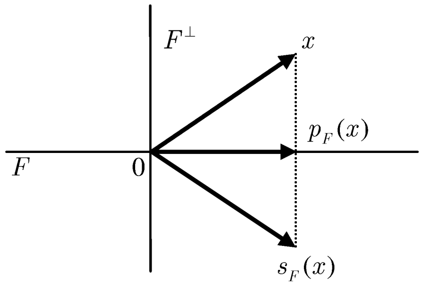
Exemple Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée de vecteurs de E alors pour tout $x\in E$, la série numérique $\sum|(e_n\mid x)|^2$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty}|(e_n\mid x)|^2\leqslant\|x\|^2$.
En effet, par ce qui précède, les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum|(e_n\mid x)|^2$ sont majorées par $\|x\|^2$.

5.5.2 Symétrie orthogonale

Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que F et $F^\perp$ sont supplémentaires.

Définition

On appelle symétrie orthogonale par rapport à F, la symétrie s_F par rapport à F et parallèlement à $F^\perp$.
Lorsque F est un hyperplan, on parle de réflexion.



Exemple Si $F = \{0_E\}$ alors $s_F = -\mathrm{Id}_E$.
Si $F = E$ alors $s_F = \mathrm{Id}_E$.

Proposition

$s_F^2 = \mathrm{Id}$, $\ker(s_F - \mathrm{Id}) = F$, $\ker(s_F + \mathrm{Id}) = F^\perp$, $s_F = 2p_F - \mathrm{Id}$ et $-s_F = s_{F^\perp}$.

Exemple Soient $a \neq 0_E$ et $F = D = \mathrm{Vect}(a)$.
$(a/\|a\|)$ forme une base orthonormée de D donc

$$\forall x \in E, p_D(x) = \frac{(a \mid x)}{\|a\|^2} a \text{ et } s_D(x) = 2\frac{(a \mid x)}{\|a\|^2} a - x$$

Exemple Soit $a \neq 0_E$ et $F = H = \mathrm{Vect}(a)^\perp$ (H hyperplan de vecteur normal a)
H est le supplémentaire orthogonal de $D = \mathrm{Vect}(a)$ donc $p_H = \mathrm{Id} - p_D$.

$$\forall x \in E, p_H(x) = x - \frac{(a \mid x)}{\|a\|^2} a \text{ et } s_H(x) = x - 2\frac{(a \mid x)}{\|a\|^2} a$$

Théorème

$$\forall x, y \in E, (s_F(x) \mid s_F(y)) = (x \mid y)$$

dém. :
Puisque $s_F = 2p_F - \mathrm{Id}_E$

$$(s_F(x) \mid s_F(y)) = (2p_F(x) - x \mid 2p_F(y) - y)$$

En développant

$$(s_F(x) \mid s_F(y)) = 2(p_F(x) \mid p_F(y)) - 2(p_F(x) \mid y) - 2(x \mid p_F(y)) + (x \mid y)$$

Or $(p_F(x) \mid y) = (x \mid p_F(y))$ et $(p_F(x) \mid p_F(y)) = (x \mid p_F^2(y)) = (x \mid p_F(y))$ donc en simplifiant

$$(s_F(x) \mid s_F(y)) = (x \mid y)$$

□

5.5.3 Distance à un sous-espace vectoriel

Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que F et $F^\perp$ sont supplémentaires.

Théorème

Soit $x \in E$.

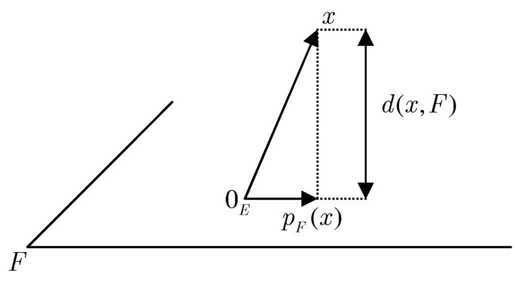
$$\forall y \in F, \|x - y\| \geqslant \|x - p_F(x)\|$$

avec égalité si, et seulement si, $y = p(x)$.

dém. :
$x - y = (x - p_F(x)) + (p_F(x) - y)$ avec $x - p_F(x) \in F^\perp$ et $p_F(x) - y \in F$.
Par Pythagore $\|x - y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2 \geqslant \|x - p_F(x)\|^2$ avec égalité si, et seulement si, $y = p_F(x)$.
□

Corollaire

$d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$.



dém. :
$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\| = \min_{y \in F} \|x - y\| = \|x - p_F(x)\|$.
□

Exemple Soient $a \neq 0_E$ et $D = \text{Vect}(a)$.

$$\forall x \in E, d(x, D) = \left\| x - \frac{(a \mid x)}{\|a\|^2} a \right\|$$

Exemple Soient $a \neq 0_E$ et $H = \text{Vect}(a)^\perp$.

$$\forall x \in E, d(x, H) = \frac{|(a \mid x)|}{\|a\|}$$

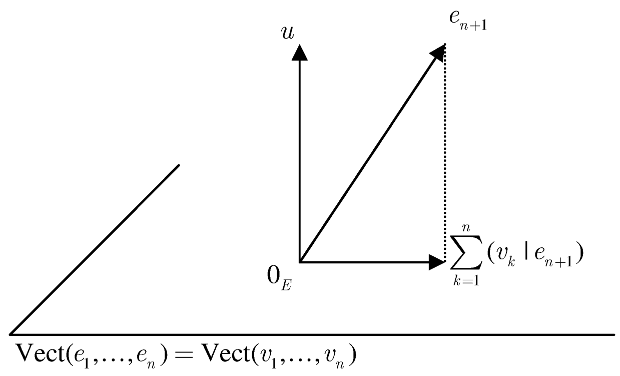
5.5.4 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

5.5.4.1 Énoncé

Théorème

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre de vecteurs de E alors il existe une unique famille $(v_1, \ldots, v_n)$ telle que :
1) $(v_1, \ldots, v_n)$ est une famille orthonormée ;
2) $\forall 1 \leqslant k \leqslant n$, $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \text{Vect}(v_1, \ldots, v_k)$;
3) $\forall 1 \leqslant k \leqslant n$, $(e_k \mid v_k) \in \mathbb{R}^{+\star}$.
On dit que la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est la famille orthonormalisée de $(e_1, \ldots, e_n)$ par le procédé de Schmidt.

dém. :
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$.
Pour $n = 1$:
Soit (e_1) une famille libre. On a $e_1 \neq 0_E$.
Analyse : Si (v_1) est solution alors on a $\text{Vect}(v_1) = \text{Vect}(e_1)$. On peut donc écrire $v_1 = \lambda e_1$. Or $\|v_1\| = 1$ donc $|\lambda| \|e_1\| = 1$ et $(e_1 \mid v_1) \in \mathbb{R}^{+\star}$ donne $\lambda \in \mathbb{R}^{+\star}$. Ainsi $v_1 = e_1/\|e_1\|$.
Synthèse : $v_1 = e_1/\|e_1\|$ convient.
Supposons la propriété au rang $n \in \mathbb{N}^\star$.
Soit $(e_1, ..., e_n, e_{n+1})$ une famille libre.
Analyse : Supposons $(v_1, \ldots, v_n, v_{n+1})$ une famille solution.
Nécessairement $(v_1, \ldots, v_n)$ est l'orthonormalisée de $(e_1, \ldots, e_n)$ ce qui détermine $(v_1, \ldots, v_n)$ de manière unique. $v_{n+1} \in \text{Vect}(e_1, \ldots, e_{n+1})$ permet d'écrire $v_{n+1} = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n + \lambda e_{n+1}$
Or $F = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_n) = \text{Vect}(v_1, \ldots, v_n)$, on peut donc aussi écrire $v_{n+1} = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n + \lambda e_{n+1}$.
Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $(v_i \mid v_{n+1}) = 0$ donne $\mu_i = -\lambda(v_i \mid e_{n+1})$.
Par suite $v_{n+1} = \lambda(e_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} (e_{n+1} \mid v_i) v_i) = \lambda$ avec $u = e_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} (v_i \mid e_{n+1}) v_i = e_{n+1} - p_F(e_{n+1})$.
$\|v_{n+1}\| = 1$ donne $|\lambda| \|u\| = 1$ d'où $|\lambda| = 1/\|u\|$.
Enfin $(e_{n+1} \mid v_{n+1}) = (u \mid v_{n+1}) = \lambda(u \mid u)$ donne $\lambda \in \mathbb{R}^{+\star}$.
Finalement $v_{n+1} = u/\|u\|$ ce qui détermine v_{n+1} de manière unique.



Synthèse : Soit $(e_1, ..., e_n, e_{n+1})$ une famille libre.
Considérons $(v_1, \dots, v_n)$ l'orthonormalisée de $(e_1, \dots, e_n)$.
$F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$.
Posons $u = e_{n+1} - p_F(e_{n+1}) = e_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} (e_{n+1} \mid v_i)v_i$
Puisque $e_{n+1} \notin F$, on peut affirmer $u \neq 0_E$. Posons enfin $v_{n+1} = u/\|u\|$.
1) La famille $(v_1, \dots, v_n)$ est orthonormée, le vecteur v_{n+1} est unitaire et enfin, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $(v_i \mid v_{n+1}) = 0$ car $(v_i \mid u) = 0$. Ainsi la famille $(v_1, \dots, v_n, v_{n+1})$ est orthonormée
2) Pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, $\text{Vect}(v_1, \dots, v_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.
Pour $k = n + 1$, $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n, v_{n+1}) \subset \text{Vect}(v_1, \dots, v_n, e_{n+1}) \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$.
Or par liberté des familles $(v_1, \dots, v_n, v_{n+1})$ et $(e_1, ..., e_n, e_{n+1})$, il y a égalité des dimensions et donc $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n, v_{n+1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$.
3) Pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, $(e_k \mid v_k) \in \mathbb{R}^{+\star}$.
Pour $k = n + 1$, $(e_{n+1} \mid v_{n+1}) = (u \mid v_{n+1}) = \|u\| \in \mathbb{R}^{+\star}$.
Finalement $(v_1, \dots, v_n, v_{n+1})$ est solution.
Récurrence établie.
□

Corollaire

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et si $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_n)$ est l'orthonormalisée de $\mathcal{B}$ par le procédé de Schmidt alors $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée de E et la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.

dém. :
La propriété est vérifiée pour la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ car $e_k \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ et $(v_k \mid e_k) > 0$ donc elle l'est aussi pour la matrice de passage inverse.
□

5.5.4.2 Algorithme

Dans la pratique pour orthonormaliser $(e_1, \dots, e_n)$:
- Etape 1 : on pose $u_1 = e_1$;
- Etape 2 : on pose $u_2 = e_2 + \lambda u_1$ et on détermine λ pour que $(u_1 \mid u_2) = 0$;
- Etape 3 : on pose $u_3 = e_3 + \lambda u_1 + \mu u_2$ et on détermine λ et μ pour que $(u_1 \mid u_3) = (u_2 \mid u_3) = 0$;
- etc.
- Etape finale : on forme $(v_1, \dots, v_n)$ en normant chaque vecteur $v_1 = u_1/\|u_1\|$, $v_2 = u_2/\|u_2\|$...

5.5.4.3 Exemples

Exemple Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique considérons la famille (e_1, e_2, e_3) avec

$$e_1 = (0, 1, 1), e_2 = (1, 0, 1), e_3 = (1, 1, 0)$$

La famille (e_1, e_2, e_3) est libre car

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$u_1 = e_1 = (0, 1, 1)$, $\|u_1\|^2 = 2$
$u_2 = e_2 + \lambda u_1$
$(u_2 \mid u_1) = 0$ donne $\lambda = -1/2$ puis $u_2 = (1, -1/2, 1/2)$, $\|u_2\|^2 = 3/2$.
$u_3 = e_3 + \lambda u_1 + \mu u_2$
$(u_3 \mid u_1) = 0$ donne $\lambda = -1/2$,
$(u_3 \mid u_2) = 0$ donne $\mu = -1/3$ puis $u_3 = (2/3, 2/3, -2/3)$.
Finalement

$$v_1 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), v_2 = (\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}), v_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$$

Exemple Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique $(A \mid B) = \text{tr}({}^tAB)$ considérons la famille (A_1, A_2, A_3) avec

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie aisément que cette famille est libre et le processus d'orthonormalisation de Schmidt donne

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

puis

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exemple Calcul de

$$m = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - (at + b))^2 \, dt$$

Considérons $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire

$$(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t) \, dt$$

On a $m = d(X^2, \mathbb{R}_1[X])^2$.
Soit $p = p_{\mathbb{R}_1[X]}$. On a $m = \left\|X^2 - p(X^2)\right\|^2$.
Déterminons $p(X^2)$.
Pour cela formons une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$.

Le procédé de Schmidt donne la base orthonormée

$$P_1 = 1 \text{ et } P_2 = 2\sqrt{3}\left(X - \frac{1}{2}\right)$$

On en déduit

$$p(X^2) = X - 1/6$$

Puis après calculs $m = 1/180$.

Chapitre 6

Endomorphismes des espaces euclidiens

E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$.

6.1 Automorphismes orthogonaux

6.1.1 Matrices orthogonales

Proposition

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a équivalence entre :
(i) A est inversible et $A^{-1} = {}^tA$;
(ii) ${}^tAA = I_n$;
(iii) $A^tA = I_n$.

dém. :
Il suffit d'appliquer le théorème d'inversibilité des matrices.
□

Définition

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si ${}^tAA = I_n$.

Exemple I_n et $-I_n$ sont des matrices orthogonales.

Théorème

L'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ appelé groupe orthogonal d'ordre n.

dém. :
$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $I_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
Soient $A, B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. $AB \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ car ${}^t(AB)\,AB = {}^tB^tAAB = {}^tBB = I_n$.
Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. $A^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ car ${}^t\left(A^{-1}\right)A^{-1} = {}^t\left({}^tA\right){}^tA = A^tA = I_n$.
Ainsi $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$.
$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / {}^tAA = I_n\right\} = f^{-1}(\{I_n\})$ avec $f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to {}^tAA$.
Puisque f est continue et $\{I_n\}$ fermé, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé relatif à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et c'est donc une partie fermée.

Enfin considérons $\|\,.\,\|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|A\| = \sqrt{\text{tr}({}^tAA)} = \sqrt{\text{tr}I_n} = \sqrt{n}$. Par suite $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée.
Puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte car fermée et bornée.
□

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de colonnes $C_1, \ldots, C_n$ et de lignes $L_1, \ldots, L_n$.
On a équivalence entre :
(i) la matrice A est orthogonale ;
(ii) la famille $(C_1, \ldots, C_n)$ est orthonormée ;
(iii) la famille $(L_1, \ldots, L_n)$ est orthonormée.

dém. :
Etudions (i) $\Leftrightarrow$ (ii).
Sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit scalaire considéré est le produit scalaire canonique défini par

$$(X \mid Y) = {}^tXY = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

Pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$,

$$\left[{}^tAA\right]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \left[{}^tA\right]_{i,k} A_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}a_{k,j} = (C_i \mid C_j)$$

(i) $\Leftrightarrow {}^tAA = I_n \Leftrightarrow \forall 1 \leqslant i,j \leqslant n, \left[{}^tAA\right]_{i,j} = \delta_{i,j} = \forall 1 \leqslant i,j \leqslant n, (C_i \mid C_j) = \delta_{i,j} \Leftrightarrow$ (ii)
Etudions (i) $\Leftrightarrow$ (iii).
Sur $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, le produit scalaire considéré est le produit scalaire canonique définie par

$$(L \mid L') = L^tL' = \ell_1\ell_1' + \cdots + \ell_n\ell_n'$$

En remarquant que

$$\left[A^tA\right]_{i,j} = (L_j \mid L_i)$$

on démontre comme ci-dessus (i) $\Leftrightarrow$ (iii).
□

Exemple La matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

est orthogonale.
En effet ses colonnes sont unitaires et deux à deux orthogonales.

6.1.2 Matrice de rotation

Proposition

Si A est une matrice orthogonale alors $\det A = \pm 1$.

dém. :
${}^tAA = I_n$ donne $\det({}^tAA) = 1$ or $\det({}^tAA) = \det({}^tA)\det A = (\det A)^2$ donc $(\det A)^2 = 1$.
□

Définition

Les matrices orthogonales de déterminant 1 sont appelées matrice de rotation.

Exemple I_n est une matrice de rotation.
$-I_n$ est une matrice de rotation si, et seulement si, n est pair.

Proposition

L'ensemble $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ des matrices de rotation de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$.
On l'appelle groupe spécial orthogonal d'ordre n.

dém. :
$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$
avec $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et
$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \det A = 1\}$ sous-groupe fermé de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$.
□

Rappel Les matrices de rotation de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont exactement les matrices de la forme

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

avec $\theta \in \mathbb{R}$.
De plus, ces dernières commutent entre elles car $R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta')$.

6.1.3 Changement de bases orthonormées

Théorème

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E et $\mathcal{B}' = (e_1', \ldots, e_n')$ une famille de vecteurs de E.
On a équivalence entre :
(i) $\mathcal{B}'$ est orthonormée ;
(ii) $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\mathcal{B}'$ est orthogonale.
De plus, si tel est le cas,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\mathcal{B} = {}^tP$$

dém. :
Rappelons que si x et y sont des vecteurs de colonnes composantes X, Y dans une base orthonormée alors $(x \mid y) = {}^tXY$.
Notons $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de P.
Les colonnes $C_1, \ldots, C_n$ sont les colonnes composantes des vecteurs $e_1', \ldots, e_n'$ dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ donc pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$,

$$(e_i' \mid e_j') = {}^tC_iC_j = (C_i \mid C_j)$$

Par suite, la famille $\mathcal{B}'$ est orthonormée si, et seulement si, la famille $(C_1, \ldots, C_n)$ l'est i.e. $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
De plus, si tel est le cas, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\mathcal{B} = P^{-1} = {}^tP$.
□

Corollaire

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormées directes d'un espace euclidien orienté alors $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' = 1$.

Remarque C'est cette relation qui permet de définir le produit mixte de $n = \dim E$ vecteurs d'un espace euclidien orienté.

6.1.4 Automorphismes orthogonaux

Définition

On dit qu'un endomorphisme u de E est orthogonal si celui-ci conserve le produit scalaire i.e.

$$\forall x, y \in E, (u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$$

Exemple $\mathrm{Id}_E, -\mathrm{Id}_E$ sont des endomorphismes orthogonaux.

Exemple Les symétries orthogonales sont des endomorphismes orthogonaux.

Attention : Les projections orthogonales autres que Id_E n'en sont pas.

Théorème

Soit u un endomorphisme de E. On a équivalence entre :
(i) u est orthogonal ;
(ii) u conserve la norme i.e.

$$\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\| \text{ [isométrie euclidienne]}$$

dém. :
(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons l'endomorphisme u orthogonal
Pour tout $x \in E$,

$$\|u(x)\|^2 = (u(x) \mid u(x)) = (x \mid x) = \|x\|^2$$

donc $\|u(x)\| = \|x\|$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$.
D'une part

$$\|u(x+y)\|^2 = \|u(x) + u(y)\|^2 = \|u(x)\|^2 + 2(u(x) \mid u(y)) + \|u(y)\|^2$$

et d'autre part

$$\|u(x+y)\|^2 = \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x \mid y) + \|y\|^2$$

Or $\|u(x)\| = \|x\|$ et $\|u(y)\| = \|y\|$ donc

$$(u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$$

□

Remarque Un endomorphisme orthogonal conserve le produit scalaire, la norme, l'orthogonalité,...

Corollaire

Si u est un endomorphisme orthogonal alors Sp$u \subset \{1, -1\}$.
En particulier $0 \notin$ Spu et donc u est un automorphisme.

dém. :
Soit $\lambda \in$ Spu et $x \neq 0_E$ vecteur propre associé.
D'une part $\|u(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, d'autre part $\|u(x)\| = \|x\|$. On en déduit $|\lambda| = 1$
□

Théorème

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.
On a équivalence entre :
(i) u est orthogonal ;
(ii) la famille $u(\mathcal{B}) = (u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une base orthonormée ;
(iii) $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

dém. :
(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons l'endomorphisme u orthogonal.
Pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$,

$$(u(e_i) \mid u(e_j)) = (e_i \mid e_j) = \delta_{i,j}$$

donc la famille $u(\mathcal{B}) = (u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est orthonormée et c'est donc une base orthonormée.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Supposons $u(\mathcal{B})$ orthonormée.
Puisque $\text{Mat}_{\mathcal{B}} u = \text{Mat}_{\mathcal{B}} u(\mathcal{B})$, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ car matrice de passage entre deux bases orthonormées.
(iii) $\Rightarrow$ (i) Supposons $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
Soit x un vecteur de E de colonne de composantes X dans la base $\mathcal{B}$.
Puisque la base $\mathcal{B}$ est orthonormée $\|x\|^2 = {}^tXX$.
Puisque $u(x)$ a pour colonne de composantes AX,

$$\|u(x)\|^2 = {}^t(AX)AX = {}^tX{}^tAAX = {}^tXX = \|x\|^2$$

Ainsi u conserve la norme et donc est un endomorphisme orthogonal.
□

Corollaire

L'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des endomorphismes orthogonaux de E est un sous-groupe compact de $(\text{GL}(E), \circ)$ appelé groupe orthogonal de E.

dém. :
Considérons $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $M_{\mathcal{B}} : u \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ l'application de représentation matricielle.
$M_{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme bicontinue.
$\mathcal{O}(E) = M_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$ est l'image directe par le morphisme continue $M_{\mathcal{B}}^{-1}$ du sous-groupe compact $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
□

6.1.5 Rotations

Proposition

Si $u \in \mathcal{O}(E)$ alors $\det u = \pm 1$.

Définition

On appelle rotation de E tout automorphisme orthogonal de déterminant 1.

Exemple Id_E est une rotation
$-\mathrm{Id}_E$ est une rotation si, et seulement si, $\dim E$ est pair.

Proposition

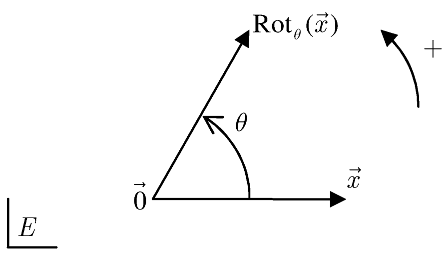
L'ensemble $\mathrm{SO}(E)$ des rotations de E est un sous-groupe compact de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ appelé groupe spécial orthogonal de E.

dém. :
$\mathrm{SO}(E) = \mathcal{O}(E) \cap \mathrm{SL}(E)$ avec $\mathrm{SL}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) / \det u = 1\}$ sous-groupe fermé.
□

Rappel Soit E un plan euclidien orienté.
Une rotation de E est caractérisée par un angle θ unique à 2π près de sorte dans toute base orthonormée directe de E, la matrice de cette rotation est

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Cette rotation est alors notée Rot_θ et son action est donnée par la figure suivante



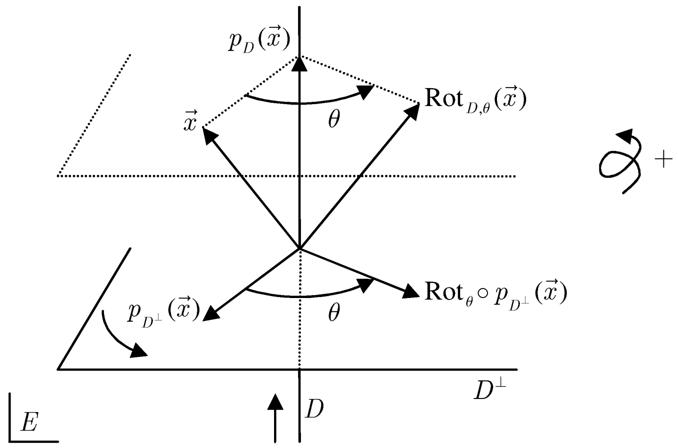
De plus, les rotations commutent entre elles et

$$\mathrm{Rot}_\theta \circ \mathrm{Rot}_{\theta'} = \mathrm{Rot}_{\theta+\theta'}$$

Rappel Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3.
Une rotation de E autre que l'identité est caractérisée par un axe D (droite orientée) et un angle θ de rotation autour de cet axe de sorte que dans une base orthonormée directe dont le premier vecteur dirige et oriente D la matrice de la rotation est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Cette rotation est notée $\mathrm{Rot}_{D,\theta}$ et action est donnée par la figure suivante



Exemple Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et f l'endomorphisme de matrice dans $\mathcal{B}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice A est orthogonale et $\det A = 1$ donc f est une rotation.
Axe D :
L'axe D est formée des vecteurs invariants par f.
Pour $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, on a $f(\vec{u}) = \vec{u} \Leftrightarrow x = y = z$.
Par suite $D = \text{Vect}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$.
Orientons D par le vecteur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.
Angle θ de la rotation :
On a $\text{tr} f = 2\cos\theta + 1$ or $\text{tr} f = \text{tr} A = 0$ donc $\cos\theta = -1/2$.
Pour conclure, il reste à déterminer le signe de $\sin\theta$.
Cas $\sin\theta > 0$: pour tout $\vec{v} \notin D$, la famille $(\vec{u}, \vec{v}, f(\vec{v}))$ est directe.
Cas $\sin\theta < 0$: pour tout $\vec{v} \notin D$, la famille $(\vec{u}, \vec{v}, f(\vec{v}))$ est indirecte.
En pratique, on détermine le signe de $\sin\theta$ comme étant celui de $\left[\vec{u}, \vec{i}, f(\vec{i})\right]$.
Ici

$$\left[\vec{u}, \vec{i}, f(\vec{i})\right] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

donc $\theta = 2\pi/3 \quad [2\pi]$.
Finalement, f est la rotation d'axe D dirigé et orienté par $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et d'angle $2\pi/3$.

6.2 Adjoint d'un endomorphisme

6.2.1 Définition

Théorème

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ alors il existe un unique endomorphisme $u^\star$ de E vérifiant :

$$\forall x, y \in E, (u(x) \mid y) = (x \mid u^\star(y)) \text{ [adjonction]}$$

De plus, dans toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E

$$\text{Mat}_\mathcal{B}(u^\star) = {}^t\,[\text{Mat}_\mathcal{B}(u)]$$

dém. :
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Posons $A = \text{Mat}_\mathcal{B}(u) = (a_{i,j})$. On sait $a_{i,j} = (e_i \mid u(e_j))$.
Unicité : Supposons $u^\star$ endomorphisme solution.
Posons $B = \text{Mat}_\mathcal{B}(u^\star)$.
Pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$,

$$b_{i,j} = (e_i \mid u^\star(e_j)) = (u(e_i) \mid e_j) = a_{j,i}$$

Par suite $B = {}^tA$ ce qui détermine $u^\star$ de façon unique.
Existence : Soit $u^\star$ l'endomorphisme déterminé par $\text{Mat}_\mathcal{B}(u^\star) = {}^tA$.
Pour tout $x, y \in E$ de composantes X, Y dans la base orthonormée $\mathcal{B}$,

$$(u(x) \mid y) = {}^t(AX)Y = {}^tX{}^tAY = (x \mid u^\star(y))$$

□

Définition

L'endomorphisme $u^\star$ est appelé adjoint de l'endomorphisme u.

Exemple $\tilde{0}^\star = \tilde{0}$ et $(\text{Id}_E)^\star = \text{Id}_E$.

Exemple Si p est une projection orthogonale alors $p^\star = p$.
En effet, pour tout $x, y \in E$, $(p(x) \mid y) = (x \mid p(y))$.
De même, si s est une symétrie orthogonale alors $s^\star = s$.

Exemple Soit $u \in \mathcal{O}(E)$.
Pour tout $x, y \in E$,

$$(u(x) \mid y) = (u(x) \mid u(u^{-1}(y))) = (x \mid u^{-1}(y))$$

donc $u^\star = u^{-1}$.
Inversement si $u^\star = u^{-1}$ alors pour tout $x, y \in E$

$$(u(x) \mid u(y)) = (x \mid u^{-1}(u(y))) = (x \mid y)$$

et $u \in \mathcal{O}(E)$.

6.2.2 Opérations

Théorème

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
$(\lambda u + \mu v)^\star = \lambda u^\star + \mu v^\star$, $(u \circ v)^\star = v^\star \circ u^\star$ et $u^{\star\star} = u$.
Si u est inversible alors $u^\star$ aussi et $(u^\star)^{-1} = (u^{-1})^\star$.

dém. :
Via représentation dans une base orthonormée, ces propriétés sont les analogues de propriétés bien connues de la transposition matricielle.
□

Corollaire

$\forall u \in \mathcal{L}(E), \forall n \in \mathbb{N}, (u^\star)^n = (u^n)^\star$ et $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $P(u^\star) = (P(u))^\star$.

Exemple u est diagonalisable (resp. trigonalisable) si, et seulement si, $u^\star$ l'est.
En effet u et $u^\star$ ont les mêmes polynômes annulateurs.

6.2.3 Propriétés de l'adjoint

Théorème

$\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $\text{rg}(u^\star) = \text{rg}(u)$, $\text{tr}(u^\star) = \text{tr}(u)$, $\det u^\star = \det u$, $\chi_{u^\star} = \chi_u$.

dém. :
Via représentation dans une base orthonormée, ces propriétés sont les analogues de propriétés bien connues de la transposition matricielle.
□

Corollaire

u et $u^\star$ ont mêmes valeurs propres comptées avec multiplicité.

dém. :
Les valeurs propres de u comptées avec multiplicité sont les racines comptées avec multiplicité de χ_u.
□

Proposition

$\ker(u^\star) = [\text{Im} u]^\perp$ et $\text{Im}(u^\star) = [\ker u]^\perp$.

dém. :
Soit $x \in [\text{Im} u]^\perp$.
On a $\|u^\star(x)\|^2 = (x \mid u(u^\star(x)) = 0$ et donc $x \in \ker u^\star$.
Ainsi $[\text{Im} u]^\perp \subset \ker(u^\star)$.
Par égalité des dimensions, $[\text{Im} u]^\perp = \ker(u^\star)$
Enfin $\ker u = \ker(u^{\star\star}) = [\text{Im} u^\star]^\perp$ puis $\text{Im}(u^\star) = [\ker u]^\perp$.
□

6.2.4 Sous-espaces vectoriels stables

Théorème

Un sous-espace vectoriel F est stable pour u si, et seulement si, $F^\perp$ est stable pour $u^\star$.

dém. :
Supposons F est stable par u.
Soit $x \in F^{\perp}$. Montrons que $u^{\star}(x) \in F^{\perp}$.
Pour tout $y \in F$, $(u^{\star}(x) \mid y) = (x \mid u(y)) = 0$ car $x \in F^{\perp}$ et $u(y) \in F$.
Par suite $u^{\star}(x) \in F^{\perp}$. et ainsi $F^{\perp}$ est stable par $u^{\star}$.
Inversement, si $F^{\perp}$ est stable par $u^{\star}$ alors $F^{\perp\perp} = F$ est stable par $u^{\star\star} = u$.
□

Corollaire

Les hyperplans stables par u sont ceux possédant un vecteur normal qui est vecteur propre de $u^{\star}$.

dém. :
Soit $H = \text{Vect}(a)^{\perp}$.
H est stable par u si, et seulement si, $H^{\perp} = \text{Vect}(a)$ est stable par $u^{\star}$ i.e. a vecteur propre de $u^{\star}$.
□

6.3 Théorème spectral

6.3.1 Endomorphismes autoadjoints

Définition

Un endomorphisme u de E est dit autoadjoint (ou symétrique) si $u^{\star} = u$.

Exemple $\tilde{0}$ et Id sont autoadjoints.

Exemple Si p est une projection orthogonale alors $p^{\star} = p$ donc p est un endomorphisme autoadjoint. Inversement, si p est une projection et si $p^{\star} = p$ alors $\text{Im}p = (\ker p^{\star})^{\perp} = (\ker p)^{\perp}$ et donc p est une projection orthogonale.

Exemple Si $f \in \mathcal{L}(E)$ alors $u = f^{\star} \circ f$ est autoadjoint.

Théorème

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E.
On a équivalence entre :
(i) u est autoadjoint ;
(ii) $\forall x, y \in E, (u(x) \mid y) = (x \mid u(y))$ [autoadjonction] ;
(iii) la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}} u$ est symétrique.

dém. :
(i) $\Leftrightarrow$ (ii) par définition de l'adjoint.
(i) $\Leftrightarrow$ (iii) car $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^{\star}) = {}^t\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ puisque $\mathcal{B}$ est orthonormée.
□

Corollaire

L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ des endomorphismes autoadjoints de E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

dém. :
$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}(E)$ sont isomorphismes via représentation matricielle dans la base orthonormée $\mathcal{B}$.
□

6.3.2 Théorème spectral

Lemme

> Les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont deux à deux orthogonaux.

dém. :
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ distincts. Pour $x \in E_\lambda(u)$ et $y \in E_\mu(u)$:
D'une part, $(u(x) \mid y) = (\lambda x \mid y) = \lambda(x \mid y)$
D'autre part, $(u(x) \mid y) = (x \mid u(y)) = (x \mid \mu y) = \mu(x \mid y)$
On en déduit $\lambda(x \mid y) = \mu(x \mid y)$, or $\lambda \neq \mu$ donc $(x \mid y) = 0$.
□
Lemme

> Tout endomorphisme autoadjoint u de $E \neq \{0\}$ possède au moins une valeur propre.

dém. :
Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormée et A la matrice de u dans $\mathcal{B}$. On a ${}^tA = A$.
Le polynôme caractéristique de A possède au moins une racine $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrons $\lambda \in \mathbb{R}$.
λ est valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc il existe une colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $X \neq 0$ telle que $AX = \lambda X$.
On a alors $X^\star AX = \lambda X^\star X$ avec $X^\star X = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 > 0$.
D'autre part ${}^t\bar{A} = A$ car $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ donc $X^\star AX = X^\star A^\star X = (XA)^\star X = (\lambda X)^\star X = \bar{\lambda} X^\star X$.
Ainsi $\lambda X^\star X = \bar{\lambda} X^\star X$ avec $X^\star X \neq 0$ donc $\lambda \in \mathbb{R}$.
□
Théorème

> Tout endomorphisme autoadjoint est diagonalisable dans une base orthonormée.

dém. :
Soient $u \in \mathcal{S}(E)$ et

$$F = \underset{\lambda \in \mathrm{Sp} u}{\overset{\perp}{\oplus}} E_\lambda(u)$$

Le sous-espace vectoriel F est stable par u donc $F^\perp$ est stable par $u^\star = u$.
Considérons l'endomorphisme v égal à la restriction de u au départ de $F^\perp$. On a

$$\forall x, y \in F^\perp, (v(x) \mid y) = (u(x) \mid y) = (x \mid u(y)) = (x \mid v(y))$$

Puisque v est autoadjoint.
Par l'absurde, si $F^\perp \neq \{0_E\}$ alors v admet une valeur propre λ. Il existe donc $x \in F^\perp$ tel que $v(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0_E$. Or x est alors aussi vecteur propre de u et donc $x \in F$. C'est absurde car $F \cap F^\perp = \{0_E\}$.
Ainsi E est la somme directe des sous-espaces propres de u et puisque ceux-ci sont deux à deux orthogonaux, on peut former une base orthonormée adaptée à cette décomposition, base qui diagonalise u.
□
Exemple Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Posons $\lambda_{\min} = \min \mathrm{Sp} u$ et $\lambda_{\max} = \max \mathrm{Sp} u$.
On a

$$\forall x \in E, \lambda_{\min} \|x\|^2 \leqslant (u(x) \mid x) \leqslant \lambda_{\max} \|x\|^2$$

En effet, soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée diagonalisant u.

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de u.
Pour $x \in E$, on peut écrire $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et on a alors $u(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i$.
Puisque la base $\mathcal{B}$ est orthonormée,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \text{ et } (u(x) \mid x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

Or, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $\lambda_{\min} \leqslant \lambda_i \leqslant \lambda_{\max}$ donc

$$\lambda_{\min} \|x\|^2 \leqslant (u(x) \mid x) \leqslant \lambda_{\max} \|x\|^2$$

6.3.3 Diagonalisation des matrices symétriques réelles

Théorème

Toute matrice symétrique réelle est orthogonalement diagonalisable

$$\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \exists D \in D_n(\mathbb{R}), A = PDP^{-1} = PD^tP$$

dém. :
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Munissons $E = \mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique et considérons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par A dans la base canonique.
Puisque A est symétrique et $\mathcal{B}$ orthonormée, l'endomorphisme u est autoadjoint. Il existe donc une base orthonormée $\mathcal{B}'$ diagonalisant u. Par changement de base, on a alors $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale et P orthogonale car matrice de passage entre deux bases orthonormées.
□

Exemple Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^tAA$ est diagonalisable car symétrique réelle.
Ses valeurs propres sont appelées valeurs singulières de A.

Attention : Une matrice symétrique complexe n'est pas nécessairement diagonalisable :

Exemple Pour $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$, $\chi_A = X^2$ donc $\mathrm{Sp}A = \{0\}$.
Puisque $A \neq O_2$, la matrice A n'est pas diagonalisable.

6.3.4 Application : rayon spectral

Ici on suppose $E \neq \{0_E\}$

Définition

On appelle rayon spectral d'un endomorphisme u autoadjoint le réel

$$\rho(u) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}u} |\lambda|$$

Rappel Si $u \in \mathcal{L}(E)$ alors

$$\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$$

Théorème

Si u est un endomorphisme autoadjoint

$$\sup_{\|x\|=1} |(u(x) \mid x)| = \|u\| = \rho(u)$$

dém. :

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de u.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ et } \rho(u) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i|$$

Soit $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$.

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|(u(x) \mid x)| \leqslant \|u(x)\| \, \|x\| \leqslant \|u\|$$

Par suite

$$\sup_{\|x\|=1} |(u(x) \mid x)| \leqslant \|u\|$$

Soit $x \in E$. On peut écrire $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et alors $u(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i$.

Puisque la base $\mathcal{B}$ est orthonormée,

$$\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 x_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \rho^2(u) x_i^2 = \rho^2(u) \|x\|^2$$

Ainsi $\|u\| \leqslant \rho(u)$.

Enfin, pour $x = e_i$ avec i tel que $|\lambda_i| = \rho(u)$, on a $\|x\| = 1$ et $|(u(x) \mid x)| = \rho(u)$. Par suite

$$\rho(u) \leqslant \sup_{\|x\|=1} (u(x) \mid x)$$

□

Corollaire

$\forall f \in \mathcal{L}(E)$, $\|f\|^2 = \|f^\star \circ f\|$ et $\|f\| = \|f^\star\|$.

dém. :

On a

$$\|f\|^2 = \left(\sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|\right)^2 = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|^2 = \sup_{\|x\|=1} (f(x) \mid f(x)) = \sup_{\|x\|=1} |(f^\star \circ f(x) \mid x)| = \|f^\star \circ f\|$$

Puisque $\|f^\star \circ f\| \leqslant \|f^\star\| \, \|f\|$ on a $\|f\|^2 \leqslant \|f^\star\| \, \|f\|$.

On en déduit $\|f\| \leqslant \|f^\star\|$ que $\|f\| = 0$ ou non.

Ainsi pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, $\|f\| \leqslant \|f^\star\|$.

Par suite $\|f^\star\| \leqslant \|f^{\star\star}\| = \|f\|$ et donc $\|f\| = \|f^\star\|$.

□

Chapitre 7

Algèbre bilinéaire

E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

7.1 Formes bilinéaires symétriques et forme quadratique

7.1.1 Formes bilinéaires symétriques

Définition

On appelle forme bilinéaire symétrique sur E toute application bilinéaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x, y \in E, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$$

Exemple Un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique.

Exemple Sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E quelconque, pour $f, g \in E^\star$,

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}\left(f(x)g(y) + g(x)f(y)\right)$$

définit une forme bilinéaire symétrique sur E.

Exemple Sur $E = \mathbb{R}^n$, pour $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k y_k$$

définit une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple Sur $E = \mathcal{C}^0_{pm}([a, b], \mathbb{R})$,

$$\varphi(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

définit une forme bilinéaire symétrique sur E.

Théorème

L'ensemble $\mathcal{BS}(E)$ des formes bilinéaires symétriques sur E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E\times E,\mathbb{R})$.

dém. :
$\mathcal{BS}(E)\subset\mathcal{F}(E\times E,\mathbb{R})$ et $\tilde{0}\in\mathcal{BS}(E)$.
Pour $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ et $\varphi,\psi\in\mathcal{BS}(E)$.
$(\lambda\varphi+\mu\psi)(x,\alpha y+\beta z)=\lambda\varphi(x,\alpha y+\beta z)+\mu\psi(x,\alpha y+\beta z)$.
Or φ et ψ sont linéaires en leur deuxième variable donc $(\lambda\varphi+\mu\psi)(x,\alpha y+\beta z)=\alpha\lambda\varphi(x,y)+\beta\lambda\varphi(x,z)+\alpha\mu\psi(x,y)+\beta\mu\psi(x,z)$.
puis $(\lambda\varphi+\mu\psi)(x,\alpha y+\beta z)=\alpha(\lambda\varphi+\mu\psi)(x,y)+\beta(\lambda\varphi+\mu\psi)(x,z)$.
Ainsi $\lambda\varphi+\mu\psi$ est linéaire en sa deuxième variable.
De plus $(\lambda\varphi+\mu y)(y,x)=\lambda\varphi(y,x)+\mu\psi(y,x)=\lambda\varphi(x,y)+\mu\psi(x,y)=(\lambda\varphi+\mu\psi)(x,y)$.
Ainsi $\lambda\varphi+\mu\psi$ est symétrique et donc bilinéaire.
□

7.1.2 Formes quadratiques

Définition

On appelle forme quadratique associée à une forme bilinéaire symétrique φ l'application $q:E\to\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x\in E, q(x)=\varphi(x,x)$$

Exemple Sur E espace préhilbertien, $\|\,.\,\|^2$ est la forme quadratique associée au produit scalaire.

Exemple Sur E quelconque, pour $f,g\in E^\star$, $q:x\mapsto f(x)g(x)$ est une forme quadratique.

Proposition

Si q est une forme quadratique alors

$$q(0_E)=0 \text{ et } \forall\lambda\in\mathbb{R},\forall x\in E, q(\lambda x)=\lambda^2 q(x)$$

En particulier $q(-x)=q(x)$.

dém. :
$q(0_E)=\varphi(0_E,0_E)=0$ car φ est bilinéaire.
$q(\lambda x)=\varphi(\lambda x,\lambda x)=\lambda^2\varphi(x,x)$ car φ est bilinéaire.
*Prop :*Si q est une forme quadratique associée à une forme bilinéaire symétrique φ alors

$$\forall x,y\in E, q(x+y)=q(x)+2\varphi(x,y)+q(y)$$

□
dém. :
$q(x+y)=\varphi(x+y,x+y)=\varphi(x,x+y)+\varphi(y,x+y)=q(x)+2\varphi(x,y)+q(y)$ car φ est bilinéaire et symétrique.
□

Théorème

Si q est une forme quadratique il n'existe qu'une unique forme bilinéaire symétrique φ vérifiant

$$\forall x \in E, q(x) = \varphi(x, x)$$

et celle-ci est déterminée par

$$\forall x, y \in E, \varphi(x, y) = \frac{1}{4}\left(q(x + y) - q(x - y)\right)$$

dém. :
Si q est la forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique φ alors
$q(x + y) = q(x) + 2\varphi(x, y) + q(y)$ et $q(x - y) = q(x) - 2\varphi(x, y) + q(y)$ donc en sommant

$$q(x + y) - q(x - y) = 4\varphi(x, y)$$

ce qui détermine φ de façon unique.
□

Corollaire

L'ensemble $\mathcal{Q}(E)$ des formes quadratiques sur E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ isomorphe à $\mathcal{BS}(E)$.

dém. :
L'application $\theta : \mathcal{BS}(E) \to \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ définie par $\theta(\varphi) = q$ est évidemment linéaire.
Par définition $\mathcal{Q}(E) = \mathrm{Im}\theta$ et donc $\mathcal{Q}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, \mathbb{R})$.
Enfin, par polarisation, θ réalise une bijection de $\mathcal{BS}(E)$ vers $\mathcal{Q}(E)$.
□

Définition

Si q est la forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique φ on dit aussi que φ est la forme polaire associée à la forme quadratique q.

Exemple Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $q(A) = \mathrm{tr}(A^2)$ définit une forme quadratique.
Idée : Posons $\varphi(A, B) = \mathrm{tr}(AB)$.
φ est visiblement une forme bilinéaire symétrique et q est la forme quadratique associée.

Exemple Sur $E = \mathbb{R}[X]$, montrons que $q(P) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)P''(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ définit une forme quadratique.
Analyse : Si q est une forme quadratique alors sa forme polaire φ est donnée par :

$$\varphi(P, Q) = \frac{1}{4}\left(q(P + Q) - q(P - Q)\right) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left(P(t)Q''(t) + P''(t)Q(t)\right)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Synthèse : Considérons φ définie comme ci-dessus.
φ est une forme bilinéaire symétrique et q est la forme quadratique associée.

Exemple Ici $E = \mathbb{R}^n$.

L'application $x \mapsto x_i$ est une forme linéaire donc l'application $x \mapsto x_i x_j$ est une forme quadratique de forme polaire $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}(x_i y_j + x_j y_i)$.
En particulier $x \mapsto x_i^2$ est une forme quadratique de forme polaire $(x, y) \mapsto x_i y_i$.
Par combinaison linéaire, $x \mapsto \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$.
Sa forme polaire s'obtient par dédoublement :
- le terme carré x_i^2 devient $x_i y_i$;
- le terme rectangle $x_i x_j$ devient $\frac{1}{2}(x_i y_j + x_j y_i)$.
Concrètement $q(x) = x_1^2 - 2x_2 x_3$ est une forme quadratique de forme polaire
$\varphi(x, y) = x_1 y_1 - (x_2 y_3 + x_3 y_2)$.

7.1.3 Positivité

Définition

Une forme quadratique q sur E est dite :
- positive si $\forall x \in E, q(x) \geqslant 0$;
- négative si $\forall x \in E, q(x) \leqslant 0$;
- définie si $\forall x \in E, q(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$.
Ce vocabulaire se transpose aux formes bilinéaires symétriques.

Exemple Un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Exemple Sur $E = \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], \mathbb{R})$,

$$\varphi(f, g) = \int_a^b f(t) g(t) \, \mathrm{d}t$$

détermine une forme bilinéaire symétrique positive.

Exemple Sur $E = \mathbb{R}^2$,
$q(x) = x_1^2 + 2x_2^2$ est une forme quadratique définie positive ;
$q(x) = x_1^2$ est une forme quadratique positive (mais non définie) ;
$q(x) = x_1^2 - 2x_2^2$ n'est pas remarquable ;
$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 = (x_1 + \frac{1}{2} x_2)^2 + \frac{3}{4} x_2^2$ est une forme quadratique définie positive.

Théorème

Si q est une forme quadratique positive de forme polaire φ alors

$$\forall x, y \in E, (\varphi(x, y))^2 \leqslant q(x) q(y)$$

dém. :
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $q(\lambda x + y) = \lambda^2 q(x) + 2\lambda \varphi(x, y) + q(y) \geqslant 0$.

Cas $q(x) \neq 0$
$\Delta \leqslant 0$ donne $4\varphi(x,y)^2 - 4q(x)q(y) \leqslant 0$ puis l'inégalité voulue.
Cas $q(x) = 0$
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $2\lambda\varphi(x,y) + q(y) \geqslant 0$ entraîne $\varphi(x,y) = 0$ puis l'inégalité voulue.
□

Exemple Sur $E = \mathcal{C}^0_{pm}([a,b], \mathbb{R})$,

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left(\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \left(\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

7.1.4 Transposition aux endomorphismes autoadjoints

Soit E un espace euclidien.

Proposition

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint alors l'application

$$q : x \mapsto (u(x) \mid x)$$

définit une forme quadratique sur E de forme polaire

$$\varphi : (x,y) \mapsto (u(x) \mid y)$$

dém. :
L'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est bien définie et évidemment bilinéaire.
Puisque l'endomorphisme u est autoadjoint,

$$\varphi(x,y) = (u(x) \mid y) = (x \mid u(y)) = (u(y) \mid x) = \varphi(y,x)$$

et donc φ est symétrique.
L'application q_u est évidemment la forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique φ_u.
□

Définition

Un endomorphisme autoadjoint u de E est dit :
- positif si $\forall x \in E, (u(x) \mid x) \geqslant 0$;
- négatif si $\forall x \in E, (u(x) \mid x) \leqslant 0$;
- défini si $\forall x \in E, (u(x) \mid x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$.

On note $\mathcal{S}^+(E)$ (resp. $\mathcal{S}^{++}(E)$) l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs (resp. définis et positifs).

Remarque Un endomorphisme autoadjoint u est défini positif si

$$\forall x \in E, x \neq 0_E \Rightarrow (u(x) \mid x) > 0$$

Exemple Si $f \in \mathcal{L}(E)$ alors $u = f^\star \circ f \in \mathcal{S}^+(E)$.
En effet $u^\star = u$ et $(u(x) \mid x) = (f^\star \circ f(x) \mid x) = (f(x) \mid f(x)) = \|f(x)\|^2 \geqslant 0$
Si $f \in \mathrm{GL}(E)$ alors $u = f^\star \circ f \in \mathcal{S}^{++}(E)$.
En effet $(u(x) \mid x) = \|f(x)\|^2 = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ et donc $(u(x) \mid x) = 0 \Rightarrow x = 0$ car $f \in \mathrm{GL}(E)$.

Théorème

Soit u un endomorphisme autoadjoint de E.
On a équivalence entre ;
(i) u est positif (resp. défini positif) ;
(ii) $\mathrm{Sp}u \subset \mathbb{R}^+$ (resp. $\mathrm{Sp}u \subset \mathbb{R}^{+\star}$).

dém. :
(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons u positif.
Soit λ une valeur propre de u et x un vecteur propre associé.
$(u(x) \mid x) = (\lambda x \mid x) = \lambda \|x\|^2$ et $(u(x) \mid x) \geqslant 0$ donc $\lambda \|x\|^2 \geqslant 0$ puis $\lambda \geqslant 0$ car $\|x\|^2 > 0$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+$.
Par le théorème spectral, il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ diagonalisant u :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de u.
Pour tout $x \in E$, on peut écrire $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et alors

$$(u(x) \mid x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geqslant 0$$

Pour la caractérisation de u défini positif, il suffit d'adapter cette démonstration.
□

Corollaire

$\mathcal{S}^{++}(E) = \mathcal{S}^+(E) \cap \mathrm{GL}(E)$.

dém. :
Car $0 \notin \mathrm{Sp}u \Leftrightarrow u \in \mathrm{GL}(E)$
□

7.1.5 Transposition aux matrices symétriques réelles

On introduit le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par $(X \mid Y) = {}^tXY$.

Proposition

Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ alors l'application

$$q : X \mapsto (AX \mid X) = {}^tXAX$$

définit une forme quadratique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de forme polaire

$$\varphi : (X, Y) \mapsto (AX \mid Y) = {}^tXAY$$

dém. :
L'application $\varphi : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est bien définie et évidemment bilinéaire.

$$\varphi(X, Y) = {}^tX{}^tAY = {}^tXAY = (X \mid AY) = (AY \mid X) = \varphi(Y, X)$$

□

Définition

Une matrice symétrique réelle A est dite :
- positive si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX \geqslant 0$;
- négative si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX \leqslant 0$;
- définie si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX = 0 \Rightarrow X = 0$.

On note $S_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques réelles carrées d'ordre n positives (resp. définies positives).

Remarque Une matrice symétrique réelle A est définie positive si, et seulement si,

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), X \neq 0 \Rightarrow (AX \mid X) > 0$$

Exemple Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $A = {}^tMM$ est symétrique positive.
${}^tA = {}^t\left({}^tMM\right) = {}^tMM = A$ donc A est symétrique et pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,
${}^tXAX = {}^t(MX)MX = \|MX\|^2 \geqslant 0$
Si de plus $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ alors $A = {}^tMM$ est définie positive.
En effet, ${}^tXAX = \|MX\|^2 = 0 \Rightarrow MX = 0$ donc ${}^tXAX = 0 \Rightarrow X = 0$ car M est inversible.

Théorème

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On a équivalence entre :
(i) A est positive (resp. définie positive) ;
(ii) Sp$A \subset \mathbb{R}^+$ (resp. Sp$A \subset \mathbb{R}^{+\star}$).

dém. :
(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons A positive.
Soit $\lambda \in$ SpA et X vecteur propre associé.
${}^tXAX = \lambda{}^tXX = \lambda\|X\|^2 \geqslant 0$ avec $\|X\|^2 > 0$ donc $\lambda \geqslant 0$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons Sp$A \subset \mathbb{R}^+$.
La matrice A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale, donc il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP = D$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX = {}^t(PX)DPX = {}^tYDY$ avec $Y = PX$.

En notant $y_1, \ldots, y_n$ les coefficients de la colonne Y alors ${}^tXAX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \geqslant 0$.

□

Corollaire

$\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}(E)$.

7.2 Représentation des formes bilinéaires symétriques

E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$.

7.2.1 Matrice d'une forme bilinéaire symétrique

Théorème

Soient φ une forme bilinéaire symétrique sur E et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Il existe une unique matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall x, y \in E, \varphi(x, y) = {}^tXAY$$

en notant X, Y les colonnes des coordonnées de x, y dans $\mathcal{B}$.
De plus celle-ci est déterminée par

$$\forall 1 \leqslant i, j \leqslant n, a_{i,j} = \varphi(e_i, e_j)$$

dém. :
Unicité : Supposons $A = (a_{i,j})$ solution.
Pour $x = e_i$ et $y = e_j$, $\varphi(e_i, e_j) = {}^tE_iAE_j$ en notant E_k la colonne élémentaire d'indice k.
Or ${}^tE_iAE_j = {}^tE_iC_j$ avec C_j la j-ème colonne de A puis ${}^tE_iAE_j = a_{i,j}$.
Ainsi $A = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ ce qui détermine A de façon unique.
Existence : Considérons $A = (a_{i,j})$ avec $a_{i,j} = \varphi(e_i, e_j)$.
Puisque $\varphi(e_j, e_i) = \varphi(e_i, e_j)$ on a $a_{j,i} = a_{i,j}$ et donc la matrice A est symétrique.
Pour $x, y \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$.
D'une part, par bilinéarité,

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \varphi(e_i, e_j)$$

D'autre part,

$${}^tXAY = \sum_{i=1}^{n} x_i \left[AY\right]_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \varphi(e_i, e_j)$$

Ainsi $\varphi(x, y) = {}^tXAY$.
□

Définition

Cette matrice A est appelée matrice de la forme bilinéaire symétrique φ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}\varphi = (\varphi(e_i, e_j)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Exemple $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ base canonique
$\varphi(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1$ forme bilinéaire symétrique sur E.
On a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple E euclidien, $\mathcal{B}$ base orthonormée et $\varphi = (.\mid.)$
On a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}\,(.\mid.) = I_n$$

car $(e_i \mid e_j) = \delta_{i,j}$.
On retrouve ainsi $(x \mid y) = {}^tXY$ avec X, Y colonnes des coordonnées dans une base orthonormée.
De plus, si $\mathcal{B}$ n'est plus une base orthonormée de E, on peut encore calculer le produit scalaire de deux vecteurs à l'aide des coordonnées dans $\mathcal{B}$ par la relation

$$(x \mid y) = {}^tXAY \text{ avec } A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(.\mid.)$$

7.2.2 Matrice d'une forme quadratique

Théorème

Soient q une forme quadratique sur E et $\mathcal{B}$ une base de E.
Il existe une unique matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall x \in E, q(x) = {}^tXAX$$

avec X la colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.
De plus cette matrice A est la matrice de la forme polaire φ de q dans $\mathcal{B}$.

dém. :
Existence : Considérons $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}\varphi$ avec φ la forme polaire de q.
Pour tout $x \in E$, $q(x) = \varphi(x, x) = {}^tXAX$.
Unicité : Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ solution. Par polarisation

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4}\left(q(x + y) - q(x - y)\right) = \frac{1}{4}\left({}^t(X + Y)A(X + Y) - {}^t(X - Y)A(X - Y)\right)$$

Après développement et en exploitant ${}^tYAX = {}^tXAY$, on obtient

$$\varphi(x, y) = {}^tXAY$$

ce qui établit que A est la matrice de la forme bilinéaire symétrique φ dans $\mathcal{B}$.
□

Définition

On appelle matrice d'une forme quadratique q dans une base $\mathcal{B}$ la matrice de sa forme polaire φ.
On note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}q = \text{Mat}_{\mathcal{B}}\varphi$.

Exemple Sur $E = \mathbb{R}^3$ considérons la forme quadratique

$$q(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 2x_2x_3$$

Formons la matrice de q dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
(1) La forme polaire associée à q est

$$\varphi(x, y) = 2x_1y_1 + x_2y_2 + \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) + (x_2y_3 + x_3y_2)$$

On a alors
$\varphi(e_1, e_1) = 2$, $\varphi(e_1, e_2) = 1/2$, $\varphi(e_1, e_3) = 0$ etc.
On en déduit

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}q = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) La matrice de la forme quadratique q est la matrice symétrique A telle que $q(x) = {}^tXAX$.
Or

$${}^tXAX = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} a_{i,j}x_ix_j$$

donc la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

convient.

7.2.3 Positivité

Théorème

Si A est la matrice d'une forme bilinéaire symétrique φ (ou d'une forme quadratique q), on a équivalence entre :
(i) φ est positive (resp. définie positive) ;
(ii) $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) ;
(iii) Sp$A \subset \mathbb{R}^+$ (resp. Sp$A \subset \mathbb{R}^{+\star}$).

dém. :
(i) $\Leftrightarrow$ (ii) car $\varphi(x, x) = {}^tXAX$.
(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) déjà vue.
□

Exemple Sur $E = \mathbb{R}^2$, posons

$$q(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$$

La matrice de q dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a Sp$A \subset \mathbb{R}^{+\star}$ donc q est définie positive.

Remarque On aurait aussi pu remarquer $q(x) = x_1^2 + (x_1 - x_2)^2$

Exemple La matrice

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix}$$

est symétrique définie positive.
En effet c'est la matrice du produit scalaire $(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Remarque Plus généralement, si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base quelconque d'un espace euclidien E alors la matrice $G(e_1, \ldots, e_n) = ((e_i \mid e_j)) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ car un produit scalaire est défini positif.

7.2.4 Isomorphismes de représentation matricielle

Théorème

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E
L'application $M_{\mathcal{B}} : \mathcal{BS}(E) \mapsto \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ définie par $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\varphi$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

dém. :
L'application $M_{\mathcal{B}}$ est évidemment linéaire.
Soit $\varphi \in \ker M_{\mathcal{B}}$. On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\varphi = O_n$
Pour tout $x, y \in E$, $\varphi(x, y) = {}^tXO_nY = 0$ donc $\varphi = \tilde{0}$. Ainsi $M_{\mathcal{B}}$ est injective.
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Considérons l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x, y) = {}^tXAY$.
φ est une forme bilinéaire symétrique telle que $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = A$. Ainsi $M_{\mathcal{B}}$ est surjective.
Finalement $M_{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme.
□

Corollaire

$\dim \mathcal{BS}(E) = \dim \mathcal{Q}(E) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ avec $n = \dim E$.

dém. :
Car $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
□

7.2.5 Représentation d'une forme bilinéaire symétrique par un endomorphisme autoadjoint

On suppose ici E euclidien.
Pour $u \in \mathcal{S}(E)$, on rappelle que $\varphi_u : (x, y) \mapsto (u(x) \mid y)$ est une forme bilinéaire symétrique sur E.

Théorème

L'application $\Phi : \mathcal{S}(E) \mapsto \mathcal{BS}(E)$ définie par $\Phi(u) = \varphi_u$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

dém. :
L'application Φ est évidemment linéaire et on a l'égalité de dimensions

$$\dim \mathcal{S}(E) = \frac{n(n+1)}{2} = \dim \mathcal{BS}(E) < +\infty$$

Soit $u \in \ker \Phi$. Pour tout $x, y \in E$, $(u(x) \mid y) = \varphi_u(x,y) = 0$ donc pour tout $x \in E$, $u(x) = 0$ et donc $u = \tilde{0}$.
Finalement l'application Φ est injective est c'est donc un isomorphisme.
□

Définition

On appelle endomorphisme autoadjoint associé à une forme bilinéaire symétrique φ l'unique $u \in \mathcal{S}(E)$ vérifiant

$$\forall x, y \in E, \varphi(x,y) = (u(x) \mid y)$$

Proposition

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée alors l'endomorphisme autoadjoint u associé à une forme bilinéaire symétrique φ est donnée par

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} u = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} \varphi$$

dém. :
$[\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} u]_{i,j} = (e_i \mid u(e_j)) = (u(e_i) \mid e_j) = \varphi(e_i, e_j) = [\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} \varphi]_{i,j}$.
□

7.3 Diagonalisation d'une forme bilinéaire symétrique

E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$.

7.3.1 Formule de changement de base

Théorème

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E.
Si A et A' désignent les matrices d'une forme bilinéaire symétrique φ sur E dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ alors

$$A' = {}^tPAP$$

avec P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$
On dit alors que les matrices A et A' sont congruentes.

dém. :
Soient $x, y \in E$ de colonnes composantes X, Y dans $\mathcal{B}$ et X', Y' dans $\mathcal{B}'$.
On a $X = PX'$ et $Y = PY'$
$\varphi(x,y) = {}^tXAY = {}^tX'{}^tPAPY' = {}^tX'A'Y'$.
Par unicité de la matrice décrivant l'action d'une forme bilinéaire symétrique, $A' = {}^tPAP$.
□

Exemple Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrons qu'il existe $T \in T_n^+(\mathbb{R})$ vérifiant $A = {}^tTT$.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$.
Soit φ la forme bilinéaire symétrique déterminée par $\text{Mat}_{\mathcal{B}}\varphi = A$.
Puisque $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, φ est un produit scalaire.
Soit $\mathcal{B}'$ l'orthonormalisée de $\mathcal{B}$ par le procédé de Schmidt.
On a $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}\mathcal{B}' \in T_n^+(\mathbb{R})$.
Par formule de changement de bases $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}\varphi = {}^tPAP$.
Or $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}\varphi = I_n$ car $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée pour le produit scalaire φ.
On en déduit ${}^tPAP = I_n$ puis $A = {}^tTT$ avec $T = P^{-1} \in T_n^+(\mathbb{R})$.

7.3.2 Rang d'une forme bilinéaire symétrique

Proposition

Les matrices d'une même forme bilinéaire symétrique φ ont le même rang.

dém. :
Soient A, A' deux matrices d'une forme bilinéaire symétrique φ.
Par formule de changement de base, $A' = {}^tPAP$ avec P inversible.
Puisque P et ${}^tP$ sont inversibles, $\text{rg}A' = \text{rg}A$.
□

Définition

Cette valeur commune est appelée rang de la forme bilinéaire symétrique φ. On le note $\text{rg}\varphi$.
On appelle rang d'une forme quadratique, le rang de sa forme polaire.

Exemple Sur $\mathbb{R}^3$, considérons la forme quadratique $q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(q) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\text{rg}q = 3$.

Définition

Une forme quadratique q (resp. une forme bilinéaire symétrique) est dite non dégénérée si $\text{rg}q = \dim E$.

Exemple Une forme quadratique q définie positive est non dégénérée.
En effet $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}q \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc $0 \notin \text{Sp}A$ puis $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

7.3.3 Réduction d'une forme bilinéaire symétrique

Théorème

Si φ est une forme bilinéaire symétrique sur E, il existe une base de E dans laquelle la matrice de φ est diagonale.
Si de plus E est euclidien, on peut choisir la base $\mathcal{B}$ orthonormée.

dém. :
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}\varphi$.
Puisque $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D \in D_n(\mathbb{R})$ telle que $D = {}^tPAP$.
Considérons alors $\mathcal{B}'$ la base de E déterminée par $\text{Mat}_{\mathcal{B}}\mathcal{B}' = P$.
Par formule de changement de base,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}\varphi = D$$

Si de plus E est euclidien alors, en partant de $\mathcal{B}$ orthonormée, la base $\mathcal{B}'$ est orthonormée car $\text{Mat}_{\mathcal{B}}\mathcal{B}' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
□

Remarque On ne peut rien affirmer d'immédiat sur les coefficients diagonaux de la matrice diagonale obtenue. En particulier, on ne peut pas parler de valeurs propres dans le cadre d'une forme bilinéaire symétrique…

Exemple Soient φ une forme bilinéaire symétrique définie positive et ψ une forme bilinéaire symétrique sur E.
Montrons qu'il existe une base diagonalisant simultanément φ et ψ.
Puisque φ est un produit scalaire sur E, (E, φ) est un espace euclidien.
Par réduction d'une forme bilinéaire symétrique, il existe alors une base orthonormée $\mathcal{B}$ de l'espace euclidien (E, φ) diagonalisant ψ.
On a alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}\varphi = I_n$ car $\mathcal{B}$ est orthonormée et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}\psi \in D_n(\mathbb{R})$ car $\mathcal{B}$ diagonalise ψ.

Exemple Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.
Montrons qu'il existe des matrices $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D \in D_n(\mathbb{R})$ telles que $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$.
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E.
Soient φ et ψ les formes bilinéaires symétriques définies par
$\text{Mat}_{\mathcal{B}}\varphi = A$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}\psi = B$.
Puisque $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, φ est un produit scalaire et donc (E, φ) est un espace euclidien.
Par réduction d'une forme bilinéaire symétrique, il existe alors une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de l'espace euclidien (E, φ) diagonalisant ψ.
On a alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = I_n$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\psi) = D \in D_n(\mathbb{R})$.
Par formule de changement de bases $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$ avec $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}\mathcal{B} \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$

Deuxième partie

Analyse

Chapitre 8

Eléments d'analyse

8.1 Borne supérieure, borne inférieure

8.1.1 Définition

Définition

Lorsqu'elle existe, on appelle borne supérieure d'une partie A de $\mathbb{R}$ le plus petit des majorants de A, on la note $\sup A$.
Lorsqu'elle existe, on appelle borne inférieure de A le plus grand des minorants de A, on la note $\inf A$.

Exemple Pour $A = [0, 1[$, on a $\sup A = 1$ et $\inf A = 0$.

Attention : $\sup A$ peut être ou non élément de A.
Plus précisément, $\sup A \in A$ si, et seulement si, A possède un plus grand élément et alors $\sup A = \max A$.

Théorème

Si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée alors $\sup A$ existe dans $\mathbb{R}$.
Si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée alors $\inf A$ existe dans $\mathbb{R}$.

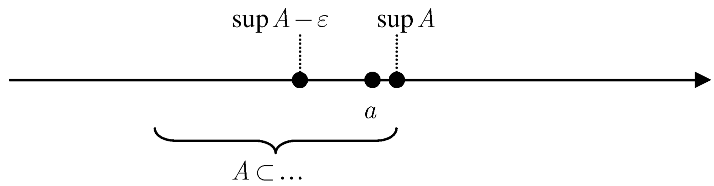
dém. :
Par construction (hors-programme) de la droite réelle.

□

Théorème

Si A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \sup A - \varepsilon < a \leqslant \sup A$$



dém. :
Pour tout $a \in A$, on a $a \leqslant \sup A$ car $\sup A$ est majorant de A.
Pour $\varepsilon > 0$, $\sup A - \varepsilon$ n'est pas majorant de A donc il existe $a \in A$ vérifiant $a > \sup A - \varepsilon$.
□

Remarque Si A est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \inf A \leqslant a < \inf A + \varepsilon$$

8.1.2 Propriétés calculatoires

Proposition

Soient A, B des parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées
Si $A \subset B$ alors $\sup A \leqslant \sup B$.

dém. :
$\sup A$ et $\sup B$ existent
Pour tout $a \in A$, $a \in B$ donc $a \leqslant \sup B$.
$\sup B$ est alors un majorant de A, or $\sup A$ est le plus petit des majorants de A donc $\sup A \leqslant \sup B$.
□

Remarque La démarche

$$(\forall x \in A, x \leqslant M) \Rightarrow \sup A \leqslant M$$

s'appelle un passage à la borne supérieure.

Proposition

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et A une partie de $\mathbb{R}$. On note

$$\lambda A \underset{\text{déf}}{=} \{\lambda a / a \in A\}$$

Si $\lambda \geqslant 0$ et si A est non vide et majorée alors

$$\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$$

dém. :
Cas $\lambda = 0$:
$\lambda A = \{0\}$, $\sup(\lambda A) = 0 = \lambda \sup A$
Cas $\lambda > 0$:
λA est une partie de $\mathbb{R}$ non vide.
Pour $a \in A$, $a \leqslant \sup A$ donc

$$\lambda a \leqslant \lambda \sup A$$

λA est majorée par $\lambda \sup A$ donc $\sup(\lambda A)$ existe et

$$\sup(\lambda A) \leqslant \lambda \sup A$$

De même

$$\sup A = \sup \frac{1}{\lambda}(\lambda A) \leqslant \frac{1}{\lambda} \sup \lambda A$$

d'où $\lambda \sup A \leqslant \sup \lambda A$ puis $=$.
□

Remarque Dans le cas $\lambda \leqslant 0$, on peut obtenir

$$\sup(\lambda A) = \lambda \inf A$$

Proposition

Soient A, B des parties de $\mathbb{R}$. On note

$$A + B \underset{\text{déf}}{=} \{a + b / a \in A, b \in B\}$$

Si A et B sont non vides et majorées alors

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

dém. :
$\sup A$ et $\sup B$ existent.
$A + B$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide.
Pour $a \in A$ et $b \in B$,

$$a + b \leqslant \sup A + \sup B$$

$A + B$ est majorée par $\sup A + \sup B$ donc $\sup(A + B)$ existe et

$$\sup(A + B) \leqslant \sup A + \sup B$$

Pour $a \in A$ et $b \in B$,

$$b = a + b - a \leqslant \sup(A + B) - a$$

En passant à la borne sup,

$$\sup B \leqslant \sup(A + B) - a$$

puis

$$a \leqslant \sup(A + B) - \sup B$$

En passant à nouveau à la borne sup,

$$\sup A \leqslant \sup(A+B) - \sup B$$

puis

$$\sup A + \sup B \leqslant \sup(A+B)$$

et enfin l'égalité attendue.
□

8.1.3 Extension à $\bar{\mathbb{R}}$

Rappel : $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ est la droite numérique achevée.

Définition

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide.
Si A n'est pas majorée alors on pose $\sup A = +\infty$.
Si A n'est pas minorée alors on pose $\inf A = -\infty$.

Remarque Ainsi toute partie non vide de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure et une borne inférieure dans $\bar{\mathbb{R}}$.

Théorème

Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ alors il existe une suite (u_n) d'éléments de A telle que

$$u_n \to \sup A$$

dém. :
Cas A n'est pas majorée :
$\sup A = +\infty$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, A n'est pas majorée par n et il existe au moins un élément de A strictement supérieur àn. Notons u_n un tel élément. En faisant varier n, on construit ainsi une suite (u_n) vérifiant $u_n \in A$ et $u_n > n$ donc

$$u_n \to +\infty = \sup A$$

Cas A est majorée :
$M = \sup A \in \mathbb{R}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, A n'est pas majorée par $M - 1/(n+1)$. Il existe alors un élément $u_n \in A$ vérifiant

$$M - 1/(n+1) < u_n \leqslant M$$

Cela permet de définir une suite (u_n) d'éléments de A convergeant vers $M = \sup A$.
□

Remarque Evidemment, on a un énoncé analogue pour caractériser séquentiellement $\inf A$.

8.1.4 Extension aux fonctions et aux suites réelles

Soit X un ensemble non vide.

8.1.4.1 Définition

Définition

Pour $f : X \to \mathbb{R}$, on pose

$$\sup_X f := \sup \{f(x)/x \in X\} \text{ et } \inf_X f := \inf \{f(x)/x \in X\}$$

On note encore $\sup_{x \in X} f(x)$ et $\inf_{x \in X} f(x)$.

Remarque Si f est majorée alors $\sup_X f$ est le plus petit des majorants de f.
Si f n'est pas majorée alors $\sup_X f = +\infty$

Exemple $\sup_{x \in \mathbb{R}} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\inf_{x \in \mathbb{R}} \mathrm{e}^x = 0$

Remarque Une suite réelle $u = (u_n)_{n \geqslant n_0}$ est application de $X = \{n \in \mathbb{N}/n \geqslant n_0\}$ vers $\mathbb{R}$; la définition qui précède s'applique donc aux suites réelles :

$$\sup(u_n)_{n \geqslant n_0} = \sup \{u_n/n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0\}$$

Exemple Si (u_n) est croissante alors $\sup(u_n) = \lim_{n \to +\infty} u_n$.

8.1.4.2 Opérations

Proposition

Soient $f, g : X \to \mathbb{R}$ majorées.

$$f \leqslant g \Rightarrow \sup_X f \leqslant \sup_X g$$

dém. :
Pour tout $x \in X$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant \sup_X g$ donc $\sup_X f \leqslant \sup_X g$.
□

Proposition

Soient $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $f : X \to \mathbb{R}$ majorée.

$$\sup_X(\lambda f) = \lambda \sup_X f$$

dém. :
On a

$$\sup_X(\lambda f) = \sup\{\lambda f(x)/x \in X\} = \sup \lambda\{f(x)/x \in X\}$$

Or $\sup \lambda A = \lambda \sup A$ donc

$$\sup_X \lambda f = \lambda \sup\{f(x)/x \in X\} = \lambda \sup_X f$$

□

Proposition

> Soient $f, g : X \to \mathbb{R}$ majorées.
>
> $$\sup_X(f+g) \leqslant \sup_X f + \sup_X g$$

dém. :
Pour tout $x \in X$,

$$f(x) + g(x) \leqslant \sup_X f + \sup_X g$$

donc

$$\sup_X(f+g) \leqslant \sup_X f + \sup_X g$$

□

Exemple Pour $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$, $f(x) + g(x) = \cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos(x - \pi/4)$.
Ici

$$\sup_{\mathbb{R}} f = 1,\ \sup_{\mathbb{R}} g = 1 \text{ et } \sup_{\mathbb{R}}(f+g) = \sqrt{2} < \sup_{\mathbb{R}} f + \sup_{\mathbb{R}} g$$

8.2 Limite

$\mathcal{D}$ désigne une partie de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

8.2.1 Définitions quantifiées

8.2.1.1 limite en $a \in \mathbb{R}$

Définition

> On dit que $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ est définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ si
>
> $$\forall \alpha > 0, \mathcal{D} \cap [a - \alpha, a + \alpha] \neq \emptyset$$

Exemple Si f est définie en a (i.e. $a \in \mathcal{D}$) alors f est définie au voisinage de tout $a \in \mathcal{D}$.

Exemple $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{K}$ est définie au voisinage de 0.
En revanche, f n'est pas définie au voisinage de $-0,123$.

Définition

Soient $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{K}$.
On dit que f tend vers ℓ en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D}, |x - a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On note alors $f \underset{a}{\to} \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

Remarque Cette définition peut être transformée en une définition équivalente en remplaçant :
- $|x - a| \leqslant \alpha$ par $|x - a| < \alpha$;
- $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$ par $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Remarque L'assertion « $\exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D}, |x - a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$ »se relit encore $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$ au voisinage de a.

Définition

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.
On dit que f tend vers $+\infty$ en a si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D}, |x - a| \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) \geqslant M$$

On note alors $f \underset{a}{\to} +\infty$ ou $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.

Remarque $f \underset{a}{\to} +\infty$ signifie $\forall M \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant M$ au voisinage de a.

Remarque Sous réserve d'existence, on définit aussi la limite à droite de f en a comme étant la limite en a de $f_{\restriction \mathcal{D} \cap]a, +\infty[}$.

8.2.1.2 limite en $+\infty$

Définition

On dit que $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ est définie au voisinage de $+\infty$ si $\mathcal{D}$ n'est pas majorée.

Définition

Soient $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ définies au voisinage de $+\infty$ et $\ell \in \mathbb{K}$.
On dit que f tend vers ℓ en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}, x \geqslant A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Remarque L'assertion « $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}, x \geqslant A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$ »se relit $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$ au voisinage de $+\infty$.

Définition

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $+\infty$.
On dit que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}, x \geqslant A \Rightarrow f(x) \geqslant M$$

Remarque Ces deux dernières définitions s'appliquent aux suites $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ réelles en prenant $\mathcal{D} = \{n \in \mathbb{N}/n \geqslant n_0\}$.

Exemple Etudions la limite quand $x \to +\infty$ de $x - \ln x$.
Quand $x \to +\infty$, $x - \ln x = x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) \to +\infty$ car $\frac{\ln x}{x} \to 0$.

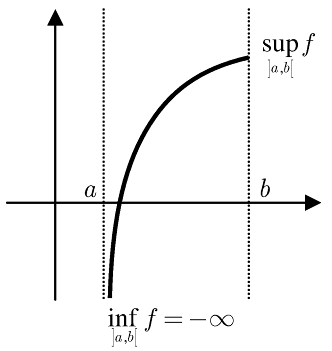
Attention : Ne pas rédiger $\lim \ldots = \lim \ldots = \ldots$.

Remarque Dans les cas « simples »une limite s'obtient :
- par opérations, quitte à lever des indéterminations pas transformation d'écriture ;
- par comparaison, mais cela nécessite d'avoir préalablement l'intuition de la limite à obtenir.

8.2.1.3 Théorème de la limite monotone

Théorème

Soient $a < b \in \bar{\mathbb{R}}$
Si $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est monotone de $]a, b[$ alors f admet des limites en a^+ et b^- qui sont $\inf\limits_{]a,b[} f$ et $\sup\limits_{]a,b[} f$.



Remarque Cet outil permet, entre autre, de calculer le sup et l'inf d'une fonction réelle à partir de son tableau de variation.

8.2.2 Outils de comparaison asymptotique

Soient $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ deux fonctions définies au voisinage de $a \in \bar{\mathbb{R}}$

8.2.2.1 Domination

Définition

On dit que f est dominée par g en a si

$$\exists M \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant M\,|g(x)| \text{ au voisinage de } a$$

On note alors $f \underset{a}{=} O(g)$ ou encore $f(x) = O(g(x))$ quand $x \to a$.

Remarque Plus précisément :
Cas $a \in \mathbb{R}$, $f \underset{a}{=} O(g)$ signifie :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D}, |x - a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)| \leqslant M\,|g(x)|$$

Cas $a = +\infty$, $f \underset{a}{=} O(g)$ signifie :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}, x \geqslant A \Rightarrow |f(x)| \leqslant M\,|g(x)|$$

Exemple $f \underset{a}{=} O(1)$ signifie f bornée au voisinage de a.

8.2.2.2 Prépondérance

Définition

On dit que f est négligeable devant g en a si on peut écrire au voisinage de a

$$\forall \varepsilon > 0, |f(x)| \leqslant M\,|g(x)| \text{ au voisinage de } a$$

On note alors $f \underset{a}{=} o(g)$, $f(x) = o(g(x))$ quand $x \to a$ ou $f(x) \ll g(x)$ quand $x \to a$.

Remarque f négligeable devant g en a signifie aussi qu'on peut écrire au voisinage de a

$$f(x) = \varepsilon(x) g(x) \text{ avec } \varepsilon \underset{a}{\to} 0$$

Cette écriture permet aisément de justifier les propriétés usuelles d'opérations sur les $o(\ldots)$:

$$o(g) + o(g) = o(g),\ o(g)h = o(gh),\ o(42g) = o(g), \ldots$$

Exemple Quand $x \to +\infty$,

$$\mathrm{e}^{-x} \ll \frac{1}{x^2} \ll \frac{1}{x} \ll \frac{1}{\ln x} \ll 1 \ll \ln x \ll \sqrt{x} \ll x \ll x^2 \ll \mathrm{e}^x$$

Quand $x \to 0^+$,

$$x^2 \ll x \ll \sqrt{x} \ll \frac{1}{\ln x} \ll 1 \ll \ln x \ll \frac{1}{\sqrt{x}} \ll \frac{1}{x} \ll \frac{1}{x^2}$$

8.2.2.3 Équivalents

Définition

On dit que f est équivalente à g en a si $f - g \underset{a}{=} o(g)$.
On note alors $f \underset{a}{\sim} g$ ou encore $f(x) \sim g(x)$ quand $x \to a$.

Exemple Quand $u \to 0$, $\ln(1+u) \sim u$, $\sin u \sim u$,...

Remarque f équivalente à g en a signifie aussi qu'on peut écrire au voisinage de a

$$f(x) = (1 + \varepsilon(x))g(x) = u(x)g(x) \text{ avec } u \underset{a}{\to} 1$$

On montre alors aisément :
- si $f \underset{a}{\sim} g$ alors f et g ont même éventuelle limite en a ;
- si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f(x)$ et $g(x)$ on le même signe au voisinage de a.

Remarque Les équivalents peuvent être :
- multipliés ;
- divisés ;
- élevés à une puissance constante.

Remarque On ne peut pas :
- sommer $f \sim g \not\Rightarrow f + h \sim g + h$;
- passer à l'exponentielle : $f \sim g \not\Rightarrow \mathrm{e}^f \sim \mathrm{e}^g$.

Remarque Pour déterminer un équivalent, on opère sur les $o(\ldots)$ avant de conclure avec le symbole $\sim$.

Exemple Quand $x \to +\infty$,

$$\frac{x^2 + x + 2\ln x}{\sqrt{x+1}} = \frac{x^2 + o(x^2)}{\sqrt{x + o(x)}} \sim \frac{x^2}{\sqrt{x}} = x^{3/2}$$

Quand $x \to 0^+$,

$$\frac{x^2 + x + 2\ln x}{\sqrt{x+1}} = \frac{2\ln x + o(\ln x)}{\sqrt{1 + o(1)}} \sim 2\ln x$$

Proposition

On suppose f et g à valeurs réelles strictement positives.
Si $f \underset{a}{\sim} g \to \ell \neq 1$ alors $\ln f \underset{a}{\sim} \ln g$.

dém. :
$\ln f = \ln g + \ln(f/g)$
Or $f/g \underset{a}{\to} 1$ donc $\ln(f/g) \underset{a}{\to} 0$ alors que

$$\ln g \to \begin{cases} +\infty & \text{si } \ell = +\infty \\ -\infty & \text{si } \ell = 0^+ \\ \ln \ell & \text{sinon} \end{cases}$$

donc $\ln(f/g) = o(\ln g)$.
□

Exemple Quand $x \to +\infty$,

$$\ln(1 + x + 2x^3) \sim \ln(2x^3) \sim 3 \ln x$$

Quand $x \to 0$,

$$\ln(1 + x + 2x^3) \sim x + 2x^3 \sim x$$

8.2.3 Développements limités

8.2.3.1 Définition

Définition

On dit que $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ admet un développement limité à l'ordre n en $a \in \mathbb{R}$ si on peut écrire :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right) \text{ quand } x \to a$$

Il y a alors unicité des coefficients $a_0, \ldots, a_n$.

Remarque On a alors $a_0 = \lim\limits_a f$.

Proposition

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ définie en a . On a équivalence entre :
(i) f est dérivable en a ;
(ii) f admet un développement limité à l'ordre 1 en a.
De plus, celui-ci est alors de la forme

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$$

dém. :
(ii)⇒(i) Si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a de la forme $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + o(x-a)$ alors, en prenant $x = a$, on obtient$a_0 = f(a)$ puis

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = a_1 + o(1) \xrightarrow[x \to a]{} a_1$$

Donc f est dérivable et $f'(a) = a_1$.
(ii)⇒(i) Il s'agit de reproduire le raisonnement en sens inverse.
□

Remarque Si f sans être définie en a y admet néanmoins un développement limité à l'ordre 1 de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + o(x-a)$$

alors f peut être prolongée par continuité en posant $f(a) = a_0$ et ce prolongement est dérivable avec $f'(a) = a_1$.

Théorème

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{K}$

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ alors f admet un développement limité à l'ordre n en tout $a \in I$ de la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right)$$

8.2.3.2 Développements limités de référence

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \cdots + u^n + o(u^n) = \sum_{k=0}^{n} u^k + o(u^n)$$

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + \cdots + (-1)^n u^n + o(u^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u^k + o(u^n)$$

$$\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}u^n + o(u^n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}u^k + o(u^n)$$

$$\mathrm{e}^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + \cdots + \frac{1}{n!}u^n + o(u^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}u^k + o(u^n)$$

$$(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}u^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}u^n + o(u^n)$$

$$\cos u = 1 - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{24}u^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}u^{2n} + o(u^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}u^{2k} + o(u^{2n+1})$$

$$\sin u = u - \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{120}u^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}u^{2n+1} + o(u^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}u^{2k+1} + o(u^{2n+2})$$

$$\mathrm{ch}u = 1 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{24}u^4 + \cdots + \frac{1}{(2n)!}u^{2n} + o(u^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!}u^{2k} + o(u^{2n+1})$$

$$\mathrm{sh}u = u + \frac{1}{6}u^3 + \cdots + \frac{1}{(2n+1)!}u^{2n+1} + o(u^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!}u^{2k+1} + o(u^{2n+2})$$

$$\tan u = u + \frac{1}{3}u^3 + o(u^3)$$

$$\arctan u = u - \frac{1}{3}u^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}u^{2n+1} + o(u^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}u^{2k+1} + o(u^{2n+1})$$

8.2.3.3 Opérations

Pour former un DL quand $x \to a$:
- on ramène si besoin le problème en 0 via $x = a + h$ (avec $h \to 0$) ;
- on développe les fonctions au plus proche de la variable ;
- on compose en prenant appui sur les DL de référence.

Exemple $DL_2(1)$ de $\sqrt{1+x}$.
Quand $x \to 1$.
On pose $x = 1 + h$ avec $h \to 0$.
$\sqrt{1+x} = \sqrt{2+h} = \sqrt{2}\sqrt{1+h/2}$, $u = h/2 \to 0$.
$\sqrt{1+u} = (1+u)^{1/2} = 1 + \dfrac{1}{2}u - \dfrac{1}{8}u^2 + o(u^2)$ donc
$\sqrt{1+x} = \sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}(x-1) - \dfrac{\sqrt{2}}{32}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$

Exemple $DL_3(0)$ de $\ln(1+\mathrm{e}^x)$.
Quand $x \to 0$.
$\ln(1+\mathrm{e}^x) = \ln\left(2 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) = \ln 2 + \ln(1 + \underbrace{\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{12}x^3 + o(x^3)}_{u \to 0})$

$$\left.\begin{array}{l} u = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{12}x^3 + o(x^3) \\ u^2 = \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{4}x^3 + o(x^3) \\ u^3 = \dfrac{1}{8}x^3 + o(x^3) \end{array}\right| \begin{array}{l} \times 1 \\ \times(-1/2) \\ \times 1/3 \end{array}$$

$o(u^3) = o(x^3)$.
Un développement limité à l'ordre 3 de $\ln(1+u)$ convient.
$\ln(1+u) = u - \dfrac{1}{2}u^2 + \dfrac{1}{3}u^3 + o(u^3)$ donne $\ln(1+\mathrm{e}^x) = \ln 2 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{8}x^2 + 0.x^3 + o(x^3)$

Exemple $DL_4(0)$ de $\dfrac{1}{\cos x}$.
Quand $x \to 0$
$\dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{1 \underbrace{- \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{24}x^4 + o(x^4)}_{u \to 0}}$.

$$\left.\begin{array}{l} u = -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{24}x^4 + o(x^4) \\ u^2 = \dfrac{1}{4}x^4 + o(x^4) \end{array}\right| \begin{array}{l} \times -1 \\ \times 1 \end{array}$$

$o(u^2) = o(x^4)$.
Un développement limité à l'ordre 2 de $\dfrac{1}{1+u}$ est adapté.
$\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$ donne $\dfrac{1}{\cos x} = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{24}x^4 + o(x^4)$.

Exemple $DL_2(0)$ de $\dfrac{\ln(1+x) - x}{\mathrm{ch}x - 1}$:
On peut anticiper une simplification par x^2 lors des calculs. Pour cette raison, on part de $DL_4(0)$ au numérateur et dénominateur.
Quand $x \to 0$, $\dfrac{\ln(1+x) - x}{\mathrm{ch}x - 1} = \dfrac{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)}{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)}$

Au termes des calculs, $\dfrac{\ln(1+x)-x}{\text{ch}x-1} = -1+\dfrac{2}{3}x-\dfrac{5}{12}x^2+o(x^2)$.
Ici la fonction considérée, qui n'était pas définie en 0, s'y prolonge par continuité avec la valeur -1 en 0.
Le prolongement obtenu est alors dérivable en 0 et de tangente d'équation $y=-1+\dfrac{2}{3}x$ en 0.
Puisque $-\dfrac{5}{12}x^2 \leqslant 0$, la courbe est en dessous de sa tangente au voisinage de 0.

Exemple $DL_5(0)$ de $\arccos x$.
Quand $x \to 0$
$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -(1+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{8}x^4+o(x^4))$
donc $\arccos x = \dfrac{\pi}{2} - x - \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{3}{40}x^5 + o(x^5)$ car $\arccos 0 = \pi/2$.

Attention : On peut intégrer mais pas dériver un développement limité.

8.2.4 Développements asymptotiques

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ définie au voisinage de $a \in \bar{\mathbb{R}}$.

Définition

On appelle développement asymptotique de f en a toute écriture

$$f(x) = a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x) + \cdots + a_n g_n(x) + o(g_n(x)) \text{ quand } x \to a$$

avec $g_0, \ldots, g_n$ des fonctions « simples »vérifiant $g_n \ll g_{n-1} \ll \cdots \ll g_0$.

Exemple Les développements limités sont des développement asymptotiques exprimés avec $g_k(x) = (x-a)^k$.

Exemple DA à deux termes de $\cot x$ en 0.
Quand $x \to 0$
$\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)} = \dfrac{1}{x}\dfrac{1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{1-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)}$.
Or $\dfrac{1}{1-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)} = 1+\dfrac{1}{6}x^2+o(x^2)$
donc $\cot x = \dfrac{1}{x}\left(1-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\left(1+\dfrac{1}{6}x^2+o(x^2)\right)$
et enfin $\cot x = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{3}x + o(x)$.

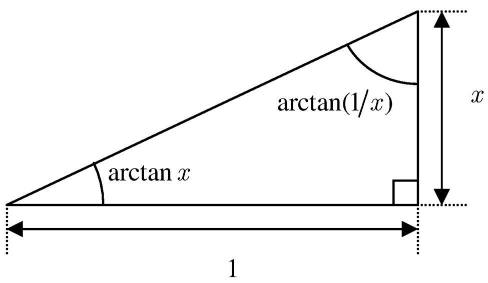
Exemple DA à la précision x^2 de $\dfrac{\ln(1+x)}{1+\sqrt{x}}$ en 0.
Quand $x \to 0$
$\dfrac{\ln(1+x)}{1+\sqrt{x}} = \left(x-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\left(1-\sqrt{x}+x+o(x)\right) = x - x^{3/2} + \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.

Exemple DA de $\ln(x+1)$ à 3 termes au voisinage de $+\infty$.
Quand $x \to +\infty$
$\ln(x+1) = \ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Exemple DA de $\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ à 3 termes au voisinage de $+\infty$.
Quand $x \to +\infty$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1+u}}$ avec $u = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \to 0$, $u^2 = \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
$\frac{1}{\sqrt{1+u}} = 1 - \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 + o(u)$ donc $\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$

Exemple DA à trois termes de $x \mapsto \arctan x$ au voisinage de $+\infty$.
Rappelons

$$\forall x > 0, \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$



Quand $x \to +\infty$,

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

8.3 Continuité

8.3.1 Définition

$\mathcal{D}$ désigne une partie de de $\mathbb{R}$.
Remarque Si $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ admet une limite en $a \in \mathcal{D}$ celle-ci est nécessairement égale à $f(a)$

Définition

Une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ est dite continue en $a \in \mathcal{D}$ si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$.
Une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ est dite continue si elle l'est en tout $a \in \mathcal{D}$.

Exemple Si $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ sont continues alors $\sup(f, g) : x \mapsto \max(f(x), g(x))$ l'est aussi.
En effet, on remarque

$$\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$$

donc

$$\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$$

est continue par opérations sur les fonctions continues.

Exemple Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Etudions la continuité de f.
Soit $a \in \mathbb{R}$.
Cas $a < 0$:
Au voisinage de a, $f(x) = 0$ et donc f est continue en a.
Cas $a > 0$:
Au voisinage de a, $f(x) = e^{-1/x}$ et donc f est continue en a.
Cas $a = 0$.
Quand $x \to 0^+$, $f(x) = e^{-1/x} \to 0 = f(0)$ et quand $x \to 0^-$, $f(x) = 0 \to 0 = f(0)$.
Ainsi f est aussi continue en 0 et finalement f est continue sur $\mathbb{R}$.

8.3.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème

> Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.
> Si f est continue alors $f(I)$ est un intervalle.
> (f prend donc toute valeur comprise entre deux valeurs prises).

Exemple Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ continue.
Montrons qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.
On introduit $\varphi(x) = f(x) - x$.
φ est continue par opération sur les fonctions continues.
$\varphi(a) = f(a) - a \geqslant 0$ car $f(a) \in [a, b]$ et $\varphi(b) = f(b) - b \leqslant 0$ car $f(b) \in [a, b]$.
Par le théorème des valeurs intermédiaires, φ s'annule ce qui établit

$$\exists x \in [a, b], f(x) = x$$

8.3.3 Continuité sur un segment

Théorème

> Toute fonction réelle continue sur un segment $[a, b]$ admet un minimum et un maximum ; on dit qu'elle est bornée et qu'elle atteint ses bornes.

Exemple Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue. On suppose que $\ell = \lim\limits_{+\infty} f$ existe dans $\mathbb{R}$.
Montrons que f est bornée.
(1) Pour $\varepsilon = 1$, il existe $A \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \geqslant A$, $|f(x) - \ell| \leqslant 1$ et donc $|f(x)| \leqslant 1 + |\ell|$.
Ainsi f est bornée sur $[A, +\infty[$. Sur $[0, A]$, f est continue sur un segment donc bornée. Au final f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.
(2) On introduit $g = f \circ \tan : [0, \pi/2[\to \mathbb{R}$.
g est continue sur $[0, \pi/2[$ et se prolonge par continuité en $\pi/2$ en posant $g(\pi/2) = \ell$.
La fonction obtenue est alors continue sur le segment $[0, \pi/2]$ donc bornée. Par suite f l'est aussi.

8.3.4 Théorème de la bijection monotone

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
Si
1) f est continue ;
2) f est strictement monotone ;
Alors f réalise une bijection de I vers un intervalle J dont les extrémités sont les limites de f aux extrémités de I.
De plus $f^{-1} : J \to I$ est continue, de même stricte monotonie que f et son tableau de variation s'obtient par symétrie du tableau de variation de f.

Remarque Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
Si f est continue et si $f'(x)$ existe et $f'(x) > 0$ sauf pour un nombre fini de valeurs de x alors f est strictement croissante.

Exemple Considérons $f : x \mapsto x - 2\sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$.
f est continue sur $\mathbb{R}^+$, dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = 1 - 1/\sqrt{x}$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Considérons $\varphi = f_{\restriction [1, +\infty[}$.
$\varphi'(x) > 0$ sauf pour $x = 1$ donc réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers $[-1, +\infty[$.

	1		$+\infty$
φ	1	$\nearrow$	$+\infty$

,

	-1		$+\infty$
φ^{-1}	1	$\nearrow$	$+\infty$

Considérons $\psi = f_{\restriction [0,1]}$.
$\psi'(x) < 0$ sauf pour $x = 0$ ou 1 donc ψ réalise une bijection de $[0, 1]$ vers $[-1, 0]$.

	1		0
ψ	0	$\searrow$	-1

,

	-1		0
ψ^{-1}	1	$\searrow$	0

8.4 Dérivation

I et J désignent des intervalles non singuliers (i.e. contenant au moins deux points).

8.4.1 Nombre dérivé

Définition

On dit que $f : I \to \mathbb{K}$ est dérivable en $a \in I$ si le taux de variation

$$\frac{1}{h}\left(f(a+h) - f(a)\right)$$

admet une limite finie quand $h \to 0$ (avec $h \neq 0$). Cette limite est notée $f'(a)$.

Définition

On dit que $f : I \to \mathbb{K}$ est dérivable si elle est dérivable en tout $a \in I$; on peut alors introduire sa fonction dérivée

$$f' : I \to \mathbb{K}$$

8.4.2 Théorème de Rolle

Théorème

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in\,]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

dém. :
f est continue sur le segment $[a, b]$ donc f admet des extremums en $c, d \in [a, b]$

$$\forall x \in [a, b]\,, f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d)$$

Si $f(c) = f(d)$ alors f est constante.
Sinon, l'un au moins des extremums de f n'est ni en a, ni en b et f' s'y annule
□

Corollaire

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ n fois dérivable.
On suppose que f s'annule au moins $n+1$ fois. Montrons qu'il existe $c \in I$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

dém. :
Introduisons $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ les valeurs d'annulation de f ordonnées.
Pour $i \in [\![1, n]\!]$, f est continue sur $[a_{i-1}, a_i]$, dérivable sur $]a_{i-1}, a_i[$ et $f(a_{i-1}) = f(a_i)$ donc par le théorème de Rolle, il existe $b_i \in\,]a_{i-1}, a_i[$ tel que $f'(b_i) = 0$.
Puisque

$$a_0 < b_1 < a_1 < b_2 < \ldots < b_n < a_n$$

les $b_1, \ldots, b_n$ sont deux à deux distincts.
Ainsi f' s'annule n fois au moins.
En itérant ce processus, f'' s'annule $n - 1$ fois au moins,..., $f^{(n)}$ s'annule 1 fois au moins.
□

Exemple Soit $U_n(X) = \left((X^2 - 1)^n\right)^{(n)}$.
Montrons que U_n possède exactement n racines distinctes, toutes dans $]-1, 1[$.
Posons

$$P_n(X) = (X^2 - 1)^n = (X - 1)^n(X + 1)^n$$

1 et -1 sont racines de multiplicité n de P_n.
1 et -1 sont donc racines de $P_n, P_n', \dots, P_n^{(n-1)}$.
En appliquant successivement le théorème de Rolle avec appui sur 1 et -1, on montre que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P_n^{(k)}$ admet au moins k racines dans $]-1, 1[$.
En particulier $U_n = P_n^{(n)}$ admet au moins $n = \deg U_n$ racines dans $]-1, 1[$. On en déduit que celles-ci sont simples et qu'il n'y en a pas d'autres.

8.4.3 Théorème des accroissements finis

Théorème

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

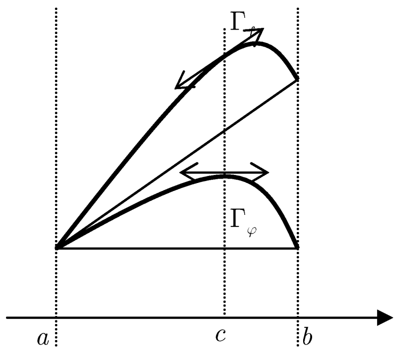
dém. :
Posons $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(b) - f(a) = K(b - a)$$

i.e. K déterminé par

$$K = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

et introduisons $\varphi : x \mapsto f(x) - K(x - a)$.
φ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $\varphi(a) = f(a) = \varphi(b)$.
Par application théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ vérifiant $\varphi'(c) = 0$ i.e. $f'(c) = K$.



□

Exemple Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et g la fonction affine prenant les mêmes valeurs que f en a et b.

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

Il est intéressant de savoir mesurer l'erreur commise lorsqu'on remplace $f(x)$ par $g(x)$ (comme dans la méthode d'intégration des trapèzes).
Montrons que

$$\forall x_0 \in]a, b[\,, \exists c \in]a, b[\,, f(x_0) - g(x_0) = \frac{(x_0 - a)(x_0 - b)}{2} f''(c)$$

Posons $K \in \mathbb{R}$ tel que
$$f(x_0) = g(x_0) + \frac{(x_0-a)(x_0-b)}{2}K$$
i.e.
$$K = 2\frac{f(x_0)-g(x_0)}{(x_0-a)(x_0-b)}$$
Considérons la fonction
$$\varphi : x \mapsto f(x) - g(x) - \frac{(x-a)(x-b)}{2}K$$
La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ et s'annule en x_0, a, b.
Par application du théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ vérifiant $\varphi''(c) = 0$ i.e. $f''(c) = K$.

Corollaire

Soient $f : I \to \mathbb{K}$ dérivable et $M \in \mathbb{R}^+$. On a équivalence entre :
(i) $\forall x \in I, |f'(x)| \leqslant M$;
(ii) f est M lipschitzienne i.e.
$$\forall x, y \in I, |f(y) - f(x)| \leqslant M\,|y-x|$$

Exemple Si $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ alors f est lipschitzienne.
En effet $|f'|$ est continue sur un segment donc bornée.

8.4.4 Limite de la dérivée

Théorème

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.
On suppose f continue sur I et dérivable sur $I\backslash\{a\}$.
Si $f'(x) \xrightarrow[x\to a, x\neq a]{} \ell \in \mathbb{R}$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.
Si $f'(x) \xrightarrow[x\to a, x\neq a]{} +\infty$ alors f n'est pas dérivable en a mais présente une tangente verticale en a.

dém. :
Supposons $f'(x) \xrightarrow[x\to a, x\neq a]{} \ell \in \bar{\mathbb{R}}$.
Pour $h \neq 0$, on étudie le taux de variation
$$\frac{1}{h}\left(f(a+h) - f(a)\right)$$
Par le théorème des accroissements finis, il existe c_h compris entre a et $a+h$ tel que
$$\frac{1}{h}\left(f(a+h) - f(a)\right) = f'(c_h)$$
Quand $h \to 0$ (avec $h \neq 0$), par encadrement $c_h \to a$ et par composition de limite
$$\frac{1}{h}\left(f(a+h) - f(a)\right) \to \ell$$

□

Corollaire

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$.
Si
1) f est continue sur $[a, b]$;
2) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b]$;
3) f' converge en a
Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$

Exemple Soit $f :]0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$$

Quand $x \to 0^+$,

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x} \sim \frac{1}{6}x \to 0$$

On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi/2]$ et

$$f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{x^2} = \frac{\sin^2 x - x^2 \cos x}{x^2 \sin^2 x}$$

Quand $x \to 0^+$,

$$f'(x) = -\frac{x^2 - \frac{1}{3}x^4 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)}{x^2 \sin^2 x} \sim \frac{1}{6}$$

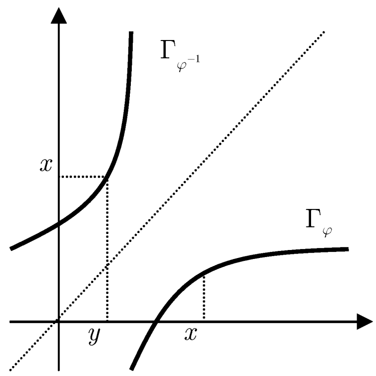
On en déduit que f est classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$ avec $f'(0) = 1/6$.

8.4.5 Difféomorphisme

Théorème

Soient $\varphi : I \to J$ une bijection continue et $x \in I$.
Si φ est dérivable en x et si $\varphi'(x) \neq 0$ alors φ^{-1} est dérivable en $y = \varphi(x)$ et

$$(\varphi^{-1})'(y) = \frac{1}{\varphi'(x)}$$



Remarque Sous réserve d'existence

$$(\varphi^{-1})' = \frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}}$$

Définition

Pour $k \in \mathbb{N}^\star \cup \{\infty\}$, on appelle $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de I vers J toute application $\varphi : I \to J$ bijective telle que φ et φ^{-1} soient de classe $\mathcal{C}^k$.

Exemple $\exp$ est un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^{+\star}$.

Exemple $\tan$ est $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme de $]-\pi/2, \pi/2[$ vers $\mathbb{R}$.

Proposition

L'application réciproque d'un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de I vers J est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de J vers I.

Proposition

La composée d'un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de I vers J par un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de J vers K est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de I vers K.

Théorème

Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \in \mathbb{N}^\star \cup \{\infty\}$.
On a équivalence entre :
(i) φ réalise un $\mathcal{C}^k$ difféomorphisme de I vers $J = \varphi(I)$;
(ii) φ' ne s'annule pas.

dém. :
(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons (i). φ^{-1} et φ sont dérivables et $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = x$. En dérivant cette relation, $\varphi'(x) \times (\varphi^{-1})(\varphi(x)) = 1$ donc $\varphi'(x) \neq 0$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons (ii).

Par continuité de φ', φ' est de signe strict constant donc φ est strictement monotone et réalise une bijection de I vers l'intervalle $J = \varphi(I)$. φ est de classe $\mathcal{C}^k$ et puisque φ' ne s'annule pas φ^{-1} est dérivable et

$$(\varphi^{-1})' = \frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}}$$

φ' est continue et φ^{-1} aussi donc $(\varphi^{-1})'$ est continue et φ^{-1} $\mathcal{C}^1$,
φ' est $\mathcal{C}^1$ et φ^{-1} aussi donc $(\varphi^{-1})'$ l'est encore et φ^{-1} est $\mathcal{C}^2$,...
φ' est $\mathcal{C}^{k-1}$ et φ^{-1} aussi donc $(\varphi^{-1})'$ l'est encore et φ^{-1} est $\mathcal{C}^k$.

□

Corollaire

Un $\mathcal{C}^k$ difféomorphisme est strictement monotone.

Exemple Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(0) = \lim\limits_{+\infty} f$.
Montrons que f' s'annule.
Par un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme on se ramène à $[0, 1[$ et on conclut.

8.4.6 Convexité

Définition

On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si

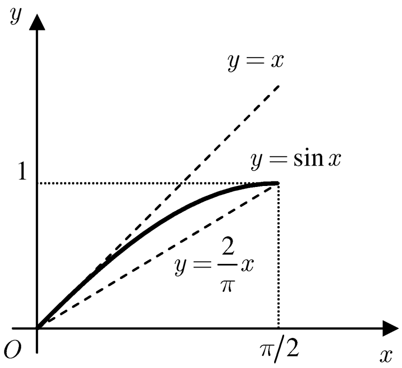
$$\forall a, b \in I, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$$

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. On a équivalence entre :
(i) f est convexe ;
(ii) f' est croissante.

Remarque Le graphe d'une fonction convexe est au dessus de ses tangentes et en dessous de ses cordes.

Exemple $\forall x > -1, \ln(1 + x) \leqslant x$,
$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$,
$\forall x \in [0, \pi/2], \dfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$.



8.5 Intégration

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.

8.5.1 Intégrale

Définition

Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ est dite continue par morceaux s'il existe $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ vérifiant pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, f est continue sur $]a_{i-1}, a_i[$ et admet des limites finies en a_{i-1}^+ et a_i^-.
Une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est dite continue par morceaux si elle l'est sur tout segment $[a,b]$ inclus dans I.

Définition

Pour $f : I \to \mathbb{K}$ continue par morceaux et $a, b \in I$ on donne un sens à

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple Calculons

$$\int_0^1 \frac{t+1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t$$

On a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^2+t+1) = 2t+1$$

donc on décompose

$$\int_0^1 \frac{t+1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t$$

Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t = \left[\ln\left|t^2+t+1\right|\right]_0^1 = \ln 3$

et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{(t+1/2)^2+3/4}\,\mathrm{d}t$.
Sachant
$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a}$$
ici $u = t+1/2$ et $a = \sqrt{3}/2$ donc
$$\int_0^1 \frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$
Finalement
$$\int_0^1 \frac{t+1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

Exemple Calculons
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$
On réalise le changement de variable $x = \sin t$.
$\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$, pour $t=0$, $x=0$ et pour $t=\pi/2$, $x=1$.
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$
Or $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ donc
$$\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)$$
puis
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

Exemple On étudie
$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$$
(ou encore $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(u)\,\mathrm{d}u$ via $u = \pi/2 - t$).
Pour $n \geqslant 2$,
$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin t.\sin^{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$$
Par intégration par parties,
$$I_n = \left[-\cos t.\sin^{n-1} t\right]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\sin^{n-2}(t)\,\mathrm{d}t$$
Or
$$\left[-\cos t.\sin^{n-1} t\right]_0^{\pi/2} = 0$$

et
$$\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\sin^{n-2}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(t))\sin^{n-2}(t)\,\mathrm{d}t = I_n - I_{n-2}$$
donc
$$I_n = (n-1)(I_n - I_{n-2})$$
puis enfin
$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$
Par cette relation de récurrence, il est possible d'exprimer I_n en fonction de I_1 ou de I_0 selon la parité de n.
Cas n impair : $n = 2p+1$.
$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \frac{2p}{2p+1}\frac{2p-2}{2p-1} I_{2p-3} = \ldots$$
A terme
$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1}\frac{2p-2}{2p-1}\cdots\frac{2}{3} I_1$$
Or
$$2p(2p-2)\ldots 2 = 2^p p!,$$
$$(2p+1)(2p-1)\ldots 3 = \frac{(2p+1)!}{2^p p!}$$
et
$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(t)\,\mathrm{d}t = 1$$
donc
$$I_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$
Cas n pair : $n = 2p$
De façon analogue
$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2}$$

8.5.2 Primitive

Théorème

Soient $f : I \to \mathbb{K}$ et $a \in I$
Si f est continue alors il existe une unique primitive à la fonction f s'annulant en a, c'est l'application
$$x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque On a donc la formule
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(x)$$

Remarque On ne peut par exprimer les primitives des fonctions suivantes à l'aide des fonctions usuelles : $t \mapsto e^{-t^2}$, $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$, $t \mapsto \dfrac{\cos t}{t}$, $t \mapsto \dfrac{e^t}{t}$, $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$,...

Corollaire

Si $f : I \to \mathbb{K}$ est continue et si F est une primitive de f alors

$$\forall a, b \in I,\ \int_a^b f = [F]_a^b$$

Proposition

Soient $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

Si f est continue et si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ alors f s'annule.

dém. :

En introduisant F une primitive de f, la relation $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ donne $F(a) = F(b)$ et le théorème de Rolle permet de conclure que $F' = f$ s'annule.

□

Proposition

Soient $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Si f est continue, $f \geqslant 0$ et si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ alors $f = \tilde{0}$.

dém. :

On intoduit F une primitive de f. Puisque $F' = f \geqslant 0$, on a F croissante et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ donne $F(a) = F(b)$ et donc F est constante. On en déduit que $f = F' = 0$.

□

Exemple Etude sur $]1, +\infty[$ de la fonction

$$\varphi : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

Définition :

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ est définie et continue par morceaux sur $]1, +\infty[$ et

$$\forall x > 1,\ x, x^2 \in\ ]1, +\infty[$$

Par suite $\varphi(x)$ est bien définie pour tout $x > 1$.

Variation :

Puisque $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ est continue sur $]1, +\infty[$, elle y admet une primitive de F et alors

$$\varphi(x) = F(x^2) - F(x)$$

Puisque F est de classe $\mathcal{C}^1$, φ l'est aussi et

$$\varphi'(x) = 2xF'(x) - F'(x) = \frac{x-1}{\ln x} \geqslant 0$$

Ainsi φ est croissante.
Limite en $+\infty$:
Quand $x \to +\infty$.
Pour $t \in [x, x^2]$,

$$\frac{1}{2\ln x} \leqslant \frac{1}{\ln t} \leqslant \frac{1}{\ln x}$$

En intégrant,

$$\frac{1}{2}\frac{x^2 - x}{\ln x} \leqslant \varphi(x) \leqslant \frac{x^2 - x}{\ln x}$$

Or

$$\frac{x^2 - x}{\ln x} \sim \frac{x^2}{\ln x} \to +\infty$$

donc $\varphi(x) \to +\infty$.
Limite en 1^+ :
Quand $x \to 1^+$.
Pour $t \in [x, x^2]$,

$$\frac{x}{t\ln t} \leqslant \frac{1}{\ln t} = \frac{t}{t\ln t} \leqslant \frac{x^2}{t\ln t}$$

En intégrant

$$x\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leqslant \varphi(x) \leqslant x^2\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$$

Or

$$\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = [\ln|\ln t|]_x^{x^2} = \ln 2$$

donc $\varphi(x) \to \ln 2$.
Finalement on obtient le tableau de variation suivant

x	1		$+\infty$
$\varphi(x)$	$\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

8.5.3 Formules de Taylor

Remarque On peut exprimer $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par sa dérivée par la formule

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

On peut généraliser :

Théorème

Soient $f : I \to \mathbb{K}$ et $a \in I$.
Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ alors pour tout $x \in I$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque Par le changement de variable $x = a + \lambda(x - a)$, le reste intégrale se réécrit

$$(x-a)^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-\lambda)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+\lambda(x-a))\,\mathrm{d}u$$

Cette écriture révèle l'ordre de grandeur du reste intégral.

Exemple Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que

$$f(x), f''(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Montrons que $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
On a

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \int_x^{x+1} (x+1-t)f''(t)\,\mathrm{d}t$$

donc

$$f'(x) = f(x+1) - f(x) - \int_x^{x+1} (x+1-t)f''(t)\,\mathrm{d}t$$

Or quand $x \to +\infty$, $f(x) \to 0$, $f(x+1) \to 0$ et $\displaystyle\int_x^{x+1} (x+1-t)f''(t)\,\mathrm{d}t \to 0$ car

$$\left|\int_x^{x+1} (x+1-t)f''(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \max_{[x,x+1]} |f''|$$

On en déduit que $f'(x) \to 0$.

Remarque L'inégalité des accroissements finis donne

$$\forall x \in I, |f'(x)| \leqslant M \Rightarrow \forall a, x \in I, |f(x) - f(a)| \leqslant M\,|x-a|$$

On généralise :

Théorème

Soient $f : I \to \mathbb{K}$ et $M \in \mathbb{R}^+$.
Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et si

$$\forall x \in I, \left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant M$$

alors pour chaque $a, x \in I$

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}M$$

Exemple Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f et f'' soient bornées.
On pose $M_0 = \sup |f|$ et $M_2 = \sup |f''|$.
Montrons que f' est bornée et

$$M_1 = \sup |f'| \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}$$

Par l'inégalité de Taylor-Lagrange

$$|f(a+h) - f(a) - hf'(a)| \leqslant \frac{h^2 M_2}{2}$$

On en déduit

$$|hf'(a)| \leqslant 2M_0 + \frac{h^2 M_2}{2}$$

Pour $h > 0$, cela conduit à

$$|f'(a)| \leqslant \frac{2M_0}{h} + \frac{h^2 M_2}{2}$$

La fonction f' est donc bornée et

$$M_1 \leqslant \frac{2M_0}{h} + \frac{h^2 M_2}{2}$$

Cette dernière relation vaut pour tout $h > 0$, il s'agit ensuite de trouver l'optimal. C'est $h = 2\sqrt{M_0/M_2}$ et l'on obtient

$$M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}$$

8.5.4 Somme de Riemann

Théorème

Si $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux alors

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \to \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Corollaire

Si $f : [0,1] \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux alors

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k/n) \to \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(k/n) \to \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple Etudions

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

On a

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k/n}$$

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est continue par morceaux sur $[0,1]$ donc

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \to \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2$$

Exemple Pour $\alpha > 0$, déterminons un équivalent de

$$\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$$

On a

$$\sum_{k=1}^{n} k^\alpha = n^{\alpha+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^\alpha}{n^\alpha}\right)$$

avec

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^\alpha}{n^\alpha} \to \int_0^1 t^\alpha \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha+1}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

8.6 Suites numériques

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

8.6.1 Limites

Définition

Soient $(u_n) \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ et $\ell \in \mathbb{K}$.

$$u_n \to \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Définition

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$

$$u_n \to +\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \geqslant M$$

Exemple Etudions

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

On remarque que

$$\ln(k+1) - \ln k \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k}$$

Par suite
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln k \geqslant \ln(n+1) \to +\infty$$
Ainsi
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$$

Exemple Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\sqrt[n]{u_n} \to \ell \in [0,1[$. Montrons que $u_n \to 0$.
Introduisons $\rho \in]\ell, 1[$, par exemple le milieu
$$\rho = \frac{1+\ell}{2}$$
Puisque $\sqrt[n]{u_n} \to \ell < \rho$, pour n assez grand $\sqrt[n]{u_n} \leqslant \rho$ donc $0 \leqslant u_n \leqslant \rho^n$.
Or $\rho^n \to 0$ donc par encadrement $u_n \to 0$.
On montre de façon similaire $\sqrt[n]{u_n} \to \ell > 1 \Rightarrow u_n \to +\infty$.

Théorème

Si (u_n) est une suite réelle croissante alors (u_n) admet une limite qui est $\sup(u_n) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Exemple Etudions la limite de
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$
$S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{(n+1)!} \geqslant 0$ donc (S_n) est croissante.
Pour $k \geqslant 1$, $k! = 1 \times 2 \times \cdots \times k \leqslant 1 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^{k-1}$.
Par suite
$$S_n \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2} \leqslant 3$$
(S_n) est croissante et majorée donc converge.
On peut montrer que sa limite est le nombre de Neper e (par exemple en appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction exponentielle de 0 à 1).

8.6.2 Développement asymptotique

Définition

Un développement asymptotique d'une suite est la décomposition de son terme général en somme de termes simples ordonnés en négligeabilité croissante.

Exemple Formons un DA à trois termes de $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Quand $n \to +\infty$.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln(1+\frac{1}{n})\right) = \exp\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

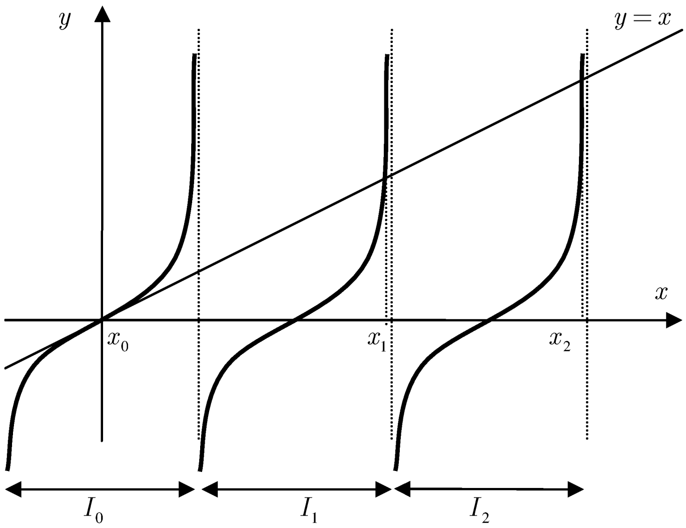
Par composition

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}}{2n}+\frac{11\mathrm{e}}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exemple Pour $n \in \mathbb{N}$, étudions l'équation

$$\tan x = x$$

d'inconnue $x \in \left]-\pi/2+n\pi, \pi/2+n\pi\right[= I_n$.



Considérons la fonction $\varphi : x \mapsto \tan x - x$ définie sur I_n.
φ est dérivable et $\varphi'(x) = \tan^2 x > 0$ sauf pour $x = n\pi$.
Ainsi φ est strictement croissante et l'étude des limite de φ assure que φ réalise une bijection de I_n vers $\mathbb{R}$. Par suite, l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution $x_n \in I_n$
Formons un DA à trois termes de x_n.
On a

$$\underbrace{-\pi/2+n\pi}_{\sim n\pi} < x_n < \underbrace{\pi/2+n\pi}_{\sim n\pi}$$

donc $x_n \sim n\pi$.
Ainsi on peut écrire $x_n = n\pi + o(n)$.
Considérons maintenant $y_n = x_n - n\pi$.
On a $y_n \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$ et $\tan y_n = \tan x_n = x_n$ donc $y_n = \arctan x_n \to \pi/2$.
Ainsi $y_n = \dfrac{\pi}{2} + o(1)$ puis

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$$

Considérons maintenant $z_n = x_n - n\pi - \pi/2 = y_n - \pi/2$.

$$z_n = \frac{\pi}{2} - \arctan x_n = -\arctan \frac{1}{x_n}$$

donc

$$z_n \sim -\frac{1}{n\pi}$$

Ainsi $z_n = -\frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ et enfin

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

8.6.3 Critère de Cauchy

Définition

On dit qu'une suite (u_n) réelle ou complexe satisfait le critère de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geqslant N, |u_m - u_n| \leqslant \varepsilon$$

Remarque Critère équivalent :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \forall p \geqslant 0, |u_{n+p} - u_n| \leqslant \varepsilon$$

Lemme

Si (u_n) est de Cauchy alors (u_n) est bornée.

dém. :
Pour $\varepsilon = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geqslant N$, $|u_m - u_n| \leqslant 1$.
En particulier pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - u_N| \leqslant 1$ et donc $|u_n| \leqslant 1 + |u_N|$.
Par suite, (u_n) est majorée par $M = \max\{|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N-1}|, 1 + |u_N|\}$.
□

Théorème

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. On a équivalence entre :
(i) (u_n) est convergente ;
(ii) (u_n) est de Cauchy.

dém. :
(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons $u_n \to \ell$ et exploitons $|u_m - u_n| \leqslant |u_m - \ell| + |u_n - \ell|$.
Pour $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon/2$$

Par la majoration précédente,

$$\forall m, n \geqslant N,\ |u_m - u_n| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

(ii) $\Rightarrow$ (i)
Cas : suite réelle
Soit (u_n) une suite réelle de Cauchy.
(u_n) est bornée ce qui permet d'introduire

$$a_n = \inf \{u_{n+p}/p \in \mathbb{N}\} \text{ et } b_n = \sup \{u_{n+p}/p \in \mathbb{N}\}$$

On a $a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$. Pour conclure, nous allons montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
Puisque $\{u_{n+1+p}/p \in \mathbb{N}\} \subset \{u_{n+p}/p \in \mathbb{N}\}$, on a $a_{n+1} \geqslant a_n$ et $b_{n+1} \leqslant b_n$.
Etudions la limite de $b_n - a_n$.
Pour $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall n \geqslant N, \forall p \in \mathbb{N}, |u_{n+p} - u_n| \leqslant \varepsilon$$

Pour $n \geqslant N$ et $p \geqslant 0$, on a $u_n - \varepsilon \leqslant u_{n+p} \leqslant u_n + \varepsilon$ donc $a_n \geqslant u_n - \varepsilon$ et $b_n \leqslant u_n + \varepsilon$ puis $0 \leqslant b_n - a_n \leqslant 2\varepsilon$.
Ainsi $b_n - a_n \to 0$. Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et leur limite commune est limite de (u_n) en vertu du théorème d'encadrement.
Cas : suite complexe
Soit (u_n) une suite complexe de Cauchy
$|\mathrm{Re}(u_m) - \mathrm{Re}(u_n)| \leqslant |u_m - u_n|$ donc $(\mathrm{Re}(u_n))$ est de Cauchy et converge. De même pour $(\mathrm{Im}(u_n))$ et on peut conclure que (u_n) converge.

□

8.6.4 Suites récurrentes

Soient $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$.

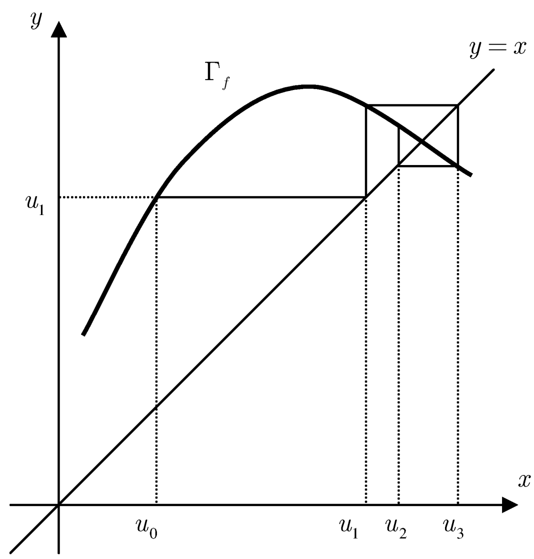
8.6.4.1 Vocabulaire

Définition

On appelle suite récurrente d'ordre 1 de fonction itératrice f toute suite $(u_n) \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

Remarque Si on connaît $a = u_0$ alors on peut déterminer chaque terme de la suite $u_1 = f(a)$, $u_2 = f(f(a))$,...
Dans le cadre réel on peut visualiser l'évolution des termes (u_n) :



Théorème

Si $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$ (i.e. $\forall x \in \mathcal{D},\ f(x) \in \mathcal{D}$) alors pour tout $a \in \mathcal{D}$ il existe une unique suite $(u_n) \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

8.6.4.2 Démarche d'étude

Pour étudier (u_n) donnée par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- on précise et on étudie la fonction itératrice f (domaine de définition, tableau de variation,...) ;
- on détermine $\mathcal{D}$ « pas trop grand »inclus dans le domaine de définition de f, vérifiant

$$u_0 \in \mathcal{D} \text{ et } \forall x \in \mathcal{D}, f(x) \in \mathcal{D}$$

ceci justifie l'existence de (u_n) et localise ses termes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathcal{D}\,;$$

- on analyse les limites finies possibles en passant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ à la limite ;
- on s'adapte (étude de monotonie...)

Exemple Etudions la suite (u_n) déterminée par

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$$

La fonction itératrice $f : x \mapsto \ln(1 + x)$ est définie sur $]-1, +\infty[$, il est facile d'en obtenir le tableau de variation.

Pour $\mathcal{D} =]0, +\infty[$, on a

$$u_0 \in \mathcal{D} \text{ et } \forall x \in \mathcal{D}, f(x) \in \mathcal{D}$$

On en déduit que la suite (u_n) est bien définie et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, +\infty[$$

Si (u_n) converge sa limite ℓ appartient à $[0, +\infty[$.
De plus en passant la relation de récurrence $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ à la limite on obtient $\ell = \ln(1 + \ell)$.
La seule solution de cette équation est $\ell = 0$.
En visualisant le comportement de (u_n) à partir d'une représentation de f, on est inspiré à étudier la monotonie de $(u_n)\dots$
On a $u_{n+1} - u_n = \ln(1 + u_n) - u_n \leqslant 0$ car on sait $\ln(1 + x) \leqslant x$ pour tout $x > -1$.
La suite (u_n) est donc décroissante et convergente car minorée par 0.
Puisque la seule limite finie possible est 0, on peut conclure que $u_n \to 0$.

Exemple Soient $\alpha > 0$, $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{\alpha}{u_n}\right)$$

La fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{x}\right)$$

est définie sur $\mathbb{R}^\star$.
f est dérivable et $f'(x) = \dfrac{x^2 - \alpha}{2x}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\alpha}$		0		$\sqrt{\alpha}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\sqrt{\alpha}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\sqrt{\alpha}$	↗	$+\infty$

Pour $\mathcal{D} =]0, +\infty[$, on a $u_0 \in \mathcal{D}$ et pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \in \mathcal{D}$.
Ainsi (u_n) est bien définie et $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $u_n \to \ell$.
Puisque $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient à la limite $\ell \geqslant 0$.
Passons la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{\alpha}{u_n}\right)$ à la limite.
Cas $\ell = 0$: impossible.
Cas $\ell > 0$: on obtient

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{\alpha}{\ell}\right)$$

puis, après résolution, $\ell = \sqrt{\alpha}$.
Ainsi, si (u_n) converge, c'est vers $\sqrt{\alpha}$.

Etudions la monotonie de (u_n).

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\alpha - u_n^2}{2u_n} = \frac{(\sqrt{\alpha} - u_n)(\sqrt{\alpha} + u_n)}{2u_n}$$

est du signe de $\sqrt{\alpha} - u_n$.
On remarque, que pour tout $x > 0$, $f(x) \geqslant \sqrt{\alpha}$. Par suite $u_n \geqslant \sqrt{\alpha}$ pour tout $n \geqslant 1$ et donc la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1. Etant de plus minorée, elle converge et ce ne peut être que vers $\sqrt{\alpha}$.

8.6.4.3 Exploitation d'une comparaison sous-géométrique

Proposition

Si $|u_{n+1} - \ell| \leqslant q\,|u_n - \ell|$ avec $q \in [0,1[$ alors $u_n \to \ell$.

dém. :
$|u_n - \ell| \leqslant q\,|u_{n-1} - \ell| \leqslant \ldots \leqslant q^n\,|u_0 - \ell| \to 0$
□

Exemple Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{3 - u_n}$.
Considérons $f : x \mapsto \sqrt{3 - x}$ définie sur $]-\infty, 3]$

x	$-\infty$		0		3
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$	0

Pour $\mathcal{D} = [0,3]$, on a $u_0 \in \mathcal{D}$ et pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \in \mathcal{D}$.
La suite (u_n) est donc bien définie et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,3]$.
Supposons $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$.
Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$, à la limite $\ell \in [0,3]$.
En passant la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{3 - u_n}$ à la limite on obtient

$$\ell = \sqrt{3 - \ell}$$

ce qui donne

$$\ell = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$$

car $\ell \geqslant 0$.
Posons

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$$

On a

$$|u_{n+1} - \alpha| = \left|\sqrt{3 - u_n} - \sqrt{3 - \alpha}\right| = \frac{|u_n - \alpha|}{\sqrt{3 - u_n} + \sqrt{3 - \alpha}} \leqslant \frac{|u_n - \alpha|}{\sqrt{3 - \alpha}}$$

avec

$$q = \frac{1}{\sqrt{3 - \alpha}} = \frac{1}{\alpha} \in [0,1[$$

Ainsi
$$|u_n - \alpha| \leqslant q^n |u_0 - \alpha|$$
et donc $u_n \to \alpha$.

8.6.5 Musculation

8.6.5.1 Un théorème du point fixe

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de rapport $q \in [0, 1[$:
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leqslant q |y - x|$$
Montrons que f admet un unique point fixe et que toute suite récurrente de fonction itératrice f converge vers icelui.
Unicité : Soient α, β deux points fixes de f.
On a
$$|f(\alpha) - f(\beta)| \leqslant q |\alpha - \beta|$$
donc
$$|\alpha - \beta| \leqslant q |\alpha - \beta|$$
ce qui entraîne $\alpha = \beta$ car $q < 1$.
Existence : Soit (u_n) une suite récurrente de fonction itératrice f.
Montrons que (u_n) converge.
On a
$$|u_{n+1} - u_n| = |f(u_n) - f(u_{n-1})| \leqslant q |u_n - u_{n-1}| \leqslant \ldots \leqslant q^n |u_1 - u_0|$$
Pour tout $p \in \mathbb{N}$
$$|u_{n+p} - u_n| \leqslant |u_{n+p} - u_{n+p-1}| + |u_{n+p-1} - u_{n+p-2}| + \cdots + |u_{n+1} - u_n|$$
donc
$$|u_{n+p} - u_n| \leqslant \sum_{k=0}^{p-1} |u_{n+k+1} - u_{n+k}| \leqslant \sum_{k=0}^{p-1} q^{n+k} |u_1 - u_0| = q^n \frac{1 - q^p}{1 - q} |u_1 - u_0|$$
puis
$$|u_{n+p} - u_n| \leqslant \frac{q^n}{1 - q} |u_1 - u_0|$$
ce qui produit un majorant indépendant de p.
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque
$$\frac{q^n}{1 - q} |u_1 - u_0| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$
il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geqslant N, \frac{q^n}{1 - q} |u_1 - u_0| \leqslant \varepsilon$$
et alors
$$\forall n \geqslant N, p \in \mathbb{N}, |u_{n+p} - u_n| \leqslant \varepsilon$$
La suite (u_n) est donc de Cauchy et par conséquent converge.
Posons ℓ sa limite. La relation $u_{n+1} = f(u_n)$ donne à la limite $\ell = f(\ell)$ car f est définie et continue en

ℓ donc ℓ est point fixe de f (nécessairement unique).
Rythme normal.

8.6.5.2 Théorème de Cesaro

Théorème

Si (u_n) est une suite numérique convergeant vers ℓ alors

$$v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} \to \ell$$

dém. :
On a

$$v_n - \ell = \frac{1}{n}\left((u_1 - \ell) + \cdots + (u_n - \ell)\right)$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Pour $n \geqslant N$,

$$|v_n - \ell| \leqslant \frac{|u_1 - \ell| + \cdots + |u_{N-1} - \ell|}{n} + \frac{n - N + 1}{n}\varepsilon$$

donc

$$|v_n - \ell| \leqslant \frac{|u_1 - \ell| + \cdots + |u_{N-1} - \ell|}{n} + \varepsilon$$

Or

$$\frac{|u_1 - \ell| + \cdots + |u_{N-1} - \ell|}{n} = \frac{C^{te}}{n} \to 0$$

donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant N'$,

$$\frac{|u_1 - \ell| + \cdots + |u_{N-1} - \ell|}{n} \leqslant \varepsilon$$

Ainsi pour $n \geqslant \max(N, N')$, $|v_n - \ell| \leqslant 2\varepsilon$ ce qui permet de conclure.
□

Exemple Considérons à nouveau (u_n) donnée par

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$$

On a déjà montré $u_n \to 0^+$. Déterminons maintenant un équivalent de (u_n).
On a

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n u_{n+1}} \sim \frac{\frac{1}{2}u_n^2}{u_n^2} \to \frac{1}{2}$$

Donc par le théorème de Cesaro

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0}\right) \to \frac{1}{2}$$

et on en déduit

$$u_n \sim \frac{2}{n}$$

Chapitre 9

Intégration sur un intervalle quelconque

On sait intégrer sur les segments $[a, b]$ et on souhaite étendre la notion à tout intervalle et ainsi donner un sens entre autre à

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$$

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.

9.1 Intégrale impropre

9.1.1 Intégrale sur un intervalle semi-ouvert

Définition

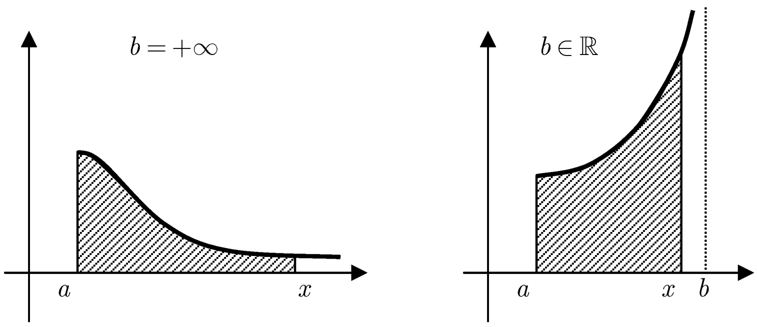
Soit $f : [a, b[\to \mathbb{C}$ continue par morceaux avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ converge si $\displaystyle\int_a^x f$ converge quand $x \to b^-$.

On pose alors

$$\int_{[a,b[} f \underset{\text{déf}}{=} \lim_{x \to b^-} \int_a^x f$$

Remarque L'intégrale converge si, et seulement si, les aires hachurées convergent quand $x \to b^-$



Proposition

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{C}$ continue par morceaux avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Pour $c \in [a, b[$, on a équivalence entre :
(i) $\displaystyle\int_{[a,b[} f$ converge ;
(ii) $\displaystyle\int_{[c,b[} f$ converge.
De plus

$$\int_{[a,b[} f \underset{\text{déf}}{=} \int_a^c f + \int_{[c,b[} f$$

dém. :
$\displaystyle\int_a^x f = \int_a^c f + \int_c^x f$ avec $\displaystyle\int_a^c f = C^{te}$.
□

Remarque On ne change pas la nature d'une intégrale sur $[a, b[$ en modifiant les valeurs de la fonction intégrée sur $[a, c]$: la nature de $\displaystyle\int_{[a,b[} f$ ne dépend pas que du comportement de f au voisinage de b

Proposition

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{C}$ une fonction continue de primitive F.
On a équivalence entre :
(i) $\displaystyle\int_{[a,b[} f$ converge ;
(ii) $F(x)$ converge quand $x \to b^-$.
De plus, on a alors

$$\int_{[a,b[} f = \lim_{b^-} F - F(a) \underset{\text{déf}}{=} [F]_a^{b^-}$$

Définition

Soit $f :]a, b] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$.
On dit que l'intégrale de f sur $]a, b]$ converge si $\displaystyle\int_x^b f$ converge quand $x \to a^+$.
On pose alors

$$\int_{]a,b]} f = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f$$

Remarque Les résultats qui précèdent se transposent à l'étude en cours.

Exemple Etude de $\displaystyle\int_{[0,+\infty[} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$.
La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est définie et continue par morceaux sur $[0, +\infty[$

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

donc $\displaystyle\int_{[0,+\infty[} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_{[0,+\infty[} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$.

Exemple Etude de $\displaystyle\int_{[0,+\infty[} 1\,\mathrm{d}t$

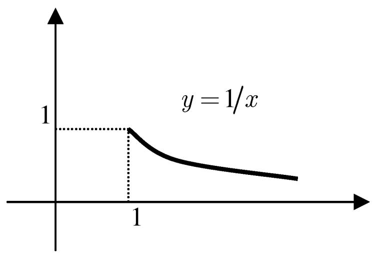
La fonction $t \mapsto 1$ est définie et continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.

$\displaystyle\int_0^x 1\,\mathrm{d}t = x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc $\displaystyle\int_{[0,+\infty[} 1\,\mathrm{d}t$ diverge.

Exemple Etude de $\displaystyle\int_{[1,+\infty[} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

La fonction $t \mapsto 1/t$ est définie et continue par morceaux sur $[1,+\infty[$

$\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc $\displaystyle\int_{[1,+\infty[} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge.

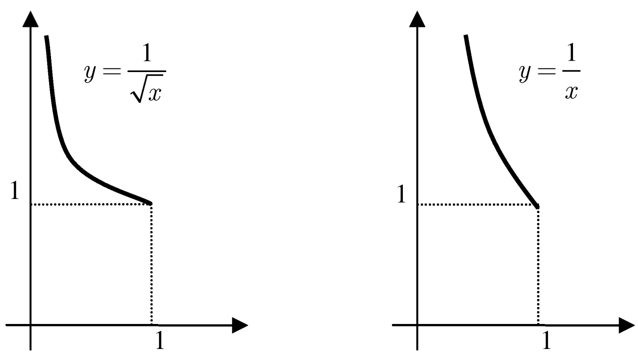


Pour la fonction inverse, il y a trop d'espace entre la courbe et l'axe des abscisses pour que l'intégrale converge, la fonction inverse converge trop lentement vers 0 en $+\infty$.

Exemple Etude de $\displaystyle\int_{]0,1]} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$.

La fonction $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ est définie et continue par morceaux sur $]0,1]$.

$\displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 2$ donc $\displaystyle\int_{]0,1]} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge et $\displaystyle\int_{]0,1]} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2$



Exemple Etude de $\displaystyle\int_{]0,1]} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.
La fonction $t \mapsto 1/t$ est définie et continue par morceaux sur $]0,1]$
$\displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ donc $\displaystyle\int_{]0,1]} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge.
Pour la fonction inverse, il y a trop d'espace entre la courbe et l'axe des ordonnées pour que l'intégrale converge, cette fonction tend trop rapidement vers $+\infty$ en 0^+.

9.1.2 Intégrale sur un intervalle ouvert

Définition

Soit $f :]a,b[\to \mathbb{C}$ continue par morceaux avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
On dit que l'intégrale de f sur $]a,b[$ converge si, pour $c \in]a,b[$, les intégrales de f sur $]a,c]$ et sur $[c,b[$ convergent. On pose alors

$$\int_{]a,b[} f \underset{\text{déf}}{=} \int_{]a,c]} f + \int_{[c,b[} f$$

Remarque La notion et la valeur de l'intégrale ne dépendent pas du choix de $c \in]a,b[$.

Proposition

Soit $f :]a,b[\to \mathbb{C}$ une fonction continue de primitive F.
On a équivalence entre :
(i) $\displaystyle\int_{]a,b[} f$ converge ;
(ii) F converge en a^+ et b^-.
De plus, on a alors

$$\int_{]a,b[} f = \lim_{b^-} F - \lim_{a^+} F = [F]_{a^+}^{b^-}$$

Exemple Etude de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.
La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est définie et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
$\mathbb{R} =]-\infty,0] \cup [0,+\infty[$
$\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$ donc $\displaystyle\int_{[0,+\infty[} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et vaut $\dfrac{\pi}{2}$.
$\displaystyle\int_x^0 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = -\arctan(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \frac{\pi}{2}$ donc $\displaystyle\int_{]-\infty,0]} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et vaut $\dfrac{\pi}{2}$.
Par suite $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \pi$.

Exemple Etude de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} t\,\mathrm{d}t$.
La fonction $t \mapsto t$ est définie et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
$\mathbb{R} = \left]-\infty, 0\right] \cup \left[0, +\infty\right[$
$\displaystyle\int_0^x t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}x^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc $\displaystyle\int_{[0,+\infty[} t\,\mathrm{d}t$ diverge puis $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} t\,\mathrm{d}t$ aussi.

Attention : Ici $\displaystyle\int_{-x}^x t\,\mathrm{d}t = 0 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. On n'aurait pu vouloir poser $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} t\,\mathrm{d}t = 0$ mais cela n'est pas conforme à la définition. En fait, on peut aussi remarquer $\displaystyle\int_{-x}^{x+1} t\,\mathrm{d}t = x + \frac{1}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et cette fois-ci $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} t\,\mathrm{d}t$ n'a plus de sens.
C'est pour cette raison que la convergence d'une l'intégrale sur $]a, b[$ s'étudie en la coupant en deux et non en étudiant conjointement les deux bornes.

9.1.3 Intégration sur un segment

Afin d'homogénéiser le vocabulaire, nous adoptons la définition suivante

Définition

Pour $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux, on dit que l'intégrale de f sur $[a, b]$ converge et on note

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f$$

9.1.4 Notation $\displaystyle\int_a^b$ avec $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$

Proposition

Si $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux alors $\displaystyle\int_{[a,b[} f$ converge et

$$\int_{[a,b[} f = \int_{[a,b]} f$$

dém. :
Rappelons qu'une fonction continue par morceaux sur un segment y est bornée.
Ainsi, il existe $M \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\forall t \in [a, b]\,, |f(t)| \leqslant M$$

On a alors

$$\left|\int_a^x f - \int_a^b f\right| \leqslant \int_x^b |f| \leqslant (b-x)M \xrightarrow[x\to b^-]{} 0$$

□

Remarque En conséquence :
Pour $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux, les intégrales suivantes

$$\int_{[a,b]} f,\ \int_{[a,b[} f,\ \int_{]a,b]} f \text{ et } \int_{]a,b[} f$$

convergent et sont égales.
Pour $f :]a,b] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux, les intégrales suivantes

$$\int_{]a,b]} f \text{ et } \int_{]a,b[} f$$

ont même nature et sont égales si convergentes.
Ainsi, la nature et l'éventuelle valeur de $\int_I f$ ne dépend pas de la nature ouverte ou fermée des extrémités de I.

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux. En notant $a < b \in \bar{\mathbb{R}}$ les extrémités de I, on pose

$$\int_a^b f \underset{\text{déf}}{=} \int_I f$$

Exemple $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_{[0,+\infty[} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_{]0,+\infty[} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1.$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \int_{]0,1]} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \int_{]0,1[} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2.$

Définition

Pour $a \leqslant b \in \bar{\mathbb{R}}$, on note

$$\int_b^a f \underset{\text{déf}}{=} -\int_a^b f$$

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux telle que $\int_I f$ converge.
Pour tous a, b, c distincts éléments ou extrémités de I, on a

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

avec convergence des intégrales engagées.

dém. :
On étudie tous les cas de figues possibles...
□

9.1.5 Propriétés

Théorème

Soient $f, g : I \to \mathbb{C}$ continues par morceaux et $\lambda \in \mathbb{C}$
Si $\int_I f$ et $\int_I g$ convergent alors $\int_I \lambda f$, $\int_I f+g$ convergent.
De plus on a alors

$$\int_I \lambda f = \lambda \int_I f \text{ et } \int_I f+g = \int_I f + \int_I g$$

dém. :
Par opérations sur les limites.
□

Exemple Si $\int_I f+g$ et $\int_I f$ convergent alors $\int_I g$ converge.
En effet $g = (f+g) + (-1)g$.

Attention : Pour exploiter la relation $\int_I f+g = \int_I f + \int_I g$, il faut préalablement justifier la convergence d'au moins deux des intégrales engagées.
Ceci empêche d'écrire $\int_0^{+\infty} 0 \,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 1 \,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} (-1) \,\mathrm{d}t$.

Exemple Si $\int_I f$ converge et $\int_I g$ diverge alors $\int_I f+g$ diverge.

Attention : Si $\int_I f$ et $\int_I g$ divergent alors on ne peut rien dire sur la nature de $\int_I f+g$.

Théorème

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ continues par morceaux.
Si $f \leqslant g$ et que $\int_I f$ et $\int_I g$ convergent alors $\int_I f \leqslant \int_I g$.

dém. :
Par comparaison de limites.
□

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux.
Si $\int_I f$ converge alors $\int_I \bar{f}$ convergent et alors $\int_I \bar{f} = \overline{\int_I f}$.

dém. :
Par conjugaison de limites.
□

Corollaire

$\displaystyle\int_I f$ converge si, et seulement si, $\displaystyle\int_I \mathrm{Re} f$ et $\displaystyle\int_I \mathrm{Im} f$ convergent.
De plus on a alors $\displaystyle\int_I f = \int_I \mathrm{Re} f + i.\int_I \mathrm{Im} f$.

Exemple Etude de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
Introduisons $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(i-1)t}\,\mathrm{d}t$.

$$\int_0^x \mathrm{e}^{it}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{e}^{(i-1)t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{(i-1)t}}{i-1}\right]_0^x \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2}$$

On en déduit

$$\int_0^{+\infty} \cos(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

9.2 Intégrabilité

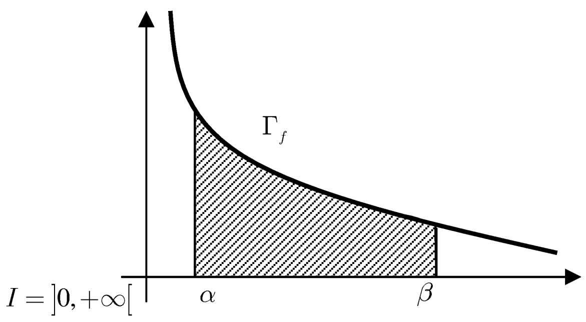
Rappel : Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante.
Si f est majorée alors f admet une limite finie en b^-.
Si f n'est pas majorée alors f diverge vers $+\infty$ en b^-.

9.2.1 Fonctions positives

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et positive.
On a équivalence entre :
(i) $\displaystyle\int_I f$ converge ;
(ii) $\displaystyle\exists M \in \mathbb{R}, \forall [\alpha, \beta] \subset I, \int_\alpha^\beta f \leqslant M$.
De plus, si tel est le cas :

$$\int_I f = \sup_{[\alpha,\beta]\subset I} \int_\alpha^\beta f$$



dém. :
Notons $a < b \in \bar{\mathbb{R}}$ les extrémités de I.
(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons que $\int_I f = \int_a^b f$ converge.
Pour tout $[\alpha, \beta] \subset I$,

$$\int_a^b f = \int_a^\alpha f + \int_\alpha^\beta f + \int_\beta^b f \geqslant \int_\alpha^\beta f$$

Ainsi pour $M = \int_I f$ on a la propriété et de plus on a l'inégalité

$$\int_I f \geqslant \sup_{[\alpha,\beta]} \int_\alpha^\beta f$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons (ii) et introduisons

$$M = \sup_{[\alpha,\beta]} \int_\alpha^\beta f$$

Cas $I = [a, b[$.
La fonction $x \mapsto \int_a^x f$ est croissante sur $[a, b[$ et majorée par M donc converge en b^-. Ainsi $\int_{[a,b[} f$ converge.
Cas $I =]a, b]$.
La fonction $x \mapsto \int_a^x f$ est décroissante sur $]a, b]$ et majorée par M donc converge en a^+. Ainsi $\int_{]a,b]} f$ converge.
Cas $I =]a, b[$: on découpe l'intervalle en $c \in]a, b[$.
De plus, pour $x < y \in]a, b[$,

$$\int_x^y f \leqslant M$$

A la limite quand $x \to a^+$

$$\int_a^y f \leqslant M$$

et quand $y \to b^-$,

$$\int_a^b f \leqslant M$$

Enfin des deux implications, on déduit l'égalité.
□

Corollaire

> Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ continues par morceaux telles que $0 \leqslant f \leqslant g$.
> Si $\int_I g$ converge alors $\int_I f$ aussi.
> Si $\int_I f$ diverge alors $\int_I g$ aussi.

dém. :
Si $\int_I g$ converge alors pour tout $[\alpha, \beta] \subset I$, $\int_\alpha^\beta f \leqslant \int_\alpha^\beta g \leqslant \int_I g = M$ donc f est intégrable et $\int_I f$ converge.
□

Exemple Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.
La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2+1}$ est définie et continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
Pour $t \geqslant 0$, on a $0 \leqslant f(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t}$.
Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge donc par comparaison de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ converge.

Exemple Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t+1)}{t}\,\mathrm{d}t$
La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t+1)}{t}$ est définie et continue par morceaux sur $[1, +\infty[$.
Pour $t \geqslant 1$, on a $f(t) \geqslant \dfrac{\ln 2}{t} \geqslant 0$.
Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge donc par comparaison de fonctions positives $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t+1)}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

Remarque Puisque la fonction est positive

$$x \mapsto \int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t}\,\mathrm{d}t$$

est croissante et donc

$$\int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

9.2.2 Fonction intégrable

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux.
On dit que f est intégrable (sur I) si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall [\alpha, \beta] \subset I, \int_\alpha^\beta |f| \leqslant M$$

Remarque Pour $f : I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continue par morceaux. Puisque $|f|$ est une fonction positive

$$f \text{ est intégrable sur } I \text{ si, et seulement si, } \int_I |f| \text{ converge}$$

On dit encore que l'intégrale $\displaystyle\int_I f$ est absolument convergente.

Théorème

Si $f : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux est intégrable alors l'intégrale $\int_I f$ converge et

$$\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$$

dém. :
Cas f à valeurs positives
C'est immédiat compte tenu des résultats qui précède.
Cas f à valeurs réelles
On pose $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = \sup(-f, 0)$.
Les fonctions $f^+, f^- : I \to \mathbb{R}^+$ sont continues par morceaux et vérifient $f = f^+ - f^-$.
On a aussi $|f| = f^+ + f^-$ donc $0 \leqslant f^+, f^- \leqslant |f|$.
Par comparaison de fonctions positives $\int_I f^+$ et $\int_I f^-$ convergent puis par opérations $\int_I f$ aussi.
Cas f à valeurs complexes
On écrit $f = \mathrm{Re} f + i\mathrm{Im} f$.
$\mathrm{Re} f, \mathrm{Im} f : I \to \mathbb{R}$ sont continues par morceaux.
Puisque $|\mathrm{Re} f|, |\mathrm{Im} f| \leqslant |f|$, on a, par comparaison de fonctions positives, $\int_I |\mathrm{Re} f|$ et $\int_I |\mathrm{Im} f|$ convergent donc $\int_I \mathrm{Re} f$ et $\int_I \mathrm{Im} f$ convergent puis par opérations $\int_I f$ aussi.
Démontrons maintenant l'inégalité

$$\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$$

Notons $a < b \in \bar{\mathbb{R}}$ les extrémités de I.
Posons $c \in]a, b[$
Pour $x \in]a, c]$ et $y \in [c, b[$,

$$\left|\int_x^y f\right| \leqslant \int_x^y |f|$$

donne

$$\left|\int_x^c f + \int_c^y f\right| \leqslant \int_x^c |f| + \int_c^y |f|$$

A la limite quand $x \to a^+$

$$\left|\int_{]a,c]} f + \int_c^y f\right| \leqslant \int_{]a,c]} |f| + \int_c^y |f|$$

puis quand $y \to b^-$, on obtient

$$\left|\int_{]a,c]} f + \int_{[c,b[} f\right| \leqslant \int_{]a,c]} |f| + \int_{[c,b[} |f|$$

ce qui donne

$$\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$$

□

*Bilan :*Pour une fonction réelle ou complexe

$$f \text{ intégrable } \Rightarrow \int_I f \text{ converge}$$

Pour une fonction positive, $f = |f|$ donc

$$f \text{ intégrable } \Leftrightarrow \int_I f \text{ convergence}$$

Plus généralement, pour une fonction de signe constant, il y a équivalence.

Remarque On peut même approfondir :
Pour $I = [a, b[$, si f est de signe constante au voisinage de b alors l'intégrabilité de f sur $[a, b[$ équivaut à la convergence de l'intégrale.

Attention : Il se peut que $\displaystyle\int_I f$ converge et $\displaystyle\int_I |f|$ diverge.

Définition

Si $\displaystyle\int_I f$ converge alors que $\displaystyle\int_I |f|$ diverge, on dit que $\displaystyle\int_I f$ est semi-convergente.

Exemple On verra que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ sont des intégrales semi-convergentes.

9.2.3 Intégrabilité et intervalle d'intégration

Proposition

Toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux est intégrable sur $[a, b]$

dém. :
Pour tout $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$,

$$\int_\alpha^\beta |f| \leqslant \int_a^b |f| = M$$

□

Proposition

Si $f : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux est intégrable sur I alors f est intégrable sur tout intervalle non singulier J inclus dans I.

dém. :
Pour $[\alpha, \beta] \subset J$, on a $[\alpha, \beta] \subset I$ donc

$$\int_\alpha^\beta |f| \leqslant \int_I |f| = M$$

□

Proposition

Soient $f : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux et c un élément de I qui n'en est pas une extrémité.
On pose $I^- = I \cap]-\infty, c]$ et $I^+ = I \cap [c, +\infty[$.
Si f est intégrable sur I^- et I^+ alors f l'est aussi sur $I = I^- \cup I^+$.

dém. :
Soit $[\alpha, \beta] \subset I$. Quitte à agrandir le segment $[\alpha, \beta]$, on peut supposer $c \in [\alpha, \beta]$.

$$\int_\alpha^\beta |f| = \int_\alpha^c |f| + \int_c^\beta |f| \leqslant \int_{I^-} |f| + \int_{I^+} |f| = M$$

Ainsi f est intégrable sur I.
□

9.2.4 Intégrabilité par comparaison

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux.
S'il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ intégrable telle que $|f| \leqslant \varphi$ alors f est intégrable.

dém. :
Pour tout $[\alpha, \beta] \subset I$,

$$\int_\alpha^\beta |f| \leqslant \int_\alpha^\beta \varphi \leqslant \int_I \varphi = M$$

□

Théorème

Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{C}$ continues par morceaux avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Si $f \underset{b}{=} O(g)$ et si g est intégrable alors f est intégrable.

dém. :
Supposons $f \underset{b}{=} O(g)$ avec g intégrable.
Il existe $c \in [a, b[$ et $M \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\forall t \in [c, b[\,, |f(t)| \leqslant M\,|g(t)|$$

Or $\varphi = M\,|g|$ est intégrable sur $[a, b[$ donc sur $[c, b[$. Par domination, f est intégrable sur $[c, b[$ et puisque f est de plus intégrable sur $[a, b]$ (segment), on a f intégrable sur $[a, b[$.
□

Corollaire

Si $f \underset{b}{=} o(g)$ avec g intégrable alors f l'est aussi.
Si $f \underset{b}{\sim} g$ alors f est intégrable si, et seulement si, g l'est.

dém. :
Car

$$f \underset{b}{=} o(g) \Rightarrow f \underset{b}{=} O(g)$$

$$\text{et } f \underset{b}{\sim} g \Rightarrow f \underset{b}{=} O(g) \text{ et } g \underset{b}{=} O(f)$$

□

Attention : Ces résultats sont faux en termes de convergence.
Cependant, ils peuvent se transposer aux fonctions positives ou plus généralement aux fonctions de signe constant au voisinage de b. Ainsi :

Exemple Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}^+$ continues par morceaux.
Si $f(x) \sim g(x)$ quand $x \to b^-$ alors les intégrales $\int_{[a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{[a,b[} g(t)\,\mathrm{d}t$ ont même nature.

9.2.5 Intégrale de Riemann

Ici α désigne un réel.

Théorème

$$t \mapsto \frac{1}{t^\alpha} \text{ est intégrable sur } [1, +\infty[\text{ si, et seulement si, } \alpha > 1$$

dém. :
La fonction $t \mapsto 1/t^\alpha$ est définie et continue par morceaux sur $[1, +\infty[$.
Cette fonction est positive donc son intégrabilité équivaut à la convergence de l'intégrale.
Quand $x \to +\infty$
Cas $\alpha \neq 1$

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \left[-\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_1^x \to \begin{cases} +\infty \text{ si } \alpha < 1 \\ \dfrac{1}{\alpha-1} \text{ si } \alpha > 1 \end{cases}$$

Cas $\alpha = 1$

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln x \to +\infty$$

Finalement

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge si, et seulement si, } \alpha > 1$$

□

Exemple $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge alors que $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ divergent.

Théorème

$$t \mapsto \frac{1}{t^\alpha} \text{ est intégrable sur }]0, 1] \text{ si, et seulement si, } \alpha < 1$$

dém. :
La fonction $t \mapsto 1/t^\alpha$ est définie et continue par morceaux sur $]0, 1]$. Elle est positive.

Quand $x \to 0^+$
Cas $\alpha \neq 1$

$$\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_x^1 \to \begin{cases} +\infty \text{ si } \alpha > 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha} \text{ si } \alpha < 1 \end{cases}$$

Cas $\alpha = 1$

$$\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln x \to +\infty$$

Finalement

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge si, et seulement si, } \alpha < 1$$

□

Exemple $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge alors que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ divergent.

Remarque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ diverge pour toute valeur de α.

Exemple Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^1 t^\lambda \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{-\lambda}}$ converge si, et seulement si, $\lambda > -1$.

Théorème

Soient $a < b \in \mathbb{R}$.

$$t \mapsto \frac{1}{(b-t)^\alpha} \text{ est intégrable sur } [a, b[\text{ si, et seulement si, } \alpha < 1$$

$$t \mapsto \frac{1}{(t-a)^\alpha} \text{ est intégrable sur }]a, b] \text{ si, et seulement si, } \alpha < 1$$

Exemple $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$ converge et $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t-1}$ diverge.

9.3 Obtention de la nature d'une intégrale impropre

9.3.1 Intégration sur $[a, +\infty[$

Exemple Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{t^2}{t^2+1}$ est définie et continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

Quand $t \to +\infty$
$f(t) \to 1$.
Il existe $A \in \mathbb{R}^+$ tel que
$$\forall t \geqslant A, f(t) \geqslant 1/2$$
et alors
$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t + \int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}(x-A) \to +\infty$$
donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ diverge.

Remarque Ce type de raisonnement peut être repris dès que $f \xrightarrow[+\infty]{} \ell \neq 0$.

Exemple Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+1}$.
La fonction $f : t \mapsto 1/(t^4+1)$ est définie et continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
Quand $t \to +\infty$,
$f(t) \to 0$, on ne peur rien en conclure
$f(t) \sim 1/t^4$
Or $t \mapsto 1/t^4$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (car $4 > 1$) donc f est intégrable sur $[0, +\infty[$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+1}$ converge.

Exemple Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
La fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est définie et continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
Quand $t \to +\infty$,
($f(t) \to 0$)
$t^2 f(t) \to 0$ donc $f(t) = o(1/t^2)$
Or $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (car $2 > 1$) donc f est intégrable sur $[0, +\infty[$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Exemple Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
La fonction $f : t \mapsto \cos(t)/(1+t^2)$ est définie et continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
Quand $t \to +\infty$,
($f(t) \to 0$)
$f(t) \sim \cos(t)/t^2$. $t^{3/2} f(t) \sim \cos(t)/\sqrt{t} \to 0$ donc $f(t) = o(1/t^{3/2})$ et on peut conclure que f est intégrable sur $[0, +\infty[$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Exemple Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln(t^2+1)}\,\mathrm{d}t$.
La fonction $f : t \mapsto 1/\ln(t^2+1)$ est définie et continue par morceaux sur $[1,+\infty[$.
Quand $t \to +\infty$, $tf(t) \to +\infty$.
Il existe $a \in [1,+\infty[$ tel que pour $t \geqslant a$, $tf(t) \geqslant 1$ et donc $f(t) \geqslant 1/t \geqslant 0$.
On a alors

$$\int_1^x \frac{1}{\ln(t^2+1)}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_1^a \frac{1}{\ln(t^2+1)}\,\mathrm{d}t + \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln(t^2+1)}\,\mathrm{d}t$ diverge.

*Bilan :*Pour $f : [a,+\infty[\to \mathbb{C}$ continue par morceaux :
- si $f(t) \to \ell \neq 0$ alors l'intégrale de f sur $[a,+\infty[$ diverge ;
- si $f(t) \sim C/t^\alpha$ (avec $C \neq 0$) quand $t \to +\infty$ alors f est intégrable sur $[a,+\infty[$ si, et seulement si, $\alpha > 1$;
- si on détermine $\alpha > 1$ tel que $t^\alpha f(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$ alors f est intégrable sur $[a,+\infty[$;
- si $tf(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ell \neq 0$ alors l'intégrale de f sur $[a,+\infty[$ diverge.

9.3.2 Intégration sur $]-\infty,-a]$

Par symétrie, on transpose les démarches qui précèdent sachant

$$t \mapsto \frac{1}{|t|^\alpha} \text{ est intégrable sur }]-\infty,-a] \text{ si, et seulement si, } \alpha > 1$$

9.3.3 Intégration sur $]0,a]$

Exemple Nature de $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.
La fonction $f : t \mapsto \sin(t)/t$ est définie et continue par morceaux sur $]0,\pi]$.
Quand $t \to 0^+$, $f(t) \to 1$.
On peut prolonger f par continuité en 0 donc f est intégrable sur $]0,\pi]$ et $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.
On dit ici que l'intégrale est faussement impropre en 0.

Exemple Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
La fonction $f : t \mapsto \cos(t)/\sqrt{t}$ est définie et continue par morceaux sur $]0,1]$.
Quand $t \to 0^+$,
$f(t) \to +\infty$ (on ne peut rien en conclure)
$f(t) \sim 1/\sqrt{t}$ or $t \to 1/\sqrt{t}$ est intégrable sur $]0,1]$ ($\alpha = 1/2 < 1$) donc f est intégrable sur $]0,1]$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge.

Exemple Nature de $\displaystyle\int_0^1 \ln t \,\mathrm{d}t$.
La fonction $f : t \mapsto \ln t$ est définie et continue par morceaux sur $]0,1]$.
Quand $t \to 0^+$,
($f(t) \to -\infty$)
$\sqrt{t}f(t) \to 0$ donc $f(t) = o\left(1/\sqrt{t}\right)$.
Or $t \to 1/\sqrt{t}$ est intégrable sur $]0,1]$ ($\alpha = 1/2 < 1$) donc f est intégrable sur $]0,1]$ et $\displaystyle\int_0^1 \ln t \,\mathrm{d}t$ converge.

Exemple Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$.
La fonction $f : t \mapsto \ln(t)/t$ est définie et continue par morceaux sur $]0,1]$.
Quand $t \to 0^+$, $tf(t) \to -\infty$.
Il existe $a > 0$ tel que sur $]0,a]$, $f(t) \leqslant -1/t \leqslant 0$

$$\int_x^1 \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant -\int_x^a \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_a^1 \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$$

donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

*Bilan :*Soit $f :]0,a] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux :
- si $f(t) \to \ell \in \mathbb{C}$ alors f est intégrable sur $]0,a]$;
Plus généralement, si f est bornée au voisinage de 0 alors f est intégrable sur $]0,a]$
- si $f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} C/t^\alpha$ alors f est intégrable sur $]0,a]$ si, et seulement si, $\alpha < 1$;
- s'il existe $\alpha < 1$ vérifiant $t^\alpha f(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ alors f est intégrable sur $]0,a]$;
- si $tf(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} \ell \neq 0$ alors l'intégrale de f sur $]0,a]$ diverge.

9.3.4 Intégration sur $[-a, 0[$

Par symétrie, on peut transposer les démarches qui précèdent sachant

$$t \mapsto \frac{1}{|t|^\alpha} \text{ est intégrable sur } [-a,0[\text{ si, et seulement si, } \alpha > 1$$

9.3.5 Intégration $]a,b]$ ou $[a,b[$

On retrouve les mêmes démarches qu'au dessus.
Il pourra être pertinent de se ramener en 0 par translation/symétrie de la variable pour mieux percevoir les ordres de grandeur.

Exemple Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^3}}$.
La fonction $f : t \mapsto 1/\sqrt{1-t^3}$ est définie et continue par morceaux sur $[0,1[$.
Quand $t \to 1^-$, $t = 1 - h$ avec $h \to 0^+$.

$$f(t) \sim \frac{1}{\sqrt{3h}} = \frac{1/\sqrt{3}}{\sqrt{1-t}}$$

Or $t \mapsto 1/\sqrt{1-t}$ est intégrable sur $[0,1[$ donc f aussi et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^3}}$ converge.

Exemple Nature de $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}$.
La fonction $f : t \mapsto 1/(t^2-1)$ est définie et continue par morceaux par morceaux sur $]1,2]$.
Quand $t \to 1^+$, $t = 1+h$ avec $h \to 0^+$.

$$f(t) \sim \frac{1}{2h} = \frac{1}{2(t-1)}$$

Or $t \mapsto \dfrac{1}{t-1}$ n'est pas intégrable sur $]1,2]$ donc f non plus.
Puisque f est de signe constant $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}$ diverge.

Exemple Nature de $\displaystyle\int_0^1 \ln(1-t^2)\,\mathrm{d}t$.
La fonction $f : t \mapsto \ln(1-t^2)$ est définie et continue par morceaux sur $[0,1[$.
Quand $t \to 1^-$, $t = 1-h$ avec $h \to 0^+$.

$$f(t) \sim \ln(2h)$$

donc

$$\sqrt{1-t}f(t) \sim \sqrt{h}\ln(2h) \to 0$$

Ainsi $f(t) = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ or $\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ est intégrable sur $[0,1[$ donc f est intégrable sur $[0,1[$ et $\displaystyle\int_0^1 \ln(1-t^2)\,\mathrm{d}t$ converge.

9.3.6 Intégration sur $]a,b[$

On découpe arbitrairement l'intervalle en deux intervalles semi-ouverts.

Exemple Etude de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
La fonction $f : t \mapsto \sin(1/t^2)$ est définie et continue par morceaux sur $]0,+\infty[=]0,1] \cup [1,+\infty[$.
Quand $t \to 0^+$, $f(t) = O(1)$ donc f est intégrable sur $]0,1]$.
Quand $t \to +\infty$,
$f(t) \to 0$ (on ne peut rien en conclure)
$f(t) \sim 1/t^2$ donc f est intégrable sur $[1,+\infty[$.
Finalement f est intégrable sur $]0,+\infty[$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Exemple Etude de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$

La fonction $f : t \mapsto (t-1)/\ln t$ est définie et continue par morceaux sur $]0,0[\, = \,]0,1/2] \cup [1/2,1[$.
Quand $t \to 0^+$, $f(t) \to 0$ donc f est intégrable sur $]0,1/2]$.
Quand $t \to 1^-$, $f(t) \to 1$ donc f est intégrable sur $[1/2,1[$.
Finalement f est intégrable sur $]0,1[$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ converge.

9.4 Calculs d'intégrales impropres

9.4.1 Par les intégrales partielles ou détermination de primitive

Pour justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t$ on peut
- calculer $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ puis passer à la limite quand $x \to b^-$,
- introduire une primitive F de f et exploiter $\displaystyle\int_{[a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t = [F]_a^{b^-}$.

Pour $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{]a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t$ on peut
- calculer $\displaystyle\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t$ puis passer à la limite quand $x \to a^+$ et $y \to b^-$,
- introduire une primitive F de f et exploiter $\displaystyle\int_{]a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t = [F]_{a^+}^{b^-}$.

Exemple Calcul de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}$.

On peut justifier l'existence a priori de l'intégrale par l'équivalent $\displaystyle\frac{1}{t(t+1)} \sim \frac{1}{t^2}$.

On calcule l'intégrale grâce à la décomposition $\displaystyle\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$.

(1) $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)} = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = \ln x - \ln(x+1) + \ln 2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ln 2$.

(2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \left[\ln \frac{t}{t+1}\right]_1^{+\infty} = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2$.

Le calcul direct par primitive est souvent plus rapide mais permet moins de liberté qu'un calcul mené par les intégrales partielles.

9.4.2 Intégration par parties

Au programme, il n'est pas proposé de résultat réalisant une intégration par parties directement sur les intégrales généralisées. Pour réaliser une intégration par parties, on transite par les intégrales partielles avant de passer à la limite.

Exemple Pour $n \in \mathbb{N}$, calculons

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

$f_n : t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-t}$ est définie et continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
Quand $t \to +\infty$, $t^2 f_n(t) \to 0$ donc l'intégrale I_n converge.
Pour $A \in [0, +\infty[$

$$\int_0^A t^n \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t = \left[-t^n \mathrm{e}^{-t}\right]_0^A + \int_0^A n t^{n-1} \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$$

Quand $A \to +\infty$, on obtient

$$I_n = n I_{n-1}$$

Sachant $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t = 1$ on conclut

$$I_n = n!$$

Exemple Calculons

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2} \,\mathrm{d}t$$

$f : t \mapsto \ln(t)/(1+t)^2$ est définie et continue par morceaux sur $]0, 1]$.
Quand $t \to 0^+$, $\sqrt{t} f(t) \to 0$ donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2} \,\mathrm{d}t$ converge.
Pour $\varepsilon > 0$

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2} \,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\ln t}{1+t}\right]_\varepsilon^1 + \int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}$$

et donc

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2} \,\mathrm{d}t = \frac{\ln \varepsilon}{1+\varepsilon} + \left[\ln t - \ln(t+1)\right]_\varepsilon^1$$

puis

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2} \,\mathrm{d}t = -\frac{\varepsilon \ln \varepsilon}{1+\varepsilon} + \ln(1+\varepsilon) - \ln 2 \underset{x \to 0}{\to} -\ln 2$$

donc

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2} \,\mathrm{d}t = -\ln 2$$

Remarque Ici, procéder à une intégration par parties généralisé aurait réécrit l'intégrale étudiée comme différence de deux divergences.

Théorème

Soient I un intervalle d'extrémités $a < b \in \bar{\mathbb{R}}$ et $u, v : I \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
Si deux des propriétés qui suivent sont vérifiées alors la troisième l'est aussi :
(i) $\displaystyle\int_a^b u'v$ converge ;
(ii) $\displaystyle\int_a^b uv'$ converge ;
(iii) uv converge en a^+ et b^-.
De plus on a alors

$$\int_a^b u'v = [uv]_{a^+}^{b^-} - \int_a^b uv'$$

dém. :
On remarque :
- (iii) $\Leftrightarrow \displaystyle\int_a^b (uv)'$ converge ;
- $(uv)' = u'v + uv'$;
- $\displaystyle\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$ sous réserve de deux convergences.
Cela permet d'obtenir le résultat voulu.
□

9.4.3 Changement de variable

Théorème

Soient $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^1$ strictement monotone et $f : \varphi(I) \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux.
On a équivalence entre :
(i) $\displaystyle\int_I f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ converge
(ii) $\displaystyle\int_{\varphi(I)} f(u)\,\mathrm{d}u$ converge.
De plus, en notant $a < b \in \bar{\mathbb{R}}$ les extrémités de I, on a

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\lim\limits_{a^+}\varphi}^{\lim\limits_{b^-}\varphi} f(u)\,\mathrm{d}u$$

dém. :
Cas φ strictement croissant.
Sous cas $I = [a, b[$:

	a		b
φ	α	$\nearrow$	β

	α		β
φ^{-1}	a	$\nearrow$	b

$\alpha = \varphi(a)$, $\beta = \lim\limits_{b^-}\varphi$ et $\varphi(I) = [\alpha, \beta[$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons que l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(u)\,\mathrm{d}u$ converge.

$$\int_a^x f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \underset{u=\varphi(t)}{=} \int_\alpha^{\varphi(x)} f(u)\,\mathrm{d}u$$

converge quand $x \to b^-$ vers $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(u)\,\mathrm{d}u$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

$$\int_\alpha^x f(u)\,\mathrm{d}u \underset{u=\varphi(t)}{=} \int_a^{\varphi^{-1}(x)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

converge quand $x \to \beta^-$ vers $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.
Sous cas $I =]a, b]$: idem

Sous cas $I =]a, b[$: on coupe en deux.
Cas φ décroissant : idem avec échange de l'ordre des bornes.

□

Corollaire

On a équivalence entre
(i) $t \mapsto f(\varphi(t))\, \varphi'(t)$ est intégrable sur I ;
(ii) $u \mapsto f(u)$ est intégrable sur $\varphi(I)$;

dém. :
(i) équivaut à dire que $\displaystyle\int_I |f(\varphi(t))\varphi'(t)| \,\mathrm{d}t$ converge
Or φ' est de signe constant, donc (i) équivaut à dire que $\displaystyle\int_I |f(\varphi(t))|\, \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
Par changement de variable cela revient à dire que $\displaystyle\int_J |f|$ converge i.e. (ii).

□

Exemple Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
La fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}/\sqrt{t}$ est définie et continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
Réalisons le changement de variable $u = \sqrt{t}$
La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante.
$u = \sqrt{t}$, $t = u^2$, $\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u$.
Quand $t \to 0^+$, $u \to 0^+$, quand $t \to +\infty$, $u \to +\infty$.
Formellement

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 2\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$$

Puisque l'intégrale obtenue par le changement de variable est convergente, il en est de même de l'intégrale initiale et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \left[-2\mathrm{e}^{-u}\right]_0^{+\infty} = 2$$

9.4.4 Intégration séquentielle

Définition

On appelle suite croissante de segments de réunion I toute suite (J_n) telle que
$\forall n \in \mathbb{N}$, J_n est un segment (i.e. de la forme $[a_n, b_n]$)
$\forall n \in \mathbb{N}$, $J_n \subset J_{n+1}$ et $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n = I$.

Exemple Pour $I = [0, +\infty[$, $J_n = [0, n]$ convient.
Pour $I =]0, 1]$, $J_n = [1/n, 1]$ convient.

Théorème

Soient $f : I \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et (J_n) une suite croissante de segments de réunion I.
On a équivalence entre :
(i) f est intégrable sur I ;
(ii) la suite $\left(\int_{J_n} f\right)$ converge.
De plus, si tel est le cas

$$\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_{J_n} f$$

dém. :
Notons que la suite $\left(\int_{J_n} f\right)$ est croissante car $J_n \subset J_{n+1}$ et $f \geqslant 0$.
(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons f intégrable sur I.
La suite $\left(\int_{J_n} f\right)$ est croissante et majorée par $\int_I f$ donc elle converge et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{J_n} f \leqslant \int_I f$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons que la suite $\left(\int_{J_n} f\right)$ converge.
Pour $[\alpha, \beta] \subset I$, il existe $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que $\alpha \in J_{n_1}$ et $\beta \in J_{n_2}$ car la réunion des J_n est égale à I.
Pour $n = \max(n_1, n_2)$, $\alpha, \beta \in J_n$ puis $[\alpha, \beta] \subset J_n$ et $\int_\alpha^\beta f \leqslant \int_{J_n} f \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} \int_{J_n} f$.
Par suite f est intégrable sur I et

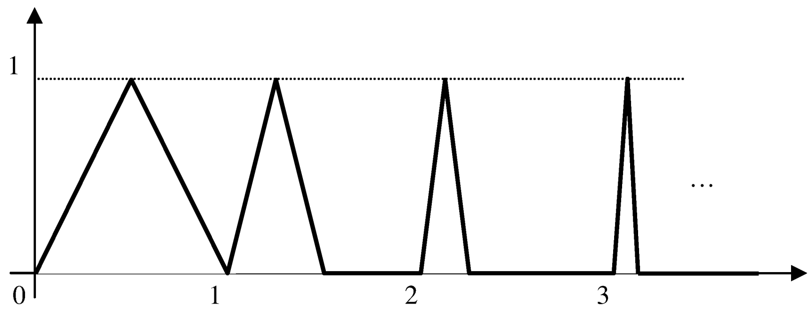
$$\int_I f = \sup_{[\alpha,\beta]} \int_\alpha^\beta f \leqslant \lim_{n\to+\infty} \int_{J_n} f$$

□

Remarque Pour étudier la convergence de $\int_{[0,+\infty[} f(t)\,\mathrm{d}t$ on étudie généralement la limite de $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ quand $x \to +\infty$. Ici la variable x est réelle. Avec l'outil précédent, pour $J_n = [0, n]$, on peut se contenter d'étudier la limite de $\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$ quand $n \in \mathbb{N} \to +\infty$.

Attention : Pour une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) et le « De plus »restent vraies mais l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) est fausse.
Par exemple $\int_0^{2n\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors que $\int_0^{+\infty} \sin(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Exemple Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par



La fonction f est positive et

$$\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\frac{1-1/2^n}{1-1/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

donc f est intégrable sur $[0,+\infty[$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.
Paradoxe :

$$f \text{ est intégrable sur } [0,+\infty[\text{ alors que } f \text{ ne tend pas vers 0 en } +\infty\,!$$

9.5 Musculation

9.5.1 Intégrales de Bertrand

Théorème

Pour $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ converge si, et seulement si, $\alpha>1$ ou ($\alpha=1$ et $\beta>1$).

dém. :
La fonction $f : t\mapsto 1/t^\alpha(\ln t)^\beta$ est définie, continue et positive sur $[\mathrm{e},+\infty[$.
Cas $\alpha<1$

$$tf(t) = \frac{t^{1-\alpha}}{(\ln t)^\beta} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$$

donc pour t assez grand

$$f(t) \geqslant 1/t \geqslant 0$$

Or $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge donc par comparaison de fonctions positives, $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ diverge.
Cas $\alpha>1$:
Sous cas inutile : $\beta>0$
On a

$$t^\alpha f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

donc f est intégrable sur $[\mathrm{e},+\infty[$ car $f(t)=o(1/t^\alpha)$ avec $\alpha>1$.
Sous cas général :
On introduit $m\in\,]1,\alpha[$, on a

$$t^m f(t) = \frac{1}{t^{\alpha-m}(\ln t)^\beta} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

donc f est intégrable sur $[\mathrm{e},+\infty[$ car $f(t)=o(1/t^m)$ avec $m>1$.
Cas $\alpha=1$

$$\int_{\mathrm{e}}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta}\underset{u=\ln t}{=}\int_1^{\ln x}\frac{\mathrm{d}u}{u^\beta}$$

converge quand $x\to+\infty$ si, et seulement si, $\beta>1$.
□

9.5.2 L'intégrale de Dirichlet

Proposition

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

dém. :
La fonction $t\mapsto\dfrac{\sin t}{t}$ est définie et continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
Cette fonction se prolonge par continuité en 0 donc $\displaystyle\int_{]0,1]}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.
Etudions $\displaystyle\int_{[1,+\infty[}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$
Soit $A\geqslant 1$. Par intégration par parties

$$\int_1^A\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^A-\int_1^A\frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Quand $A\to+\infty$,

$$\frac{\cos A}{A}\to 0 \text{ et } \int_1^A\frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t\xrightarrow[A\to+\infty]{}\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

car cette dernière intégrale converge puisque

$$\frac{\cos t}{t^2}\underset{t\to+\infty}{=}O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

□

Remarque Par une intégration par parties judicieuse, on peut montrer

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

puis en exploitant $1-\cos t=2\sin^2(t/2)$ et le changement de variable $u=t/2$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,\mathrm{d}t$$

Proposition

La fonction $t\mapsto\dfrac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0,+\infty[$

dém. :
Montrons que $\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right|\mathrm{d}t$ diverge, le problème se posant en $+\infty$.

$$\int_0^{n\pi}\frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{u+(k-1)\pi}\,\mathrm{d}u$$

Or

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{u+(k-1)\pi}\,\mathrm{d}u\geqslant\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{k\pi}\,\mathrm{d}u=\frac{2}{k\pi}$$

donc

$$\int_0^{n\pi}\left|\frac{\sin t}{t}\right|\mathrm{d}t\geqslant\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\to+\infty$$

□

Remarque On peut montrer que $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$ mais c'est une autre histoire…

Chapitre 10

Séries numériques

On a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\frac{1-1/2^n}{1-1/2} = 1 - \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

On va écrire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

10.1 Vocabulaire

10.1.1 Série numérique

Définition

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite numérique.
On appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ avec

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

Cette série est notée $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ ou $\sum u_n$.
S_n est appelé somme partielle de rang n de cette série.

Remarque Une série est un cas particulier de suite, c'est une suite de sommes partielles.

Exemple La série $\sum_{n\geqslant 0} n$ est la suite des sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exemple La série $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ est la suite des sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ (si } q \neq 1\text{)}$$

Exemple La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est la suite des sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ (avec } n \geqslant 1\text{)}$$

Exemple Soit (v_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Posons $u_0 = v_0$ et $u_n = v_n - v_{n-1}$.
La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est la suite des sommes partielles

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = v_n$$

Ainsi la suite (v_n) se confond avec la série de terme général u_n.

On suppose désormais les séries étudiées définies à partir du rang $n_0 = 0$, on peut s'y ramener quitte à définir les premiers termes de la série comme étant nul.

10.1.2 Nature d'une série numérique

10.1.2.1 Convergence et divergence

Définition

On dit que qu'une série $\sum u_n$ converge si la suite de ses sommes partielles converge.
On pose alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k := \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

appelée somme de la série.

*(!)*Par essence, une somme de série numérique est une limite, pour la manipuler, il est indispensable de justifier a priori que celle-ci est convergente.

Exemple Etude de $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(n-1)}$.
Pour $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Ainsi $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(n-1)}$ converge (CV) et $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$.

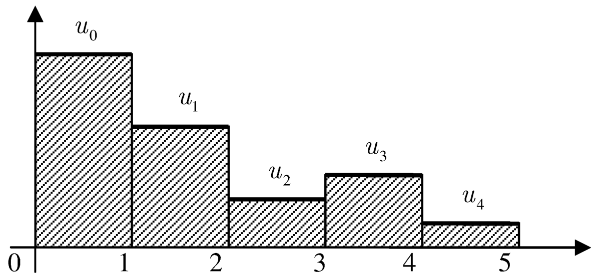
Exemple Etude de $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$.

Pour $n\geqslant 1$, la fonction $t\mapsto 1/t$ étant décroissante, on a

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\int_{1}^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln(n+1)\to+\infty$$

Ainsi $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverge (DV).

Remarque $\sum u_n$ converge si, et seulement si, la somme des aires hachurées converge.



Exemple Etude de $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Pour $n\geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\int_{0}^{1}t^{k-1}\,\mathrm{d}t=\int_{0}^{1}\frac{1-(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Or

$$\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{1+t}=\ln 2 \text{ et } 0\leqslant\int_{0}^{1}\frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_{0}^{1}t^n\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ln 2$$

Ainsi $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2$

10.1.2.2 Divergence grossière

Proposition

> Si la série $\sum u_n$ converge alors $u_n\to 0$.

dém. :

Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Si (S_n) converge en posant S sa limite

$$u_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0$$

□

Définition

Si (u_n) ne tend pas vers 0 alors on dit que la série de terme général u_n diverge grossièrement (DVG).

Exemple La série $\sum \cos n$ diverge grossièrement.
En effet si $\cos n \to 0$ alors la relation $\cos 2n = 2\cos^2 n - 1$ donne à la limite l'absurdité $0 = -1$.

Exemple La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge non grossièrement.

10.1.3 Reste d'une série convergente

Théorème

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On a équivalence entre :
(i) $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge ;
(ii) $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ converge.

dém. :
Les sommes partielles de deux séries diffèrent d'une constante.
□

Corollaire

On ne modifie pas la nature d'une série en en modifiant la valeur d'un nombre fini de termes (en revanche cela modifie la valeur de la somme...).

Définition

Si la série $\sum u_n$ converge, on introduit $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ appelé reste de rang n de cette série.

*(!)*Pour introduire le reste de rang n d'une série il est nécessaire que celle-ci soit convergente.

Théorème

Si $\sum u_n$ converge alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

De plus

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

dém. :
Notons S la somme de la série. On veut montrer $S = S_n + R_n$
Pour $m \geqslant n$,

$$\sum_{k=0}^{m} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{m} u_k$$

Quand $m \to +\infty$, on obtient

$$S = S_n + R_n$$

De plus,

$$R_n = S - S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

□

10.1.4 Opérations sur les séries convergentes

Théorème

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, les séries $\sum \lambda u_n$ et $\sum u_n + v_n$ convergent et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

dém. :
Par opérations sur les limites.
□

Exemple Si $\sum u_n$ et $\sum (u_n + v_n)$ convergent alors $\sum v_n$ converge car $v_n = (u_n + v_n) + (-1).u_n$.

*(!)*Pour écrire

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

il convient de vérifier au moins deux convergences.

Exemple Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge.

*(!)*Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent on ne peut rien dire sur la nature de $\sum (u_n + v_n)$.

Théorème

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles vérifiant $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

dém. :
Par comparaison de limites.

□

Théorème

Soit (z_n) une suite complexe.
Si $\sum z_n$ converge alors $\sum \overline{z_n}$ aussi et

$$\overline{\sum_{k=0}^{+\infty} z_k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \overline{z_k}$$

dém. :
Par conjugaison de limites.

□

Corollaire

On a équivalence entre :
(i) $\sum z_n$ converge ;
(ii) $\sum \text{Re}(z_n)$ et $\sum \text{Im}(z_n)$ convergent.
De plus, on a alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} z_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \text{Re}(z_k) + i \sum_{k=0}^{+\infty} \text{Im}(z_k)$$

dém. :
($\Rightarrow$) car $\text{Re}(z_n) = \dfrac{1}{2}(z_n + \overline{z_n})$ et $\text{Im}(z_n) = \dfrac{1}{2i}(z_n - \overline{z_n})$.
($\Leftarrow$) car $z_n = \text{Re}(z_n) + i\text{Im}(z_n)$.

□

10.2 Absolue convergence

10.2.1 Série à termes réels positifs

Définition

Une série à termes positifs (SATP) est une série dont le terme général appartient à $\mathbb{R}^+$.

Théorème

Soit $\sum u_n$ une SATP. On a équivalence entre :
(i) $\sum u_n$ converge ;
(ii) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant M$.
De plus, si tel est le cas,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

dém. :
La suite (S_n) des sommes partielles est croissante car $S_n - S_{n-1} = u_n \geqslant 0$. Ainsi, cette suite converge si et seulement si elle est majorée et sa limite est alors sa borne supérieure.
□

Remarque Si $\sum u_n$ est une série à termes positifs divergente alors $\sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Corollaire

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$$

Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ aussi.
Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ aussi.

Exemple Nature de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$.
Pour $n \geqslant 2$, $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n(n-1)}$ or $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ converge donc par comparaison de SATP, $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2}$ converge puis $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Exemple Nature de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{n+1}$.
$n\frac{\ln n}{n+1} \sim \ln n \to +\infty$ donc pour n assez grand, $\frac{\ln n}{n+1} \geqslant \frac{1}{n}$.
Or $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc, par comparaison de SATP, $\sum \frac{\ln n}{n+1}$ diverge.
Plus précisément

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

car la suite des sommes partielles est croissante puisque ses termes sont positifs.

10.2.2 Convergence absolue.

Définition

On dit qu'une suite numérique (u_n) est sommable si

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} |u_k| \leqslant M$$

Remarque Puisque $\sum |u_n|$ est une série à termes positifs :

$$(u_n) \text{ sommable si, et seulement si, } \sum |u_n| \text{ converge}$$

Définition

Si la suite (u_n) est sommable on dit que la série $\sum u_n$ converge absolument.

Exemple La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge absolument (CVA) car $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Théorème

Si $\sum u_n$ est absolument convergente alors celle-ci converge et

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

dém. :
Posons

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \text{ et } T_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k|$$

On suppose (T_n) convergente. Nous allons établir la convergence de (S_n) en appliquant le critère de Cauchy. Puisque (T_n) converge

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \forall p \geqslant 0, |T_{n+p} - T_n| \leqslant \varepsilon$$

Or

$$|T_{n+p} - T_n| = \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| \geqslant \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| = |S_{n+p} - S_n|$$

donc on peut écrire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \forall p \geqslant 0, |S_{n+p} - S_n| \leqslant \varepsilon$$

Par suite (S_n) satisfait le critère de Cauchy et donc converge.

Enfin, puisque $|S_n| \leqslant T_n$, on obtient à la limite $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$

□

Remarque Pour une série changeant de signe ou une série à termes complexes.

$$\text{CVA} \Rightarrow \text{CV}$$

Pour une série à termes positif, ou plus généralement, pour une série à terme de signe constant à partir d'un certain rang :

$$\text{CVA} \Leftrightarrow \text{CV}$$

*(!)*Il se peut que $\sum u_n$ converge et $\sum |u_n|$ diverge.

Définition

Une série convergente non absolument convergente est dite semi-convergente (SCV).

Exemple La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est semi-convergente.

10.2.3 Outils de comparaison

Théorème

Si $|u_n| \leqslant \varphi_n$ et $\sum \varphi_n$ CV alors $\sum u_n$ CVA.

dém. :
Par comparaison de SATP, $\sum |u_n|$ converge.
□

Exemple Nature de $\sum \frac{\sin n}{n^2}$.
On a $\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc par domination $\sum \frac{\sin n}{n^2}$ CVA donc CV.

Théorème

Si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ CVA alors $\sum u_n$ CVA.

dém. :
Supposons $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ CVA.
Il existe $M \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant M |v_n|$$

Or $\sum M |v_n|$ converge donc par domination $\sum |u_n|$ converge.
□

Corollaire

Si $u_n = o(v_n)$ et si $\sum v_n$ CVA alors $\sum u_n$ CVA.
Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ CVA si, et seulement si, $\sum v_n$ l'est.

dém. :
Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(v_n)$ et si $u_n \sim v_n$ alors $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$.
□

*(!)*Ces énoncés sont faux en termes de convergence.
Cependant, ces énoncés se transposent aux SATP et plus généralement aux séries à termes de signe constant à partir d'un certain rang.

Exemple Pour $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs, si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

10.2.4 Séries et règles de référence

10.2.4.1 Série de Riemann

Théorème

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la série à termes positifs $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

dém. :
Cas $\alpha \leqslant 1$
Puisque pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{1}{n^\alpha} \geqslant \frac{1}{n}$ et puisque $\sum \frac{1}{n}$ diverge, par comparaison de SATP, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.
Cas $\alpha > 1$
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est une série à terme positifs. Nous allons montrer que ses sommes partielles sont majorées.
La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$, donc pour $k \geqslant 2$

$$\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

On a alors

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

puis

$$S_n \leqslant 1 + \int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

avec convergence de l'intégrale.
Par conséquent la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.
□

Exemple $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^{1,001}}$ convergent alors que $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergent.

10.2.4.2 Règles de Riemann

Exemple Nature de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{2}{n^2+n+1}$
$\frac{2}{n^2+n+1} \sim \frac{2}{n^2}$ or $\sum \frac{1}{n^2}$ CVA donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{2}{n^2+n+1}$ CVA et donc CV.

Exemple Nature de $\sum_{n\geqslant 1}\left(\tan\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)$.
On sait
$$\tan u = u+\frac{1}{3}u^3+o(u^3)$$
$\tan\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\sim\frac{1}{3n^3}$ or $\sum\frac{1}{n^3}$ CVA donc $\sum\tan\frac{1}{n}-\frac{1}{n}$ CVA donc CV.

Exemple Nature de $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n+1}{n^2+1}$.
$\frac{n+1}{n^2+1}\sim\frac{1}{n}$ or $\sum\frac{1}{n}$ DV donc par équivalence de SATP, $\sum\frac{n+1}{n^2+1}$ DV.

Exemple Nature de $\sum_{n\geqslant 0}\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$.
$n^2\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}=X^4\mathrm{e}^{-X}\to 0$ donc $\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}=o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ or $\sum\frac{1}{n^2}$ CVA donc $\sum\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$ CVA donc CV.

Exemple Nature de $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln n}{n^2+1}$.
$n^{3/2}\frac{\ln n}{n^2+1}\sim\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\to 0$ donc $\frac{\ln n}{n^2+1}=o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ or $\sum\frac{1}{n^{3/2}}$ CVA donc $\sum\frac{\ln n}{n^2+1}$ CVA donc CV.

Exemple Nature de $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\ln n}$.
$n\times\frac{1}{\ln n}\to+\infty$ donc pour n assez grand, $n\times\frac{1}{\ln n}\geqslant 1$ et $\frac{1}{\ln n}\geqslant\frac{1}{n}$.
Puisque $\sum\frac{1}{n}$ diverge, par comparaison de SATP, $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\ln n}$ diverge.

Exemple Nature de $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{d_n^2}$ avec d_n le nombre de diviseurs positifs de n.
Pour p nombre premier $d_p=2$.
Puisqu'il y a une infinité de nombre premiers, $(1/d_n^2)$ ne tend pas vers 0 et donc la série diverge grossièrement.

Idées récurrentes :
- Si (u_n) ne tend pas vers 0 alors $\sum u_n$ diverge grossièrement ;
- Si $u_n\sim C/n^\alpha$ (avec $C\neq 0$) alors $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha>1$;
- Si on détermine $\alpha>1$ tel que $n^\alpha u_n\to 0$ alors $u_n=o\left(1/n^\alpha\right)$ et donc $\sum u_n$ converge absolument ;
- Si $nu_n\to\ell\neq 0$ alors $\sum u_n$ diverge.

10.2.4.3 Série géométrique

Théorème

Soit $q \in \mathbb{C}$.
Si $|q| \geqslant 1$ alors $\sum q^n$ diverge grossièrement.
Si $|q| < 1$ alors $\sum q^n$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

dém. :
Cas $|q| \geqslant 1$:
On a $|q^n| = |q|^n \geqslant 1$ donc la suite (q^n) ne tend par vers 0 et il y a divergence grossière.
Cas $|q| < 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} |q|^k = \frac{1-|q|^{n+1}}{1-|q|} \to \frac{1}{1-|q|}$$

donc $\sum q^n$ CVA
De plus

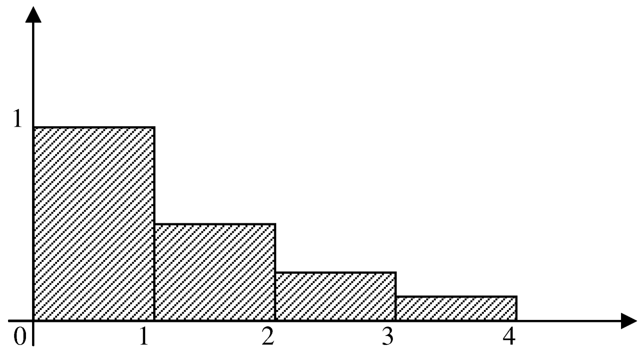
$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \to \frac{1}{1-q}$$

donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

□

Exemple $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 2.$



Exemple Pour $|x| < 1$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2}$$

Exemple Pour $|z| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$$

10.2.4.4 Règle de d'Alembert

Théorème

Soit $\sum u_n$ une série à termes non nuls.
On suppose

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

Si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.
Si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ est absolument convergente.
Si $\ell = 1$ alors on ne peut rien conclure.

dém. :
Cas $\ell > 1$:
A partir d'un certain rang n_0 on a

$$|u_{n+1}/u_n| \geqslant 1$$

et donc $(|u_n|)_{n \geqslant n_0}$ est croissante. Elle ne peut alors converger vers 0 que si elle est constante égale à 0 ce qui est exclu.
Cas $\ell < 1$:
On introduit $q \in]\ell, 1[$. A partir d'un certain rang n_0, $|u_{n+1}/u_n| \leqslant q$ et donc

$$|u_n| \leqslant q^{n-n_0} |u_{n_0}| = Mq^n$$

avec $M = q^{-n_0} |u_{n_0}|$. Ainsi

$$u_n = O(q^n)$$

Or $|q| < 1$ donc $\sum q^n$ CVA puis $\sum u_n$ aussi.
Cas $\ell = 1$:
Considérons $u_n = 1/n^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
On a

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to 1$$

alors que $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.
□

Remarque C'est un critère grossier réservé aux suites dont le terme général comporte un produit (terme géométrique, factoriel,...) induisant la nature de la série.

Exemple Nature de $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ avec $u_n = 1/\binom{2n}{n}$.
$u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \to \dfrac{1}{4}$ donc $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ CVA donc CV.

10.3 Outils adaptés à la semi-convergence

10.3.1 Séries alternées

Définition

Une suite réelle (u_n) est dite alternée si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n |u_n| \text{ ou } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^{n+1} |u_n|$$

Une série réelle $\sum u_n$ est dite alternée si la suite (u_n) l'est.

Exemple Les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln(1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n})$ sont alternées.

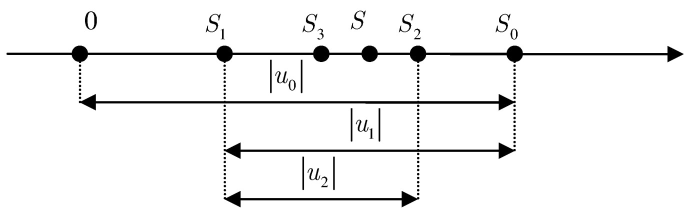
Théorème

Soit $\sum u_n$ une série alternée.
Si la suite $(|u_n|)$ est décroissante et si $|u_n| \to 0$ alors la série $\sum u_n$ est convergente.
De plus, la somme de la série est encadrée par les sommes partielles consécutives.
Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ vérifie :
- R_n est du signe de u_{n+1} ;
- $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.

dém. :
Quitte à considérer $(-u_n)$, on peut supposer

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n |u_n|$$

Posons $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.



Nous allons établir l'adjacence des suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}).

$$S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leqslant 0$$

Ainsi (S_{2n}) est décroissante.

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} = -|u_{2n+3}| + |u_{2n+2}| \geqslant 0$$

Ainsi (S_{2n+1}) est croissante.
Enfin

$$S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1} \to 0$$

donc les deux suites sont adjacentes.
Par conséquent, elles convergent vers une même limite S et encadrent cette limite.
Ainsi $\sum u_n$ converge et sa somme S est encadrée par les sommes partielles consécutives.
Considérons maintenant le reste

$$R_n = S - S_n$$

$R_{2n} = S - S_{2n}$. Or $S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$ donc $R_{2n} \in [u_{2n+1}, 0]$.
$R_{2n+1} = S - S_{2n+1}$. Or $S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n+2}$ donc $R_{2n+1} \in [0, u_{2n+2}]$
□

Corollaire

Le signe de la somme est celui de son premier terme.

dém. :
La somme S de la série est encadrée par $S_0 = u_0$ et $S_1 = u_0 + u_1$. Or $|u_1| \leqslant |u_0|$ donc $u_0 + u_1$ est du signe de u_0 et donc S aussi.
□

Exemple Nature de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.
C'est une série alternée.
$\left|\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ décroît vers 0 donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ converge.

Exemple Nature de $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n^3+1}$.
(1) C'est une série alternée et $\left|\frac{(-1)^n}{n^3+1}\right| = \frac{1}{n^3+1}$ décroît vers 0 donc $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n^3+1}$ converge.
(2) $\frac{(-1)^n}{n^3+1} = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ et $\sum \frac{1}{n^3}$ CVA donc $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n^3+1}$ CVA.

10.3.2 DA à deux termes

Exemple Nature de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n-1}}$.
La série est alternée, mais ne décroît pas en valeur absolue :

n	1	2	3	4	5
$\lvert u_n\rvert$	$1/2$	1	$1/4$	$1/3$	$1/6$

$$\frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n-1}} = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Or $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ CV par le CSSA et $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ convergent absolument donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n-1}}$ CV.

Exemple Nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ CV par le CSSA
Mais $-\dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim -\dfrac{1}{2n}$ et $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, donc par comparaison de séries à termes de signe constant, $\sum -\dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ DV.
Finalement $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ diverge.

Remarque Ici $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right) \sim \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ avec $\sum \ln\left(1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)$ diverge et $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ converge.
Cela illustre que la règle des équivalents est fausse en l'absence de convergence absolue ou de signe constant.

10.3.3 Transformation d'Abel

Exemple Nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\sin n}{n}$.

On introduit $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \sin k$ de sorte que $\sin n = S_n - S_{n-1}$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{S_n - S_{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{S_n}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{S_{n-1}}{n}$$

Par translation d'indice,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{S_n}{n} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{S_n}{n+1}$$

puis

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{S_n}{n(n+1)} - S_0 + \frac{S_{N+1}}{N+1}$$

Montrons que (S_n) est bornée.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin k = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)}-1}{\mathrm{e}^{i}-1}\right)$$

donc

$$|S_n| \leqslant \left|\frac{1-\mathrm{e}^{i(n+1)}}{1-\mathrm{e}^{i}}\right| \leqslant \frac{2}{|1-\mathrm{e}^{i}|}$$

Puisque (S_n) est bornée, $\dfrac{S_{n+1}}{n+1} \to 0$ et $\dfrac{S_n}{n(n+1)} = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum \dfrac{S_n}{n(n+1)}$ est absolument convergente et donc la somme partielle $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{S_n}{n(n+1)}$ converge quand $n \to +\infty$.

Par opération, on en déduit que la suite de terme général $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin n}{n}$ converge quand $n \to +\infty$ et donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin n}{n}$ converge.

On peut montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi - 1}{2}$$

mais c'est une autre histoire...

10.4 Applications

10.4.1 Etude de suites

Théorème

La suite (u_n) et la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature.

dém. :

On a $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$ donc (S_n) converge si, et seulement si, (u_n) converge.

□

Exemple Montrons que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ converge.

Etudions la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$.

On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n}$$

puis

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} - 2\sqrt{n}\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 2\sqrt{n}$$

Ainsi

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + O\left(1/n\right)\right) - 2\sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + 2\sqrt{n} = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

La série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente donc converge puis (u_n) converge.

Exemple Soit (u_n) définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } u_n = \frac{2n}{2n+1} u_{n-1} \text{ pour } n \geqslant 1$$

Montrons qu'il existe $A > 0$, tel que $u_n \sim \frac{A}{\sqrt{n}}$.
On veut montrer que $v_n = \sqrt{n} u_n$ converge vers un réel > 0.
Etudions la série $\sum (\ln v_n - \ln v_{n-1})$.

$$\ln v_n - \ln v_{n-1} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{n}{n-1} \right) + \ln \left(\frac{2n}{2n+1} \right) = -\frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{1}{2n} \right) = O \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

Ainsi $\sum (\ln v_n - \ln v_{n-1})$ est absolument convergente donc la suite $(\ln v_n)$ converge.
En posant ℓ sa limite, $v_n \to \mathrm{e}^\ell = A > 0$ et $u_n \sim \frac{A}{\sqrt{n}}$.

10.4.2 La constante d'Euler

Proposition

La suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ est convergente.

dém. :
Nous allons étudier la nature de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$.
On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) = O \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

donc la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ est absolument convergente donc convergente.
□

Définition

On pose $\gamma = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right)$ appelée constante d'Euler.
On a $\gamma = 0,577$ à 10^{-3} près.

Théorème

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

dém. :
Puisque $u_n \to \gamma$ on peut écrire $u_n = \gamma + o(1)$ donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n = \gamma + o(1)$

Cor : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$
□

Exemple Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.
On peut affirmer que la série converge par le CSSA.

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$

donc

$$S_{2n} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$

puis

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(2n) + \gamma - \ln n - \gamma + o(1) = \ln 2 + o(1)$$

Par suite $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

10.4.3 Formule de Stirling

Théorème

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{\mathrm{e}^n}$$

dém. :
Etape 1 : Commençons par établir l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$n! \sim C n^{n+\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-n}$$

Etudions la suite de terme général

$$u_n = \ln \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-n}}$$

On a

$$u_{n+1} - u_n = \ln(n+1) + \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - \left(n + \frac{3}{2}\right)\ln(n+1) + 1$$

donc

$$u_{n+1} - u_n = -\left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1 = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série de terme général $u_{n+1} - u_n$ est donc absolument convergente et la suite (u_n) converge donc vers un certain réel ℓ. Pour $C = \mathrm{e}^{\ell} > 0$, on a le résultat voulu.
Etape 2 : Calculons C.
On introduit les intégrales de Wallis :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \mathrm{d}t$$

Par intégration par parties, on a la relation :

$$nI_n = (n-1)I_{n-2}$$

Sachant $I_0 = \pi/2$ on en déduit

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2} \text{ et } I_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$

Par l'équivalent précédent, on a après simplification

$$I_{2p} \sim \frac{\pi}{C\sqrt{2p}}$$

Calculons un équivalent de I_{2p} de façon différente.
Sachant $I_1 = 1$ on obtient

$$I_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$

et donc

$$I_{2p}I_{2p+1} = \frac{\pi}{2(2p+1)} \sim \frac{\pi}{4p}$$

La suite (I_n) est décroissante car pour $t \in [0, \pi/2]$, $0 \leqslant \sin t \leqslant 1$ donc $\sin^{n+1} t \leqslant \sin^n t$ puis $I_{n+1} \leqslant I_n$.
Ainsi

$$I_{2p+2} \leqslant I_{2p+1} \leqslant I_{2p}$$

or

$$I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p} \sim I_{2p}$$

donc par encadrement

$$I_{2p+1} \sim I_{2p}$$

puis

$$I_{2p}^2 \sim \frac{\pi}{4p}$$

On en déduit

$$\frac{\pi^2}{2C^2 p} \sim \frac{\pi}{4p}$$

et enfin $C = \sqrt{2\pi}$.
□

10.4.4 Produit infini

*Idée :*Pour étudier l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=0}^{n} u_k$, on passe au logarithme si le contexte le permet

Exemple Etudions l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$

Pour tout $n \geqslant 1$, $1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n} > 0$ donc

$$\ln \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$$

or
$$\ln\left(1+\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)=\frac{(-1)^{k-1}}{k}-\frac{1}{2}\frac{1}{k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$
$\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est convergente et
$$-\frac{1}{2}\frac{1}{k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)\sim-\frac{1}{2}\frac{1}{k^2}$$
Par équivalence de série à termes de signe constant, la série $\sum\frac{-1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$converge et donc
$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$$
converge quand $n\to+\infty$. En posant ℓ sa limite, on a
$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathrm{e}^{\ell}>0$$

Exemple Soient $\alpha,x\in\mathbb{R}$ avec $|\alpha|<1$.
Etudions l'existence de la limite de $P_n(x)=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-\alpha^k x\right)$ quand $n\to+\infty$.
Les premiers facteurs du produit ne sont pas nécessairement strictement positifs, mais puisque $1-\alpha^k x\xrightarrow[k\to+\infty]{}1$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que
$$\forall k\geqslant N, 1-\alpha^k x>0$$
Pour $n\geqslant N$, on peut écrire
$$P_n(x)=P_{N-1}(x)\prod_{k=N}^{n}\left(1-\alpha^k x\right)$$
Or
$$\ln\left[\prod_{k=N}^{n}\left(1-\alpha^k x\right)\right]=\sum_{k=N}^{n}\ln\left(1-\alpha^k x\right)$$
et
$$\ln\left(1-\alpha^k x\right)\sim-\alpha^k x \text{ car } \alpha^k x\to 0$$
Puisque $|\alpha|<1$, la série géométrique $\sum\alpha^n$ converge absolument et donc la série $\sum\ln\left(1-\alpha^k x\right)$ converge. Ainsi
$$\sum_{k=N}^{n}\ln\left(1-\alpha^k x\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ell$$
puis
$$P_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}P_N(x)\mathrm{e}^{\ell}$$

10.4.5 Développement décimal d'un réel positif

Soit x un réel positif. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$$

Exemple $x = \pi$, $a_0 = 3$, $a_1 = 3,1$, $a_2 = 3,14$, $a_3 = 3,141$, $a_4 = 3,1415$,...

Proposition

La suite (a_n) converge vers x.

dém. :
$10^n x - 1 < \lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x$ donc $x - 10^{-n} < a_n \leqslant x$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $\alpha_n = 10^n(a_n - a_{n-1})$.
□

Exemple Pour $x = \pi$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 4$,...

Proposition

$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \alpha_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.

dém. :
$10^n(a_n - a_{n-1}) = \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor \in \mathbb{Z}$.
Puisque

$$\lfloor 10^{n-1} x \rfloor \leqslant 10^{n-1} x < \lfloor 10^{n-1} x \rfloor + 1$$

on a

$$10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor \leqslant 10^n x < 10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor + 10$$

et donc

$$10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor \leqslant \lfloor 10^n x \rfloor < 10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor + 10$$

Ainsi

$$10a_{n-1} \leqslant a_n < 10a_{n-1} + 10$$

et donc $0 \leqslant \alpha_n < 10$.
□

Théorème

$$x = \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{10^n}$$

dém. :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha_n}{10^n} = \sum_{n=1}^{N} a_n - a_{n-1} = a_N - a_0 \to x - \lfloor x \rfloor$$

d'où l'égalité

$$x = \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{10^n}$$

□

Définition

α_n est appelé n-ième décimale (en base 10) du nombre x (après la virgule).
La suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est appelée suite des décimales du nombre x.
On écrit parfois

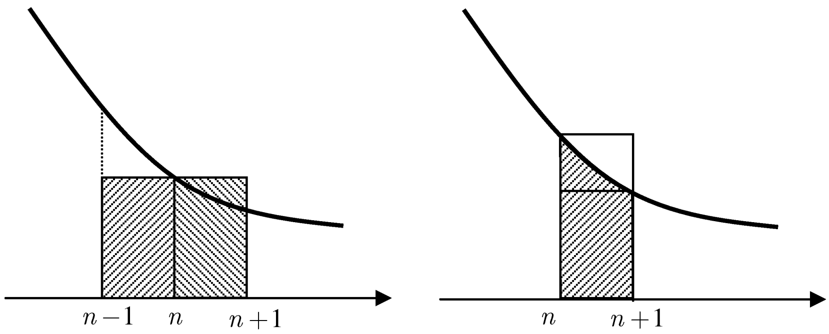
$$x = \overline{\lfloor x \rfloor, \alpha_1\alpha_2\dots}$$

Remarque Le nombre x est décimal si, et seulement si, la suite de ses décimales stationne à 0.
Le nombre x est rationnel si, et seulement si, la suite de ses décimales est périodique à partir d'un certain rang.

10.5 Comparaison avec une intégrale et étude asymptotique

10.5.1 Comparaison série intégrale

Cas f décroissante :



On a

$$\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n)$$

Cas f croissante :

$$\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } f(n) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n+1)$$

Théorème

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux, décroissante et positive.
La série de terme général $w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$ est convergente.

dém. :
Puisque f est décroissante, on a

$$f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n-1)$$

et donc
$$0 \leqslant w_n \leqslant f(n-1) - f(n)$$
La nature de $\sum (f(n-1) - f(n))$ est celle de la suite $(f(n))$.
Or la fonction f est décroissante et minorée, elle converge donc en $+\infty$ et par suite $(f(n))$ aussi. Ainsi la série $\sum (f(n-1) - f(n))$ converge et par comparaison de SATP, la série de terme général w_n est convergente.
□

Corollaire

> Sous les hypothèses qui précédent, la série $\sum f(n)$ et l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

dém. :
Puisque $\sum w_n$ converge, $\sum_{n\geqslant 0} f(n)$ et $\sum_{n\geqslant 1} \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.
Or
$$\sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$$
et f est une fonction positive et $([0,n])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de segment de réunion $[0,+\infty[$ donc $\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ converge si, et seulement si, f est intégrable sur $[0,+\infty[$ i.e. $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
□

Exemple Pour $\alpha > 0$, la fonction $t \mapsto 1/t^\alpha$ est décroissante et l'on retrouve
$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge si, et seulement si, } \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge}$$

Exemple Considérons la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.
Pour $\alpha > 0$, on montre que la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ est décroissante sur un intervalle $[A,+\infty[$ avec A assez grand. Par suite la nature de $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ est celle de $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ i.e. convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

10.5.2 Reste d'une série de Riemann convergente

Pour $\alpha > 1$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente.
Donnons un équivalent de son reste de rang n.
La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$.
Pour $k \geqslant 2$,
$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

donc
$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_n^N \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$
Quand $N \to +\infty$,
$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$
avec convergence des intégrales engagées.
Or
$$\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}} \text{ et } \int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$
donc par comparaison
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Exemple En particulier
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$$

10.5.3 Sommes partielles d'une série de Riemann divergente

Pour $\alpha \leqslant 1$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est divergente.
Donnons un équivalent de sa somme partielle de rang n.
Cas $\alpha = 1$.
On sait déjà :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$
Cas $0 < \alpha < 1$.
La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$.
$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$
En sommant
$$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$
(avec convergence de l'intégrale de droite).
Or
$$\int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \text{ et } \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$
donc par comparaison
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Cas $\alpha \leqslant 0$.
On écrit $\alpha = -\beta$ (avec $\beta \geqslant 0$) et on étudie

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{n} k^\beta$$

La fonction $x \mapsto x^\beta$ est croissante sur $[0, +\infty[$.

$$\int_{k-1}^{k} t^\beta \,\mathrm{d}t \leqslant k^\beta \leqslant \int_{k}^{k+1} t^\beta \,\mathrm{d}t$$

En sommant

$$\int_{0}^{n} t^\beta \,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^\beta \leqslant \int_{1}^{n+1} t^\beta \,\mathrm{d}t$$

Or

$$\int_{0}^{n} t^\beta \,\mathrm{d}t = \frac{n^{\beta+1}}{\beta+1} \text{ et } \int_{1}^{n+1} t^\beta \,\mathrm{d}t \sim \frac{n^{\beta+1}}{\beta+1}$$

donc par encadrement

$$\sum_{k=1}^{n} k^\beta \sim \frac{n^{\beta+1}}{\beta+1} \text{ i.e. } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Exemple En particulier

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}$$

10.5.4 Sommation des relations de comparaison

10.5.4.1 Cas de la convergence

Théorème

Soient $\sum u_n$ une série numérique et $\sum v_n$ une série à termes positifs convergente.
Si $u_n = o(v_n)$ alors la série $\sum u_n$ converge et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.
Si $u_n = O(v_n)$ alors la série $\sum u_n$ converge et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.
Si $u_n \sim v_n$ alors la série $\sum u_n$ converge et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

dém. :
Cas $u_n = o(v_n)$.
Par comparaison, la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant \varepsilon |v_n| = \varepsilon v_n$$

Pour $k \geqslant n+1$, $|u_k| \leqslant \varepsilon v_k$ puis en sommant

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

Ainsi

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$$

Cas $u_n = O(v_n)$: c'est analogue.
Cas $u_n \sim v_n$.
Par équivalence de série à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge.
On a

$$u_n = v_n + o(v_n) = v_n + w_n \text{ avec } w_n = o(v_n)$$

donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k + o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right) \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

□

Exemple Déterminons un équivalent simple de

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+1}$$

On a $\dfrac{1}{k^2+1} \sim \dfrac{1}{k^2}$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ est une SATP CV donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+1} \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$$

10.5.4.2 Cas de la divergence

Théorème

Soient $\sum u_n$ une série numérique et $\sum v_n$ une série à termes positifs divergente.
Si $u_n = o(v_n)$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.
Si $u_n = O(v_n)$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = O\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.
Si $u_n \sim v_n$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$.

dém. :
Remarquons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ car $\sum v_n$ est une SATP DV.

Cas $u_n = o(v_n)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant \varepsilon |v_n| = \varepsilon v_n$$

Pour $n \geqslant N$,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=0}^{N-1} u_k\right| + \left|\sum_{k=N}^{n} u_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=0}^{N-1} u_k\right| + \varepsilon \sum_{k=N}^{n} v_k$$

Or, puisque $\sum_{k=0}^{n} v_k \to +\infty$, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N', \left|\sum_{k=0}^{N-1} u_k\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=0}^{n} v_k$$

Pour $n \geqslant \max(N, N')$, on obtient

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant 2\varepsilon \sum_{k=0}^{n} v_k$$

Ainsi $\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.
Cas $u_n = O(v_n)$: semblable.
Cas $u_n \sim v_n$: on écrit $u_n = v_n + o(v_n)$.
□

Exemple Etudions $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+\sqrt{k}}$.
$\frac{1}{n+\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ est une SATP divergente donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+\sqrt{k}} \sim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.

Exemple Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite numérique convergeant vers ℓ. On peut écrire

$$u_n = \ell + o(1) = \ell + \varepsilon_n \text{ avec } \varepsilon_n = o(1)$$

et alors

$$\frac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_n) = \ell + \frac{1}{n}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n)$$

Puisque $\varepsilon_n = o(1)$ avec $\sum_{n\geqslant 0} 1$ est une SATP divergente

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k = o\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right) = o(n)$$

Ainsi

$$\frac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_n) = \ell + \frac{1}{n}o(n) = \ell + o(1) \to \ell$$

10.6 Réorganisation des termes d'une somme

10.6.1 Permutation des termes

Soient $\sum u_n$ une série et $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$.
*Pb :*Que dire de la série $\sum u_{\sigma(n)}$?

Exemple Considérons la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ de somme $S = \ln 2$.

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} + \cdots$$

Permutons les termes de S de la manière suivante :

$$S = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \frac{1}{2k+1} - \left(\frac{1}{4k+2} + \frac{1}{4k+4}\right) + \cdots$$

on obtient

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots - \frac{1}{4k+2} + \frac{1}{4k+4} + \cdots$$

puis

$$S = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\right) = \frac{1}{2}S$$

Ainsi, on peut changer la somme d'une série en en permutant ses termes !

Théorème

Si $\sum u_n$ CVA alors pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$, $\sum u_{\sigma(n)}$ CVA et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

dém. :
Cas $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$
$\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} \leqslant \sum_{k=0}^{N} u_k$ avec $N = \max\{\sigma(0), \dots \sigma(n)\}$ donc

$$\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

Par suite $\sum u_{\sigma(n)}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Le même résultat appliqué à $\sum u_{\sigma(n)}$ et σ^{-1} donne $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(\sigma^{-1}(n))} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$ d'où l'égalité.
Cas $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{R}$
On introduit $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$.
On a $u_n = u_n^+ - u_n^-$ et $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$.
Puisque $0 \leqslant u_n^+, u_n^- \leqslant |u_n|$, par comparaison de SATP, $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent.
Par l'étude qui précède, $\sum u_{\sigma(n)}^+$ et $\sum u_{\sigma(n)}^-$ convergent puis $\sum \left|u_{\sigma(n)}\right|$ converge puisque $\left|u_{\sigma(n)}\right| =$

$u^+_{\sigma(n)} + u^-_{\sigma(n)}$.

De plus $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^+_{\sigma(n)} - \sum_{n=0}^{+\infty} u^-_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^+_n - \sum_{n=0}^{+\infty} u^-_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

Cas $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{C}$

On transite par $\text{Re}(u_n)$ et $\text{Im}(u_n)$.

□

Exemple Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N}^\star)$. Nature de $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n\sigma(n)}$.

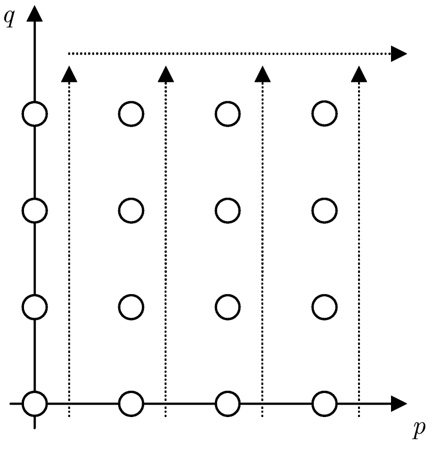
Sachant $ab \leqslant \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$, on a $\displaystyle\frac{1}{n\sigma(n)} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{\sigma(n)^2}\right)$.

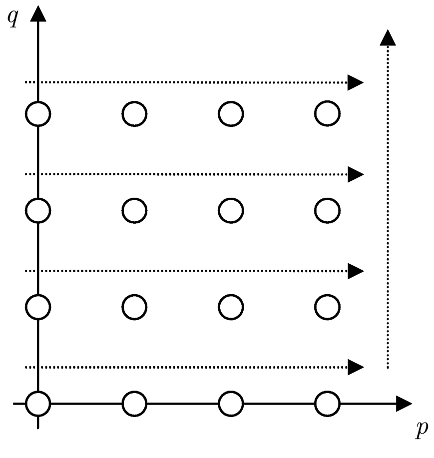
Or $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ converge absolument et par permutation des termes d'une série absolument convergente, $\displaystyle\sum \frac{1}{\sigma(n)^2}$ aussi. Par comparaison de séries à termes positifs, on obtient $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\sigma(n)}$ convergente.

10.6.2 Série double

Soit $(u_{p,q}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$ une famille de complexes doublement indexée.

*Pb :*Sous réserve d'existence, a-t-on $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}$?





Théorème

Soit $u_{p,q} \in \mathbb{C}$ pour $p, q \in \mathbb{N}$.

Si pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} |u_{p,q}|$ converge et si $\displaystyle\sum_{q\geqslant 0}\sum_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}|$ converge alors

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}$$

avec absolue convergence des séries engagées.

dém. :
Cas $\forall p, q \in \mathbb{N}, u_{p,q} \geqslant 0$

Par hypothèse on sait déjà que $\sum_{p\geqslant 0} u_{p,q}$ converge et $\sum_{q\geqslant 0}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}$ aussi.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_{p,q} \leqslant \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}$. Par comparaisons de SATP, $\sum_{q\geqslant 0} u_{p,q}$ converge.
Pour tout $M, N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{p=0}^{M}\sum_{q=0}^{N} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{N}\sum_{p=0}^{M} u_{p,q} \leqslant \sum_{q=0}^{N}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \leqslant \sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}$$

Quand $N \to +\infty$: on obtient

$$\sum_{p=0}^{M}\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \leqslant \sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}$$

Ainsi $\sum_{p\geqslant 0}\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}$ converge et

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \leqslant \sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}$$

L'autre inégalité s'obtient par une démarche symétrique.
Cas $\forall p, q \in \mathbb{N}, u_{p,q} \in \mathbb{R}$
On transite par $u_{p,q}^+$ et $u_{p,q}^-$.
Cas $\forall p, q \in \mathbb{N}, u_{p,q} \in \mathbb{C}$
On transite par $\mathrm{Re}(u_{p,q})$ et $\mathrm{Im}(u_{p,q})$.
□

Exemple Montrons

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=p}^{+\infty} \frac{1}{q^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Commençons par interpréter le premier membre sous la forme $\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=1}^{+\infty} u_{p,q}$.

Posons $u_{p,q} = \frac{1}{q^3}$ si $q \geqslant p$ et 0 sinon.
$\sum_{p\geqslant 1} |u_{p,q}|$ converge car $u_{p,q} = 0$ pour $p > q$.
$\sum_{p=1}^{+\infty} |u_{p,q}| = \sum_{p=1}^{q} \frac{1}{q^3} = \frac{1}{q^2}$ donc $\sum_{q\geqslant 1}\sum_{p=1}^{+\infty} |u_{p,q}|$ converge.
Par le théorème de Fubini, on a l'égalité :

$$\sum_{q=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} u_{p,q} = \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=1}^{+\infty} u_{p,q}$$

avec convergence des séries engagées.

On obtient ainsi l'égalité

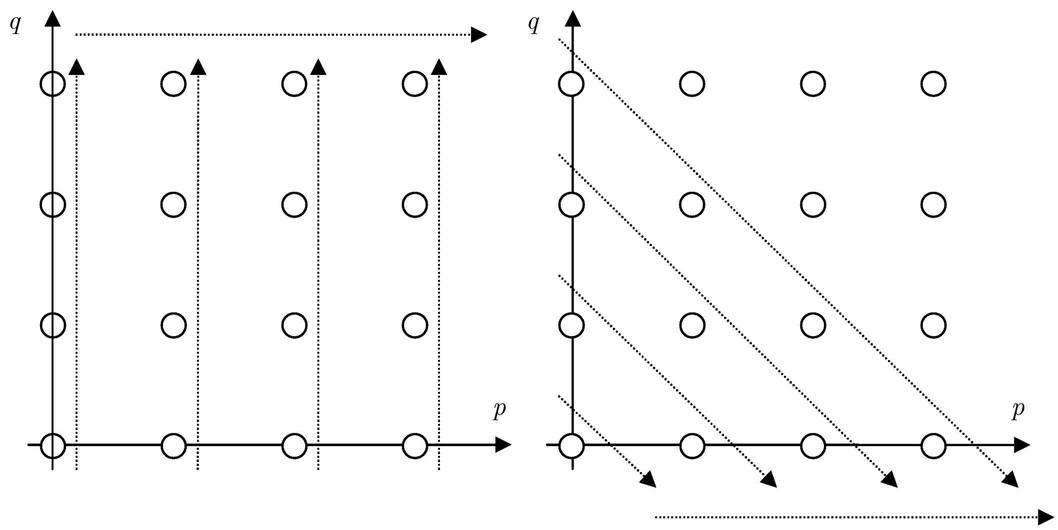
$$\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2} = \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=p}^{+\infty} \frac{1}{q^3}$$

10.6.3 Produit de Cauchy

Soient $\sum u_p$ et $\sum v_q$ deux séries convergentes.
On a

$$\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(u_p \sum_{q=0}^{+\infty} v_q\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty}(u_p v_q)$$

qui se comprend $(u_0v_0+u_0v_1+u_0v_2+\cdots)+(u_1v_0+u_1v_1+u_1v_2+\cdots)+(u_2v_0+u_2v_1+u_2v_2+\cdots)+\cdots$.
*Pb :*Peut-on réorganiser la somme en $u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_0) + (u_0v_2 + u_1v_1 + u_2v_0) + \cdots$?



Définition

On appelle produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ la série de terme général $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

Théorème

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument alors la série produit de Cauchy $\sum w_n$ aussi et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

dém. :
Cas $\forall n \in \mathbb{N}, u_n, v_n \geqslant 0$
On introduit $C_N = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 / p, q \leqslant N\}$ et $T_N = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 / p + q \leqslant N\}$.

$$\sum_{(p,q)\in C_N} u_p v_q = \sum_{p=0}^{N} u_p \sum_{q=0}^{N} v_q \text{ et } \sum_{(p,q)\in T_N} u_p v_q = \sum_{n=0}^{N} w_n$$

$T_N \subset C_N$ et $u_p v_q \geqslant 0$ donne

$$\sum_{n=0}^{N} w_n \leqslant \sum_{p=0}^{N} u_p \sum_{q=0}^{N} v_q \leqslant \sum_{p=0}^{+\infty} u_p \sum_{q=0}^{+\infty} v_q$$

Ainsi $\sum w_N$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n \leqslant \sum_{p=0}^{+\infty} u_p \sum_{q=0}^{+\infty} v_q$$

$C_N \subset T_{2N}$ donne

$$\sum_{p=0}^{N} u_p \sum_{q=0}^{N} v_q \leqslant \sum_{n=0}^{2N} w_n$$

puis par passage à la limite,

$$\sum_{p=0}^{+\infty} u_p \sum_{q=0}^{+\infty} v_q \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

Cas $\forall n \in \mathbb{N}, u_n, v_n \in \mathbb{R}$
On transite par u_n^+, u_n^- et v_n^+, v_n^-.
Cas $\forall n \in \mathbb{N}, u_n, v_n \in \mathbb{C}$
On transite par les parties réelles et imaginaires.
□

Exemple Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$. Par sommation géométrique

$$\frac{1}{(1-a)^2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a^n\right)$$

Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes,

$$\frac{1}{(1-a)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(a^k a^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a^n$$

10.6.4 Application : la vraie fonction exponentielle

Théorème

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} z^n$ est absolument convergente.

dém. :
Pour $z = 0$: ok.
Pour $z \neq 0$, on introduit $u_n = z^n/n! \neq 0$.
On a $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|z|}{n+1} \to 0 < 1$ donc par la règle de d'Alembert, $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} z^n$ est absolument convergente.
□

Définition

On pose

$$\exp(z) \underset{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Exemple $\exp(0) = 1$ car $0^0 = 1$.

Proposition

$\forall z \in \mathbb{C}, \overline{\exp(z)} = \exp \bar{z}$.

dém. :
Par conjugaison de séries convergentes.
□

Proposition

$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \exp(z)\exp(z') = \exp(z + z')$.

dém. :

$$\exp(z)\exp(z') = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z'^n}{n!}$$

Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes

$$\exp(z)\exp(z') = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

avec

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{z'^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}(z + z')^n$$

en vertu de la formule du binôme de Newton.
Ainsi

$$\exp(z)\exp(z') = \exp(z + z')$$

□

Proposition

$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = \mathrm{e}^x$.

dém. :
$\exp(0) = 1$.

Etudions la dérivée de $x \mapsto \exp(x)$.
Quand $h \to 0$, avec $h \neq 0$

$$\frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} = \exp(x)\frac{\exp(h)-1}{h}$$

Or

$$\frac{\exp(h)-1}{h} = 1 + h\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{h^{n-2}}{n!}$$

avec

$$\left|\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{h^{n-2}}{n!}\right| \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n!} \text{ pour } |h| \leqslant 1$$

Ainsi

$$\frac{\exp(h)-1}{h} \to 1$$

puis

$$\frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} \to \exp(x)$$

La fonction $x \mapsto \exp(x)$ est solution de l'équation différentielle $y' = y$ vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$, c'est donc la fonction exponentielle réelle.
$\square$

Exemple $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} = \mathrm{e}$.

Remarque Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a $|\exp(i\theta)|^2 = \exp(i\theta)\exp(-i\theta) = 1$ donc $\exp(i\theta) \in U$.
A partir de la fonction exponentielle complexe, on définit les fonctions cos et sin par :

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}}{2} = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{i\theta}) \text{ et } \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta}}{2i} = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{i\theta})$$

On peut alors retrouver les propriétés usuelles de ses fonctions.
Par exemple :
? $|\exp(i\theta)|^2 = 1$ donne $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$;
- $\exp(-i\theta) = \overline{\exp(i\theta)}$ donne $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ et $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$;
- $\exp(i(a+b)) = \exp(ia)\exp(ib)$ donne $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b$ et
$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)\ldots$
On peut aussi précisément définir le nombre π comme étant le double de la première annulation strictement positive de la fonction cosinus et achever la construction de la trigonométrie.

Chapitre 11

Suites et séries de fonctions numériques

Les fonctions étudiées sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
I et J désignent des intervalles non vides de $\mathbb{R}$.

11.1 Suites de fonctions

11.1.1 Présentation

Définition

On appelle suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$ toute suite (u_n) d'éléments de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

Exemple Considérons $u_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $u_n(t) = t^n$.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$.

11.1.2 Convergence simple

Définition

Soit (u_n) une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$.
On dit que la suite de fonctions (u_n) converge simplement vers $u : I \to \mathbb{K}$ si

$$\forall t \in I, \quad u_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u(t)$$

On note alors $u_n \xrightarrow[I]{CVS} u$.

Exemple Considérons $u_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$u_n(t) = t^n$$

Soit $t \in [0,1]$.
Quand $n \to +\infty$
Si $t \in [0,1[$ alors $u_n(t) \to 0$.
Si $t = 1$ alors $u_n(t) \to 1$.
Par suite $u_n \xrightarrow{CVS} u$ avec

$$u : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0,1[\\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

Exemple Considérons $u_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$u_n(t) = \frac{t^n}{1+t^n}$$

Soit $t \in \mathbb{R}^+$.
Quand $n \to +\infty$
Si $t \in [0,1[$ alors $u_n(t) \to 0$.
Si $t = 1$ alors $u_n(t) = 1/2 \to 1/2$.
Si $t \in]1,+\infty[$ alors $u_n(t) \to 1$.
Finalement $u_n \xrightarrow{CVS} u$ avec

$$u : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0,1[\\ 1/2 & \text{si } t = 1 \\ 1 & \text{si } t =]1,+\infty[\end{cases}$$

Exemple Considérons $u_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$u_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \text{ si } t < n \text{ et } u_n(t) = 0 \text{ sinon}$$

Soit $t \in \mathbb{R}^+$.
Quand $n \to +\infty$
Pour n assez grand, $t < n$ donc

$$u_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln(1 - t/n)\right) \to \mathrm{e}^{-t}$$

Ainsi $u_n \xrightarrow{CVS} u$ avec

$$u : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$$

Exemple Considérons $u_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$u_n(t) = n^2 t^n (1-t)$$

Soit $t \in [0,1]$.
Quand $n \to +\infty$.
Si $t \in [0,1[$ alors $u_n(t) \to 0$ par croissance comparée.
Si $t = 1$ alors $u_n(t) = 0 \to 0$.
Finalement $u_n \xrightarrow{CVS} \tilde{0}$.
Cependant

$$u_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim \frac{n}{\mathrm{e}} \to +\infty\,!$$

11.1.3 Propriétés

Soit (u_n) une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$.

Théorème

Si $u_n \xrightarrow[I]{CVS} u$ alors la fonction u est unique.
On l'appelle limite simple de la suite (u_n) et on note $u = \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$.

Proposition

Si $u_n \xrightarrow[I]{CVS} u$ et si $J \subset I$ alors $u_n \xrightarrow[J]{CVS} u$.

dém. :
Qui peut le plus, peut le moins.
□

Proposition

Si $u_n \xrightarrow[I]{CVS} u$ et si chaque u_n est positive alors u est positive.

dém. :
Si toutes les fonctions u_n sont positives alors pour tout $t \in I$, $u(t) \geqslant 0$ par passage à la limite de l'inégalité$u_n(t) \geqslant 0$.
□

Proposition

Si $u_n \xrightarrow[I]{CVS} u$ et si chaque u_n est croissante alors u est croissante.

dém. :
Si toutes les fonctions u_n sont croissantes alors pour tout $x \leqslant y \in I$, $u(x) \leqslant u(y)$ par passage à la limite de l'inégalité$u_n(x) \leqslant u_n(y)$.
□

(!)$u_n \xrightarrow{CVS} u$ et chaque u_n continue n'implique pas u continue.
$u_n \xrightarrow{CVS} u$ n'implique pas $\int_I u_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_I u(t)\,\mathrm{d}t$.

11.1.4 Convergence uniforme

Soit (u_n) une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$.

Définition

On dit que (u_n) converge uniformément vers $u : I \to \mathbb{K}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow \forall t \in I, |u_n(t) - u(t)| \leqslant \varepsilon$$

On dit alors que u est limite uniforme de la suite (u_n) et on note

$$u_n \xrightarrow{CVU} u \text{ ou } u_n \xrightarrow[I]{CVU} u$$

Remarque Comparativement, dire que (u_n) converge simplement vers u signifie :

$$\forall t \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow |u_n(t) - u(t)| \leqslant \varepsilon$$

Pour la convergence simple, le rang N est susceptible de dépendre de t alors que pour la convergence uniforme N doit convenir pour tout $t \in I$ (on dit qu'il est uniforme en t).

Remarque La convergence simple se comprend comme la convergence des fonctions « point par point ».
La convergence uniforme se comprend comme la convergence des fonctions « dans leur globalité ».

Proposition

Si $u_n \xrightarrow{CVU} u$ alors $u_n \xrightarrow{CVS} u$.
Ainsi, s'il y a convergence uniforme, c'est vers la limite simple de la suite de fonctions ; en particulier il y a unicité de la limite uniforme.

dém. :
Qui peut le plus, peut le moins.
□

Proposition

Si $u_n \xrightarrow[I]{CVU} u$ et si $J \subset I$ alors $u_n \xrightarrow[J]{CVU} u$.

dém. :
Immédiate car si une propriété vaut pour tout $t \in I$ elle vaut aussi pour tout $t \in J \subset I$.
□

11.1.5 Convergence en norme uniforme

L'algèbre $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ des fonctions bornée de I vers $\mathbb{K}$ est normée par la norme uniforme (ou norme infinie) définie par

$$\|f\|_{\infty,I} := \sup_{t\in I} |f(t)|$$

Théorème

Soit (u_n) une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$.
On a équivalence entre :
(i) (u_n) converge uniformément vers une fonction $u : I \to \mathbb{K}$;
(ii) A partir d'un certain rang, les fonctions $u_n - u$ sont bornées et $\|u_n - u\|_{\infty,I} \to 0$.

dém. :
$\forall t \in I, |u_n(t) - u(t)| \leqslant \varepsilon$ équivaut à$\|u_n - u\|_{\infty,I} \leqslant \varepsilon$.
□

Protocole Pour étudier la convergence uniforme de (u_n) :
- on déterminer la limite simple u de la suite (u_n) ;
- on étudie si $\|u_n - u\|_\infty = \sup_{t\in I} |u_n(t) - u(t)| \to 0$.
Pour cela on peut :
- calculer $\|u_n - u\|_\infty$ en dressant le tableau de variation de $u_n - u$ ou $|u_n - u|$;
- majorer $|u_n(t) - u(t)|$ par une quantité de limite nulle indépendante de t.

Exemple Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, considérons $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$u_n(t) = \frac{t+n}{n(1+t^2)}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$.
Quand $n \to +\infty$,

$$u_n(t) \to \frac{1}{1+t^2}$$

Ainsi $u_n \xrightarrow{CVS} u$ avec

$$u : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$$

Etudions

$$u_n(t) - u(t) = \frac{1}{n}\frac{t}{1+t^2}$$

En vertu de l'inégalité

$$2\,|ab| \leqslant a^2 + b^2$$

on a

$$|u_n(t) - u(t)| \leqslant \frac{1}{2n}$$

donc

$$\|u_n - u\|_\infty \leqslant \frac{1}{2n} \to 0$$

Finalement $u_n \xrightarrow{CVU} u$.

Exemple Considérons $u_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $u_n(t) = t^n$.
$u_n \xrightarrow[{[0,1]}]{CVS} u$ avec

$$u(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in [0,1[\\ 1 \text{ si } t = 1 \end{cases}$$

Etudions $u_n - u$. On a

$$u_n(t) - u(t) = \begin{cases} t^n \text{ si } t \in [0,1[\\ 0 \text{ si } t = 1 \end{cases}$$

donc $\|u_n - u\|_\infty = 1$ qui ne tend pas vers 0 donc la suite de fonctions (u_n) ne converge pas uniformément.
Cependant pour $a \in [0,1[$,

$$\|u_n - u\|_{\infty,[0,a]} = a^n \to 0$$

donc

$$u_n \xrightarrow[{[0,a]}]{CVU} \tilde{0}$$

Exemple Considérons $u_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$u_n(t) = nt(1-t)^n$$

Soit $t \in [0,1]$
Quand $n \to +\infty$
Si $t = 0$ alors $u_n(t) = 0 \to 0$.
Si $t \in]0,1]$ alors $u_n(t) \to 0$ par croissances comparées.
Finalement $u_n \xrightarrow{CVS} u = \tilde{0}$.
En étudiant les variations de $\delta_n(t) = u_n(t) - u(t)$ on obtient

t	0		$1/(n+1)$		1
$u_n(t) - u(t)$	0	$\nearrow$	$u_n(1/(n+1))$	$\searrow$	0

donc

$$\|u_n - u\|_\infty = u_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \sim \frac{1}{\mathrm{e}}$$

Par conséquent la suite de fonctions (u_n) ne converge pas uniformément.
Cependant pour $a \in]0,1]$.
Pour n assez grand $\dfrac{1}{n+1} \leqslant a$, et puisque

t	0		$1/(n+1)$		a		1
$u_n(t) - u(t)$	0	$\nearrow$	$u_n(1/(n+1))$	$\searrow$	$u_n(a)$	$\searrow$	0

Donc $\|u_n - u\|_\infty = u_n(a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Ainsi $u_n \xrightarrow[{[a,1]}]{CVU} \tilde{0}$ pour tout $a \in]0,1]$.

11.1.6 Autres modes de convergence.

Munissons l'espace $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$ des normes $\|\,.\,\|_1$, $\|\,.\,\|_2$ et $\|\,.\,\|_\infty$.
Soit (u_n) une suite d'éléments E et u un élément de E.

Définition

On dit que la suite (u_n) converge vers u en moyenne si $\|u_n - u\|_1 \to 0$.
On dit que la suite (u_n) converge vers u en moyenne quadratique si $\|u_n - u\|_2 \to 0$.
On dit que la suite (u_n) converge vers u uniformément si $\|u_n - u\|_\infty \to 0$.

Exemple Considérons $u_n(t) = t^n$ sur $[0,1]$.
La suite (u_n) converge en moyenne vers $\tilde{0}$ mais ne converge pas uniforménent vers cette fonction.

Théorème

La convergence uniforme entraîne la convergence en moyenne quadratique qui entraîne elle-même la convergence en moyenne quadratique.

dém. :
$\|\,.\,\|_1 \leqslant \sqrt{b-a}\,\|\,.\,\|_2 \leqslant (b-a)\,\|\,.\,\|_\infty$.
□

11.2 Séries de fonctions

11.2.1 Présentation

Soit (u_n) une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$.

Définition

On appelle série de fonctions de terme général u_n la suite de fonctions (S_n) avec

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Cette série de fonctions est notée $\sum u_n$ et S_n est appelée somme partielle de rang n de celle-ci.

Exemple Considérons $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $u_n(t) = t^n$.
La série de fonctions $\sum u_n$ est la suite de fonctions (S_n) avec

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} u_k(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k = \begin{cases} \dfrac{1-t^{n+1}}{1-t} & \text{si } t \neq 1 \\ n+1 & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

11.2.2 Convergence simple

Soit $\sum u_n$ une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$.

Définition

On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement si la suite (S_n) de ses sommes partielles converge simplement.
La limite simple de la suite (S_n) est alors appelée somme de la série de fonctions et on la note

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Théorème

On a équivalence entre :
(i) la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I ;
(ii) la série numérique $\sum u_n(t)$ converge pour chaque $t \in I$.
De plus, si tel est le cas

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$$

dém. :
(i) $\Leftrightarrow$ $\forall t \in I$, $(S_n(t))$ converge.

Or $S(t) = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)(t) = \sum_{k=0}^{n} u_k(t)$ donc
(i) $\Leftrightarrow \forall t \in I, \sum u_n(t)$ converge.
De plus, on a alors

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)(t) = \lim_{n\to+\infty} S_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$$

□

Définition

Si $\sum u_n$ converge simplement, on introduit son reste de rang n

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k : t \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(t)$$

Proposition

Si la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \text{ et } R_n \xrightarrow{CVS} \tilde{0}$$

dém. :
Pour tout $t \in I$,

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right)(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t) = \sum_{k=0}^{n} u_k(t) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(t) = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right)(t)$$

De plus, pour tout $t \in I$, $R_n(t) \to 0$ car $R_n(t)$ est le reste d'une série numérique convergente.
□

Exemple Considérons $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $u_n(t) = t^n$.
Pour $t \in \mathbb{R}$, $\sum u_n(t) = \sum t^n$ converge si, et seulement si, $t \in]-1, 1[$.
Par suite la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]-1, 1[$ et sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est définie sur $]-1, 1[$. De plus

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$$

Exemple Considérons $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$u_n(t) = 1/n^t$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, $\sum u_n(t) = \sum 1/n^t$ converge si, et seulement si, $t > 1$.

Par suite, la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]1,+\infty[$ et sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est définie sur $]1,+\infty[$. La somme de cette fonction est la fonction zêta de Riemann

$$\zeta : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^t}$$

Remarque L'étude de la convergence simple de $\sum u_n$ donne le domaine de définition de la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

11.2.3 Convergence uniforme

Soit $\sum u_n$ une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$.

Définition

On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément lorsque la suite (S_n) de ses sommes partielles converge uniformément.

Théorème

On a équivalence entre :
(i) la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément ;
(ii) la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement et $R_n \xrightarrow{CVU} \tilde{0}$.

dém. :
(i) $\Leftrightarrow \exists S : I \to \mathbb{K}, S_n \xrightarrow{CVU} S$
$\Leftrightarrow \exists S : I \to \mathbb{K}, S_n \xrightarrow{CVS} S$ et $S_n - S \xrightarrow{CVU} \tilde{0}$
$\Leftrightarrow$ (ii)
□

Remarque On étudiera $R_n \xrightarrow{CVU} \tilde{0}$ en évaluant si $\|R_n\|_\infty \to 0$

Exemple Considérons $u_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $u_n(t) = \frac{(-1)^n}{n+t}$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$.
Pour $t \in \mathbb{R}^+$, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+t}$ est convergente en vertu du CSSA donc $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.
La fonction $t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+t}$ est donc définie sur $\mathbb{R}^+$
On a

$$R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+t}$$

Par le CSSA,

$$|R_n(t)| \leqslant \frac{1}{n+1+t} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

donc

$$\|R_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{n+1} \to 0$$

Par suite $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

11.2.4 Convergence normale

Soit $\sum u_n$ une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$.

Définition

On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement lorsque :
- les fonctions u_n sont bornées ;
- la série numérique $\sum \|u_n\|_\infty$ est convergente.

Théorème

Si la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement alors celle-ci converge uniformément.
De plus, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est bornée et

$$\left\|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right\|_\infty \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|_\infty$$

dém. :
Supposons la série de fonctions $\sum u_n$ normalement convergente sur I.
Pour tout $t \in I$, $|u_n(t)| \leqslant \|u_n\|_\infty$ donc par comparaison de SATP, la série numérique $\sum u_n(t)$ est absolument convergente donc convergente. Ainsi la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement.
De plus, pour tout $t \in I$,

$$|R_n(t)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k(t)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k\|_\infty$$

donc

$$\|R_n\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k\|_\infty \to 0$$

Ainsi la séries de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément.
De plus, pour tout $t \in I$,

$$\left|\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)(t)\right| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n(t)| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|_\infty$$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est bornée et

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\|_\infty \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|_\infty$$

□

Remarque $CN \Rightarrow CVU \Rightarrow CVS$.
Les réciproques sont fausses.

Exemple Considérons $u_n(t) = \dfrac{\sin(nt)}{n^2 + t^2}$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$ et $t \in \mathbb{R}$.
On a $|u_n(t)| \leqslant \dfrac{1}{n^2 + t^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$
Les fonctions u_n sont bornées et $\|u_n\|_\infty \leqslant 1/n^2$.
Or $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge donc, par comparaison de séries à termes positifs, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement.
Par suite $\sum u_n$ converge simplement et uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exemple Considérons $u_n(t) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+t}$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$ et $t \in [0, +\infty[$.
Pour $t \in \mathbb{R}^+$, $\sum u_n(t) = \sum \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+t}\right)$ avec $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+t} = \dfrac{t}{n(n+t)} \sim \dfrac{t}{n^2}$.
Par équivalence de série à termes positifs, il y a convergence de $\sum u_n(t)$ et donc la série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.
Etudions la convergence normale. Puisque

t	0		$+\infty$
$u_n(t)$	0	$\nearrow$	$1/n$

u_n est bornée et $\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}^+} = 1/n$. Il n'y a pas convergence normale sur $\mathbb{R}^+$
Cependant pour $a \geqslant 0$, on a $\|u_n\|_{\infty,[0,a]} = u_n(a)$ et puisque $\sum u_n(a)$ converge, il y a convergence normale (et donc uniforme) de la série de fonctions étudiée sur $[0, a]$ pour tout $a \in \mathbb{R}^+$.

Remarque En pratique la convergence uniforme d'une série de fonctions s'obtient le plus souvent :
- par convergence normale ;
- par $\|R_n\|_\infty \to 0$ en exploitant le critère spécial des séries alternées (s'il s'applique. . .)

11.3 Limites et continuité

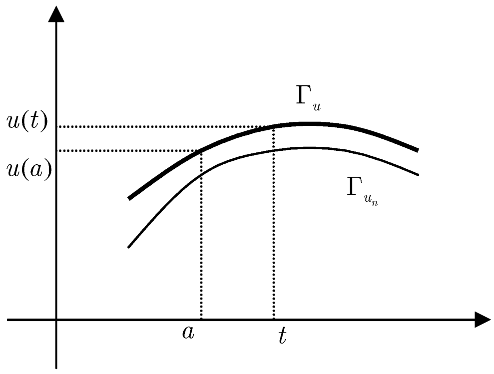
11.3.1 Continuité

Soit (u_n) une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$.

Théorème

> Si $u_n \xrightarrow{CVU} u$ et si chaque u_n est continue en $a \in I$ alors u est continue en a.

dém. :
Exploitons
$$|u(t) - u(a)| \leqslant |u(t) - u_n(t)| + |u_n(t) - u_n(a)| + |u_n(a) - u(a)|$$
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$n \geqslant N \Rightarrow \forall t \in I, |u_n(t) - u(t)| \leqslant \varepsilon$$
Fixons un tel $n \geqslant N$. La relation précédente donne
$$|u(t) - u(a)| \leqslant 2\varepsilon + |u_n(t) - u_n(a)|$$
La fonction u_n étant continue en a, il existe $\alpha > 0$ tel que
$$\forall t \in I, |t - a| \leqslant \alpha \Rightarrow |u_n(t) - u_n(a)| \leqslant \varepsilon$$
En vertu de la relation initiale, on a alors
$$\forall t \in I, |t - a| \leqslant \alpha \Rightarrow |u(t) - u(a)| \leqslant 3\varepsilon$$
Ainsi u est continue en a.



□

Corollaire

> La limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue.

Exemple Soit $u_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $u_n(t) = t^n$. La limite simple de (u_n) n'est pas continue alors que chaque u_n l'est : il n'y a pas convergence uniforme sur $[0,1]$

Corollaire

> Si $\sum u_n$ est une série de fonctions continues uniformément convergente alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue.

dém. :
$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow{CVU} S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et chaque S_n est continue donc S est continue.
□

Exemple Etudions sur $[0,1]$ la fonction

$$S : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^n}{2n+1}$$

Introduisons $u_n : t \in [0,1] \mapsto \dfrac{(-1)^n t^n}{2n+1}$.
Pour tout $t \in [0,1]$, la série numérique $\sum u_n(t)$ converge via CSSA.
Par suite la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$ et donc S est définie sur $[0,1]$.
De plus, par le CSSA,

$$|R_n(t)| \leqslant \frac{t^{n+1}}{2n+3} \leqslant \frac{1}{2n+3}$$

et donc $\|R_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{2n+3} \to 0$.
Ainsi $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$, or chaque u_n est continue donc S est continue sur $[0,1]$.

11.3.2 Continuité par convergence uniforme sur tout segment

Soit (u_n) une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$.

Définition

On dit que la suite de fonctions (u_n) converge uniformément sur tout segment de I vers $u : I \to \mathbb{K}$ lorsque

$$\forall [a,b] \subset I, u_n \xrightarrow[{[a,b]}]{CVU} u$$

Proposition

Si tel est le cas (u_n) converge simplement vers u sur I.

dém. :
Pour $t \in I$, il existe $[a,b] \subset I$ tel que $t \in [a,b]$ et $u_n \xrightarrow[{[a,b]}]{CVU} u$ entraîne $u_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u(t)$.
□

Exemple Si (u_n) converge uniformément sur I alors u_n converge uniformément sur tout segment de I.

(!)La réciproque est fausse : la convergence uniforme sur tout segment de I n'implique pas la convergence uniforme sur I.

Exemple Précédemment, pour $u_n(t) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+t}$, on a vu que $\sum u_n$ convergeait normalement sur $[0,a]$ pour tout $a > 0$ donc $\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment de $[0,+\infty[$.

Théorème

Si (u_n) converge uniformément vers u sur tout segment de I et si chaque u_n est continue alors u est continue.

dém. :
Soit $t_0 \in I$.
Si t_0 n'est pas extrémité de I, il existe $\alpha > 0$ tels que $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \subset I$.
Par convergence uniforme de (u_n) sur le segment $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, on peut affirmer que la fonction u est continue sur ce segment et en particulier la fonction u est continue en t_0.
Si t_0 est une extrémité de I : idem avec des segments $[t_0, t_0 + \alpha]$ ou $[t_0 - \alpha, t_0]$.
□

Corollaire

Si $\sum u_n$ est une série de fonctions continues convergeant uniformément sur tout segment de I alors sa somme est continue.

Exemple Continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$S : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(2n+1)!}$$

Introduisons $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $u_n(t) = \dfrac{t^n}{(2n+1)!}$.
Pour $t \in \mathbb{R}$.
$u_n(t) = \dfrac{1}{(2n+1)} \dfrac{1}{2n} \dfrac{t^n}{(2n-1)!} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ car par croissances comparées $\dfrac{t^n}{(2n-1)!} \to 0$.
donc $\sum u_n(t)$ est absolument convergente et donc convergente.
Ainsi $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et donc S est définie sur $\mathbb{R}$.
u_n n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$, il n'y a pas convergence normale sur $\mathbb{R}$.
Soit $a > 0$.
Sur $[-a, a]$, $|u_n(t)| \leqslant \dfrac{a^n}{(2n+1)!}$ avec égalité quand $t = a$.
Par suite

$$\|u_n\|_{\infty,[-a,a]} = \frac{a^n}{(2n+1)!} = u_n(a)$$

et donc $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[-a, a]$.
Puisque ceci vaut pour tout $a > 0$, on peut affirmer que $\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$, or chaque u_n est continue donc S est continue sur $\mathbb{R}$.

11.3.3 Limite

Soient (u_n) une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$ et a un point ou une extrémité éventuellement infinie de I.

Théorème

Si (u_n) converge uniformément sur I vers $u : I \to \mathbb{K}$ et si chaque u_n tend vers une limite finie ℓ_n en a alors la suite (ℓ_n) converge et

$$u(t) \xrightarrow[t \to a]{} \lim_{n \to +\infty} \ell_n$$

Autrement dit

$$\lim_{t \to a} \lim_{n \to +\infty} u_n(t) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{t \to a} u_n(t)$$

dém. :
Montrons que la suite (ℓ_n) est de Cauchy.
Soient $n, m \in \mathbb{N}$.

$$\ell_n - \ell_m = \lim_{t \to a} (u_n(t) - u_m(t))$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow \forall t \in I, |u_n(t) - u(t)| \leqslant \varepsilon$$

On a alors

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m, n \geqslant N \Rightarrow \forall t \in I, |u_m(t) - u_n(t)| \leqslant 2\varepsilon$$

A la limite quand $t \to a$

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m, n \geqslant N \Rightarrow |\ell_m - \ell_n| \leqslant 2\varepsilon$$

La suite (ℓ_n) est de Cauchy, elle est donc convergente. Posons ℓ sa limite.
Montrons $u(t) \xrightarrow[t \to a]{} \ell$. On a

$$|u(t) - \ell| \leqslant |u(t) - u_n(t)| + |u_n(t) - \ell_n| + |\ell_n - \ell| \leqslant \|u - u_n\|_\infty + |u_n(t) - \ell_n| + |\ell_n - \ell|$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow \forall t \in I, |u_n(t) - u(t)| \leqslant \varepsilon$$

Il existe aussi $N' \in \mathbb{N}$ tel que et

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N' \Rightarrow |\ell_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Pour $n = \max(N, N')$, on a

$$\forall t \in I, |u(t) - \ell| \leqslant 2\varepsilon + |u_n(t) - \ell_n|$$

Pour conclure, exploitons $u_n(t) \xrightarrow[t \to a]{} \ell_n$.
Cas $a \in \mathbb{R}$
Il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall t \in I, |t - a| \leqslant \alpha \Rightarrow |u_n(t) - \ell_n| \leqslant \varepsilon$$

puis

$$\forall t \in I, |t - a| \leqslant \alpha \Rightarrow |u(t) - \ell| \leqslant 3\varepsilon$$

Cas $a = +\infty$
Il existe A tel que

$$\forall t \in I, t \geqslant A \Rightarrow |u_n(t) - \ell_n| \leqslant \varepsilon$$

puis

$$\forall t \in I, t \geqslant A \Rightarrow |u(t) - \ell| \leqslant 3\varepsilon$$

Cas $a = -\infty$
Semblable.
□

Corollaire

Si $\sum u_n$ converge uniformément sur I et si chaque u_n tend vers une limite finie ℓ_n en a alors la série numérique $\sum \ell_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) \xrightarrow[t\to a]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$$

Autrement dit

$$\lim_{t\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{t\to a} u_n(t)$$

dém. :

$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$ converge uniformément vers $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $S_n \underset{a}{\to} \sum_{k=0}^{n} \lim_a u_k$ donc par le théorème de la double limite, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \lim_a u_k\right)$ converge et $S \underset{a}{\to} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \lim_a u_k$.

□

Exemple Etudions

$$S : t > 0 \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nt+1}$$

Définition :

Introduisons $u_n : t \in \mathbb{R}^{+\star} \mapsto \dfrac{(-1)^n}{nt+1}$.

Pour $t > 0$, $\sum u_n(t)$ converge en vertu du CSSA.

$\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+\star}$ donc S est définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

Continuité :

Par le critère spécial des séries alternées

$$|R_n(t)| \leqslant \frac{1}{(n+1)t+1}$$

Pour $a > 0$, sur $[a, +\infty[$,

$$|R_n(t)| \leqslant \frac{1}{(n+1)a+1}$$

donc $\|R_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)a+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$\sum u_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$ donc $\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}^{+\star}$. On en déduit que la fonction S est continue.

Limite de S en $+\infty$:

$\sum u_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$ et

$$\lim_{+\infty} u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par le théorème de la double limite, la série $\sum \lim\limits_{+\infty} u_n$ converge et

$$\lim_{+\infty} S = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{+\infty} u_n = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1$$

Equivalent de $S(t) - 1$ quand $t \to +\infty$.
On a

$$S(t) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nt+1}$$

donc

$$t(S(t) - 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n t}{nt+1}$$

Introduisons

$$v_n : t > 0 \mapsto \frac{(-1)^n t}{nt+1}$$

Le critère spécial des séries alternées s'applique à $\sum v_n(t)$ donc

$$|R_n(t)| \leqslant \frac{t}{(n+1)t+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

On en déduit $\|R_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ et donc $\sum v_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
Puisque

$$\lim_{+\infty} v_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

le théorème de la double limite, la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge et

$$\lim_{t\to+\infty} t(S(t) - 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$$

On en déduit

$$S(t) - 1 \underset{t\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln 2}{t}$$

Remarque On peut encore par une méthode analogue approfondir le développement asymptotique précédent.

11.3.4 Etude de la fonction zêta

Pour $s \in]1, +\infty[$, posons

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

Définition :
Posons $u_n : s \mapsto 1/n^s$ définie sur $]1,+\infty[$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.
La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]1,+\infty[$ et la fonction ζ est sa somme.
Monotonie :
Les fonctions u_n sont décroissantes donc par sommation ζ est décroissante.
Convexité :
Les fonctions u_n sont convexes donc par sommation ζ est convexe.
Continuité :
$\|u_n\|_{\infty,]1,+\infty[} = \dfrac{1}{n}$, $\sum u_n$ ne converge par normalement sur $]1,+\infty[$
Soit $a > 1$. $\|u_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = \dfrac{1}{n^a}$. $\sum u_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$.
$\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment de $]1,+\infty[$ or chaque u_n est continue donc ζ est continue sur $]1,+\infty[$.
Limite en $+\infty$:
Par convergence uniforme et théorème de la double limite

$$\lim_{s\to+\infty} \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{s\to+\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1$$

Limite en 1^+ :
Par monotonie, on peut affirmer que la fonction ζ admet une limite en 1^+.
Puisque

$$\zeta(s) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}$$

à la limite

$$\lim_{s\to1^+} \zeta(s) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Or ceci vaut pour tout n et on sait $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc

$$\lim_{s\to1^+} \zeta(s) = +\infty$$

Equivalent en 1^+ :
La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^s}$ est décroissante donc

$$\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \leqslant \frac{1}{n^s} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^s}$$

On en déduit

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \leqslant \zeta(s) \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^s}$$

i.e.

$$\frac{1}{s-1} \leqslant \zeta(s) \leqslant 1 + \frac{1}{s-1}$$

Par suite

$$\zeta(s) \underset{s\to1}{\sim} \frac{1}{s-1}$$

Equivalent de $\zeta(s)-1$ quand $s\to+\infty$:
On a

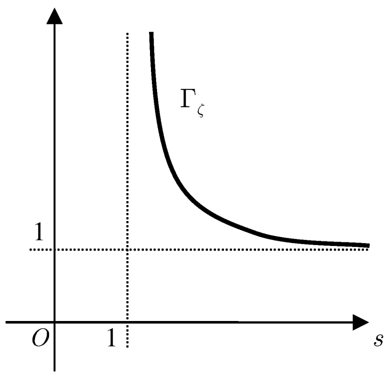
$$\zeta(s)-1=\frac{1}{2^s}+\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$$

avec

$$0\leqslant\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n^s}\leqslant\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^s}=\frac{1}{(s-1)}\frac{1}{2^s}$$

donc

$$\zeta(s)-1=\frac{1}{2^s}+o\left(\frac{1}{2^s}\right)\sim\frac{1}{2^s}$$



11.4 Intégration et dérivation

11.4.1 Intégration sur un segment

Théorème

Soit (u_n) une suite de fonctions de $[a,b]$ vers $\mathbb{K}$.
Si (u_n) converge uniformément sur $[a,b]$ et si chaque u_n est continue alors la fonction $u=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ est continue et la suite $\left(\displaystyle\int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t\right)$ converge vers $\displaystyle\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t$.
Autrement dit

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b\lim_{n\to+\infty}u(t)\,\mathrm{d}t$$

dém. :
u est continue car limite uniforme d'une suite de fonctions continues, on peut donc introduire $\displaystyle\int_a^b u$.
Puisque

$$\left|\int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_a^b|u_n(t)-u(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant(b-a)\|u_n-u\|_\infty\to0$$

on a

$$\int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t$$

□

Corollaire

Soit $\sum u_n$ est une série de fonctions de $[a,b]$ vers $\mathbb{K}$
Si
1) chaque u_n est continue ;
2) $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a,b]$;
alors sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue et la série numérique $\sum \int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge vers $\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t$.
Autrement dit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t$$

dém. :
$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow{CVU} S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ donc $\int_a^b S_n \to \int_a^b S$ i.e. $\sum_{k=0}^{n} \int_a^b u_k \to \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
□

Exemple Considérons $S : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+t}\right)$ sur $[0,1]$ et calculons $\int_0^1 S(t)\,\mathrm{d}t$

Introduisons $u_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $u_n(t) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+t}$.
On a

$$\|u_n\|_\infty = \frac{1}{n(n+1)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,1]$ donc uniformément et :

$$\int_0^1 S(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+t}\right)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^1 \frac{1}{n} - \frac{1}{n+t}\,\mathrm{d}t\right)$$

Or

$$\int_0^1 \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n}$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \to \gamma$$

donc

$$\int_0^1 S(t)\,\mathrm{d}t = \gamma$$

(!)Ces résultats ne valent que pour une intégrations sur un segment.

Exemple Considérons $u_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $u_n(t) = \dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-t/n}$.
$\|u_n\|_\infty = \dfrac{1}{n} \to 0$ donc $u_n \xrightarrow[{[0,+\infty[}]{CVU} \tilde{0}$ alors que $\displaystyle\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$ ne tend pas vers 0 !

11.4.2 Dérivation

Lemme

Soient (φ_n) une suite de fonctions continues de I vers $\mathbb{K}$ et $a \in I$.
On note Φ_n la primitive de φ_n qui s'annule en a.
Si (φ_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction φ, alors la suite de fonctions (Φ_n) converge uniformément sur tout segment de I vers la primitive Φ de φ qui s'annule en a.

dém. :
$\Phi_n(x) = \displaystyle\int_a^x \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t$ et puisque φ est continue, $\Phi(x) = \displaystyle\int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.
Soit $[\alpha,\beta]$ un segment de I. Quitte à agrandir ce segment, on peut supposer que $a \in [\alpha,\beta]$.
Pour tout $x \in [\alpha,\beta]$
Cas $x \geqslant a$

$$|\Phi_n(x) - \Phi(x)| \leqslant \int_a^x |\varphi_n(t) - \varphi(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant (x-a)\,\|\varphi_n - \varphi\|_{\infty,[\alpha,\beta]} \leqslant (\beta-\alpha)\,\|\varphi_n - \varphi\|_{\infty,[\alpha,\beta]}$$

Cas $x \leqslant a$
Idem.
Ainsi

$$\|\Phi_n - \Phi\|_{\infty,[\alpha,\beta]} \leqslant (\beta-\alpha)\,\|\varphi_n - \varphi\|_{\infty,[\alpha,\beta]} \to 0$$

□

Théorème

Soit (u_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I vers $\mathbb{K}$
Si (u_n) converge simplement sur I et si (u_n') converge uniformément sur tout segment de I ;
alors la fonction $u = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $u' = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n'$.
Ainsi

$$\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right)' = \lim_{n\to+\infty} u_n'$$

De plus, la convergence de la suite (u_n) est uniforme sur tout segment de I.

dém. :
Posons $\varphi_n = u_n'$ et $\varphi = \lim u_n' = \lim \varphi_n$.
Soient $a \in I$ et Φ_n la primitive de φ_n s'annulant en a.
Par le lemme, (Φ_n) converge uniformément sur tout segment de I vers la primitive Φ de φ qui s'annule en a. En particulier Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\Phi' = \varphi$
Cependant

$$\Phi_n(x) = \int_a^x u_n'(t)\,\mathrm{d}t = u_n(x) - u_n(a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u(x) - u(a)$$

pour tout $x \in I$.
Par unicité de limite, $\Phi(x) = u(x) - u(a)$ puis $u(x) = \Phi(x) + u(a)$
Par suite u est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $u' = \varphi = \lim u_n'$.
De plus, soit $[\alpha, \beta] \subset I$.
On a

$$u_n(x) - u(x) = \Phi_n(x) - \Phi(x) + u_n(a) - u(a)$$

donc

$$\|u_n - u\|_{\infty,[\alpha,\beta]} \leqslant \|\Phi_n - \Phi\|_{\infty,[\alpha,\beta]} + |u_n(a) - u(a)|$$

or $\Phi_n \xrightarrow[{[\alpha,\beta]}]{CVU} \Phi$ et $u_n(a) \to u(a)$ donc

$$\|u_n - u\|_{\infty,[\alpha,\beta]} \to 0$$

Ainsi la convergence de (u_n) est uniforme sur $[\alpha, \beta]$.
□

Corollaire

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I vers $\mathbb{K}$.
Si $\sum u_n$ converge simplement sur I et si $\sum u_n'$ converge uniformément sur tout segment de I
alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'$$

(!)L'hypothèse de travail est $\mathcal{C}^1$ et non seulement dérivable !

Exemple Monotonie sur $]0, +\infty[$ de la fonction

$$S : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+t}$$

Introduisons les fonctions $u_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définies par $u_n(t) = \dfrac{(-1)^n}{n+t}$.
Soit $t > 0$. la série numérique $\sum u_n(t)$ converge en vertu du CSSA.
La série de fonctions $\sum u_n$ converge alors simplement sur $]0, +\infty[$ et sa somme S est donc bien définie sur $]0, +\infty[$.
u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et $u_n'(t) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+t)^2}$.
Soit $t > 0$. La série numérique $\sum u_n'(t)$ converge en vertu du CCSA
On a

$$|R_n(t)| \leqslant \frac{1}{(n+1+t)^2} \leqslant \frac{1}{(n+1)^2}$$

donc

$$\|R_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{(n+1)^2} \to 0$$

Ainsi la série de fonctions $\sum u_n'$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$.
On peut alors affirmer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$S'(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(t+n)^2}$$

Par le CSSA, $S'(t)$ est du signe de son premier terme $\dfrac{(-1)^{0+1}}{t^2}\leqslant 0$.
La fonction S est donc décroissante.
Pour compléter le tableau de variation de S, exploitons le CSSA pour encadrer S par deux sommes partielles consécutives :

$$\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\leqslant S(t)\leqslant\frac{1}{t}$$

On peut alors affirmer $S\xrightarrow[+\infty]{}0$ et $S\xrightarrow[0^+]{}+\infty$.

11.4.3 Dérivées d'ordre supérieur

Théorème

Soit (u_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ de I vers $\mathbb{K}$.
Si les suites (u_n),..., $(u_n^{(p-1)})$ convergent simplement sur I et si la suite de fonctions $(u_n^{(p)})$ converge uniformément sur tout segment de I alors la fonction $u=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ est de classe $\mathcal{C}^p$ et pour tout $k\in\{1,\dots,p\}$,

$$u^{(k)}=\lim_{n\to+\infty}\left(u_n^{(k)}\right)$$

dém. :
Par récurrence sur $p\in\mathbb{N}^\star$.
Pour $p=1$: ok
Supposons la propriété vraie au rang p et étudions celle-ci au rang $p+1$.
Puisque $(u_n^{(p)})$ converge simplement et que $(u_n^{(p+1)})$ converge uniformément sur tout segment, on peut affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n^{(p)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\left(\lim_{n\to+\infty}u_n^{(p)}\right)'=\lim_{n\to+\infty}\left(u_n^{(p+1)}\right)$$

De plus $(u_n^{(p)})$ converge uniformément sur tout segment.
Par l'hypothèse de récurrence, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ de classe $\mathcal{C}^p$ et pour tout $k\in\{1,\dots,p\}$,

$$\left(\lim_{n\to+\infty}u_n\right)^{(k)}=\lim_{n\to+\infty}\left(u_n^{(k)}\right)$$

En particulier

$$\left(\lim_{n\to+\infty}u_n\right)^{(p)}=\lim_{n\to+\infty}\left(u_n^{(p)}\right)$$

est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et donc u est de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ avec

$$\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right)^{(p+1)} = \lim_{n\to+\infty}\left(u_n^{(p)}\right)' = \lim_{n\to+\infty}\left(u_n^{(p+1)}\right)$$

Récurrence établie.
□

Corollaire

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ de I vers $\mathbb{K}$.
Si les séries $\sum u_n,\ldots, \sum u_n^{(p-1)}$ convergent simplement et si la série $\sum u_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I alors la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^p$ et, pour tout $k\in\{1,\ldots,p\}$,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}$$

Exemple Montrons que la fonction $\zeta : s\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$.
Introduisons $u_n :]1,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par $u_n(s)=1/n^s$.
La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]1,+\infty[$ et ζ est sa somme.
Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et $u_n^{(k)}(s) = \dfrac{(-\ln n)^k}{n^s}$.
Sur $[a,+\infty[\subset]1,+\infty[$,
$\left|u_n^{(k)}(s)\right| \leqslant \dfrac{(\ln n)^k}{n^a}$ donc

$$\left\|u_n^{(k)}\right\|_{\infty,[a,+\infty[} = \frac{(\ln n)^k}{n^a}$$

Or $\sum \dfrac{(\ln n)^k}{n^a}$ est convergente (série de Bertrand) donc $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a,+\infty[$ et finalement converge uniformément sur tout segment de $]1,+\infty[$.
On peut conclure que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et

$$\zeta^{(p)}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-\ln n)^p}{n^s}$$

11.5 Intégration sur un intervalle quelconque

11.5.1 Théorème de convergence dominée

Rappel Si u_n continue et $u_n \xrightarrow[{[a,b]}]{CVU} u$ alors $\int_a^b u_n \to \int_a^b u$.

Théorème

Soit (u_n) une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$
Si
1) la suite (u_n) converge simplement vers u ;
2) les fonctions u_n et la fonction u est continue par morceaux ;
3) il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant \varphi \text{ [hypothèse de domination]}$$

alors les fonctions u_n et u sont intégrables sur I et

$$\int_I u_n \to \int_I u$$

Exemple Etude de

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + 2\sin(t/n)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Posons $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$u_n(t) = \frac{1 + 2\sin(t/n)}{1+t^2}$$

On a $u_n \xrightarrow{CVS} u$ avec $u(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$.
Les fonctions u_n et la fonction u sont continues par morceaux.
De plus

$$|u_n(t)| \leqslant \frac{3}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $\mathbb{R}$.
Par convergence dominée, les fonctions u_n et la fonction u sont intégrables et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + 2\sin(t/n)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \pi$$

Exemple Etude de

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$$

Posons $u_n : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ définie par $u_n(t) = \sin^n(t)$ sur $[0, \pi/2]$.
$u_n \xrightarrow{CVS} u$ avec

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = \pi/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les fonctions u_n et la fonction u sont continues par morceaux.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| \leqslant 1 = \varphi$$

φ est intégrable sur $[0, \pi/2]$ car définie et continue sur un segment.

Par convergence dominée

$$\int_0^{\pi/2} u_n \to \int_0^{\pi/2} u$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Remarque Ici la suite de fonctions (u_n) ne converge par uniformément vers u mais on est parvenu à permuter limite et intégrale.

Exemple Etude de

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^n}\,\mathrm{d}t$$

Posons $u_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $u_n(t) = \mathrm{e}^{-t^n}$.
Pour $t \in [0,1[$, $u_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
Pour $t = 1$, $u_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/\mathrm{e}$.
Pour $t > 1$, $u_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Ainsi $u_n \xrightarrow{CVS} u$ avec

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1[\\ 1/\mathrm{e} & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Les fonctions u_n et la fonction u sont continues par morceaux.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $|u_n| \leqslant \varphi$ avec

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1] \\ \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Par convergence dominée, les fonctions u_n et la fonction u sont intégrables et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^n}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} u(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 1\,\mathrm{d}t = 1$$

Exemple Etude de $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t\,\mathrm{d}t$
Problème : $\displaystyle\int_0^n$ et non $\displaystyle\int_I$.
Solution : $\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t$ avec

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ici, introduisons $u_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$u_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \ln t & \text{si } t \in]0,n[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $t \in]0,+\infty[$.
Quand $n \to +\infty$, pour n assez grand $t < n$ et

$$u_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{e}^{-t} \ln t$$

Ainsi $u_n \xrightarrow{CVS} u$ avec $u : t \mapsto \mathrm{e}^{-t} \ln t$
Les fonctions u_n et la fonction u sont continues par morceaux.
Sachant $\ln(1+u) \leqslant u$ on a pour $t \in]0,n[$

$$|u_n(t)| = \exp\left(n \ln(1 - t/n)\right) |\ln t| \leqslant \exp(-t) |\ln t| = \varphi(t)$$

La fonction φ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ et intégrable car

$$\sqrt{t}\varphi(t) \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0 \text{ et } t^2\varphi(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

Par convergence dominée, les fonctions u_n et la fonction u sont intégrables et

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t \,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ln t \,\mathrm{d}t$$

Remarque En calculant $\displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t \,\mathrm{d}t$, on parvient à montrer alors

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ln t \,\mathrm{d}t = -\gamma$$

11.5.2 Autres techniques

Convergence uniforme sur un segment $[a,b]$ et convergence dominée ne suffisent pas toujours pour déterminer

$$\lim_{n \to +\infty} \int_I u_n$$

On peut aussi :
- procéder par comparaison ;
- réexprimer l'intégrale (par changement de variable, intégration par parties, astuce,. . .) ;
- raisonner par les ε.

Exemple Montrons que pour tout $f \in \mathcal{C}^1\left([a,b], \mathbb{K}\right)$,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int} \,\mathrm{d}t \to 0 \text{ ou } \int_a^b f(t)\sin(nt) \,\mathrm{d}t \to 0\,?$$

Par intégration par parties,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{in}\mathrm{e}^{int}f(t)\right]_a^b - \frac{1}{in}\int_a^b f'(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t$$

Par suite

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n}\left(|f(a)|+|f(b)|+\int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right) \to 0$$

Ainsi

$$\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t \to 0$$

11.5.3 Intégration terme à terme

Rappel Si u_n continue et $\sum u_n$ CU sur $[a,b]$ alors

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b u_n$$

Théorème

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions de I vers $\mathbb{K}$.
Si
1) $\sum u_n$ converge simplement et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue par morceaux ;
2) les fonctions u_n sont continues par morceaux et intégrables sur I ;
3) la série numérique $\sum \int_I |u_n|$ converge
Alors la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est intégrable sur I, la série $\sum \int_I u_n$ converge abolument et

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I u_n$$

Exemple Montrons

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

On a

$$\frac{1}{1-t} = -\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \text{ sur } [0,1[$$

donc

$$\frac{\ln t}{t-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-\ln t)t^n \text{ sur }]0,1[$$

On a alors
$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t = \int_{]0,1[} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t$$
avec $u_n :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $u_n(t) = (-\ln t)t^n$.
Par les calculs qui précédent, la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement et sa somme $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t-1}$ est continue par morceaux.
Chaque fonction u_n est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1[$ car
$$\sqrt{t}u_n(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \text{ et } u_n(t) \xrightarrow[t\to 1]{} 0$$
Enfin, par intégration par parties
$$\int_0^1 |u_n(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (-\ln(t))t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)^2}$$
La série numérique $\sum \int_0^1 |u_n|$ converge donc par le théorème d'intégration terme à terme de Fubini
$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

11.5.4 Autre technique

Pour résoudre des situations « délicates », on peut aussi intégrer terme à terme en revenant aux sommes partielles.
Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Par convergence dominée ou comparaison, supposons avoir montré
$$\int_I S_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I S(t)\,\mathrm{d}t$$
En remarquant
$$\int_I S_n = \int_I \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \int_I u_n$$
on affirme
$$\sum_{k=0}^{n} \int_I u_k \to \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$
et donc
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Exemple Montrons
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

On peut écrire

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} \text{ sur } [0,1[$$

Par suite

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_{[0,1[} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

avec $u_n(t) = (-1)^n t^{2n}$ définie sur $[0,1[$
Ici $\sum \int_{[0,1[} |u_n| = \sum \frac{1}{2n+1}$ diverge et on ne peut pas appliquer le théorème d'intégration terme à terme de Fubini. Transitons alors par les sommes partielles
On pose

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k}$$

On a $S_n \xrightarrow{CVS} S$ avec $S(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$.
Les fonctions S_n et S sont continues par morceaux.

$$|S_n(t)| = \frac{\left|1-(-1)^{n+1}t^{2n+2}\right|}{1+t^2} \leqslant \frac{2}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable.
Par convergence dominée

$$\int_0^1 S_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_0^1 S(t)\,\mathrm{d}t$$

Or

$$\int_0^1 S_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k t^{2k}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

avec en substance la convergence de la série introduite.

Chapitre 12

Espaces normés

Enjeu : on désire étendre l'analyse fonctionnelle aux objets vectoriel, cela nécessite de savoir mesurer la longueur séparant deux vecteurs.
$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

12.1 Norme

12.1.1 Définition

Définition

On appelle norme sur E toute application $N : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :
1) $\forall x \in E$, $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$ [séparation].
2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, $N(\lambda.x) = |\lambda|\, N(x)$ [homogénéité]
3) $\forall x, y \in E$, $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$ [inégalité triangulaire].
On dit alors que le couple (E, N) est un espace normé.

Remarque Les normes sont usuellement notées $N(.)$, $\| \,.\, \|$ ou $| \,.\, |$, elles servent à définir la longueur d'un vecteur.

Exemple La valeur absolue sur $\mathbb{R}$ et le module sur $\mathbb{C}$ sont des normes.

Exemple Dans un espace euclidien la norme euclidienne associée au produit scalaire est une norme.

Exemple Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace E normé par $\| \,.\, \|$ alors la restriction $\| \,.\, \|_{\restriction F} : F \to \mathbb{R}^+$ définit une norme sur F encore notée $\| \,.\, \|$.

Proposition

Si $\| \,.\, \|$ est une norme sur E alors :
a) $\forall x \in E$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$,
b) $\forall x \in E$, $\|-x\| = \|x\|$,
c) $\forall x, y \in E$, $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\|$ [inégalité triangulaire renversée].

dém. :
a) ($\Rightarrow$) par définition et ($\Leftarrow$) par homogénéité avec $\lambda = 0$.
b) par homogénéité avec $\lambda = -1$.
c) par l'inégalité triangulaire $\|x\| = \|x - y + y\| \leqslant \|x - y\| + \|y\|$ donc $\|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|$ et par un raisonnement symétrique $\|y\| - \|x\| \leqslant \|x - y\|$.
□

Définition

Un vecteur x d'un espace E normé par $\| \, . \, \|$ est dit unitaire si $\|x\| = 1$.

Exemple Si $x \neq 0_E$ alors $u = \dfrac{1}{\|x\|} x$ est un vecteur unitaire colinéaire à x.

12.1.2 Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$

Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose

$$\|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_n| = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \; \|x\|_2 := \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2} = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{1/2} \quad \text{et}$$

$$\|x\|_\infty := \max \{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$$

Théorème

$\| \, . \, \|_1$ définit une norme sur $\mathbb{K}^n$.

dém. :
$\| \, . \, \|_1 : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+$ est bien définie.
Si $\|x\|_1 = 0$ alors $\sum_{k=1}^{n} |x_k| = 0$.
Par somme nulle de quantités positives $|x_1| = \ldots = |x_n| = 0$ et donc $x = 0_{\mathbb{K}^n}$.

$$\|\lambda x\| = \sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k| = \sum_{k=1}^{n} |\lambda| \, |x_k| = |\lambda| \sum_{k=1}^{n} |x_k| \, |\lambda x_n| = |\lambda| \, \|x\|_1$$

Enfin,

$$\|x + y\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|) = \sum_{k=1}^{n} |x_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

Finalement $\| \, . \, \|_1$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.
□

Théorème

$\| \, . \, \|_2$ définit une norme sur $\mathbb{K}^n$.

dém. :
$\| \, . \, \|_2 : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+$ est bien définie.

Si $\|x\|_2 = 0$ alors $\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 = 0$.
Par somme nulle de quantités positives $|x_1|^2 = \ldots = |x_n|^2 = 0$ et donc $x = 0_{\mathbb{K}^n}$.

$$\|\lambda x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k|^2} = \sqrt{|\lambda|^2 \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} = |\lambda| \, \|x\|_2$$

$$\|x+y\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^2$$

Or $|x_k + y_k| \leqslant |x_k| + |y_k|$ donc

$$\|x+y\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 + 2\sum_{k=1}^{n} |x_k| \, |y_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k|^2$$

Rappelons l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\forall a_k, b_k \in \mathbb{R}, \left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}$$

On en déduit

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k| \, |y_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2}$$

donc

$$\|x+y\|_2^2 \leqslant (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2$$

puis

$$\|x+y\|_2 \leqslant \|x\|_2 + \|y\|_2$$

Finalement $\|\,.\,\|_2$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.
□

Théorème

$\|\,.\,\|_\infty$ définit une norme sur $\mathbb{K}^n$.

dém. :
$\|\,.\,\|_\infty : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+$ est bien définie
Si $\|x\|_\infty = 0$ alors pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, $0 \leqslant |x_k| \leqslant \|x\|_\infty$ donc $|x_k| = 0$ et donc $x = 0_{\mathbb{K}^n}$.

$$\|\lambda x\| = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\lambda x_k| = |\lambda| \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k| = |\lambda| \, \|x\|_\infty$$

$$\|x+y\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k + y_k| \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} (|x_k| + |y_k|) \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k| + \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |y_k| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

Finalement $\|\,.\,\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.
□

Remarque Plus généralement, pour $p \in [1, +\infty[$, on peut montrer que

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}$$

définit une norme sur $\mathbb{K}^n$. De plus $\|x\|_\infty = \lim_{p \to +\infty} \|x\|_p$.

12.1.3 Distance associée

Soit $\| \, . \, \|$ une norme sur E.

Définition

On appelle distance associée à la norme $\| \, . \, \|$ sur E l'application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$d(x,y) := \|y - x\|$$

Exemple Sur $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $d(x,y) = |y - x|$ définit la distance associée à $| \, . \, |$.

Proposition

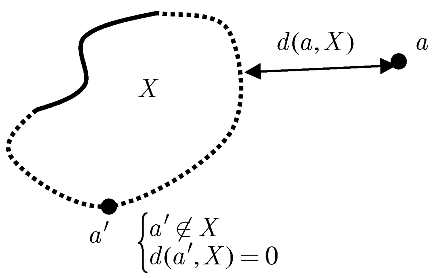
a) $\forall x, y \in E, d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ [séparation],
b) $\forall x, y \in E, d(x,y) = d(y,x)$ [symétrie],
c) $\forall x, y, z \in E, d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ [inégalité triangulaire],
d) $\forall x, y, z \in E, d(x+z, y+z) = d(x,y)$ [invariance par translation].

dém. :
a) $\|y - x\| = 0 \Leftrightarrow y - x = 0_E$.
b) $\|y - x\| = \|x - y\|$.
c) $\|z - x\| = \|(z - y) + (y - x)\| \leqslant \|z - y\| + \|y - x\|$.
d) $\|(y + z) - (x + z)\| = \|y - x\|$.
□

Définition

On appelle distance de $a \in E$ à une partie non vide X de E le réel

$$d(a,X) = \inf \{d(a,x)/x \in X\}$$



Exemple $a \in X \Rightarrow d(a,X) = 0$, la réciproque n'est pas vraie.
Lorsque $d(a,X) = 0$, on dit que a est adhérent à X.

12.1.4 Boules

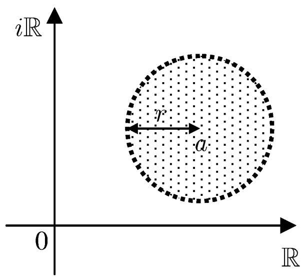
Soit $\| \, . \, \|$ une norme sur E.

Définition

Soient $a \in E$ et $r > 0$. On définit :
$B(a, r) := \{x \in E / \|x - a\| < r\}$ boule ouverte de centre a et de rayon r.
$B_f(a, r) := \{x \in E / \|x - a\| \leqslant r\}$ boule fermée de centre a et de rayon r.
$S(a, r) := \{x \in E / \|x - a\| = r\}$ sphère de centre a et de rayon r.

Exemple Dans $(\mathbb{R}, |\,.\,|)$, $B(a, r) =]a - r, a + r[$, $B_f(a, r) = [a - r, a + r]$.

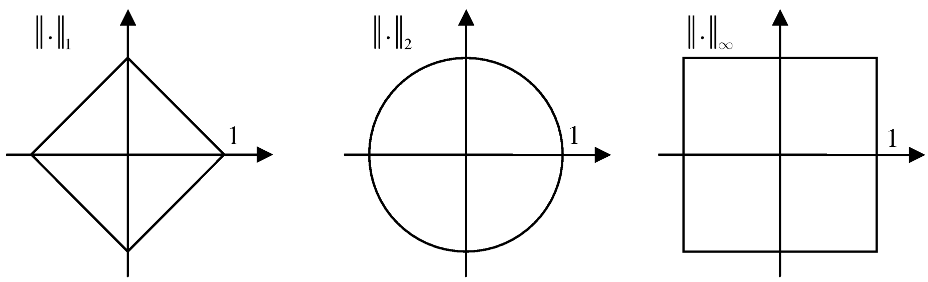
Exemple Dans $(\mathbb{C}, |\,.\,|)$, $B(a, r) = D(a, r) := \{z \in \mathbb{C} / |z - a| < r\}$ est le disque ouvert de centre a et de rayon r.



Définition

Les boules de centre 0_E et de rayon 1, sont appelées boules unités.

Exemple Boules unités fermées sur $E = \mathbb{R}^2$



Proposition

$B(a, r) = a + rB(0_E, 1)$ et $\overline{B}(a, r) = a + r\overline{B}(0_E, 1)$.
Ainsi les boules générales se déduisent des boules des boules unités par homothéties et translations.

dém. :
$a + rB(0_E, 1) = \{a + ru / \|u\| < 1\}$.
Si $x \in a + rB(0_E, 1)$ alors $\|x - a\| = \|ru\| = r\|u\| < r$ donc $x \in B(a, r)$.
Si $x \in B(a, r)$ alors pour $u = \dfrac{1}{r}(x - a)$, on a $x = a + ru$ avec $\|u\| < 1$.
□

Proposition

Les boules sont des parties convexes.

dém. :
Etudions $B(a, r)$.
Soient $x, y \in B(a, r)$. $[x, y] = \{(1-\lambda)x + \lambda y / \lambda \in [0,1]\}$.
Soit $z \in [x, y]$. On peut écrire $z = (1-\lambda)x + \lambda y$ avec $\lambda \in [0,1]$.
On a alors $\|z-a\| \leqslant \lambda \|x-a\| + (1-\lambda) \|y-a\| < \lambda r + (1-\lambda) r = r$ l'inégalité stricte étant maintenue car l'un au moins des deux facteurs λ ou $1-\lambda$ est strictement positif.
□

12.1.5 Partie bornée

Soit $\| \, . \, \|$ une norme sur E.

Définition

Une partie A de E est dite bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\forall x \in A, \|x\| \leqslant M$$

Exemple Les boules sont bornées. En effet

$$\forall x \in B_f(a, r),\ \|x\| \leqslant \|a\| + \|x-a\| \leqslant \|a\| + r = M$$

12.1.6 Fonction bornée

Soient X un ensemble non vide et $\| \, . \, \|$ une norme sur E.

Définition

On dit qu'une fonction $f : X \to E$ est bornée lorsque son image l'est i.e.

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in X, \|f(x)\| \leqslant M$$

Exemple Pour $X = \mathbb{N}$, on peut parler de suites bornées d'éléments de E :

$$(u_n) \in E^{\mathbb{N}} \text{ est bornée si, et seulement si, } \exists M \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| \leqslant M$$

Théorème

Si X est un ensemble non vide alors l'ensemble $\mathcal{B}(X, E)$ des fonctions bornées de X vers E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et celui-ci peut être normé par

$$\|f\|_\infty := \sup \{\|f(x)\| / x \in X\}$$

dém. :
$\mathcal{B}(X, E) \subset \mathcal{F}(X, E)$ et $\mathcal{F}(X, E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

$\tilde{0} \in \mathcal{B}(X,E)$.
Soient $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$ et $f,g \in \mathcal{B}(X,E)$.
Il existe $M,M' \in \mathbb{R}^+$ tels que

$$\forall x \in X, \|f(x)\| \leqslant M \text{ et } \|g(x)\| \leqslant M'$$

On a alors

$$\forall x \in X, \|\lambda f(x) + \mu g(x)\| \leqslant |\lambda|\, M + |\mu|\, M'$$

donc $\lambda f + \mu g \in \mathcal{B}(X,E)$.
$\mathcal{B}(X,E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(X,E)$, c'est donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Pour $f \in \mathcal{B}(X,E)$, l'ensemble $A = \{\|f(x)\| / x \in X\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, on peut donc introduire $\|f\|_\infty = \sup A$ et puisque $A \subset \mathbb{R}^+$, on a $\|f\|_\infty \in \mathbb{R}^+$.
L'application $\|\,.\,\|_\infty : \mathcal{B}(X,E) \to \mathbb{R}^+$ est donc bien définie.
Si $\|f\|_\infty = 0$ alors $\sup\{\|f(x)\| / x \in X\} = 0$ donc pour tout $x \in X$, $\|f(x)\| = 0$ puis $f = 0$.

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup\{\|\lambda f(x)\| / x \in X\} = \sup\{|\lambda|\, \|f(x)\| / x \in X\} = \sup|\lambda|\,\{\|f(x)\| / x \in X\} = |\lambda|\, \|f\|_\infty$$

car $|\lambda| \geqslant 0$.
Pour $x \in X$,

$$\|f(x) + g(x)\| \leqslant \|f(x)\| + \|g(x)\| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

donc

$$\|f + g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

□

Exemple $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ est $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé par

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| / t \in \mathbb{R}\} = \sup_{t\in\mathbb{R}}\{|f(t)|\}$$

12.1.7 Norme sur une algèbre

Soit $(E,+,\times,.)$ une $\mathbb{K}$-algèbre.

Définition

> On appelle norme d'algèbre sur E toute application $\|\,.\,\| : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :
> 1) $\|\,.\,\|$ est une norme sur E ;
> 2) $\forall x,y \in E, \|xy\| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ [sous-multiplicativité]
> On dit alors que le couple $(E, \|\,.\,\|)$ est une algèbre normée.

Exemple La valeur absolue est une norme d'algèbre sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exemple $\|\,.\,\|_\infty$ est une norme d'algèbre sur $\mathbb{K}^n$.

Théorème

> Si X est un ensemble non vide alors $\mathcal{B}(X,\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre et on y définit une norme d'algèbre par
> $$\|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| / t \in \mathbb{R}\} = \sup_{t\in\mathbb{R}}\{|f(t)|\}$$

dém. :
On sait déjà que $\mathcal{B}(X,\mathbb{K})$ est un espace vectoriel normal par $\|\,.\,\|_\infty$.
$\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
$\mathcal{B}(X,\mathbb{K}) \subset \mathcal{F}(X,\mathbb{K})$, $\tilde{1} \in \mathcal{B}(X,\mathbb{K})$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}^2$ et $f, g \in \mathcal{B}(X,\mathbb{K})$.
On a déjà $\lambda f + \mu g \in \mathcal{B}(X,K)$ et aussi $fg \in \mathcal{B}(X,\mathbb{K})$ car

$$\forall x \in X, |(fg)(x)| = |f(x)|\,|g(x)| \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_\infty$$

et de plus $\|fg\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.
□

12.2 Espaces normés usuels

12.2.1 Normes sur un espace de dimension finie

Théorème

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie peut être muni d'une norme.

dém. :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.
Si $n = 0$ alors $E = \{0_E\}$ est muni de la norme définie par $N(0_E) = 0$.
Si $n \in \mathbb{N}^\star$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Considérons l'isomorphisme $\varphi : E \to \mathbb{K}^n$ qui envoie x sur $(x_1, \dots, x_n)$ le n-uplet de ses composantes dans $\mathcal{B}$.
Considérons alors $\|\,.\,\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$ et posons, pour tout $x \in E$, $N(x) = \|\varphi(x)\|$.
On vérifie aisément que N définit une norme sur E.
□

Définition

En choisissant sur $\mathbb{K}^n$ $\|\,.\,\| = \|\,.\,\|_1$, $\|\,.\,\|_2$, ou $\|\,.\,\|_\infty$, la norme N ci-dessus est notée $\|\,.\,\|_{1,\mathcal{B}}$, $\|\,.\,\|_{2,\mathcal{B}}$ ou $\|\,.\,\|_{\infty,\mathcal{B}}$.

Exemple Soient $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{B} = (E_{i,j})$ sa base canonique.
Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$$\|A\|_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|,\ \|A\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|^2\right)^{1/2} \text{ et } \|A\|_\infty = \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} |a_{i,j}|$$

Exemple En particulier $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On a

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|AB\|_\infty \leqslant n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$$

donc, en posant $\|A\| = n\,\|A\|_\infty$, on définit une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

12.2.2 Normes sur des espaces de suites

Définition

On note $\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K})$ l'ensemble des suites $u = (u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ sommable i.e. telle que $\sum |u_n|$ converge.

Théorème

$\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé par

$$\|u\|_1 := \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

dém. :
$\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K}) \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
$(0)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{K})$.
Pour $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $u, v \in \ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K})$,

$$|(\lambda u + \mu v)_n| \leqslant |\lambda| |u_n| + |\mu| |v_n|$$

Par comparaison de séries à termes positifs

$$\lambda u + \mu v \in \ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K})$$

$\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, c'est donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
L'application $\|\,.\,\|_1 : \ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+$ est bien définie.
Si $\|u\|_1 = 0$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = 0$ et par suite $u = 0$.

$$\|\lambda u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda u_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda| |u_n| = |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = |\lambda| \|u\|_1$$

$$\|u+v\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n + v_n| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} (|u_n| + |v_n|) = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| + \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n| = \|u\|_1 + \|v\|_1$$

□

Définition

On note $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ l'ensemble des suites $u = (u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de carré sommable i.e. telle que $\sum |u_n|^2$ converge.

Théorème

$\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé par

$$\|u\|_2 := \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2\right)^{1/2}$$

dém. :
$\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K}) \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
$0 \in \ell^2(\mathbb{K})$.
Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$, $\lambda u \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$.
Pour $u, v \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$,

$$|(u+v)_n|^2 \leqslant |u_n|^2 + 2\,|u_n|\,|v_n| + |v_n|^2 \leqslant 2\left(|u_n|^2 + |v_n|^2\right)$$

car $2ab \leqslant a^2 + b^2$.
Par comparaison de séries à termes positifs, $u + v \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$.
$\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, c'est donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
L'application $\|\,.\,\|_2 : \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+$ est bien définie.
Si $\|u\|_2 = 0$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 = 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n|^2 = 0$ puis $u = 0$.

$$\|\lambda u\| = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda u_n|^2} = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda|^2\,|u_n|^2} = |\lambda|\sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2} = |\lambda|\,\|u\|_2$$

$$\|u+v\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n + v_n|^2 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 + 2\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|\,|v_n| + \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|^2$$

Or par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\sum_{n=0}^{N} |u_n|\,|v_n| \leqslant \sqrt{\sum_{n=0}^{N} |u_n|^2}\sqrt{\sum_{n=0}^{N} |v_n|}$$

En passant à la limite quand $N \to +\infty$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|\,|v_n| \leqslant \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2}\sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|}$$

Ainsi

$$\|u+v\|_2^2 \leqslant (\|u\|_2 + \|v\|_2)^2$$

puis

$$\|u+v\|_2 \leqslant \|u\|_2 + \|v\|_2$$

□

Définition

On note $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{K})$ l'ensemble des suites $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ bornée.

Théorème

$\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$ algèbre normée par

$$\|u\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

dém. :
$\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{K}) = \mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{K})$.
□

Remarque $\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K}) \subset \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K}) \subset \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{K})$ et ces inclusions sont strictes.

12.2.3 Normes sur des espaces de fonctions continues

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non singulier.

Définition

On note $L^1(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $f : I \to \mathbb{K}$ continue et intégrable.

Théorème

$L^1(I,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé par

$$\|f\|_1 := \int_I |f(t)| \, \mathrm{d}t$$

dém. :
$L^1(I,\mathbb{K}) \subset \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ et $\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
$\tilde{0} \in L^1(I,\mathbb{K})$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $f, g \in L^1(I,\mathbb{K})$.
$|(\lambda f + \mu g)(t)| \leqslant |\lambda| \, |f(t)| + |\mu| \, |g(t)|$ donc par comparaison de fonctions positives $\lambda f + \mu g \in L^1(I,\mathbb{K})$.
Finalement $L^1(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ et c'est donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
L'application $\| \, . \, \|_1 : L^1(I,\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+$ est bien définie.
Si $\|f\|_1 = 0$ alors $\displaystyle\int_I |f(t)| \, \mathrm{d}t = 0$ or $|f|$ est continue et positive sur I non singulier donc $f = \tilde{0}$.

$$\|\lambda f\|_1 = \int_I |\lambda| \, |f(t)| \, \mathrm{d}t = |\lambda| \, \|f\|_1$$

$$\|f + g\|_1 \leqslant \int_I |f(t)| + |g(t)| \, \mathrm{d}t = \|f\|_1 + \|g\|_1$$

□

Définition

On note $L^2(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $f : I \to \mathbb{K}$ continue et de carré intégrable.

Théorème

$L^2(I,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé par

$$\|f\|_2 := \left(\int_I |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

dém. :
$L^2(I,\mathbb{K}) \subset \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ et $\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
$0 \in L^2(I,\mathbb{K})$.

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in L^2(I,\mathbb{K})$.
$|(\lambda f)(t)|^2 = |\lambda|^2 |f(t)|^2$ donc par comparaison $\lambda f \in L^2(I,\mathbb{K})$.
Soient $f,g \in L^2(I,\mathbb{K})$.

$$|(f+g)(t)|^2 \leqslant (|f(t)|+|g(t)|)^2 = |f(t)|^2 + 2|f(t)|\,|g(t)| + |g(t)|^2 \leqslant 2\left(|f(t)|^2+|g(t)|^2\right)$$

car $2ab \leqslant a^2+b^2$
Par comparaison de fonctions positives $f+g \in L^2(I,\mathbb{K})$.
Finalement $L^2(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ et c'est donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
L'application $\|\,.\,\|_2 : L^2(I,\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+$ est bien définie.
Si $\|f\|_2 = 0$ alors $\displaystyle\int_I |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = 0$ or $|f|^2$ est continue et positive sur I non singulier donc $\forall t \in I, |f(t)|^2 = 0$ puis $f = \tilde{0}$.

$$\|\lambda f\|_2 = \left(\int_I |\lambda|^2 |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t\right)^2 = |\lambda|\,\|f\|_2$$

$$\|f+g\|_2^2 \leqslant \int_I (|f(t)|+|g(t)|)^2 \,\mathrm{d}t = \|f\|_2^2 + 2\int_I |f(t)|\,|g(t)|\,\mathrm{d}t + \|g\|_2^2$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux,

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left(\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

Ici

$$\int_a^b |f(t)|\,|g(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_a^b |g(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \leqslant \|f\|_2\,\|g\|_2$$

Or pour $f : I \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux intégrable

$$\int_I f = \sup_{[a,b]\subset I} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

donc ici

$$\int_I |f(t)|\,|g(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \|f\|_2\,\|g\|_2$$

et enfin

$$\|f+g\|_2^2 \leqslant (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2$$

ce qui permet de conclure.
□

Définition

On note $L^\infty(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $f : I \to \mathbb{K}$ continues et bornées.

Théorème

$L^\infty(I,\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$ algèbre normée par

$$\|f\|_\infty := \sup_{t\in I} |f(t)|$$

dém. :
$L^\infty(I,\mathbb{K}) = \mathcal{B}(I,\mathbb{K}) \cap \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ et $\|\,.\,\|_\infty$ est la restriction de la norme sur $\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$.
□

Remarque Si $I = [a,b]$ alors $L^1(I,\mathbb{K}) = L^2(I,\mathbb{K}) = L^\infty(I,\mathbb{K}) = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$.
Ainsi $\|\,.\,\|_1$, $\|\,.\,\|_2$ et $\|\,.\,\|_\infty$ sont des normes sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$.

Remarque En dehors de ce cas, les espaces $L^1(I,\mathbb{K}), L^2(I,\mathbb{K}), L^\infty(I,\mathbb{K})$ ne sont pas aisément comparables.

12.3 Equivalence de normes

12.3.1 Comparaison de normes

Définition

On dit qu'une norme N_1 sur E est dominée par une norme N_2 lorsque

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in E, N_1(x) \leqslant \alpha N_2(x)$$

Exemple Sur $\mathbb{K}^n$, comparons deux à deux les normes $\|\,.\,\|_1$, $\|\,.\,\|_2$ et $\|\,.\,\|_\infty$.
a) $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\,\|x\|_\infty$.
En effet $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k| \leqslant \sum\limits_{k=1}^n |x_k| = \|x\|_1$ et $\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^n |x_k| \leqslant \sum\limits_{k=1}^n \|x\|_\infty = n\,\|x\|_\infty$
b) $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$.
En effet $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|^2 \leqslant \sum\limits_{k=1}^n |x_k|^2 = \|x\|_2^2$ et $\|x\|_2^2 \leqslant \sum\limits_{k=1}^n \|x\|_\infty^2 = n\,\|x\|_\infty$.
c) $\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\,\|x\|_2$.
En effet $\|x\|_2^2 = \sum\limits_{k=1}^n |x_k|^2 \leqslant \left(\sum\limits_{k=1}^n |x_k|\right)^2 = \|x\|_1^2$ et $\|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\,\|x\|_2$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exemple Sur $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{K})$ comparons les normes $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_\infty$.
On a $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \|f\|_\infty\,\mathrm{d}t = \|f\|_\infty$.
Ainsi $\|\,.\,\|_1$ est dominée par $\|\,.\,\|_\infty$.
Montrons qu'en revanche $\|\,.\,\|_\infty$ n'est pas dominée par $\|\,.\,\|_1$.
Pour cela considérons $f_n : t \mapsto t^n$.
On a

$$\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \text{ et } \|f_n\|_\infty = 1$$

Par l'absurde supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall f \in E, \|f\|_\infty \leqslant \alpha\,\|f\|_1$$

Appliquée en $f = f_n$, on obtient
$$1 \leqslant \frac{\alpha}{n+1} \xrightarrow[n\infty]{} 0$$
Absurde
Conclusion : $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur E.

Remarque Sur $E = \mathcal{C}([a,b]\,,\mathbb{K})$, on a aussi
$$\|f\|_1 \leqslant \sqrt{b-a}\,\|f\|_2 \text{ et } \|f\|_2 \leqslant \sqrt{b-a}\,\|f\|_\infty$$
Cependant $\|\,.\,\|_2$ n'est pas dominée par $\|\,.\,\|_1$, ni $\|\,.\,\|_\infty$ n'est pas dominée par $\|\,.\,\|_2$.

12.3.2 Normes équivalentes

Définition

Deux normes N_1 et N_2 sur un même espace E sont dites équivalentes lorsqu'elles se dominent mutuellement i.e.
$$\exists \alpha, \beta > 0, \forall x \in E, \alpha N_2(x) \leqslant N_1(x) \leqslant \beta N_2(x)$$
On définit ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E.

Exemple Sur $\mathbb{K}^n$, les normes $\|\,.\,\|_1$, $\|\,.\,\|_2$ et $\|\,.\,\|_\infty$ sont équivalentes.

Théorème

Sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont deux à deux équivalentes. (admis)

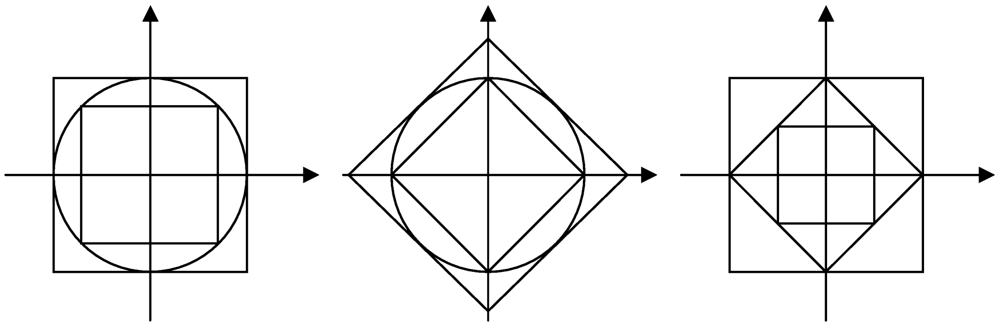
Exemple Sur $E = \mathcal{C}([a,b]\,,\mathbb{K})$, les normes $\|\,.\,\|_1$, $\|\,.\,\|_2$ et $\|\,.\,\|_\infty$ ne sont pas deux à deux équivalentes.

Proposition

Si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes alors toute boule de centre a pour l'une des normes est incluse et contient des boules de même centre a pour l'autre norme.

dém. :
Supposons $\alpha N_2 \leqslant N_1 \leqslant \beta N_2$ et considérons $B = B_1(a,r)$.
On a $B_2(a, r/\beta) \subset B$ car $N_2(x-a) < r/\beta \Rightarrow N_1(x-a) < r$
et $B \subset B_2(a, r/\alpha)$ car $N_1(x-a) < r \Rightarrow N_2(x-a) < r/\alpha$.
□

Exemple Sur $\mathbb{R}^2$



$\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq \sqrt{2}\|\cdot\|_\infty$ $\qquad$ $\frac{1}{\sqrt{2}}\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1$ $\qquad$ ...

12.3.3 Notion invariante par passage à une norme équivalente

Définition

On dit qu'une notion est invariante par passage à une norme équivalente si lorsqu'elle est vérifiée dans une espace normé (E, N_1) est l'est encore dans l'espace normée (E, N_2) quand N_2 est équivalente à N_1.

Exemple La notion de partie bornée est invariante par passage à une norme équivalente.
En effet, une partie est bornée si, et seulement si, elle est incluse dans une boule de centre 0_E est cette notion n'est pas changée lorsqu'on passe à une norme équivalente.
De même pour la notion de suite ou de fonction bornée.

Remarque Si deux normes ne sont pas équivalentes, certaines propriétés peuvent être vraies pour une norme sans l'être pour l'autre.

Exemple Dans $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{K})$, considérons la suite (f_n) des fonctions $f_n : t \mapsto nt^n$.
On a $\|f_n\|_1 = \dfrac{n}{n+1} \to 1$ donc la suite (f_n) est bornée pour $\|\,.\,\|_1$.
En revanche $\|f_n\|_\infty = n \to +\infty$ donc la suite (f_n) n'est pas bornée pour $\|\,.\,\|_\infty$.
Conclusion : on retrouve à nouveau que $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur E.

12.4 Convergence des suites vectorielles

On s'intéresse ici aux suites d'éléments d'un espace normé. L'étude s'appliquera aux suites numériques, aux suites d'éléments de $\mathbb{K}^n$, aux suites matricielles ou encore aux suites de fonctions…
$(E, \|\,.\,\|)$ désigne un espace normé.

12.4.1 Suite convergente

Définition

On dit qu'une suite $u = (u_n)$ d'éléments de E tend vers $\ell \in E$ si $\|u_n - \ell\| \to 0$ i.e. :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon$$

On note alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ ou $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|} \ell$.

Exemple Soit $u_n = \left(\dfrac{\sin n}{n}, \dfrac{n+1}{n}\right) \in \mathbb{R}^2$.
Pour $\|\,.\,\| = \|\,.\,\|_1$, $\|u_n - (0,1)\| = \left|\dfrac{\sin n}{n}\right| + \left|\dfrac{n+1}{n} - 1\right| \to 0$ donc $u_n \to (0,1)$.

Exemple Soit $\|\,.\,\|$ une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
Si $\|A\| < 1$ alors $A^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} O_p$.
En effet $\|A^n - O_p\| = \|A^n\| \leqslant \|A\|^n \to 0$

Théorème

Si $u_n \to \ell$ et $u_n \to \ell'$ alors $\ell = \ell'$.

dém. :
$0 \leqslant \|\ell - \ell'\| \leqslant \|\ell - u_n\| + \|u_n - \ell'\| \to 0$ donc $\|\ell - \ell'\| = 0$ puis $\ell = \ell'$.
□

Définition

On dit qu'une suite $u = (u_n)$ d'éléments de E converge s'il existe $\ell \in E$ tel que $u_n \to \ell$.
Cet élément ℓ est alors unique, on l'appelle limite de u et on note $\ell = \lim u$ ou $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

12.4.2 Effet d'un changement de norme

Théorème

Si N_1 est dominée par N_2 alors toute suite convergeant pour N_2 converge vers la même limite pour N_1.

dém. :
Car avec les notations qui précèdent

$$N_1(u_n - \ell) \leqslant \alpha N_2(u_n - \ell) \to 0$$

□

Corollaire

Deux normes équivalentes définissent les mêmes suites convergentes et celles-ci ont mêmes limites pour les deux normes.

Attention : Si N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes, il se peut qu'une suite converge pour une norme et diverge pour l'autre voire qu'elles convergent toutes deux pour ces normes mais vers des limites différentes !

Exemple $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_\infty$.
Considérons $f_n : t \mapsto t^n$.
On a $\|f_n\|_1 = \dfrac{1}{n+1} \to 0$ donc $f_n \xrightarrow{\|\,.\,\|_1} \tilde{0}$.
Or $\|f_n\|_\infty = 1$ qui ne tend pas vers 0.
Conclusion : on retrouve à nouveau que $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur E.

12.4.3 Opérations sur les limites

Proposition

> Si $u_n \to \ell$ alors $\|u_n\| \to \|\ell\|$.
> Par conséquent toute suite convergente est bornée.

dém. :
Par l'inégalité triangulaire renversée

$$\big|\|u_n\| - \|\ell\|\big| \leqslant \|u_n - \ell\| \to 0$$

□

Théorème

> Si $\alpha_n \in \mathbb{K} \to \alpha$ et $u_n \in E \to \ell$ alors $\alpha_n.u_n \to \alpha.\ell$.
> Si $u_n \in E \to \ell$ et $v_n \in E \to \ell'$ alors $\lambda u_n + \mu v_n \to \lambda\ell + \mu\ell'$.
> Si de plus, E est une algèbre normée, $u_n v_n \to \ell\ell'$.

dém. :
$\|\alpha_n.u_n - \alpha.\ell\| \leqslant \|\alpha_n.u_n - \alpha.u_n\| + \|\alpha.u_n - \alpha.\ell\| = |\alpha_n - \alpha|\,\|u_n\| + |\alpha|\,\|u_n - \ell\| \to 0$.
$\|\lambda u_n + \mu\ell - (\lambda\ell + \mu\ell')\| \leqslant |\lambda|\,\|u_n - \ell\| + |\mu|\,\|v_n - \ell'\| \to 0$.
$\|u_n v_n - \ell\ell'\| \leqslant \|u_n v_n - u_n\ell'\| + \|u_n\ell' - \ell\ell'\| \leqslant \|u_n\|\,\|v_n - \ell'\| + |\ell'|\,\|u_n - \ell\| \to 0$.
□

Exemple Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On suppose $A^n \to B$. Montrons $B^2 = B$.
Par extraction $A^{2n} \to B$ et par opération $A^{2n} = A^n \times A^n \to B^2$.
Par unicité de limite $B^2 = B$.

12.4.4 Convergence en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbb{N}^\star$ muni d'une $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$.
Soit $u = (u(n))$ une suite d'éléments de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u(n) = u_1(n).e_1 + \cdots + u_p(n).e_p$$

Définition

> Les suites scalaires $u_j = (u_j(n))$ sont appelées suites coordonnées de la suite vectorielle u dans la base $\mathcal{B}$.

Exemple Supposons $E = \mathbb{R}^2$ et $u_n = \big(n^2, 1/(n+1)\big)$.
Les suites composantes de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont (n^2) et $(1/(n+1))$.

Proposition

La suite u est bornée si, et seulement si, ses suites composantes le sont.

dém. :
Choisissons $\|\,.\,\| = \|\,.\,\|_{\infty,\mathcal{B}}$.
Si u est bornée alors il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|u(n)\| \leqslant M$$

Or

$$\|u(n)\| = \max\{|u_1(n)|, \ldots, |u_p(n)|\}$$

donc pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$ et tout $n \in \mathbb{N}$

$$|u_j(n)| \leqslant M$$

Ainsi les suites composantes sont bornées.
Inversement, si toutes les suites composantes sont bornées alors pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, il existe $M_j \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_j(n)| \leqslant M_j$$

Pour $M = \max\{M_1, \ldots, M_p\}$, on a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|u(n)\| \leqslant M$$

et ainsi la suite u est bornée.
□

Théorème

On a équivalence entre :
(i) u converge ;
(ii) les suites $u_1, \ldots, u_p$ convergent.
De plus, si tel est le cas,

$$\lim u = (\lim u_1).e_1 + \cdots + (\lim u_n).e_p$$

dém. :
(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons que la suite u converge vers $\ell = \ell_1 e_1 + \cdots + \ell_p e_p$.
Pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$,

$$|u_j(n) - \ell_j| \leqslant \|u(n) - \ell\|_{\infty,\mathcal{B}} \to 0$$

donc $u_j(n) \to \ell_j$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons que pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, $u_j(n) \to \ell_j$. Considérons alors $\ell = \ell_1 e_1 + \cdots + \ell_p e_p$.
On a

$$\|u(n) - \ell\|_{\infty,\mathcal{B}} = \max\{|u_1(n) - \ell_1|, \ldots, |u_p(n) - \ell_p|\} \leqslant \sum_{j=1}^{p} |u_j(n) - \ell_j| \to 0$$

donc $u \to \ell$.
□

Exemple Dans $\mathbb{R}^2$,

$$\left(n \sin\frac{1}{n}, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} (1, \mathrm{e})$$

Exemple Dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$,

$$A_n \to A \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, p\}, \forall j \in \{1, \dots, q\}, [A_n]_{i,j} \to [A]_{i,j}$$

Exemple Dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$,

$$\frac{1}{n} I_p \xrightarrow[n \to +\infty]{} O_p$$

12.4.5 Convergence dans un espace produit

12.4.5.1 Espace normé produit

Soient $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ des espaces normés et $E = E_1 \times \cdots \times E_p = \prod_{j=1}^{p} E_j$.
Pour $x = (x_1, \dots, x_p) \in E$, on pose

$$\|x\| = \max_{1 \leqslant j \leqslant p} N_j(x_j)$$

Proposition

$\| \,.\, \|$ définit une norme sur E.

Définition

$(E, \| \,.\, \|)$ est appelé espace normé produit des espaces normés $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$

12.4.5.2 Convergence

Soit $u = (u(n))$ une suite d'éléments de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u(n) = (u_1(n), \dots, u_p(n))$$

Définition

Les suites vectorielles $u_j = (u_j(n))$ sont appelées suites coordonnées de la suite u.

Exemple Supposons $E_1 = E_2 = \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et pour $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ considérons $u_n = \left(A^n, \frac{1}{n+1} A\right)$.
Les suites coordonnées de u sont (A^n) et $\left(\frac{1}{n+1} A\right)$.

Proposition

La suite u est bornée si, et seulement si, ses suites coordonnées le sont.

Théorème

On a équivalence entre :
(i) u converge ;
(ii) les suites $u_1, \dots, u_p$ convergent.
De plus, si tel est le cas $\lim u = (\lim u_1, \dots, \lim u_p)$.

Exemple Si $A_n \to A$ et $B_n \to B$ dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ alors $(A_n + B_n, A_nB_n) \to (A + B, AB)$ dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})^2$.

12.4.6 Comparaison asymptotique

Soient $\|\,.\,\|_E$ et $\|\,.\,\|_F$ des normes sur des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F.

Définition

On dit que $u = (u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est dominée par $v = (v_n) \in F^{\mathbb{N}}$ si $\|u_n\|_E = O\left(\|v_n\|_F\right)$ i.e.

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \|u_n\|_E \leqslant M\|v_n\|_F$$

On note alors $u_n = O(v_n)$.

Exemple Dans $\mathbb{R}^2$,

$$\left(\frac{2}{(n+1)^2}, \frac{1}{n^3}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exemple Dans l'algèbre normée $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, si $\|A\| \leqslant 1$ alors $A^n = O(1)$.

Définition

On dit que $u = (u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est négligeable devant $v = (v_n) \in F^{\mathbb{N}}$ si $\|u_n\| = o\left(\|v_n\|\right)$ i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \|u_n\|_E \leqslant \varepsilon\|v_n\|_F$$

On note alors $u_n = o(v_n)$.

Exemple Dans $\mathbb{R}^2$,

$$\left(\frac{2}{(n+1)^2}, \frac{1}{n^3}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exemple Dans l'algèbre normée $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$,

$$\frac{1}{n+1}A^{n+1} = o(A^n)$$

Définition

Soient $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ deux suites d'éléments de E.
On dit que u est équivalente à v si $u_n - v_n = o(v_n)$.
On note alors $u_n \sim v_n$.
On définit ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites d'éléments de E.

Exemple Dans $\mathbb{R}^2$,

$$\left(\frac{2}{(n+1)^2}, \frac{1}{n^3}\right) \sim \left(\frac{2}{n^2}, 0\right)$$

Exemple Dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$,
$$\frac{n}{n+1}A^n \sim A^n$$

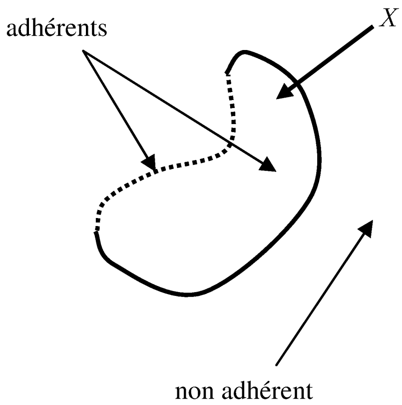
12.5 Limites des fonctions vectorielles

E et F désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés par $\|\,.\,\|_E$ et $\|\,.\,\|_F$.
X désigne une partie de E.
On s'intéresse ici aux applications $f : X \subset E \to F$. En pratique, l'étude s'appliquera :
- aux fonctions numériques d'une ou plusieurs variables réelles ;
- aux fonctions d'une variable complexe ($z \mapsto \bar{z}/1+z$, $z \mapsto \mathrm{e}^z$,...) ;
- aux applications d'une variable matricielle ($\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mapsto A^{-1}$), aux applications linéaires ou multilinéaires...

12.5.1 Points adhérent

Définition

On dit que $a \in E$ est adhérent à la partie X si
$$\forall \alpha > 0, B(a,\alpha) \cap X \neq \emptyset$$



Exemple Les extrémités finies d'un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ sont adhérentes à celui-ci.

Exemple 0 est adhérent à $\mathbb{C}^\star$.

Théorème

Soit X une partie non vide.
On a équivalence entre :
(i) a est adhérent à X ;
(ii) $\exists (x_n) \in X^{\mathbb{N}}, x_n \to a$;
(iii) $d(a,x) = 0$

dém. :
(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons que pour tout $\alpha > 0$, $B(a,\alpha) \cap X \neq \emptyset$.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha = \dfrac{1}{n+1} > 0$, l'ensemble $B(a, 1/(n+1)) \cap X$ est non vide.
Soit x_n un élément de celui-ci. En faisant varier n, cela définit une suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\|x_n - a\| \leqslant \frac{1}{n+1} \to 0$$

et donc $x_n \to a$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Considérons $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to a$.
On a $0 \leqslant d(a,X) \leqslant \|x_n - a\| \to 0$ donc $d(a,X) = 0$.
(iii) $\Rightarrow$ (i) Supposons $d(a,X) = 0$. Rappelons que $d(a,X) = \inf A$ avec $A = \{\|x-a\| \,/ x \in X\}$.
Pour tout $\alpha > 0$, A n'est pas minorée par α et donc il existe $x \in X$ tel que $\|x - a\| < \alpha$. On a alors $x \in B(a,\alpha)$ et donc $B(a,\alpha) \cap X \neq \emptyset$.
□

Exemple O_p est adhérent à $\mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ car

$$\frac{1}{n} I_p \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \to O_p$$

12.5.2 Convergence d'une fonction vectorielle

Soient $f : X \subset E \to F$ et a un point adhérent à X.

Définition

On dit que f tend vers $\ell \in F$ en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in X, \|x - a\|_E \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leqslant \varepsilon$$

On note alors $f \underset{a}{\to} \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$

Remarque On obtient une définition équivalent en remplaçant $\leqslant \alpha$ (resp. $\leqslant \varepsilon$) par $< \alpha$ (resp. $< \varepsilon$).
Ainsi

$$f \underset{a}{\to} \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, f(B(a,\alpha) \cap X) \subset B(\ell, \varepsilon)$$

La notion n'est pas modifiée par passage à des normes équivalentes.

Exemple Pour f est constante égale à C, on obtient $C \underset{a}{\to} C$.

Exemple Pour $f = \mathrm{Id}$, on obtient $x \xrightarrow[x \to a]{} a$.

Exemple Pour $f = \|\,.\,\|$, on obtient $\|x\| \xrightarrow[x \to a]{} \|a\|$.

Théorème

Si $f \underset{a}{\to} \ell$ et $f \underset{a}{\to} \ell'$ alors $\ell = \ell'$.

dém. :
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha, \alpha' > 0$ tels que

$$\forall x \in X, \|x - a\|_E \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leqslant \varepsilon$$

et

$$\forall x \in X, \|x - a\|_E \leqslant \alpha' \Rightarrow \|f(x) - \ell'\|_F \leqslant \varepsilon$$

Pour $\alpha'' = \min(\alpha, \alpha') > 0$ et $x \in B(a, \alpha'') \cap X$ (qui est non vide car a est adhérent à X), on a $\|f(x) - \ell\| \leqslant \varepsilon$ et $\|f(x) - \ell'\| \leqslant \varepsilon$. On en déduit

$$\|\ell - \ell'\| \leqslant \|\ell - f(x)\| + \|f(x) - \ell'\| \leqslant 2\varepsilon$$

Or ceci vaut pour tout $\varepsilon > 0$ donc $\|\ell - \ell'\| = 0$ i.e. $\ell = \ell'$.
□

Définition

On dit que f converge en a s'il existe $\ell \in F$ tel que $f \underset{a}{\to} \ell$.
Cet élément ℓ est alors unique, on l'appelle limite de f en a et on note $\ell = \lim_a f$ ou $\ell = \lim_{x \to a} f(x)$.

12.5.3 Théorèmes de convergence

12.5.3.1 Caractérisation séquentielle

Théorème

Soient $f : X \subset E \to F$, a un élément adhérent à X et $\ell \in F$.
On a équivalence entre :
(i) $f \underset{a}{\to} \ell$;
(ii) $\forall (x_n) \in X^{\mathbb{N}}, x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to \ell$.

dém. :
(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons $f \underset{a}{\to} \ell$.
Soit $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to a$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in X, \|x - a\| \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leqslant \varepsilon$$

Puisque $x_n \to a$ et $\alpha > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow \|x_n - a\| \leqslant \alpha$$

et donc

$$n \geqslant N \Rightarrow \|f(x_n) - \ell\| \leqslant \varepsilon$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Par contraposée.
Supposons $f \underset{a}{\not\to} \ell$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall \alpha > 0, \exists x \in X, \|x - a\| \leqslant \alpha \text{ et } \|f(x) - \ell\| > \varepsilon$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, pour $\alpha = \dfrac{1}{n+1} > 0$, il existe $x_n \in X$ tel que $\|x_n - a\| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ et $\|f(x_n) - \ell\| > \varepsilon$.
En faisant varier n, ceci détermine une suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to a$ et $f(x_n) \not\to \ell$.
□

Corollaire

Si f tend vers ℓ en a alors ℓ est adhérent à $f(X)$.
Ce dernier résultat est une extension du théorème de passage à la limite des inégalités.

12.5.3.2 Opérations

Théorème

Soient $f, g : X \subset E \to F$ et $a \in E$ adhérent à X.
Si $f \underset{a}{\to} \ell$ et $g \underset{a}{\to} \ell'$ alors $f + g \underset{a}{\to} \ell + \ell'$.
Si de plus F est une algèbre normée alors $fg \underset{a}{\to} \ell\ell'$.

dém. :
Soit $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ de limite a.
On a $f(x_n) \to \ell$ et $g(x_n) \to \ell'$.
Par opérations sur les suites vectorielles convergentes, $(f + g)(x_n) \to \ell + \ell'$.
Or ceci vaut pour toute suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ convergeant vers a donc par la caractérisation séquentielle des limites, $\lambda f + \mu g \underset{a}{\to} \lambda\ell + \mu\ell'$.
Même démarche pour le produit dans une algèbre normée.
□

Théorème

Soient $\alpha : X \subset E \to \mathbb{K}$, $f : X \subset E \to F$ et a adhérent à X.
Si $\alpha \underset{a}{\to} \lambda$ et $f \underset{a}{\to} \ell$ alors $\alpha.f \underset{a}{\to} \lambda.\ell$.

dém. :
Par la caractérisation séquentielles des limites et opérations sur les suites vectorielles convergentes.
□

12.5.3.3 Composition

Théorème

Soient $f : X \subset E \to F$ et $g : Y \subset F \to G$ telles que $f(X) \subset Y$ et a adhérent à X.
Si $f \underset{a}{\to} b$ et si $g \underset{b}{\to} \ell$ alors $g \circ f \underset{a}{\to} \ell$.

dém. :
Par la caractérisation séquentielles des limites.
Notons que b est adhérent à Y car $b = \lim\limits_{a} f$ est adhérent à $f(X)$ et $f(X) \subset Y$.
□

Corollaire

Si $f \underset{a}{\to} \ell$ alors $\|f\| \underset{a}{\to} \|\ell\|$.

12.5.3.4 Comparaison

Théorème

Soient $f : X \subset E \to F$, $g : X \subset E \to \mathbb{R}$ et a adhérent à X.
Si $\|f(x) - \ell\| \leqslant g(x)$ et $g \underset{a}{\to} 0$ alors $f \underset{a}{\to} \ell$.

dém. :
Par la caractérisation séquentielles des limites et comparaison de suites réelles.
□

12.5.4 Convergence à valeurs dans espace de dimension finie

Soient F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F.
Considérons $f : X \subset E \to F$.
Pour tout $x \in X$, on peut écrire $f(x) = f_1(x)e_1 + \dots + f_p(x)e_p = \sum_{j=1}^{p} f_j(x)e_j$ avec $f_i(x) \in \mathbb{K}$.

Définition

Les applications scalaires $f_1, \dots, f_p$ sont appelées fonctions composantes de f relatives à la base $(e_1, \dots, e_p)$.

Théorème

Soit a adhérent à X. On a équivalence entre :
(i) la fonction vectorielle f converge en a ;
(ii) les fonctions numériques $f_1, \dots, f_p$ convergent en a.
De plus si tel est le cas

$$\lim_a f = \left(\lim_a f_1\right).e_1 + \dots + \left(\lim_a f_p\right).e_p = \sum_{j=1}^{p} \left(\lim_a f_j\right) e_j$$

dém. :
Par la caractérisation séquentielles des limites.
□

12.5.5 Convergence à valeurs dans un espace normé produit

Soient $F_1, \dots, F_p$ des espaces vectoriels normés respectivement par $N_1, \dots, N_p$ et $F = F_1 \times \dots \times F_p$ l'espace vectoriel normé produit.
Pour $x = (x_1, \dots, x_p) \in F$, $\|x\| = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} N_j(x_j)$.
Considérons $f : X \subset E \to F$.
Pour tout $x \in X$ $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$ avec $f_j(x) \in F_j$.

Définition

Les applications $f_1, \dots, f_p$ sont appelées applications coordonnées de f.

Théorème

Soit $a \in E$ adhérent X. On a équivalence entre :
(i) f converge en a ;
(ii) $f_1, \dots, f_p$ convergent en a.
De plus, si tel est le cas,

$$\lim_a f = \left(\lim_a f_1, \dots, \lim_a f_p\right)$$

dém. :
Par la caractérisation séquentielles des limites.
□

12.5.6 Exemples

Exemple Dans $\mathbb{R}^2$, étudions $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+xy+y^2}$.
Soit $f:(x,y)\mapsto \sqrt{x^2+xy+y^2}$ définie sur $X=\mathbb{R}^2$ car

$$x^2+xy+y^2 \geqslant (x+1/2)^2+3y^2/4$$

$(0,0)$ est adhérent à $\mathbb{R}^2$.
Quand $(x,y)\to(0,0)$.
On a $x\to 0$ et $y\to 0$ (car $|x|\leqslant \|(x,y)\|_\infty \to 0$)
Par opérations algébriques $x^2+xy+y^2\to 0$.
Par composition $\sqrt{x^2+xy+y^2}\to 0$.

Exemple Dans $\mathbb{R}^2$, étudions $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
Soit $f:(x,y)\mapsto \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ définie sur $X=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
$(0,0)$ est adhérent à X
Quand $(x,y)\to(0,0)$ (avec $(x,y)\in X$)
On pose $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ avec $r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$ et θ incontrôlable.
Par composition, on a alors

$$f(x,y)=r\cos\theta\sin\theta\to 0$$

Attention : Etudier $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}$ ne correspond pas à étudier $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}$ ou $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}$

Exemple Dans $\mathbb{R}^2$, étudions $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.
Soit $f:(x,y)\mapsto \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ définie sur $X=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
$(0,0)$ est adhérent à X.
Ici $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=-1$ et $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=1\ldots$
Pour $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ avec $r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$, on a $f(x,y)=\cos^2\theta-\sin^2\theta$ qui ne semble pas converger…
Puisque $f(1/n,0)\to 1$ et $f(0,1/n)\to -1$, la fonction f diverge en $(0,0)$.

Exemple Dans $\mathbb{R}^3$, étudions $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$.
Soit $f:(x,y,z)\mapsto \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$ définie sur $X=\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$.
Quand $(x,y,z)\to(0,0,0)$ (avec $(x,y,z)\in X$)
On pose $x=r\cos\varphi\sin\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\theta$ avec $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\to 0$ et φ,θ incontrôlables.

$$\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}=r\cos\varphi\sin\varphi\cos^2\theta\sin\theta\to 0$$

Exemple Dans $\mathbb{C}$, étudions de $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z^2}{|z|}$.
Soit $f : z \mapsto \dfrac{z^2}{|z|}$ définie sur $X = \mathbb{C}^\star$.
0 est adhérent à $\mathbb{C}^\star$.
Quand $z \to 0$ (avec $z \in \mathbb{C}^\star$)
On peut écrire $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $r = |z| \to 0$.
On a alors

$$f(z) = r\mathrm{e}^{2i\theta} \to 0$$

12.5.7 Comparaison asymptotique

Définition

Soient $f : X \subset E \to F$, $g : X \subset E \to G$ et $a \in E$ adhérent à X.
On dit que f est dominée par g en a si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in X, \|x - a\| \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(x)\| \leqslant M \|g(x)\|$$

On note alors $f(x) = O(g(x))$ quand $x \to a$.
On dit que f est négligeable devant g en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in X, \|x - a\| \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(x)\| \leqslant \varepsilon \|g(x)\|$$

On note alors $f(x) = o(g(x))$ quand $x \to a$.

Exemple Dans $\mathbb{R}^2$.
$xy = O(x^2 + y^2)$ quand $(x, y) \to (0, 0)$
En effet $|xy| \leqslant \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Exemple Dans $\mathbb{C}$.
$\mathrm{Re}(z) = O\left(z\right)$ quand $z \to 0$
En effet $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$.

Exemple Dans $\mathbb{R}^2$, $xy = o(x)$ quand $(x, y) \to (0, 0)$

Exemple Dans $\mathbb{C}$, $z^2 = o(z)$ quand $z \to 0$.
En effet $\left|z^2\right| = |z|\,|z|$ avec $|z| \to 0$.

Exemple Dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
$A^2 = o(A)$ quand $A \to O_p$
En effet, pour une norme d'algèbre, $\left\|A^2\right\| \leqslant \|A\|\,\|A\|$ avec $\|A\| \to 0$.

Définition

Soient $f, g : X \subset E \to F$ et a adhérent à X.
On dit que f est équivalente à g en a si $f(x) - g(x) = o\,(g(x))$ quand $x \to a$.
On note alors $f(x) \sim g(x)$ quand $x \to a$.
On définit ainsi une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}(X, F)$.

Exemple Dans $\mathbb{R}^2$.

$$x^2 + y^2 + x^2y^2 \sim x^2 + y^2 \text{ quand } (x, y) \to 0$$

En effet $x^2y^2 = o(x^2 + y^2)$ puisque $x^2y^2 = xyO(x^2 + y^2)$ et $xy \to 0$.

Exemple Dans $\mathbb{C}$. Quand $z \to 0$,

$$\mathrm{e}^z - 1 \sim z$$

En effet

$$\mathrm{e}^z - 1 = z + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Or pour $|z| \leqslant 1$,

$$\left|\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right| \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|z|^2}{n!} = C^{te}\,|z|^2$$

donc $\mathrm{e}^z - 1 = z + O(z^2) = z + o(z)$.

Exemple Dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
Quand $A \to O_p$,

$$(I_p + A)^n - I_p \sim nA$$

En effet par la formule du binôme

$$(I_p + A)^n = I_p + nA + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} A^k$$

Or pour $k \geqslant 2$, $A^k = o(A)$ donc

$$(I_p + A)^n = I_p + nA + o(A)$$

puis

$$(I_p + A)^n - I_p \sim nA$$

12.5.8 Limite et restriction

Soient $f : X \subset E \to F$ et a adhérent à X.

Définition

Soit $X' \subset X$ tel que a soit adhérent à X'.
On appelle limite de f en a selon X' l'éventuelle limite de $f_{\restriction X'}$ en a. On la note

$$\lim_{x \to a, x \in X'} f(x)$$

Exemple Si a est adhérent à $X^\star = X \setminus \{a\}$, on note

$$\lim_{x \to a, x \neq a} f(x) := \lim_{x \to a, x \in X^\star} f(x)$$

Exemple Si $X \subset \mathbb{R}$ et a adhérent à $X^+ = X \cap]a, +\infty[$, on note

$$\lim_{x \to a^+} f(x) := \lim_{x \to a, x > a} f(x) := \lim_{x \to a, x \in X^+} f(x)$$

Exemple Si $X \subset \mathbb{R}$ et a adhérent à $X^- = X \cap]-\infty, a[$, on note

$$\lim_{x \to a^-} f(x) := \lim_{x \to a, x < a} f(x) := \lim_{x \to a, x \in X^-} f(x)$$

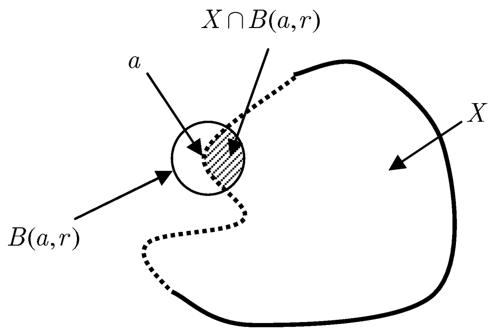
Proposition

Si a est adhérent à $X' \subset X$ et si f converge en a alors $f_{\restriction X'}$ converge en a vers la même limite.

dém. :
Qui peut le plus, peut le moins.
□

Proposition

Soient $r > 0$ et $X' = B(a, r) \cap X$.
Si $f_{\restriction X'}$ converge en a alors f converge en a vers la même limite



dém. :
Supposons $f_{\upharpoonright X'}$ converge vers ℓ en a.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in X', \|x-a\|_E \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(x)-\ell\|_F \leqslant \varepsilon$$

Pour $\alpha' = \min(\alpha, r) > 0$, on a

$$\forall x \in X, \|x-a\|_E < \alpha' \Rightarrow \|x-a\|_E \leqslant \alpha \text{ et } x \in X'$$

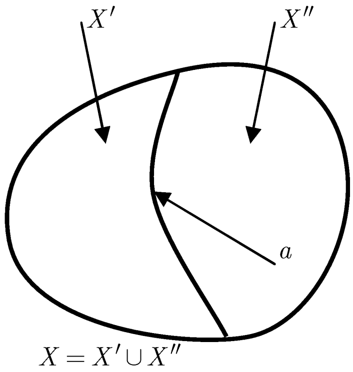
donc

$$\forall x \in X, \|x-a\|_E < \alpha' \Rightarrow \|f(x)-\ell\|_F \leqslant \varepsilon$$

□

Proposition

On suppose $X = X' \cup X''$ avec a adhérent à X' et X''.
Si $f_{\upharpoonright X'}$ et $f_{\upharpoonright X''}$ convergent en a vers la même limite alors f converge en a vers cette limite.



dém. :
Notons ℓ la limite commune.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha', \alpha'' > 0$ tels que

$$\forall x \in X', \|x-a\|_E \leqslant \alpha' \Rightarrow \|f(x)-\ell\|_F \leqslant \varepsilon \text{ et } \forall x \in X'', \|x-a\|_E \leqslant \alpha'' \Rightarrow \|f(x)-\ell\|_F \leqslant \varepsilon$$

Pour $\alpha = \min(\alpha', \alpha'') > 0$, on a

$$\forall x \in X = X' \cup X'',\ \|x-a\|_E \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(x)-\ell\|_F \leqslant \varepsilon$$

□

Remarque Intérêt : étude de limite de fonction définie par une alternative.

12.5.9 Extensions du concept de limite

Définition

Soit $f : X \subset \mathbb{R} \to F$ avec X non majorée.
On dit que f tend vers $\ell \in F$ en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \geqslant A \Rightarrow \|f(x) - b\| \leqslant \varepsilon$$

On note alors $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$.
De façon analogue, pour $X \subset \mathbb{R}$ non minorée, on définit $f \xrightarrow[-\infty]{} \ell$

Définition

Soit $f : X \subset E \to F$ avec X non bornée.
On dit que $f(x)$ tend vers $\ell \in F$ quand $\|x\| \to +\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in X, \|x\| \geqslant A \Rightarrow \|f(x) - b\| \leqslant \varepsilon$$

On note alors $f(x) \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} \ell$.

Définition

Soient $f : X \subset E \to \mathbb{R}$ et $a \in E$ adhérent à X.
On dit que f tend vers $+\infty$ en a si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in X, \|x - a\| \leqslant \delta \Rightarrow f(x) \geqslant M$$

On note alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.
De façon analogue, on définit aussi $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$, $f(x) \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$, etc.

Exemple Dans $\mathbb{R}^2$, étudions $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.
$f : (x, y) \mapsto 1/(x^2 + y^2)$ est définie sur $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
$(0, 0)$ est adhérent à X.
Quand $(x, y) \to (0, 0)$ (avec $(x, y) \in X$)
$x^2 + y^2 \to 0$ avec $x^2 + y^2 > 0$.
Or $\dfrac{1}{t} \xrightarrow[t \to 0^+]{} +\infty$ donc $\dfrac{1}{x^2 + y^2} \to +\infty$.

Exemple Dans $\mathbb{C}$, étudions $\lim\limits_{|z| \to +\infty} \dfrac{1}{z + 1}$.
$f : z \mapsto 1/(z + 1)$ est définie sur $X = \mathbb{C} \setminus \{-1\}$.
X n'est pas bornée.
Quand $|z| \to +\infty$ (avec $z \in X$).
On a $|z + 1| \geqslant |z| - 1$ donc $\left|\dfrac{1}{z + 1}\right| \leqslant \dfrac{1}{|z| - 1} \to 0$ (pour $|z| > 1$).
Ainsi $\lim\limits_{|z| \to +\infty} \dfrac{1}{z + 1} = 0$

12.6 Continuité

E et F désignent des $\mathbb{K}$-espace vectoriel normés par $\|\,.\,\|_E$ et $\|\,.\,\|_F$.

12.6.1 Définition

Définition

On dit que $f : X \subset E \to F$ est continue en $a \in X$ si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$.

Définition

On dit que $f : X \subset E \to F$ est dite continue si f est continue en chaque point $a \in X$.
On note $\mathcal{C}(X, F)$ l'ensemble des fonctions continues de X vers F.

Exemple Les fonctions constantes sont continues.

Exemple La fonction Id_E est continue.

Exemple La fonction $x \mapsto \|x\|$ est continue.

Exemple La fonction $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ est continue sur $\mathbb{C}^\star$.
En effet pour $a \in \mathbb{C}^\star$,

$$\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|z-a|}{|z|\,|a|} \xrightarrow[z \to a]{} 0$$

Exemple Etudions la continuité de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin y - \sin x}{y - x} & \text{si } x \neq y \\ \cos x & \text{si } x = y \end{cases}$$

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
Cas $x_0 \neq y_0$.
Au voisinage de (x_0, y_0),

$$f(x,y) = \frac{\sin y - \sin x}{y - x} \xrightarrow[(x,y) \to (x_0,y_0)]{} \frac{\sin y_0 - \sin x_0}{y_0 - x_0} = f(x_0, y_0)$$

Cas $x_0 = y_0$.
Quand $(x, y) \to (x_0, x_0)$ avec $x \neq y$

$$f(x,y) = \frac{\sin y - \sin x}{y - x} = \frac{2 \sin \frac{y-x}{2} \cos \frac{x+y}{2}}{y - x} \to \cos x_0 = f(x_0, x_0)$$

En effet

$$\frac{2 \sin \frac{t}{2}}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} 1 \text{ et } y - x \to 0$$

Quand $(x, y) \to (x_0, x_0)$ avec $x = y$

$$f(x, y) = \cos x \to \cos(x_0) = f(x_0, x_0)$$

12.6.2 Fonctions lipschitziennes

Définition

Une application $f : X \subset E \to F$ est dite lipschitzienne s'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x, y \in X, \|f(y) - f(x)\|_F \leqslant k \|y - x\|_E$$

Exemple L'application $x \mapsto \|x\|$ est lipschitzienne de E vers $\mathbb{R}$.
En effet $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$.

Exemple Soit A une partie non vide de E.
Considérons l'application $x \in E \mapsto d(x, A)$.
Soit $x, y \in E$.
Pour tout $a \in E$,

$$d(x, A) \leqslant \|x - a\| \leqslant \|x - y\| + \|y - a\|$$

donc

$$d(x, A) - \|x - y\| \leqslant \|y - a\|$$

puis par passage à la borne inférieure

$$d(x, A) - \|x - y\| \leqslant d(y, A)$$

Ainsi

$$d(x, A) - d(y, A) \leqslant \|x - y\|$$

Par un raisonnement symétrique on a aussi $d(y, A) - d(x, A) \leqslant \|y - x\|$ et donc

$$|d(y, A) - d(x, A)| \leqslant \|y - x\|$$

Ainsi l'application $x \mapsto d(x, A)$ est lipschitzienne.

Théorème

Les fonctions lipschitziennes sont continues.

dém. :
Soit $f : X \subset E \to F$ une fonction lipschitzienne.
Il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x, y \in X, \|f(y) - f(x)\|_F \leqslant k \|y - x\|_E$$

Soit $a \in X$.
Quand $x \to a$, $\|f(x) - f(a)\|_F \leqslant k \|x - a\|_E \to 0$ donc $f(x) \to f(a)$.
Ainsi f est continue en chaque $a \in X$.
□

Exemple Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E.
Notons $e_1^\star, \ldots, e_p^\star$ les formes linéaires composantes dans la base $\mathcal{B}$.
Pour $x = x_1.e_1 + \cdots + x_p.e_p \in E$, rappelons $e_j^\star(x) = x_j$.
Etudions l'application $e_j^\star : E \to \mathbb{K}$.

En choisissant $\| \,.\, \| = \| \,.\, \|_{\infty,\mathcal{B}}$, on a pour tout $i \in \{1,\dots,p\}$ et tout $x, y \in E$,

$$\left|e_j^\star(y) - e_j^\star(x)\right| = |y_j - x_j| \leqslant \|y - x\|_{\infty,\mathcal{B}}$$

Ainsi les formes linéaires composantes dans une base sont lipschitziennes et donc continues.
En particulier : $(x_1,\dots,x_p) \mapsto x_i$, $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$, $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$ et $A \mapsto a_{i,j}$ sont continues

Exemple Soient (E_1, N_1),..., (E_p, N_p) des espaces normés et $(E, \| \,.\, \|)$ l'espace normé produit.
Pour $x = (x_1,\dots,x_p) \in E$, on pose $p_j(x) = x_j$.
L'application p_j est j-ème projection coordonnées.
Pour tout $x, y \in E$, $N_j(p_j(x) - p_j(y)) = N_j(x_j - y_j) \leqslant \|x - y\|$.
Les projections coordonnées p_j sont lipschitziennes donc continues.
En particulier les applications suivantes sont continues

$$\begin{array}{ccc} E \times F & \to & E \\ (x,y) & \mapsto & x \end{array} \text{ et } \begin{array}{ccc} E \times F & \to & F \\ (x,y) & \mapsto & y \end{array}$$

12.6.3 Opérations sur les fonctions continues

Théorème

Soient $f, g : X \subset E \to F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Si f et g sont continues alors λf et $f + g$ sont continues.
De plus, si F est une algèbre normée alors fg est continue.

dém. :
Par opérations sur les limites en tout point $a \in X$.
□

Corollaire

$\mathcal{C}(X, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(X, F)$.
Si F est une algèbre normée alors $\mathcal{C}(X, F)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(X, F)$

Exemple Les fonctions polynomiales sur $\mathbb{K}^p$ sont continues.

Exemple L'application $\det : \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est continue par somme et produit de fonctions continues.

Exemple L'application

$$\sigma : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (x,y) & \mapsto & x + y \end{array} \right.$$

est continue.
En effet les applications coordonnées $p : (x, y) \mapsto x$ et $q : (x, y) \mapsto y$ sont continues de $E \times E$ vers E donc par somme de fonctions continues, $\sigma = p + q$ est continue.

Théorème

Soient $\alpha : X \subset E \to \mathbb{K}$ et $f : X \subset E \to F$.
Si α et f sont continues alors $\alpha.f$ est continue.

dém. :
Par opérations sur les limites en tout point $a \in X$.
□

Exemple L'application

$$p : \begin{cases} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda.x \end{cases}$$

est continue.
En effet les applications $\alpha : (\lambda, x) \mapsto \lambda$ et $f : (\lambda, x) \mapsto x$ sont continues donc $p = \alpha.f$ l'est aussi.

Théorème

Soient $f : X \subset E \to F$ et $g : Y \subset F \to G$ telle que $f(X) \subset Y$.
Si f et g sont continues alors $g \circ f$ est continue.

dém. :
Par opérations sur les limites en tout point $a \in X$.
□

Exemple Les fonctions rationnelles sur $\mathbb{K}^n$ sont continues.

Exemple La fonction $f : (x, y) \mapsto \dfrac{\sin(x + y^2)}{2 + \ln(1 + x^2 + y^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ par opérations sur les fonctions continues.

Attention : Ne pas argumenter f est continue car « f est continue en x et continue en y ».

Exemple Soit $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.
Pour tout $y \in \mathbb{R}$.
Si $y \neq 0$ alors $x \mapsto f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ est continue.
Si $y = 0$ alors $x \mapsto f(x, y) = 0$ est continue.
Par symétrie on a aussi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x, y)$ est continue.
Ainsi la fonction f est « continue en x et en y ».
Cependant la fonction f n'est pas continue puisque $f(1/n, 1/n) = 1/2 \not\to f(0, 0)$.

Théorème

Si F est de dimension finie alors $f : X \subset E \to F$ est continue si, et seulement si, ses fonctions coordonnées dans une base de F le sont.

Exemple L'application $M \mapsto \text{com}(M)$ est continue de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ vers lui-même.
En effet, ses applications composantes dans la base canonique sont sommes et produit de fonctions continues.

Exemple L'application $M \mapsto M^{-1}$ est continue sur $\text{GL}_p(\mathbb{K})$.
En effet, $M^{-1} = \dfrac{1}{\det M}{}^t\text{com}M$ et donc les coefficients de M^{-1} sont des sommes et produits en les coefficients de M.

Théorème

Si F est un espace normé produit alors $f : X \subset E \to F$ est continue si, et seulement si, ses fonctions coordonnées le sont.

12.7 Continuité et linéarité

E et F désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés par $\|\,.\,\|_E$ et $\|\,.\,\|_F$.

12.7.1 Application linéaire continue

Définition

On note $\mathcal{LC}(E,F)$ l'ensemble formé des applications linéaires continues de E vers F.
On note $\mathcal{LC}(E)$ l'ensemble des endomorphismes continus de E.

Proposition

$\mathcal{LC}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{LC}(E)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

dém. :
$\mathcal{LC}(E,F) = \mathcal{L}(E,F) \cap \mathcal{C}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$.
$\mathcal{LC}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ contenant Id_E et vérifiant

$$\forall u, v \in \mathcal{LC}(E), u \circ v \in \mathcal{LC}(E)$$

□

Théorème

Soit une application linéaire $u : E \to F$. On a équivalence entre :
(i) u est continue ;
(ii) u est continue en 0_E ;
(iii) $\exists k \geqslant 0, \forall x \in E, \|u(x)\|_F \leqslant k\,\|x\|_E$ [lipschitzianité en 0] ;
(iv) u est lipschitzienne.

dém. :
(i) $\Rightarrow$ (ii) : ok
(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Supposons u continue en 0.
Pour $\varepsilon = 1$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in E, \|x\| \leqslant \alpha \Rightarrow \|u(x)\| \leqslant 1$$

Posons $k = 1/\alpha \in \mathbb{R}^+$ et montrons que

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant k\,\|x\|$$

Pour $x = 0$: ok
Pour $x \neq 0$, posons $x' = \dfrac{\alpha}{\|x\|}x$. On a $\|x'\| \leqslant \alpha$ donc $\|u(x')\|_F \leqslant 1$.
Or $\|u(x')\| = \dfrac{\alpha}{\|x\|}\|u(x)\|$ donc puis $\|u(x)\| \leqslant \dfrac{1}{\alpha}\|x\|$.
(iii) $\Rightarrow$ (iv) : Supposons qu'il existe $k \geqslant 0$ tel que $\|u(x)\| \leqslant k\|x\|$ pour tout $x \in E$.
Pour $x, y \in E$,

$$\|u(x) - u(y)\| = \|u(x - y)\| \leqslant k\|x - y\|$$

donc u est lipschitzienne.
(iv) $\Rightarrow$ (i) : ok
□

Exemple Soient $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{K})$ et $u : E \to \mathbb{K}$ définie par $u(f) = f(1)$.
u est une forme linéaire sur E.
Cas $\|\,.\,\|_E = \|\,.\,\|_\infty$.
Pour tout $f \in E$, $|u(f)| = |f(1)| \leqslant \|f\|_\infty$ donc u est continue.
Cas $\|\,.\,\|_E = \|\,.\,\|_1$.
Pour $f_n : t \mapsto t^n$, $|u(f_n)| = 1$ et $\|f_n\|_1 = \dfrac{1}{n+1} \to 0$.
Par suite u n'est pas continue.

12.7.2 Linéarité en dimension finie

Théorème

Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E vers F est continue.

dém. :
Si $E = \{0\}$ ok.
Sinon on introduit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E et on considère $\|\,.\,\|_E = \|\,.\,\|_{\infty,\mathcal{B}}$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$,

$$u(x) = x_1u(e_1) + \cdots + x_nu(e_n)$$

et donc

$$\|u(x)\| \leqslant |x_1|\,\|u(e_1)\| + \cdots + |x_n|\,\|u(e_n)\| \leqslant k\|x\|$$

avec $k = \|u(e_1)\| + \cdots + \|u(e_n)\|$.
□

Corollaire

Si E est de dimension finie $\mathcal{LC}(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{LC}(E) = \mathcal{L}(E)$

Exemple Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$.
Montrons que l'application $\det\limits_{\mathcal{L}(E)} : \mathcal{L}(E) \to \mathbb{K}$ est continue.
On sait que $\det\limits_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est continue.
Soit $\mathcal{B}$ une base de E, l'application de représentation matricielle $M_\mathcal{B} : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est linéaire au départ de $\mathcal{L}(E)$ qui est $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, c'est donc une application continue.
On en déduit que $\det\limits_{\mathcal{L}(E)} = \det\limits_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \circ M_\mathcal{B}$ est continue par composition d'applications continues.

12.7.3 Norme triple

Soit $u \in \mathcal{LC}(E,F)$. Il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \in E, \|u(x)\| \leqslant k\|x\|$$

Nous allons définir le plus petit k tel que cette propriété soit vérifiée.

Définition

On pose $\|u\|_{\mathcal{LC}(E,F)} = \sup\limits_{\|x\|_E \leqslant 1} \|u(x)\|_F$ appelé norme d'opérateur de u et simplement noté $\|u\|$.

Exemple $\|\tilde{o}\| = 0$ et $\|\mathrm{Id}_E\| = 1$ (si $E \neq \{0_E\}$)

Théorème

Si $u \in \mathcal{LC}(E,F)$ alors $\forall x \in E$, $\|u(x)\| \leqslant \|u\| \|x\|$.

dém. :
Pour $x = 0_E$: ok.
Pour $x \neq 0_E$, on introduit $x' = \dfrac{1}{\|x\|}x$. On a $\|x'\| = 1$ donc $\|u(x')\| \leqslant \|u\|$. Or $\|u(x')\| = \dfrac{1}{\|x\|}\|u(x)\|$ donc $\|u(x)\| \leqslant \|u\| \|x\|$.
□

Corollaire

$\|u\|$ est le plus petit $k \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\forall x \in E, \|u(x)\| \leqslant k\|x\|$$

Théorème

L'application $u \mapsto \|u\|$ définit une norme sur $\mathcal{LC}(E,F)$.

dém. :
$\|\,.\,\| : \mathcal{LC}(E,F) \to \mathbb{R}^+$
$\|u\| = 0 \Rightarrow \forall x \in E, \|u(x)\| \leqslant \|u\| \|x\| = 0$ donc $u(x) = 0$ puis $u = \tilde{o}$.
$\|\lambda u\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|\lambda u(x)\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} |\lambda| \|u(x)\| = |\lambda| \|u\|$
$\|u+v\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|(u+v)(x)\| \leqslant \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} (\|u(x)\| + \|v(x)\|) \leqslant \|u\| + \|v\|$.
□

Théorème

$\forall u \in \mathcal{LC}(E,F), \forall v \in \mathcal{LC}(F,G)$, $v \circ u \in \mathcal{LC}(E,G)$ et $\|v \circ u\| \leqslant \|v\| \|u\|$.

dém. :
$\forall x \in E$, $\|(v \circ u)(x)\| \leqslant \|v\| \|u(x)\| \leqslant \|v\| \|u\| \|x\|$ donc $\|v \circ u\| \leqslant \|v\| \|u\|$.
□

Corollaire

L'application $u \mapsto \|u\|$ définit une norme d'algèbre sur $\mathcal{LC}(E)$.

12.7.4 Calcul de norme triple

Proposition

Si $E \neq \{0_E\}$ et $u \in \mathcal{LC}(E,F)$ alors

$$\|u\| = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

dém. :
Pour $x \neq 0_E$, on a $\|u(x)\|_F \leqslant \|u\| \|x\|_E$ donc

$$\frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \leqslant \|u\|$$

On peut donc introduire

$$k = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

et on a $k \leqslant \|u\|$.
De plus pour tout $x \neq 0_E$, $\|u(x)\|_F \leqslant k \|x\|_E$ et ceci est aussi vrai pour $x = 0_E$ donc $\|u\| \leqslant k$.
□

Remarque On a aussi

$$\|u\| = \sup_{x \neq 0_E} \left\| u\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right) \right\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F$$

Pour étudier la continuité et la norme de $u \in \mathcal{L}(E,F)$:
- on écrit le plus finement possible $\|u(x)\| \leqslant k \|x\|$;
- on en déduit u continue et $\|u\| \leqslant k$;
- on cherche $x \neq 0_E$ tel que $\|u(x)\| = k \|x\|$ ce qui permet de conclure $\|u\| = k$ (et le sup est un max) ;
- à défaut, on cherche (x_n) telle que $x_n \neq 0$ et $\|u(x_n)\| / \|x_n\| \to k$ ce qui permet à nouveau de conclure.

Exemple Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|\,.\,\|_\infty$.
Considérons la forme linéaire $u : E \to \mathbb{R}$ définie par $u(f) = f(1) - f(0)$.

$$\forall f \in E,\ |u(f)| \leqslant |f(1)| + |f(0)| \leqslant 2 \|f\|_\infty$$

donc u est continue et $\|u\| \leqslant 2$.
Soit $f : x \mapsto 2x - 1$.
$f \in E$, $\|f\|_\infty = 1$ et $u(f) = 2$ donc $|u(f)| = 2$.
Par suite $\|u\| \geqslant \dfrac{|u(f)|}{\|f\|} = 2$ puis $\|u\| = 2$.

Exemple Soit $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ muni de $\|\,.\,\|_\infty$.
Considérons l'endomorphisme u qui à $f \in E$ associe sa primitive F qui s'annule en a.

$$u(f)(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

On a
$$|u(f)(x)| \leqslant \int_a^x |f(t)| \, \mathrm{d}t \leqslant \int_a^x \|f\|_\infty \, \mathrm{d}t \leqslant (b-a) \|f\|_\infty$$
donc
$$\|u(f)\|_\infty \leqslant (b-a) \|f\|_\infty$$
Ainsi u est continue et $\|u\| \leqslant (b-a)$.
Soit $f : x \mapsto 1$.
$f \in E$, $\|f\|_\infty = 1$, $u(f) : x \mapsto x - a$ et $\|u(f)\|_\infty = b - a$.
Par suite $\dfrac{\|u(f)\|}{\|f\|} \leqslant \|u\|$ donne $(b-a) \leqslant \|u\|$ et on peut conclure $\|u\| = b - a$.

Exemple Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\| \, . \, \|_1$.
Considérons l'endomorphisme u qui à $f \in E$ associe la fonction $t \mapsto tf(t)$.
Pour tout $f \in E$,
$$\|u(f)\|_1 = \int_0^1 |tf(t)| \, \mathrm{d}t \leqslant \|f\|_1$$
donc u est continue et $\|u\| \leqslant 1$.
Soit $f_n : t \mapsto t^n$.
$f_n \in E$, $\|f_n\|_1 = \dfrac{1}{n+1}$ et $\|u(f_n)\|_1 = \displaystyle\int_0^1 t^{n+1} \, \mathrm{d}t = \dfrac{1}{n+2}$ donc $\dfrac{\|u(f_n)\|}{\|f_n\|} = \dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \|u\|$.
A la limite quand $n \to +\infty$, $1 \leqslant \|u\|$ et donc on peut conclure $\|u\| = 1$.

12.7.5 Continuité des applications bilinéaires

Théorème

Soit $b : E \times F \to G$ une application bilinéaire. On a équivalence entre :
(i) b est continue ;
(ii) b est continue en $(0_E, 0_F)$;
(ii) $\exists k \in \mathbb{R}^+, \forall (x,y) \in E \times F$, $\|b(x,y)\|_G \leqslant k \|x\|_E \|y\|_F$.

dém. :
(i) $\Rightarrow$ (ii) : ok
(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Supposons b continue en $(0_E, 0_F)$.
Pour $\varepsilon = 1$, il existe $\alpha > 0$ vérifiant
$$\forall (x,y) \in E \times F, \ \|(x,y)\|_{E \times F} \leqslant \alpha \Rightarrow \|b(x,y)\|_G \leqslant 1$$
Soit $k = 1/\alpha^2 \in \mathbb{R}^+$. Montrons
$$\forall (x,y) \in E \times F, \ \|b(x,y)\| \leqslant k \|x\| \|y\|$$
Si $x = 0_E$ ou $y = 0_F$: ok
Sinon, on pose $x' = \dfrac{\alpha}{\|x\|} x$ et $y' = \dfrac{\alpha}{\|y\|} y$. On a $\|(x', y')\| = \alpha$ donc $\|b(x', y')\| \leqslant 1$.
Or $\|b(x', y')\| = \dfrac{\alpha^2}{\|x\| \|y\|} \|b(x,y)\|$ donc $\|b(x,y)\| \leqslant \dfrac{1}{\alpha^2} \|x\| \|y\|$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\|b(x,y)\| \leqslant k\,\|x\|\,\|y\|$ pour tout $x \in E$ et $y \in F$.
Soit $(x_0, y_0) \in E \times F$.

$$\|b(x,y) - b(x_0,y_0)\| = \|b(x,y) - b(x_0,y)\| + \|b(x_0,y) - b(x_0,y_0)\|$$

donc

$$\|b(x,y) - b(x_0,y_0)\| = \|b(x - x_0, y)\| + \|b(x_0, y - y_0)\| \leqslant k\,\|x - x_0\|\,\|y\| + k\,\|x_0\|\,\|y - y_0\|$$

Quand $(x,y) \to (x_0,y_0)$, $b(x,y) \to b(x_0,y_0)$ et donc b est continue en (x_0,y_0).
□

Exemple Si E est une algèbre normée $\times : E \times E \to E$ est continue car $\|xy\| \leqslant \|x\|\,\|y\|$.

Corollaire

Si E et F sont de dimensions finies alors toute application bilinéaire au départ de $E \times F$ est continue.

dém. :
Si $E = \{0_E\}$ ou $F = \{0_E\}$: ok
Sinon, on introduit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F et on considère $\|\cdot\|_E = \|\cdot\|_{\infty,\mathcal{B}}$ et $\|\cdot\|_F = \|\cdot\|_{\infty,\mathcal{C}}$.
Pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$ et $y = \sum_{j=1}^{p} y_j f_j \in F$ on a

$$b(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} x_i y_j b(e_i, f_j)$$

donc

$$\|b(x,y)\| \leqslant k\,\|x\|\,\|y\|$$

avec $k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \|b(e_i, f_j)\|$.
□

Théorème

Soit $m : E = E_1 \times \cdots \times E_p \to F$ une application multilinéaire. On a équivalence entre :
(i) m est continue ;
(ii) $\exists k \in \mathbb{R}^+, \forall x = (x_1, \dots, x_p) \in E, \|m(x)\|_F \leqslant k\,\|x_1\|_{E_1} \cdots \|x_p\|_{E_p}$.

dém. :
Même principe qu'au dessus.
□

Corollaire

Les applications multilinéaires au départ d'un produit d'espaces dimensions finies sont continues.

dém. :
Semblable à l'étude relative à la bilinéarité.
□

Exemple Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$ muni d'une base $\mathcal{B}$.
L'application $\det_{\mathcal{B}} : E^n \to \mathbb{K}$ est continue car multilinéaire au départ d'un espace de dimension finie.

12.7.6 Norme triple matricielle

Soient $\| \, . \, \|$ une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
L'application linéaire $\varphi_A : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ définie par $\varphi(X) = AX$ est continue.

Définition

On pose

$$\|A\| = \sup_{\|X\|=1} \|AX\| = \sup_{X \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$$

Théorème

$\| \, . \, \|$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \|AX\| \leqslant \|A\| \, \|X\|$$

dém. :
$\|A\| = \|\varphi_A\|$.
□

Exemple Pour $\|X\| = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j|$, on a

$$\|A\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$$

En effet pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = AX$, on a pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$ et donc

$$|y_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \, |x_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \, \|X\|_\infty \leqslant k \, \|X\|_\infty$$

avec $k = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.
Ainsi $\|Y\|_\infty \leqslant k \, \|X\|_\infty$ donc $\|A\| \leqslant k$.
Inversement, soit i_0 l'indice tel que $k = \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|$ et soit X la colonne définie de sorte que pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $|x_j| = 1$ et $a_{i,j} x_j = |a_{i,j}|$.
On a $\|X\|_\infty = 1$ et pour $Y = AX$, les calculs précédents donne $|y_i| \leqslant k \, \|X\|_\infty = k$.
Or on a aussi par construction $y_{i_0} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i_0,j} x_j = \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| = k$ donc $\|Y\|_\infty = k$
Par suite $\dfrac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} = k$ puis $\|A\| = k$.

Chapitre 13

Topologie des espaces normés

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$(E, \|\,.\,\|)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
Les notions qui suivront ne seront pas modifiées lorsqu'on passe d'une norme à une norme équivalente.

13.1 Parties ouvertes et parties fermées

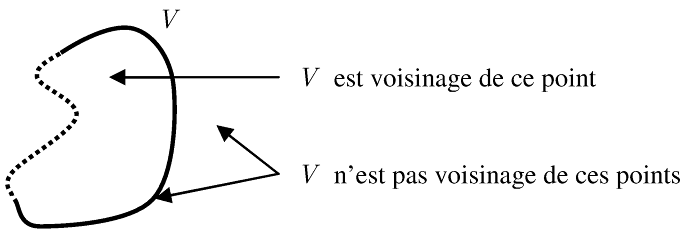
13.1.1 Voisinage

Définition

On appelle voisinage d'un élément a de E toute partie V de E vérifiant

$$\exists \alpha > 0, B(a, \alpha) \subset V$$

Exemple



Exemple Dans $E = \mathbb{R}$, une partie V de $\mathbb{R}$ est un voisinage de $a \in \mathbb{R}$ si, et seulement si,

$$\exists \alpha > 0,]a - \alpha, a + \alpha[\subset V$$

Proposition

Si V est un voisinage de a et W une partie de E contenant V alors W est un voisinage de a.

dém. :
Il existe $\alpha > 0$ tel que $B(a, \alpha) \subset V$ or $V \subset W$ donc $B(a, \alpha) \subset W$
□

Proposition

Si $V_1, \dots, V_n$ sont des voisinages de a alors $V_1 \cap \dots \cap V_n$ est un voisinage de a.

dém. :
Il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$ tels que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $B(a, \alpha_i) \subset V_i$.
Pour $\alpha = \min\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} > 0$, $B(a, \alpha) \subset V_1 \cap \dots \cap V_n$.
□

Remarque Ce résultat est faux pour une intersection infinie. Par exemple

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^\star} [-1/n, 1/n] = \{0\}$$

est une intersection infinie de voisinage de 0 qui n'est pas un voisinage de 0.

13.1.2 Parties ouvertes

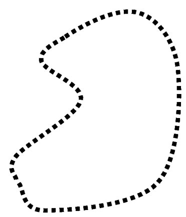
Définition

Une partie U de E est dite ouverte si elle est voisinage de chacun de ses points i.e. :

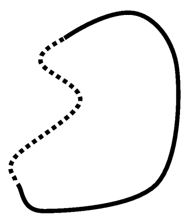
$$\forall a \in U, \exists \alpha > 0, B(a, \alpha) \subset U$$

On dit encore que U est un ouvert de E.

Exemple



Partie ouverte



Partie non ouverte

Exemple $\emptyset$ et E sont des parties ouvertes de E.

Exemple Dans $E = \mathbb{R}$, les intervalles ouverts $]a, b[\,,]a, +\infty[\,,]-\infty, a[$ sont des parties ouvertes.

Exemple Une boule ouverte $B(a, r)$ est une partie ouverte.
En effet pour $x \in B(a, r)$ et $\alpha = r - \|x - a\| > 0$, on a $B(x, \alpha) \subset B(a, r)$.

Proposition

Une réunion (finie ou infinie) de parties ouvertes est une partie ouverte.

dém. :
Soient $(U_i)_{i\in I}$ une famille de parties ouvertes de E et $U = \bigcup_{i\in I} U_i$.
Soit $a \in U$, il existe $i \in I$ tel que $a \in U_i$. Puisque U_i est un ouvert, il existe $\alpha > 0$ tel que $B(a, \alpha) \subset U_i$ et donc $B(a, \alpha) \subset U$.
□

Exemple Soient $X \subset E$ et $\alpha > 0$. $X_\alpha = \bigcup_{a\in X} B(a, \alpha)$ est un ouvert de E contenant X.

Proposition

Une intersection finie de parties ouvertes est une partie ouverte.

dém. :
Soit $(U_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille finie de parties ouvertes de E et $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$.
Soit $a \in U$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, il existe $\alpha_i > 0$ tel que $a \in U_i$. Pour $\alpha = \min\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} > 0$, on a pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $B(a, \alpha) \subset B(a, \alpha_i) \subset U_i$ donc $B(a, \alpha) \subset U$.
□

Remarque Une intersection infinie de parties ouvertes peut ne pas être ouverte. Par exemple

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^\star} \left]-1/n, 1/n\right[= \{0\}$$

n'est pas une partie ouverte.

Proposition

Si $U_1, \ldots, U_p$ sont des parties ouvertes des espaces normés $E_1, \ldots, E_p$ alors $U = U_1 \times \cdots \times U_p$ est une partie ouverte de l'espace normé produit $E = E_1 \times \cdots \times E_p$.

dém. :
Commençons par préciser les boules de E.
Notons $N_1, \ldots, N_p$ les normes sur $E_1, \ldots, E_p$ et $\|\,.\,\|$ la norme sur E.
Pour $x = (x_1, \ldots, x_p) \in E$, $\|x\| = \max_{1\leqslant j\leqslant p} N_j(x_j)$.
Soient $a = (a_1, \ldots, a_p)$ et $r > 0$.

$$x \in B(a, r) \Leftrightarrow \forall j \in \{1, \ldots, p\}, x_j \in B_j(a_j, r)$$

Ainsi

$$B(a, r) = \prod_{j=1}^{p} B_j(a_j, r)$$

Soient $U_1, \ldots, U_p$ des parties ouvertes de E et $U = U_1 \times \cdots \times U_p$.
Soit $a = (a_1, \ldots, a_p) \in U$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, $a_j \in U_j$ or U_j est ouvert donc il existe $\alpha_j > 0$

tel que $B_j(a_j, \alpha_j) \subset U_j$. Considérons alors $\alpha = \min\{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} > 0$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, $B_j(a_j, \alpha) \subset U_j$ donc

$$B(a, \alpha) = \prod_{j=1}^{p} B_j(a_j, \alpha) \subset \prod_{j=1}^{p} U_j = U$$

□

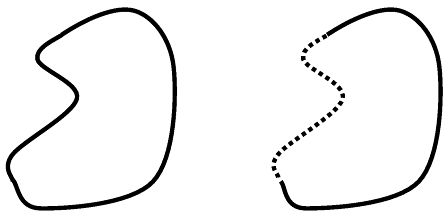
Exemple Dans $\mathbb{R}^2$, le produit cartésien de deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

13.1.3 Parties fermées

Définition

> Une partie F de E est dite fermée si son complémentaire est une partie ouverte.
> On dit encore que F est un fermé de E.

Exemple



Partie fermée — Partie non fermée

Exemple E et $\emptyset$ sont des fermés.

Exemple Dans $E = \mathbb{R}$, les intervalles fermés $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, a]$ sont des parties fermées de $\mathbb{R}$.

Proposition

> Une intersection (finie ou infinie) de parties fermées est un fermé.

dém. :
Par passage au complémentaire d'une union d'ouverts.
□

Proposition

> Une union finie de parties fermées est fermée.

dém. :
Par passage au complémentaire d'une intersection d'ouverts.
□

Remarque Une union infinie de parties fermées peut ne pas être fermée. Par exemple

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^\star}[1/n,1]=]0,1]$$

n'est pas fermée.

Théorème

Soit F une partie de E. On a équivalence entre :
(i) F est fermée ;
(ii) $\forall(x_n)\in F^{\mathbb{N}}, x_n\to a\Rightarrow a\in F$ [F contient les limites de ses suites convergentes].

dém. :
(i) $\Rightarrow$ (ii) Par contraposée.
Supposons qu'il existe $(x_n)\in F^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n\to a$ et $a\notin F$.
Soit $\alpha>0$. Pour n assez grand $\|x_n-a\|<\alpha$ donc $x_n\in B(a,\alpha)$ et donc $B(a,\alpha)\cap F\neq\emptyset$.
Ainsi $a\in\mathcal{C}_E F$ et

$$\forall\alpha>0, B(a,\alpha)\not\subset\mathcal{C}_E F$$

La partie $\mathcal{C}_E F$ n'est pas ouverte et donc F n'est pas fermée.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Par contraposée.
Supposons F non fermée i.e. $\mathcal{C}_E F$ non ouvert.
Il existe $a\in\mathcal{C}_E F$ tel que

$$\forall\alpha>0, B(a,\alpha)\cap F\neq\emptyset$$

Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour $\alpha=1/(n+1)>0$, il existe $x_n\in B(a,1/(n+1))\cap F$.
En faisant varier n, ceci détermine $(x_n)\in F^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n\to a$ avec $a\notin F$.
□

Exemple Les singletons sont des parties fermées.

Exemple Les boules fermées sont des parties fermées.
En effet si $(x_n)\in B_f(a,r)^{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\|x_n-a\|\leqslant r$ donne à la limite $\|\ell-a\|\leqslant r$ et donc $\ell\in B_f(a,r)$. La caractérisation séquentielle des parties fermées permet alors de conclure.

Proposition

Si $F_1,\ldots,F_p$ sont des parties fermées des espaces vectoriels normés $E_1,\ldots,E_p$ alors $F=F_1\times\ldots\times F_p$ est une partie fermée de l'espace vectoriel normé produit $E=E_1\times\cdots\times E_p$.

dém. :
Soit $(x(n))\in F^{\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite a.
On peut écrire $x(n)=(x_1(n),\ldots,x_p(n))$ avec $x_j(n)\to a_j$ où $a=(a_1,\ldots,a_p)$.
Pour tout $j\in\{1,\ldots,p\}$, $(x_j(n))\in F_j^{\mathbb{N}}$, or F_j est fermée donc $a_j\in F_j$ puis $a\in F$.
□

Exemple Dans $\mathbb{R}^2$, le produit cartésien de deux intervalles fermés de $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

13.1.4 Topologie relative

Soit X une partie de E.

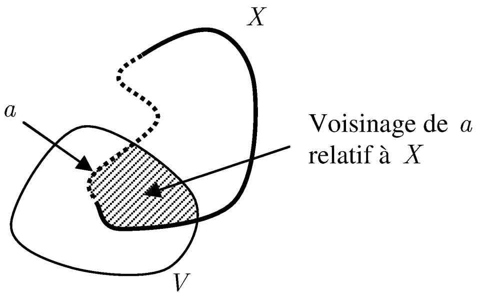
13.1.4.1 Voisinage relatif à X

Soit a un élément adhérent à X.

Définition

On appelle voisinage de a relatif à X, tout ensemble de la forme $V \cap X$ avec V voisinage de a.

Exemple



Exemple $[0,1]$ est un voisinage de 0 relatif à $\mathbb{R}^+$ car $[0,1] = [-1,1] \cap \mathbb{R}^+$.

Proposition

Soit A une partie de X. On a équivalence entre :
(i) A est un voisinage de a relatif à X ;
(ii) il existe $\alpha > 0$ tel que $B(a,\alpha) \cap X \subset A$.

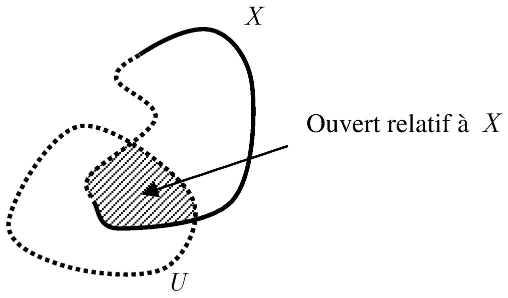
dém. :
(i) $\Rightarrow$ (ii) Si A est un voisinage de a relatif à X alors il existe V voisinage de a tel que $A = V \cap X$. Il existe $\alpha > 0$ tel $B(a,\alpha) \subset V$ et alors $B(a,\alpha) \cap X \subset A$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $B(a,\alpha) \cap X \subset A$. Pour $V = B(a,\alpha) \cup A$, V est un voisinage de A et $V \cap X = (B(a,\alpha) \cap X) \cup (A \cap X) = A$.
□

13.1.4.2 Ouvert relatif à X

Définition

On appelle ouvert relatif à X tout ensemble de la forme $U \cap X$ avec U ouvert de E.

Exemple



Exemple $[0,1[$ est un ouvert relatif de $\mathbb{R}^+$ car $[0,1[\,=\,]-1,1[\,\cap\,\mathbb{R}^+$.

Exemple $\emptyset$ et X sont des ouverts relatifs à X.

Proposition

Soit A une partie de X. On a équivalence entre :
(i) A est un ouvert relatif à X ;
(ii) A est voisinage relatif à X de chacun de ses points.

dém. :
(i) $\Rightarrow$ (ii) Si A est un ouvert relatif à X alors $A = U \cap X$ avec U ouvert.
Pour tout $a \in A$, $a \in U$ or U est ouvert donc U est voisinage de a et $A = U \cap X$ est voisinage de a relatif à X.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons (ii)
Soit $a \in A$. A est un voisinage relatif à X de a donc il existe $\alpha_a > 0$ tel que $B(a, \alpha_a) \cap X \subset A$.
Posons alors

$$U = \bigcup_{a \in A} B(a, \alpha_a)$$

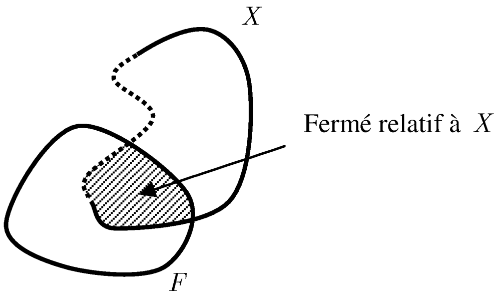
U est ouvert comme réunion d'ouverts et on vérifie $A = U \cap X$.
□

13.1.4.3 Fermé relatif à X

Définition

On appelle fermé relatif à X tout ensemble de la forme $F \cap X$ avec F fermé de E.

Exemple



Exemple $]0,1]$ est un fermé relatif de $]0,+\infty[$ car $]0,1] =]0,+\infty[\cap [0,1]$.

Exemple $\emptyset$ et X sont des fermés relatifs à X.

Proposition

Soit A une partie de X. On a équivalence entre :
(i) A est un fermé relatif à X ;
(ii) le complémentaire de A dans X est un ouvert relatif à X ;

dém. :
(i) $\Leftrightarrow$ (ii) car $A = F \cap X$ donne $X \backslash A = \mathcal{C}_E F \cap X$.
□

Proposition

Soit A une partie de X. On a équivalence entre :
(i) A est un fermé relatif à X ;
(ii) A contient les limites de ses suites convergeant dans X.

dém. :
(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons $A = F \cap X$ avec F fermé. Si $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ converge vers $x \in X$ alors puisque $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$, on a $x \in F$ donc $x \in F \cap X = A$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Par contraposée. Supposons que le complémentaire de A dans X n'est pas un ouverte relatif à X. Il existe alors $a \in X \backslash A$ tel que $X \backslash A$ n'est pas voisinage relatif à X de a. Pour tout $\alpha > 0$, on a alors $B(a,\alpha) \cap X \not\subset X \backslash A$ et donc $B(a,\alpha) \cap A \neq \emptyset$. Cette propriété utilisée avec $\alpha = 1/(n+1)$ permet de construire une suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \to a \in X \backslash A$.
□

13.1.5 Continuité et topologie

Soient $f : X \subset E \to F$ et $a \in E$ adhérent à X.

$$\begin{aligned}
f \underset{a}{\to} \ell &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in X, \|x - a\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in X, x \in B(a,\alpha) \Rightarrow f(x) \in B(\ell,\varepsilon) \\
&\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, f\left(B(a,\alpha) \cap X\right) \subset B(\ell,\varepsilon) \\
&\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, B(a,\alpha) \cap X \subset f^{-1}\left(B(\ell,\varepsilon)\right) \\
&\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, f^{-1}\left(B(\ell,\varepsilon)\right) \text{ est un voisinage de } a \text{ relatif à } X
\end{aligned}$$

Lemme

> Soient $f : X \subset E \to F$ et $a \in E$ adhérent à X.
> On a équivalence entre :
> (i) $f \xrightarrow[a]{} \ell$;
> (ii) Pour tout voisinage V de ℓ, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a relatif à X.

dém. :
(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons $f \xrightarrow[a]{} \ell$.
Soit V un voisinage de ℓ. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(\ell, \varepsilon) \subset V$. Or il existe $\alpha > 0$ tel que $B(a, \alpha) \cap X \subset f^{-1}(B(\ell, \varepsilon))$ donc $B(a, \alpha) \cap X \subset f^{-1}(V)$ et par suite $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a relatif à X.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons (ii).
Soit $\varepsilon > 0$. Pour $V = B(\ell, \varepsilon)$, V est un voisinage de ℓ donc $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a relatif à X et donc on peut alors conclure que $f \xrightarrow[a]{} \ell$.
□

Théorème

> Soit $f : X \subset E \to F$. On a équivalence entre :
> (i) f est continue ;
> (ii) l'image réciproque de chaque ouvert de F est un ouvert relatif à X ;
> (iii) l'image réciproque de chaque fermé de F est un fermé relatif à X.

dém. :
(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons f continue et considérons V un ouvert de F. Pour tout $a \in f^{-1}(V)$, $f(a) \in V$ or V est ouvert donc V est voisinage de $f(a)$ et donc $f^{-1}(V)$ est voisinage de a relatif à X. Par suite $f^{-1}(V)$ est ouvert relatif à X car voisinage de chacun de ses points.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons (ii). Pour tout $a \in X$ et tout $\varepsilon > 0$ considérons $V = B(f(a), \varepsilon)$ ouvert de F. $f^{-1}(V)$ est un ouvert relatif à X. Or $a \in f^{-1}(V)$ donc $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a relatif à X et donc il existe $\alpha > 0$ tel que $B(a, \alpha) \cap X \subset f^{-1}(B(\ell, \varepsilon))$. On a alors pour tout $x \in X$, $\|x - a\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$.
(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) via $f^{-1}(C_F Y) = C_X f^{-1}(Y)$ pour $Y \subset F$.
□

Remarque Le résultat est faux en terme d'image directe $\sin(]0, \pi[) =]0, 1]$ et $\exp(\mathbb{R}^-) =]0, 1]$.

Corollaire

> Pour $f : E \to F$ continue, l'image réciproque d'une partie ouverte (resp. fermée) de F est une partie ouverte de E (resp. fermée).

dém. :
Car un ouvert (resp. un fermé) relatif à E est un ouvert (resp. un fermé) de E.
□

Exemple $U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < y\right\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = y - x$.
$U = f^{-1}(\mathbb{R}^{+\star})$ or f est continue et $\mathbb{R}^{+\star}$ est ouvert donc U est un ouvert relatif à $\mathbb{R}^2$ i.e. un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exemple Soient $f : E \to \mathbb{R}$ continue et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Les ensembles $\{x \in E/f(x) = \alpha\}$, $\{x \in E/f(x) \leqslant \alpha\}$ et $\{x \in E/f(x) \geqslant \alpha\}$ sont fermés.
Les ensembles $\{x \in E/f(x) \neq \alpha\}$, $\{x \in E/f(x) < \alpha\}$ et $\{x \in E/f(x) > \alpha\}$ sont ouverts.

Exemple $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est une partie ouverte.
En effet $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \overset{-1}{\det}(\mathbb{R}^\star)$ et $\det$ est continue et $\mathbb{R}^\star$ est un ouvert.
De même, on obtient que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})/ \det A = 1\}$ est un fermé.

Exemple $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})/{}^tAA = I_n\right\}$ est une partie fermée.
En effet $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{I_n\})$ avec $f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto {}^tAA$ continue et $\{I_n\}$ fermé.

13.1.6 Equivalence de normes et continuité de l'identité

Soient N_1 et N_2 deux normes sur E. Nous allons nous intéresser à l'application $\mathrm{Id}_E : E \to E$ en munissant E de N_1 au départ et de N_2 à l'arrivée ; on note $\mathrm{Id}_E : (E, N_1) \to (E, N_2)$

Lemme

On a équivalence entre :
(i) N_2 est dominée par N_1 ;
(ii) les ouverts de (E, N_2) sont des ouverts de (E, N_1)
(iii) l'application $\mathrm{Id}_E : (E, N_1) \to (E, N_2)$ est continue.

dém. :
(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons qu'il existe $k > 0$ tel que $N_2 \leqslant kN_1$.
Soit U une partie ouverte de (E, N_2).
Pour tout $a \in U$, il existe $\alpha > 0$ tel que $B_{N_2}(a, \alpha) \subset U$. Or $B_{N_1}(a, \alpha/k) \subset B_{N_2}(a, \alpha)$ donc $B_{N_1}(a, \alpha/k) \subset U$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Supposons (ii)
Pour tout ouvert U de (E, N_2), son image réciproque $\mathrm{Id}_E^{-1}(U) = U$ est un ouvert de (E, N_1) donc l'application $\mathrm{Id}_E : (E, N_1) \to (E, N_2)$ est continue.
(iii) $\Rightarrow$ (i) Supposons (iii). Puisque l'application Id_E est linéaire, il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \in E, N_2(\mathrm{Id}_E(x)) \leqslant kN_1(x)$$

et donc N_2 est dominée par N_1.
□

Théorème

On a équivalence entre :
(i) les normes N_1 et N_2 sont équivalentes ;
(ii) les normes N_1 et N_2 définissent les mêmes parties ouvertes sur E.
(ii) l'application $\mathrm{Id}_E : (E, N_1) \to (E, N_2)$ est bicontinue (i.e. continue ainsi que sa réciproque)

dém. :
Immédiat en vertu du précédent résultat.
□

13.2 Intérieur et adhérence

X désigne une partie de E.

13.2.1 Intérieur d'une partie

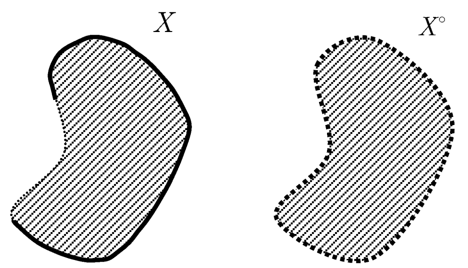
Définition

Un élément $a \in E$ est dit intérieur à une partie X si X est voisinage de a i.e.

$$\exists \alpha > 0, B(a, \alpha) \subset X$$

On note X° l'ensemble des éléments intérieurs à X appelé intérieur de X.

Exemple



Exemple L'intérieur d'un intervalle non vide est l'intervalle ouvert de mêmes extrémités.

Théorème

X° est la réunion des ouverts inclus dans X.
Par suite X° est le plus grand ouvert inclus dans X.

dém. :
Notons U la réunion des ouverts inclus dans X.
U est un ouvert inclus dans X et U contient tous les ouverts inclus dans X. Montrons $U = X^\circ$
U est un ouvert inclus dans X donc X est voisinage de chacun des points de U et donc $U \subset X^\circ$.
Inversement, si $a \in X^\circ$ il existe $\alpha > 0$ tel que $B(a, \alpha) \subset X$. $B(a, \alpha)$ est alors un ouvert inclus dans X donc $B(a, \alpha) \subset U$ puis $a \in U$. Ainsi $X^\circ \subset U$ puis $=$.
□

Corollaire

Une partie X est ouverte si, et seulement si, $X^\circ = X$.

dém. :
Si X est une partie ouverte alors le plus grand ouvert inclus dans X est X et donc $X^\circ = X$.
Si $X^\circ = X$ alors X est une partie ouverte car un intérieur est un ouvert.
□

Exemple Pour toute partie X de E,

$$X^{\circ\circ} = X^\circ$$

13.2.2 Adhérence d'une partie

Définition

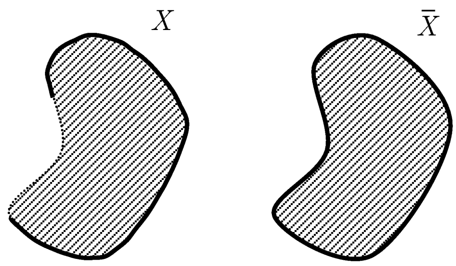
On dit qu'un élément a est adhérent à X si X intercepte tous les voisinages de a i.e. :

$$\forall \alpha > 0, B(a, \alpha) \cap X \neq \emptyset$$

On appelle adhérence de X l'ensemble noté $\bar{X}$ des éléments adhérents à X.

Rappel Si X est une partie non vide, on a équivalence entre :
(i) a est adhérent à X ;
(ii) $d(a, X) = 0$;
(iii) $\exists (x_n) \in X^{\mathbb{N}}, x_n \to a$.

Exemple



Exemple L'adhérence d'un intervalle non vide est l'intervalle fermé de mêmes extrémités.

Exemple L'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de mêmes centre et rayon.
En effet, si $x \in \overline{B(a,r)}$ alors il existe $(x_n) \in B(a,r)^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to x$ et l'inégalité $\|x_n - a\| < r$ donne à la limite $\|x - a\| \leqslant r$ donc $x \in \bar{B}(a,r)$.
Inversement, si $x \in \bar{B}(a,r)$ alors $x = \lim(x_n)$ avec

$$x_n = a + \frac{n}{n+1}(x - a) \in B(a,r)$$

Proposition

On a

$$\mathcal{C}_E \bar{X} = (\mathcal{C}_E X)^\circ$$

dém. :
$x \in \mathcal{C}_E \bar{X} \Leftrightarrow x \notin \bar{X} \Leftrightarrow \exists \alpha > 0, B(a, \alpha) \cap \bar{X} = \emptyset \Leftrightarrow \exists \alpha > 0, B(a, \alpha) \subset \mathcal{C}_E X \Leftrightarrow a \in (\mathcal{C}_E X)^\circ$.
□

Théorème

> $\bar{X}$ est l'intersection des fermés contenant X.
> Par suite $\bar{X}$ est le plus petit fermé contenant X.

dém. :
Le complémentaire de l'intersection des fermés contenant X est la réunion des ouverts inclus dans le complémentaire de X, c'est donc l'intérieur du complémentaire de X.
□

Corollaire

> Une partie X est fermée si, et seulement si, $\bar{X} = X$.

dém. :
Si X est une partie fermée alors X est le plus petit fermé contenant X et donc $\bar{X} = X$.
Si $\bar{X} = X$ alors X est une partie fermée car une adhérence est un fermé.
□

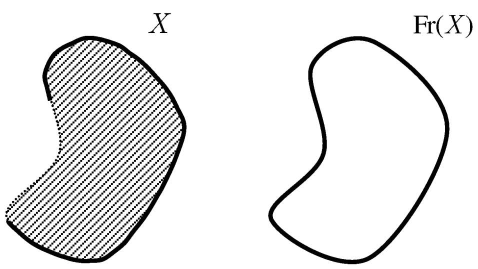
Exemple $\bar{\bar{X}} = \bar{X}$.

13.2.3 Frontière

Définition

> On appelle frontière d'une partie X de E l'ensemble $\mathrm{Fr}(X) = \bar{X} \backslash X^\circ$.

Exemple



Exemple Dans $E = \mathbb{R}$:
$\mathrm{Fr}\left([a, b[\right) = [a, b] \setminus]a, b[= \{a, b\}$.
$\mathrm{Fr}\left(\mathbb{Q}\right) = \bar{\mathbb{Q}} \backslash \mathbb{Q}^\circ = \mathbb{R}$.

Remarque $\bar{X} = X \cup \mathrm{Fr}(X)$ et $X^\circ = X \backslash \mathrm{Fr}(X)$

Proposition

> $\mathrm{Fr}(X) = \bar{X} \cap \overline{\mathcal{C}_E X} = \mathrm{Fr}(\mathcal{C}_E X)$ et donc $\mathrm{Fr}(X)$ est une partie fermée.

dém. :
$\mathrm{Fr}(X) = \bar{X} \backslash X^\circ = \bar{X} \cap \mathcal{C}_E\left(X^\circ\right) = \bar{X} \cap \overline{\mathcal{C}_E X}$.
□

13.3 Connexité par arcs

X désigne une partie de E.

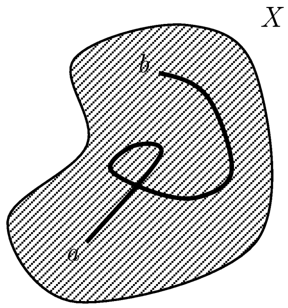
13.3.1 Définition

Définition

On appelle chemin inscrit dans $X \subset E$ toute application $\gamma : [0,1] \to E$ continue vérifiant

$$\forall t \in [0,1]\,, \gamma(t) \in X$$

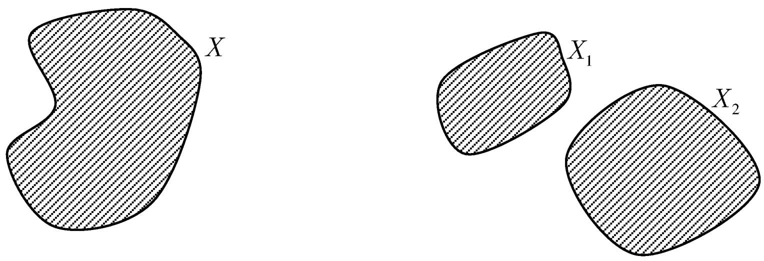
Les éléments $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$ sont appelés extrémités du chemin γ.



Définition

Une partie X de E est dite connexe par arcs si, pour tout $a, b \in X$, il existe un chemin inscrit dans X d'extrémités a et b.

Exemple



X connexe par arcs $\qquad$ $X_1 \cup X_2$ non connexe par arcs

Proposition

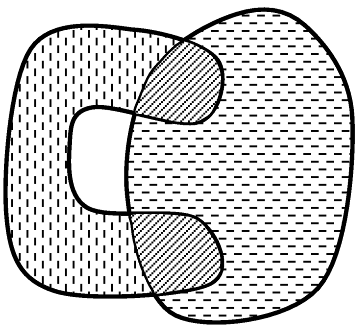
Les parties convexes sont connexes par arcs.

dém. :
Soit X une partie convexe.
Pour tout $a, b \in X$, $[a, b] = \{(1-\lambda)a + \lambda b / \lambda \in [0,1]\} \subset X$.
Considérons alors $\gamma : t \in [0,1] \mapsto \gamma(t) = (1-t)a + tb$.
γ est continue, $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$ et $\gamma\left([0,1]\right) \subset A$.
□

Exemple Les boules, les sous-espaces vectoriels et les sous-espaces affines sont des parties connexes par arcs car convexes.

Exemple Dans $E = \mathbb{R}$, les intervalles sont connexes par arcs.
En revanche $\mathbb{R}^\star$ n'est pas connexe par arcs.

Remarque - la réunion de deux connexes par arcs non disjoints est évidemment connexe par arcs ;
- l'intersection de deux connexes par arcs ne l'est pas nécessairement. ;
- le produit cartésien de deux connexes pas arcs est connexe par arcs.



13.3.2 Image continue d'un connexe par arcs

Théorème

L'image directe d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.

dém. :
Soit $f : X \subset E \to F$ continue avec X connexe par arcs.
Pour $a', b' \in f(X)$, il existe $a, b \in X$ tels que $a' = f(a)$ et $b' = f(a)$.
Puisque X est connexe par arcs, il existe $\gamma : [0,1] \to E$ continue telle que $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$ et $\gamma([0,1]) \subset X$.
Considérons alors $\gamma' = f \circ \gamma : [0,1] \to F$. γ' est continue, $\gamma'(0) = a'$, $\gamma'(1) = b'$ et $\gamma'([0,1]) = f(\gamma([0,1])) \subset f(X)$.
□

Exemple Le cercle $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$ est connexe par arcs.
En effet c'est l'image du connexe $\mathbb{R}$ par l'application continue $t \mapsto \mathrm{e}^{it}$.

Exemple $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs car $\det \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^\star$ et $\mathbb{R}^\star$ n'est pas connexe par arcs.

13.3.3 Généralisation du théorème des valeurs intermédiaires

Théorème

Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont ses intervalles.

dém. :
Autrement dit, les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles de $\mathbb{R}$.
Soit X un intervalle de $\mathbb{R}$, X est convexe donc connexe par arcs.
Inversement, soit X une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}$.
Si $X = \emptyset$ alors X est intervalle.
Sinon, pour tout $a \leqslant b \in X$, il existe $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$ et $\gamma([0,1]) \subset X$. Or, par application du théorème des valeurs intermédiaires, la fonction γ prend toutes les comprises entre a, b et donc $[a,b] \subset \gamma([0,1]) \subset X$. Ainsi

$$\forall a \leqslant b \in X, [a,b] \subset X$$

Posons alors $\alpha = \inf X \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $\beta = \sup X \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Pour tout $x \in]\alpha,\beta[$, x n'est ni minorant, ni majorant de X et donc il existe $a, b \in X$ tel que $a < x < b$ et donc $x \in [a,b] \subset X$. Ainsi $]\alpha,\beta[\subset X$ et donc $X =]\alpha,\beta[$, $]\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta[$ ou $[\alpha,\beta]$.
Finalement X est un intervalle de $\mathbb{R}$.
□

Théorème

Si X est une partie connexe par arcs de E et $f : X \to \mathbb{R}$ une application continue alors $f(X)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
En conséquence f prend toute valeur intermédiaire entre deux valeurs déjà prises.

dém. :
$f(X)$ est l'image d'un connexe par arcs par une application continue, c'est donc une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}$. Or ces dernières sont des intervalles.
□

Exemple Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue injective.
Montrons que f est strictement monotone.
Considérons $X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x < y\right\}$. X est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$ donc connexe par arcs.
La fonction $v : X \to \mathbb{R}$ définie par $v(x,y) = f(y) - f(x)$ est continue et ne s'annule pas en vertu de l'injectivité de f. L'image par v de X est donc un intervalle de $\mathbb{R}$ qui ne contient pas 0. Par suite $v(X) \subset \mathbb{R}^{+\star}$ ou $v(X) \subset \mathbb{R}^{-\star}$ et dans les deux cas f est strictement monotone.

13.4 Densité

13.4.1 Définition

Définition

Une partie X de E est dite dense si $\bar{X} = E$.

Théorème

On a équivalence entre :
(i) X est une partie dense de E ;
(ii) $\forall a \in E, \forall \alpha > 0, B(a,\alpha) \cap X \neq \emptyset$;
(iii) $\forall a \in E, \exists (a_n) \in X^{\mathbb{N}}, a_n \to a$.

dém. :
(ii) et (iii) signifient $E \subset \bar{X}$.
□

Exemple $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont des parties denses de $\mathbb{R}$.

Exemple $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est une partie dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
En effet, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $A_p = A + \frac{1}{p}I_n \to A$.
Or la matrice A n'a qu'un nombre fini de valeurs propres, donc pour p assez grand $A_p \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

Définition

Une partie X' de E est dite dense dans X si $X \subset \overline{X'}$.

Exemple $]a, b[$ est dense dans $[a, b[$.

Exemple $\mathbb{Q} \cap [0, 1[$ est dense dans $[0, 1[$.

13.4.2 Raisonnement par densité

Théorème

Soient $f, g : X \subset E \to F$ continues.
Si f et g coïncident sur une partie X' dense dans X alors $f = g$.

dém. :
Soit $x \in X$. Il existe $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to x$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f(x_n) = g(x_n)$ donc à la limite $f(x) = g(x)$.
□

Exemple Déterminons les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Soit f solution.
On a $f(0 + 0) = f(0) + f(0)$ donc $f(0) = 0$.
On a $f(2a) = f(a + a) = f(a) + f(a) = 2f(a)$,...
Par récurrence, on montre

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f(na) = nf(a)$$

Puisque $f(x) + f(-x) = f(0) = 0$ on a $f(-x) = -f(x)$.
Par suite, on a

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, f(na) = nf(a)$$

Soit $x = p/q \in \mathbb{Q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^\star$.
$f(x) = pf(1/q)$ et $f(1) = qf(1/q)$ donc $f(x) = \frac{p}{q}f(1) = \alpha x$ en posant $\alpha = f(1)$.
Les fonctions $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto \alpha x$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et coïncident sur la partie $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$, elles sont donc égales sur $\mathbb{R}$.

Exemple Montrons que
$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \chi_{AB} = \chi_{BA}$$

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{AB}(\lambda) = \det(AB - \lambda I_n) = \det(A)\det(B - \lambda A^{-1})$
puis $\chi_{AB}(\lambda) = \det(B - \lambda A^{-1})\det A = \det(BA - \lambda I_n) = \chi_{BA}(\lambda)$.
Les applications $A \mapsto \chi_{AB}(\lambda)$ et $A \mapsto \chi_{BA}(\lambda)$ sont continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et coïncident sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, elles sont donc égales sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Ainsi pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda)$ et donc $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

13.4.3 Théorème de Weierstrass

Soient $a < b \in \mathbb{R}$. On note $\mathcal{P}([a,b], \mathbb{K})$ l'espace des fonctions polynomiales de $[a,b]$ vers $\mathbb{K}$.

Théorème

Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$ on a
$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathcal{P}([a,b], \mathbb{K}), \forall t \in [a,b], |f(t) - p(t)| \leqslant \varepsilon$$

Corollaire

Toute fonction continue sur $[a,b]$ peut s'exprimer comme limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

Corollaire

$\mathcal{P}([a,b], \mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$ normé par $\|\,.\,\|_\infty$.

dém. :
$$\forall f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K}), \forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathcal{P}([a,b], \mathbb{K}), \|f - p\|_\infty < \varepsilon$$
donc $B(f, \varepsilon) \cap \mathcal{P}([a,b], \mathbb{K}) \neq \emptyset$ i.e. $f \in \overline{\mathcal{P}([a,b], \mathbb{K})}$.
□

Remarque Pour $k \in \mathbb{N}^\star \cup \{\infty\}$, $\mathcal{C}^k([a,b], \mathbb{K})$ est aussi dense $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$ normé par $\|\,.\,\|_\infty$ car $\mathcal{P}([a,b], \mathbb{K}) \subset \mathcal{C}^k([a,b], \mathbb{K})$

Remarque Puisque $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_2$ sont dominés par $\|\,.\,\|_\infty$, ces résultats de densité valent encore pour ces normes.

Exemple Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$
Montrons que f est la fonction nulle.

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a par linéarité
$$\int_0^1 P(t)f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$
Il existe une suite $(P_n) \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ telle que $P_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$.
On a alors
$$\left|\int_0^1 P_n(t)f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 |P_n(t) - f(t)|\,|f(t)|\,\mathrm{d}t$$
et donc
$$\left|\int_0^1 P_n(t)f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \|P_n - f\|_\infty \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \to 0$$
Ainsi
$$\int_0^1 P_n(t)f(t)\,\mathrm{d}t \to \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t$$
et puisque $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, on en déduit
$$\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$$
Par nullité de l'intégrale d'une fonction continue et positive, on peut conclure $f = 0$.

Exemple Montrons que pour tout $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$,
$$\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t \to 0$$
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $g \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{K})$ telle que $\|f - g\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_a^b (f(t) - g(t))\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_a^b g(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t\right|$$
D'une part
$$\left|\int_a^b (f(t) - g(t))\,\mathrm{e}^{-int}\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b \|f - g\|_\infty\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\varepsilon$$
D'autre part
$$\int_a^b g(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{in}\left[g(t)\mathrm{e}^{-int}\right]_a^b + \frac{1}{in}\int_a^b g'(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t$$
et donc
$$\left|\int_a^b g(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t\right| = \frac{|g(a)| + |g(b)|}{n} + \frac{1}{n}\int_a^b |g'(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{C^{te}}{n} \to 0$$
Ainsi il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geqslant N, \left|\int_a^b g(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$$
puis
$$\forall n \geqslant N, \left|\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant (b-a+1)\varepsilon$$

13.4.4 Musculation : Sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$

Théorème

Les sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$ sont de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a\in\mathbb{R}$ ou bien sont des parties denses dans $\mathbb{R}$.

dém. :
Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$.
Si $H=\{0\}$ alors $H=a\mathbb{Z}$ avec $a=0$.
Sinon, il existe $h\in H$ tel que $h\neq 0$ et, quitte à considérer son opposé, on peut supposer $h>0$.
Posons alors $a=\inf H^+$ avec $H^+=\{h\in H/h>0\}$.
Cette borne inférieure existe car H^+ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée.
Cas $a>0$:
Montrons $H=a\mathbb{Z}$.
Commençons par justifier $a\in H$.
Puisque $a=\inf H^+$, $2a$ n'est pas minorant de H^+ et donc il existe $b\in H^+$ tel que $a\leqslant b<2a$.
Si $b>a$ alors $b-a>0$ or, par opération dans le sous-groupe H, on a $b-a\in H$. Ainsi $b-a\in H^+$.
Cependant $b-a<a=\inf H^+$, c'est absurde.
On en déduit $b=a$ et, puisque $b\in H^+$, on obtient $a\in H$.
Sachant $a\in H$, on peut affirmer $a\mathbb{Z}=\langle a\rangle\subset H$.
Inversement, soit $x\in H$.
Par division euclidienne, on peut écrire $x=aq+r$ avec $a\in\mathbb{Z}$ et $r\in[0,a[$.
Notons que $r=x-aq\in H$ car $x\in H$ et $aq\in a\mathbb{Z}\subset H$.
Si $r>0$ alors $r\in H^+$. Or $r<a=\inf H^+$. C'est absurde.
On en déduit $r=0$ puis $x=aq\in a\mathbb{Z}$.
Par double inclusion, on obtient $H=a\mathbb{Z}$.
Cas $a=0$:
Montrons que H est dense dans $\mathbb{R}$.
Soient $x\in\mathbb{R}$ et $\varepsilon>0$.
Puisque $\inf H^+=0$, il existe $h\in H^+$ tel que $0<h<\varepsilon$.
Posons alors $n=E\left(x/h\right)\in\mathbb{Z}$.
On a $x/h-1<n\leqslant x/h$ donc $x-h<nh\leqslant x$ puis $nh\in\,]x-\varepsilon,x]$.
Or $nh\in H$ donc on peut affirmer $H\cap\,]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\,\neq\emptyset$.
□

Exemple Montrons que $\{\cos(n)/n\in\mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1,1]$.
Considérons $H=\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}$.
H est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$.
S'il est de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a\in\mathbb{R}$ alors, puisque $\mathbb{Z}\subset H=a\mathbb{Z}$, on a $a\in\mathbb{Q}$.
De plus, puisque $2\pi\mathbb{Z}\subset H=a\mathbb{Z}$, on a aussi $\pi\in a\mathbb{Q}$.
On en déduit que π est rationnel.
C'est absurde.
On peut donc affirmer que $H=\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}$ est un sous-groupe dense dans $\mathbb{R}$.
Considérons alors $x\in[-1,1]$ et $\theta=\arccos x\in[0,\pi]\subset\mathbb{R}$.
Il existe une suite d'éléments de H convergeant vers θ et donc il existe deux suites d'entiers (a_n) et (b_n) telles que $a_n+2\pi b_n\to\theta$.
On a alors $\cos(|a_n|)=\cos(a_n+b_n)\to\cos\theta=x$.

Chapitre 14

Compacité et complétude

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
$(E, \|\,.\,\|)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

14.1 Compacité

14.1.1 Suite extraite

Définition

On appelle extractrice toute application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.

Proposition

Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une extractrice alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \varphi(k) \geqslant k$$

dém. :
Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ obtenue en exploitant $\varphi(k+1) \geqslant \varphi(k) + 1$ car $\varphi(k+1) > \varphi(k)$ avec $\varphi(k+1) \in \mathbb{N}$
□

Définition

On appelle suite extraite (ou sous-suite) d'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments E toute suite $v = (v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pour laquelle il existe une extractrice φ vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N}, v_k = u_{\varphi(k)}$$

Remarque En posant $n_k = \varphi(k)$, une suite extraire peut se percevoir comme une suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ avec $n_k < n_{k+1}$.

Exemple (u_{2k}) et (u_{2k+1}) sont deux suites extraites de (u_k).

Proposition

Si w est une suite extraire d'une suite v extraite d'une suite u alors w est extraite de u.

dém. :
On suppose $(v_k) = (u_{\varphi(k)})$ et $(w_\ell) = (v_{\psi(\ell)})$ avec φ et ψ extractrices.
On a alors $(w_\ell) = (u_{\theta(\ell)})$ avec $\theta = \varphi \circ \psi$ extractrice.
□

Proposition

Si (u_n) converge vers ℓ alors toute suite extraite de (u_n) converge aussi vers ℓ.

dém. :
Soit $(v_k) = (u_{\varphi(k)})$ une suite extraite de (u_n) avec $u_n \to \ell$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon$.
Or pour $k \geqslant N$, $\varphi(k) \geqslant k \geqslant N$ donc $\|v_k - \ell\| = \left\|u_{\varphi(k)} - \ell\right\| \leqslant \varepsilon$.
Ainsi $v_k \to \ell$.
□

14.1.2 Valeur d'adhérence d'une suite

Définition

On appelle valeur d'adhérence d'une suite $u = (u_n)$ d'éléments de E toute limite d'une suite convergente extraite de u. On note $\text{Adh}(u)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite u.

Exemple Si $u_n \to \ell$ alors $\text{Adh}(u) = \{\ell\}$.

Exemple Soit $u_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n+1}$. $u_{2n} \to 1$ et $u_{2n+1} \to -1$ donc $\text{Adh}(u) = \{1, -1\}$.

Exemple Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\|u_n\| \to +\infty$.
Aucune suite extraite ne converge car aucune suite extraite de u n'est bornée.
On en déduit $\text{Adh}(u) = \emptyset$.

Remarque Les valeurs d'adhérence d'une suite sont les valeurs au voisinage desquelles s'accumule une infinité de termes de la suite.

Théorème

Toute suite bornée d'éléments de $\mathbb{K}$ admet au moins une valeur d'adhérence.

14.1.3 Partie compacte

Définition

Une partie K de E est dite compacte si toute suite d'éléments de K possède au moins une valeur d'adhérence dans K i.e.

$$\forall (u_n) \in K^{\mathbb{N}}, \exists \varphi \text{ extractrice}, u_{\varphi(n)} \to \ell \in K$$

On dit encore que K est un compact de E.

Remarque Dans une partie compacte K, on ne peut répartir les éléments d'une suite sans qu'il y ait accumulation au voisinage d'un point de K.

Exemple Sur $E = \mathbb{R}$, les segments $[a, b]$ sont des parties compactes.
En effet une suite d'éléments de $[a, b]$ est bornée donc admet une suite extraite convergente dont la limite sera élément de $[a, b]$.

Exemple Sur $E = \mathbb{C}$, $\overline{D(0, R)} = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leqslant R\}$ est une partie compacte
En effet une suite d'éléments de $\overline{D(0, R)}$ est bornée donc admet une suite extraite convergente dont la limite sera élément de $\overline{D(0, R)}$.

Exemple Sur $E = \mathbb{R}$,
$[a, +\infty[$ n'est pas compact.
En effet la suite définie par $u_n = a + n$ n'a pas de valeur d'adhérence.
$]a, b]$ n'est pas compact.
En effet, la suite définie $u_n = a + (b - a)/(n + 1)$ n'a qu'une valeur d'adhérence et celle-ci n'est pas élément de $]a, b]$.

Théorème

> Toute partie compacte est fermée et bornée.

dém. :
Soit K une partie compacte.
Montrons que K est fermée.
Soit (x_n) une suite convergente d'éléments de K et posons ℓ sa limite.
Puisque K est compact, (x_n) admet une valeur d'adhérence dans K, or puisque ℓ est la seule valeur d'adhérence de la suite convergente (x_n), on peut conclure que $\ell \in K$. En vertu de la caractérisation séquentielle des parties fermées, on obtient K fermée.
Montrons que K est bornée.
Par l'absurde, supposons K non bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in K$ tel que $\|x_n\| > n$. En faisant varier n, cela détermine une suite $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$ telle que $\|x_n\| \to +\infty$. Or cette suite n'a pas de valeur d'adhérence. Absurde.
□

Proposition

> Toute partie fermée d'une partie compacte est elle-même compacte.

dém. :
Soit F une partie fermée d'un compact K.
Soit (x_n) une suite d'éléments de F. La suite (x_n) apparaît aussi comme une suite d'éléments du compact $\mathbb{K}$, elle admet donc une valeur d'adhérence $\ell \in K$ c'est-à-dire qu'il existe une extractrice φ telle que $x_{\varphi(n)} \to \ell$. La suite $(x_{\varphi(n)})$ est une suite convergente d'éléments du fermé F donc $\ell \in F$. Finalement, (x_n) admet une valeur d'adhérence dans F.
□

Proposition

> Si $K_1, \ldots, K_p$ sont des parties compactes d'espaces vectoriels normés $E_1, \ldots, E_p$ alors $K = K_1 \times \cdots \times K_p$ est une partie compacte de l'espace vectoriel normé produit $E = E_1 \times \cdots \times E_p$.

dém. :
Cas $p = 2$
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $K_1 \times K_2$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $u_n = (x_n, y_n)$ avec $x_n \in K_1$ et $y_n \in K_2$.
La suite (x_n) est une suite d'éléments du compact K_1 donc elle admet une valeur d'adhérence x dans K_1. Ainsi, il existe une extractrice φ telle que $x_{\varphi(n)} \to x$ avec $x \in K_1$.
La suite extraite $(y_{\varphi(n)})$ est une suite d'éléments du compact K_2 donc elle admet une valeur d'adhérence y dans K_2. Ainsi, il existe une extractrice ψ telle que $y_{\varphi(\psi(n))} \to y$ avec $y \in K_2$.
Or, par extraction d'une suite convergente, on a encore $x_{\varphi(\psi(n))} \to x$ et donc $u_{\varphi(\psi(n))} = (x_{\varphi(\psi(n))}, y_{\varphi(\psi(n))}) \to (x, y)$ avec $(x, y) \in K_1, K_2$. Finalement, toute suite d'éléments de $K_1 \times K_2$ admet une valeur d'adhérence dans $K_1 \times K_2$.
Cas général
On généralise la démarche précédente en raisonnant par récurrence.
□

14.1.4 Compacité en dimension finie

Lemme

> Toute suite bornée d'éléments de $\mathbb{K}^p$ admet une valeur d'adhérence.

dém. :
Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: une suite bornée de $\mathbb{R}^p$ évolue dans un ensemble de la forme $[-M, M]^p$ qui est compact.
Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: une suite bornée de $\mathbb{C}^p$ évolue dans un ensemble de la forme $\overline{D(0, M)}^p$ qui est compact.
□

Théorème

> En dimension finie, les parties compactes sont exactement les parties fermées et bornées.

dém. :
Les parties compactes sont assurément de cette forme. Etudions la réciproque.
Soit K une partie fermée bornée d'un espace vectoriel normé E de dimension finie $p \in \mathbb{N}$.
Si $p = 0$ alors $E = \{0\}$ et $K = \emptyset$ ou $K = \{0\}$. Dans les deux cas K est un compact.
Sinon, on peut introduire une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ de E.
Soit $u = (u(n))$ une suite d'éléments de K.
Notons $u_1, \ldots, u_p$ les suites composantes de u.
Considérons $v \in (\mathbb{K}^p)^{\mathbb{N}}$ définie par $v(n) = (u_1(n), \ldots, u_p(n))$
La suite u est bornée donc ses suites composantes le sont aussi et par conséquent v est bornée.
Il existe alors φ extractrice telle que $(v(\varphi(n)))$ converge donc les $(u_i(\varphi(n)))$ convergent et finalement $(u(\varphi(n)))$ converge.
De plus $(u(\varphi(n))) \in K^{\mathbb{N}}$ et K est fermé donc $(u(\varphi(n)))$ converge dans K.
□

Exemple En dimension finie, les boules fermées sont compactes.

Exemple $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
En effet $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée car

$$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{I_n\}) \text{ avec } f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^tAA \text{ continue}$$

et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée car

$$\forall A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \forall 1 \leqslant i, j \leqslant n, |a_{i,j}| \leqslant 1$$

Corollaire

> En dimension finie, toute suite bornée admet une valeur d'adhérence.

dém. :
Car une telle suite évolue dans une boule fermée qui est compacte.
□

Exemple Soient F une partie fermée non vide d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et x un vecteur de E.
Montrons qu'il existe $y \in F$ tel que $d(x, F) = \|y - x\|$.
Par définition

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|y - x\|$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $y_n \in F$ tel que

$$d(x, F) \leqslant \|y_n - x\| < d(x, F) + \frac{1}{n+1}$$

En faisant varier n, cela définit une suite $(y_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telle que $\|y_n - x\| \to d(x, F)$.
Puisque $\|y_n\| \leqslant \|x\| + \|y_n - x\|$, la suite (y_n) est bornée. Il existe donc une suite extraite $(y_{\varphi(n)})$ convergente de limite y.
Puisque $(y_{\varphi(n)})$ est une suite d'éléments du fermé F, on a $y \in F$.
Puisque $y_{\varphi(n)} \to y$ et $\left\|y_{\varphi(n)} - x\right\| \to d(x, F)$ on a aussi $\|y - x\| = d(x, F)$.

Remarque En dimension infinie les résultats qui précèdent ne sont plus valables.

14.1.5 Image continue d'un compact

Théorème

> Soit $f : K \subset E \to F$.
> Si K est une partie compacte et si f est continue alors $f(K)$ est une partie compacte de F.

dém. :
Soit $(y_n) \in f(K)^{\mathbb{N}}$, il existe $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$ telle que $y_n = f(x_n)$.
La suite (x_n) admet une valeur d'adhérence dans K et par continuité son image par f est valeur d'adhérence de (y_n) dans $f(K)$.
□

Exemple Si A et B sont des parties compactes de E alors $A + B$ est un compact de E.
En effet $A + B$ est l'image du compact $A \times B$ par l'application continue $(x, y) \mapsto x + y$.

Corollaire

> Soit $f : K \subset E \to F$.
> Si K est une partie compacte et si f est continue alors f est bornée.
> Ainsi $\mathcal{C}(K, F) \subset \mathcal{B}(K, F)$.

dém. :
Une fonction continue sur un compact à une image compacte donc bornée.
□

14.1.6 Image continue d'un compact par une fonction réelle

Théorème

Soit $f : K \subset E \to \mathbb{R}$.
Si K est une partie compacte non vide de E et si f est continue alors f admet un minimum et un maximum.
On dit que f est bornée et atteint ses bornes.

dém. :
$f(K)$ est un compact non vide de $\mathbb{R}$ donc $m = \inf f(K)$ et $M = \sup f(K)$ existent.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M - 1/(n+1) < M$ donc il existe $x_n \in K$ tel que

$$M - \frac{1}{n+1} < f(x_n) \leqslant M$$

En faisant varier n cela détermine une suite $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$ tel que $f(x_n) \to M$.
Puisque la partie K est compacte, il existe φ extractrice telle que $x_{\varphi(n)} \to a \in K$.
Par continuité de f en a, on a $f(x_{\varphi(n)}) \to f(a)$ et par extraction $f(x_{\varphi(n)}) \to M$ donc $M = f(a)$.
□

Exemple Soit K un compact non vide et $x \in E$.
On pose
$$d(x, K) = \inf_{y \in K} \|y - x\|$$
Montrons qu'il existe $y_0 \in K$ tel que $d(x, K) = \|y_0 - x\|$.
La fonction $y \mapsto \|y - x\|$ est continue sur le compact K, elle y admet donc un minimum et par conséquent, il existe $y_0 \in K$ tel que

$$\inf_{y \in K} \|y - x\| = \min_{y \in K} \|y - x\| = \|y_0 - x\|$$

Exemple Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.
L'application linéaire u est continue et on peut donc introduire

$$\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$$

Considérons $f : x \mapsto \|u(x)\|$ avec $S = \{x \in E / \|x\| = 1\}$.
L'ensemble S est une partie fermée car $S = \|\,.\,\|^{-1}(\{1\})$ et bornée, c'est donc une partie compacte de l'espace de dimension finie E. De plus, la fonction f est continue car $\|\,.\,\|$ et u le sont. Par suite f admet un maximum et donc il existe $x_0 \in S$ tel que $\sup_{x \in S} f(x) = f(x_0)$ i.e. $\|u\| = \|u(x_0)\|$

14.1.7 Uniforme continuité et compacité

Définition

Une application $f : X \subset E \to F$ est dite uniformément continue si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in X, \|y - x\|_E \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(y) - f(x)\|_F \leqslant \varepsilon$$

Remarque $f : X \subset E \to F$ continue signifie

$$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall y \in X, \|y - x\| \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(y) - f(x)\| \leqslant \varepsilon$$

Pour l'uniforme continuité, on exige que le paramètre α soit indépendant de x.

Proposition

> Toute fonction uniformément continue est continue.

dém. :
Qui peut le plus, peut le moins.
□

Proposition

> Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.

dém. :
Supposons $f : X \subset E \to F$ lipschitzienne. Il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x, y \in X, \|f(y) - f(x)\| \leqslant k \|y - x\|$$

Sans perte de généralité, on peut suppose $k > 0$.
Soit $\varepsilon > 0$. Pour $\alpha = \varepsilon/k > 0$, on a

$$\forall x, y \in X, \|y - x\| \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(y) - f(x)\| \leqslant \varepsilon$$

□

Théorème

> Soit $f : K \subset E \to F$.
> Si K est une partie compacte et si f est continue alors f est uniformément continue.

dém. :
Par l'absurde supposons que f n'est pas uniformément continue.
Il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall \alpha > 0, \exists x, y \in X, \|y - x\| \leqslant \alpha \text{ et } \|f(y) - f(x)\| > \varepsilon$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $\alpha = \dfrac{1}{n+1} > 0$, il existe $x_n, y_n \in K$ vérifiant

$$\|y_n - x_n\| \leqslant \frac{1}{n+1} \text{ et } \|f(y_n) - f(x_n)\| > \varepsilon$$

En faisant varier n, cela détermine deux suites (x_n) et (y_n) d'éléments de K telles que $\|y_n - x_n\| \to 0$ et $\|f(y_n) - f(x_n)\| > \varepsilon$. Puisque la suite (x_n) évolue dans le compact K, il existe une extractrice φ telle que $x_{\varphi(n)} \to x$ avec $x \in K$. Puisque $\left\|y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}\right\| \to 0$, on a aussi $y_{\varphi(n)} \to x$. Or f est continue donc $f(x_n) \to f(x)$ et $f(y_n) \to f(x)$. En passant à la limite la relation $\|f(y_n) - f(x_n)\| > \varepsilon$, on obtient alors une absurdité.
□

Corollaire

> Toute fonction continue de $[a, b]$ vers F est uniformément continue.

dém. :
Car $[a, b]$ est une partie compacte.
□

14.2 Complétude

14.2.1 Suite de Cauchy

Définition

Une suite (x_n) d'éléments de E est dite de Cauchy si elle vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geqslant N, \|x_m - x_n\| \leqslant \varepsilon$$

On a aussi le critère équivalent

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \forall p \geqslant 0, \|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \varepsilon$$

Proposition

Toute suite convergente est de Cauchy.

dém. :
Supposons $x_n \to \ell$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geqslant N$, $\|x_n - \ell\| \leqslant \varepsilon/2$.
Pour $n, m \geqslant N$ on a alors $\|x_n - x_m\| \leqslant \|x_n - \ell\| + \|\ell - x_m\| \leqslant \varepsilon$.
□

Proposition

Toute suite de Cauchy est bornée.

dém. :
Supposons (x_n) de Cauchy.
Pour $\varepsilon = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $m, n \geqslant N$, $\|x_m - x_n\| \leqslant 1$.
En particulier pour tout $n \geqslant N$, $\|x_n\| \leqslant 1 + \|x_N\|$.
Pour $M = \max(\|x_0\|, \ldots, \|x_{N-1}\|, 1 + \|x_N\|)$ on a $\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| \leqslant M$.
□

Proposition

Toute suite de Cauchy ayant une valeur d'adhérence converge vers celle-ci.

dém. :
Supposons (x_n) de Cauchy ayant une valeur d'adhérence ℓ.
Il existe une extractrice φ telle que $x_{\varphi(n)} \to \ell$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m, n \geqslant N$, $\|x_m - x_n\| \leqslant \varepsilon$
De plus, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N'$, $\left\|x_{\varphi(n)} - \ell\right\| \leqslant \varepsilon$.
Pour $n \geqslant \max(N, N')$, $\left\|x_{\varphi(n)} - x_n\right\| \leqslant \varepsilon$ et $\left\|x_{\varphi(n)} - \ell\right\| \leqslant \varepsilon$ donc $\|x_n - \ell\| \leqslant 2\varepsilon$.
□

14.2.2 Espace de Banach

Définition

Un espace normé $(E, \|\ .\ \|)$ est dit complet si toute suite de Cauchy d'éléments de cet espace converge.
On appelle espace de Banach tout espace normé complet.
On appelle algèbre de Banach toute algèbre normée complète.

Exemple $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des algèbres de Banach.

Théorème

> Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie est un espace de Banach.

dém. :
Une suite de Cauchy d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie est bornée, elle admet donc une valeur d'adhérence et donc elle converge.
□

Exemple $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont des espaces de Banach.
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une algèbre de Banach.

Théorème

> Soit X un ensemble non vide.
> L'algèbre $\mathcal{B}(X,\mathbb{K})$ normée par $\|\,.\,\|_\infty$ est une algèbre de Banach

dém. :
Soit (f_n) une suite de Cauchy d'éléments de $\mathcal{B}(X,\mathbb{K})$.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geqslant N$, $\|f_m - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
Pour $x \in X$, on a alors $|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \|f_m - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
Ainsi la suite $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{K}$. On peut affirmer que celle-ci converge.
Posons $f(x)$ sa limite ce qui permet de définit $f : X \to \mathbb{K}$.
Montrons que f est bornée.
La suite (f_n) étant de Cauchy, elle est bornée donc il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_\infty \leqslant M$. On a alors pour tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leqslant \|f_n\|_\infty \leqslant M$. En passant à la limite, on obtient $|f(x)| \leqslant M$ et donc f est bornée. Ainsi $f \in \mathcal{B}(X,\mathbb{K})$.
Montrons que $f_n \to f$ pour $\|\,.\,\|_\infty$.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geqslant N$, $\|f_m - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
Pour $x \in X$, on a alors $|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \|f_m - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
Quand $m \to +\infty$, on obtient $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$.
Ceci valant pour tout $x \in X$, on a encore $\|f - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
Finalement la suite de Cauchy (f_n) converge.
□

14.2.3 Partie complète

Définition

> On dit qu'une partie A d'un espace vectoriel normé est complète si toute suite de Cauchy d'éléments de A converge dans A.

Exemple Les parties compactes sont complètes.
En effet une suite de Cauchy d'une partie compacte admet une valeur d'adhérence dans la partie et donc converge vers celle-ci.

Exemple Un sous-espace vectoriel F de dimension finie d'un espace normé E est une partie complète.
En effet la norme sur E induit une norme sur F. F muni de cette norme est un espace de Banach car de dimension finie, c'est donc une partie complète de E.

Théorème

> Les parties complètes sont fermées.

dém. :
Soit A une partie complète d'un espace normé E.
Soit (x_n) une suite convergente d'éléments de A.
Cette suite est de Cauchy et donc converge dans A car la partie A est complète.
Par la caractérisation séquentielle des parties fermées, A est fermée.
□

Corollaire

> Les sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace normé sont des parties fermées.

Théorème

> Les parties fermées d'un espace de Banach sont complètes.

dém. :
Soit A une partie fermée d'un espace de Banach E.
Soit (x_n) une suite de Cauchy d'élément de A. (x_n) est une suite de Cauchy d'éléments de E or E est complet donc (x_n) converge. Or A est une partie fermée donc la limite de (x_n) est élément de A. Ainsi, on peut affirmer que (x_n) converge dans A.
□

Exemple $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{K})$ muni de $\|\,.\,\|_\infty$ (car la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue) c'est donc une partie complète.

14.2.4 Critère de Cauchy fonctionnel

Soient $f : X \subset E \to F$ et $a \in \bar{X}$.

Définition

> On dit que f satisfait le critère de Cauchy en a si
>
> $$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in X, \|x - a\| \leqslant \alpha \text{ et } \|y - a\| \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(y) - f(x)\| \leqslant \varepsilon$$

Proposition

> Si f converge en a alors f vérifie le critère de Cauchy en a.

dém. :
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in X,\ \|x - a\| \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \leqslant \varepsilon$$

On a alors

$$\forall x, y \in X, \|x - a\| \leqslant \alpha \text{ et } \|y - a\| \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(y) - f(x)\| \leqslant 2\varepsilon$$

□

Théorème

> Si F est complet et si f vérifie le critère de Cauchy en a alors f converge en a.

dém. :
Soit $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ de limite a.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in X, \|x - a\| \leqslant \alpha \text{ et } \|y - a\| \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(y) - f(x)\| \leqslant \varepsilon$$

Or $x_n \to a$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall m, n \geqslant N, \|x_n - a\| \leqslant \alpha \text{ et } \|x_m - a\| \leqslant \alpha$$

donc

$$\|f(x_n) - f(x_m)\| \leqslant \varepsilon$$

La suite $(f(x_n))$ est donc de Cauchy, or F est complet donc la suite $(f(x_n))$ converge. Montrons que sa limite ne dépend pas la suite (x_n) convergeant vers a.
Soient (x_n) et $(y_n) \in X^{\mathbb{N}}$ de limite a.
Par l'étude qui précède $f(x_n) \to \ell_x$ et $f(y_n) \to \ell_y$.
Considérons (z_n) définie par $z_{2n} = x_n$ et $z_{2n+1} = y_n$.
$(z_n) \in A^{\mathbb{N}}$ et $z_n \to a$ donc $f(z_n) \to \ell_z$.
Par extraction et unicité de limite $\ell_x = \ell_z = \ell_y$.
En notant ℓ la valeur commune des limites des suites $(f(x_n))$ avec $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ convergeant vers a, la caractérisation séquentielle des limite donne $f \underset{a}{\to} \ell$.

□

14.3 Série d'éléments d'un espace normé

14.3.1 Vocabulaire

Définition

Soit (u_n) une suite d'éléments de E. On appelle série de terme général u_n la suite (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Cette série est notée $\sum u_n$ et S_n est appelé somme partielle de rang n de cette série.

Exemple Les séries numériques et les séries de fonctions.

Exemple Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $\sum A^n$ et $\sum \frac{1}{n!} A^n$ sont des séries de matrices.

Définition

On dit que la série $\sum u_n$ converge si la suite (S_n) converge.
Sa limite S est alors appelée somme de la série et est notée

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

On introduit aussi

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = S - S_n$$

appelé reste de rang n de la série.

14.3.2 Série absolument convergente dans un espace de Banach

Définition

Une série $\sum u_n$ d'éléments de E est dite absolument convergente s'il y a convergence de la série numérique à termes positifs $\sum \|u_n\|$.

Théorème

Si $\sum u_n$ est une série absolument convergente d'éléments d'un espace complet celle-ci converge et

$$\left\|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right\| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$$

dém. :
Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} \|u_k\|$.
Puisque la suite (T_n) converge, elle vérifie le critère de Cauchy.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \forall p \geqslant 0, |T_{n+p} - T_n| \leqslant \varepsilon$$

Or

$$T_{n+p} - T_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} \|u_k\|$$

et

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \left\|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right\| \leqslant T_{n+p} - T_n$$

donc

$$\forall n \geqslant N, \forall p \geqslant 0, \|S_{n+p} - S_n\| \leqslant \varepsilon$$

La suite (S_n) vérifie le critère de Cauchy et donc converge puisque E est complet.
De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} u_k\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \|u_k\|$$

et donc en passant à la limite

$$\left\|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right\| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$$

□

Corollaire

En dimension finie, les séries absolument convergentes sont convergentes.

dém. :
Car les espaces normés de dimensions finies sont complets.
□

Exemple Dans $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ algèbre normée, considérons $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ vérifiant $\|A\| < 1$.
La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} A^n$ est absolument convergente.
En effet

$$\left\|\frac{(-1)^{n-1}}{n} A^n\right\| = \frac{1}{n} \|A^n\| \leqslant \frac{1}{n} \|A\|^n \leqslant \|A\|^n$$

et la série numérique $\sum \|A\|^n$ converge car $\|A\| < 1$ donc, par comparaison de série à termes positifs, il y a absolue convergence de la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} A^n$$

Puisque l'espace $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est complet (car de dimension finie), cette série converge ce qui permet d'introduire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} A^n$$

14.3.3 Produit de Cauchy dans une algèbre de Banach

$(E, \|\,.\,\|)$ désigne une algèbre normée.

Définition

On appelle produit de Cauchy de séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ d'éléments de E la série $\sum w_n$ avec

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

Théorème

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries absolument convergente d'une algèbre normée complète E alors la série produit de Cauchy $\sum w_n$ est absolument convergente et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

dém. :
On a

$$\|w_n\| = \left\|\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \|u_k v_{n-k}\| = \sum_{k=0}^{n} \|u_k\| \|v_{n-k}\| = t_n$$

avec $\sum t_n$ la série produit de Cauchy de $\sum \|u_n\|$ et $\sum \|v_n\|$. Puisque celles-ci sont des séries à termes positifs convergentes, leur produit de Cauchy $\sum t_n$ est convergent et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \|v_n\|\right)$$

Par comparaisons de série à termes positifs, on peut affirmer que $\sum w_n$ est absolument convergente.
De plus, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \sum_{k=0}^{n} v_k - \sum_{k=0}^{n} w_k = \sum_{k,\ell=0}^{n} u_k v_\ell - \sum_{k,\ell=0}^{k+\ell\leqslant n} u_k v_\ell = \sum_{k+\ell>n}^{k,\ell\leqslant n} u_k v_\ell$$

Or

$$\left\|\sum_{k+\ell>n}^{k,\ell\leqslant n} u_k v_\ell\right\| \leqslant \sum_{k+\ell>n}^{k,\ell\leqslant n} \|u_k v_\ell\| \leqslant \sum_{k+\ell>n}^{k,\ell\leqslant n} \|u_k\| \|v_\ell\| = \sum_{k=0}^{n} \|u_k\| \sum_{k=0}^{n} \|v_k\| - \sum_{k=0}^{n} t_k$$

donc

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} u_k \sum_{k=0}^{n} v_k - \sum_{k=0}^{n} w_k\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \|u_k\| \sum_{k=0}^{n} \|v_k\| - \sum_{k=0}^{n} t_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On en déduit

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

□

14.3.4 Séries de référence

Soit $(E, \|\,.\,\|)$ une algèbre de Banach.

14.3.4.1 Série géométrique

Théorème

Pour a élément de E vérifiant $\|a\| < 1$, la série géométrique $\sum a^n$ est absolument convergente et sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ est l'inverse de l'élément $1_E - a$.

dém. :
$\|a^n\| \leqslant \|a\|^n$ avec $\|a\| \in [0,1[$ donc $\sum \|a^n\|$ CV et ainsi $\sum a^n$ est absolument convergente.
De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(1_E - a)\sum_{k=0}^{n} a^k = 1_E - a^{n+1}$$

et $a^{n+1} \to 0$ car $\left\|a^{n+1}\right\| \leqslant \|a\|^{n+1} \to 0$ donc à la limite on obtient

$$(1_E - a)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a^k\right) = 1_E$$

De même on a aussi

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a^k\right)(1_E - a) = 1_E$$

□

Exemple Pour $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ vérifiant $\|A\| < 1$ (avec $\|\,.\,\|$ norme d'algèbre) on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = (I_p - A)^{-1}$$

14.3.4.2 Série exponentielle

Théorème

Pour tout a élément de E la série exponentielle $\sum \frac{1}{n!}a^n$ est absolument convergente.

dém. :
On a

$$\left\|\frac{1}{n!}a^n\right\| = \frac{1}{n!}\|a^n\| \leqslant \frac{1}{n!}\|a\|^n$$

Or pour tout $t \in \mathbb{R}$, la série exponentielle $\sum \frac{1}{n!}t^n$ converge donc par comparaison de séries à termes positifs $\sum \frac{1}{n!}a^n$ est absolument convergente.
□

Définition

On appelle exponentielle de $a \in E$ la somme de cette série et on note

$$\exp(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}a^n$$

Exemple $\exp(0_E) = 1_E$.

Théorème

Si $a, b \in E$ commutent alors $\exp(a + b) = \exp(a)\exp(b)$.

dém. :
$\exp(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}a^n$ et $\exp(b) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}b^n$.
Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes

$$\exp(a)\exp(b) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}a^k \frac{1}{(n-k)!}b^{n-k}$$

Or

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} a^k \frac{1}{(n-k)!} b^{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \frac{1}{n!}(a+b)^n$$

car a et b commutent. Ainsi

$$\exp(a)\exp(b) = \exp(a+b)$$

□

Corollaire

$\forall a \in E$, $\exp(a)$ est inversible et $\exp(a)^{-1} = \exp(-a)$.

14.3.4.3 Exponentielle de matrice

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, calculons

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

Cas A est diagonale :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},\ A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \text{ et } \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathrm{e}^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Cas A diagonalisable :

$A = PDP^{-1}$ avec D diagonale. $A^k = PD^kP^{-1}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k = P\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} D^k\right) P^{-1}$

Ainsi

$$\exp(A) = P\exp(D)P^{-1}$$

Cas A nilpotente :
Supposons $A^p = O_n$.
Pour $N \geqslant p$,

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} A^k$$

Ainsi

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} A^k$$

Cas général : on improvise, par exemple en exploitant un polynôme annulateur…

Exemple Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

On a $\chi_A = -(X-1)^3$ et donc la matrice A est trigonalisable.
Par Cayley-Hamilton, on a $(A - I_3)^3 = O_3$. Posons $N = A - I_3$.
On a $A = I_3 + N$ avec I_3 et N commutant donc

$$\exp(A) = \exp(I_3)\exp(N) = \mathrm{e}\left(I_3 + N + \frac{1}{2}N^2\right)$$

Ainsi

$$\exp(A) = \mathrm{e}\begin{pmatrix} 7/2 & 1 & 5/2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -5/2 & -1 & -3/2 \end{pmatrix}$$

14.3.5 Musculation : Théorème du point fixe

Théorème

Soient A une partie fermée d'un espace normé E complet et $f : A \to A$.
S'il existe $k \in [0, 1[$ tel que

$$\forall x, y \in A, \|f(y) - f(x)\| \leqslant k\,\|y - x\|$$

alors f possède un unique point fixe et toute suite (x_n) donnée par

$$\begin{cases} x_0 \in A \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

converge vers celui-ci.

dém. :
Unicité : Soient x, y deux points fixes de f. On a

$$\|y - x\| = \|f(y) - f(x)\| \leqslant k\,\|y - x\|$$

et puisque $k \in [0, 1[$ on a nécessairement $x = y$.
Existence : Soit (x_n) une suite vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$$

On a $\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant k\,\|x_n - x_{n-1}\|$ donc par récurrence

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant k^n\,\|x_1 - x_0\|$$

Puisque $\sum k^n$ converge, par comparaison de série à termes positifs, la série $\sum x_{n+1} - x_n$ est absolument convergente donc convergente. On en déduit que la suite (x_n) converge et puisque la partie A est fermée sa limite ℓ est élément de A.
Puisque f est continue $x_{n+1} = f(x_n) \to f(\ell)$ et sachant $x_{n+1} \to \ell$, on en déduit $f(\ell) = \ell$.
□

Chapitre 15

Fonction vectorielle d'une variable réelle

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $E, F, G, \ldots$ désignent des $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimensions finies.
I désigne un intervalle non singulier de $\mathbb{R}$.
On étudie ici des fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles comme par exemple :

$$t \mapsto z(t), t \mapsto (x(t), y(t), \ldots), t \mapsto \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}, \ldots$$

15.1 Dérivation d'une fonction d'une variable réelle

15.1.1 Vecteur dérivé

Définition

On dit que $f : I \to E$ est dérivable en $a \in I$ si le taux de variation

$$\frac{1}{h}\left(f(a+h) - f(a)\right)$$

converge quand $h \to 0$ (avec $h \neq 0$)
Sa limite est alors appelée vecteur dérivé de f en a, on la note $f'(a)$ ou $Df(a)$.

Proposition

Si $f : I \to E$ est dérivable en a alors

$$f(t) = f(a) + (t-a).f'(a) + o(t-a)$$

quand $t \to a$.
En conséquence, la fonction f est continue en a.

dém. :
Quand $t \to a$ (avec $t \neq a$), on peut écrire

$$\frac{1}{t-a}\left(f(t) - f(a)\right) = f'(a) + o(1)$$

donc

$$f(t) - f(a) = (t - a).f'(a) + o(t - a)$$

et cette relation vaut encore pour $t = a$.

□

Définition

Si $f'(a) \neq 0_E$, la droite $f(a) + \text{Vect}(f'(a))$ est appelée tangente à f en $t = a$.

15.1.2 Fonction dérivable

Définition

Une fonction $f : I \to E$ est dite dérivable si elle l'est en tout point de I.
On peut alors introduire la fonction $f' : t \in I \mapsto f'(t)$ appelée dérivée de f.

Proposition

Les fonctions dérivables de I vers E sont continues.

dém. :
Si $f : I \to E$ est dérivable alors f est continue en tout $a \in I$.

□

Proposition

Soit $f : I \to E$ de fonctions coordonnées $f_1, \dots, f_p$ dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ de E.
On a équivalence entre :
(i) f est dérivable ;
(ii) $f_1, \dots, f_p$ sont dérivables.
De plus si tel est le cas

$$\forall t \in I, f'(t) = \sum_{j=1}^{p} f_j'(t)e_j$$

Exemple $z : I \to \mathbb{C}$ est dérivable si, et seulement si, Re(z) et Im(z) le sont.
On a alors $z(t) = (\text{Re}z)'(t) + i(\text{Im}z)'(t)$.

Exemple $x : I \to \mathbb{R}^n$ définie par $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ est dérivable si, et seulement si, $x_1, \dots, x_n$ le sont.
On a alors $x'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$.

Exemple $A : I \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est dérivable si, et seulement si, les fonctions coefficients $t \mapsto a_{i,j}(t)$ le sont.
On a alors

$$A'(t) = \begin{pmatrix} a_{1,1}'(t) & \cdots & a_{1,p}'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}'(t) & \cdots & a_{n,p}'(t) \end{pmatrix}$$

15.1.3 Opérations sur les fonctions dérivables

Théorème

Soient $f, g : I \to E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Si f et g sont dérivables alors λf et $f+g$ le sont aussi et

$$(\lambda f)' = \lambda f',\ (f+g)' = f' + g'$$

dém. :
Par opérations sur les limites.
□

Corollaire

L'ensemble $\mathcal{D}(I, E)$ des fonctions de I vers E dérivables est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, E)$ et l'application $f \mapsto f'$ y est linéaire.

Théorème

Soient $f : I \to E$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
Si f est dérivable alors $u(f) : t \mapsto u(f(t))$ est dérivable et

$$[u(f)]' = u(f')$$

dém. :
Soit $a \in I$. Quand $h \to 0$ (avec $h \neq 0$)

$$\frac{1}{h}\left(u(f(a+h)) - u(f(a))\right) = u\left(\frac{1}{h}\left(f(a+h) - f(a)\right)\right) \to u(f'(a))$$

car u est continue puisque linéaire au départ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
□

Attention : Ici écrire la formule $(u(f))' = f' \times u'(f)$ n'a pas de sens car u' n'en a pas.

Exemple Soit $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dérivable.
$t \mapsto \mathrm{tr}(A(t))$ est dérivable et $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{tr}(A(t))\right) = \mathrm{tr}(A'(t))$.

Théorème

Soient $f : I \to E$, $g : I \to F$ et $b : E \times F \to G$ bilinéaire.
Si f et g sont dérivables alors $b(f, g) : t \mapsto b(f(t), g(t))$ est dérivable et

$$b(f, g)' = b(f', g) + b(f, g')$$

dém. :

Soit $a \in I$. On peut écrire

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h}\left(b\left(f(a+h),g(a+h)\right)-b\left(f(a),g(a)\right)\right)\\&=b\left(\frac{1}{h}\left(f(a+h)-f(a)\right),g(a+h)\right)+b\left(f(a),\frac{1}{h}\left(g(a+h)-g(a)\right)\right)\end{aligned}$$

Quand $h \to 0$

$$\frac{1}{h}\left(b\left(f(a+h),g(a+h)\right)-b\left(f(a),g(a)\right)\right)\to b\left(f'(a),g(a)\right)+b\left(f(a),g'(a)\right)$$

car l'application bilinéaire b est continue puisque $\dim E, F < +\infty$.

□

Corollaire

Si $\alpha : I \to \mathbb{K}$ et $f : I \to E$ sont dérivables alors $\alpha.f$ aussi et $(\alpha.f)' = \alpha'.f + \alpha.f'$.

dém. :
L'application produit extérieur $\mathbb{K} \times E \to E$ est bilinéaire.

□

Corollaire

On suppose que E est une algèbre.
Si $f, g : I \to E$ sont dérivables alors fg l'est aussi $(fg)' = f'g + fg'$.
En particulier $\mathcal{D}(I, E)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(I, E)$.

dém. :
L'application produit $E \times E \to E$ est bilinéaire.

□

Corollaire

Si E est un espace euclidien dont on note $(. \mid .)$ le produit scalaire :
Si f, g sont dérivables alors $(f \mid g) : t \mapsto (f(t) \mid g(t))$ est dérivable et

$$(f \mid g)' = (f' \mid g) + (f \mid g')$$

dém. :
$(. \mid .)$ est une application bilinéaire.

□

Théorème

Soient $f_1 : I \to E_1, \dots, f_p : I \to E_p$ et $m : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p \to F$ multilinéaire.
Si $f_1, \dots, f_p$ sont dérivables alors $m(f_1, \dots, f_p) : t \mapsto m(f_1(t), \dots, f_p(t))$ est dérivable et

$$m(f_1, \dots, f_p)' = \sum_{j=1}^{p} m(f_1, \dots, f_j', \dots, f_p)$$

Exemple Soient $u, v, w : I \to \mathbb{R}$, $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$.

Soient $f_1, \dots, f_n : I \to \mathbb{R}$ dérivables $(f_1 \dots f_n)' = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_1 \dots (f_i)' \dots f_n$.

Exemple Soit $A : t \mapsto A(t)$ une fonction dérivable de I vers $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
La fonction $t \mapsto \det A(t)$ est dérivable car

$$\det A(t) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}(t)$$

Cherchons à exprimer la dérivée de $t \mapsto \det A(t)$.
Notons $C_1(t), \ldots, C_n(t)$ les colonnes de $A(t)$ et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Les fonctions $C_1, \ldots, C_n$ sont dérivables et puisque

$$\det(A(t)) = \det_{\mathcal{B}} (C_1(t), \ldots, C_n(t))$$

on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\det A(t)) = \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}} (C_1(t), \ldots, C_i'(t), \ldots, C_n(t))$$

15.1.4 Inégalité des accroissements finis

Attention : Il n'y a ni TAF ni théorème de Rolle pour les fonctions à valeurs dans $E \neq \mathbb{R}$.

Théorème

Soient $f : I \to E$ dérivable et $\| \,.\, \|$ une norme sur E.
S'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall t \in I, \|f'(t)\| \leqslant M$$

alors

$$\forall a, b \in I, \|f(b) - f(a)\| \leqslant M\,|b - a|$$

dém. :
Soient $a, b \in I$.
Si $a = b$: ok.
Sinon, quitte à échanger a et b on peut supposer $a < b$.
Soit $\varepsilon > 0$. Considérons

$$A_\varepsilon = \{t \in [a, b] \,/\, \|f(t) - f(a)\| \leqslant (M + \varepsilon)(t - a)\}$$

A_ε est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée donc possède une borne supérieure s.
Par caractérisation d'une borne supérieure, il existe une suite (t_n) d'éléments de A_ε convergeant vers s.
Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n \in [a, b]$, on a aussi $s \in [a, b]$.
Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f(t_n) - f(a)\| \leqslant (M+\varepsilon)(t_n - a)$, on a aussi $\|f(s) - f(a)\| \leqslant (M+\varepsilon)(s - a)$ car f est continue.
Ainsi s est élément de l'ensemble A_ε. En fait A_ε est une partie fermée et une borne supérieure est adhérente…
Nous allons montrer $s = b$ en raisonnant par l'absurde et en supposant $s < b$.
Puisque

$$\frac{1}{h} \|f(s + h) - f(s)\| \xrightarrow[h \to 0^+]{} \|f'(s)\| \leqslant M < M + \varepsilon$$

il existe $h > 0$ assez petit tel que $s + h \in [a, b]$ et

$$\frac{1}{h} \|f(s+h) - f(s)\| \leqslant M + \varepsilon$$

Par suite

$$\|f(s+h) - f(a)\| \leqslant \|f(s+h) - f(s)\| + \|f(s) - f(a)\|$$

donne

$$\|f(s+h) - f(a)\| \leqslant (M+\varepsilon)(s+h-a)$$

Ainsi $s + h \in A_\varepsilon$ ce qui contredit la définition de $s = \sup A_\varepsilon$.
Par suite $\sup A_\varepsilon = b$ et donc

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant (M+\varepsilon)(b-a)$$

Or ceci vaut pour tout $\varepsilon > 0$ donc quand $\varepsilon \to 0$

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant M(b-a)$$

□

Corollaire

Soit $f : I \to E$ dérivable.
Si la dérivée de f est nulle alors f est constante.

dém. :
On applique l'inégalité des accroissements finis avec $M = 0$.
□

15.1.5 Dérivée d'ordre supérieur

Définition

Soit $f : I \to E$.
On pose $f^{(0)} = f$ appelée dérivée d'ordre 0 de f.
Pour $n \in \mathbb{N}$, si $f^{(n)}$ existe et est dérivable, on pose $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$ appelée dérivée d'ordre $n+1$ de f.
On dit que $f : I \to E$ est n fois dérivable si $f^{(n)}$ existe.

Proposition

Soit $f : I \to E$ de fonction coordonnées $f_1, \ldots, f_p$ dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ de E.
On a équivalence entre :
(i) f est n fois dérivable ;
(ii) $f_1, \ldots, f_p$ sont n fois dérivables.
De plus, si tel est le cas :

$$\forall t \in I,\, f^{(n)}(t) = f_1^{(n)}(t)e_1 + \cdots + f_p^{(n)}(t)e_p$$

dém. :
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
□

Théorème

Soient $f, g : I \to E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Si f et g sont n fois dérivables alors λf et $f + g$ le sont aussi et

$$(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)} \text{ et } (f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$

dém. :
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
□

Corollaire

L'ensemble $\mathcal{D}^n(I, E)$ des fonctions n fois dérivables de I vers E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, E)$.

Théorème

Soient $f : I \to E$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
Si f est n fois dérivable alors $u(f)$ aussi et

$$(u(f))^{(n)} = u(f^{(n)})$$

dém. :
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
□

Théorème

Soit $b : E \times F \to G$ une application bilinéaire.
Si $f : I \to E$ et $g : I \to F$ sont n fois dérivables alors $b(f, g)$ l'est aussi et

$$b(f,g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b\left(f^{(n-k)}, g^{(k)}\right)$$

dém. :
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$: ok.
Supposons la propriété vraie au rang $n \geqslant 0$.
Soient $f : I \to E$ et $g : I \to F$ des fonctions $n + 1$ fois dérivables.
Par hypothèse de récurrence $b(f, g)$ est n fois dérivable et

$$b(f,g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b\left(f^{(n-k)}, g^{(k)}\right)$$

Or pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $f^{(n-k)}$ et $g^{(k)}$ sont dérivables donc $b\left(f^{(n-k)}, g^{(k)}\right)$ aussi.
Par suite $b(f, g)$ est $n + 1$ fois dérivables et

$$b(f,g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[b\left(f^{(n+1-k)}, g^{(k)}\right) + b\left(f^{(n-k)}, g^{(k+1)}\right)\right]$$

En séparant les deux sommes et par décalage d'indice

$$b(f,g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b\left(f^{(n+1-k)}, g^{(k)}\right) + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} b\left(f^{(n+1-k)}, g^{(k)}\right)$$

En adjoignant des termes nuls à chaque somme

$$b(f,g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} b\left(f^{(n+1-k)}, g^{(k)}\right) + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} b\left(f^{(n+1-k)}, g^{(k)}\right)$$

En réunissant les deux sommes et par la formule du triangle de Pascal

$$b(f,g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} b\left(f^{(n+1-k)}, g^{(k)}\right)$$

Récurrence établie.
□

Corollaire

Si $\alpha : I \to \mathbb{K}$ et $f : I \to E$ sont n fois dérivables alors $\alpha.f$ aussi.

Corollaire

On suppose que E est une algèbre.
Si $f, g : I \to E$ sont n fois dérivables alors fg aussi.
En particulier $\mathcal{D}^n(I, E)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(I, E)$

Corollaire

Soit E un espace euclidien
Si $f, g : I \to E$ sont n fois dérivables alors $(f \mid g)$ aussi.

Exemple Soit $f : I \to E$ une fonction $n+1$ fois dérivable.
$(tf(t))^{(n+1)} = tf^{(n+1)}(t) + (n+1)f^{(n)}(t)$.

15.1.6 Classe d'une fonction

Définition

Une fonction $f : I \to E$ est dite de classe $\mathcal{C}^n$ si f est n fois dérivable et $f^{(n)}$ est continue.
Une fonction $f : I \to E$ est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ si elle est $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Les théorèmes présentés ci-dessus se transposent aux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ avec $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On en déduit :

Proposition

Pour $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f : I \to E$ est de classe $\mathcal{C}^n$ si, et seulement si, ses fonctions coordonnées dans une base de E le sont.

Théorème

Pour $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, l'ensemble $\mathcal{C}^n(I, E)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ de I vers E est un sous-espace vectoriel (voire une sous-algèbre) de $\mathcal{F}(I, E)$.

15.2 Approximation de fonctions

$a < b$ désignent deux réels.

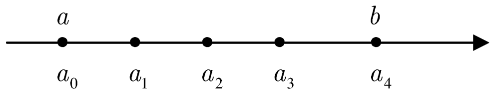
15.2.1 Subdivision

Définition

On appelle subdivision d'un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ toute suite finie $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ strictement croissante d'extrémités a et b :

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b \text{ avec } n \in \mathbb{N}^\star$$

Les éléments a_i sont alors appelés points de la subdivision σ.
Les intervalles ouverts $]a_{i-1}, a_i[$ sont appelés intervalles de subdivision.

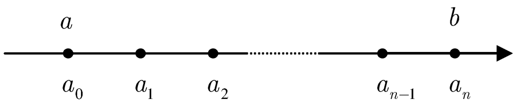


Exemple Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Posons, pour tout $i \in \{0, 1, ..., n\}$

$$a_i = a + i\frac{b-a}{n}$$

$\sigma = (a_0, a_1, ..., a_n)$ est une subdivision de $[a, b]$ pour laquelle

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n, a_i - a_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$



Définition

On appelle support d'une subdivision $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$ l'ensemble

$$\text{Supp}(\sigma) = \{a_0, a_1, ..., a_n\}$$

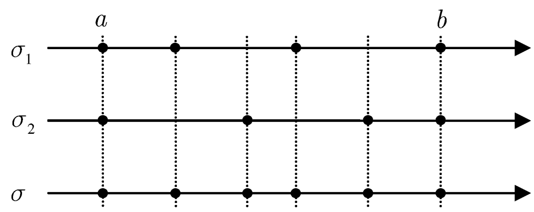
Définition

On dit qu'un subdivision σ de $[a, b]$ est plus fine qu'une subdivision σ' de $[a, b]$ si

$$\text{Supp}(\sigma') \subset \text{Supp}(\sigma)$$

Définition

On appelle réunion de deux subdivisions σ_1 et σ_2 de $[a, b]$ la subdivision σ de support Supp$(\sigma_1) \cup$ Supp(σ_2). Elle est plus fine que σ_1 et σ_2.



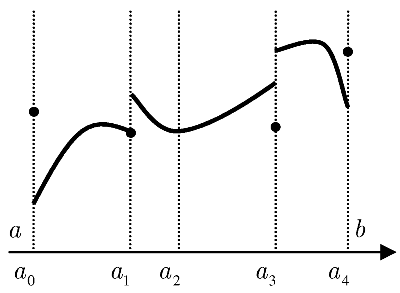
15.2.2 Fonction continue par morceaux définie sur un segment

Définition

Une fonction $f : [a, b] \to E$ est dite continue par morceaux s'il existe $\sigma = (a_0, a_1, ..., a_n)$ subdivision de $[a, b]$ vérifiant

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, f_{\restriction]a_{i-1}, a_i[} \text{ est prolongeable en une fonction continue sur } [a_{i-1}, a_i]$$

Une telle subdivision σ est alors dite adaptée à la fonction f.



Remarque $f_{\restriction]a_{i-1}, a_i[}$ est prolongeable en une fonction continue sur $[a_{i-1}, a_i]$ si, et seulement si,
1) f est continue sur $]a_{i-1}, a_i[$;
2) f converge en a_{i-1}^+ et a_i^-.

Remarque Si σ est adaptée à f est si σ' est plus fine que σ alors σ' est aussi adaptée à f.

Théorème

L'ensemble $\mathcal{C}^0_{pm}([a, b], E)$ des fonctions continues par morceaux de $[a, b]$ vers E est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{B}([a, b], E)$ des fonctions bornées.

dém. :
Montrons pour commencer que les fonctions continues par morceaux de $[a, b]$ vers E sont bornées.
Soit $f : [a, b] \to E$ continue par morceaux.

Soit $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ une subdivision adaptée à f
Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $f_{\restriction]a_{i-1}, a_i[}$ est bornée car se prolonge en une fonction continue sur $[a_{i-1}, a_i]$.
Il existe donc $M_i \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall t \in \left]a_{i-1}, a_i\right[, \|f(t)\| \leqslant M_i$$

Par suite la fonction f est bornée par

$$M = \max\{\|f(a_i)\| / 0 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{M_i / 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

Ainsi $\mathcal{C}^0_{pm}([a,b], E) \subset \mathcal{B}([a,b], E)$.
$\tilde{0}_E \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b], E)$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $f, g \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b], E)$.
Soient σ_1 une subdivision adaptée à f et σ_2 une subdivision adaptée à g.
La réunion σ de σ_1 et σ_2 est adaptée à la fois à f et à g.
Sur les intervalles $]a_{i-1}, a_i[$ de cette subdivision les restrictions de f et g se prolongent en des fonctions continues sur $[a_{i-1}, a_i]$, il en est donc de même de $\lambda f + \mu g$.
Ainsi $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b], E)$.
□

Corollaire

On définit une norme sur l'espace $\mathcal{C}^0_{pm}([a,b], E)$ par

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\|$$

Proposition

Une fonction $f : [a,b] \to E$ est continue par morceaux si, et seulement si, ses fonctions coordonnées dans une base de E le sont.

dém. :
($\Rightarrow$) Une subdivision adaptée à la continuité par morceaux de f est évidemment adaptée à la continuité par morceaux des ses fonctions composantes.
($\Leftarrow$) Une réunion de subdivisions adaptées à chaque fonction coordonnée détermine une subdivision adaptée à f.
□

15.2.3 Fonction continue par morceaux définie sur un intervalle

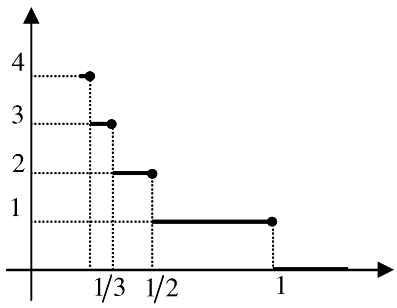
Remarque Si $f : [a,b] \to E$ est continue par morceaux alors pour tout $[c,d] \subset [a,b]$ la restriction $f_{\restriction [c,d]}$ est continue par morceaux.

Définition

Une fonction $f : I \to E$ est dite continue par morceaux si s

$$\forall [a,b] \subset I, f_{\restriction [a,b]} \text{ est continue par morceaux}$$

Exemple La fonction $t \mapsto \lfloor 1/t \rfloor$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.



Proposition

> L'ensemble $\mathcal{C}^0_{pm}(I,E)$ des fonctions continue par morceaux de I vers E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,E)$.

dém. :
$\mathcal{C}^0_{pm}(I,E) \subset \mathcal{F}(I,E)$ et $\tilde{0} \in \mathcal{C}^0_{pm}(I,E)$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $f, g \in \mathcal{C}^0_{pm}(I,E)$.
Pour tout $[a,b] \subset I$, $f_{\restriction [a,b]}$ et $g_{\restriction [a,b]}$ sont continues par morceaux donc $(\lambda f + \mu g)_{\restriction [a,b]} = \lambda f_{\restriction [a,b]} + \mu g_{\restriction [a,b]}$ l'est aussi. Ainsi $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^0_{pm}(I,E)$.
□

Proposition

> $f : I \to E$ est continue par morceaux si, et seulement si, ses fonctions coordonnées dans une base de E le sont.

Proposition

> Si $f : I \to E$ est continue par morceaux alors $\|f\| : I \to \mathbb{R}$ l'est aussi.

dém. :
Une subdivision adaptée à la continuité par morceaux de $f_{\restriction [a,b]}$ le sera aussi à $\|f\|_{\restriction [a,b]}$.
□

15.2.4 Fonction de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux

Définition

> Une fonction $f : [a,b] \to E$ est dite de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux s'il existe $\sigma = (a_0, a_1, ..., a_n)$ subdivision de $[a,b]$ vérifiant
>
> $$\forall i \in \{1, \ldots, n\}\,,\ f_{\restriction]a_{i-1}, a_i[} \text{ est prolongeable en une fonction de classe } \mathcal{C}^k \text{ sur } [a_{i-1}, a_i]$$

Remarque $f_{\restriction]a_{i-1}, a_i[}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a_{i-1}, a_i]$ ssi
1) f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]a_{i-1}, a_i[$;
2) $f, f', \ldots, f^{(k)}$ convergent en a_{i-1}^+ et a_i^-.

Définition

Une fonction $f : I \to E$ est dite de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux si ses restrictions à tout segment $[a, b] \subset I$ sont $\mathcal{C}^k$ par morceaux.

Proposition

L'ensemble $\mathcal{C}^k_{pm}(I, E)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux de I vers E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0_{pm}(I, E)$.

Proposition

$f : I \to E$ est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux si, et seulement si, ses fonctions coordonnées dans une base de E le sont.

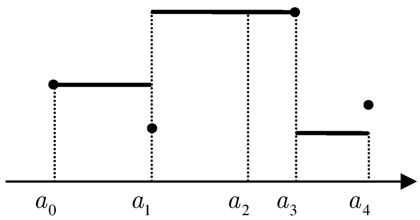
15.2.5 Fonction en escalier

Définition

Une fonction $\varphi : [a, b] \to E$ est dite en escalier s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ de $[a, b]$ vérifiant

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \varphi_{\restriction]a_{i-1}, a_i[} \text{ est constante}$$

Une telle subdivision est alors dite adaptée à φ.



Remarque Les fonctions en escalier sont $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux.

Proposition

L'ensemble $\mathcal{E}([a, b], E)$ des fonctions en escalier de $[a, b]$ vers E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0_{pm}([a, b], E)$.

Proposition

$\varphi : [a, b] \to E$ est en escalier si, et seulement si, ses fonctions coordonnées dans une base de E le sont.

Théorème

$\forall f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a, b], E), \forall \varepsilon > 0, \exists \varphi \in \mathcal{E}([a, b], E), \forall t \in [a, b], \|f(t) - \varphi(t)\| \leqslant \varepsilon.$

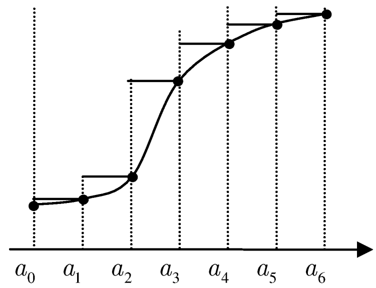
dém. :
Cas f continue sur $[a, b]$.
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue sur le segment $[a, b]$, elle y est uniformément continue et donc il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall s, t \in [a, b], |s - t| < \alpha \Rightarrow |f(s) - f(t)| \leqslant \varepsilon$$

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $(b-a)/n \leqslant \alpha$ et $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ la subdivision de $[a,b]$ définie par

$$a_i = a + i\frac{b-a}{n}$$

Considérons $\varphi : [a,b] \to E$ définie par $\varphi(t) = f(a_i)$ sur $]a_{i-1}, a_i]$ et $\varphi(a) = f(a)$.



La fonction φ est une fonction en escalier et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $t \in]a_{i-1}, a_i]$, on a

$$|t - a_i| \leqslant \frac{b-a}{n} \leqslant \alpha$$

et donc

$$\|f(t) - \varphi(t)\| \leqslant \varepsilon$$

Cas f continue par morceaux sur $[a,b]$.
Soit $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f.
Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on peut prolonger $f_{\restriction]a_{i-1}, a_i[}$ en une fonction continue f_i définie sur $[a_{i-1}, a_i]$.
La fonction f_i étant continue, il existe (φ_i) fonction en escalier telle que

$$\forall t \in [a_{i-1}, a_i], \|f_i(t) - \varphi_i(t)\| \leqslant \varepsilon$$

Posons alors $\varphi : [a,b] \to E$ définie par

$$\varphi(a_i) = f(a_i) \text{ et } \varphi(t) = \varphi_i(t) \text{ si } t \in]a_{i-1}, a_i[$$

On a clairement par construction

$$\forall t \in [a,b], \|f(t) - \varphi(t)\| \leqslant \varepsilon$$

□

Corollaire

$\mathcal{E}([a,b], E)$ est une partie dense de $\mathcal{C}^0_{pm}([a,b], E)$ normé par $\|\,.\,\|_\infty$.
On peut alors dire que les fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ sont limites uniformes de suites de fonctions en escalier.

15.2.6 Fonction affine par morceaux

Définition

Une fonction $\varphi : [a, b] \to E$ est dite affine par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$ vérifiant

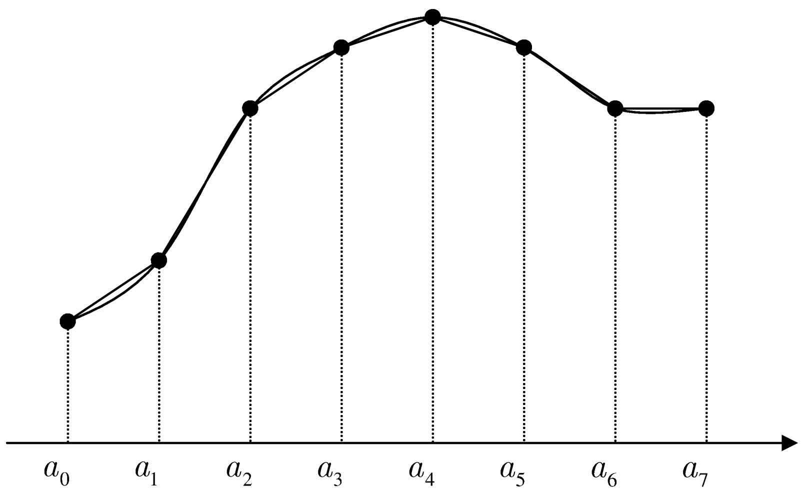
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \varphi_{\restriction]a_{i-1}, a_i[} \text{ est affine}$$

(i.e. de la forme : $t \to t.\alpha + \beta$ avec $\alpha, \beta \in E$).
On note $\mathcal{A}_{pm}([a, b], E)$ l'ensemble de ces fonctions.

Théorème

$$\forall f \in \mathcal{C}([a, b], E), \forall \varepsilon > 0, \exists \varphi \in \mathcal{A}_{pm}([a, b], E) \cap \mathcal{C}([a, b], E), \forall t \in [a, b], \|f(t) - \varphi(t)\| \leqslant \varepsilon$$

dém. :
On reprend la démarche précédente en considérant φ définie sur $[a_{i-1}, a_i]$ de sorte que $\varphi(a_{i-1}) = f(a_{i-1})$ et $\varphi(a_i) = f(a_i)$.



□

15.3 Intégration sur un segment

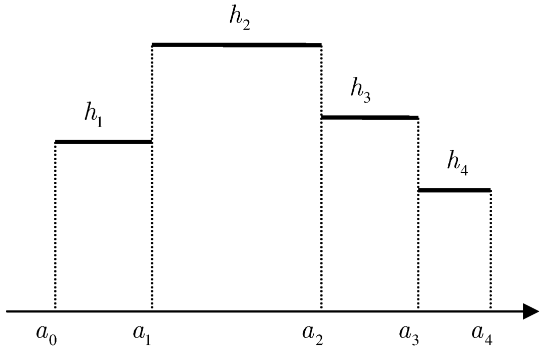
15.3.1 Construction de l'intégrale

Soit $\varphi : [a, b] \to E$ en escalier et $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ une subdivision adaptée à φ.

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \exists h_i \in E, \forall t \in]a_{i-1}, a_i[, \varphi(t) = h_i$$

Posons

$$I_\sigma(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) h_i$$



On peut montrer que :
- si $\text{Supp}\sigma' = \text{Supp}\sigma \cup \{c\}$ alors $I_{\sigma'}(\varphi) = I_\sigma(\varphi)$;
- si σ' est plus fine que σ alors $I_{\sigma'}(\varphi) = I_\sigma(\varphi)$;
- si σ_1 et σ_2 sont adaptées à φ alors $I_{\sigma_1}(\varphi) = I_{\sigma_2}(\varphi)$;

On note $I_{[a,b]}(\varphi)$ la valeur commune des $I_\sigma(\varphi)$ pour σ subdivision adaptée à φ.
On peut montrer que :
- $I_{[a,b]} : \mathcal{E}([a,b], E) \to E$ est linéaire ;
- $\forall \varphi \in \mathcal{E}([a,b], E)$, $\left\|I_{[a,b]}(\varphi)\right\| \leqslant (b-a)\left\|\varphi\right\|_\infty$.

L'ensemble $\mathcal{E}([a,b], E)$ est une partie dense de l'espace $\mathcal{C}^0_{pm}([a,b], E)$ normé par $\|\,.\,\|_\infty$.
Soit $f \in \mathcal{C}^o_{pm}([a,b], E)$. f est adhérent à $\mathcal{E}([a,b], E)$ et on peut montrer que :
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall \varphi, \psi \in \mathcal{E}([a,b], E)$, $\|\varphi - f\|_\infty \leqslant \alpha$ et $\|\psi - f\|_\infty \leqslant \alpha \Rightarrow \left\|I_{[a,b]}(\varphi) - I_{[a,b]}(\psi)\right\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

L'application $I_{[a,b]} : \mathcal{E}([a,b], E) \to E$ satisfait le critère de Cauchy en f, or E est complet donc $I_{[a,b]}$ converge en f.

Définition

> On pose $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ sa limite.

Par construction :

$$\forall (\varphi_n) \in \mathcal{E}\left([a,b], E\right)^{\mathbb{N}}, \varphi_n \xrightarrow{\|\,\cdot\,\|_\infty} f \Rightarrow I_{[a,b]}(\varphi_n) \to \int_{[a,b]} f$$

En particulier, en considérant une suite constante

$$\forall \varphi \in \mathcal{E}\left([a,b], E\right), \int_{[a,b]} \varphi = I_{[a,b]}(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) h_i$$

15.3.2 Propriétés

Théorème

> Soient $f, g : I \to E$ continues par morceaux et $\lambda \in \mathbb{K}$.
>
> $$\forall a, b \in I,\ \int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f,\ \int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$$

dém. :
Soient $(\varphi_n), (\psi_n) \in \mathcal{E}([a,b], E)^{\mathbb{N}}$ telles que $\varphi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$ et $\psi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} g$. On a $\varphi_n + \psi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f + g$.
Or $I_{[a,b]}(\varphi_n + \psi_n) = I_{[a,b]}(\varphi_n) + I_{[a,b]}(\psi_n)$ donc à la limite $\displaystyle\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$

□

Théorème

Soit $f : I \to E$ continue par morceaux et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\forall a, b \in I,\ \int_a^b u(f) = u\left(\int_a^b f\right)$$

dém. :
Soient $(\varphi_n) \in \mathcal{E}([a,b], E)^{\mathbb{N}}$ telles que $\varphi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$. On a $u(\varphi_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} u(f)$.
Or on vérifie $I_{[a,b]}(u(\varphi_n)) = u(I_{[a,b]}(\varphi_n))$ donc à la limite $\displaystyle\int_a^b u(f) = u\left(\int_a^b f\right)$.

□

Théorème

Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de E et $f : I \to E$ une fonction continue par morceaux de fonctions coordonnées $f_1, \dots, f_p$ dans $\mathcal{B}$ alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \left(\int_a^b f_1(t)\,\mathrm{d}t\right) e_1 + \cdots + \left(\int_a^b f_p(t)\,\mathrm{d}t\right) e_p$$

dém. :
Dans le même esprit qu'au dessus.

□

Théorème

Soit $f : I \to E$ continue par morceaux.

$$\forall a \leqslant b \in I,\ \left\|\int_a^b f\right\| \leqslant \int_a^b \|f\|$$

dém. :
En observant $\left\|I_{[a,b]}(\varphi)\right\| \leqslant I_{[a,b]}(\|\varphi\|)$.

□

15.3.3 Intégrale entre deux bornes

Définition

Soient $f \in \mathcal{C}^o_{pm}(I, E)$ et $a, b \in I$. On pose

$$\int_a^b f = \begin{cases} \displaystyle\int_{[a,b]} f & \text{si } a < b \\ 0 & \text{si } a = b \\ \displaystyle -\int_{[a,b]} f & \text{si } a > b \end{cases}$$

Théorème

Soit $f : I \to E$ continue par morceaux.

$$\forall a, b, c \in I,\ \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Remarque Les théorèmes de linéarité précédemment présentés demeure vraie mais l'inégalité triangulaire nécessite le bon ordre des bornes pour être affirmée.

15.3.4 Primitive

Définition

On appelle primitive de $f : I \to E$, s'il en existe, toute fonction $F : I \to E$ dérivable vérifiant $F' = f$.

Proposition

Si $f : I \to E$ admet des primitives, celles-ci se déduisent les unes des autres par addition d'une constante vectorielle.

dém. :
Si F est primitive de f alors $F + C$ aussi car $(F + C)' = F' = f$.
Si F et G sont deux primitives de f alors $(F - G)' = 0$ et donc $F - G$ est constante.
□

Théorème

Soient $f : I \to E$ et $a \in I$.
Si f est continue alors f possède une unique primitive s'annulant en a, c'est $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

dém. :
La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie de I vers E et s'annule en a.
Soit $x \in I$. Montrons

$$\frac{1}{h}\left(F(x+h) - F(x)\right) \xrightarrow[h \to 0]{} f(x)$$

Soit $h > 0$.

$$\left\|\frac{1}{h}\left(F(x+h)-F(x)\right)-f(x)\right\| = \frac{1}{h}\left\|\int_x^{x+h} f(t)-f(x)\,\mathrm{d}t\right\| \leqslant \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \|f(t)-f(x)\|\,\mathrm{d}t$$

Puisque f est continue en x, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall t \in I, |t-x| \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(t)-f(x)\| \leqslant \varepsilon$$

et alors

$$0 < h \leqslant \alpha \Rightarrow t \in [x, x+h], \|f(t)-f(x)\| \leqslant \varepsilon$$

et donc

$$0 < h \leqslant \alpha \Rightarrow \left\|\frac{1}{h}\left(F(x+h)-F(x)\right)-f(x)\right\| \leqslant \varepsilon$$

De même on montre

$$\frac{1}{h}\left(F(x+h)-F(x)\right) \xrightarrow[h\to 0^-]{} f(x)$$

□

Remarque On a donc la formule

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(x)$$

Corollaire

Si $f : I \to E$ est continue de primitive F alors

$$\forall a, b \in I, \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b$$

dém. :

$\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$ car $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et F sont primitives de f.

□

15.3.5 Changement de variable et intégration par parties

Théorème

Soient $\varphi : I \to J$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $f : J \to E$ continue.

$$\forall a, b \in I, \int_a^b \varphi'(t).f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s)\,\mathrm{d}s$$

La manipulation consistant à transformer une intégrale en l'autre est appelée changement de variable définie par la relation $s = \varphi(t)$.

dém. :

Soit F une primitive de la fonction continue f.

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s)\,\mathrm{d}s = [F(s)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}$$

On vérifie que $F \circ \varphi$ est primitive de la fonction continue $\varphi'.f \circ \varphi$ donc

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = [F(\varphi(t))]_a^b$$

□

Théorème

Soient $b : E \times F \to G$ bilinéaire, $u : I \to E$ et $v : I \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\forall a, b \in I,\ \int_a^b b(u', v) = [b(u, v)]_a^b - \int_a^b b(u, v')$$

dém. :

Puisque la dérivée de $b(u, v)$ est $b(u', v) + b(u, v')$

$$\int_a^b b(u', v) + \int_a^b b(u, v') = \int_a^b (b(u, v))' = [b(u, v)]_a^b$$

□

15.3.6 Formules de Taylor

Théorème

Soient $f : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et $a \in I$.

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

dém. :

Par récurrence en exploitant l'intégration par parties

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t$$

□

Remarque Par le changement de variable affine $t = a + (x-a)u$, on peut réécrire le reste intégral

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = (x-a)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(a + (x-a)u)\,\mathrm{d}u$$

Corollaire

Si f est $\mathcal{C}^{n+1}$ et $f^{(n+1)}$ bornée alors

$$\forall a, x \in I,\ \left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in I} \left\| f^{(n+1)}(t) \right\|$$

dém. :
On a

$$\left\|\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+(x-a)u)\,\mathrm{d}u\right\| \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-u)^n \left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty \mathrm{d}u = \frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty}{(n+1)!}$$

□

Théorème

Soient $f : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^n$ et $a \in I$.
Quand $x \to a$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o\left((x-a)^n\right)$.
Cette relation est appelée développement limité de f à l'ordre n en a.

dém. :
Puisque que f est classe $\mathcal{C}^n$,

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Puisque $f^{(n)}$ est continue en a, on peut écrire

$$f^{(n)}(t) = f^{(n)}(a) + \varphi(t) \text{ avec } \varphi \underset{a}{\to} 0$$

et alors

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que

$$|t-a| \leqslant \alpha \Rightarrow \|\varphi(t)\| \leqslant \varepsilon$$

et alors pour $|x-a| \leqslant \alpha$,

$$\left\|\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leqslant \varepsilon\frac{(x-a)^n}{n!}$$

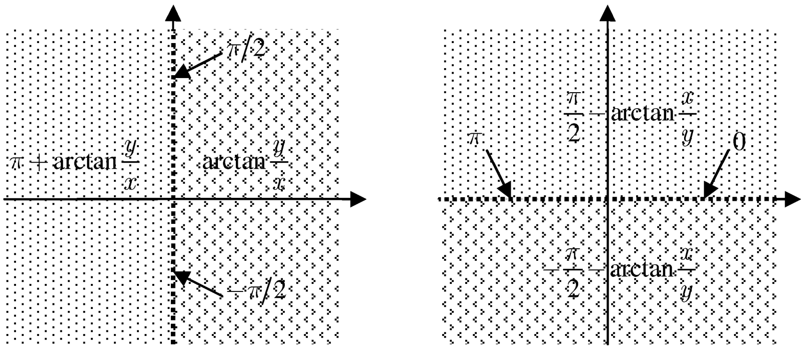
□

15.3.7 Application : Théorie du relèvement

On note $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$.

15.3.7.1 Argument d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}^\star$.
On souhaite exprimer un argument de z en fonction de $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$.
On a déjà les solution suivantes



Mais on peut faire mieux :

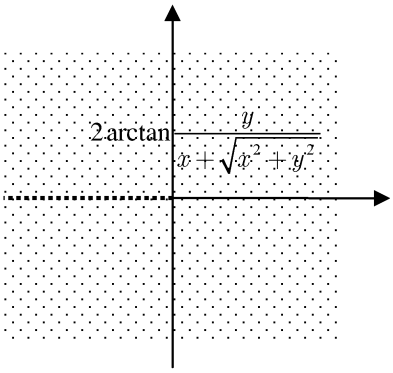
Théorème

Si $z \in U \setminus \{-1\}$ alors $\arg(z) = 2 \arctan \dfrac{y}{1+x} \quad [2\pi]$.

dém. :
Posons $\theta = \arg(z) \in \left]-\pi, \pi\right[$.
On a $\dfrac{y}{1+x} = \dfrac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} = \tan(\theta/2)$ avec $\theta/2 \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$ donc $\theta = 2\arctan \dfrac{y}{1+x}$.
□

Corollaire

$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, $\arg(z) = 2\arctan \dfrac{y}{x + \sqrt{x^2+y^2}} \quad [2\pi]$.



dém. :
$z = x + iy$ et $z' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{iy}{\sqrt{x^2+y^2}} \in U$ ont le même argument.
□

15.3.7.2 Théorème de relèvement

Problème Soit $z : I \to U$ continue.
Existe-t-il $\theta : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall t \in I$, $z(t) = e^{i\theta(t)}$?

Théorème

> Si $z : I \to U$ est de classe $\mathcal{C}^n$ (avec $n \geqslant 1$) alors il existe une fonction $\theta : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$, unique à l'addition d'une constante multiple de 2π près, telle que $\forall t \in I, z(t) = \mathrm{e}^{i\theta(t)}$.

dém. :
Unicité à « 2π près »
Soit $t \mapsto \theta(t)$ solution.
$z(t) = \mathrm{e}^{i\theta(t)}, z'(t) = i\theta'(t)z(t)$ donc $\theta'(t) = z'(t)/iz(t)$.
Soit $t_0 \in I$.

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{z'(u)}{iz(u)}\,\mathrm{d}u$$

avec $\theta(t_0)$ un argument de $z(t_0)$ unique à 2π près.
Existence
Soient $t_0 \in I$ et θ_0 un argument de $z(t_0)$.
Considérons

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{z'(u)}{iz(u)}\,\mathrm{d}u$$

La fonction $\theta : I \to \mathbb{C}$ est bien définie et est primitive de la fonction $t \mapsto z'(t)/iz(t)$. Puisque cette dernière est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$, on peut affirmer que θ est de classe $\mathcal{C}^n$.
Soit $g : I \to \mathbb{C}$ donnée par

$$g(t) = z(t)\mathrm{e}^{-i\theta(t)}$$

g est dérivable, $g(t_0) = 1$ et $g'(t) = 0$ donc g est constante égale à 1. Ainsi

$$\forall t \in I, z(t) = \mathrm{e}^{i\theta(t)}$$

Enfin, puisque $|z(t)| = 1$, $\theta(t) \in \mathbb{R}$ pour tout $t \in I$.
□

Remarque On peut montrer que le théorème est encore valable dans le cas $n = 0$.

Corollaire

> Soit $z : I \to \mathbb{C}^\star$ de classe $\mathcal{C}^n$ (avec $n \geqslant 1$).
> Il existe des fonctions $r : I \to \mathbb{R}^+$ et $\theta : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ vérifiant
>
> $$\forall t \in I, z(t) = r(t)\mathrm{e}^{i\theta(t)}$$

dém. :
La fonction $t \mapsto z(t)/|z(t)|$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et à valeurs dans U.
□

Corollaire

Soit $f : t \in I \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ (avec $n \geqslant 1$) vérifiant

$$\forall t \in I, (x(t), y(t)) \neq (0, 0)$$

Il existe des fonctions $r : I \to \mathbb{R}^{+\star}$ et $\theta : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ vérifiant

$$\forall t \in I, \begin{cases} x(t) = r(t)\cos\theta(t) \\ y(t) = r(t)\sin\theta(t) \end{cases}$$

En d'autres termes, si f déterminer un paramétrage cartésien d'une courbe, on peut aussi en former un paramétrage en coordonnées polaires.

Chapitre 16

Suites et séries de fonctions vectorielles

Soient E et F des espaces de dimensions finies (donc complet).
Ces espaces E et F peuvent être normés et le choix des normes n'a pas d'incidence sur la suite.

16.1 Modes de convergence

16.1.1 Suite de fonctions

Soit (u_n) suite de fonctions de $X \subset E$ vers F.

Définition

On dit que (u_n) converge simplement vers $u : X \to F$ si

$$\forall x \in X, u_n(x) \to u(x)$$

Définition

On dit que (u_n) converge uniformément vers $u : X \to F$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \forall x \in X, \|u_n(x) - u(x)\|_F \leqslant \varepsilon$$

Proposition

La convergence uniforme entraîne la convergence simple vers la même limite.

Remarque Sur $B(X, F)$ espace des fonctions bornées de X vers F, on peut introduire $\|\,.\,\|_\infty$ définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_F$$

On peut alors énoncé de nouveau la convergence uniforme

$$u_n \xrightarrow{CVU} u_n \Leftrightarrow \|u_n - u\|_\infty \to 0$$

16.1.2 Séries de fonctions

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions de $X \subset E$ vers F i.e. une suite (S_n) de fonctions avec

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Définition

On dit que $\sum u_n$ converge simplement si

$$\forall x \in X, \sum u_n(x) \text{ converge}$$

On peut alors introduire sa somme

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

et son reste de rang n noté

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = S - S_n$$

Définition

On dit que $\sum u_n$ converge uniformément si

$$\sum u_n \text{ converge simplement et } R_n \xrightarrow{CVU} \tilde{0}$$

Définition

On dit que $\sum u_n$ converge normalement si
1) chaque u_n est bornée ;
2) la série numérique $\sum \|u_n\|_\infty$ converge

Théorème

La convergence normale entraîne la convergence uniforme.

dém. :
Si $\sum u_n$ converge normalement alors pour tout $x \in X$, la série vectorielle $\sum u_n(x)$ converge absolument car

$$\|u_n(x)\| \leqslant \|u_n\|_\infty$$

et donc (puisque E est complet car de dimension finie) $\sum u_n$ converge simplement.
De plus

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k(x)\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k\|_\infty \to 0$$

donc il y a convergence uniforme.
□

Remarque Les théorèmes qui suivront prolongeant ceux pour les fonctions numériques se démontrent de la même manière en substituant |||| ||.

16.2 Limite et continuité

16.2.1 Continuité par convergence uniforme

Théorème

Soit (u_n) une suite de fonctions de $X \subset E$ vers F.
Si
1) chaque u_n est continue ;
2) (u_n) converge uniformément vers $u : X \to F$;
alors la fonction u est continue.

Corollaire

Si
1) chaque u_n est continue ;
2) la série $\sum u_n$ converge uniformément sur X ;
alors la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue.
Ce résultat se généralise aux séries de fonctions.

Exemple Etudions sur $\mathbb{R}^2$

$$S : (x, y) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n + x^2)(n + y^2)}$$

Pour $n \geqslant 1$, on introduit

$$u_n : (x, y) \mapsto \frac{1}{(n + x^2)(n + y^2)}$$

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$u_n(x, y) \sim \frac{1}{n^2}$$

Par équivalence de série à termes positifs, la série $\sum u_n(x, y)$ converge.
On en déduit que la fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est définie sur $\mathbb{R}^2$.
Continuité ?
Les fonctions u_n sont continues.
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|u_n(x, y)| \leqslant \frac{1}{n^2}$ donc $\|u_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{n^2}$.
Par suite $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^2$.
On en déduit que S est continue sur $\mathbb{R}^2$.

16.2.2 Continuité sur tout compact

Lemme

Soit (x_n) une suite d'élément de E.
Si (x_n) converge vers un élément ℓ alors l'ensemble

$$K = \{x_n / n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$$

est une partie compacte de E.

dém. :
Puisque $\dim E < +\infty$, il suffit d'observer que K est une partie fermée et bornée de E.
Puisque (x_n) converge, la suite (x_n) est bornée : il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| \leqslant M$$

et en passant à la limite on a aussi $\|\ell\| \leqslant M$.
On en déduit

$$\forall x \in K, \|x\| \leqslant M$$

et donc la partie K est bornée. Il reste à voir qu'elle est aussi fermée.
Considérons U le complémentaire de K.
Soit $a \in U$ (et donc $a \notin K$).
On a $x_n \to \ell$ donc $\|x_n - a\| \to \|\ell - a\| > 0$.
Posons $\alpha = \|\ell - a\|/2 > 0$. A partir d'un certain rang N, $\|x_n - a\| \geqslant \alpha$.
Posons alors $\alpha' = \min\{\|x_0 - a\|, \ldots, \|x_{N-1} - a\|, \alpha\} > 0$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n - a\| \geqslant \alpha'$$

et donc

$$K \cap B(a, \alpha') = \emptyset$$

ce qui signifie donc $B(a, \alpha) \subset U$.
La partie U étant ouverte, la partie K est donc fermée et finalement compacte.
□

Théorème

Soit $f : X \subset E \to F$.
Si pour tout compact $K \subset X$, $f_{\restriction K}$ est continue alors f est continue.

dém. :
Soit $a \in X$. Considérons (x_n) une suite d'élément de X de limite a.
La partie $K = \{x_n / n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ est compacte donc $f_{\restriction K}$ est continue.
Or $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$ et $x_n \to a \in K$ donc

$$f_{\restriction K}(x_n) \to f_{\restriction K}(a)$$

et

$$f(x_n) \to f(a)$$

Par la caractérisation séquentielle des limites, on peut conclure que f est continue en a.
□

Exemple Soit $f : E \to \mathbb{R}$.
Si

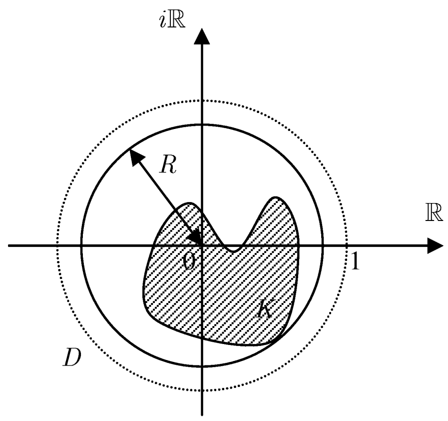
$$\forall M > 0, f_{\restriction B_f(0_E, M)} \text{ est continue}$$

alors f est continue sur tout compacte de E et donc est continue (sur E).
En effet tout compact K de E peut être inclus dans une boule $B_f(0_E, M)$ où l'on sait f continue.

Exemple Dans $\mathbb{C}$, on note $D(0,R) = \{z \in \mathbb{C} / \, |z| < R\}$.
Soit $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ une fonction complexe.
Si

$$\forall a \in [0,1[\,, f_{\restriction \overline{D(0,a)}} \text{ est continue}$$

alors f est continue sur tout compact de $D(0,1)$ est donc est continue.
En effet K un compact non vide inclus dans $D(0,1)$.



En posant $R = \sup\limits_{z \in K} |z|$, on a évidemment $K \subset \overline{D(0,R)}$.
Or $z \mapsto |z|$ étant continue sur le compact non vide K, le sup est un max et donc il existe $z_0 \in K$ tel que $a = |z_0|$. Or $K \subset D(0,1)$ donc $a < 1$. La continuité sur $\overline{D(0,a)}$ assure alors la continuité sur K.

16.2.3 Continuité par convergence uniforme sur tout compact

Soit (u_n) suite de fonctions de $X \subset E$ vers F.

Définition

Soit (u_n) suite de fonctions de $X \subset E$ vers F.
On dit que (u_n) converge uniformément vers $u : X \to F$ sur tout compact si

$$\forall K \text{ compact } \subset X, u_n \xrightarrow[K]{CU} u$$

Proposition

La convergence uniforme sur tout compact entraîne la convergence simple.

Théorème

Soit (u_n) suite de fonctions de $X \subset E$ vers F.
Si
1) chaque u_n est continue ;
2) (u_n) converge uniformément sur tout compact vers $u : X \to F$;
alors la fonction u est continue.

Corollaire

Si
1) chaque u_n est continue ;
2) $\sum u_n$ converge uniformément sur tout compact de X ;
alors la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue.

Exemple Etudions sur $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$ la fonction

$$L : z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$$

Pour $n \geqslant 1$, on introduit

$$u_n : z \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$$

Les fonctions u_n sont continues.
Pour tout $z \in K$, $|u_n(z)| \leqslant \frac{1}{n} R^n \leqslant R^n$.
Ainsi $\|u_n\|_{\infty,K} \leqslant R^n$ or $R \in [0,1[$ donc $\sum u_n$ converge normalement sur K.
Par convergence uniforme sur tout compact, on peut affirmer que L est définie et continue sur D.

Exemple Soit E un algèbre normée de dimension finie.
Montrons que la fonction $x \mapsto \exp(x)$ est continue.
Rappelons

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Introduisons

$$u_n : x \mapsto \frac{1}{n!} x^n$$

Les fonctions u_n sont continues.
Soit $M \in \mathbb{R}^+$. Pour tout $x \in B_f(0, M)$ on a

$$\|u_n(x)\| = \frac{1}{n!} \|x^n\| \leqslant \frac{1}{n!} \|x\|^n \leqslant \frac{1}{n!} M^n$$

Puisque la série exponentielle $\sum \frac{1}{n!} M^n$ converge, la série $\sum u_n$ converge normalement sur $B_f(0, M)$. Or ceci vaut pour tout $M \geqslant 0$, il y a convergence uniforme sur tout compact et on peut affirmer que la fonction $\exp$ est continue sur E.
En particulier la fonction $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \exp(A)$ est continue.

16.2.4 Théorème de la double limite

Théorème

Soit (u_n) une suite de fonctions de $X \subset E$ vers F et $a \in \bar{X}$.
Si
1) (u_n) converge uniformément sur X vers une fonction u ;
2) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \underset{a}{\to} \ell_n$;
Alors la suite (ℓ_n) converge et en notant ℓ sa limite

$$u(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$$

Ainsi

$$\lim_{x \to a} \left(\lim_{n \to +\infty} u_n(x) \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to a} u_n(x) \right)$$

Corollaire

Si
1) $\sum u_n$ converge uniformément sur X ;
2) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \underset{a}{\to} \ell_n$;
Alors la série $\sum \ell_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \xrightarrow[x \to a]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$$

Exemple Considérons à nouveau la fonction $L : z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ définie sur $D(0,1)$.
On a $-1 \in \overline{D(0,1)}$ et $u_n(z) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \xrightarrow[z \to -1]{} \frac{-1}{n}$
Or la série $\sum \frac{-1}{n}$ divergente donc la série de fonction $\sum u_n$ ne converge par uniformément sur $D(0,1)$.

16.3 Intégration et dérivation

Désormais la variable est supposée réelle

16.3.1 Intégration sur $[a, b]$

Théorème

Soit (u_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ vers F.
Si
1) chaque u_n est continue ;
2) (u_n) converge uniformément vers $u : [a, b] \to F$
alors la fonction u est continue et
la suite $(\int_a^b u_n)$ converge et

$$\int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t$$

Autrement dit

$$\int_a^b \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b u_n$$

Corollaire

Si
1) chaque u_n est continue ;
2) $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a, b]$
alors la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

16.3.2 Dérivation

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide

Théorème

Soit (u_n) une suite de fonctions de I vers F.
Si
1) chaque u_n est de classe $\mathcal{C}^1$;
2) (u_n) converge simplement vers $u : I \to F$;
3) (u'_n) converge uniformément sur tout segment vers $v : I \to F$;
alors u est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right)' = \lim_{n\to+\infty} u'_n$$

Corollaire

Si
1) chaque u_n est de classe $\mathcal{C}^1$;
2) $\sum u_n$ converge simplement sur I ;
3) $\sum u_n'$ converge uniformément sur tout segment de I ;
alors la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ I et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Remarque On peut aussi énoncer un résultat pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$.

16.3.3 Application

Soient E une algèbre normée de dimension finie.
Fixons $a \in E$ et considérons la fonction

$$e_a : t \mapsto e_a(t) = \exp(t.a) \in E$$

avec

$$\exp(t.a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}.a^n$$

Théorème

L'application $e_a : t \mapsto \exp(t.a)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$e_a'(t) = ae_a(t) = e_a(t)a$$

dém. :
Introduisons les fonctions $u_n : \mathbb{R} \to E$ définies par
□

$$u_n(t) = \frac{t^n}{n!}.a^n$$

La série $\sum u_n$ converge simplement et sa somme est la fonction e_a.
Chaque u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$u_n(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.a^n \text{ si } n \geqslant 1 \text{ et } u_n(t) = 0 \text{ si } n = 0$$

Soit $M \geqslant 0$.
Sur $[-M, M]$,

$$\|u_n(t)\| \leqslant \frac{M^{n-1}}{(n-1)!} \|a^n\| \leqslant \frac{M^{n-1}}{(n-1)!} \|a\|^n$$

On en déduit

$$\|u_n\|_{\infty,[-M,M]} \leqslant \|a\| \frac{(M \|a\|)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Or on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge donc $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(M \|a\|)^{n-1}}{(n-1)!}$ converge.

Par comparaison de séries à terme positifs, on obtient que $\sum u_n$ converge normalement sur $[-M, M]$.
Finalement, par convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$ de $\sum u_n$, on peut affirmer que e_a est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$e_a'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.a^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}.a^{n+1} = a \exp(t.a) = \exp(t.a)a$$

Enfin, par récurrence, on obtient que $t \to \exp(ta)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Chapitre 17

Fonction définie par une intégrale

17.1 Limite et continuité

On étudie dans cette partie les fonctions de la forme

$$F : x \in X \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

avec X une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$,...)

17.1.1 Continuité par domination

Théorème

Si $f : X \times I \to \mathbb{K}$ vérifie
1) $\forall x \in X$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
2) $\forall t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur X ;
3) $\exists \varphi : I \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable vérifiant

$$\forall (x,t) \in X \times I,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t) \text{ [hypothèse de domination]}$$

Alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur X.

dém. :
Pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I et donc $F(x)$ est bien définie.
Etudions la continuité en $a \in X$ via la caractérisation séquentielle des limites.
Soit (x_n) une suite d'éléments de X convergeant vers a.
$F(x_n) = \displaystyle\int_I f(x_n,t)\,\mathrm{d}t = \int_I u_n(t)\,\mathrm{d}t$ avec $u_n(t) = f(x_n,t)$.
Pour tout $t \in I$, $u_n(t) = f(x_n,t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a,t) = u_\infty(t)$,
Ainsi (u_n) converge simplement vers la fonction $u_\infty : t \mapsto u(a,t)$.
Chaque u_n et u_∞ sont continues par morceaux.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n(t)| \leqslant \varphi(t)$ avec φ intégrable.
Par convergence dominée $\displaystyle\int_I u_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I u_\infty(t)\,\mathrm{d}t$ i.e. $F(x_n) \to F(a)$.
Par caractérisation séquentielle des limites, F est continue en a.
□

Remarque Les propriétés 1) et 2) sont évidemment réunies si f est continue sur $X \times I$.

Exemple Soit $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
Considérons $f : (x,t) \mapsto \dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}$ définie sur $\mathbb{R} \times [0,+\infty[$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
$\forall t \in [0,+\infty[$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[$, $|f(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$
avec $\varphi : [0,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$ car $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$.
Par domination, la fonction F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exemple Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^1 t^x \ln(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \geqslant 0$.

17.1.2 Continuité par domination locale

Théorème

Si $f : X \times I \to \mathbb{K}$ vérifie
1) $\forall x \in X$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
2) $\forall t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur X ;
3) $\forall K$ compact inclus dans X, $\exists \varphi_K : I \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable vérifiant

$$\forall (x,t) \in K \times I,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi_K(t) \text{ [hypothèse de domination locale]}$$

Alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur X.

dém. :
F est définie et continue sur tout compact inclus dans X donc définie et continue sur X.
□

Exemple Soit $F : x \in]0,+\infty[\mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^x)}$
Considérons $f : (x,t) \mapsto \dfrac{1}{t(1+t^x)}$ définie sur $]1,+\infty[\times [0,+\infty[$.
Définition de F
Soit $x > 0$.
La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ et

$$f(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{x+1}} \text{ avec } x+1 > 1$$

Donc $F(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^x)}$ est bien définie
Continuité de F
La fonction f est continue sur $]0,+\infty[\times [1,+\infty[$.
Soit $a > 0$.
Pour $x \geqslant a$,

$$|f(x,t)| = \frac{1}{t(1+t^x)} \leqslant \frac{1}{t^{a+1}} = \varphi_a(t)$$

avec $\varphi_a : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable en vertu de l'étude qui précède.
Par domination, la fonction F est continue sur chaque intervalle $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$) donc elle est continue sur $]0, +\infty[$.

Exemple Soit $F : x \in \,]0, +\infty[\mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$.
Considérons $f : (z, t) \mapsto \sin(t^2)\mathrm{e}^{-xt}$ définie sur $]0, +\infty[\times [0, +\infty[$.
Soit $x > 0$.
La fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et

$$t^2 f(x, t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 \text{ car } x > 0$$

Donc $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ est bien définie.
Soit $a > 0$.

$$\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times]0, +\infty[,\ |f(x, t)| = \mathrm{e}^{-at} = \varphi_a(t)$$

avec $\varphi_a :]0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable.
Par domination, la fonction F est continue sur chaque intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$ donc elle aussi continue sur $]0, +\infty[$.

17.1.3 Cas d'une intégration sur segment

Théorème

(hors-programme)

Si $f : X \times [a, b] \to \mathbb{K}$ est continue alors $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(x, t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur X.

dém. :
Soit K est un compact inclus dans X.
La partie $K \times [a, b]$ est compacte et f y est continue donc bornée. Ainsi, il existe $M_K \in \mathbb{R}^+$ vérifiant $\forall (x, t) \in K \times [a, b], |f(x, t)| \leqslant M_K = \varphi_K(t)$ avec φ_K intégrable sur $[a, b]$.
Par domination sur tout compact, F est définie et continue sur X.
□

Exemple Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{x \sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$ avec $x \in \mathbb{R}$.
Considérons $f : (x, \theta) \mapsto \exp(x \sin\theta)$ définie sur $\mathbb{R} \times [0, \pi]$.
La fonction F est bien définie en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur le segment $[0, \pi]$.
Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$.
Pour $(x, \theta) \in [a, b] \times [0, \pi]$,

$$|f(x, \theta)| \leqslant \mathrm{e}^b = \varphi(t)$$

La fonction constante φ est intégrable sur $[0, \pi]$.
Par domination, F est continue sur $[a, b]$ et puisque ce ceci vaut pour chaque $[a, b] \subset \mathbb{R}$, on peut affirmer que F est continue.

Exemple Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t$ avec $x > 0$.
Par le changement de variable $t = xu$,

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\sin(xu)}{1+u}\,\mathrm{d}u$$

L'application $f : (x,u) \mapsto \dfrac{\sin(xu)}{1+u}$ est définie et continue sur $]0,+\infty[\times[0,1]$ et

$$|f(x,u)| \leqslant 1 = \varphi(u) \text{ avec } \varphi \text{ intégrable sur } [0,1]$$

donc F est continue sur $]0,+\infty[$.

17.1.4 Limite

Pour étudier, autrement que par continuité, la limite d'une fonction définie par une intégrale on peut :
- procéder par comparaison ;
- exploiter convergence dominée et caractérisation séquentielle des limites ;
- raisonner par les epsilon...

Exemple Pour $x \geqslant 0$, posons $F(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^x\,\mathrm{d}t$
Etudions

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)$$

Soit (x_n) une suite réelle de limite $+\infty$.
$F(x_n) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} u_n(t)\,\mathrm{d}t$ avec $u_n : t \mapsto (\sin t)^{x_n}$ définie sur $[0,\pi/2]$.
Chaque u_n est continue par morceaux et la suite (u_n) converge simplement vers u_∞ continue par morceaux définie par $u_\infty(t) = 0$ pour $t \in [0,\pi/2[$ et $u_\infty(\pi/2) = 1$.
De plus $|u_n(t)| \leqslant 1 = \varphi(t)$ avec φ intégrable sur $[0,\pi/2]$.
Par convergence dominée, $F(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^{\pi/2} u_\infty(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
Par la caractérisation séquentielle des limites, $F \xrightarrow[+\infty]{} 0$.

Exemple Pour $x > 0$, posons $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.
Etudions $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.
On a

$$0 \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

donc par encadrement F tend vers 0 en $+\infty$.
Etudions $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$.
On a

$$F(x) \geqslant \int_0^{1/x} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{e}}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$$

donc par comparaison F tend vers $+\infty$ en 0.

17.2 Dérivation

On étudie dans cette partie les fonctions de la forme

$$F : x \in X \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

avec X un intervalle non singulier de $\mathbb{R}$.

17.2.1 Formule de Leibniz

Définition

Soit $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ définie sur $X \times I$.
On dit que f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ si

$$\forall t \in I,\ \text{la fonction } x \mapsto f(x,t) \text{ est dérivable}$$

On pose alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x,t)\right)$$

Théorème

Soit $f : X \times I \to \mathbb{K}$ telle que
0) $\forall x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et l'intégrale $\displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ converge
de sort que $F(x) = \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ soit définie sur X.
Si f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ vérifiant
1) $\forall x \in I$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
2) $\forall t \in I$, $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur X ;
3) $\exists \varphi : I \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable vérifiant

$$\forall (x,t) \in X \times I,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

Alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur X et

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

dém. :
Etudions la dérivabilité en $a \in X$

$$\frac{F(x)-F(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} ?$$

Soit (x_n) une suite d'éléments de $X \setminus \{a\}$ convergeant vers a.

$$\frac{F(x)-F(a)}{x-a} = \int_I u_n(t)\,\mathrm{d}t$$

avec

$$u_n(t) = \frac{f(x_n,t)-f(a,t)}{x_n-a}$$

Soit $t \in I$.

$$u_n(t) = \frac{f(x_n,t)-f(a,t)}{x_n-a} = \frac{h(x_n)-h(a)}{x_n-a}$$

en introduit la fonction $h : x \mapsto f(x,t)$ qui est dérivable par hypothèse. On a

$$u_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} h'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)$$

Ainsi la suite de fonctions (u_n) converge simplement vers $u_\infty : t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,t)$.
Chaque u_n et u_∞ sont continues par morceaux.
Soit $t \in I$.
L'application $h : x \mapsto f(x,t)$ est dérivable et sa dérivée vérifie

$$|h'(x)| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

Par l'inégalité des accroissements finis, $h : x \mapsto f(x,t)$ est $\varphi(t)$-lipschitzienne.
Par suite

$$|u_n(t)| = \frac{|h(x_n)-h(a)|}{|x_n-a|} \leqslant \varphi(t)$$

avec φ continue par morceaux et intégrable.
Par convergence dominée

$$\int_I u_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I u_\infty(t)\,\mathrm{d}t$$

i.e.

$$\frac{F(x_n)-F(a)}{x_n-a} \to \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\,\mathrm{d}t$$

Par la caractérisation séquentielle des limites

$$\frac{F(x)-F(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\,\mathrm{d}t$$

Finalement F est dérivable en a et

$$F'(a) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\,\mathrm{d}t$$

Enfin F' est continue par application du théorème de continuité par domination.
□

Corollaire

La conclusion demeure si l'on substitue à l'hypothèse de domination 4), une hypothèse de domination sur tout compact de X s'énonçant ;
4bis) $\forall K$ compact inclus dans X, $\exists \varphi_K : I \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable vérifiant

$$\forall (x,t) \in K \times I, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi_K(t)$$

On peut aussi avantageusement parler de domination sur tout segment inclus dans X.

17.2.2 Calculs par dérivation

Exemple Soit $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{itx}\mathrm{d}t$.
Considérons $f : (x,t) \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{itx}$ définie sur $\mathbb{R} \times \left]-\infty,+\infty\right[$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et $|f(x,t)| = \mathrm{e}^{-t^2}$ donc $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\left]-\infty,+\infty\right[$. Ainsi la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$.
La fonction $x \mapsto f(x,t) = \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{itx}$ est dérivable donc f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ avec

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = it\,\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{itx}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ est continue par morceau sur $\left]-\infty,\infty\right[$.
$\forall t \in \left]-\infty,+\infty\right[$, $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \left]-\infty,+\infty\right[$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant t\,\mathrm{e}^{-t^2} = \varphi(t)$
avec $\varphi : \left]-\infty,+\infty\right[\to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable car $t^2\varphi(t) \xrightarrow[|t|\to+\infty]{} 0$.
Par domination F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$F'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} it\,\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{d}t$$

Par une intégration par parties

$$\int_{-A}^{A} it\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{i}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{itx}\right]_{-A}^{A} - \frac{1}{2}\int_{-A}^{A} x\,\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{d}t$$

Quand $A \to +\infty$, on obtient

$$F'(x) = -\frac{1}{2}xF(x)$$

F est donc solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y' + \frac{1}{2}xy = 0$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène de solution générale $y(x) = \lambda\mathrm{e}^{-x^2/4}$.
Sachant que $F(0) = \sqrt{\pi}$ (intégrale de Gauss) on obtient $\lambda = \sqrt{\pi}$ puis

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-x^2/4}$$

Exemple Soit $F : x \in \left]-1,+\infty\right[\mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ pour $x > -1$.
Considérons $f : (x,t) \mapsto \dfrac{t^x-1}{\ln t}$ définie sur $\left]-1,+\infty\right[\times \left]0,1\right[$.
Soit $x > -1$. La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $\left]0,1\right[$.
Quand $t \to 1^-$.
$t = 1-h$ avec $h \to 0^+$.
$f(x,t) = \dfrac{(1+h)^x-1}{\ln(1+h)} \to x$ et donc f est intégrable sur $\left[1/2,1\right[$.
Quand $t \to 0^+$.
On a

$$t^x \xrightarrow[t\to 0^+]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ +\infty & \text{si } x \in \left]-1,0\right[\end{cases}$$

Si $x \geqslant 0$, on obtient $f(x,t) \to 0$ ce qui permet un prolongement par continuité.
Si $x < 0$, on a $f(x,t) = o\left(t^x\right) = o\left(1/t^{-x}\right)$ avec $-x < 1$.
Dans les deux cas, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\left]0,1/2\right]$.
Finalement $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\left]0,1\right[$ et donc F est définie sur $\left]-1,+\infty\right[$.
La fonction $x \mapsto f(x,t) = \dfrac{t^x-1}{\ln t}$ est dérivable donc f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = t^x$$

$\forall x \in \left]-1,+\infty\right[$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\left]0,1\right[$
$\forall t \in \left]0,1\right[$, $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\left]-1,+\infty\right[$.
Soit $a > -1$. Pour $x \in \left[a,+\infty\right[$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant t^a = \varphi(t)$$

avec $\varphi : \left]0,1\right[\to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur $\left]0,1\right[$.
Par domination sur tout compact, F est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$F'(x) = \int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+1}$$

On en déduit

$$F(x) = F(0) + \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln(1+x)$$

17.2.3 Dérivées d'ordre supérieure

Définition

On dit que $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}$ si pour chaque valeur de t, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est j fois dérivable et on pose alors

$$\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t) = \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}\left(f(x,t)\right)$$

Théorème

Si $f : X \times I \to \mathbb{K}$ vérifie

1) $\forall x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et l'intégrale $\displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ converge ;

et si f admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dots, \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$ vérifiant $\forall j \in \{1, \dots, n\}$

2) $\forall x \in X$, $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est continue par morceaux ;

3) $\forall t \in I$, $x \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est continue ;

4) $\exists \varphi_j : I \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable vérifiant

$$\forall (x,t) \in X \times I, \ \left|\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\right| \leqslant \varphi_j(t)$$

Alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^n$ sur X et pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$F^{(j)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

dém. :

Par récurrence sur $n \geqslant 1$.

□

Corollaire

La conclusion demeure si l'on substitue à l'hypothèse de domination, une hypothèse de domination sur tout compact de X.

Exemple Soit

$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Montrons que F est solution sur $\mathbb{R}^{+\star}$ de l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{x}$$

Considérons $f : (x,t) \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$ définie sur $]0, +\infty[\times [0, +\infty[$

Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et intégrable car

$$t^2 f(x,t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

Pour $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ donc les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ existent et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -t\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = t^2\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$$

$\forall x \in]0,+\infty[$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues par morceaux.
$\forall t \in [0,+\infty[$, $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ et $x \mapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues.
Pour $a > 0$, sur $[a,+\infty[\times [0,+\infty[$, on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-at} \text{ et } \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-at}$$

avec $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{-at}$ continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$.
Par domination sur tout compact, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et

$$F''(x) + F(x) = \int_0^{+\infty} t^2 \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

17.2.4 Cas d'une intégration sur segment

Théorème

Soit $f : X \times [a,b] \to \mathbb{K}$ telle que

$$\forall x \in X, \text{ la fonction } t \mapsto f(x,t) \text{ est continue par morceaux sur } [a,b]$$

de sorte qu'on puisse introduire $F(x) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$ définie sur X.
Si f admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x},\ldots,\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$ toutes continues sur $X \times [a,b]$ alors F est de classe $\mathcal{C}^n$ sur X et pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$,

$$F^{(k)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

dém. :
Soit $k \in \mathbb{N}^\star$.
$\forall x \in X, t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[a,b]$.
$\forall t \in [a,b]$, $x \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue sur X.
Soit $[\alpha,\beta]$ segment inclus dans X.
$\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ étant continue sur le compact $[\alpha,\beta] \times [a,b]$, elle y est bornée et il existe donc $M_k \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\forall (x,t) \in [\alpha,\beta] \times [a,b]\,,\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant M_k$$

avec $t \mapsto M_k$ intégrable sur $[a,b]$.
Par domination, F est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[\alpha,\beta]$ et puisque ceci vaut pour $[\alpha,\beta] \subset X$, F est de classe $\mathcal{C}^n$ sur X.
□

Exemple Soit $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^\pi \cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

Montrons que F est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$xy'' + y' + xy = 0$$

Considérons $f : (x, \theta) \mapsto \cos(x \sin \theta)$ définie sur $\mathbb{R} \times [0, \pi]$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x)$ est bien définie en tant qu'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.
f admet deux dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ avec

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \theta) = -\sin\theta \sin(x \sin\theta) \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, \theta) = -\sin^2\theta \cos(x \sin\theta)$$

Les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ sont continues sur $\mathbb{R} \times [0, \pi]$.
Par intégration sur segment F est de classe $\mathcal{C}^2$ et

$$F'(x) = \int_0^\pi -\sin\theta \sin(x \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \text{ et } F''(x) = \int_0^\pi -\sin^2\theta \cos(x \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

On remarque alors par intégration par parties

$$x(F''(x) + F(x)) = x \int_0^1 \cos^2\theta \cos(x \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$
$$= [\cos\theta \sin(x \sin\theta)]_0^\pi + \int_0^\pi \sin\theta \sin(x \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = -F'(x)$$

17.3 Etude de la fonction Γ d'Euler

17.3.1 Définition

Lemme

Soit $x \in \mathbb{R}$.
L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $x > 0$.

dém. :
La fonction $g : t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est définie et continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
Cette fonction est positive donc

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ converge si, et seulement si, } g \text{ est intégrable sur }]0, +\infty[$$

Quand $t \to +\infty$, $t^2 g(t) = t^2 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \to 0$ donc

$$g \text{ est intégrable sur } [1, +\infty[\text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Quand $t \to 0^+$, $g(t) \sim t^{x-1} = 1/t^{1-x}$ donc

$$g \text{ est intégrable sur }]0, 1] \text{ si, et seulement si, } 1 - x < 1 \text{ i.e. } x > 0$$

□

Définition

Pour tout $x > 0$, on pose
$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Exemple $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$.

Proposition

$\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

dém. :
On a $\Gamma(x+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$
Pour $0 < \varepsilon \leqslant A$, on a par intégration par parties
$$\int_\varepsilon^A t^x\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t^x\mathrm{e}^{-t}\right]_\varepsilon^A + \int_\varepsilon^A xt^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$
Quand $\varepsilon \to 0^+$ et $A \to +\infty$, on obtient $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
□

Exemple Par récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \Gamma(n) = (n-1)!$$

Proposition

$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

dém. :
$\Gamma(1/2) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$ via $t = u^2$ changement de variable bijectif de classe $\mathcal{C}^1$.
□

17.3.2 Continuité

Théorème

La fonction Γ est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

dém. :
Considérons $g(x,t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ définie sur $\mathbb{R}^{+\star} \times]0,+\infty[$.
$\forall x > 0$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
$\forall t \in]0,+\infty[$, $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}^{+\star}$.
Pour tout $x \in [a,b]$, si $t \geqslant 1$, $t^{x-1} \leqslant t^{b-1}$ et si $t \leqslant 1$, $t^{x-1} \leqslant t^{a-1}$. Dans les deux cas
$$t^{x-1} \leqslant t^{a-1} + t^{b-1}$$

Par suite

$$|g(x,t)| \leqslant (t^{a-1} + t^{b-1})\mathrm{e}^{-t} = \varphi_{a,b}(t)$$

avec $\varphi_{a,b}$ intégrable sur $]0,+\infty[$ car somme de deux fonctions intégrables.
La fonction Γ est continue sur $[a,b]$ et puisque ceci vaut pour $[a,b] \subset \mathbb{R}^{+\star}$, Γ est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
□

17.3.3 Dérivabilité

Lemme

$\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^\star$, $t \mapsto (\ln t)^n t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

dém. :
La fonction $h : t \mapsto (\ln t)^n t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
Quand $t \to +\infty$, $t^2h(t) = t^2(\ln t)^n t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \to 0$.
Quand $t \to 0^+$, pour $\rho \in]0,x[$, $t^{1-\rho}h(t) \sim (\ln t)^n t^{x-\rho} \to 0$ avec $1-\rho < 1$
□

Théorème

La fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^n t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

dém. :
$g(x,t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{(x-1)\ln t}\mathrm{e}^{-t}$.
La fonction $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial^n g}{\partial x^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et

$$\frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t) = (\ln t)^n t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$$

La fonction $\dfrac{\partial^n g}{\partial x^n}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+\star} \times]0,+\infty[$.
Pour tout $[a,b] \subset]0,+\infty[$ et tout $(x,t) \in [a,b] \times]0,+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant (\ln t)^n(t^{a-1} + t^{b-1})\mathrm{e}^{-t} = \varphi_{n,a,b}(t)$$

avec $\varphi_{n,a,b}$ intégrable sur $]0,+\infty[$.
Par domination Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a,b]$ et puisque ceci vaut pour $[a,b] \subset \mathbb{R}^{+\star}$, Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
□

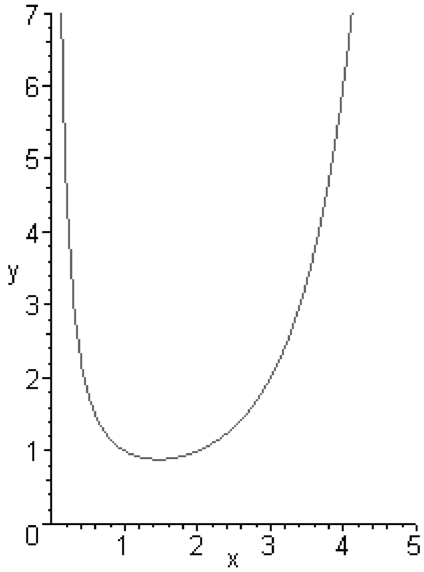
17.3.4 Tableau de variation

Le signe de $\Gamma'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est incertain.
En revanche $\Gamma''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t > 0$ en tant qu'intégrale d'une fonction positive, continue qui n'est pas la fonction nulle.
On en déduit que Γ' est strictement croissante.
$\Gamma(1) = 1 = \Gamma(2)$ donc par théorème de Rolle il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$.
Sur $]0,\alpha[$, $\Gamma'(x) < 0$ et Γ est strictement décroissante.

Sir $]\alpha, +\infty[$, $\Gamma'(x) > 0$ et Γ est strictement croissante.
Numériquement $\alpha = 1,46$ à 10^{-2} près et $\Gamma(\alpha) = 0,89$ à 10^{-2} près.
Quand $x \to 0^+$
$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ donc $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x} \sim \dfrac{1}{x}$ car $\Gamma(x+1) \to \Gamma(1) = 1$.
Quand $x \to +\infty$
Γ est croissante donc la limite de Γ en $+\infty$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Puisque $\Gamma(n+1) = n! \to +\infty$ on peut conclure $\Gamma(x) \to +\infty$.
De plus

$$\frac{\Gamma(x)}{x} = \frac{x-1}{x}\Gamma(x-1) \to +\infty$$

donc Γ présente une branche parabolique verticale.



Chapitre 18

Séries entières

On souhaite étudier les fonctions de la forme

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Ce sont des sommes de séries de fonctions, on étudiera le problème de convergence, on observera leur régularité et on verra que grand nombre de fonctions usuelles peuvent s'écrire ainsi.

18.1 Convergence des séries entières

18.1.1 Série entière

Définition

On appelle série entière définie par la suite de coefficients $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, la série des fonctions $u_n : z \in \mathbb{C} \mapsto a_n z^n$.
Par abus, cette série de fonctions $\sum u_n$ est notée $\sum a_n z^n$.
L'ensemble $\mathcal{D}$ des $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels la série numérique $\sum a_n z^n$ converge est appelé domaine de convergence de la série entière et la fonction $S : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ définie par

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

est appelée somme de cette série entière.

Exemple La série entière $\sum a_n z^n$ converge en $z = 0$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n 0^n = a_0$.
En effet $0^0 = 1$ et $0^n = 0$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.

Exemple La série entière $\sum z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Exemple La série entière $\sum \frac{1}{n!} z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ et par définition

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n = \mathrm{e}^z$$

Exemple Si à partir d'un certain rang $a_n = 0$ alors la série entière $\sum a_n z^n$ CV sur $\mathbb{C}$ et sa somme est une fonction polynôme.

Sur quel domaine et comment converge une série entière $\sum a_n z^n$?

18.1.2 Rayon de convergence

Lemme

Soit $\rho > 0$ tel que la suite $(a_n \rho^n)$ est bornée.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

dém. :
Il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $|a_n \rho^n| \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On peut alors écrire

$$|a_n z^n| = |a\rho^n \times (z/\rho)^n| \leqslant M \, |z/\rho|^n$$

Or $|z/\rho| < 1$ donc $\sum |z/\rho|^n$ est absolument convergente et par comparaison $\sum a_n z^n$ aussi.
□

Définition

On appelle rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, le nombre

$$R = \sup \{\rho \geqslant 0 / (a_n \rho^n) \text{ est borne}\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

Exemple Considérons $\sum z^n$.
$\{\rho \geqslant 0/(\rho^n) \text{ est borne}\} = [0, 1]$ donc $R = 1$.

Exemple Considérons $\sum \frac{1}{n!} z^n$.
$\{\rho \geqslant 0/(\rho^n/n!) \text{ est borne}\} = \mathbb{R}^+$ donc $R = +\infty$.

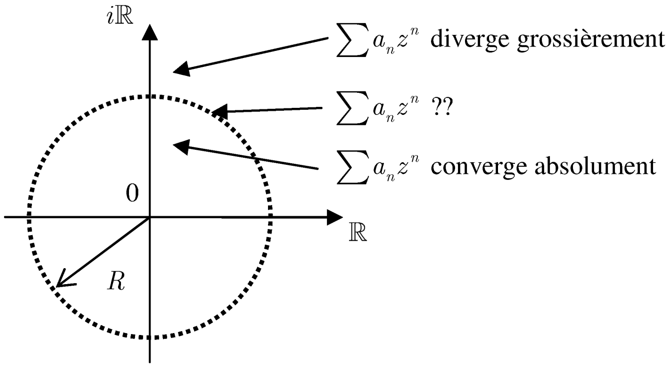
Exemple Considérons $\sum n! z^n$.
$\{\rho \geqslant 0/(a_n \rho^n) \text{ est borne}\} = \{0\}$ donc $R = 0$.

18.1.3 Convergence simple

Théorème

Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z \in \mathbb{C}$.
Si $|z| < R$ alors la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
Si $|z| > R$ alors la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement et plus précisément la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée.

dém. :
Notons $A = \{\rho \geqslant 0/(a_n \rho^n) \text{ est borne}\}$ et $R = \sup A$.
Si $|z| < R$ alors $|z|$ ne majore pas A et donc il existe $\rho > 0$ tel que $|z| < \rho$ et tel que la suite $(a_n \rho^n)$ soit bornée. En vertu du lemme d'Abel, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
Si $|z| > R$ alors $|z| \notin A$ et donc $(a_n z^n)$ n'est pas bornée.



□

Corollaire

Soit $\mathcal{D}$ le domaine de convergence d'une série entière de rayon de convergence R.
Si $R = 0$ alors $\mathcal{D} = \{0\}$.
Si $R = +\infty$ alors $\mathcal{D} = \mathbb{C}$.
Si $R \in]0, +\infty[$ alors $D(0, R) \subset \mathcal{D} \subset \overline{D(0, R)}$ en notant $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C}/ |z| < R\}$
Sur le cercle de centre 0 et de rayon R, les natures de $\sum a_n z^n$ peuvent être diverses.

18.1.4 Détermination du rayon de convergence

Idée On sait
$|z| < R \Rightarrow \sum a_n z^n$ converge
$|z| > R \Rightarrow \sum a_n z^n$ diverge.
Par contraposition :
Si $\sum a_n z^n$ CV alors $|z| \leqslant R$.
Si $\sum a_n z^n$ DV alors $R \leqslant |z|$.

18.1.4.1 Utilisation du critère de d'Alembert

Soit $\sum u_n$ une série numérique à termes non nuls à partir d'un certain rang.
On suppose

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

Si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ est absolument convergente.
Si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ est grossièrement divergente.
En exploitant ce critère, on peut étudier la convergence de $\sum a_n z^n$ et préciser le rayon de convergence R.

Exemple Déterminons le rayon de convergence de

$$\sum (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n-1)2^n z^n$$

Soit $z \in \mathbb{C}$.
Posons $u_n(z) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n-1)2^n z^n$.
Pour $z \neq 0$ et $n \geqslant 2$, on a $u_n \neq 0$.

$$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{n}{n-1}\frac{2^{n+1}}{2^n}\left|\frac{z^{n+1}}{z^n}\right| \to 2\,|z|$$

Si $|z| < 1/2$ alors $\sum u_n(z)$ est absolument convergente.
Si $|z| > 1/2$ alors $\sum u_n(z)$ diverge grossièrement.
On en déduit $R = 1/2$.

Exemple Déterminons le rayon de convergence de

$$\sum \frac{1}{(2n)!}z^n$$

Posons $u_n(z) = \dfrac{1}{(2n)!}z^n$ pour $z \in \mathbb{C}^\star$.

$$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)}\,|z| \to 0$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}^\star$, $\sum u_n(z)$ est absolument convergente (et aussi pour $z = 0$) donc $R = +\infty$.

Exemple Déterminons le rayon de convergence de

$$\sum \frac{n-1}{n^2+1}z^n$$

$u_n(z) = \dfrac{n+1}{n^2+1}z^n$ avec $z \neq 0$.
$\left|\dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| \sim \dfrac{1/(n+1)}{1/n}\,|z| \to |z|$.
On en déduit $R = 1$.

Remarque Plus généralement, soit $F \in \mathbb{C}(X) \setminus \{0\}$, le rayon de convergence de $\sum F(n)z^n$ vaut 1 car pour $z \neq 0$

$$\frac{\left|F(n+1)z^{n+1}\right|}{|F(n)z^n|} = \left|\frac{F(n+1)}{F(n)}\right| |z| \to |z|$$

en effet

$$F(n) = \frac{a_p n^p + \cdots}{b_q n^q + \cdots} \sim \frac{a_p n^p}{b_q n^q} = \lambda n^{p-q}$$

donc

$$\frac{F(n+1)}{F(n)} \sim \frac{\lambda(n+1)^{p-q}}{\lambda n^{p-q}} \to 1$$

18.1.4.2 Cas des séries lacunaires

Remarque $\sum a_n z^{2n}$ est une série entière plus précisément

$$\sum a_n z^{2n} = \sum b_n z^n$$

avec $b_{2p} = a_p$ et $b_{2p+1} = 0$.
Le rayon de convergence d'une telle série peut souvent se déterminer par la démarche précédente.

Exemple Rayon de convergence de

$$\sum \frac{(-1)^n}{n+1} z^{2n+1}$$

Soit $z \neq 0$.
$\sum \frac{(-1)^n}{n+1} z^{2n+1} = \sum u_n(z)$ avec $u_n(z) = \frac{(-1)^n}{n+1} z^{2n+1} \neq 0$.

$$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{n+1}{n+2} |z|^2 \to |z|^2$$

Si $|z| < 1$ alors $\sum \frac{(-1)^n}{n+1} z^{2n+1}$ est absolument convergente.
Si $|z| > 1$ alors $\sum \frac{(-1)^n}{n+1} z^{2n+1}$ est grossièrement divergente.
On en déduit $R = 1$

Exemple Déterminons le rayon de convergence de

$$\sum \binom{2n}{n} z^{3n}$$

Posons $u_n(z) = \binom{2n}{n} z^{3n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^{3n}$ pour $z \in \mathbb{C}^\star$.

$$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \left|\frac{z^{3(n+1)}}{z^{3n}}\right| = 2\frac{2n+1}{n+1} |z|^3 \to 4|z|^3$$

On en déduit $R = \sqrt[3]{1/4}$.

18.1.4.3 Par comparaison

Soient R_a et R_b les rayons de convergence de deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.

Théorème

1) Si $a_n = O(b_n)$ alors $R_a \geqslant R_b$.
2) Si $a_n = o(b_n)$ alors $R_a \geqslant R_b$.
3) Si $a_n \sim b_n$ alors $R_a = R_b$.

dém. :
1) Pour $z \in \mathbb{C}$, $a_n z^n = O(b_n z^n)$.
Si $|z| < R_b$ alors $\sum b_n z^n$ est absolument convergente et par comparaison $\sum a_n z^n$ l'est aussi.
Puisque $\sum a_n z^n$ converge pour tout $|z| < R_b$, on a $R_b \leqslant R_a$.
2) Car $a_n = o(b_n) \Rightarrow a_n = O(b_n)$ 3) car $a_n \sim b_n \Rightarrow a_n = O(b_n)$ et $b_n = O(a_n)$.
□

Corollaire

Si à partir d'un certain rang $|a_n| \leqslant |b_n|$ alors $R_a \geqslant R_b$.

Exemple Les séries entières $\sum a_n z^n \sum |a_n| z^n$ ont même rayon de convergence.

Exemple Si (a_n) est bornée et ne tend pas vers 0 alors $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence égal à 1.
En effet $a_n = O(1)$ et $\sum z^n$ a un rayon de convergence égal à 1 donc $R \geqslant 1$.
De plus, puisque $a_n \not\to 0$, $\sum a_n z^n$ diverge pour $z = 1$ et donc $R \leqslant 1$.
Finalement $R = 1$.

18.1.5 Opérations sur les séries entières

18.1.5.1 Produit extérieur

Théorème

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, la série entière $\sum \lambda a_n z^n$ a pour rayon de convergence

$$R' = \begin{cases} R & \text{si } \lambda \neq 0 \\ +\infty & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

et pour tout $|z| < R$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

dém. :
Cas $\lambda = 0$: ok
Cas $\lambda \in \mathbb{C}^\star$: la série numérique $\sum a_n z^n$ converge si, et seulement si, $\sum \lambda a_n z^n$ converge.

De plus, si tel est le cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

□

18.1.5.2 Somme

Définition

On appelle somme des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$.

Théorème

Si R_a et R_b sont les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ alors le rayon de convergence R de la série entière somme $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie

$$R \geqslant \min(R_a, R_b)$$

De plus, pour $|z| < \min(R_a, R_b)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

dém. :
On remarque $a_n z^n + b_n z^n = (a_n + b_n) z^n$.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$.
Les séries numériques $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent absolument donc par somme la série numérique $\sum (a_n + b_n) z^n$ converge aussi et de plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

Puisque $\sum (a_n + b_n) z^n$ converge pour tout $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a

$$\min(R_a, R_b) \leqslant R$$

□

Remarque Il est possible que $R > \min(R_a, R_b)$, par exemple quand $b_n = -a_n$.

Proposition

Si $R_a \neq R_b$ alors $R = \min(R_a, R_b)$.

dém. :
Quitte à échanger supposons $R_a < R_b$.
On sait déjà que $R \geqslant R_a$.
Pour $R_a < |z| < R_b$, $\sum a_n z^n$ diverge alors que $\sum b_n z^n$ converge donc $\sum (a_n + b_n) z^n$ diverge.
On en déduit $R = R_a = \min(R_a, R_b)$.
□

Exemple Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Considérons $\sum a_{2p} z^{2p}$ et $\sum a_{2p+1} z^{2p+1}$ de rayons de convergence R' et R''.
Montrons $R = \min(R', R'')$.
Remarquons
$\sum a_{2p} z^{2p} = \sum b_n z^n$ avec $b_{2p} = a_{2p}$ et $b_{2p+1} = 0$
$\sum a_{2p+1} z^{2p+1} = \sum c_n z^n$ avec $c_{2p} = 0$ et $c_{2p+1} = a_{2p+1}$
D'une part $a_n = b_n + c_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\sum a_n z^n$ est la somme des séries entières $\sum a_{2p} z^{2p}$ et $\sum a_{2p+1} z^{2p+1}$ puis $R \geqslant \min(R', R'')$.
D'autre part, $|b_n|, |c_n| \leqslant |a_n|$ donc $R', R'' \geqslant R$ puis $\min(R', R'') \geqslant R$.
Finalement $R = \min(R', R'')$.

18.1.5.3 Produit

Définition

On appelle produit des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ la série entière $\sum c_n z^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Théorème

Si R_a et R_b sont les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ alors le rayon de convergence R de la série entière produit $\sum c_n z^n$ vérifie

$$R \geqslant \min(R_a, R_b)$$

De plus, pour $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$$

dém. :
On remarque

$$c_n z^n = \sum_{k=0}^{n} (a_k z^k)(b_{n-k} z^{n-k})$$

Ainsi la série numérique $\sum c_n z^n$ est le produit de Cauchy des séries numériques $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.
Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont absolument convergentes donc par produit de Cauchy $\sum c_n z^n$ est absolument convergente et de plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$$

Puisque $\sum c_n z^n$ converge pour tout $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a $\min(R_a, R_b) \leqslant R$.
□

Exemple Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 1$.

Etudions la série entière $\sum S_n z^n$ avec $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \times 1$ donc $\sum S_n z^n$ est le produit des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum z^n$.

Par suite $\sum S_n z^n$ est de rayon de convergence $\geqslant \min(R, 1) = 1$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n z^n = \frac{1}{1-z} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

18.1.6 Convergence normale

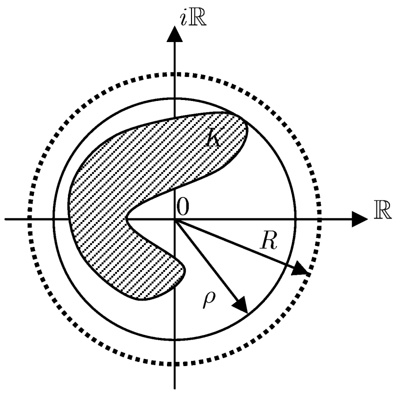
Définition

Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, le disque $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} / |z| < R\}$ est appelé disque ouvert de convergence.

Théorème

Une série entière de rayon de convergence $R > 0$ converge normalement, et donc uniformément, sur tout compact non vide inclus dans le disque ouvert de convergence $D(0, R)$.

dém. :
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Cette série entière est par définition la série des fonctions $u_n : z \mapsto a_n z^n$
Soit K un compact non vide inclus dans $D(0, R)$.



Posons $\rho = \sup_{z \in K} |z|$ (qui existe car le compact K est borné).
Pour tout $z \in K$, $|u_n(z)| \leqslant |a_n| \rho^n$ donc $\|u_n\|_{\infty,K} \leqslant |a_n| \rho^n$.
Or $\rho = \max_{z \in K} |z|$ car $|\,.\,|$ est continue sur le compact K donc il existe $z_0 \in K$ tel que $\rho = |z_0|$.
Puisque $K \subset D(0, R)$, $z_0 \in D(0, R)$ et donc $\sum a_n z_0^n$ est absolument convergente.
Ainsi $\sum |a_n| \rho^n$ converge puis par comparaison $\sum \|u_n\|_{\infty,K}$ converge.

Finalement $\sum u_n$ converge normalement sur K.
□

Corollaire

> La somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ est continue sur son disque ouvert de convergence.

dém. :
Par convergence uniforme sur tout compact d'une série de fonctions continues.
□

Exemple La fonction $z \mapsto \mathrm{e}^z$ est continue sur $\mathbb{C}$.

Attention : Il peut y avoir convergence en un $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| = R$ sans pour autant que la somme y soit continue.

Proposition

> Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}^{+\star}$ et si $\sum a_n R^n$ est absolument convergente alors la fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est définie et continue sur $\overline{D(0,R)}$.

dém. :
En effet $\|u_n\|_{\infty,\overline{D(0,R)}} = |a_n| R^n$ est sommable donc $\sum u_n$ converge normalement.
□

Exemple $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} z^n$ est définie et continue sur $\overline{D(0,1)}$.

18.2 Série entière d'une variable réelle

Désormais, nous étudions $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour $z \in \mathbb{R}$, on préfère alors noter la variable x.

18.2.1 Particularisation

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Pour tout $x \in]-R, R[$, $\sum a_n x^n$ est absolument convergente.
Pour tout $|x| > R$: $\sum a_n x^n$ diverge grossièrement.
Pour $x = R$ ou $x = -R$: ça dépend.

Définition

> L'intervalle $]-R, R[$ est appelé intervalle ouvert de convergence de la série $\sum a_n x^n$.

Définition

> L'ensemble I des x pour lesquels la série numérique converge vérifie $]-R, R[\subset I \subset [-R, R]$, on l'appelle intervalle de convergence de la série entière étudiée.

Théorème

La série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement sur tout segment inclus dans $]-R, R[$.

Corollaire

La fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $]-R, R[$.

Attention : Par la seule connaissance du rayon de convergence, on ne peut rien dire a priori sur la définition et l'éventuelle continuité de S en $\pm R$.

Exemple Etudions

$$S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

S est une série entière de rayon de convergence $R = 1$.
S est donc assurément définie et continue sur $]-1, 1[$.
Etude en $x = -1$
$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}(-1)^n = \sum \frac{-1}{n}$ diverge.
S n'est pas définie en -1.
Etude en $x = 1$
$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} 1^n = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge via le critère spécial.
S est définie en 1.
Continuité en 1
Considérons $u_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ avec $n \geqslant 1$.
Les fonctions u_n sont continues.
$\sum u_n(x)$ converge par le critère spécial.
$|R_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)| \leqslant \frac{1}{n+1} x^{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$ donc $\|R_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |R_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1} \to 0$.
Il y a convergence uniforme sur $[0, 1]$ donc S est continue sur $[0, 1]$.

18.2.2 Dérivation

Définition

On appelle série entière dérivée d'une série entière $\sum a_n x^n$ la série entière

$$\sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1} = \sum (n+1) a_{n+1} x^n$$

Lemme

Série entière et série entière dérivée ont le même rayon de convergence.

dém. :
Notons R et R' les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1}$.

Pour $|x| < R'$.
$a_n x^n = \dfrac{x}{n} n a_n x^{n-1} = o(n a_n x^{n-1})$ avec $\sum n a_n x^{n-1}$ absolument convergente donc $\sum a_n x^n$ est absolument convergente.
Puisque $\sum a_n x^n$ converge pour tout $|x| < R'$, on en déduit $R' \leqslant R$.
Pour $|x| < R$, on introduit $\rho \in \left]|x|, R\right[$.
$n a_n x^{n-1} = \dfrac{n x^{n-1}}{\rho^n} a_n \rho^n = o(a_n \rho^n)$ avec $\sum a_n \rho^n$ absolument convergente donc $\sum n a_n x^{n-1}$ est absolument convergente.
Puisque $\sum n a_n x^{n-1}$ converge pour tout $|x| < R'$, on en déduit $R \leqslant R'$ puis $R = R'$.

□

Proposition

> Si $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$ alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$ et
>
> $$\forall x \in \left]-R, R\right[, S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

dém. :
Notons $u_n : x \mapsto a_n x^n$.
Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$, $\sum u_n$ converge simplement sur $]-R, R[$ et $\sum u_n'$ converge normalement sur tout segment inclus dans $]-R, R[$ car la série entière dérivée a pour rayon de convergence R.

□

Exemple Considérons à nouveau $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ définie et continue sur $]-1, 1]$
$R = 1$ donc S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 1[$.
Pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \frac{1}{1+x}$$

donc pour tout $x \in]-1, 1[$

$$S(x) = S(0) + \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln(1+x)$$

Par continuité, l'identité est encore vraie pour $x = 1$. On retient

$$\forall x \in \left]-1, 1\right], \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \ln(1+x)$$

Théorème

Si $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$ alors sa fonction somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et ses dérivées successives s'obtiennent en dérivant terme à terme :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in]-R, R[\,, S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)a_n x^{n-p}$$

ou encore

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in]-R, R[\,, S^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)(n+p-1)\dots(n+1)a_{n+p} x^n$$

Attention : En $\pm R$, on ne peut rien dire a priori.

18.2.3 Intégration

Théorème

Si $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$ alors pour tout $[\alpha, \beta] \subset]-R, R[$, on peut calculer $\int_\alpha^\beta \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \,\mathrm{d}t$ en intégrant terme à terme :

$$\int_\alpha^\beta \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_\alpha^\beta t^n \,\mathrm{d}t$$

dém. :
Car la série de fonctions converge uniformément sur le segment $[\alpha, \beta]$.

□

Exemple On obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \frac{1}{2^{n+1}} = \int_0^{1/2} \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \,\mathrm{d}t = \int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = [-\ln(1-t)]_0^{1/2} = \ln 2$$

Théorème

Si $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$ alors la série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est aussi de rayon de convergence R et sa somme

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

est sur $]-R, R[$ la primitive s'annulant en 0 de

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

dém. :
La dérivée de la série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est $\sum a_n x^n$, ces deux séries entières ont donc le même rayon de convergence et la seconde est la dérivée de la première.
□

Exemple On sait que pour $x \in]-1, 1[$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Par intégration de série entière, on en déduit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = -\ln(1-x)$$

On retient que pour tout $x \in]-1, 1[$

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

18.2.4 Calcul des coefficients d'une série entière

Théorème

Si $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$$

dém. :
S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et

$$S^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)(n+p-1)\dots(n+1) a_{n+p} x^n$$

En particularisant en $x = 0$, on obtient $S^{(p)}(0) = p!a_p$.
□
Corollaire

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont deux séries entières de rayons de convergence $R_a, R_b > 0$.
S'il existe un voisinage de 0 sur lequel

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$$

dém. :
Notons $S_a : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $S_b : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.
Par hypothèse, il existe $r > 0$ tel que

$$\forall x \in \left]-r, r\right[, S_a(x) = S_b(x)$$

On a alors

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \left]-r, r\right[, S_a^{(p)}(x) = S_b^{(p)}(x)$$

donc

$$a_p = \frac{S_a^{(p)}(0)}{p!} = \frac{S_b^{(p)}(0)}{p!} = b_p$$

□
Exemple Soit $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme

$$S : x \in \left]-R, R\right[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Montrons

$$S \text{ est paire si, et seulement si, } \forall p \in \mathbb{N}, a_{2p+1} = 0$$

($\Leftarrow$) Supposons $\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p+1} = 0$.
$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} x^{2p}$ donc S est une fonction paire définie sur $]-R, R[$ ou $[-R, R]$.
($\Rightarrow$) Supposons S paire.
Pour tout $x \in]-R, R[$, $S(x) = S(-x)$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n x^n$.
Par identification des coefficients de séries entières de rayons de convergence > 0, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-1)^n a_n$ et donc $\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p+1} = 0$.
De même, on montre :

$$S \text{ est impaire si, et seulement si, } \forall p \in \mathbb{N}, a_{2p} = 0$$

18.3 Fonctions développables en série entière

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ qui est voisinage de 0.
Soit $r \in \mathbb{R}^{+\star} \cup \{+\infty\}$ tel que $]-r, r[\subset I$.

18.3.1 Définition

Définition

On dit que $f : I \to \mathbb{C}$ est développable en série entière sur $]-r, r[$ s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ telle que

$$\forall x \in]-r, r[\,,\ \sum a_n x^n \text{ converge et } f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Remarque Cette série entière est nécessairement de rayon de convergence $R \geqslant r$

Exemple Considérons $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ définie sur $]-\infty, 1[$
f est développable en série entière sur $]-1, 1[$ car on sait

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

et donc $f(x)$ apparaît sur $]-1, 1[$ comme égale à la somme d'une série entière convergente.

Exemple Considérons $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.
f est développable en série entière sur $]-1, 1[$ car

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{u=-x^2}{=} \frac{1}{1-u} \underset{|u|<1}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} u^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

et donc $f(x)$ apparaît sur $]-1, 1[$ comme égale à la somme d'une série entière convergente.

Exemple $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ avec

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Définition

On dit que $f : I \to \mathbb{C}$ est développable en série entière en 0 s'il existe $r > 0$ telle que f est développable en série entière sur $]-r, r[$.

Exemple Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}, \dfrac{1}{1+x^2}, \mathrm{e}^x$ sont développables en série entière en 0.

18.3.2 Série de Taylor

Définition

On appelle série de Taylor d'une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ la série entière

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Théorème

Si $f : I \to \mathbb{C}$ est développable en série entière sur $]-r, r[$ alors

$$\forall x \in \left]-r, r\right[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Autrement dit, il n'y a qu'une seule série entière qui puisse correspondre à f à savoir sa série de Taylor.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

dém. :

Il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ tel que sur $]-r, r[\,, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Considérons alors la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

La fonction S est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ donc sur $]-r, r[$
Puisque f et S coïncident sur $]-r, r[$, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

donc la série entière introduite n'est autre que la série de Taylor de f.
□

Remarque Une fonction qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^\infty$ ne peut pas être développable en série entière.

Remarque Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ on peut étudier si f est développable en série entière en vérifiant si

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$$

On peut pour cela exploiter l'inégalité de Taylor-Lagrange ou l'égalité de Taylor avec reste intégrale.

Exemple Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et vérifiant

$$\left\|f^{(n)}\right\|_\infty \leqslant MK^n n!$$

avec $M \in \mathbb{R}^+$ et $K > 0$.
Montrons que f est développable en série entière en 0.
Pour tout $x \in [-1,1]$,

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| \leqslant \frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty}{(n+1)!}\left|x^{n+1}\right| \leqslant \frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty \left|x^{n+1}\right|}{(n+1)!} \leqslant MK^{n+1}\left|x\right|^{n+1}$$

Pour $|x| < r = \min(1, 1/|K|)$ on a $(K\left|x\right|)^{n+1} \to 0$ et donc

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \to f(x)$$

Ainsi la série $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ converge et

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

La fonction f s'écrit sur $]-r,r[$ comme égale à la somme d'une série entière convergente, elle est donc développable en série entière sur $]-r,r[$.

Attention : Il existe des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui ne sont pas développables en série entière.

18.3.3 Opérations sur les fonctions développables en série entière

Théorème

Si $f, g : I \to \mathbb{C}$ sont développables en série entière sur $]-r,r[$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, λf, $f+g$ et fg sont développables en série entière sur $]-r,r[$.

dém. :
Il existe des séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ de rayons de convergence $R_a, R_b \geqslant r$ telles que sur $]-r,r[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ et } g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

Pour tout $x \in]-r,r[$, on a

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n x^n$$

La fonction λf est sur $]-r,r[$ somme d'une série entière convergente, elle est donc développable en série entière.
Pour tout $x \in]-r,r[$, on a

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n+b_n)x^n$$

La fonction $f+g$ est sur $]-r,r[$ somme d'une série entière convergente, elle est donc développable en série entière.
Enfin par produit de Cauchy de séries absolument convergentes

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)x^n$$

La fonction fg est sur $]-r,r[$ somme d'une série entière convergente, elle est donc développable en série entière.
□

Exemple Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n$ et $\mathrm{e}^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}x^n$ donc les fonctions ch et sh sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$ avec

$$\mathrm{ch}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}x^{2n} \text{ et } \mathrm{sh}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Théorème

Si $f : I \to \mathbb{C}$ est développable en série entière sur $]-r,r[$ alors $\bar{f}$, $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ l'est aussi.

dém. :
Si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-r,r[$ alors $\overline{f(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} x^n$, $\mathrm{Re}(f(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(a_n)x^n$, $\mathrm{Im}(f(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(a_n)x^n$.
Les fonction s $\bar{f}$, $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont donc développables en série entière sur $]-r,r[$ car sommes de séries entières convergentes sur cet intervalle.
□

Exemple Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!}x^n$$

donc les fonctions cos et sin sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$ avec

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \text{ et } \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Théorème

Si $f : I \to \mathbb{C}$ est développable en série entière sur $]-r, r[$ alors ses dérivées successives le sont aussi.

dém. :

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-r, r[$ alors par dérivation de la somme d'une série entière

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

et donc f' est développable en série entière sur $]-r, r[$. Il en est de même de $f'', \ldots, f^{(n)}, \ldots$.

□

Théorème

Si $f : I \to \mathbb{C}$ est développable en série entière sur $]-r, r[$ avec

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

alors les primitives F de f le sont aussi avec

$$F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

dém. :

On sait que $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est la primitive s'annulant en 0 de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

□

Exemple Etudions $x \mapsto \ln(1+x)$ définie sur $]-1, +\infty[$.

On a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (\ln(1+x)) = \frac{1}{1+x}$$

Or

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \text{ sur }]-1, 1[$$

Par intégration de développement en série entière, on a

$$\ln(1+x) = \ln(1) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \text{ sur }]-1, 1[$$

Exemple Etudions $x \mapsto \arctan x$ définie sur $\mathbb{R}$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \text{ sur }]-1, 1[$$

Par intégration de développement en série entière, on obtient

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \text{ sur }]-1,1[$$

Comme ci-dessus, on peut prolonger cette identité à tout $x \in [-1,1]$.

Exemple Etudions $x \mapsto \text{argth}x$ définie sur $]-1,1[$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\text{argth}x) = \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} \text{ sur }]-1,1[$$

Par intégration de développement en série entière, on obtient

$$\text{argth}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)} x^{2n+1} \text{ sur }]-1,1[$$

18.3.4 Développement du binôme $(1+x)^\alpha$

Théorème

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

dém. :
Posons

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

et étudions la série entière $\sum a_n x^n$
On a

$$a_0 = 1,\, a_1 = \alpha,\, a_2 = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}, \dots, a_{n+1} = \frac{\alpha-n}{n+1} a_n$$

Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.
Cas $\alpha \in \mathbb{N}$
Pour $n > \alpha$, $a_n = 0$ et donc $R = +\infty$ (polynôme)
Cas $\alpha \notin \mathbb{N}$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$
Pour $x \in \mathbb{R}^\star$, considérons $u_n = a_n x^n$
et $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|\alpha-n|}{n+1}|x| \to |x|$ donc $R = 1$.
Dans les deux cas la fonction

$$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

donc

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha - n) a_n x^n$$

puis

$$S'(x) = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \alpha S(x) - x S'(x)$$

La fonction S est donc solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle

$$(1+x)' + \alpha y = 0$$

de solution générale $y(x) = \lambda(1+x)^\alpha$.
Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]-1,1[$

$$S(x) = \lambda(1+x)^\alpha$$

Or $\lambda = S(0) = a_0 = 1$ donc

$$S(x) = (1+x)^\alpha$$

□

Exemple Cas $\alpha \in \mathbb{N}$
Si $\alpha = p \in \mathbb{N}$

$$(1+x)^p = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k$$

On retrouve la formule du binôme.

Exemple Cas $\alpha \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$.
On écrit $\alpha = -(p+1)$ avec $p \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{(1+x)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+n)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{n+p}{n} x^n$$

Exemple Cas $\alpha = 1/2$.

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^n$$

18.3.5 Obtention de développements en série entière

18.3.5.1 Fonctions rationnelles

Lemme

$\forall a \in \mathbb{C}^\star, \forall p \in \mathbb{N}, x \mapsto \dfrac{1}{(x-a)^{p+1}}$ est développable en série entière sur $]-r, r[$ avec $r = |a|$.

dém. :
Pour $|x| < |a|$,

$$\frac{1}{x-a} = -\frac{1}{a}\frac{1}{1-x/a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{a^{n+1}} x^n$$

Par dérivation à l'ordre p

$$\frac{(-1)^p p!}{(x-a)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)(n+p)(n+p-1)\dots(n+1)}{a^{n+p+1}} x^n$$

Ainsi

$$\frac{1}{(x-a)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{a^{n+p+1}} \frac{(n+p)!}{p!n!} x^n$$

□

Théorème

Toute fonction rationnelle dont 0 n'est pas pôle est développable en série entière en 0.

dém. :
Soit $x \mapsto F(x)$ une fonction rationnelle définie en 0.
Notons $a_1, \dots, a_n$ de multiplicités respectives $p_1, \dots, p_n$ les pôles de F.
La décomposition en éléments simple de $F(x)$ est de la forme

$$F(x) = E(x) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} \frac{\lambda_{i,j}}{(x-a_i)^j}$$

Ainsi F est combinaison linéaire de fonctions développables en série entière sur $]-r, r[$ avec $r = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i|$.
□

Exemple Formons le développement en série entière en 0 de

$$f : x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2(x+2)}$$

La partie entière de f est nulle, 1 est pôle double et -2 est pôle simple. La décomposition en éléments simple de f est alors de la forme

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

avec

$$a = \left.\frac{1}{(x-1)^2}\right|_{x=-2} = \frac{1}{9}, c = \left.\frac{1}{(x+2)}\right|_{x=1} = \frac{1}{3} \text{ et } b = \left.\left(\frac{1}{(x+2)}\right)'\right|_{x=1} = -\frac{1}{9}$$

Sur $]-1,1[$,

$$f(x) = \frac{1}{18}\frac{1}{1+\frac{x}{2}} + \frac{1}{9}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{3}\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{18.2^n} + \frac{3n+4}{9}\right)x^n$$

Exemple Formons le développement en série entière en 0 de

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1}$$

Pour $x \in]-1,1[$,

$$f(x) = \frac{1-x}{1-x^3} = \sum_{n=0}^{+\infty}(1-x)x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

avec $a_{3n} = 1, a_{3n+1} = -1$ et $a_{3n+2} = 0$.

18.3.5.2 Via dérivation

Exemple Formons le développement en série entière en 0 de

$$f : x \mapsto \ln(1+x+x^2)$$

$$f'(x) = \frac{1+2x}{1+x+x^2} = \frac{(1+2x)(1-x)}{1-x^3} = \frac{1+x-2x^2}{1-x^3} = (1+x-2x^2)\sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n}$$

pour $|x| < 1$.
Ainsi

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} + x^{3n+1} - 2x^{3n+2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

avec $a_{3n} = 1$, $a_{3n+1} = 1$ et $a_{3n+2} = -2$.
Ainsi

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

Exemple Formons le développement en série entière en 0 de la fonction $\arcsin$.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}(-x^2)^n$$

pour $x \in]-1,1[$ et $\alpha = 1/2$.

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} = (-1)^n\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$$

donc $(\arcsin x)' = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^{2n}$ puis

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

On peut aussi former le développement en série entière de la fonction arccos via $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$.

18.3.5.3 Via équation différentielle

Exemple Formons le développement en série entière en 0 de

$$f : x \mapsto \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

La fonction f est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$f'(x) = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

Ainsi f vérifie l'équation différentielle $(1-x^2)f'(x) - xf(x) = 1$, de plus $f(0) = 0$ et dont f est solution sur $]-1,1[$ du problème différentiel

$$\Sigma : \begin{cases} (1-x^2)y' - xy = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Déterminons les séries entières solutions de ce problème différentiel.
Analyse : Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et dont la somme S est solution sur $]-R,R[$ du problème différentiel Σ.
$S(0) = 0$ donne $a_0 = 0$.
Pour $x \in\,]-R,R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.
La relation $(1-x^2)S'(x) - xS(x) = 1$ donne alors

$$a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left((n+1)a_{n+1} - n a_{n-1}\right) x^n = 1$$

Par unicité des coefficients de deux séries entières égales au voisinage de 0,

$$a_1 = 1 \text{ et } \forall n \geqslant 1, a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_{n-1}$$

Puisque $a_0 = 0$, on a

$$\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p} = 0$$

De plus

$$a_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \frac{2p-2}{2p-1} \cdots \frac{2}{3} a_1 = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$

Finalement
$$S(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(2^pp!)^2}{(2p+1)!}x^{2p+1}$$
Synthèse : Considérons
$$S:x\mapsto\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(2^pp!)^2}{(2p+1)!}x^{2p+1}$$
Posons $u_p=\dfrac{(2^pp!)^2}{(2p+1)!}x^{2p+1}$ pour $x\neq 0$.
$$\left|\frac{u_{p+1}}{u_p}\right|=\left|\frac{a_{2p+3}}{a_{2p+1}}\right||x|^2=\frac{2p+2}{2p+3}|x|^2\to|x|^2$$
donc $R=1$.
Par les calculs qui précèdent, on peut affirmer que S est solution sur $]-1,1[$ du problème différentiel Σ.
Or le problème différentiel Σ admet une solution unique donc $f=S$.

18.4 Applications

18.4.1 Régularité d'un prolongement continu

Exemple Soit $f:\mathbb{R}^\star\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}$.
Quand $x\to 0$, $\mathrm{e}^x=1+x+o(x)$ donc
$$f(x)=\frac{x+o(x)}{x}\to 1$$
On peut prolonger f par continuité en 1 en posant $f(0)=1$.
Montrer que la fonction f ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$\mathrm{e}^x-1=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n$$
Pour tout $x\in\mathbb{R}^\star$,
$$\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!}x^n$$
puis pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!}x^n$$
Ainsi f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et donc c'est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.
De plus
$$\forall n\in\mathbb{N},\ f^{(n)}(0)=\frac{1}{n+1}$$
car par série de Taylor
$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{(n+1)!}$$

Exemple De même, on obtient que la fonction sinus cardinal est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque On en déduit que la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\mathrm{e}^x - 1}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ car $\dfrac{\sin x}{\mathrm{e}^x - 1} = \dfrac{\sin x}{x}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ est produit des deux fonctions $x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ et $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ qui se prolongent en des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

18.4.2 Calcul de somme

Exemple Calculons $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!}$.
On a immédiatement $R = +\infty$.
Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(x^2\right)^n = x\,\mathrm{e}^{-x^2}$$

Exemple Calculons $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^n$.
On a immédiatement $R = +\infty$.
Si $x \geqslant 0$ alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} \sqrt{x}^{2n} = \mathrm{ch}\sqrt{x}$$

Si $x \leqslant 0$ alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} |x|^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sqrt{|x|}^{2n} = \cos\sqrt{|x|}$$

Exemple Calculons $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1} x^n$.
On a immédiatement $R = 1$.
Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Pour $x \in \left]-1, 1\right[$,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{n+1} = x\ln(1+x)$$

Pour $x \in \left]-1,1\right[$ et $x \neq 0$,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \frac{1}{x}\left(\ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x\right)$$

Ainsi, pour $x \in \left]-1,1\right[$ et $x \neq 0$,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} x^n = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\ln(1+x) + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x$$

18.4.3 Intégration terme à terme

On peut exploiter

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n(t)\,\mathrm{d}t$$

s'il y a convergence uniforme sur $I = [a,b]$ ou s'il y a convergence de $\sum \int_I |u_n|$.

Exemple Montrons

$$\int_0^\pi \mathrm{sinc}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \frac{\pi^{2n+1}}{2n+1}$$

La fonction sinus cardinale est développable en série entière

$$\mathrm{sinc}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n}$$

avec un rayon de convergence $R = +\infty$. Cette série entière converge donc normalement sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}$ et donc en particulier sur $[0,\pi]$.
Puisque les fonctions sommées sont continues et que la série de fonctions converge uniformément

$$\int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n}\,\mathrm{d}t$$

ce qui donne la formule proposée.

Exemple Calculons

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Sur $\left]0,1\right[$,

$$f(t) = \frac{\ln(1+t)}{t} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^{n-1}$$

(et la relation vaut aussi 1 et peut valoir en 0 par prolongement par continuité)
Posons $u_n : \left]0,1\right[\to \mathbb{R}$ définie par

$$u_n(t) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^{n-1}$$

La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement et sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = f$ est continue par morceaux.
Chaque u_n est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1[$.
Enfin la série $\sum \int |u_n|$ converge car

$$\int_{]0,1[} |u_n| = \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$$

Par théorème, f est intégrable sur $]0,1[$ et

$$I = \int_{]0,1[} f = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Sachant $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, on peut achever le calcul de I,

$$I = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2}\right) - 2\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2}$$

et donc

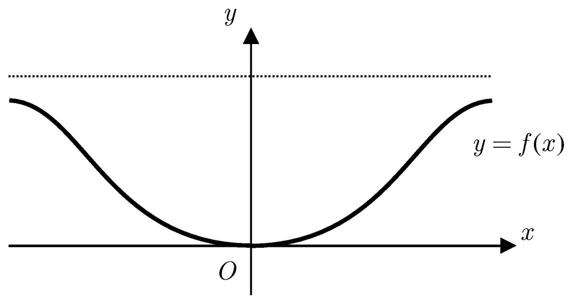
$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

18.4.4 Musculation : fonction $\mathcal{C}^\infty$ non développable en série entière.

Soit $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$$

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
Quand $x \to 0$, $f(x) \to 0$.
On prolonge f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.



f $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$:
Quand $x \to 0$ (avec $x \neq 0$), $f'(x) = \frac{2}{x^3}\mathrm{e}^{-1/x^2} \underset{X=1/x}{=} 2X^3\mathrm{e}^{-X^2} \to 0$ car $|X| \to +\infty$.
Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 0$.

f $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$:

Quand $x \to 0$ (avec $x \neq 0$) $f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x^2} \underset{X=1/x}{=} P_n(X)\mathrm{e}^{-X^2} \to 0$ avec P_n polynôme.

On montre alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que f est de classe $\mathcal{C}^n$ avec $f^{(n)}(0) = 0$.

Finalement f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et sa série de Taylor est nulle.

f non développable en série entière

Par l'absurde, si f est développable en série entière sur $]-r, r[$ alors

$$\forall x \in \left]-r, r\right[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \text{ car } a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0$$

C'est absurde car f n'est pas nulle sur un voisinage de 0.

18.4.5 Musculation : fonction absolument monotone

Soient $r \in \mathbb{R}^{+\star} \cup \{+\infty\}$ et $f : \left]-r, r\right[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f^{(n)} \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que f est développable en série entière sur $]-r, r[$.

Soit $x \in \left]-r, r\right[$. On peut écrire

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$$

avec

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Par le changement de variable $t = xu$, on peut écrire

$$R_n(x) = x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u$$

Choisissons y tel que $|x| < y < r$. Puisque $f^{(n+1)}$ est croissante, on a

$$\forall u \in [0, 1], f^{(n+1)}(xu) \leqslant f^{(n+1)}(yu)$$

et donc

$$|R_n(x)| \leqslant |x|^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(yu)\,\mathrm{d}u \leqslant |x/y|^{n+1} R_n(y)$$

De plus $R_n(y) \leqslant f(y)$ car les termes de la somme partielle de Taylor en y sont tous positifs et donc

$$|R_n(x)| \leqslant |x/y|^{n+1} f(y) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Finalement f est aussi égale à la somme de sa série de Taylor sur $]-r, r[$.

Chapitre 19

Séries de Fourier

19.1 Fonctions 2π périodiques

19.1.1 Définition

Définition

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dite 2π-périodique si

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t + 2\pi) = f(t)$$

Exemple Pour $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $c_n : t \mapsto \cos(nt)$ et $s_n : t \mapsto \sin(nt)$ sont 2π-périodiques.

Proposition

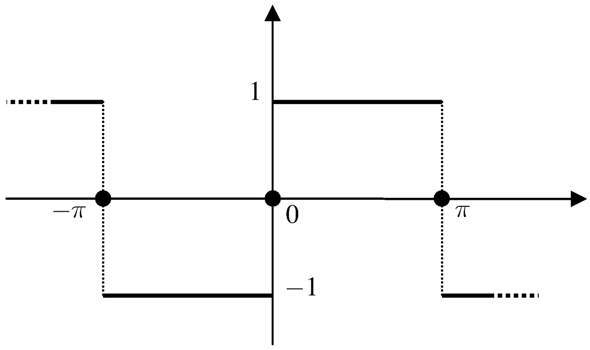
Pour $g : [a, a, +2\pi[\to \mathbb{C}$, il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique vérifiant $f_{\restriction [a,a+2\pi[} = g$.

dém. :
Analyse : Supposons f solution.
Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(t) = f(t - 2n\pi)$.
Pour $n = \lfloor (t-a)/2\pi \rfloor$, $t - 2n\pi \in [a, a + 2\pi[$ donc $f(t) = g(t - \lfloor (t-a)/2\pi \rfloor 2\pi)$ ce qui détermine f de façon unique.
Synthèse : $f(t) = g(t - \lfloor (t-a)/2\pi \rfloor 2\pi)$ convient.
□

Remarque Pour $g : [a, a + 2\pi] \to \mathbb{C}$ vérifiant $g(a) = g(a + 2\pi)$, il existe aussi une unique fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique prolongeant g.

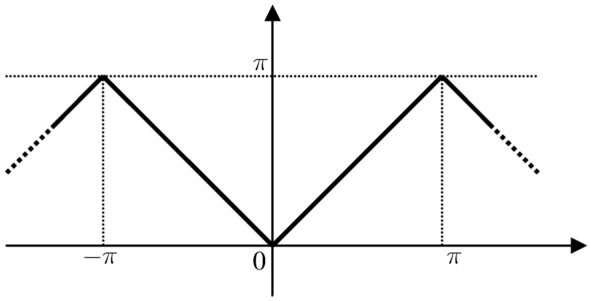
Exemple La fonction créneau f est la fonction 2π-périodique déterminée par :

$$f \text{ est impaire, } f(t) = 1 \text{ sur }]0, \pi[\text{ et } f(\pi) = 0$$



Exemple La fonction triangle f est la fonction 2π-périodique déterminée par :

$$f \text{ est paire et } f(t) = t \text{ sur } [0, \pi]$$



19.1.2 Régularité

Définition

On note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'algèbre des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues 2π-périodiques.

Proposition

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique et $a \in \mathbb{R}$. On a équivalence entre :
(i) f est continue ;
(ii) $f_{\restriction [a, a+2\pi]}$ est continue.

dém. :
(i) $\Rightarrow$ (ii) ok
(ii) $\Rightarrow$ (i) Si $f_{\restriction [a, a+2\pi]}$ est continue alors $f_{\restriction [a+2\pi, a+4\pi]}$ aussi.
Par continuité à droite et à gauche en $a + 2\pi$ on obtient $f_{\restriction [a, a+4\pi]}$ continue.
Plus généralement, on montre que, pour tout $k, \ell \in \mathbb{N}$, $f_{\restriction [a-2k\pi, a+2\ell\pi]}$ est continue.
Finalement, par continuité sur tout compact, f est continue.
$\square$

Exemple La fonction triangle est continue.
En effet, sa restriction à $[-\pi, \pi]$ est la fonction $t \mapsto |t|$ qui est continue.

Définition

On note $\mathcal{CM}_{2\pi}$ l'algèbre formée des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodiques et continues par morceaux.

Proposition

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique et $a \in \mathbb{R}$. On a équivalence entre :
(i) f est continue par morceaux ;
(ii) $f_{\upharpoonright [a,a+2\pi]}$ est continue par morceaux.

dém. :
(i) $\Rightarrow$ (ii) ok
(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons $f_{\upharpoonright [a,a+2\pi]}$ continue par morceaux.
Il existe $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ subdivision de $[a, a+2\pi]$ telle que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $f_{\upharpoonright]a_{i-1},a_i[}$ se prolonge en une fonction continue sur $[a_{i-1}, a_i]$.
Considérons alors $\sigma' = (a_0, \ldots, a_n, a_1 + 2\pi, \ldots, a_n + 2\pi)$, σ' est une subdivision de $[a, a+4\pi]$ permettant d'établir que $f_{\upharpoonright [a,a+4\pi]}$ est continue par morceaux.
Plus généralement, on montre que, pour tout $k, \ell \in \mathbb{N}$, $f_{\upharpoonright [a-2k\pi,a+2\ell\pi]}$ est continue par morceaux.
□

Exemple La fonction créneau est continue par morceaux car sa restriction à $[-\pi, \pi]$ l'est via la subdivision $\sigma = (-\pi, 0, \pi)$.

Plus généralement

Proposition

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique et $a \in \mathbb{R}$. On a équivalence entre :
(i) f est de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux ;
(ii) $f_{\upharpoonright [a,a+2\pi]}$ est $\mathcal{C}^p$ par morceaux.

Exemple Les fonctions créneau et triangle sont $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux car le sont sur $[-\pi, \pi]$ via la subdivision $\sigma = (-\pi, 0, \pi)$.

19.1.3 Pseudo dérivée

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux 2π-périodique. f est dérivable sauf en un nombre fini de points par période.
On note $D(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction donnée par

$$D(f)(t) = \begin{cases} f'(t) & \text{si } f \text{ est dérivable en } t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction $D(f)$ est continue par morceaux 2π-périodique.

Définition

La fonction $D(f)$ est appelée pseudo-dérivée de f.

Exemple La pseudo-dérivée d'une fonction $\mathcal{C}^1$ est sa dérivée.

Exemple La pseudo-dérivée de la fonction créneau est nulle.

Exemple La pseudo-dérivée de la fonction triangle est la fonction créneau.

19.1.4 Intégrale sur une période

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue par morceaux 2π-périodique

Proposition

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^{a+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_b^{b+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$$

dém. :
Par la relation de Chasles

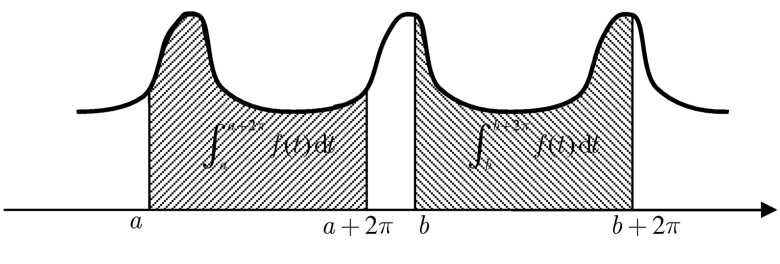
$$\int_a^{a+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^{b+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{b+2\pi}^{a+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Or par 2π périodicité

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\int_a^{a+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_b^{b+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$$



□

Définition

Cette valeur commune est appelée intégrale sur une période de f.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{2\pi} \cos(nt)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } n > 0 \\ 2\pi & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0$$

Exemple Soit τ la fonction triangle.

$$\int_0^{2\pi} \tau(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \tau(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} |t|\;\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} t\,\mathrm{d}t = \pi^2$$

Attention : Ecrire

$$\int_{2\pi} \tau(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \tau(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} t\,\mathrm{d}t$$

n'est pas valable car $\tau(t)$ n'est pas égal à t sur tout l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Lemme

> Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique.
>
> Si f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} D(f) = 0$.

dém. :
Soit $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ une subdivision de $[0, 2\pi]$ adaptée à la fonction $\mathcal{C}^1$ par morceaux f.

$$\int_0^{2\pi} D(f) = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} D(f)$$

Or sur $]a_{i-1}, a_i[$, $D(f) = f'$ donc

$$\int_{a_{i-1}}^{a_i} D(f) = \int_{]a_{i-1}, a_i[} f'(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{a_i^-} f - \lim_{a_{i-1}^+} f = f(a_i) - f(a_{i-1})$$

Par suite

$$\int_0^{2\pi} D(f) = \sum_{k=1}^{n} f(a_i) - f(a_{i-1}) = f(a_n) - f(a_0) = 0$$

□

Théorème

> Pour f, g 2π-périodiques, continues et $\mathcal{C}^1$ par morceaux
>
> $$\int_0^{2\pi} D(f)(t)g(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{2\pi} f(t)D(g(t))\,\mathrm{d}t$$

dém. :
fg est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux donc $\displaystyle\int_0^{2\pi} D(fg) = 0$.
Or, sauf en un nombre fini de points par période

$$D(fg)(t) = (fg)'(t) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t) = D(f)(t)g(t) + f(t)D(g)(t)$$

donc

$$\int_0^{2\pi} \left(D(f)(t)g(t) + f(t)D(g)(t)\right)\;\mathrm{d}t = 0$$

□

19.1.5 L'espace préhilbertien $\mathcal{C}_{2\pi}$

Définition

On note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'algèbre des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues 2π-périodiques.

Définition

Pour $f, g \in \mathcal{C}_{2\pi}$, on pose

$$(f \mid g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) \,\mathrm{d}t$$

Théorème

$(.\mid .)$ définit un produit hermitien sur $\mathcal{C}_{2\pi}$.

dém. :
$(.\mid .)$ est évidemment une forme sesquilinéaire hermitienne.
$(f \mid f) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t \geqslant 0$ et si $(f \mid f) = 0$ alors par intégrale nulle d'une fonction continue positive, $f_{\restriction [0,2\pi]}$ est la fonction nulle, puis, par périodicité, $f = 0$.
□

Corollaire

$\mathcal{C}_{2\pi}$ est un espace normé par $\|\,.\,\|_2$ avec

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t$$

Remarque On peut aussi normer $\mathcal{C}_{2\pi}$ par $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_\infty$ avec

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f| \text{ et } \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,2\pi]} |f(t)|$$

Ces normes ne sont pas équivalentes mais $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_2 \leqslant \|f\|_\infty$.
Par suite une approximation uniforme fournit une approximation quadratique et une approximation en moyenne.

Exemple Les fonctions $c_n : t \mapsto \cos(nt)$ (pour $n \in \mathbb{N}$) et $s_n : t \mapsto \sin(nt)$ (pour $n \in \mathbb{N}^\star$) sont deux à deux orthogonales.
En effet :
Pour $m \neq n \in \mathbb{N}$,

$$(c_m \mid c_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt) \,\mathrm{d}t$$

Or

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$$

donc

$$(c_m \mid c_n) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos\left((m+n)t\right) + \cos\left((m-n)t\right) \,\mathrm{d}t = 0$$

Pour $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$(s_m \mid c_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(mt)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \ldots = 0$$

Pour $m, n \in \mathbb{N}^\star$,

$$(s_m \mid s_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(mt)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \ldots = 0$$

Notons que de plus

$$\|c_0\|_2^2 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^\star, \|c_n\|_2^2 = \|s_n\|_2^2 = \frac{1}{2}$$

19.1.6 Polynôme trigonométrique

Définition

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note e_n la fonction de $\mathcal{C}_{2\pi}$ définie par $e_n(t) = \mathrm{e}^{int}$.

Théorème

$(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée de $\mathcal{C}_{2\pi}$.

dém. :
$(e_m \mid e_n) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n-m)t}\,\mathrm{d}t$.
Cas $m = n$: $\|e_n\|^2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = 1$.
Cas $m \neq n$: $(e_m \mid e_n) = \dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{1}{i(n-m)}\mathrm{e}^{i(n-m)t}\right] = 0$.
□

Définition

On note $\mathcal{P}_n = \text{Vect}(e_k)_{-n\leqslant k\leqslant n}$ et $\mathcal{P} = \text{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{Z}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n$.
Les éléments de $\mathcal{P}$ sont appelés polynôme trigonométrique, ils sont de la forme

$$t \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{int}$$

avec $(c_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ vérifiant

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, |n| > N \Rightarrow c_n = 0$$

Exemple $t \mapsto \mathrm{e}^{-it} + 1 + \mathrm{e}^{it} - 2\mathrm{e}^{2it}$ est un polynôme trigonométrique.

Exemple $t \mapsto \cos(nt)$ et $t \mapsto \sin(nt)$ sont des polynômes trigonométriques.

Définition

On note $\mathcal{P} = \text{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ l'espace des polynômes trigonométriques.

Remarque $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de l'espace $\mathcal{P}$.

Théorème

$$\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}, \forall \varepsilon > 0, \exists \varphi \in \mathcal{P},\ \|f - \varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

Ainsi toute fonction continue 2π-périodique est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.

Corollaire

$\mathcal{P}$ est dense dans $\mathcal{C}_{2\pi}$ pour $\| \,.\, \|_\infty$ et pour $\| \,.\, \|_2$ et $\| \,.\, \|_1$.

19.2 Coefficients de Fourier

19.2.1 Coefficients exponentiels

Définition

On appelle coefficient de Fourier exponentiel d'indice $n \in \mathbb{Z}$ de $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ le nombre

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t$$

Exemple $c_0(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$ est la valeur moyenne de f.

Remarque Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ alors $c_n(f) = (e_n \mid f)$ avec $e_n : t \mapsto \mathrm{e}^{int}$.

Exemple Les coefficients de Fourier d'un polynôme trigonométrique sont ses coefficients.
En effet soit $\varphi = \displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m e_m$ avec $(c_m) \in \mathbb{C}^{(\mathbb{Z})}$ un polynôme trigonométrique.

$$c_n(\varphi) = (e_n \mid \varphi) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m(e_n \mid e_m) = c_n$$

car la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée.

Exemple Soit f la fonction créneau.

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^0 -\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t + \int_0^\pi \mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t\right)$$

Cas $n = 0$, $c_0(f) = 0$.
Cas $n \neq 0$, $c_n(f) = \dfrac{1-(-1)^n}{i\pi n}$.
Ainsi $c_{2p}(f) = 0$ et $c_{2p+1}(f) = \dfrac{2}{i\pi(2p+1)}$.

Définition

On appelle série de Fourier de f la suite de fonctions $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n(f)$ le polynôme trigonométrique déterminé par

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k$$

$S_n(f)$ est appelée somme de Fourier partielle de f et on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) \mathrm{e}^{ikt}$$

Exemple La somme de Fourier partielle de rang n de la fonction créneau est

$$S_n(f) = \sum_{k=-n, k\neq 0}^{n} \frac{1-(-1)^n}{in\pi} \mathrm{e}^{int}$$

19.2.2 Coefficients trigonométriques

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue par morceaux et 2π-périodique.

Définition

On appelle coefficients de Fourier trigonométriques d'indice $n \in \mathbb{N}$ de $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ les nombres

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \text{ et } b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$$

Exemple $a_0(f) = 2c_0(f)$ et $b_0(f) = 0$.

Proposition

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \; c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

et

$$a_n = c_n + c_{-n} \text{ et } b_n = i(c_n - c_{-n})$$

dém. :
$c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)(\cos(nt) - i\sin(nt))\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}a_n(f) - ib_n(f)$ etc.
□

Proposition

$\forall t \in \mathbb{R}, S_n(f)(t) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt).$

dém. :
On a

$$S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{ikt} = c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k\mathrm{e}^{ikt} + c_{-k}\mathrm{e}^{-ikt}$$

avec

$$c_k\mathrm{e}^{ikt} + c_{-k}\mathrm{e}^{-ikt} = (c_k - c_{-k})\cos(kt) + i(c_k - c_{-k})\sin(kt) = a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)$$

□

Théorème

Si f est une fonction réelle alors $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont réels.
Si f est paire alors

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \text{ et } b_n(f) = 0$$

Si f est impaire alors

$$a_n(f) = 0 \text{ et } b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$$

dém. :
Si f est à valeurs réelles alors $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont réels par intégration d'une fonction réelle.
Si f est paire alors

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

par parité de la fonction intégrée et

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0$$

par imparité de la fonction intégrée.
Si f est impaire : semblable.
□

Exemple Soit f la fonction créneau.

$$a_n(f) = 0 \text{ et } b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n}$$

Par suite
$$b_{2p}(f) = 0 \text{ et } b_{2p+1}(f) = \frac{4}{\pi(2p+1)}$$
La somme de Fourier partielle de rang $2n+1$ de f est alors donnée par
$$S_{2n+1}(f)(t) = \sum_{p=0}^{n} \frac{4}{(2p+1)\pi} \sin((2p+1)t)$$

19.2.3 Propriétés calculatoires

Proposition

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \forall f, g \in \mathcal{CM}_{2\pi}, \forall n \in \mathbb{Z}, c_n(\lambda f + \mu g) = \lambda c_n(f) + \mu c_n(g)$.

dém. :
Par linéarité de l'intégrale.
□

Proposition

$\forall f \in \mathcal{CM}_{2\pi}, \forall n \in \mathbb{Z} c_n(\bar{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$.

dém. :
Par conjugaison d'intégrale.
□

Théorème

Si f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux alors $c_n(D(f)) = inc_n(f)$.

dém. :
Par la formule d'intégration par parties
$c_n(D(f)) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} D(f)(t)\mathrm{e}^{-int} \,\mathrm{d}t = \dfrac{in}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-int} \,\mathrm{d}t = inc_n(f)$.
□

Remarque $a_n(D(f)) = inc_n(f) - inc_{-n}(f) = nb_n(f)$ et $b_n(D(f)) = -na_n(f)$

19.2.4 Comportement asymptotique

Proposition

$\forall f \in \mathcal{CM}_{2\pi}, \forall n \in \mathbb{Z}, |c_n(f)| \leqslant \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)| \,\mathrm{d}t$.

dém. :
Par l'inégalité triangulaire
$$|c_n(f)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-int} \,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |f(t)| \,\mathrm{d}t$$

□

Proposition

$$\forall f \in \mathcal{CM}_{2\pi}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t$$

dém. :
Cas f continue :

Commençons par interpréter le premier membre. On introduit $S_n(f) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k$.

Par Pythagore

$$\|S_n(f)\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2$$

Il s'agit alors de montrer

$$\|S_n(f)\|_2^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \|f\|_2^2$$

Pour tout $-n \leqslant k \leqslant n$, on a

$$(e_k \mid S_n(f)) = c_k(f) = (e_k \mid f)$$

donc par semi linéarité

$$(S_n(f) \mid f - S_n(f)) = \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k(f)}\,(e_k \mid f - S_n(f)) = 0$$

et on a alors par Pythagore

$$\|f\|^2 = \|f - S_n(f) + S_n(f)\|^2 = \|f - S_n(f)\|^2 + \|S_n(f)\|^2 \geqslant \|S_n(f)\|^2$$

Cas f continue par morceaux :
Il suffit de reprendre les mêmes calculs mais en réécrivant des intégrales à la place des produits scalaires et des normes…
□

Théorème

$$\forall f \in \mathcal{CM}_{2\pi}, c_n(f) \xrightarrow[|n|\to+\infty]{} 0$$

dém. :

Posons $u_n = \sum\limits_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée en vertu de l'inégalité de Bessel. On en déduit qu'elle est convergente et donc $u_{n+1} - u_n = |c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
□

Remarque Pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, on aurait pu aussi montrer le résultat directement par une intégration par parties pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{f(t)\mathrm{e}^{-int}}{-int}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{in}\int_0^{2\pi} f'(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[|n|\to+\infty]{} 0$$

Corollaire

Si f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux alors $c_n(f) = o(1/n)$ quand $|n| \to +\infty$.

dém. :
Si f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux alors $c_n(f) = \dfrac{1}{in} c_n(D(f))$ avec $c_n(D(f)) \xrightarrow[|n|\to+\infty]{} 0$.
□

Remarque Plus généralement, si f est de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ et de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux alors $c_n(f) = o(1/n^p)$ quand $|n| \to +\infty$.

Remarque Ces résultats se transposent aux coefficients trigonométriques via les relations :
$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ et $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$.

19.3 Théorèmes de convergence

19.3.1 Convergence en moyenne quadratique

Rappelons que $\mathcal{C}_{2\pi}$ est un espace préhilbertien pour le produit scalaire

$$(f \mid g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)\,\mathrm{d}t$$

Rappelons aussi que $\mathcal{P}_n = \mathrm{Vect}(e_k)_{-n\leqslant k\leqslant n}$ désigne l'espace des polynômes trigonométrique de degré inférieur à n.

Proposition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et 2π-périodique.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(f)$ est le projeté orthogonal de f sur $\mathcal{P}_n$ et donc

$$\|f\|_2^2 = \|S_n(f)\|_2^2 + d(f, \mathcal{P}_n)^2$$

dém. :
Notons $e_n : t \mapsto \mathrm{e}^{int}$. On observe alors que $c_n(f) = (e_n \mid f)$.
La famille $(e_k)_{-n\leqslant k\leqslant n}$ est une base orthonormée de $\mathcal{P}_n$ donc la projection orthogonale de f sur $\mathcal{P}_n$ est

$$\sum_{k=-n}^{n} (e_k \mid f)e_k = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k = S_n(f)$$

Puisque $S_n(f)$ et $f - S_n(f)$ sont orthogonaux, la formule de Pythagore donne

$$\|f\|_2^2 = \|S_n(f)\|_2^2 + \|f - S_n(f)\|_2^2$$

et on sait $d(f, \mathcal{P}_n) = \|f - S_n(f)\|$.
□

Théorème

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique.
Si f est continue alors la série de Fourier de f converge vers f en moyenne quadratique i.e.

$$\|S_n(f) - f\|_2 \to 0$$

dém. :
On a $\|S_n(f) - f\|_2 = d(f, \mathcal{P}_n)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Par le théorème de Weierstrass trigonométrique il existe $\varphi \in \mathcal{P}$ tel que $\|f - \varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$ et donc $\|f - \varphi\|_2 \leqslant \|f - \varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$ car $\|\,.\,\|_2 \leqslant \|\,.\,\|_\infty$.
Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi \in \mathcal{P}_N$.
Pour tout $n \geqslant N$, $\varphi \in \mathcal{P}_n$ donc $d(f, \mathcal{P}_n) \leqslant \|f - \varphi\|_2 \leqslant \varepsilon$.
Ainsi $d(f, \mathcal{P}_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
□

19.3.2 Formule de Parseval

Théorème

Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue par morceaux et 2π-périodique

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t$$

On écrit

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

dém. :
Cas f continue
Puisque $S_n(f) \xrightarrow{\|\,.\,\|_2} f$, on a $\|S_n(f)\|_2^2 \to \|f\|_2^2$.
Or a $S_n(f) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e_k$ avec les $c_k e_k$ deux à deux orthogonaux. Par Pythagore

$$\|S_n(f)\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} \|c_k e_k\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$$

et donc

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 = \|f\|_2^2$$

Cas f continue par morceaux : admis.
□

Corollaire

Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue par morceaux et 2π-périodique

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2 \right)$$

dém. :
On a

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 = |c_0|^2 + \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + |c_{-k}|^2$$

avec $a_0 = 2c_0$ et pour $k \geqslant 1$, $c_k = \dfrac{1}{2}(a_k - ib_k)$, $c_{-k} = \dfrac{1}{2}(a_k + ib_k)$ de sorte que

$$|c_k|^2 + |c_{-k}|^2 = \frac{1}{4}\left((a_k - ib_k)(\bar{a}_k + i\bar{b}_k) + (a_k + ib_k)(\bar{a}_k - i\bar{b}_k)\right) = \frac{1}{2}\left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right)$$

□

Exemple Soit f la fonction créneau.

$$a_n = 0,\, b_{2p} = 0 \text{ et } b_{2p+1} = \frac{4}{\pi(2p+1)}$$

Par la formule de Parseval :

$$\frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t$$

Ainsi

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4(1-(-1)^n)^2}{n^2\pi^2} = \frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = 1$$

Par suite

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

On en déduit la valeur de $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

En effet

$$S = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4}S + \frac{\pi^2}{8}$$

donne $S = \dfrac{\pi^2}{6}$.

19.3.3 Convergence ponctuelle

Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et $(S_n(f))$ la série de Fourier de f.

$$S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{ikt} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt))$$

Définition

On dit que la série de Fourier de f converge en $t \in \mathbb{R}$ si la suite numérique $(S_n(f)(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Sa limite est alors appelée somme de Fourier de f en t.
On note alors

$$S(f)(t) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=-n}^{n} c_k\mathrm{e}^{ikt} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\mathrm{e}^{int} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)$$

Définition

On dit que f est développable en série de Fourier si sa série de Fourier converge sur $\mathbb{R}$ et que la somme de Fourier de f est égale à f.

$$\forall t \in \mathbb{R}, S_n(f)(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(t)$$

Remarque f est développable en série de Fourier si sa série de Fourier converge simplement vers elle-même.

Proposition

Si f est développable en série de Fourier alors

$$\forall t \in \mathbb{R},\, f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{int} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

Exemple Les polynômes trigonométriques sont développables en séries de Fourier.
En effet les coefficients de Fourier d'un polynôme trigonométrique sont ses coefficients.

19.3.4 Théorème de convergence normale

Théorème

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique
Si f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux alors la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ i.e.

$$\|S_n(f) - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

dém. :
On a

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k = c_0 e_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k e_k + \sum_{k=1}^{n} c_{-k} e_{-k}$$

avec $c_k = c_k(f)$ et $e_k : t \mapsto \mathrm{e}^{ikt}$.
Etudions la série de fonctions $\sum c_n e_n$. On a

$$\|c_n e_n\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|c_n \mathrm{e}^{int}\right| = |c_n|$$

Puisque $c_n(D(f)) = inc_n(f)$, on a

$$|c_n| \leqslant \frac{|c_n(D(f))|}{|n|} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + |c_n(D(f))|^2\right)$$

Par comparaison de série à termes positifs, $\sum |c_n|$ converge et donc la série de fonctions $\sum c_n e_n$ converge normalement et donc uniformément. Ainsi

$$\sum_{k=1}^{n} c_k e_k \xrightarrow[n\to+\infty]{CVU} \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k$$

De même,

$$\sum_{k=1}^{n} c_{-k} e_{-k} \xrightarrow[n\to+\infty]{CVU} \sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k} e_{-k}$$

Par opération, on obtient

$$S_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} c_0 e_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k} e_{-k} = S(f)$$

Par convergence uniforme, on peut affirmer $S(f) \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et $\|S_n(f) - S(f)\|_\infty \to 0$.
Or $\|\,.\,\|_2 \leqslant \|\,.\,\|_\infty$, on a donc aussi $\|S_n(f) - S(f)\|_2 \to 0$.
Cependant, par convergence en moyenne quadratique, on sait que $\|S_n(f) - f\|_2 \to 0$.
Par unicité de limite $S(f) = f$.
□

Corollaire

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{int} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

f est développable en série de Fourier. / alors Formule.

Exemple Soit f la fonction triangle.
f est continue et $\mathcal{C}^1_{pm}$ donc sa série de Fourier converge uniformément vers elle-même.
Calculons celle-ci. Puisque f est paire

$$b_n(f) = 0 \text{ et } a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

Pour $n = 0$, $a_0(f) = \pi$.
Pour $n > 0$,

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi n}\left[t\sin nt\right]_0^\pi - \frac{2}{\pi n}\int_0^\pi \sin(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}$$

et ainsi

$$a_{2p}(f) = 0 \text{ et } a_{2p+1}(f) = -\frac{4}{\pi(2p+1)^2}$$

On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos((2p+1)t)}{(2p+1)^2}$$

En $t = 0$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Remarque Ce cadre ne s'applique pas à la fonction créneau car celle-ci n'est pas continue.

19.3.5 Théorème de Jordan Dirichlet

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique et continue par morceaux.

Définition

On appelle valeurs à droite et à gauche de f en $t \in \mathbb{R}$ les nombres

$$f(t^+) = \lim_{h \to 0^+} f(t+h) \text{ et } f(t^-) = \lim_{h \to 0^+} f(t-h)$$

Exemple Si f est continue en t alors $f(t) = f(t^+) = f(t^-)$.

Exemple Pour la fonction créneau $f(0^+) = 1$ et $f(0^-) = -1$.

Définition

On appelle régularisée de f la fonction

$$f^\star : t \mapsto \frac{1}{2}\left(f(t^+) + f(t^-)\right)$$

Remarque $f^\star$ est une fonction 2π-périodique, continue par morceaux coïncidant avec f en tous les points où f est continue.

Définition

On dit que f est régularisée si $f^\star = f$.

Exemple Une fonction continue est régularisée.

Exemple La fonction créneau est régularisée.

Théorème

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique.
Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux alors la série de Fourier de f converge simplement vers la régularisée de f i.e.

$$\forall t \in \mathbb{R}, S_n(f)(t) \to \frac{1}{2}\left(f(t^+) + f(t^-)\right)$$

(admis)

Corollaire

> Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et égale à sa régularisée alors
>
> $$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{int} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

Exemple Soit f la fonction créneau.
f est 2π-périodique, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et régularisée donc développable en série de Fourier.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

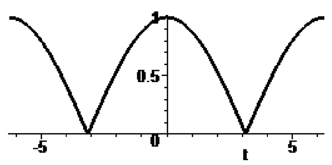
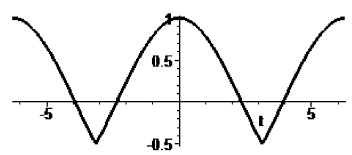
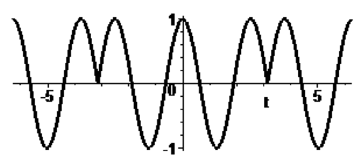
$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin((2p+1)t)}{2p+1}$$

En $t = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

19.3.6 Deux développements eulériens

Soient $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par $f(t) = \cos(\alpha t)$ sur $[-\pi, \pi]$.
f est bien définie car $\cos(\alpha(-\pi)) = \cos(\alpha\pi)$.

$\alpha = 1/2$	$\alpha = 2/3$	$\alpha = 5/2$
		

f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, par le théorème de convergence normale, la série de Fourier de f converge uniformément vers f (et donc f est développable en série de Fourier)
Puisque f est paire

$$b_n(f) = 0, a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(\alpha t) \cos(nt) \mathrm{d}t$$

Or

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \left(\cos(a+b) + \cos(a-b) \right)$$

donc

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos((\alpha+n)t) + \cos((\alpha-n)t) \mathrm{d}t = (-1)^n \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}$$

Puisque f est développable en série de Fourier

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi\alpha} + \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{(\alpha^2 - n^2)} \cos(nt)$$

Pour $t = \pi$
$$\cos(\alpha\pi) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\alpha}{(\alpha^2 - n^2)}$$
Puisque $\alpha \notin \mathbb{Z}$, $\sin(\alpha\pi) \neq 0$ et on obtient
$$\cot(\alpha\pi) = \frac{1}{\alpha\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}$$
Enfin, en posant $x = \alpha\pi$, on obtient de développement eulérien de la fonction cotangente
$$\forall x \neq 0 \quad [\pi],\ \cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$$
On en déduit
$$\cot x - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$$
Soit $x \in]0,\pi[$. Sous réserve
$$\int_{]0,x]} \cot t - \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{]0,x]}\frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}\,\mathrm{d}t$$
et les expressions sont ici calculables... Mettons en place cette identité
D'une part
$$\int_{]0,x]} \cot t - \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\ln\frac{\sin t}{t}\right]_0^x = \ln\frac{\sin x}{x}$$
D'autre part
$$\int_{]0,x]}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{]0,x]}\frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}\,\mathrm{d}t$$
En effet, posons $f_n : t \mapsto \dfrac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}$.

La fonction f_n est continue par morceaux sur $]0,x]$ et $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,x]$ avec $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n :$ $t \mapsto \cot t - \dfrac{1}{t}$ continue par morceaux sur $]0,x]$.
$$\int_{]0,x]} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = -\int_{]0,x]}\frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}\,\mathrm{d}t = \int_{]0,x]}\frac{2t}{n^2\pi^2 - t^2}\,\mathrm{d}t$$
et donc
$$\int_{]0,x]} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \left[-\ln\left(n^2\pi^2 - t^2\right)\right]_0^x = -\ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$
On observe que
$$\int_{]0,x]} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc $\sum \int |f_n|$ converge.
Par le théorème d'intégration terme à terme de Fubini, on a alors

$$\int_{]0,x]} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2} \,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{]0,x]} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2} \,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

Finalement, on obtient

$$\ln \frac{\sin x}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

Or

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = \ln \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

en notant

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

donc

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{(n\pi)^2}\right)$$

et finalement

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{(n\pi)^2}\right)$$

Cette relation vaut pour $x \in \left]0, \pi\right[$ et par imparité pour $x \in \left]-\pi, \pi\right[$, c'est le développement eulérien de la fonction sinus.

19.4 Approfondissements

19.4.1 Suites de carré sommable indexées sur $\mathbb{Z}$

Définition

Une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ est dite de carré sommable s'il y a convergence quand n tend vers l'infini de $\sum_{k=-n}^{n} |u_k|^2$. On note alors

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u_n|^2 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} |u_k|^2$$

On note $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ l'ensemble des suites complexes de carré sommable.

Exemple $\forall f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ et par la formule de Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t$$

Proposition

On a équivalence entre :
(i) $u \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$;
(ii) $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=-n}^{n} |u_k|^2 \leqslant M$;
(iii) les séries $\sum_{n\geqslant 1} |u_n|^2$ et $\sum_{n\geqslant 1} |u_{-n}|^2$ convergent.
De plus, on a alors

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u_n|^2 = |u_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |u_{-n}|^2$$

dém. :
(i) $\Rightarrow$ (ii) avec $M = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} |u_k|^2$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) car $\sum |u_n|^2$ et $\sum |u_{-n}|^2$ dont des série à termes positifs aux sommes partielles majorées par M.
(iii) $\Rightarrow$ (i) car $\sum_{k=-n}^{n} |u_k|^2 = |u_0|^2 + \sum_{k=1}^{n} |u_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |u_{-k}|^2$.
□

Exemple La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ avec $u_n = \dfrac{1}{1+|n|}$ est élément de $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.

Théorème

$\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$.

dém. :
$\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ et $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
$0 \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.
Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $u \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. On obtient aisément $\lambda u \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.
Soient $u, v \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.
$|u_n + v_n|^2 \leqslant (|u_n| + |v_n|)^2 \leqslant |u_n|^2 + 2\,|u_n|\,|v_n| + |v_n|^2 \leqslant 2\left(|u_n|^2 + |v_n|^2\right)$ car $2ab \leqslant a^2 + b^2$.
Puisque $\sum |u_n|^2$ et $\sum |v_n|^2$ convergent, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum |u_n + v_n|^2$ converge.
De même, $\sum |u_{-n} + v_{-n}|^2$ converge aussi.
Ainsi $u + v \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.
□

Théorème

$\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ est un espace préhilbertien complexe pour le produit scalaire hermitien défini par

$$(u \mid v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{u}_n v_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} \bar{u}_k v_k$$

dém. :
Soient $u, v \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. Montrons que $\sum_{k=-n}^{n} \bar{u}_k v_k$ converge quand $n \to +\infty$.

$$\sum_{k=-n}^{n} \bar{u}_k v_k = \bar{u}_0 v_0 + \sum_{k=1}^{n} \bar{u}_k v_k + \sum_{k=1}^{n} \bar{u}_{-k} v_{-k}$$

Puisque

$$|\bar{u}_n v_n| \leqslant \frac{1}{2}\left(|u_n|^2 + |v_n|^2\right)$$

les séries $\sum \bar{u}_n v_n$ et $\sum \bar{u}_{-n} v_{-n}$ convergent et par conséquent $\left(\sum_{k=-n}^{n} \bar{u}_k v_k\right)$ converge.
Ainsi l'application $(. \mid .) : \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \times \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ est bien définie.
Il est clair que $v \mapsto (u \mid v)$ est linéaire et que $(v \mid u) = \overline{(u \mid v)}$.
De plus $(u \mid u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u_n|^2 \geqslant 0$ avec nullité ssi $\forall n \in \mathbb{Z}, u_n = 0$ i.e. $u = 0$.
Finalement $(. \mid .)$ est un produit scalaire hermitien sur $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.
□

Corollaire

$\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ est normé par $\| \, . \, \|_2$ avec $\|u\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u_n|^2$.

19.4.2 L'isométrie d'analyse de Fourier

Définition

On appelle analyse de Fourier d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique la suite

$$(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$$

Remarque On note parfois $\hat{f}(n) = c_n(f)$ ce qui introduit $\hat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ qui est aussi appelée analyse de Fourier de f.

Théorème

L'application $\mathcal{F} : \mathcal{C}_{2\pi} \to \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ définie par $\mathcal{F}(f) = (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est une isométrie linéaire.

dém. :
Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(\lambda f + \mu g) = \lambda c_n(f) + \mu c_n(g)$ donc $\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{F}(f) + \mu \mathcal{F}(g)$.
Ainsi l'application $f \mapsto \mathcal{F}(f)$ est linéaire.
Par l'égalité de Parseval

$$\|\mathcal{F}(f)\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \|f\|_2^2$$

Ainsi l'application $f \mapsto \mathcal{F}(f)$ est une isométrie.
□

Corollaire

L'application $\mathcal{F}$ est injective et donc

$$\forall f, g \in \mathcal{C}_{2\pi},\ (\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = c_n(g)) \Rightarrow f = g$$

Par analyse de Fourier, on a résumé la fonction f à une suite de scalaires.

dém. :
Puisque $\mathcal{F}$ est une isométrie, son noyau est réduit à la fonction nulle.
□

Corollaire

L'application $\mathcal{F}$ transforme le produit scalaire hermitien sur $\mathcal{C}_{2\pi}$ en le produit scalaire hermitien sur $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.

$$\forall f, g \in \mathcal{C}_{2\pi},\ \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \overline{f(t)}g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{c_n(f)}\,c_n(g)$$

ou encore

$$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \overline{f(t)}g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\overline{a_0(f)}\,a_0(g)}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \overline{a_n(f)}\,a_n(g) + \overline{b_n(f)}\,b_n(g)$$

dém. :
Posons $\varphi : \mathcal{C}_{2\pi} \times \mathcal{C}_{2\pi} \to \mathbb{C}$ l'application définie par

$$\varphi(f, g) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{c_n(f)}c_n(g)$$

On vérifie aisément que φ est une forme sesquilinéaire hermitienne.
Puisque

$$\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}, \varphi(f, f) = (f \mid f)$$

la formule de polarisation donne

$$\forall f, g \in \mathcal{C}_{2\pi}, \varphi(f, g) = (f \mid g)$$

La seconde formule se justifie par le même procédé.
□

19.4.3 Calcul des coefficients de Fourier d'une série trigonométrique

Exemple Calculons la série de Fourier de $f : t \mapsto \dfrac{1}{2 - \mathrm{e}^{it}}$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{it}/2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}}\mathrm{e}^{ikt}$$

car $\left|\mathrm{e}^{it}/2\right| < 1$. Ainsi

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \mathrm{e}^{ikt} \text{ avec } c_k = \begin{cases} 1/2^{k+1} & \text{si } k \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

Pour affirmer que cette écriture est effectivement le développement en série de Fourier de f, il faut assurer que les coefficients c_n sont bien les coefficients de Fourier de f. Pour cela, il suffit de calculer $c_n(f)$ en procédant à une intégration terme à terme
Pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(f) = \frac{1}{2n} \int_0^{2n} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{i(k-n)t}}{2^{k+1}} \,\mathrm{d}t$$

Posons $u_k(t) = \mathrm{e}^{i(k-n)t}/2^{k+1}$.
Les fonctions u_k sont continues et $\|u_k\|_\infty = 1/2^{k+1}$ donc $\sum u_k$ converge normalement.
Puisqu'il y a convergence uniforme, on peut intégrer terme à terme

$$c_n(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2n} \int_0^{2n} \frac{\mathrm{e}^{i(k-n)t}}{2^{k+1}} \,\mathrm{d}t = c_n$$

Finalement, l'identité

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \mathrm{e}^{int}$$

est la décomposition de f en série de Fourier.

Exemple Calculons les coefficients de Fourier de $f : t \mapsto \mathrm{e}^{\cos t} \cos(\sin t)$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$f(t) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\cos t + i \sin kt}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \cos(kt) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \cos(kt)$$

Exploitons cette écriture pour calculer les coefficients de Fourier.
Pour $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \cos(kt) \cos(nt) \,\mathrm{d}t$$

Puisque la série $\sum \frac{1}{n!}$ converge, on peut par convergence normale intégrer terme à terme et affirmer $a_0 = 2$, $a_n = \frac{1}{n!}$ et $b_n = 0$ (par imparité) de sorte que la relation qui précède correspond au développement de f en série de Fourier de f.

19.4.4 Les fonctions T périodiques

Soit $f : x \mapsto f(x)$ une fonction T-périodique. L'application $\tilde{f} : t \mapsto f(tT/2\pi)$ est alors 2π-périodique.
Via le changement de variable $x = tT/2\pi$, $t = 2\pi x/T$, on peut transposer la théorie aux fonctions T périodiques.
On a alors

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T f(x) \mathrm{e}^{-2i\pi nx/T} \,\mathrm{d}x$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) \mathrm{d}x \text{ et } b_n = \frac{2}{T} \int_T f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) \mathrm{d}x$$

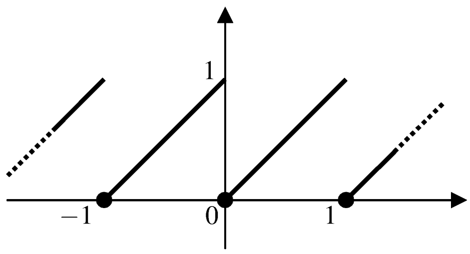
Sous réserve de convergence

$$S(f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{i\frac{2\pi n x}{T}} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)$$

La formule de Parseval s'énonce

$$\frac{1}{T}\int_T |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2$$

Exemple Considérons la fonction $f : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$.



On obtient par le calcul

$$a_0 = 1,\ a_n = 0 \text{ et } b_n = -\frac{1}{n\pi}$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux donc sa série de Fourier converge vers sa régularisée.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^\star(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi n x)}{n}$$

Pour $x = 1/2\pi$, on obtient

$$\frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$$

puis

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi - 1}{2}$$

Notons que la convergence de la série étudiée ici n'est pas immédiate à obtenir (cf. transformation d'Abel) mais qu'ici cette convergence est assurée par le théorème de Dirichlet.

Chapitre 20

Equations différentielles linéaires

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$
I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

20.1 Les équations linéaires d'ordre 1

20.1.1 Equation différentielle scalaire

Définition

On appelle équation différentielle scalaire linéaire d'ordre 1 définie sur I toute équation de la forme

$$x' = a(t)x + b(t)$$

avec $t \mapsto a(t)$ et $t \mapsto b(t)$ fonctions continues de I vers $\mathbb{K}$ et d'inconnue $t \mapsto x(t)$ fonction dérivable de I vers $\mathbb{K}$.

Remarque Par quadrature, on sait résoudre une telle équation.

Exemple Résolvons l'équation

$$(E) : (1+t^2)y' + 2ty = 1$$

On a

$$(E) \Leftrightarrow y' + \frac{2t}{1+t^2}y = \frac{1}{1+t^2}$$

E est équivalente à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 définie sur $\mathbb{R}$.
Equation homogène :

$$(1+t^2)y' + 2ty = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{2t}{1+t^2}y$$

On a

$$\int \frac{-2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\ln(1+t^2)$$

Solution homogène : $y(t) = \dfrac{\lambda}{1+t^2}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

Solution particulière : $y(t) = \dfrac{\lambda(t)}{1+t^2}$ avec $t \mapsto \lambda(t)$ fonction dérivable.

$$(1+t^2)y'(t) + 2ty(t) = 1 \Leftrightarrow \lambda'(t) = 1$$

$\lambda(t) = t$ convient et $y(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$ est solution particulière.
Solution générale

$$y(t) = \frac{\lambda + t}{1+t^2} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Théorème

Soit $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{K}$. Il existe une unique fonction $x : I \to \mathbb{K}$ solution de l'équation $x' = a(t)x + b(t)$ et vérifiant la condition initiale $x(t_0) = x_0$.

dém. :
Introduisons A la primitive s'annulant en t_0 de la fonction continue $a : I \to \mathbb{K}$.
Unicité : Si x est solution alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x(t)\mathrm{e}^{-A(t)}\right) = \left(x'(t) - a(t)x(t)\right)\mathrm{e}^{-A(t)} = b(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$$

donc $t \mapsto x(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$x(t)\mathrm{e}^{-A(t)} = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-A(u)} b(u)\,\mathrm{d}u$$

puis

$$x(t) = \mathrm{e}^{A(t)}\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-A(u)} b(u)\,\mathrm{d}u\right)$$

Existence : La fonction définie par

$$x(t) = \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} b(u)\mathrm{e}^{-A(u)}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{e}^{A(t)}$$

est bien solution.
□

20.1.2 Equation différentielle vectorielle

Définition

On appelle équation différentielle à valeurs dans E linéaire d'ordre 1 définie sur I toute équation de la forme

$$x' = [a(t)]\,(x) + b(t)$$

avec $t \mapsto a(t)$ fonction continue de I vers $\mathcal{L}(E)$, $t \mapsto b(t)$ fonction continue de I vers E et d'inconnue $t \mapsto x(t)$ fonction dérivable de I vers E.

Exemple Cas $E = \mathbb{K}$.
Les endomorphismes sur $\mathbb{K}$ sont les applications $x \mapsto ax$ avec $a \in \mathbb{K}$.
Une équation à valeurs dans $\mathbb{K}$ s'apparente à une équation scalaire.

Remarque Pour alléger les écritures, il est fréquent d'adopter la notation d'opérateur, on écrit fx au lieu de $f(x)$.
L'équation étudiée se réécrit alors $x' = a(t)x + b(t)$.

Remarque En introduisant une base $\mathcal{B}$ de E et en posant

$$A(t) = \text{Mat}_{\mathcal{B}} a(t),\ B(t) = \text{Mat}_{\mathcal{B}} b(t) \text{ et } X(t) = \text{Mat}_{\mathcal{B}} x(t),$$

l'équation vectorielle

$$x' = a(t)x + b(t)$$

équivaut à l'équation matricielle

$$X' = A(t)X + B(t)$$

En notant $a_{i,j}(t)$ les coefficients de la matrice $A(t)$, $b_i(t)$ les coefficients de la colonne $B(t)$ et $x_i(t)$ les coefficients de la colonne $X(t)$, l'équation étudiée équivaut encore au système différentiel

$$\begin{cases} x_1' = a_{1,1}(t)x_1 + \cdots + a_{1,n}(t)x_n + b_1(t) \\ \qquad\vdots \\ x_n' = a_{n,1}(t)x_1 + \cdots + a_{n,n}(t)x_n + b_n(t) \end{cases}$$

En pratique, c'est fréquemment sous la forme d'un système différentiel que sont présentés les équations linéaires vectorielles.

Proposition

Les solutions de l'équation $(E) : x' = a(t)x + b(t)$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

dém. :
Soit x une solution de (E). La fonction x est dérivable et

$$\forall t \in I, x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$$

Posons $B : \mathcal{L}(E) \times E \to E$ définie par $B(u, x) = u(x)$. L'application B est bilinéaire donc continue (car $\dim E < +\infty$). Puisque $x' = B(a, x) + b$, la fonction x' est continue et donc x est de classe $\mathcal{C}^1$.
□

20.1.3 Problème de Cauchy

Soient $a : I \to \mathcal{L}(E)$ et $b : I \to E$ des fonctions continues. On étudie l'équation différentielle

$$(E) : x' = a(t)x + b(t)$$

Définition

Soit $(t_0, x_0) \in I \times E$. Le problème de Cauchy consiste à déterminer les solutions de l'équation (E) vérifiant la condition initiale $x(t_0) = x_0$.

Exemple Pour les équations scalaires, on a montré que le problème de Cauchy avait une solution unique.

Théorème

(admis)
Pour $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$, il existe une unique solution sur I au système

$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

20.1.4 Structure de l'ensemble solution

Soient $a : I \to \mathcal{L}(E)$ et $b : I \to E$ des fonctions continues. On étudie l'équation différentielle

$$(E) : x' = a(t)x + b(t)$$

20.1.4.1 Équation homogène

Définition

L'équation $(E_0) : x' = a(t)x$ est appelée équation homogène associée à l'équation $x' = a(t)x + b(t)$.

Théorème

L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions sur I de l'équation homogène (E_0) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, E)$ de dimension $n = \dim E$.

dém. :
Les solutions sont de classe $\mathcal{C}^1$ donc $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{C}^1(I, E)$.
La fonction nulle est évidemment solution.
Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ et $x_1, x_2 \in \mathcal{S}_0$. Pour tout $t \in I$,

$$(\lambda x_1 + \lambda x_2)'(t) = \lambda_1 x_1'(t) + \lambda_2 x_2'(t) = \lambda_1 a(t)x_1(t) + \lambda_2 a(t)x_2(t)$$

Or $a(t)$ est un endomorphisme donc par linéarité

$$(\lambda x_1 + \lambda x_2)'(t) = a(t)(\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)) = a(t)\left[(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)(t)\right]$$

Ainsi $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in \mathcal{S}_0$ et donc $\mathcal{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, E)$.
Pour $t_0 \in I$, considérons l'application $E_{t_0} : \mathcal{S}_0 \to E$ définie par $E_{t_0} : x \mapsto x(t_0)$.
E_{t_0} est une application linéaire car

$$E_{t_0}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)(t_0) = \lambda_1 x_1(t_0) + \lambda_2 x_2(t_0) = \lambda_1 E_{t_0}(x_1) + \lambda_2 E_{t_0}(x_2)$$

Par le théorème de Cauchy linéaire, on peut affirmer que E_{t_0} est bijective.
Par suite E_{t_0} est un isomorphisme et donc $\dim \mathcal{S}_0 = \dim E$.
□

Exemple L'ensemble des solutions d'un système de la forme

$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t)y \\ y' = c(t)x + d(t)y \end{cases}$$

est un plan vectoriel.

20.1.4.2 Système fondamental de solutions

Définition

On appelle système fondamental de solutions de l'équation homogène $x' = a(t)x$ toute base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de l'espace $\mathcal{S}_0$.

Remarque Si $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est un système fondamental de solution de (E_0), la solution générale homogène est

$$x(t) = \lambda_1 \varphi_1(t) + \cdots + \lambda_n \varphi_n(t) \text{ avec } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$$

Exemple Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $t_0 \in I$
Soit φ_k la fonction solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = a(t)x \\ x(t_0) = e_k \end{cases}$$

Les fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ forment un système fondamental de solutions.
En effet, ce sont par définition des solutions de l'équation $x' = a(t)x$.
De plus, si $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda x_n = 0$ alors en évaluant en t_0, $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E$ donc $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n$ car la famille $\mathcal{B}$ est libre.
Ainsi $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une famille libre formée de $n = \dim \mathcal{S}_0$ éléments de $\mathcal{S}_0$, c'est donc une base de $\mathcal{S}_0$.

20.1.4.3 Wronskien

Définition

On appelle wronskien dans une base $\mathcal{B}$ de E d'une famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de solutions de l'équation $x' = a(t)x$, la fonction $w_{\mathcal{B}} : I \to \mathbb{K}$ définie par : $w_{\mathcal{B}}(t) = \det_{\mathcal{B}}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$.

Remarque $w_{\mathcal{B}}(t) \neq 0 \Leftrightarrow (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ est une base de E.

Théorème

Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ un système fondamental de solution de l'équation $x' = a(t)x$.
On a équivalence entre :
(i) $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est un système fondamental de solutions :
(ii) $\forall t_0 \in I, \omega_{\mathcal{B}}(t_0) \neq 0$;
(iii) $\exists t_0 \in I, w_{\mathcal{B}}(t_0) \neq 0$.

dém. :
Rappelons que l'application $E_{t_0} : \mathcal{S}_0 \to E$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
Par suite $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de $\mathcal{S}_0$ si, et seulement si, la famille $(E_{t_0}(\varphi_1), \dots, E_{t_0}(\varphi_n)) = (\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0))$ est une base de E.
□

Corollaire

Ou bien un wronskien est la fonction nulle, ou bien il ne s'annule jamais.

Remarque Ainsi les valeurs prises en chaque $t_0 \in I$ par un système fondamental de solutions forment une base de E.

20.1.4.4 Résolution de l'équation complète

Théorème

> L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions sur I de (E) : $x' = a(t)x + b(t)$ est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, E)$ de direction $\mathcal{S}_0$ (et donc de dimension n)

dém. :
Les solutions sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ car dérivables et de dérivées continues donc $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}^1(I, E)$.
Par le théorème de Cauchy-linéaire on peut assurer l'existence d'au moins une solution $\tilde{x}$ à l'équation étudiée.
On a alors

$$x \in \mathcal{S} \Leftrightarrow x' - ax = \tilde{x}' - a\tilde{x} \Leftrightarrow (x - \tilde{x})' = a(x - \tilde{x})$$

et donc

$$x \in \mathcal{S} \Leftrightarrow x - \tilde{x} \in \mathcal{S}_0$$

Ainsi $\mathcal{S} = \tilde{x} + \mathcal{S}_0$ est un sous-espace affine de direction $\mathcal{S}_0$.
□

Remarque Pour résoudre (E) :
- on type l'équation (E) ;
- on résout l'équation homogène (E_0) ;
- on cherche une solution particulière ;
- on exprime la solution générale.

20.1.5 Méthode de variation des constantes

On cherche une solution à l'équation complète

$$x' = a(t)x + b(t)$$

Supposons connu $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ un système fondamental de solutions de l'équation homogène $x' = a(t)x$
La solution générale homogène est

$$x(t) = \lambda_1\varphi_1(t) + \cdots + \lambda_n\varphi_n(t)$$

Théorème

> On peut trouver par quadrature une solution particulière de l'équation $x' = a(t)x + b(t)$ de la forme
> $$x(t) = \lambda_1(t)\varphi_1(t) + \cdots + \lambda_n(t)\varphi_n(t)$$
> avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ fonctions dérivables.

dém. :
Soit $\mathcal{B}$ une base de E.

Posons $A(t) = \text{Mat}_{\mathcal{B}} a(t)$, $B(t) = \text{Mat}_{\mathcal{B}} b(t)$ et $X(t) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x(t))$.
L'équation $x' = a(t)x + b(t)$ équivaut à

$$X' = A(t)X + B(t)$$

Posons $X_j(t) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_j(t))$. On a

$$X_j'(t) = A(t)X_j(t)$$

Posons

$$W(t) = (X_1(t) \mid \ldots \mid X_n(t)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

En raisonnant par blocs, on observe

$$W'(t) = (X_1'(t) \mid \ldots \mid X_n'(t)) = (A(t)X_1(t) \mid \ldots \mid A(t)X_n(t)) = A(t)W(t)$$

Posons $\Lambda(t) = {}^t(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t))$ de sorte que

$$x(t) = \lambda_1(t)\varphi_1(t) + \cdots + \lambda_n(t)\varphi_n(t) \Leftrightarrow X(t) = W(t)\Lambda(t)$$

On a alors

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \Leftrightarrow W(t)\Lambda'(t) + W'(t)\Lambda(t) = A(t)W(t)\Lambda(t) + B(t)$$

puis

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \Leftrightarrow W(t)\Lambda'(t) = B(t)$$

Or $W(t)$ est inversible car $\det W(t) = w_{\mathcal{B}}(t) \neq 0$ donc

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \Leftrightarrow \Lambda'(t) = W(t)^{-1}B(t)$$

Enfin la fonction $t \mapsto W(t)^{-1}B(t)$ est continue, on peut donc déterminer par quadrature une fonction $t \mapsto \Lambda(t)$ telle que $\Lambda'(t) = W(t)^{-1}B(t)$ et alors $x(t) = \lambda_1(t)\varphi_1(t) + \cdots + \lambda_n(t)\varphi_n(t)$ est solution particulière de l'équation $x' = a(t)x + b(t)$.
□

20.2 Equation linéaire d'ordre 1 à coefficient constant

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$

20.2.1 Définition

Définition

> On appelle équation différentielle à valeurs dans E linéaire d'ordre 1 à coefficient constant définie sur I toute équation différentielle de la forme $x' = ax + b(t)$ avec $a \in \mathcal{L}(E)$, $t \mapsto b(t)$ continue de I vers E et d'inconnue $t \mapsto x(t)$ dérivable de I vers E.

Remarque Via l'introduction d'une base de E, une telle équation différentielle correspond :
- à une équation matricielle $X' = AX + B(t)$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;
- à un système différentiel

$$\begin{cases} x_1' = a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n + b_1(t) \\ \qquad\vdots \\ x_n' = a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,n}x_n + b_n(t) \end{cases} \quad \text{avec } a_{i,j} \in \mathbb{K}$$

Exemple Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3.
Soit $\vec{\omega} \in E$. On étudie l'équation $\vec{v}' = \vec{\omega} \wedge \vec{v}$ d'inconnue $\vec{v} : \mathbb{R} \to E$.
On forme une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec $\vec{\omega} = \omega.\vec{k}$.
En écrivant $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$:

$$\vec{v}' = \vec{\omega} \wedge \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -\omega y \\ y' = \omega x \\ z' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x'/\omega \\ -x''/\omega = \omega x \\ z = z_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' + \omega^2 x = 0 \\ y = -x'/\omega \\ z = z_0 \end{cases}$$

et donc la solution générale est

$$\begin{cases} x(t) = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t) \\ y(t) = \lambda \sin(\omega t) - \mu \cos(\omega t) \\ z(t) = z_0 \end{cases}$$

20.2.2 Résolution de l'équation homogène

Rappel Pour $a \in \mathcal{L}(E)$, $\exp(a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} a^k \in \mathcal{L}(E)$. En particulier $\exp(\tilde{0}) = \mathrm{Id}_E$.
Pour $a \in \mathcal{L}(E)$, l'application $t \mapsto \exp(ta)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\exp(ta)\right) = a \circ \exp(ta)$$

Théorème

Pour $a \in \mathcal{L}(E)$ et $x_0 \in E$, l'unique solution à l'équation $x' = ax$ vérifiant $x(0) = x_0$ est la fonction

$$x : t \mapsto \exp(ta)x_0$$

dém. :
Mettons de côté la notation d'opérateur pour cette démonstration.
$x(t) = [\exp(ta)]\,(x_0)$
$x(0) = [\exp(0.a)]\,(x_0) = \mathrm{Id}_E(x_0) = x_0$
$x(t) = B(\exp(ta), x_0)$ avec $B : \mathcal{L}(E) \times E \to E$ l'application bilinéaire déterminée par $B(u, x) = u(x)$.
Puisque la fonction $t \mapsto \exp(ta)$ est dérivable et $t \mapsto x_0$ est constante, la fonction $t \mapsto x(t)$ est dérivable et $x'(t) = B(a \circ \exp(ta), x_0) = a(\exp(ta)(x_0)) = a(x(t))$
□

Corollaire

L'espace $\mathcal{S}_0$ des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène $x' = ax$ est $\mathcal{S}_0 = \{t \mapsto \exp(ta)x_0 / x_0 \in E\}$.

Exemple Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E alors les application $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ définie par
$\varphi_i : t \mapsto \exp(ta)e_i$ forment un système fondamental de solutions.

20.2.3 Résolution pratique

La résolution de l'équation $x' = ax + b(t)$ se ramène à la détermination de $\exp(ta)$.
Il est alors pertinent d'opérer la réduction de l'endomorphisme a.

20.2.3.1 Cas diagonalisable

S'il existe une base $\mathcal{B}$ diagonalisant a alors dans cette base l'équation $x' = ax + b(t)$ équivaut au système différentiel :

$$\begin{cases} x_1' = \lambda_1 x_1 + b_1(t) \\ \dots \\ x_n' = \lambda_n x_n + b_n(t) \end{cases}$$

dont la résolution est immédiate

Exemple Résolvons

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 4x_2 + 1 \\ x_2' = 2x_1 - 3x_2 + t \end{cases}$$

C'est un système différentiel de taille 2 linéaire à coefficients constant d'équation matricielle $X' = AX + B(t)$ avec

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$$

Equation homogène : $X' = AX$.

$\chi_A = X^2 - 1$, $\mathrm{Sp}(A) = \{1, -1\}$, $E_1(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$X' = AX \Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X \Leftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X$$

Posons $Y = P^{-1}X$. On a $Y' = P^{-1}X'$ et donc

$$X' = AX \Leftrightarrow Y' = DY$$

Posons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

$$Y' = DY \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = -y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1(t) = \lambda_1 \mathrm{e}^t \\ y_2(t) = \lambda_2 \mathrm{e}^{-t} \end{cases} \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$$

$$X = PY \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \end{cases}$$

$$X' = AX \Leftrightarrow X(t) = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 \mathrm{e}^t + \lambda_2 \mathrm{e}^{-t} \\ \lambda_1 \mathrm{e}^t + \lambda_2 \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$$

$X_1(t) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$ et $X_2(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$ définissent un système fondamental de solutions.

Solution particulière :
$X(t) = \lambda_1(t)X_1(t) + \lambda_2(t)X_2(t)$ avec λ_1, λ_2 fonctions dérivables.

$$X' = AX + B(t) \Leftrightarrow \lambda_1'(t)X_1(t) + \lambda_2'(t)X_2(t) = B(t)$$

donc

$$X' = AX + B(t) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1'(t)\mathrm{e}^t + \lambda_2'(t)\mathrm{e}^{-t} = 1 \\ \lambda_1'(t)\mathrm{e}^t + \lambda_2'(t)\mathrm{e}^{-t} = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1'(t) = (1-t)\mathrm{e}^{-t} \\ \lambda_2'(t) = (2t-1)\mathrm{e}^t \end{cases}$$

$\lambda_1(t) = t\mathrm{e}^{-t}$ et $\lambda_2(t) = (2t-3)\mathrm{e}^t$ conviennent
$X(t) = \begin{pmatrix} 4t-3 \\ 3t-3 \end{pmatrix}$ est solution particulière.
Solution générale :

$$X(t) = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4t-3 \\ 3t-3 \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ i.e.

$$\begin{cases} x_1(t) = 2\lambda_1\mathrm{e}^t + \lambda_2\mathrm{e}^{-t} + 4t - 3 \\ x_2(t) = \lambda_1\mathrm{e}^t + \lambda_2\mathrm{e}^{-t} + 3t - 3 \end{cases} \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Exemple Résolvons

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases}$$

Système différentiel de taille 2 linéaire homogène à coefficients constants.
Equation matricielle : $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\chi_A(X) = (X-1)^2 + 1$.
Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
$\mathrm{Sp}(A) = \{1 \pm i\}$, $E_{1+i}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ et $E_{1-i}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

et donc

$$X' = AX \Leftrightarrow Y' = DY \text{ avec } Y = P^{-1}X$$

En écrivant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$,

$$Y' = DY \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = (1+i)y_1 \\ y_2' = (1-i)y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1(t) = \lambda_1\mathrm{e}^{(1+i)t} \\ y_2(t) = \lambda_2\mathrm{e}^{(1-i)t} \end{cases} \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$$

$X = PY = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$X' = AX \Leftrightarrow X(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathrm{e}^{(1+i)t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{(1-i)t} \\ -i\lambda_1 \mathrm{e}^{(1+i)t} + i\lambda_2 \mathrm{e}^{(1-i)t} \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$$

$X_1(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{(1+i)t} \\ -i\mathrm{e}^{(1+i)t} \end{pmatrix}$ et $X_2(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{(1-i)t} \\ i\mathrm{e}^{(1-i)t} \end{pmatrix}$ définissent un système fondamental de solutions.
Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:
(1) $X_1(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{(1+i)t} \\ -i\mathrm{e}^{(1+i)t} \end{pmatrix}$ est solution complexe de l'équation $X' = AX$ or la matrice A est réelle donc
$\mathrm{Re}(X_1(t)) = \begin{pmatrix} \cos(t)\mathrm{e}^t \\ \sin(t)\mathrm{e}^t \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Im}(X_1(t)) = \begin{pmatrix} \sin(t)\mathrm{e}^t \\ -\cos(t)\mathrm{e}^t \end{pmatrix}$ sont des solutions réelles de l'équation
$X' = AX$.
Puisque

$$w(t) = \begin{vmatrix} \cos(t)\mathrm{e}^t & \sin(t)\mathrm{e}^t \\ \sin(t)\mathrm{e}^t & -\cos(t)\mathrm{e}^t \end{vmatrix} = -\mathrm{e}^t \neq 0$$

ces deux solutions sont indépendantes et forment un système fondamental de solutions.
Solution générale

$$X(t) = \alpha \begin{pmatrix} \cos(t)\mathrm{e}^t \\ \sin(t)\mathrm{e}^t \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \sin(t)\mathrm{e}^t \\ -\cos(t)\mathrm{e}^t \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

(2) $\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 - x_1' \\ x_1' - x_1'' = x_1 + (x_1 - x_1') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 - x_1' \\ x_1'' - 2x_1' + 2x_1 = 0 \end{cases}$ qu'on sait résoudre…

20.2.3.2 Cas trigonalisable

S'il existe une base $\mathcal{B}$ réalisant la trigonalisation de a alors dans cette base l'équation $x' = ax + b(t)$ équivaut au système différentiel :

$$\begin{cases} x_1' = \lambda_1 x_1 + \star x_2 + \cdots + \star x_n + b_1(t) \\ \quad \ddots \\ x_{n-1}' = \lambda_{n-1} x_{n-1} + \star x_n + b_{n-1}(t) \\ x_n(t) = \lambda_n x_n + b_n(t) \end{cases}$$

qui se résout en cascade.

Remarque Dans le cadre complexe, tout endomorphisme est trigonalisable.
Dans le cadre réel, cela n'est plus vrai mais en plongeant le problème dans le cadre complexe, on peut mener une résolution complexe dont on déduira les solutions réelles comme dans l'exemple précédent.

Exemple Résolvons

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 + 2x_2 \\ x_2' = -2x_1 - x_2 \end{cases}$$

C'est un système différentielle linéaire d'ordre 1 homogène et à coefficients constant d'équation matricielle $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\chi_A(X) = (X-1)^2$.

$E_1(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

La matrice A est trigonalisable semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Posons $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On détermine C_2 tel que $AC_2 = C_2 + C_1$, $C_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient.

On a

$$A = PTP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$X' = AX \Leftrightarrow Y' = TY \text{ avec } Y = P^{-1}X$$

En posant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$,

$$Y' = TY \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1(t) = \lambda_1 \mathrm{e}^t + \lambda_2 t\mathrm{e}^t \\ y_2(t) = \lambda_2 \mathrm{e}^t \end{cases} \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$$

$X = PY = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$X' = AX \Leftrightarrow X(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathrm{e}^t + \lambda_2 (t + \frac{1}{2})\mathrm{e}^t \\ -\lambda_1 \mathrm{e}^t - \lambda_2 t\mathrm{e}^t \end{pmatrix}$$

20.3 Equations linéaires scalaires d'ordre 2

20.3.1 Définition

Définition

On appelle équation différentielle linéaire (scalaire) d'ordre 2 définie sur I toute équation de la forme

$$(E) : x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$$

avec $a, b, c : I \to \mathbb{K}$ continues et d'inconnue $x : I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable.

Exemple Lorsque les fonctions a et b sont constantes, on parle d'équation à coefficients constants.

Proposition

Les solutions de (E) sont de classe $\mathcal{C}^2$ et plus généralement de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ si a, b, c sont $\mathcal{C}^n$.

Lemme

On a équivalence entre
(i) x est solution sur I de l'équation $(E) : x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$;
(ii) x est le premier élément d'un couple (x, y) solution sur I du système différentiel :

$$(\Sigma) : \begin{cases} x' = y \\ y' = a(t)y + b(t)x + c(t) \end{cases}$$

dém. :
(i) $\Rightarrow$ (ii) Si x est solution sur I de l'équation alors le couple (x, x') est solution sur I du système.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Si x est le premier élément d'un couple (x, y) solution sur I du système alors $x' = y$ donc x est deux fois dérivable et pour tout $t \in I$,

$$x''(t) = y'(t) = a(t)y(t) + b(t)x(t) + c(t) = a(t)x'(t) + b(t)x(t) + c(t)$$

donc x est solution sur I de l'équation (E).
□

20.3.2 Problème de Cauchy.

Soient $a, b, c : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues.

Définition

Soient $t_0 \in I$ et $x_0, x_0' \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy consiste à déterminer les solutions de l'équation

$$(E) : x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$$

satisfaisant aux conditions initiales :

$$x(t_0) = x_0 \text{ et } x'(t_0) = x_0'$$

Théorème

Si $t_0 \in I$ et $x_0, x_0' \in \mathbb{K}$ alors il existe une unique solution sur I au problème de Cauchy l'équation

$$\begin{cases} x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_0' \end{cases}$$

dém. :
x est solution du problème de Cauchy posé si, et seulement si, x est le premier élément d'un couple (x, y) solution du système différentiel linéaire

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = a(t)y + b(t)x + c(t) \end{cases}$$

vérifiant la condition initiale
$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = x'_0 \end{cases}$$

□

20.3.3 Structure de l'ensemble des solutions

Soient $a, b, c : I \to \mathbb{K}$ continues. On étudie l'équation

$$(E) : x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$$

20.3.3.1 Équation homogène

Définition

L'équation $(E_0) : x'' = a(t)x' + b(t)x$ est appelée équation homogène associée à (E).

Théorème

L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions sur I de l'équation homogène $E_0 : x'' = a(t)x' + b(t)x$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ de dimension 2.

dém. :
Les solutions de l'équation homogène sont de classe $\mathcal{C}^2$ donc $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$.
La fonction nulle est évidemment solution de (E_0) et donc $\tilde{0} \in \mathcal{S}_0$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in \mathcal{S}_0$.

$$(\lambda x + \mu y)'' = \lambda x'' + \mu y'' = \lambda(a(t)x' + b(t)x) + \mu(a(t)y' + b(t))$$

donc

$$(\lambda x + \mu y)'' = \lambda x'' + \mu y'' = a(t)(\lambda x + \mu y)' + b(t)(\lambda x + \mu y) + c(t)$$

Ainsi $\lambda x + \mu y \in \mathcal{S}_0$ et donc $\mathcal{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$.
Soit $t_0 \in I$. Considérons $E_{t_0} : \mathcal{S}_0 \to \mathbb{K}^2$ définie par $E_{t_0}(x) = (x(t_0), x'(t_0))$.
L'application E_{t_0} est linéaire et par le théorème de Cauchy-linéaire, elle est bijective, c'est donc un isomorphisme. Par suite

$$\dim \mathcal{S}_0 = \dim \mathbb{K}^2 = 2$$

□

20.3.3.2 Système fondamental de solutions

Définition

On appelle système fondamental de solutions de l'équation homogène $x'' = a(t)x' + b(t)x$ toute base (φ, ψ) de l'espace $\mathcal{S}_0$.

Remarque Si (φ, ψ) est un système fondamental de solutions alors la solution générale de l'équation (E_0) est

$$x(t) = \lambda\varphi(t) + \mu\psi(t)$$

Exemple Les solutions φ, ψ de l'équation homogène vérifiant les conditions initiales

$$\begin{cases} \varphi(t_0) = 1 \\ \varphi'(t_0) = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \psi(t_0) = 0 \\ \psi'(t_0) = 1 \end{cases}$$

forment un système fondamental de solutions

Définition

On appelle wronskien d'une famille (φ, ψ) de solutions de l'équation homogène la fonction

$$t \mapsto w(t) = \begin{vmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix}$$

Théorème

Si φ, ψ sont solutions de l'équation homogène alors on a équivalence entre :
(i) (φ, ψ) est un système fondamental de solutions ;
(ii) $\forall t \in I, w(t) \neq 0$;
(iii) $\exists t_0 \in I, w(t_0) \neq 0$.

dém. :
Soit $t_0 \in I$, l'application $E_{t_0} : \mathcal{S}_0 \to \mathbb{K}^2$ définie par $E_{t_0}(x) = (x(t_0), x'(t_0))$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Par conséquent la famille (φ, ψ) est un système fondamental de solutions de (E_0) si, et seulement si, la famille $(E_{t_0}(\varphi), E_{t_0}(\psi))$ est une base de $\mathbb{K}^2$ i.e. si, et seulement si, $w(t_0) \neq 0$.
□

20.3.3.3 Équation linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants

Etudions l'équation

$$(E_0) : x'' + ax' + bx = 0$$

(E_0) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$ est solution de (E_0) si, et seulement si, λ est racine de l'équation caractéristique

$$r^2 + ar + b = 0$$

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Si $\Delta \neq 0$, 2 solutions α, β
$\varphi(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}$ et $\psi(t) = \mathrm{e}^{\beta t}$ sont solutions de (E_0).

$$w(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \beta - \alpha \neq 0$$

(φ, ψ) est un système fondamental de solutions de (E_0).
La solution générale est alors et

$$x(t) = \lambda \mathrm{e}^{\alpha t} + \mu \mathrm{e}^{\beta t} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

Si $\Delta = 0$, 1 solution double α
$\varphi(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}$ et (après calculs) $\psi(t) = t\mathrm{e}^{\alpha t}$ sont solutions de (E_0).

$$w(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

La solution générale est alors

$$x(t) = \lambda e^{\alpha t} + \mu t e^{\alpha t} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Si $\Delta > 0$ ou $\Delta \neq 0$: idem avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
Si $\Delta < 0$, 2 solutions conjuguées $\alpha \pm i\omega$ avec $\omega \neq 0$.
La fonction $t \mapsto e^{(\alpha+i\omega)t}$ est solution complexe de (E_0) donc ses parties réelle et imaginaire $\varphi(t) = e^{\alpha t}\cos(\omega t)$ et $\psi(t) = e^{\alpha t}\sin(\omega t)$ sont solutions réelles de (E_0).

$$\omega(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \omega \end{vmatrix} = \omega \neq 0$$

La solution générale est alors

$$x(t) = (\lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t))e^{\alpha t} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

20.3.3.4 Équation complète

Théorème

L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions sur I de l'équation complète $x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$ est un plan affine de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ de direction $\mathcal{S}_0$.

dém. :
Les solutions sur I de l'équation complète sont de classe $\mathcal{C}^2$ donc $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$.
Par le théorème de Cauchy-linéaire on peut assurer l'existence d'une solution $\tilde{x}$.
Pour $x \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$

$$x \in \mathcal{S} \Leftrightarrow x'' - ax' - bx = c \Leftrightarrow (x - \tilde{x})'' = a(x - \tilde{x})' + b(x - \tilde{x})$$

et donc

$$x \in \mathcal{S} \Leftrightarrow x - \tilde{x} \in \mathcal{S}_0 \Leftrightarrow x \in \tilde{x} + \mathcal{S}_0$$

Ainsi l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions sur I est un sous-espace affine de direction $\mathcal{S}_0$.
□

Remarque Pour résoudre $x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$:
- on type l'équation ;
- on résout l'équation homogène ;
- on détermine une solution particulière ;
- on exprime la solution générale.

Rappel Considérons l'équation $y'' + ay' + by = P(t)e^{\alpha t}$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$.
On peut trouver par coefficients inconnus une solution particulière de la forme

$$y(t) = \begin{cases} Q(t)e^{\alpha t} & \text{si } \alpha \text{ n'est pas racine de } r^2 + ar + b = 0 \\ tQ(t)e^{\alpha t} & \text{si } \alpha \text{ est racine simple de } r^2 + ar + b = 0 \\ t^2Q(t)e^{\alpha t} & \text{si } \alpha \text{ est racine double de } r^2 + ar + b = 0 \end{cases}$$

avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg Q = \deg P$.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et le second membre de la forme $P(t)\cos(\omega t)$ ou $P(t)\sin(\omega t)$ on peut aussi trouver une solution particulière en étudiant l'équation complexe

$$z'' + az' + bz = P(t)e^{i\omega t}$$

et en considérant la partie réelle ou imaginaire d'une solution particulière.

20.3.4 Méthode de la variation des constantes

Soient $a, b, c : I \to \mathbb{K}$ continues.
On cherche une solution particulière de l'équation

$$x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$$

Supposons connu un système fondamental (φ, ψ) de solutions de l'équation homogène $x'' = a(t)x' + b(t)x$.
La solution générale de l'équation homogène est

$$x(t) = \lambda\varphi(t) + \mu\psi(t)$$

Théorème

Par quadrature, on peut trouver une solution particulière sur I de l'équation

$$(E) : x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$$

de la forme

$$x(t) = \lambda(t)\varphi(t) + \mu(t)\psi(t)$$

avec $\lambda, \mu : I \to \mathbb{K}$ fonctions dérivables vérifiant :

$$\begin{cases} \lambda'(t)\varphi(t) + \mu'(t)\psi(t) = 0 \\ \lambda'(t)\varphi'(t) + \mu'(t)\psi'(t) = c(t) \end{cases}$$

dém. :
Le système proposé est de Cramer car de déterminant

$$\begin{vmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} = w(t) \neq 0$$

On peut donc trouver des fonctions λ et μ dérivables vérifiant

$$\lambda'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \psi(t) \\ c(t) & \psi'(t) \end{vmatrix}}{w(t)} \text{ et } \mu'(t) = \frac{\begin{vmatrix} \varphi(t) & 0 \\ \varphi'(t) & c(t) \end{vmatrix}}{w(t)}$$

Considérons alors la fonction $x = \lambda\varphi + \mu\psi$.
x est dérivable et $x' = (\lambda'\varphi + \mu'\psi) + (\lambda\varphi' + \mu\psi')$
Puisque $\lambda'\varphi + \mu'\psi = 0$, on simplifie $x' = \lambda\varphi' + \mu\psi'$.
x est alors deux fois dérivable et $x'' = \lambda'\varphi' + \mu'\psi' + \lambda\varphi'' + \mu\psi''$.
On vérifie alors $x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$ puisque φ, ψ sont solutions de l'équation homogène et $\lambda'\varphi' + \mu'\psi' = c$
□

Exemple Résolvons

$$y'' - 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^2}$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

Equation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0$ de racine double 1.
Solution générale homogène $y(t) = (\lambda t + \mu)\mathrm{e}^t$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Solution particulière $y(t) = \lambda(t)t\mathrm{e}^t + \mu(t)\mathrm{e}^t$ avec λ, μ fonction dérivables.
$y'(t) = \lambda'(t)t\mathrm{e}^t + \mu'(t)\mathrm{e}^t + \lambda(t)(t+1)\mathrm{e}^t + \mu(t)\mathrm{e}^t$.
On pose $\lambda'(t)t\mathrm{e}^t + \mu'(t)\mathrm{e}^t = 0$.
$y''(t) = \lambda'(t)(t+1)\mathrm{e}^t + \mu'(t)\mathrm{e}^t + \lambda(t)(t+2)\mathrm{e}^t + \mu(t)\mathrm{e}^t$.
$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t}{1+t^2}$ si, et seulement si, $\lambda'(t)(t+1)\mathrm{e}^t + \mu'(t)\mathrm{e}^t = \dfrac{\mathrm{e}^t}{1+t^2}$.
Résolvons

$$\begin{cases} \lambda'(t)t\mathrm{e}^t + \mu'(t)\mathrm{e}^t = 0 \\ \lambda'(t)(t+1)\mathrm{e}^t + \mu'(t)\mathrm{e}^t = \dfrac{\mathrm{e}^t}{1+t^2} \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{cases} \lambda'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \\ \mu'(t) = -\dfrac{t}{1+t^2} \end{cases}$$

$\lambda(t) = \arctan t$ et $\mu(t) = -\dfrac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)$ conviennent.
Solution particulière

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(2t\arctan(t) - \ln(1+t^2)\right)\mathrm{e}^t$$

Solution génératrice

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(2t\arctan(t) - \ln(1+t^2)\right)\mathrm{e}^t + \lambda t\mathrm{e}^t + \mu\mathrm{e}^t \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Exemple Résolvons $y'' + y = f(t)$ avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
Equation caractéristique $r^2 + 1 = 0$ de racines $\pm i$.
Solution générale homogène $y(t) = \lambda\cos(t) + \mu\sin(t)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Solution particulière

$$y(t) = \lambda(t)\cos(t) + \mu(t)\sin(t)$$

avec λ et μ fonctions dérivables solutions du système

$$\begin{cases} \lambda'(t)\cos t + \mu'(t)\sin t = 0 \\ -\lambda'(t)\sin t + \mu'(t)\cos t = f(t) \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{cases} \lambda'(t) = -\sin(t)f(t) \\ \mu'(t) = \cos(t)f(t) \end{cases}$$

Pour

$$\lambda(t) = -\int_0^t \sin(u)f(u)\,\mathrm{d}u \text{ et } \mu(t) = \int_0^t f(u)\cos(u)\,\mathrm{d}u$$

on a

$$y(t) = \lambda(t)\cos(t) + \mu(t)\sin(t) = \int_0^t \sin(t-u)f(u)\,\mathrm{d}u$$

solution particulière.
Solution générale

$$y(t) = \int_0^t \sin(t-u) f(u)\,\mathrm{d}u + \lambda\cos(t) + \mu\sin(t) \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

20.3.5 Résolution pratique de l'équation homogène

En dehors des équations à coefficients constants, il n'y a pas de méthode systématique (et surtout pas d'équation caractéristique).

20.3.5.1 Recherche de solutions polynomiales

Exemple Résolvons

$$(E) : (t^2+2t+2)y'' - 2(t+1)y'(t) + 2y(t) = 0$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t^2+2t+2 \neq 0$ donc (E) est équivalente à une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène définie sur $\mathbb{R}$.
Recherchons les fonctions polynomiales solutions.
Soit $y(t) = t^n + \cdots$ une fonction polynomiale.

$$(t^2+2t+2)y'' - 2(t+1)y'(t) + 2y(t) = (n(n-1) - 2n + 2)t^n + \cdots$$

Si y est solution de (E) alors $n^2 - 3n + 2 = 0$ donc $n = 1$ ou 2.
On recherche désormais y de la forme $y(t) = at^2 + bt + c$.

$$(t^2+2t+2)y'' - 2(t+1)y'(t) + 2y(t) = 2(c - b + 2a)$$

$y(t) = at^2 + bt + c$ est solution de $(E) \Leftrightarrow c = b - 2a \Leftrightarrow y(t) = a(t^2-2) + b(t+1)$
Posons $\varphi(t) = t^2 - 2$ et $\psi(t) = t + 1$.
φ et ψ sont solutions de (E), elles sont visiblement indépendantes, elles forment donc un système fondamental de solutions.
Solution générale de (E) :

$$y(t) = \lambda(t^2-2) + \mu(t+1) \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

20.3.5.2 Recherche de solutions développables en séries entières

Exemple Résolvons

$$(E) : (1+t^2)y'' + 4ty' + 2y = 0$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1 + t^2 \neq 0$ donc (E) est équivalente à une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène définie sur $\mathbb{R}$.
Recherchons les fonctions développables en série entière au voisinage de 0.
Analyse :
Soit y la somme de la série entière $\sum a_n t^n$ de rayon de convergence $R > 0$.
Sur $]-R, R[$,

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n,\ y'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}$$

et

$$y''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}t^n$$

ce qui donne

$$(1+t^2)y'' + 4ty' + 2y = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)(a_{n+2}+a_n)t^n$$

Par identification des coefficients de séries entières égales au voisinage de 0

$$\forall t \in \left]-R, R\right[, \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)(a_{n+2}+a_n)t^n = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, (n+2)(n+1)(a_{n+2}+a_n) = 0$$

Ainsi y est solution de (E) sur $\left]-R, R\right[$ si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} + a_n = 0$$

On a alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p} = (-1)^p a_0$ et $a_{2p+1} = (-1)^p a_1$ puis par absolue convergence

$$y(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p}t^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1}t^{2p+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} a_0(-1)^p t^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} a_1(-1)^p t^{2p+1}$$

ce qui donne

$$y(t) = \frac{a_0}{1+t^2} + \frac{a_1 t}{1+t^2}$$

Synthèse :
Soient $\varphi(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ et $\psi(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$.
φ est développable en série entière sur $\left]-1,1\right[$ et par les calculs qui précèdent est solutions de l'équation différentielle (E) sur $\left]-1,1\right[$.
Or $(1+t^2)\varphi''(t) + 4t\varphi'(t) + 2\varphi(t)$ est une fonction rationnelle et puisqu'elle est nulle sur $\left]-1,1\right[$, elle l'est aussi sur $\mathbb{R}$. Ainsi φ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Il en est de même pour ψ.
Enfin φ et ψ sont deux solutions indépendantes donc elles forment un système fondamental de solutions de (E).
Solution générale :

$$y(t) = \frac{\lambda + \mu t}{1+t^2} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

20.3.5.3 Méthode de Lagrange

On étudie l'équation homogène $x'' = a(t)x' + b(t)x$ avec $a, b : I \to \mathbb{K}$ continues.
Supposons connue une solution φ ne s'annulant pas sur I.

Théorème

> Par quadrature, on peut trouver une solution indépendante de φ de la forme
>
> $$x(t) = \lambda(t)\varphi(t)$$
>
> avec λ fonction deux fois dérivable non constante.

dém. :
Si $x = \lambda\varphi$ alors $x' = \lambda'\varphi + \lambda\varphi'$ et $x'' = \lambda''\varphi + 2\lambda'\varphi' + \lambda\varphi''$ de sorte que

$$x'' = ax' + bx \Leftrightarrow \lambda''\varphi + (2\varphi' - a\varphi)\lambda' = 0$$

Ce qui nous conduit à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 en l'inconnue λ'.
□

Exemple Résolvons
$$(E) : (1+t^2)y'' - 2y = 0$$

E est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène définie et résoluble sur $\mathbb{R}$ car $1 + t^2 \neq 0$.
$\varphi(t) = 1 + t^2$ est solution polynomiale particulière.
Considérons $y(t) = (1+t^2)\lambda(t)$ avec λ fonction deux fois dérivable.

$$(1+t^2)y'' - 2y = 0 \Leftrightarrow (1+t^2)^2\lambda''(t) + 4t(1+t^2)\lambda'(t)$$

y est solution de E si, et seulement si, $(1+t^2)\lambda'' + 4t\lambda' = 0$.
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 en l'inconnue λ'.
$\lambda'(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)^2}$ convient.
Or $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}\arctan t + \frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2}$
Donc $\lambda(t) = \dfrac{1}{2}\left(\arctan t + \dfrac{t}{1+t^2}\right)$ convient puis $y(t) = \dfrac{1}{2}\left((1+t^2)\arctan t + t\right)$ est solution.
$\varphi(t) = 1 + t^2$ et $\psi(t) = \dfrac{1}{2}\left((1+t^2)\arctan t + t\right)$ définissent un système fondamental de solutions.
Solution générale :

$$y(t) = \lambda(1+t^2) + \mu\left((1+t^2)\arctan t + t\right) \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Remarque Cette démarche peut aussi être utilisée pour trouver une solution particulière d'une équation $x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$ de la forme $x(t) = \lambda(t)\varphi(t)$ avec λ fonction deux fois dérivable.
Ceci offre une alternative à la méthode de la variation des constantes lorsqu'on connaît une solution homogène φ ne s'annulant pas.

20.3.6 Autres démarches

20.3.6.1 Changement de fonction inconnue

Exemple Résolvons
$$(E) : (1+t^2)y'' + 4ty' + (1-t^2)y = 0$$

en posant $z = (1+t^2)y$.
Soient $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $z(t) = (1+t^2)y(t)$.
z est deux fois dérivable

$$z(t) = (1+t^2)y(t)$$
$$z'(t) = (1+t^2)y'(t) + 2ty(t)$$
$$z''(t) = (1+t^2)y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t)$$

On remarque
$$(1+t^2)y''(t)+4ty'(t)+(1-t^2)y(t)=z''(t)-z(t)$$
donc
$$y \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \Leftrightarrow z \text{ est solution sur } \mathbb{R} \text{ de } (E') : z''-z=0$$
(E') est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants.
Solution générale
$$z(t)=\lambda \mathrm{e}^t+\mu \mathrm{e}^{-t}$$
et
$$y(t)=\frac{\lambda \mathrm{e}^t+\mu \mathrm{e}^{-t}}{1+t^2} \text{ avec } \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

20.3.6.2 Changement de variable

Exemple Résolvons
$$(E) : (1+t^2)^2y''+2t(1+t^2)y'+y=0$$
via le changement de variable $u=\arctan t$.
Commençons par étudier le changement de variable : il s'agit d'exprimer la fonction donnant l'ancienne variable en fonction de la nouvelle. On a
$$u=\arctan t \Leftrightarrow t=\tan u$$
L'application $\varphi : I=\left]-\pi/2,\pi/2\right[\to\mathbb{R}$ définie par $\varphi(u)=\tan u$ est $\mathcal{C}^2$ difféomorphisme.
Soit $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable.
Considérons z la fonction définie de sorte que
$$\text{« } z(u)=y(t) \text{ »}$$
Précisément, $z : I\to\mathbb{R}$ est la fonction définie sur I par
$$z(u)=y(\tan u)$$
La fonction $z=y\circ\varphi$ est deux fois dérivable.
$$y(t)=z(\arctan t)$$
$$y'(t)=\frac{1}{1+t^2}z'(\arctan t)$$
$$y''(t)=\frac{1}{(1+t^2)^2}z''(\arctan t)-\frac{2t}{(1+t^2)}z'(\arctan t)$$
On remarque que
$$(1+t^2)^2y''(t)+2t(1+t^2)y'(t)+y(t)=\left[z''(u)+z(u)\right]_{u=\arctan t}$$
Ainsi
y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R}, (1+t^2)^2y''(t)+2t(1+t^2)y'(t)+y(t)=0$
$\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R}, z''(\arctan t)+z(\arctan t)=0$
$\Leftrightarrow \forall u\in I, z''(u)+z(u)=0.$

Ainsi y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, z est solution sur I de $(E') : z'' + z = 0$.
(E') est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants de solution générale

$$z(u) = \lambda \cos(u) + \mu \sin(u)$$

On en déduit la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$

$$y(t) = z(\arctan t) = \frac{\lambda + \mu t}{\sqrt{1+t^2}}$$

20.4 L'épineux problème des raccords

20.4.1 Rappel

Théorème

Soient $a \in I$ et $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$.
Si $f'(t) \xrightarrow[t \to a^+]{} \ell \in \mathbb{R}$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.
Si $f'(t) \xrightarrow[t \to a^+]{} +\infty$ (ou $-\infty$) alors f n'est pas dérivable en a mais y présente une tangente verticale.

dém. :
Supposons $f'(t) \xrightarrow[t \to a]{} \ell \in \bar{\mathbb{R}}$.
Quand $h \to 0^+$, on étudie la limite du taux de variation

$$\frac{1}{h}\left(f(a+h) - f(a)\right)$$

En appliquant le théorème des accroissements finis entre a et $a+h$, il existe c_h compris entre a et $a+h$ tel que

$$f(a+h) - f(a) = f'(c_h)h$$

et alors

$$\frac{1}{h}\left(f(a+h) - f(a)\right) = f'(c_h) \to \ell$$

car $c_h \to a$ par encadrement.
□

Corollaire

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ continue sur $[a,b]$ et $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b]$.
Si $f'(t) \xrightarrow[t \to a^+]{} \ell \in \mathbb{K}$ alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$

20.4.2 Résolution de l'équation $a(t)y' + b(t)y = c(t)$

Soient $a, b, c : I \to \mathbb{K}$ continues. On étudie l'équation différentielle

$$(E) : a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

Si a ne s'annule pas sur I alors l'équation (E) est équivalente à

$$y' = \alpha(t)y + \beta(t) \text{ avec } \alpha = -b/a \text{ et } \beta = c/a \text{ qu'on sait résoudre}$$

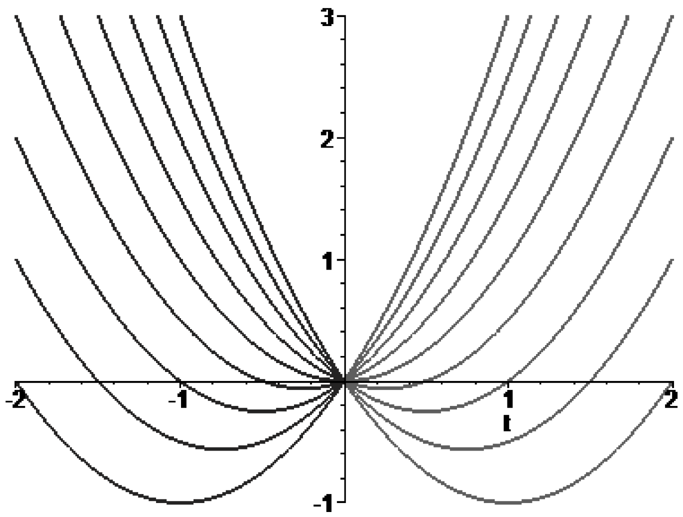
Si a s'annule alors
- on commence par résoudre (E) sur les plus grands intervalles $J \subset I$ sur lesquels a ne s'annule pas ;
- on procède ensuite au raccord des solutions aux points où a s'annule.

Pour raccorder les solutions en un point t_0 où a s'annule :
- on exprime une solution à droite et à gauche de t_0 ;
- on étudie s'il est possible de la prolonger par continuité en t_0 ;
- on étudie si ce prolongement est dérivable en t_0 ;
- on vérifie que l'équation différentielle est alors satisfaite en t_0..

Exemple Résolvons l'équation (E) : $ty' - y = t^2$ sur $\mathbb{R}$.
Sur $I = \mathbb{R}^{+\star}$ ou $\mathbb{R}^{-\star}$: $(E) \Leftrightarrow y' - \frac{1}{t}y = t$.
C'est une équation linéaire d'ordre 1.
Solution générale sur I : $y(t) = t^2 + \lambda t$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Déterminons les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.
Soit y : $\mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$ une solution de (E) sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $\mathbb{R}^{-\star}$.
Il existe $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t > 0, y(t) = t^2 + \lambda t \text{ et } \forall t < 0, y(t) = t^2 + \lambda' t$$

A quelle(s) condition(s) sur λ et λ' peut-on prolonger y en 0 pour obtenir une solution sur $\mathbb{R}$?
Continuité en 0 :
Quand $t \to 0^+$, $y(t) = t^2 + \lambda t \to 0$.
Quand $t \to 0^-$, $y(t) = t^2 + \lambda' t \to 0$.
Le prolongement en 0 est possible avec $y(0) = 0$ sans conditions sur λ, λ'.
Dérivabilité en 0 :
Quand $t \to 0^+$, $y'(t) = 2t + \lambda \to \lambda$ donc $y'_d(0) = \lambda$.
Quand $t \to 0^-$, $y'(t) = 2t + \lambda' \to \lambda'$ donc $y'_d(0) = \lambda'$.
Le prolongement en 0 est dérivable si, et seulement si, $\lambda = \lambda'$ et alors $y'(0) = \lambda$
Equation différentielle en 0 :
$0y'(0) - y(0) = 0$: ok.
Finalement :
Solution générale sur $\mathbb{R}$: $y(t) = t^2 + \lambda t$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

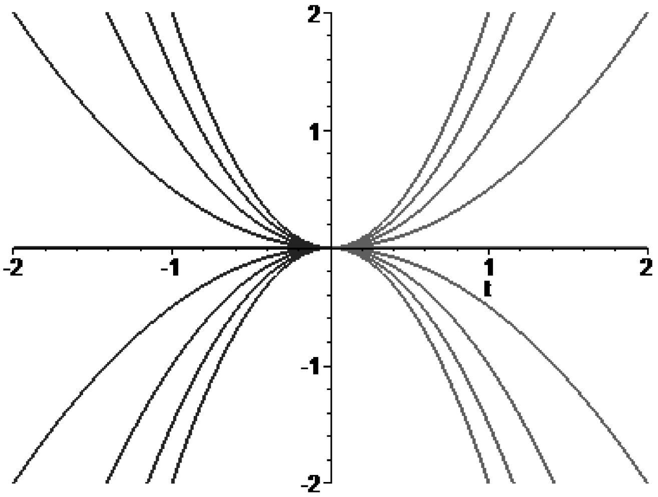


Exemple Résolvons l'équation $(E) : ty' - 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
Sur $I = \mathbb{R}^{+\star}$ ou $\mathbb{R}^{-\star}$, $(E) \Leftrightarrow y' = \frac{2}{t}y$.
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
Solution générale sur I, $y(t) = \lambda t^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Recherchons les solutions sur $\mathbb{R}$.
Soit $y : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$ une fonction solution sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $\mathbb{R}^{-\star}$.
Il existe $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t > 0, y(t) = \lambda t^2 \text{ et } \forall t < 0, y(t) = \lambda' t^2$$

A quelle(s) condition(s) sur λ et λ' peut-on prolonger y en 0 pour obtenir une solution sur $\mathbb{R}$?
Continuité en 0 :
Quand $t \to 0^+$, $y(t) = \lambda t^2 \to 0$.
Quand $t \to 0^-$, $y(t) = \lambda' t^2 \to 0$.
On peut prolonger y par continuité en 0 par $y(0) = 0$ sans conditions sur λ, λ'.
Quand $t \to 0^+$, $y'(t) = 2\lambda t \to 0$ donc $y'_d(0) = 0$.
Quand $t \to 0^-$, $y(t) = 2\lambda' t \to 0$ donc $y'_g(0) = 0$
Le prolongement en 0 est dérivable avec $y'(0) = 0$ sans conditions sur λ, λ'.
Equation différentielle en 0 :
$0y'(0) - 2y(0) = 0$: ok.
Finalement :
Solution générale sur $\mathbb{R}$

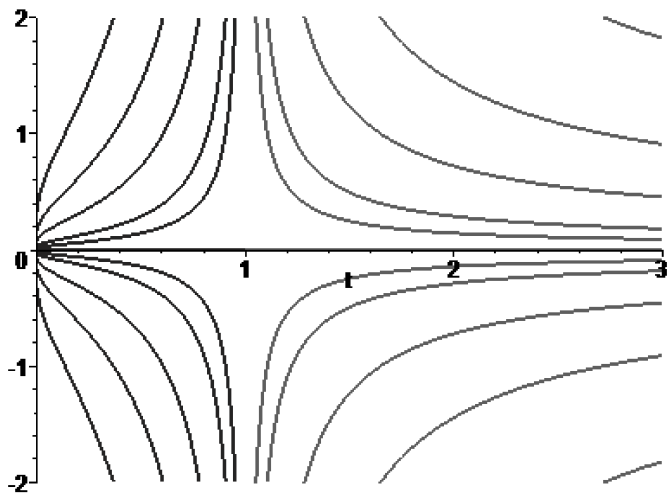
$$y(t) = \begin{cases} \lambda t^2 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ \lambda' t^2 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad \text{avec } \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$$



Exemple Résolvons l'équation $(E) : t\ln(t)y' + y = 0$ sur $]0, +\infty[$.
Sur $I =]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$, $(E) \Leftrightarrow y' = -\dfrac{1}{t\ln t}y$.
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène.
Solution générale sur I, $y(t) = \dfrac{\lambda}{\ln t}$.
Recherchons les solutions sur $]0, +\infty[$.
Soit $y :]0, 1[\cup]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une solution sur $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.
Il existe $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in]0, 1[\,, y(t) = \frac{\lambda}{\ln t} \text{ et } \forall t > 1, y(t) = \frac{\lambda'}{\ln t}$$

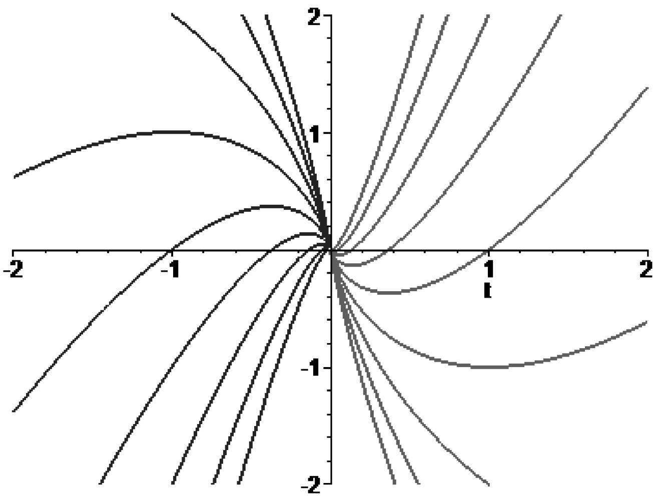
Continuité en 1 :
Quand $t \to 1^+$, $y(t) \to \begin{cases} +\infty & \text{si } \lambda' > 0 \\ 0 & \text{si } \lambda' = 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda' < 0 \end{cases}$.
Quand $t \to 1^-$, $y(t) \to \begin{cases} -\infty & \text{si } \lambda > 0 \\ 0 & \text{si } \lambda = 0 \\ +\infty & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$
Le prolongement par continuité en 1 n'est possible que si $\lambda = \lambda' = 0$ et alors $y(t) = 0$ sur $]0, +\infty[$.
Inversement, cette fonction est évidemment solution sur $]0, +\infty[$
Solution générale sur $]0, +\infty[$: $y(t) = 0$.



Exemple Résolvons l'équation $(E) : ty' - y = t$ sur $\mathbb{R}$.
Sur $I = \mathbb{R}^{+\star}$ ou $\mathbb{R}^{-\star}$, $(E) \Leftrightarrow y' = \dfrac{1}{t}y + 1$.
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
Solution générale sur I, $y(t) = t\ln|t| + \lambda t$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Recherchons les solutions sur $\mathbb{R}$.
Soit $y : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$ une fonction solution sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $\mathbb{R}^{-\star}$.
Il existe $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t > 0, y(t) = t\ln t + \lambda t \text{ et } \forall t < 0, y(t) = t\ln(-t) + \lambda' t$$

A quelle(s) condition(s) sur λ et λ' peut-on prolonger y en 0 pour obtenir une solution sur $\mathbb{R}$?
Continuité en 0 :
Quand $t \to 0^+$, $y(t) = t\ln t + \lambda t \to 0$.
Quand $t \to 0^-$, $y(t) = t\ln|t| + \lambda' t \to 0$.
On peut prolonger y par continuité en 0 par $y(0) = 0$ sans conditions sur λ, λ'.
Quand $t \to 0^+$, $y'(t) = \lambda + 1 + \ln t \to -\infty$.
Le prolongement en 0 n'est pas être dérivable en 0.
Il n'y a pas de solutions sur $\mathbb{R}$ à l'équation (E)



20.4.3 Résolution de l'équation $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t)$

La problématique est identique, cependant les raccords aux points où a s'annule s'obtiennent en étudiant la dérivabilité jusqu'à l'ordre 2.

Exemple Résolvons l'équation (E) : $(t-1)y'' - ty' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
Sur $I =]-\infty, 1[$ ou $]1, +\infty[$:

$$(E) \Leftrightarrow y'' - \frac{t}{t-1}y' + \frac{1}{t-1}y = 0$$

C'est une équation linéaire homogène d'ordre 2.
$t \mapsto t$ et $t \mapsto \mathrm{e}^t$ sont solutions linéairement indépendantes donc forment un système fondamental de solutions sur $\mathbb{R}$.
La solution générale sur I est $y(t) = \lambda t + \mu \mathrm{e}^t$.
Notons que l'argument ne vaut pas sur $I = \mathbb{R}$, car on ne sait pas a priori si l'espace des solutions de (E) est de dimension 2.
Déterminons les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$:
Soit $y : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ une solution sur $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.
Il existe $\lambda, \lambda', \mu, \mu' \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t > 1, y(t) = \lambda t + \mu \mathrm{e}^t \text{ et } \forall t < 1, y(t) = \lambda' t + \mu' \mathrm{e}^t$$

Continuité en 1 :
Quand $t \to 1^+$, $y(t) \to \lambda + \mu \mathrm{e}$.
Quand $t \to 1^-$, $y(t) \to \lambda' + \mu' \mathrm{e}$.
On peut prolonger y en 1 si, et seulement si, $\lambda + \mu \mathrm{e} = \lambda' + \mu' \mathrm{e}$ et alors $y(1) = \lambda + \mu \mathrm{e}$.
Dérivabilité en 1 :
Quand $t \to 1^+$, $y'(t) = \lambda + \mu \mathrm{e}^t \to \lambda + \mu \mathrm{e}$ donc $y'_d(1) = \lambda + \mu \mathrm{e}$
Quand $t \to 1^-$, $y'(t) = \lambda' + \mu' \mathrm{e}^t \to \lambda' + \mu' \mathrm{e}$ donc $y'_g(1) = \lambda + \mu \mathrm{e}$
Le prolongement par continuité en 1 est dérivable et $y'(1) = \lambda + \mu \mathrm{e}$.
Dérivabilité à l'ordre 2 en 1 :

Quand $t \to 1^+$, $y''(t) = \mu \mathrm{e}^t \to \mu \mathrm{e}$.
Quand $t \to 1^-$, $y''(t) = \mu' \mathrm{e}^t = \mu' \mathrm{e}$.
Le prolongement est dérivable à l'ordre 2 en 1 si, et seulement si, $\mu = \mu'$ et alors $\lambda = \lambda'$ et $y''(1) = \mu$.
Vérification de l'équation différentielle en 1 :
$0y''(1) - y'(1) + y(1) = 0$: ok
Finalement :
Solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ $y(t) = \lambda t + \mu \mathrm{e}^t$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Remarque Comme pour les équations d'ordre 1 différents comportements sont possibles lors des raccords.
Par exemple, pour l'équation différentielle $t^2 y'' + ty' - y = 0$, la solution générale sur $\mathbb{R}^{+\star}$ ou sur $\mathbb{R}^{-\star}$ est $y(t) = \lambda t + \mu/t$ et la solution générale sur $\mathbb{R}$ est $y(t) = \lambda t$.

Chapitre 21

Equations différentielles non linéaires

Les fonctions considérées ici sont à valeurs réelles.

21.1 Equation d'ordre 1 résolue en y'

21.1.1 Solution

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ continue. On étudie l'équation différentielle

$$(E) : y' = f(x, y)$$

Définition

On appelle solution de (E) tout couple (I, y) formé d'un intervalle d'intérieur non vide I et d'une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ dérivable vérifiant :
1) $\forall x \in I, (x, y(x)) \in U$;
2) $\forall x \in I, y'(x) = f(x, y(x))$.
On dit encore que y est une solution de E sur I.

Remarque Une solution de (E) sur I est nécessairement une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Exemple Considérons $y : x \mapsto \tan x^2$ définie sur $I = \left]-\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2}\right[$.
(I, y) est une solution de l'équation

$$y' = 2x(1 + y^2)$$

Proposition

Si (I, y) est une solution de (E) alors pour tout intervalle d'intérieur non vide $J \subset I$, $(J, y_{\restriction J})$ est aussi solution de (E).

Définition

Une solution de (E) est dite maximale si elle ne peut pas être prolongée en une solution définie sur un intervalle strictement plus grand.

Exemple $y : x \mapsto \tan x^2$ sur $I = \left]-\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2}\right[$ est solution maximale car $y(x) \xrightarrow[x\to\pm\sqrt{\pi/2}]{} +\infty$.

Exemple Une solution définie sur $\mathbb{R}$ est une solution maximale.

Proposition

Toute solution de (E) peut être prolongée en une solution maximale (admis).

21.1.2 Courbe intégrale

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ continue. On étudie l'équation différentielle

$$(E) : y' = f(x, y)$$

Définition

On appelle courbe intégrale de (E) tout graphe dans $\mathbb{R}^2$ d'une solution maximale de (E).

Théorème

Les courbes intégrales de (E) sont tangentes au champ de vecteurs

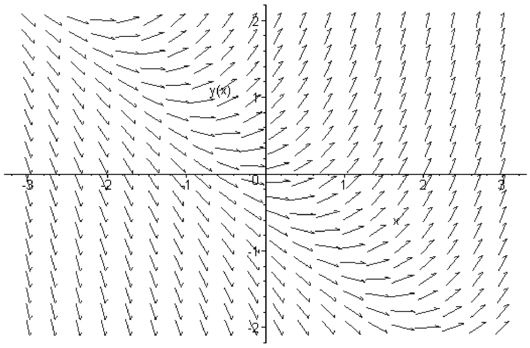
$$\begin{cases} U & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (1, f(x,y)) \end{cases}$$

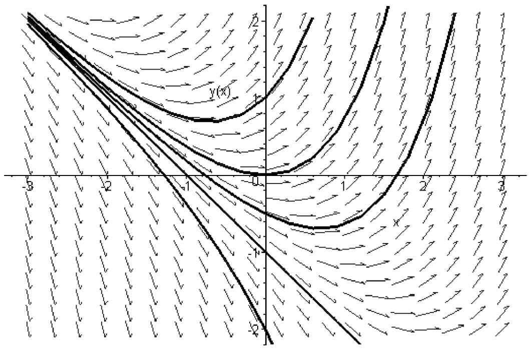
dém. :
Soit (I, y) une solution maximale de (E).
Si (x_0, y_0) est un point de la courbe intégrale définie par (I, y) alors $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ de sorte

□

Remarque On peut anticiper l'allure des courbes intégrales en visualisant le champ de vecteurs proposé.

Exemple Champ de vecteurs et quelques courbes intégrales associées à l'équation différentielle $y' = x + y$.





21.1.3 Problème de Cauchy

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ continue. On étudie l'équation différentielle

$$(E) : y' = f(x, y)$$

Soit $(x_0, y_0) \in U$

Définition

Le problème de Cauchy consiste à déterminer les solutions de l'équation $y' = f(x, y)$ satisfaisant la condition initiale : $y(x_0) = y_0$.

Exemple Si $y' + a(x)y = b(x)$ est une équation linéaire définie sur I alors pour tout $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution sur I.

Proposition

Soit $y : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On a équivalence entre :
(i) y est solution sur I du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

(ii) y vérifie

$$\forall x \in I, y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t$$

dém. :
(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons (i)
Puisque la fonction y est de classe $\mathcal{C}^1$,

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} y'(t)\,\mathrm{d}t$$

donc

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons (ii)

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t = y_0$$

et puisque

$$x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t$$

est dérivable, y est dérivable avec $y'(x) = f(x, y(x))$.
□

Théorème

[Cauchy-Lipschitz]
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Si U est ouvert et si f y est de classe $\mathcal{C}^1$ alors pour tout $(x_0, y_0) \in U$, il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

possède une unique solution maximale.
De plus, celle-ci est définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 et toute autre solution de ce problème de Cauchy est restriction de cette solution maximale (admis).

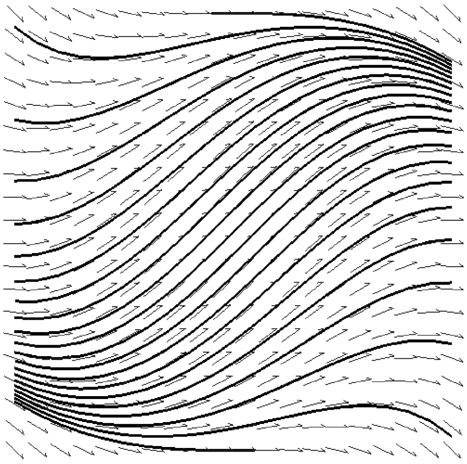
Corollaire

Les courbes intégrales de l'équation différentielle $(E) : y' = f(x, y)$ constituent alors une partition de l'ouvert U.

dém. :
Par l'existence du théorème précédent, par tout point de U il passe une courbe intégrale.

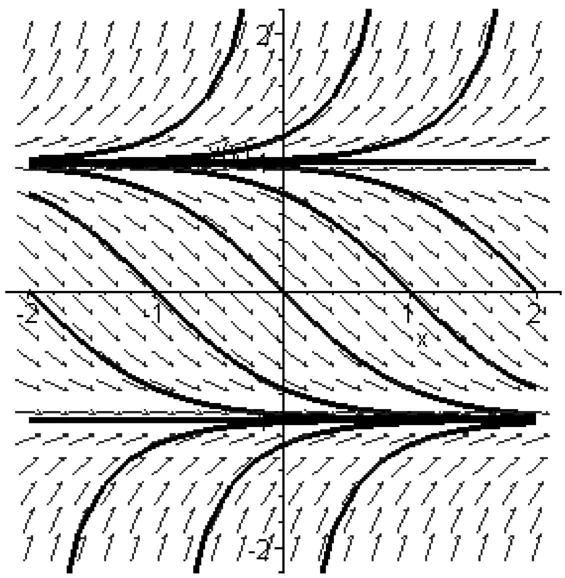
Par l'unicité du théorème précédent, deux courbes intégrales qui se coupent sont confondues.
□

Exemple Les courbes intégrales de l'équation $y' = 1 - x^2 - y^2$ forment une partition du plan $\mathbb{R}^2$:



Exemple Si une fonction constante égale à λ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ alors aucune autre solution maximale de (E) ne prend la valeur λ.

Exemple Enfermement des courbes intégrales de l'équation $y' = (y-1)(y+1)$ par les fonctions constantes $x \mapsto 1$ et $x \mapsto -1$ solutions



21.1.4 Deux exemples d'étude qualitative

Exemple Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = 1 + x^2y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$f : (x, y) \mapsto 1 + x^2y^2$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2$.
Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, ce problème de Cauchy admet une solution maximale unique définie sur un intervalle ouvert I contenant 0 : $I =]a, b[$ avec $a < 0 < b$, $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$.
Monotonie :
y est dérivable et

$$\forall x \in I, y'(x) \geqslant 1 > 0$$

La fonction y est strictement croissante sur I.
Parité :
Considérons $z : x \in J \mapsto -y(-x)$ avec $J =]-b, -a[$.
$z(0) = -y(0) = 0$, z est dérivable et $z'(x) = y'(-x) = 1 + (-x)^2y(-x)^2 = 1 + x^2z^2(x)$.
Ainsi z est solution du problème de Cauchy définissant la solution maximale y et donc z est une restriction de y. On en déduit $J \subset I$ et

$$\forall x \in J, z(x) = y(x)$$

Or $J \subset I$ donne $]-b, -a[\subset]a, b[$ d'où l'on tire $a = b$.
Par suite $I = J =]-b, b[$ et

$$\forall x \in I, y(-x) = -y(x)$$

Finalement y est une fonction impaire.
Montrons que I borné :
Par l'absurde si $b = +\infty$ alors pour $x \geqslant 1$, $y'(x) \geqslant 1 + y(x)^2$ et donc

$$\frac{y'(x)}{1 + y(x)^2} \geqslant 1$$

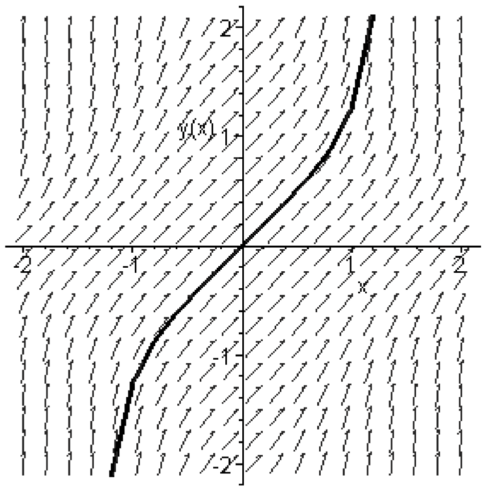
En intégrant

$$\int_1^x \frac{y'(t)}{1 + y(t)^2} \,\mathrm{d}t \geqslant \int_1^x t \,\mathrm{d}t$$

puis

$$\arctan(y(x)) - \arctan(y(1)) \geqslant x - 1$$

ce qui est absurde.
On conclut $b < +\infty$.
Etude de la limite de y en b^-
Puisque y est croissante, la limite ℓ de y en b^- existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Par l'absurde supposons $\ell \in \mathbb{R}$.
On peut alors introduire $\tilde{y} :]-b, b] \to \mathbb{R}$ définie par $\tilde{y}(x) = y(x)$ si $x < b$ et $\tilde{y}(b) = \ell$.
$\tilde{y}$ est solution de l'équation différentielle sur $]-b, b[$.
Par construction $\tilde{y}$ est continue en b et quand $x \to b^-$, $\tilde{y}'(x) = 1 + x^2\tilde{y}(x)^2 \to 1 + b^2\ell^2 \in \mathbb{R}$.
Par suite $\tilde{y}$ est dérivable en b et $\tilde{y}'(b) = 1 + b^2\ell^2 = 1 + b^2\tilde{y}(b)^2$.
Ainsi $\tilde{y}$ est solution sur $]-b, b]$ du problème de Cauchy initial ce qui contredit la maximalité de y.
Absurde.
On en déduit $\lim\limits_{b^-} y = +\infty$.



Remarque En observant

$$b = \int_0^b \mathrm{d}t = \int_0^b \frac{y'(t)\,\mathrm{d}t}{1 + t^2 y^2(t)} \geqslant \int_0^b \frac{y'(t)\,\mathrm{d}t}{1 + b^2 y^2(t)}$$

on montre $b \geqslant \sqrt{\pi/2}$.

Exemple Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x}{x^2 + y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$f : (x, y) \mapsto \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, ce problème de Cauchy admet une solution maximale unique définie sur un intervalle ouvert I contenant 0 : $I = \left]a, b\right[$ avec $a < 0 < b$, $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$.
Parité :
Considérons $z : x \in J \mapsto y(-x)$ avec $J = \left]-b, -a\right[$.
$z(0) = y(0) = 1$, z est dérivable et

$$z'(x) = -y'(-x) = \frac{x}{(-x)^2 + y(-x)^2} = \frac{x}{x + z(x)^2}$$

Ainsi z est solution du problème de Cauchy définissant la solution maximale y et donc z est une restriction de y. On en déduit $J \subset I$ et

$$\forall x \in J, z(x) = y(x)$$

Or $J \subset I$ donne $\left]-b, -a\right[\subset \left]a, b\right[$ d'où l'on tire $a = b$.
Par suite $I = J = \left]-b, b\right[$ et

$$\forall x \in I, y(-x) = y(x)$$

Finalement y est une fonction paire.
Monotonie sur $[0, b[$:
Pour tout $x \in [0, b[$, $y'(x) = \dfrac{x}{x^2 + y(x)^2} \geqslant 0$ donc y est croissante sur $[0, b[$.
Montrons que $b = +\infty$:
Par l'absurde, supposons $b < +\infty$.
Comme y est croissante sur $[0, b[$, y admet une limite ℓ en b, montrons que celle-ci est finie.

$$y(x) - y(0) = \int_0^x y'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^2 + y(t)^2}$$

or $\left|\dfrac{t}{t^2 + y(t)^2}\right| \leqslant \dfrac{t}{t^2+1}$ donc

$$y(x) \leqslant y(0) + \int_0^b \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = y(0) + \frac{1}{2}\ln(b^2+1)$$

Puisque la fonction y est croissante et majorée, y converge en b^-. Posons ℓ sa limite.
Comme dans l'exemple précédent, on peut alors montrer que la fonction $\tilde{y}$ obtenue en prolongeant y par continuité en b est solution sur $]-b, b]$ du problème de Cauchy introduit. Cela contredit la maximalité de y. On peut conclure $b = +\infty$.
Limite de y en $+\infty$:
Puisque y est croissante sur $[0, +\infty[$, la limite ℓ de y en $+\infty$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Par l'absurde, supposons $\ell \in \mathbb{R}$.
La fonction y est majorée par ℓ donc pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a $y'(x) \geqslant \dfrac{x}{x^2 + \ell^2}$ puis en intégrant

$$y(x) - y(0) \geqslant \frac{1}{2}\ln(x^2 + \ell^2) - \ln \ell \to +\infty$$

C'est absurde.
On peut conclure que $\lim\limits_{+\infty} y = +\infty$.

21.2 Equations à variables séparables

21.2.1 Définition

Soient a, b, c, d des fonctions réelles définie sur des intervalles. On étudie l'équation

$$(E) : a(x)b(y) + c(x)d(y)y' = 0$$

Définition

> Une solution de (E) est un couple (I, y) formé d'un intervalle non singulier I et d'une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ dérivable vérifiant
>
> $$\forall x \in I, a(x)b(y(x)) + c(x)d(y(x))y'(x) = 0$$
>
> On peut encore parler de solution maximale.

Protocole de résolution
Analyse : Soit (I, y) une solution de (E).
On a

$$a(x)b(y)y' = -c(x)d(y)$$

Sous réserve :

$$\frac{d(y)}{b(y)}y' = -\frac{a(x)}{b(x)}$$

soit

$$p(y(x))y' = q(x)$$

avec $p = d/b$ et $q = -a/b$ fonctions continues.
En introduisant P et Q primitives de p et q, on obtient :

$$P(y) = Q(x) + C^{te}$$

ce qui fournit des équations cartésiennes vérifiées par les courbes intégrales.
Si de plus, on peut inverser P, on obtient

$$y = P^{-1}(Q(x) + C^{te})$$

Synthèse : Généralement immédiate en remontant les calculs.

21.2.2 Un premier exemple

Exemple Résolvons

$$(E) : \mathrm{e}^{x+y}y' + 1 = 0$$

Soit (I, y) une solution de (E).

$$\forall x \in I, y'(x)\mathrm{e}^{y(x)} = -\mathrm{e}^{-x}$$

Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I, \mathrm{e}^{y(x)} = \mathrm{e}^{-x} + C$$

Or $\mathrm{e}^{y(x)} > 0$ donc

$$\forall x \in I, \mathrm{e}^{-x} + C > 0 \text{ et } y(x) = \ln(\mathrm{e}^{-x} + C)$$

Résumé :
Si (I, y) est solution de (E) alors :

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \mathrm{e}^{-x} + C > 0 \text{ et } y(x) = \ln(\mathrm{e}^{-x} + C)$$

Inversement une telle fonction est solution.

Remarque Contrairement aux équations linéaires, il y a ici corrélation entre l'intervalle de résolution et les constantes descriptives possibles. On peut alors :
- pour une constante donnée, rechercher la solution maximale correspondante ;
- pour un intervalle donné, rechercher les constantes possibles.

Exemple Déterminons les solutions maximales de l'équation

$$(E) : \mathrm{e}^{x+y}y' + 1 = 0$$

Pour $C \geqslant 0$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{-x} + C > 0$$

et la fonction $x \mapsto \ln(\mathrm{e}^{-x} + C)$ est solution maximale sur $\mathbb{R}$.
Pour $C < 0$,

$$\mathrm{e}^{-x} + C > 0 \Leftrightarrow x < -\ln(-C)$$

et donc

$$\forall x \in I, \mathrm{e}^{-x} + C > 0 \Leftrightarrow I \subset \left]-\infty, -\ln(-C)\right[$$

La fonction $x \mapsto \ln(\mathrm{e}^{-x} + C)$ est solution maximale sur $\left]-\infty, -\ln(-C)\right[$.

21.2.3 Un deuxième exemple

Exemple Résolvons l'équation

$$(E) : y' = 2xy(y-1)$$

Pour séparer les variables, on souhaite pouvoir diviser par $y(y-1)$ ce qui force à étudier séparément les fonctions s'annulant et celles prenant la valeur 1. Le théorème de Cauchy-Lipschitz va nous aider...
$f : (x, y) \mapsto 2xy(y-1)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2$ donc le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique. Puisque les fonctions $x \mapsto 0$ et $x \mapsto 1$ sont solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation E, toute solution s'annulant ou prenant la valeur est restriction de la fonction constante correspondante.
Soit (I, y) une solution de (E).
Si y s'annule (resp. prend la valeur 1) alors

$$\forall x \in I, y(x) = 0 \text{ (resp. } \forall x \in I, y(x) = 1 \text{)}$$

Si y ne prend ni la valeur 0, ni la valeur 1 alors

$$\forall x \in I, \frac{y'(x)}{y(x)(y(x)-1)} = 2x$$

Puisque

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t(t-1)} = -\ln|t| + \ln|t-1| + C^{te}$$

on obtient l'existence de $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I, \ln\left|\frac{y(x)-1}{y(x)}\right| = x^2 + C$$

puis

$$\left|\frac{y(x)-1}{y(x)}\right| = \mathrm{e}^{x^2+C}$$

Puisque la fonction $x \mapsto \dfrac{y(x)-1}{y(x)}$ est définie et continue sur un intervalle et puisque cette fonction ne s'annule pas, elle est de signe constant sur I. Ainsi il existe $\varepsilon = \pm 1$ tel que

$$\forall x \in I, \frac{y(x)-1}{y(x)} = \varepsilon \mathrm{e}^{x^2+C}$$

En posant $\lambda = \varepsilon \mathrm{e}^C \in \mathbb{R}^\star$, on obtient

$$\frac{y(x)-1}{y(x)} = \lambda \mathrm{e}^{x^2}$$

puis

$$\frac{1}{y(x)} = 1 - \lambda \mathrm{e}^{x^2}$$

Puisque $\dfrac{1}{y(x)} \neq 0$, on a $1 - \lambda \mathrm{e}^{x^2} \neq 0$ et

$$y(x) = \frac{1}{1-\lambda \mathrm{e}^{x^2}}$$

Résumons :
Si y est solution de (E) prenant la valeur 0 ou 1 alors y est constante.
Si y est solution de (E) sur un intervalle I ne prenant pas les valeurs 0 et 1 alors

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^\star, \forall x \in I, 1 - \lambda \mathrm{e}^{x^2} \neq 0 \text{ et } y(x) = \frac{1}{1-\lambda \mathrm{e}^{x^2}}$$

Inversement, les fonctions proposées sont bien solutions.
Recherchons les solutions maximales.
Pour cela, déterminons pour $\lambda \neq 0$, les plus grands intervalles I vérifiant la condition

$$\forall x \in I, 1 - \lambda \mathrm{e}^{x^2} \neq 0 \text{i.e. } \mathrm{e}^{-x^2} \neq \lambda$$

Cas $\lambda < 0$ ou $\lambda > 1$, l'équation $\mathrm{e}^{-x^2} \neq \lambda$ ne possède pas de solutions.
La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-\lambda \mathrm{e}^{x^2}}$ est alors solution maximale sur $\mathbb{R}$.
Cas $\lambda = 1$:
On a

$$\mathrm{e}^{-x^2} \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$$

donc

$$\forall x \in I, \mathrm{e}^{-x^2} \neq 1 \Leftrightarrow I \subset \left]-\infty, 0\right[\text{ ou } I \subset \left]0, +\infty\right[$$

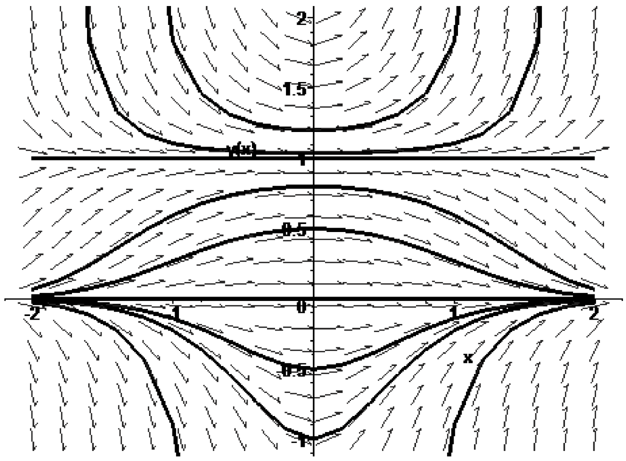
La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{x^2}}$ alors solution maximale sur $\left]-\infty, 0\right[$ et sur $\left]0, +\infty\right[$.
Cas $\lambda \in \left]0, 1\right[$:
On a

$$\mathrm{e}^{-x^2} \neq \lambda \Leftrightarrow x \neq \pm\sqrt{-\ln \lambda}$$

Posons $x_\lambda = \sqrt{-\ln \lambda}$.
On a

$$\forall x \in I, 1 - \lambda \mathrm{e}^{-x^2} \neq 0 \Leftrightarrow I \subset \left]-\infty, -x_\lambda\right[\text{ ou } I \subset \left]-x_\lambda, x_\lambda\right[\text{ ou } I \subset \left]x_\lambda, +\infty\right[$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-\lambda \mathrm{e}^{x^2}}$ est alors solution maximale sur $\left]-\infty, -x_\lambda\right[$, $\left]-x_\lambda, x_\lambda\right[$ ou $\left]x_\lambda, +\infty\right[$.



21.3 Equations autonomes

La variable fonctionnelle sera notée t plutôt que x car en pratique elle s'apparente souvent à un paramètre temporel.

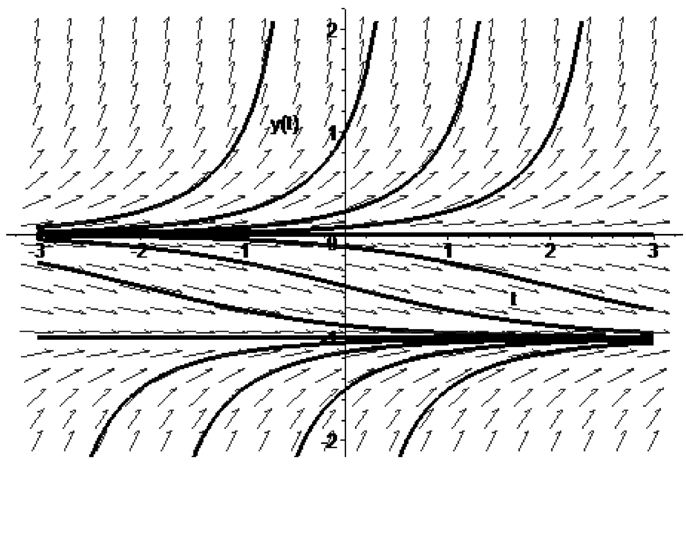
21.3.1 Equation autonome d'ordre 1

Soit $f : J \to \mathbb{R}$. On étudie l'équation autonome d'ordre 1 :

$$(E) : y' = f(y)$$

Il s'agit d'une équation résolue en y' mais aussi d'une équation à variables séparables.

Exemple $y' = y + y^2$ est une équation autonome d'ordre 1.



Exemple Si $y_0 \in J$ annule f alors la fonction $t \mapsto y_0$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation autonome $y' = f(y)$.

Proposition

> Si (I, y) est solution de (E) alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $\tau_a y : t \mapsto y(t-a)$ est solution de (E) sur l'intervalle $a + I$.

dém. :
Par composition $\tau_a y$ est définie et dérivable sur $a + I$ avec $(\tau_a y)'(t) = y'(t-a) = f(y(t-a)) = f(\tau_a y(t))$.
□

Remarque Par translation, tout problème de Cauchy peut se ramener à un problème en $t_0 = 0$.

Théorème

> Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : J \to \mathbb{R}$.
> Si l'intervalle J est ouvert et si f y est de classe $\mathcal{C}^1$ alors, pour tout $y_0 \in J$, il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy
>
> $$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$
>
> De plus, celle-ci est définie sur un intervalle ouvert contenant 0 et toute autre solution de ce problème de Cauchy est restriction de cette solution maximale.

Corollaire

> Les solutions de l'équation $y' = f(y)$ sont alors constantes ou injectives (et donc monotones)

dém. :
Soit (I, y) une solution de l'équation $y' = f(y)$ non injective.
Il existe $a < b \in I$ tels que $y(a) = y(b)$. Par le théorème de Rolle, il existe $t_0 \in \left]a, b\right[$ tel que $y'(t_0) = 0$ et alors $f(y(t_0)) = 0$. Posons $y_0 = y(t_0)$ de sorte que vérifie $f(y_0) = 0$.
Puisque la fonction $t \mapsto y_0$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = f(y)$, c'est une solution maximale et y en est une restriction. Ainsi, y est une fonction constante.
□

Exemple Résolvons l'équation

$$(E) : y' = 1 + y^2$$

Soit (I, y) une solution de (E).

$$\forall t \in I, \frac{y'(t)}{1 + y^2(t)} = 1$$

Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in I, \ \arctan\left(y(t)\right) = t + C$$

Or $\arctan\left(y(t)\right) \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$ donc

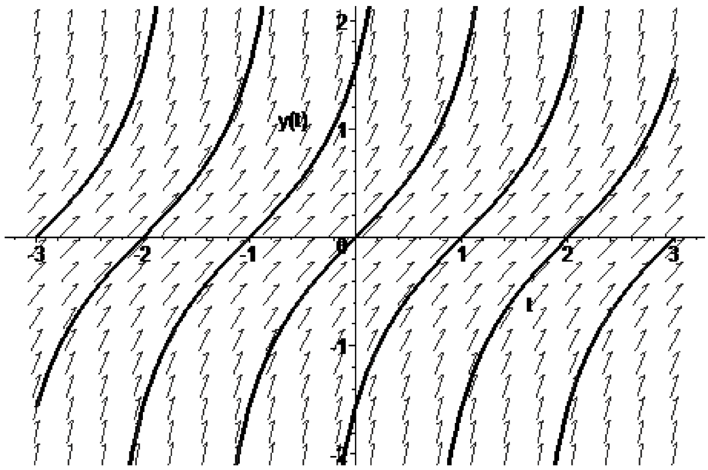
$$\forall t \in I, t + C \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[\text{ et } y(t) = \tan(t + C)$$

Résumons :

Si y est solution de (E) sur un intervalle I alors

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall t \in I, t + C \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[\text{ et } y(t) = \tan(t + C)$$

Inversement, les fonctions proposées sont bien solutions.
Ainsi les solutions maximales de (E) sont les fonctions $t \mapsto \tan(t + C)$ définie sur $\left]-\pi/2 - C, \pi/2 - C\right[$.



Exemple Résolvons l'équation

$$(E) : y' + y^3 = 0$$

Pour séparer les variables, on souhaiterait pouvoir diviser par y...
La fonction $f : y \mapsto -y^3$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on peut donc appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz. Puisque la fonction nulle est solution sur $\mathbb{R}$, toute solution de (E) prenant la valeur 0 est restriction de la fonction nulle. Il reste à déterminer les solutions ne s'annulant pas.
Soit y une solution de (E) sur un intervalle I ne s'annulant pas.

$$\forall t \in I, \ -\frac{y'(t)}{y^3(t)} = 1$$

donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in I, \frac{1}{2}\frac{1}{y(t)^2} = t + C$$

Puisque $\dfrac{1}{y^2(t)} > 0$, on a

$$\forall t \in I, t + C > 0 \text{ et } y(t)^2 = \frac{1}{2(t + C)}$$

puis

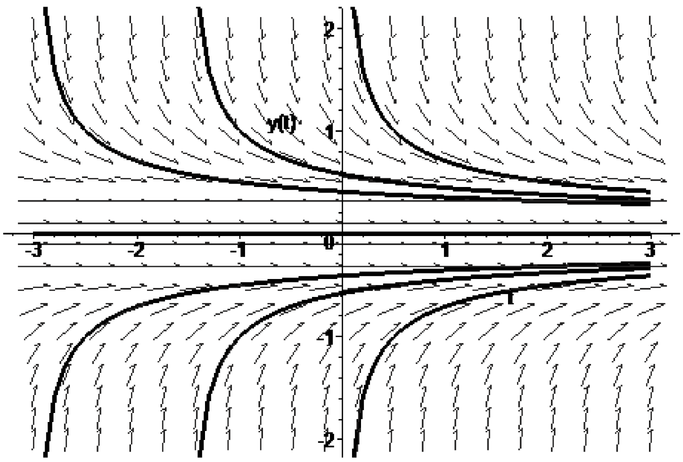
$$|y(t)| = \frac{1}{\sqrt{2(t + C)}}$$

La fonction $t \mapsto y(t)$ est continue sur un intervalle et ne s'annule pas, elle est donc de signe constant.

On peut alors conclure

$$y(t) = -\frac{1}{\sqrt{2(t+C)}} \text{ sur } I \text{ ou } y(t) = -\frac{1}{\sqrt{2(t+C)}} \text{ sur } I$$

Inversement de telles fonctions sont solutions.



21.3.2 Système autonome de taille 2

Soient $f, g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continues. On étudie le système différentiel autonome

$$(\Sigma) : \begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$$

Définition

On appelle solution du système (Σ) tout triple (I, x, y) formé d'un intervalle non singulier I et de deux fonctions $x, y : I \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant :
1) $\forall t \in I, (x(t), y(t)) \in U$;
2) $\forall t \in I, x'(t) = f(x(t), y(t))$ et $y'(t) = g(x(t), y(t))$.
On dit encore que (x, y) est solution de (Σ) sur I.
On peut encore parler de solution maximale.

Exemple On sait résoudre le système autonome

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ dont les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$.

Proposition

Si (I, x, y) est solution de (Σ) alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(a + I, \tau_a x, \tau_a y)$ est solution de (Σ).

Définition

On appelle ligne de champ du système (Σ) tout arc de $\mathbb{R}^2$ paramétré par

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \text{avec } t \in I$$

où (I, x, y) est solution maximale de (Σ).

Proposition

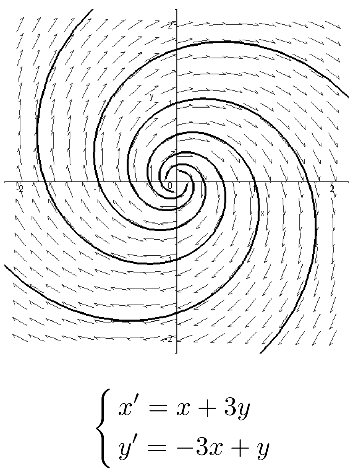
En tout point régulier, une ligne de champ est tangente au champ de vecteurs

$$\begin{array}{lcl} U & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (f(x, y), g(x, y)) \end{array}$$

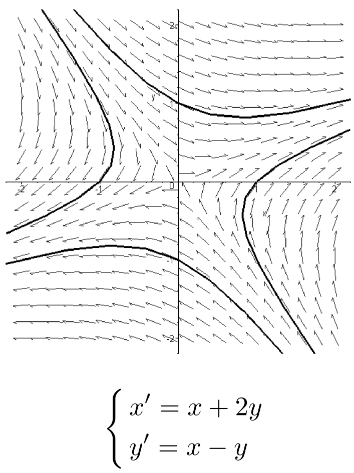
dém. :
Soit (I, x, y) une solution maximale de (Σ).
Soit (x_0, y_0) un point régulier de la ligne de champ associée.
Il existe $t_0 \in I$ tel que $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$ et on a $(x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0, 0)$.
La tangente en ce point régulier est dirigée par $(x'(t_0), y'(t_0)) = (f(x_0, y_0), g(x_0, y_0))$.

□

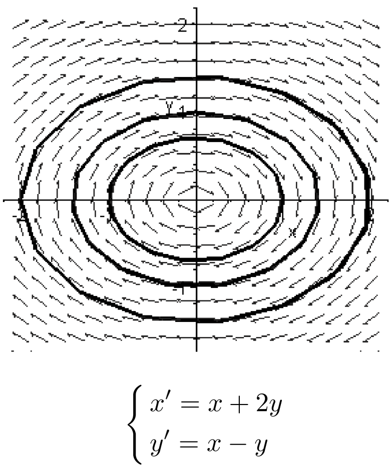
Exemple Quelques lignes de champ…



$$\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = -3x + y \end{cases}$$



$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = x - y \end{cases}$$



$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = x - y \end{cases}$$

Théorème

Soient $f, g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Si U est ouvert et si f et g y sont de classe $\mathcal{C}^1$ alors, pour tout $(x_0, y_0) \in U$, il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy formé par le système

$$(\Sigma) : \begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

et les conditions initiales

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

De plus, celle-ci est définie sur un intervalle ouvert contenant 0 et toute autre solution de ce problème de Cauchy est restriction de cette solution maximale. (admis)

Corollaire

Si (I, x, y) est solution maximale du système (Σ) alors :
- ou bien la fonction $t \mapsto (x(t), y(t))$ est injective ;
- ou bien elle est périodique définie sur $\mathbb{R}$.

dém. :
Soit (I, x, y) une solution maximale du système (Σ).
Supposons qu'il existe $a < b \in I$ tel que

$$(x(a), y(a)) = (x(b), y(b))$$

Posons alors $T = b - a$ et considérons $(\tilde{x}, \tilde{y})$ avec $\tilde{x}(t) = x(t - T)$ et $\tilde{y}(t) = y(t - T)$.
$(T + I, \tilde{x}, \tilde{y})$ est solution du système (Σ) et cette solution est maximale car la solution (I, x, y) l'est.
De plus

$$\begin{cases} \tilde{x}(b) = x(a) = x(b) \\ \tilde{y}(b) = y(a) = y(b) \end{cases}$$

En vertu du théorème de Cauchy-Lipschitz, les solutions $(I + T, \tilde{x}, \tilde{y})$ et (I, x, y) sont égales.
On en déduit $I = T + I$ donc

$$I = \mathbb{R} \text{ et } \forall t \in \mathbb{R}, x(t) = x(t - T) \text{ et } y(t) = y(t - T)$$

□

21.3.3 Equation autonome d'ordre 2

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue. On étudie l'équation différentielle

$$(E) : x'' = f(x, x')$$

Définition

On appelle solution de (E) tout couple (I, x) formé d'un intervalle non singulier I et d'une fonction $x : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et vérifiant :
1) $\forall t \in I, (x(t), x'(t)) \in U$;
2) $\forall t \in I, x''(t) = f(x(t), x'(t))$.
On dit encore que x est solution de (E) sur I.
On peut encore parler de solution maximale.

Exemple On sait résoudre l'équation autonome $x'' = ax + bx'$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et ses solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$.

Proposition

Si x est solution de (E) sur I alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, $t \mapsto x(t-a)$ est solution de (E) sur $a+I$.

Lemme

Soit $x : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
On a équivalence entre :
(i) x est solution de (E) sur I ;
(ii) (x, x') est solution sur I du système

$$(\Sigma) : \begin{cases} x' = y \\ y' = f(x, y) \end{cases}$$

Définition

On appelle ligne de phase de (E) tout arc de $\mathbb{R}^2$ paramétré par

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = x'(t) \end{cases} \text{ avec } t \in I$$

où (I, x) est solution maximale de (E).

Remarque Les lignes de phase de (E) sont les lignes de champ de (Σ).

Proposition

En tout point régulier, une ligne de phase de (E) est tangente au champ de vecteurs

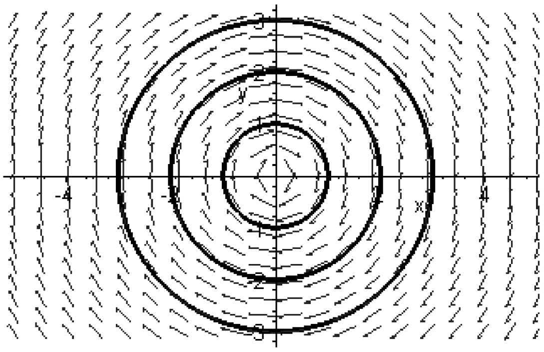
$$\vec{F} : \begin{cases} U & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (y, f(x, y)) \end{cases}$$

dém. :
Par correspondance avec la tangence des lignes de champ de

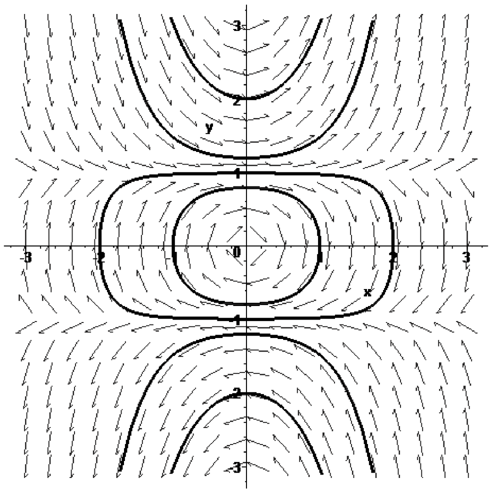
$$(\Sigma) : \begin{cases} x' = y \\ y' = f(x, y) \end{cases}$$

□

Exemple Quelques lignes de phases



$x'' + x = 0$



$x'' = x(x'^2 - 1)$

Théorème

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Si U est ouvert et si f y est de classe $\mathcal{C}^1$ alors, pour tout $(x_0, x_0') \in U$, il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy formé par l'équation

$$x'' = f(x, x')$$

et les conditions initiales

$$x(0) = x_0 \text{ et } x'(0) = x_0'$$

De plus, celle-ci est définie sur un intervalle ouvert contenant 0 et toute autre solution de ce problème de Cauchy est restriction de cette solution maximale.

dém. :
Il suffit de transposer le problème en la résolution de

$$(\Sigma) : \begin{cases} x' = y \\ y' = f(x, y) \end{cases}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = x_0' \end{cases}$$

□

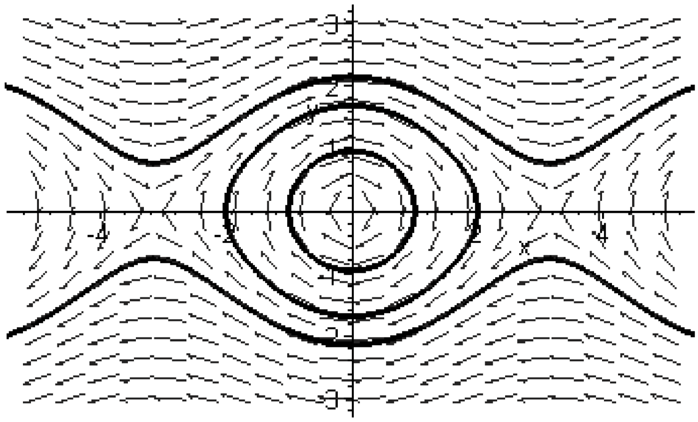
Corollaire

Si x est une solution maximale (E) alors ou bien $t \mapsto (x(t), x'(t))$ est injective ou bien x est périodique définie sur $\mathbb{R}$.

21.3.4 Musculation : radiesthésie

On étudie l'équation du pendule
$$\theta'' + \omega^2 \sin\theta = 0$$

En voici quelques lignes de phase.



Soit $\alpha \in]0, \pi[$.
Considérons le problème de Cauchy
$$\begin{cases} \theta'' + \omega^2 \sin\theta = 0 \\ \theta(0) = \alpha \\ \theta'(0) = 0 \end{cases}$$

Etape 1 : Solution
Puisque la fonction $(x, y) \mapsto -\omega^2 \sin x$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2$, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique. Il existe donc une solution maximale unique θ et celle-ci est définie sur un intervalle ouvert $]a, b[$ avec $a < 0 < b$, $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$.
Etape 2 : Intégrale première
On a $\theta'\theta'' + \omega^2\theta' \sin\theta = 0$ donc $\dfrac{1}{2}\theta'^2 - \omega^2 \cos\theta = C^{te} = -\omega^2 \cos\alpha$ puis
$$\theta'^2 = 2\omega^2(\cos\theta - \cos\alpha)$$

On en déduit :
- θ' est bornée ;
- $\cos\theta - \cos\alpha \geqslant 0$.
Pas suite $\theta(t) \in [-\alpha, \alpha] + 2k\pi$.
Or $\theta(0) = \alpha$ donc par continuité $\theta(t) \in [-\alpha, \alpha]$ pour tout $t \in I$.
Etape 3 : Parité
Considérons $\varphi : t \mapsto \theta(-t)$.
On vérifie que φ est solution sur $]-b, -a[$ du problème de Cauchy définissant θ, on en déduit que φ est une restriction de θ et donc θ est une fonction paire définie sur $]-b, b[$.
Etape 4 : θ est définie sur $\mathbb{R}$:
Par l'absurde, supposons $b \in \mathbb{R}$.
On a
$$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t \theta'(s)\,\mathrm{d}s = \alpha + \int_0^t \theta'(s)\,\mathrm{d}s$$

Or l'intégrale $\int_{[0,b[} \theta'(s)\,\mathrm{d}s$ converge car θ' est bornée et l'intervalle $[0,b[$ est bornée.
On en déduit $\theta(t) \xrightarrow[t\to b^-]{} \ell$.
On peut donc prolonger θ par continuité en b en posant $\theta(b) = \ell$.
Quand $t \to b^-$

$$\theta'(t) = \theta'(0) + \int_0^t \theta''(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t -\omega^2 \sin\theta(s)\,\mathrm{d}s \to \int_0^b -\omega^2 \sin\theta(s)\,\mathrm{d}s$$

car θ est continue sur $[0,b]$.

$$\theta''(t) = -\omega^2 \sin\theta(t) \to -\omega^2 \sin\theta(b)$$

car θ est continue en b.
On en déduit que le prolongement de la fonction θ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-b,b]$ et est solution de l'équation différentielle étudiée. Cela contredit la maximalité de θ.
Absurde.
On en déduit $b = +\infty$ puis $I = \mathbb{R}$
Etape 5 : θ s'annule
Montrons qu'il existe un plus petit $t \geqslant 0$ tel que $\theta(t) = 0$:
Par l'absurde, supposons $\theta(t) > 0$ pour tout $t \geqslant 0$.
$\theta'' = -\omega^2 \sin\theta > 0$ donc θ' est strictement décroissante et puisque $\theta'(0) = 0$, θ' admet en $+\infty$ une limite $\ell \in \mathbb{R}^{-\star} \cup \{-\infty\}$.
On a alors

$$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t \theta'(s)\,\mathrm{d}s \to -\infty$$

ce qui est absurde.
On en déduit qu'il existe $t \geqslant 0$ tel que $\theta(t) \leqslant 0$ et par continuité on peut affirmer que la fonction θ s'annule.
Etape 6 : Première annulation de θ
Considérons alors la partie $A = \{t \geqslant 0 / \theta(t) = 0\}$.
A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée, on peut donc introduire $t_1 = \inf A = \inf\{t \geqslant 0/\theta(t) = 0\}$.
$A = \theta^{-1}(\{0\}) \cap \mathbb{R}^+$ est une partie fermée car intersection de deux fermées.
On en déduit que $t_1 \in A$ et donc $\theta(t_1) = 0$.
Ainsi $\theta(t) > 0$ sur $[0,t_1[$ et $\theta(t_1) = 0$.
Etape 7 : Variation de θ sur $[0,t_1]$
Sur $[0,t_1]$, $\theta(t) \in [0,\alpha]$ donc $\theta''(t) = -\omega^2 \sin\theta(t) \leqslant 0$.
On en déduit les variations suivantes

t	0		t_1
$\theta'(t)$	0	$-$	
$\theta(t)$	α	$\searrow$	0

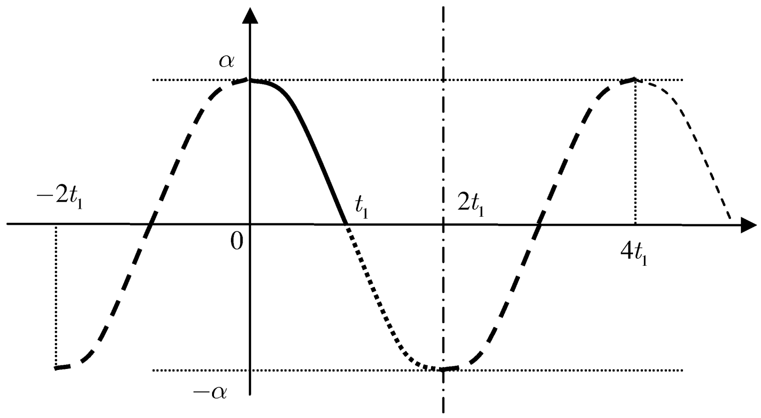
Etape 8 : Variation de θ sur $[0,2t_1]$
Posons $\varphi : [t_1, 2t_1] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = -\theta(2t_1 - t)$.
On vérifie que φ est solution de l'équation différentielle et satisfait $(\varphi(t_1), \varphi'(t_1)) = (\theta(t_1), \theta'(t_1))$.
Par maximalité de θ, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que φ est une restriction de θ.
Ainsi $\forall t \in [t_1, 2t_1]$, $\theta(t) = -\theta(2t_1 - t)$.
On en déduit le tableau de variation suivant

t	0		t_1		$2t_1$
$\theta'(t)$	0	$-$		$-$	0
$\theta''(t)$	α	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\alpha$

Etape 9 : Périodicité
Enfin par parité

t	$-2t_1$		$-t_1$		0		t_1		$2t_1$
$\theta'(t)$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0
$\theta(t)$	$-\alpha$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	α	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\alpha$

Puisque $(\theta(-2t_1), \theta'(-2t_1)) = (\theta(2t_1), \theta'(2t_1))$, on peut affirmer que θ est $T = 4t_1$ périodique.
Posons $\psi : [2t_1, 4t_1] \to \mathbb{R}$ définie par $\psi(t) = \theta(4t_1 - t)$.
On vérifie que ψ est solution de l'équation différentielle et satisfait $(\psi(2t_1), \psi'(2t_1)) = (\theta(2t_1), \theta'(2t_1))$.



Etape 10 : Expression de la période T

$$T = 4\int_0^{t_1} \mathrm{d}t = 4\int_{]0,t_1]} \mathrm{d}t$$

La fonction $t \to \theta(t)$ est une bijective $\mathcal{C}^1$ de $]0, t_1]$ vers $[0, \alpha[$.
Réalisons le changement de variable $\varphi = \theta(t),\ \mathrm{d}\varphi = \theta'(t)\,\mathrm{d}t$.
Puisque sur $]0, t_1]$, $\theta'(t) < 0$ et $\theta'(t)^2 = 2\omega^2 (\cos\theta(t) - \cos\alpha)$ on a

$$\theta'(t) = -\omega\sqrt{2\cos\theta(t) - \cos\alpha}$$

puis

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\theta'(t)} = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\omega\sqrt{2\cos\varphi - \cos\alpha}}$$

Par le changement de variable proposé, on obtient

$$T = \frac{4}{\omega}\int_0^{\alpha} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\alpha)}}$$

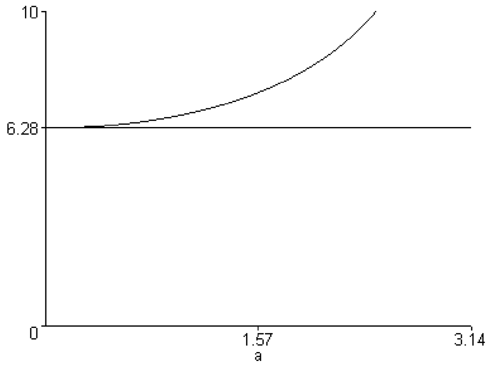
Remarque Par le changement de variable

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\psi$$

on obtient l'écriture

$$T = \frac{4}{\omega}\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} \text{ avec } k = \sin\frac{\alpha}{2}$$

Visualisation de la période T (en ordonnée) en fonction de l'angle d'attaque α en abscisse pour $\omega = 1$.


10
6.28
0
1.57
a
3.14

Chapitre 22

Calcul différentiel

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
E, F, G et H désignent des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies indifféramment normés.
U, V désignent des ouverts non vides de E et F.
I désigne un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

22.1 Différentielle d'une fonction

22.1.1 Développement limité à l'ordre 1

Soient $f : U \subset E \to F$ et $a \in U$

Définition

On appelle développement limité à l'ordre 1 de f en a toute écriture :

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + o(h) \text{ quand } h \to 0_E$$

avec $\ell \in \mathcal{L}(E, F)$.

Exemple Pour $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un développement limité à l'ordre 1 en 0 est de la forme

$$f(x, y) = f(0, 0) + ax + by + o(x, y) \text{ quand } (x, y) \to (0, 0)$$

Remarque Ecrire $\varphi(h) = o(h)$ quand $h \to 0_E$ signifie par définition

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \|h\| \leqslant \alpha \Rightarrow \|\varphi(h)\| \leqslant \varepsilon \|h\|$$

Ainsi $\varphi(h) = o(h)$ quand $h \to 0_E$ signifie aussi $\varphi(h) = \|h\| \varepsilon(h)$ avec $\varepsilon \xrightarrow[0_E]{} 0_F$.

Proposition

Si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a alors l'application linéaire ℓ qui le décrit est unique, on l'appelle application linéaire tangente à f en a.

dém. :
Supposons que $\ell, m \in \mathcal{L}(E, F)$ conviennent.
$\ell(h) - m(h) = o(h) = \|h\| \varepsilon(h)$ avec $\varepsilon \xrightarrow[0_E]{} 0_F$

Pour $x \in E$, considérons $h = \lambda x$ avec $\lambda \to 0^+$.
$\ell(\lambda x) - m(\lambda x) = \|\lambda x\| \varepsilon(\lambda x)$ donne $\ell(x) - m(x) = \|x\| \varepsilon(\lambda x)$
Quand $\lambda \to 0^+$, on obtient $\ell(x) - m(x) \to 0_F$ et donc $\ell(x) = m(x)$ puis $\ell = m$.
□

22.1.2 Différentiabilité en un point

Soient $f : U \subset E \to F$ et $a \in U$

Définition

On dit que f est différentiable en a si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a. L'application linéaire tangente à f en a est aussi appelée différentielle de f en a et on la note $\mathrm{d}f(a)$. Ainsi :

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a).h + o(h) \text{ quand } h \to 0_E$$

avec $\mathrm{d}f(a) \in \mathcal{L}(E, F)$.

Remarque On a ici adopté la notation d'opérateur. Il faut comprendre

$$\mathrm{d}f(a).h = [\mathrm{d}f(a)](h)$$

Proposition

Si f est différentiable en a alors f est continue en a.

dém. :
Quand $h \to 0_E$, $f(a+h) = f(a) + [\mathrm{d}f(a)](h) + o(h) \to f(a)$ car l'application linéaire $\mathrm{d}f(a)$ est continue puisqu'au départ d'un espace de dimension finie.
□

Exemple Soient $f : E \to F$ constante et $a \in E$
$f(a+h) = f(a)$
Quand $h \to 0_E$, $f(a+h) = f(a) + \ell(h) + o(h)$ avec $\ell = \tilde{0}$ linéaire
Ainsi f est différentiable en a et $\mathrm{d}f(a) = \tilde{0}$.

Exemple Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $a \in E$.
$f(a+h) = f(a) + f(h)$
Quand $h \to 0_E$, $f(a+h) = f(a) + \ell(h) + o(h)$ avec $\ell = f$ linéaire.
Ainsi f est différentiable en a et $\mathrm{d}f(a) = f$.

Exemple Soient $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$f(A+H) = (A+H)^2 = A^2 + AH + HA + H^2$
Ainsi quand $H \to O_n$, $f(A+H) = (A+H)^2 = f(A) + \ell(H) + o(H)$
avec $\ell(H) = AH + HA$, $\ell \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$,
donc f est différentiable en A et $\mathrm{d}f(A) : H \to AH + HA$.

Exemple Soient $f : \mathbb{C}^\star \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = 1/z$ et $a \in \mathbb{C}^\star$.
$f(a+h) = \dfrac{1}{a+h} = \dfrac{1}{a}\dfrac{1}{1+h/a}$.
Or quand $u \in \mathbb{C} \to 0$, $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + o(u)$ car $\dfrac{1}{1+u} - (1-u) = \dfrac{u^2}{1+u} = O(u^2) = o(u)$.
Par suite
Quand $h \to 0$: $f(a+h) = \dfrac{1}{a}\left(1 - \dfrac{h}{a} + o(h)\right) = f(a) + \ell(h) + o(h)$
avec $\ell : h \mapsto -h/a^2$ linéaire.
Ainsi f est différentiable en a et $\mathrm{d}f(a) : h \mapsto -\dfrac{h}{a^2}$.

Proposition

Soient $f : I \subset \mathbb{R} \to F$ et $a \in I$. On a équivalence entre :
(i) f est dérivable en a ;
(ii) f est différentiable en a.
De plus, on a alors $\mathrm{d}f(a) : h \mapsto h.f'(a)$ et $f'(a) = \mathrm{d}f(a)(1)$.

dém. :
(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons f dérivable en a.
Quand $h \to 0$, $\dfrac{1}{h}(f(a+h) - f(a)) \to f'(a)$ donc $\dfrac{1}{h}(f(a+h) - f(a)) = f'(a) + o(1)$ puis $f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + o(h) = f(a) + \ell(h) + o(h)$ avec $\ell : h \mapsto h.f'(a)$, $\ell \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$.
Par suite f est différentiable en a et $\mathrm{d}f(a) : h \mapsto h.f'(a)$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons f différentiable en a.
Quand $h \to 0$, $f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a)h + o(h)$ donc

$$\frac{1}{h}(f(a+h) - f(a)) = \frac{1}{h}(\mathrm{d}f(a)h + o(h)) = \mathrm{d}f(a)(1) + o(1) \to \mathrm{d}f(a)(1)$$

Ainsi f est dérivable en a et $f'(a) = \mathrm{d}f(a)(1)$.
□

22.1.3 Fonctions différentiables

Définition

Une fonction $f : U \subset E \to F$ est dite différentiable si elle est différentiable en tout point $a \in U$. L'application $\mathrm{d}f : U \to \mathcal{L}(E, F)$ est alors appelée différentielle de f.

Proposition

Les fonctions différentiables sont continues.

Exemple Pour $f : I \subset \mathbb{R} \to F$: f est différentielle si, et seulement si, f est dérivable.

Exemple Si $f : E \to F$ est constante alors f est différentiable en tout $a \in E$ et $\mathrm{d}f(a) = \tilde{0}$.
Par suite f est différentiable et $\mathrm{d}f = \tilde{0}$.

Exemple Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors f est différentiable en tout $a \in E$ et $\mathrm{d}f(a) = f$.
Par suite f est différentiable et $\mathrm{d}f : a \mapsto f$.
En identifiant constante et fonction égale à la constante, on écrit $\mathrm{d}f = f$.
En particulier
- $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p \mapsto x_j$ est différentiable ;
- $z \in \mathbb{C} \mapsto \mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)$ sont différentiables ;
- $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \mapsto a_{i,j}$ est différentiable.

22.1.4 Opérations sur les fonctions différentiables

Théorème

Soient $f, g : U \subset E \to F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Si f et g sont différentiables alors $\lambda f + \mu g$ l'est aussi et

$$\mathrm{d}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathrm{d}f + \mu \mathrm{d}g$$

dém. :
Soit $a \in U$.
$(\lambda f + \mu g)(a+h) = \lambda f(a+h) + \mu g(a+h) = \lambda\left(f(a) + \mathrm{d}f(a)h + o(h)\right) + \mu\left(g(a) + \mathrm{d}g(a)h + o(h)\right)$
Par suite $(\lambda f + \mu g)(a+h) = (\lambda f + \mu g)(a) + \ell(h) + o(h)$
avec $\ell = \lambda \mathrm{d}f(a) + \mu \mathrm{d}g(a) \in \mathcal{L}(E,F)$
Par suite $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a et $\mathrm{d}(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \mathrm{d}f(a) + \mu \mathrm{d}g(a)$.
□

Exemple Une application affine est différentiable et sa différentielle est sa partie linéaire.

Théorème

Soient $f : U \subset E \to F$, $g : U \subset E \to F$ et $b : F \times G \to H$ bilinéaire.
Si f et g sont différentiables alors $b(f,g)$ l'est aussi et

$$\mathrm{d}\left(b(f,g)\right) = b(\mathrm{d}f, g) + b(f, \mathrm{d}g)$$

dém. :
Soit $a \in U$.

$$b(f,g)(a+h) = b\left(f(a+h), g(a+h)\right) = b\left(f(a) + \mathrm{d}f(a)h + o(h), g(a) + \mathrm{d}g(a)h + o(h)\right)$$

En développant

$$b(f,g)(a+h) = b(f,g)(a) + b\left(\mathrm{d}f(a)h, g(a)\right) + b\left(f(a), \mathrm{d}g(a)h\right) + \varphi(h)$$

avec

$$\varphi(h) = b\left(f(a), \mathrm{d}g(a)h + o(h)\right) + b\left(\mathrm{d}f(a)h + o(h), g(a)\right) + b\left(\mathrm{d}f(a)h, \mathrm{d}g(a)h\right) + b\left(o(h), o(h)\right)$$

Or les applications $\mathrm{d}f(a)$ et $\mathrm{d}g(a)$ sont lipschitziennes car linéaires en dimension finie donc continues et $\|b(x,y)\| \leqslant k\|x\|\|y\|$ car b est bilinéaire en dimension finie donc continue.

Par suite $\varphi(h) = o(h)$ et donc $b(f,g)(a+h) = b(f,g)(a) + \ell(h) + o(h)$
avec $\ell : h \mapsto b\left(\mathrm{d}f(a)h, g(a)\right) + b\left(f(a), \mathrm{d}g(a)h\right)$ linéaire.
Ainsi $b(f,g)$ est différentiable en a et

$$\mathrm{d}\left(b(f,g)\right)(a) : h \mapsto b\left(\mathrm{d}f(a)h, g(a)\right) + b\left(f(a), \mathrm{d}g(a)h\right)$$

Abusivement, on écrit

$$\mathrm{d}\left(b(f,g)\right)(a) = b\left(\mathrm{d}f(a), g(a)\right) + b\left(f(a), \mathrm{d}g(a)\right)$$

puis $\mathrm{d}b(f,g) = b(\mathrm{d}f, g) + b(f, \mathrm{d}g)$.
□

Corollaire

Si F est une algèbre (par exemple $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ldots$) alors pour $f,g : U \to F$ différentiables, fg est différentiable et

$$\mathrm{d}(fg) = (\mathrm{d}f)g + f(\mathrm{d}g)$$

dém. :
L'application $b : F \times F \to F$ définie par $b(x,y) = xy$ est bilinéaire.
□

Corollaire

Si $\alpha : U \subset E \to \mathbb{R}$ et $f : U \to F$ sont différentiables alors αf aussi

$$\mathrm{d}(\alpha f) = (\mathrm{d}\alpha)f + \alpha(\mathrm{d}f)$$

dém. :
L'application $b : \mathbb{R} \times F \to F$ définie par $b(\lambda, x) = \lambda.x$ est bilinéaire.
□

Remarque On peut aussi appliquer le résultat à un produit scalaire, un produit vectoriel,...

Exemple Les fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^p$ sont différentiables.

Exemple La fonction $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est différentiable car $\det$ est somme et produit de fonctions différentiables.

Théorème

Soient $f : U \subset E \to F$ et $g : V \subset F \to G$ telles que $f(U) \subset V$.
Si f et g sont différentiables alors $g \circ f$ aussi et pour tout $a \in U$,

$$\mathrm{d}(g \circ f)(a) = [\mathrm{d}g(f(a))] \circ \mathrm{d}f(a)$$

dém. :
Soit $a \in U$.
Quand $h \to 0$,
$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(h) + o(h) = f(a) + k$$
avec $k = \mathrm{d}f(a)(h) + o(h) = O(h)$ car $\|df(a)(h)\| \leqslant \|df(a)\| \|h\|$.
Puisque $k \to 0$
$$g(f(a)+k) = g(f(a)) + \mathrm{d}g(f(a))(k) + o(k)$$
puis
$$(g \circ f)(a+h) = g(f(a)) + \mathrm{d}g(f(a))\left(\mathrm{d}f(a)h + o(h)\right) + o(h)$$
$$(g \circ f)(a+h) = g(f(a+h)) = g\left(f(a + \mathrm{d}f(a)h + o(h))\right)$$
puis
$$(g \circ f)(a+h) = g(f(a)) + \mathrm{d}g(f(a))\ (\mathrm{d}f(a)h) + o(h)$$
puisque $\mathrm{d}g(f(a))$ est lipschitzienne.
Ainsi
$$(g \circ f)(a+h) = (g \circ f)(a) + \ell(h) + o(h)$$
avec $\ell = \mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a) \in \mathcal{L}(E, H)$.
Finalement $g \circ f$ est différentiable en a et $\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a)$.
□

Exemple Les fonctions rationnelles sur $\mathbb{R}^p$ sont différentiables car l'inverse d'une fonction polynomiale est différentiable par un argument de composition.

Corollaire

> Soient $f : U \subset E \to \mathbb{R}$ et $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(U) \subset I$.
> Si f est différentiable et φ dérivable $\varphi(f) = \varphi \circ f$ l'est aussi
> $$\mathrm{d}\varphi(f) = \varphi'(f).\mathrm{d}f$$

dém. :
$\mathrm{d}(\varphi \circ f)(a) = \mathrm{d}\varphi(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a)$ or $\mathrm{d}\varphi(f(a)) : h \mapsto \varphi'(f(a))h$ donc $\mathrm{d}(\varphi \circ f)(a) = \varphi'(f(a)).\mathrm{d}f(a)$.
□

Exemple $\mathrm{d}(f^n) = nf^{n-1}\mathrm{d}f$, $\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{f}\right) = -\dfrac{1}{f^2}\mathrm{d}f$, $\mathrm{d}(\ln f) = \dfrac{\mathrm{d}f}{f}$,...

Corollaire

> Soient $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to E$ et $f : U \subset E \to F$ telles que $\gamma(I) \subset U$.
> Si γ est dérivable et f différentiable alors $t \mapsto f(\gamma(t))$ est dérivable et
> $$(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t))\gamma'(t)$$

dém. :
$(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}(f \circ \gamma)(t)(1) = \left(\mathrm{d}f(\gamma(t)) \circ \mathrm{d}\gamma(t)\right)(1) = \mathrm{d}f(\gamma(t))\gamma'(t)$ car $\gamma'(t) = \mathrm{d}\gamma(t)(1)$.
□

Remarque L'application γ est un appelé un arc : elle se comprend comme le paramétrage d'un mobile inscrit évoluant dans E.

Théorème

Soit $f : U \subset E \to F$.
On a équivalence entre :
(i) f est différentiable ;
(ii) les fonctions coordonnées de f dans une base de F le sont.

dém. :
Soient $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de F et $f_1, \dots, f_n$ les fonctions composantes de f dans la base $\mathcal{B}$.
Notons $\mathcal{B}^\star = (\varepsilon_1^\star, \dots, \varepsilon_n^\star)$ la base duale de $\mathcal{B}$.
Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $f_i = \varepsilon_i^\star \circ f$ donc (i) $\Rightarrow$ (ii) par composition de fonctions différentiables puisque $\varepsilon_i^\star$ est différentiable car linéaire.
On a aussi $f = f_1.\varepsilon_1 + \cdots + f_n.\varepsilon_n$ donc (ii) $\Rightarrow$ (i) par opération sur les fonctions différentiables. En effet la fonction constante égale à ε_i est différentiable et par composition avec l'application bilinéaire produit extérieur nous pouvons affirmer que si $f_i : U \to \mathbb{R}$ est différentiable, l'application $f_i.\varepsilon_i : U \to F$ l'est aussi.

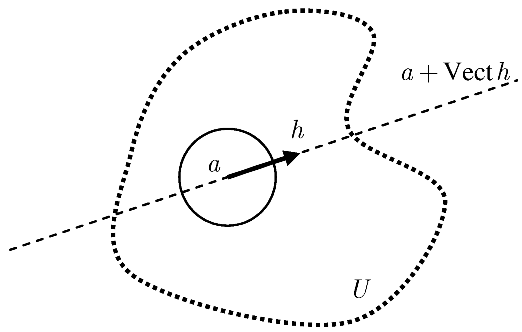
□

Exemple Considérons l'application $f : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^{-1}$.
Puisque $M^{-1} = \dfrac{1}{\det M}{}^t(\mathrm{com}M)$, les coefficients de M^{-1} sont des fonctions rationnelles en les coefficients de M. On en déduit que les fonctions composantes de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont différentiables et donc f est différentiable.
Calculons $\mathrm{d}f(M)$.
Quand $H \to O_n$, $(M+H)^{-1} = M^{-1} + \mathrm{d}f(M).H + o(H)$
En multipliant cette relation à gauche par $M + H$, on obtient
$I_n = I_n + HM^{-1} + (M+H)\mathrm{d}f(M).H + o(H)$ puis $\mathrm{d}f(M)H = -M^{-1}HM^{-1} + o(H)$.
Or $H \mapsto \mathrm{d}f(M)H$ et $H \mapsto -M^{-1}HM^{-1}$ sont linéaires donc égales en vertu de la relation ci-dessus.
Ainsi $\mathrm{d}f(M) : H \mapsto -M^{-1}HM^{-1}$.

22.2 Dérivées partielles

22.2.1 Dérivation selon un vecteur

Soient $f : U \subset E \to F$ et $a \in U$. Puisque U est ouvert, il existe $\alpha > 0$ tel que $B(a, \alpha) \subset U$.
Pour $h \in E$ fixé, la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto f(a + t.h)$ est définie au voisinage de 0, elle étudie les valeurs prises par f sur la droite $a + \mathrm{Vect}h$.



Définition

On dit que f est dérivable en a selon le vecteur h si la fonction $t \mapsto f(a + t.h)$ est dérivable en 0.
On pose alors

$$\mathrm{D}_h f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(f(a + t.h) - f(a) \right)$$

appelé vecteur dérivé de f en a selon le vecteur h.

Proposition

Si f est différentiable en a alors f est dérivable en a selon tout vecteur $h \in E$ et

$$\mathrm{D}_h f(a) = \mathrm{d}f(a).h$$

dém. :
Quand $h \to 0_E$, $f(a + h) = f(a) + \mathrm{d}f(a)h + o(h)$.
Pour $h \in E$ fixé.
Quand $t \to 0$, $f(a+t.h) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(t.h) + o(t) = f(a) + t\mathrm{d}f(a)(h) + o(t)$ car $\mathrm{d}f(a)$ est linéaire.
Par suite $\frac{1}{t} \left(f(a + t.h) - f(a) \right) \to \mathrm{d}f(a)h$.
□

Exemple Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3/y$ pour $y \neq 0$ et $f(x, 0) = 0$.
Soit $h = (h_x, h_y) \in \mathbb{R}^2$. Etudions $\mathrm{D}_h f(0, 0)$.
$\frac{1}{t} \left(f((0, 0) + t.h) - f(0, 0) \right) = \frac{1}{t} f(t.h_x, t.h_y)$.
Si $h_y \neq 0$ alors $\frac{1}{t} f(t.h_x, t.h_y) = \frac{t^3 h_x^3}{t^2 h_y} \xrightarrow[t \to 0]{} 0$.
Si $h_y = 0$ alors $\frac{1}{t} f(t.h_x, t.h_y) = 0 \xrightarrow[t \to 0]{} 0$.
Ainsi f est dérivable en $(0, 0)$ selon tout vecteur h et $\mathrm{D}_h f(0, 0) = 0$.
Cependant f n'est pas continue en (0,0) (et a fortiori n'y est pas différentiable) car
$f(1/n, 1/n^3) = 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \neq f(0, 0)$ alors $\left(1/n, 1/n^3\right) \to (0, 0)$.

22.2.2 Dérivées partielles

Choisissons arbitrairement une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ de E.
Soit $f : U \subset E \to F$.

Définition

Sous réserve d'existence, on appelle j-ème vecteur dérivé partiel de f dans la base $\mathcal{B}$ en $a \in U$ le vecteur dérivé de f en a selon le vecteur e_j. On note alors

$$\mathrm{D}_j f(a) = \mathrm{D}_{e_j} f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(f(a + t.e_j) - f(a) \right)$$

Exemple Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$.
Considérons la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$.
Les dérivées partielles de f dans $\mathcal{B}$ en (x_1, x_2) sont

$$\mathrm{D}_1 f(x_1, x_2) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(f(x_1 + t, x_2) - f(x_1, x_2) \right) = x_2^2$$

$$\mathrm{D}_2 f(x_1, x_2) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(f(x_1, x_2 + t) - f(x_1, x_2) \right) = 2x_1 x_2$$

Définition

Sous réserve d'existence, l'application $\mathrm{D}_j f : U \subset E \to F$ est appelée j-ème dérivée partielle de f dans la base $\mathcal{B}$.

Théorème

Si $f : U \subset E \to F$ est différentiable alors les dérivées partielles de f dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ existent et pour tout $a \in U$ on a

$$\mathrm{D}_j f(a) = \mathrm{d}f(a) e_j$$

De plus,

$$\forall h = \sum_{j=1}^{p} h_j e_j \in E, \mathrm{d}f(a)h = \mathrm{D}_h f(a) = \sum_{j=1}^{p} h_j \mathrm{D}_j f(a)$$

dém. :
Si f est différentiable alors pour tout $a \in U$ et tout $h \in E$, f est dérivable a selon le vecteur h et

$$\mathrm{D}_h f(a) = \mathrm{d}f(a)h$$

En particulier pour $h = e_j$,

$$\mathrm{D}_j f(a) = \mathrm{D}_{e_j} f(a) = \mathrm{d}f(a) e_j$$

De plus, si $h_1 = h_1 e_1 + \cdots + h_p e_p$ alors

$$\mathrm{d}f(a)h = \mathrm{d}f(a) \left(\sum_{j=1}^{p} h_j e_j \right) = \sum_{j=1}^{p} h_j \, \mathrm{d}f(a) e_j = \sum_{j=1}^{p} h_j \mathrm{D}_j f(a)$$

car $\mathrm{d}f(a)$ est une application linéaire.
□

Corollaire

Le développement limité à l'ordre 1 de f en a s'écrit alors

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{p} h_j \mathrm{D}_j f(a) + o(h) \text{ quand } h \to 0_E$$

Remarque Sous l'hypothèse « f est différentiable en a », les dérivées partielles permettent de calculer la différentielle de f... Il reste à savoir calculer les dérivées partielles de f !

22.2.3 Dérivées partielles et applications partielles

Soient $f : U \subset E \to F$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E.
Pour $x \in U$, convenons de noter $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.
On a alors

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_p e_p \text{ et } f(x) = f(x_1 e_1 + \cdots + x_p e_p)$$

Cela permet de percevoir la fonction f comme une fonction de p variables réelles $x_1, \ldots, x_p$.
On se propose de fixer $p-1$ de ces variables et de n'en faire évoluer plus qu'une.

Définition

On appelle j-ème application partielle de f dans la base $\mathcal{B}$ en $x \in U$ l'application

$$x_j \mapsto f(x_1 e_1 + \cdots + x_j e_j + \cdots + x_p e_p)$$

Exemple Soit $f : \begin{cases} U \subset \mathbb{R}^3 \to F \\ (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) \end{cases}$.
On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B}$
Les applications partielles de f dans $\mathcal{B}$ en (x_0, y_0, z_0) sont :
$f(.,y,z) : x \mapsto f(x, y_0, z_0)$, $f(x,.,z) : y \mapsto f(x_0, y, z_0)$ et $f(x,y,.) : z \mapsto f(x_0, y_0, z)$.

Exemple Soit $f : \begin{cases} U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto f(z) \end{cases}$.
On munit $\mathbb{C}$ de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, i)$.
Les applications partielle de f dans $\mathcal{B}$ en $z = a + ib$ sont :
$x \mapsto f(x + ib)$ et $y \mapsto f(a + iy)$.

Théorème

Sous réserve d'existence, les dérivées partielles de $f : U \subset E \to F$ dans $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ sont les dérivées des applications partielles de f dans $\mathcal{B}$.
Autrement dit

$$\mathrm{D}_j f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_j}\left(f(x_1 e_1 + \cdots + x_p e_p)\right)$$

dém. :
La j-ème application partielle de f en $x = x_1 e_1 + \cdots + x_p e_p$ est $f_j : x_j \mapsto f(x_1 e_1 + \cdots + x_j e_j + \ldots + x_p e_p)$.
Sous réserve d'existence

$$\mathrm{D}_j f(x) = \lim_{t \to 0}\left(\frac{1}{t}\left(f(x + t e_j) - f(x)\right)\right) = \lim_{t \to 0}\left(\frac{1}{t}\left(f_j(x_j + t) - f_j(x_j)\right)\right) = f_j'(x_j)$$

□

Définition

Si l'on convient de noter $x_1, \dots, x_p$ les composantes de la variable x dans la base $\mathcal{B}$, il est usuel de noter $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_p}$ les dérivées partielles de f. Ainsi

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_j}\left(f(x)\right) = \lim_{t \to 0}\frac{1}{t}\left(f(x + t e_j) - f(x)\right)$$

Exemple Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x^2 + z\sin(xy)$.
Les dérivées partielles dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de f sont
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2 + z\sin(xy)\right) = 2x + yz\cos(xy)$,
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(x^2 + z\sin(xy)\right) = xz\cos(xy)$ et
$\dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(x^2 + z\sin(xy)\right) = \sin(xy)$

Exemple Soit $f : \mathbb{C}^\star \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = 1/z$.
Les dérivées partielles dans la base canonique de f en $z = x + iy$ sont :
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(z) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{x + iy}\right) = -\dfrac{1}{(x + iy)^2} = -\dfrac{1}{z^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(z) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\dfrac{1}{x + iy}\right) = -\dfrac{i}{z^2}$.

Exemple Soit $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^2$.
Les dérivées partielles dans la base canonique de f en $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sont :
$\dfrac{\partial f}{\partial a}(M) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(M^2\right) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, $\dfrac{\partial f}{\partial b}(M) = \begin{pmatrix} c & a + d \\ 0 & c \end{pmatrix}$,...

Exemple Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Les dérivées partielles dans la base canonique de f en $(0,0)$ sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\left(f(t,0)-f(0,0)\right)=1 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\left(f(0,t)-f(0,0)\right)=-1$$

22.3 Fonction de classe $\mathcal{C}^1$

22.3.1 Définition

Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_p)$ une base de E.

Définition

On dit qu'une fonction $f:U\subset E\to F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ dans la base $\mathcal{B}$ si les dérivées partielles de f dans $\mathcal{B}$ existent et sont continues.

Théorème

Soit $f:U\subset E\to F$. On a équivalence entre :
(i) f est de classe $\mathcal{C}^1$ dans la base $\mathcal{B}$;
(ii) f est différentiable et $\mathrm{d}f$ est continue.

dém. :
(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons f différentiable et $\mathrm{d}f$ continue.
Les dérivées partielles de f dans $\mathcal{B}$ existent et sont données par $\mathrm{D}_jf(a)=\mathrm{d}f(a)e_j$.
Puisque l'application $a\mapsto\mathrm{d}f(a)$ est continue, puisque l'application constante $a\mapsto e_j$ est continue et puisque l'application $b:\mathcal{L}(E,F)\times E\to F$ définie par $b(u,x)=u(x)$ est continue car bilinéaire en dimension finie, on peut affirmer que l'application $a\mapsto\mathrm{D}_jf(a)$ est continue par opérations sur les fonctions continues.
(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons f de classe $\mathcal{C}^1$ dans la base $\mathcal{B}$.
Cas : $E=\mathbb{R}^2$, $F=\mathbb{R}$ et $\mathcal{B}=(e_1,e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
$f:(x_1,x_2)\mapsto f(x_1,x_2)$.
Soit $a=(a_1,a_2)\in U$.
Quand $h=(h_1,h_2)\to(0,0)$, $f(a+h)=f(a)+\ell(h)+o(h)$?
On a $f(a+h)-f(a)=f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2+h_2)+f(a_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)$.
En appliquant le TAF aux applications partielles $x_1\mapsto f(x_1,a_2+h_2)$ et $x_2\mapsto f(a_1,x_2)$, il existe, d'une part, c_h compris entre a_1 et a_1+h_1 et, d'autre part, d_h compris entre a_2 et a_2+h_2 vérifiant :

$$f(a+h)-f(a)=h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_h,a_2+h_2)+h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,d_h)$$

Quand $h\to(0,0)$, $(c_h,a_2+h_2)\to(a_1,a_2)$ et $(a_1,d_h)\to(a_1,a_2)$ donc par continuité des dérivées partielles de f, on obtient $f(a+h)-f(a)=h_1\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2)+h_2\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)+o(h)$
Ainsi $f(a+h)=f(a)+\ell(h)+o(h)$ avec $\ell:(h_1,h_2)\mapsto h_1\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)+h_2\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a)$ linéaire.

On en déduit que f est différentiable en a et $\mathrm{d}f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)e_1^\star + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a)e_2^\star$.

Par opérations sur les fonctions continues, $\mathrm{d}f$ est continue. En effet les applications $a \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)$, $a \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a)$ sont continues, les applications $a \mapsto e_1^\star$ et $a \mapsto e_2^\star$ sont continues car constantes et enfin l'application produit extérieur est continue.

□

Corollaire

La notion de classe $\mathcal{C}^1$ ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$.

dém. :

L'énoncé (ii) ne fait pas référence à la base $\mathcal{B}$.

En fait cette assertion (ii) aurait pu être prise comme définition du concept de fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

□

Corollaire

Les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sont continues.

dém. :

Car différentiables.

□

Exemple Les fonctions constantes sont de classe $\mathcal{C}^1$ car de dérivées partielles nulles donc continues.

Exemple Les applications linéaires sont de classe $\mathcal{C}^1$.

En effet, pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$, les dérivées partielles de f dans $\mathcal{B}$ sont les applications données par $\mathrm{D}_j f(a) = \mathrm{d}f(a)e_j = f(e_j)$. Ce sont des applications constantes donc continues.

En particulier, les applications $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p \mapsto x_j$, $z \in \mathbb{C} \mapsto \mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \mapsto a_{i,j}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$.

22.3.2 Opérations

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $j \in \{1, \ldots, p\}$

Théorème

Soient $f, g : U \subset E \to F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ alors $\lambda f + \mu g$ aussi et

$$\mathrm{D}_j(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathrm{D}_j f + \mu \mathrm{D}_j g$$

dém. :

f et g sont différentiables donc $\lambda f + \mu g$ aussi et $\mathrm{d}(\lambda f + \mu g) = \lambda\, \mathrm{d}f + \mu\, \mathrm{d}g$.

Les dérivées partielles de $\lambda f + \mu g$ existent et

$\mathrm{D}_j(\lambda f + \mu g)(a) = \mathrm{d}(\lambda f + \mu g)(a)e_j = (\lambda\, \mathrm{d}f(a) + \mu\, \mathrm{d}g(a))\, e_j = \lambda \mathrm{D}_j f(a) + \mu \mathrm{D}_j g(a)$.

Les dérivées partielles de $\lambda f + \mu g$ sont donc continues.

□

Corollaire

L'ensemble $\mathcal{C}^1(U, F)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de u vers F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(U, F)$.

Théorème

Soient $f : U \subset E \to F$, $g : U \subset E \to G$ et $b : F \times G \to H$ bilinéaire.
Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ alors $b(f, g)$ aussi et

$$\mathrm{D}_j b(f, g) = b(\mathrm{D}_j f, g) + b(f, \mathrm{D}_j g)$$

dém. :
f et g sont différentiables donc $b(f, g)$ aussi et $\mathrm{d}b(f, g) = b(\mathrm{d}f, g) + b(f, \mathrm{d}g)$.
Les dérivées partielles de $b(f, g)$ existent et
$\mathrm{D}_j b(f, g)(a) = b(\mathrm{d}f(a)(e_j), g(a)) + b(f(a), \mathrm{d}g(a)(e_j)) = b(\mathrm{D}_j f(a), g(a)) + b(f(a), \mathrm{D}_j g(a))$.
Les dérivées partielles de $b(f, g)$ sont donc continues.
□

Corollaire

Si F est une algèbre alors $\mathcal{C}^1(U, F)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(U, F)$.

Théorème

Soit $f : U \subset E \to F$.
On a équivalence entre :
(i) f est de classe $\mathcal{C}^1$;
(ii) les fonctions coordonnées de f dans une base de F sont de classe $\mathcal{C}^1$.
De plus, on a alors $(\mathrm{D}_j f)_i = \mathrm{D}_j(f_i)$ en notant f_i et $(\mathrm{D}_j f)_i$ les fonctions coordonnées de f et $\mathrm{D}_j f$.

dém. :
Soit $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ base de F.
(ii) ⇒ (i) On a $f = f_1\varepsilon_1 + \cdots + f_n\varepsilon_n$ donc

$$\mathrm{D}_j f(a) = \mathrm{D}_j(f_1)(a)\varepsilon_1 + \cdots + \mathrm{D}_j(f_n)(a)\varepsilon_n$$

Les dérivées partielles sont continues donc f est de classe $\mathcal{C}^1$.
(i) ⇒ (ii) On a $f_i = \varepsilon_i^\star \circ f$ donc

$$\mathrm{D}_j(f_i)(a) = \lim_{t\to 0} \varepsilon_i^\star \left(\frac{1}{t}\left(f(a + te_j) - f(a)\right)\right) = \varepsilon_i^\star \left([\mathrm{D}_j(f)]_i (a)\right)$$

et $\mathrm{D}_j(f_i) = \varepsilon_i^\star \circ \mathrm{D}_j(f)$ est continue par composition.
□

Exemple La fonction $(x, y) \mapsto (x + y, xy)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ car ses fonctions composantes le sont.

22.3.3 Composition

On suppose E et F munis de bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$.

Théorème

Soient $f : U \subset E \to F$ et $g : V \subset F \to G$ telles que $f(U) \subset V$.
Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $a \in U$

$$\mathrm{D}_j(g \circ f)(a) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}_j f_i(a).\mathrm{D}_i g(f(a))$$

avec $f_1, \ldots, f_n$ les fonctions coordonnées de f.

dém. :
f et g sont différentiables donc $g \circ f$ l'est aussi et

$$\mathrm{d}(g \circ f)(a) = [(\mathrm{d}g)(f(a))] \circ (\mathrm{d}f)(a)$$

Par suite

$$\mathrm{D}_j(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a))\,(\mathrm{D}_j(f)(a))$$

Or $f = \sum_{i=1}^{n} f_i \varepsilon_i$ donc $\mathrm{D}_j(f)(a) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}_j(f_i)(a)\varepsilon_i$ puis

$$\mathrm{D}_j(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a))\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}_j(f_i)(a)\varepsilon_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}_j(f_i)(a).\mathrm{D}_i g(f(a))$$

Ainsi les dérivées partielles de $g \circ f$ existent et sont continues.
□

Proposition

Soient $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to E$ et $f : U \subset E \to F$ telles que $\gamma(I) \subset U$.
On note $x_1, \ldots, x_p$ les fonctions coordonnées de γ de sorte que

$$\gamma(t) = x_1(t)e_1 + \cdots + x_p(t)e_p$$

Si γ et f sont de classe $\mathcal{C}^1$ alors $f(\gamma) : t \mapsto f(\gamma(t))$ l'est aussi et :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(\gamma(t))\right) = \mathrm{d}f(\gamma(t)).\gamma'(t) = x_1'(t)\mathrm{D}_1 f(\gamma(t)) + \cdots + x_p'(t)\mathrm{D}_p f(\gamma(t))$$

dém. :
Rappelons que pour g une fonction dérivable $g'(t) = \mathrm{d}g(t).1$.
Par suite

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(\gamma(t))\right) = \mathrm{d}(f(\gamma(t)).1 = \mathrm{d}f(\gamma(t)) \circ \mathrm{d}\gamma(t).1 = \mathrm{d}f(\gamma(t)).\gamma'(t)$$

Or $\gamma'(t) = \sum_{j=1}^{n} x_j'(t)e_j$ donc par linéarité

$$\mathrm{d}f(\gamma(t)).\gamma'(t) = \sum_{j=1}^{p} x_j'(t)\,\mathrm{d}f(\gamma(t)).e_j = \sum_{j=1}^{p} x_j'(t)\mathrm{D}_j f(\gamma(t))$$

□

Exemple Soient $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto f(x,y,z) \in \mathbb{R}$ et $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto (x(t),y(t),z(t)) \in \mathbb{R}^3$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
L'application $t \mapsto f(x(t),y(t),z(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(x(t),y(t),z(t))\right) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}\left(x(t),y(t),z(t)\right)$$
$$+y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}\left(x(t),y(t),z(t)\right) + z'(t)\frac{\partial f}{\partial z}\left(x(t),y(t),z(t)\right)$$

Attention : Ici écrire $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ n'aurait pas de sens.

Exemple Soit $f : (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(u,v) \in \mathbb{R}$ et $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto (x(t),y(t)) \in \mathbb{R}^2$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
L'application $t \mapsto f(x(t),y(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(x(t),y(t)\right) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial u}\left(x(t),y(t)\right) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial v}\left(x(t),y(t)\right)$$

Exemple Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
L'application $t \in \mathbb{R} \mapsto f(2t, 1+t^2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par composition et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(2t,1+t^2)\right) = 2\frac{\partial f}{\partial x}(2t,1+t^2) + 2t\frac{\partial f}{\partial y}(2t,1+t^2)$$

Exemple Soit $f : (a,b) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(a,b) \in \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
L'application $t \mapsto f(\cos(t),\sin(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(\cos(t),\sin(t))\right) = -\sin t\frac{\partial f}{\partial a}(\cos t,\sin t) + \cos t\frac{\partial f}{\partial b}(\cos t,\sin t)$$

Exemple Soient $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$ et $\Phi : (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (\varphi(u,v),\psi(u,v)) \in \mathbb{R}^2$ fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
L'application $g = f \circ \Phi : (u,v) \mapsto f\left(\varphi(u,v),\psi(u,v)\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(f(\varphi(u,v),\psi(u,v)\right)$$
$$= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}\left(\varphi(u,v),\psi(u,v)\right) + \frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}\left(\varphi(u,v),\psi(u,v)\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\left(f(\varphi(u,v),\psi(u,v)\right)$$
$$= \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}\left(\varphi(u,v),\psi(u,v)\right) + \frac{\partial \psi}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}\left(\varphi(u,v),\psi(u,v)\right)$$

Attention : Ici écrire $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ n'aurait pas de sens.

Exemple Soient $f : (a,b) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(a,b) \in \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
L'application $g : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x+y, xy)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et
$\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial a}(x+y,xy) + y\dfrac{\partial f}{\partial b}(x+y,xy)$,
$\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial a}(x+y,xy) + x\dfrac{\partial f}{\partial b}(x+y,xy)$.

Exemple Soient $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
L'application $g : (r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et
$\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$,
$\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Remarque Les résultats qui précèdent se retiennent sous la forme de « la règle de la chaîne » :

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(f(x_1,\dots,x_p)\right) = \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial x_p}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x_p}$$

22.3.4 Matrice jacobienne

On suppose E et F munis de bases $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_p)$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$.

Définition

On appelle matrice jacobienne relative aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ d'une application $f : U \subset E \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$ en $a \in U$ la matrice de l'application linéaire $\mathrm{d}f(a)$ relative aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$

$$\mathrm{Jac}(f)(a) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{d}f(a)) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$$

Proposition

En notant $f_1,\dots,f_n$ les fonctions coordonnées de f

$$\mathrm{Jac}(f)(a) = \left(\mathrm{D}_j f_i(a)\right)_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$$

En notant $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ les dérivées partielles de f

$$\mathrm{Jac}(f)(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}$$

dém. :
Les colonnes $\text{Jac}(f)(a) = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{d}f(a))$ sont formées par les composantes dans $\mathcal{C}$ des vecteurs $\mathrm{d}f(a)e_j = \mathrm{D}_j f(a)$ et l'on sait $(\mathrm{D}_j f)_i = \mathrm{D}_j(f_i)$.
□

Exemple Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = \left(x^2 + y^2 + z^2, xyz\right)$.

$$\text{Jac}(f)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

Exemple Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

$$\text{Jac}(\varphi)(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Théorème

Pour $f : U \subset E \to F$ et $g : V \subset F \to G$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(U) \subset V$ on a

$$\text{Jac}(g \circ f)(a) = \text{Jac}(g)(f(a)) \times \text{Jac}(f)(a)$$

dém. :
C'est la vision matricielle de l'égalité $\mathrm{d}(g \circ f)(a) = (\mathrm{d}g(f(a))) \circ \mathrm{d}f(a)$.
□

Exemple Soient $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $g : (r, \theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$
$g = f \circ \varphi$ avec $\varphi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.
Puisque φ est de classe $\mathcal{C}^1$, g est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ par composition.
$\text{Jac} f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$, $\text{Jac} g(r, \theta) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) & \dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) \end{pmatrix}$ et
$\text{Jac}\varphi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$.
L'égalité $\text{Jac} g(r, \theta) = (\text{Jac} f)(\varphi(r, \theta)) \times \text{Jac}\varphi(r, \theta)$ donne :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) & \dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Cela permet d'exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.

22.3.5 Difféomorphisme

22.3.5.1 Définition

Définition

On appelle $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme d'un ouvert U de E vers un ouvert V de F toute application bijective $\varphi : U \to V$ telle que φ et φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Exemple Considérons $U = \mathbb{R}^{+\star} \times \left]-\pi/2, \pi/2\right[$ et $V = \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$.

L'application $\varphi : U \to V$ définie par $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est une bijection de U vers V.
Son application réciproque est $\varphi^{-1} : (x,y) \mapsto \left(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan(y/x)\right)$.
Puisque φ et φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$, φ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de U vers V.

Proposition

La composée de deux difféomorphismes en est un.

Proposition

La bijection réciproque d'un difféomorphisme en est un.

Théorème

Si φ est $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme d'un ouvert $U \subset E$ vers un ouvert $V \subset F$ alors pour tout $a \in U$, $\mathrm{d}\varphi(a)$ est un isomorphisme de E vers F et $(\mathrm{d}\varphi(a))^{-1} = \mathrm{d}\varphi^{-1}(\varphi(a))$.

dém. :
D'une part $\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{Id}_U$ donne $\mathrm{d}\varphi^{-1}(\varphi(a)) \circ \mathrm{d}\varphi(a) = \mathrm{dId}_U(a) = \mathrm{Id}_E$ pour tout $a \in U$
D'autre part $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{Id}_V$ donne $\mathrm{d}\varphi(\varphi^{-1}(b)) \circ \mathrm{d}\varphi^{-1}(b) = \mathrm{dId}_V(b) = \mathrm{Id}_F$ pour tout $b \in V$.
En $b = \varphi(a)$, on obtient $\mathrm{d}\varphi(a) \circ \mathrm{d}\varphi^{-1}(\varphi(a)) = \mathrm{Id}_F$.
Par suite $\mathrm{d}\varphi(a)$ est un isomorphisme et $(\mathrm{d}\varphi(a))^{-1} = \mathrm{d}\varphi^{-1}(\varphi(a))$.
□

Corollaire

S'il existe un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme d'un ouvert non vide de E vers un ouvert de F alors $\dim E = \dim F$.

dém. :
Car E et F sont isomorphes.
□

Corollaire

Si φ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme d'un ouvert $U \subset E$ vers un ouvert $V \subset F$ alors pour tout $a \in U$, la matrice $\mathrm{Jac}(\varphi)(a)$ est inversible et

$$(\mathrm{Jac}(\varphi)(a))^{-1} = \mathrm{Jac}(\varphi^{-1})(\varphi(a))$$

dém. :
C'est la vision matricielle de l'égalité $(\mathrm{d}\varphi(a))^{-1} = \mathrm{d}\varphi^{-1}(\varphi(a))$.
□

Remarque Cette formule est celle qui prolonge l'identité $(\varphi^{-1})'(\varphi(a)) = \dfrac{1}{\varphi'(a)}$ connue pour les fonctions réelles permet d'exprimer les dérivées partielles de φ^{-1} en fonction de celles de φ.

22.3.5.2 Théorème d'inversion globale

On suppose $\dim E = \dim F$.

Définition

On appelle jacobien d'une application $f : U \subset E \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$ le déterminant de la matrice jacobienne de f.

Exemple Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x+y, xy)$
Le jacobien de f en (x,y) est $\det\left(\text{Jac}(f)(x,y)\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{vmatrix} = x - y$

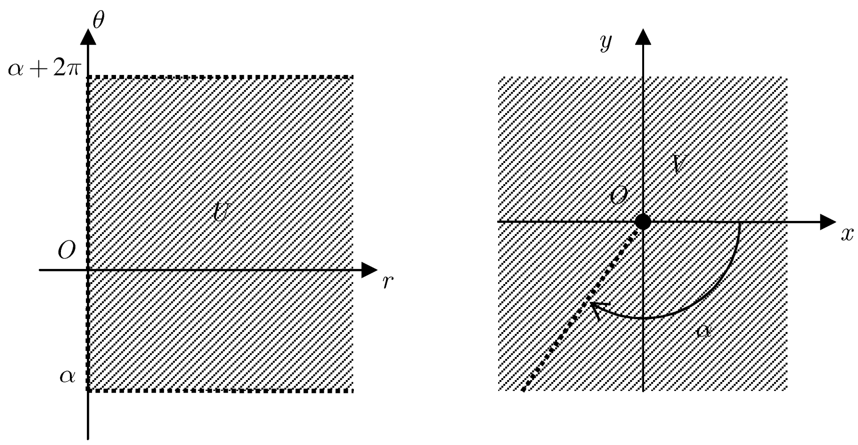
Exemple Si φ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme alors son jacobien ne s'annule pas car sa matrice jacobienne est inversible.

Théorème

On suppose $\dim E = \dim F$.
Si $\varphi : U \subset E \to F$ est une application injective de classe $\mathcal{C}^1$ dont le jacobien ne s'annule pas alors $V = \varphi(U)$ est un ouvert de F et φ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de U sur V.

Remarque Ce théorème permet de justifier qu'une application est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme sans étudier le caractère $\mathcal{C}^1$ de l'application réciproque et donc sans avoir besoin d'exprimer celle-ci !

Exemple Soit $\varphi : (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$.
φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et le jacobien de φ en (r,θ) est $\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$.
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, considérons $U = \mathbb{R}^{+\star} \times \left]\alpha, \alpha+2\pi\right[$ ouvert.
$\varphi_{\restriction U}$ est injective, de classe $\mathcal{C}^1$ et son jacobien ne s'annule pas, c'est donc un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de U vers $V = \varphi(U)$.
Ici $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(r\cos\alpha, r\sin\alpha)/r \geqslant 0\}$.



22.4 Fonction de classe $\mathcal{C}^k$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.

22.4.1 Dérivées partielles successives

Définition

Soit $f : U \subset E \to F$.
La fonction f est appelée dérivée partielle d'ordre 0 de f.
Pour $k \in \mathbb{N}$, sous réserve d'existence, on appelle dérivées partielles d'ordre $k+1$ de f les dérivées partielles des dérivées partielles d'ordre k de f.

Remarque Si l'on note $x_1, \dots, x_p$ les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ de la variable x, on note

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} = \mathrm{D}_{i_1}(\dots(D_{i_k} f)\dots)$$

Exemple Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x\,\mathrm{e}^{xy}$.
Les dérivées partielles d'ordre 1 de f sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (1+xy)\mathrm{e}^{xy} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2\mathrm{e}^{xy}$$

Les dérivées partielles d'ordre 2 de f sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = (2y+xy^2)\mathrm{e}^{xy},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = (2x+x^2y)\mathrm{e}^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = (2x+x^2y)\mathrm{e}^{xy},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^3\mathrm{e}^{xy}$$

22.4.2 Classe d'une fonction

Définition

On dit que $f : U \subset E \to F$ est de classe $\mathcal{C}^k$ (dans la base $\mathcal{B}$) si les dérivées partielles d'ordre k de f dans la base $\mathcal{B}$ existent et sont continues.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si f est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Remarque Les applications de classe $\mathcal{C}^0$ correspondent aux applications continues.

Exemple Les applications constantes sont $\mathcal{C}^\infty$.

Exemple Les application linéaires sont $\mathcal{C}^\infty$ car leur dérivées partielles sont constantes.
En effet pour une application linéaire f, $\mathrm{D}_j f(a) = \mathrm{d}f(a)e_j = f(e_j)$.
En particulier $(x_1, \dots, x_p) \mapsto x_j$, $z \mapsto \mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)$ et $A \mapsto a_{i,j}$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Proposition

> Si $f : U \subset E \to F$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ alors f est de classe $\mathcal{C}^k$.

dém. :
Si f est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ alors les dérivées partielles d'ordre k de f existent et sont de classe $\mathcal{C}^1$ donc continues.
□

22.4.3 Opérations

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Lemme

> On a équivalence entre :
> (i) f est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$;
> (ii) les dérivées partielles de f existent et sont de classe $\mathcal{C}^k$.

dém. :
Les dérivées partielles d'ordre $k+1$ de f sont les dérivées partielles d'ordre k des dérivées partielles de f.
□

Théorème

> Soient $f, g : U \subset E \to F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
> Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$ alors $\lambda f + \mu g$ l'est aussi.

dém. :
Par récurrence pour $k \in \mathbb{N}$.
Pour $k = 0$: ok
Supposons la propriété établie au rang $k \geqslant 0$.
Soient f et g de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.
f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ donc $\lambda f + \mu g$ aussi et pour tout $1 \leqslant j \leqslant p$, $\mathrm{D}_j(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathrm{D}_j f + \mu \mathrm{D}_j g$.
Puisque $\mathrm{D}_j f$ et $\mathrm{D}_j g$ sont de classe $\mathcal{C}^k$, on obtient $\mathrm{D}_j(\lambda f + \mu g)$ de classe $\mathcal{C}^k$ en vertu de l'hypothèse de récurrence.
Ainsi les dérivées partielles de $\lambda f + \mu g$ existent et sont de classe $\mathcal{C}^k$ donc $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.
Récurrence établie.
Pour $k = \infty$.
Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ alors f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et donc $\lambda f + \mu g$ aussi.
□

Corollaire

> L'ensemble $\mathcal{C}^k(U, F)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ de U vers F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(U, F)$.

Corollaire

> La notion de fonction de classe $\mathcal{C}^k$ ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$.

dém. :
Par récurrence pour $k \in \mathbb{N}$.
Pour $k = 0$: ok
Supposons la propriété établie au rang $k \geqslant 0$.
Supposons f de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$.
Les dérivées partielles $\mathrm{D}_1 f, \ldots, \mathrm{D}_p f$ de f dans $\mathcal{B}$ existent et sont de classe $\mathcal{C}^k$.

Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_p)$ une autre base de E, notons $\mathrm{D'}_1 f, \ldots, \mathrm{D'}_p f$ les dérivées partielles de f dans $\mathcal{B}'$.
Celles-ci sont des combinaisons linéaires des dérivées partielles $\mathrm{D}_1 f, \ldots, \mathrm{D}_p f$.
En effet puisque f est au moins de classe $\mathcal{C}^1$, f est différentiable et donc
$\mathrm{D'}_j f(a) = \mathrm{d}f(a)e'_j = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{i,j} \mathrm{D}_i f(a)$ en posant $e'_j = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{i,j} e_i$.
Puisque les dérivées partielles dans $\mathcal{B}$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ dans $\mathcal{B}$, par combinaison linéaire, les dérivées partielles dans $\mathcal{B}'$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ dans $\mathcal{B}$ et donc dans $\mathcal{B}'$ par hypothèse de récurrence.
On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ dans la base $\mathcal{B}'$.
Récurrence établie.
Pour $k = \infty$: ok
□

Théorème

> Soient $f : U \subset E \to F$, $g : U \subset E \to G$ et $b : F \times G \to H$ bilinéaire.
> Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ alors $b(f, g)$ l'est aussi.

dém. :
Par récurrence pour $k \in \mathbb{N}$.
Pour $k = 0$: ok car l'application bilinéaire b est continue.
Supposons la propriété établie au rang $k \geqslant 0$.
Soient f et g de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.
f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ donc $b(f, g)$ aussi et pour tout $1 \leqslant j \leqslant p$, $\mathrm{D}_j b(f, g) = b\left(\mathrm{D}_j f, g\right) + b\left(f, \mathrm{D}_j g\right)$.
Puisque $\mathrm{D}_j f$ et $\mathrm{D}_j g$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ et puisque f, g sont aussi de classe $\mathcal{C}^k$, on peut affirmer que $\mathrm{D}_j b(f, g)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ en vertu de l'hypothèse de récurrence.
Ainsi les dérivées partielles de $b(f, g)$ existent et sont de classe $\mathcal{C}^k$ donc $b(f, g)$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.
Récurrence établie.
Pour $k = \infty$: ok.
□

Corollaire

> Si F est une algèbre alors $\mathcal{C}^k(U, F)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(U, F)$.

Exemple Les fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^p$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exemple L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par somme et produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

Théorème

> Soit $f : U \subset E \to F$.
> On a équivalence entre :
> (i) f est de classe $\mathcal{C}^k$;
> (ii) les fonctions composantes de f dans une base de F sont de classe $\mathcal{C}^k$.

dém. :
Notons $f_1, \ldots, f_n$ les fonctions coordonnées de f dans une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$.
On démontre l'équivalence par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ sachant que pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ on a

$$\left(\mathrm{D}_j f\right)_i = \mathrm{D}_j\left(f_i\right)$$

□

Exemple $f:(x,y)\mapsto(x^2+y^2,xy)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Théorème

Soient $f:U\subset E\to F$ et $g:V\subset F\to G$ telles que $f(U)\subset V$.
Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$ alors $g\circ f$ l'est aussi.

dém. :
Par récurrence pour $k\in\mathbb{N}$.
Pour $k=0$: ok
Supposons la propriété établie au rang $k\geqslant 0$.
Soient f et g de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.
f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ donc $g\circ f$ aussi et pour tout $1\leqslant j\leqslant p$, $\mathrm{D}_j(g\circ f)(a)=\sum_{i=1}^n \mathrm{D}_j f_i(a)\mathrm{D}_i g(f(a))$
en notant $f_1,\dots,f_n$ les fonctions composantes dans une base de F.
Puisque $\mathrm{D}_j f_i$ et $\mathrm{D}_j g$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ et puisque f est aussi de classe $\mathcal{C}^k$, on peut affirmer que $\mathrm{D}_j(g\circ f)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ en vertu de l'hypothèse de récurrence et des théorèmes d'opérations.
Ainsi les dérivées partielles de $g\circ f$ existent et sont de classe $\mathcal{C}^k$ donc $g\circ f$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.
Récurrence établie.
Pour $k=\infty$: ok.
□

Exemple Les fonctions rationnelles sur $\mathbb{R}^p$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exemple $\Phi(r,\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ définit une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$.

22.4.4 Théorème de Schwarz

Théorème

Si $f:U\subset E\to F$ est de classe $\mathcal{C}^2$ alors pour tout $i,j\in\{1,\dots,p\}$,

$$\mathrm{D}_i\left(\mathrm{D}_j f\right)=\mathrm{D}_j\left(\mathrm{D}_i f\right)$$

(admis)

Corollaire

Si $f:U\subset E\to F$ est de classe $\mathcal{C}^k$ alors pour tout $i_1,\dots,i_k\in\{1,\dots,p\}$ et tout $\sigma\in\mathfrak{S}_k$ on a :

$$\mathrm{D}_{i_{\sigma(1)}}\left(\mathrm{D}_{i_{\sigma(2)}}\left(\dots\mathrm{D}_{i_{\sigma(k)}}(f)\dots\right)\right)=\mathrm{D}_{i_1}\left(\mathrm{D}_{i_2}\left(\dots\mathrm{D}_{i_k}(f)\dots\right)\right)$$

Exemple Soit $f:(x,y)\mapsto f(x,y)$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $g:(u,v)\mapsto f(u+v,uv)$.
Par composition, g est de classe $\mathcal{C}^2$.
Les dérivées partielles d'ordre 1 de g sont
$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)=\frac{\partial f}{\partial x}(u+v,uv)+v\frac{\partial f}{\partial y}(u+v,uv)$, $\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)=\frac{\partial f}{\partial x}(u+v,uv)+u\frac{\partial f}{\partial y}(u+v,uv)$
Les dérivées partielles d'ordre 2 de g sont

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u+v,uv) + 2v\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u+v,uv) + v^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u+v,uv),$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u+v,uv) + (u+v)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u+v,uv) + uv\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u+v,uv) + \frac{\partial f}{\partial y}(u+v,uv),$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u+v,uv) + 2u\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u+v,uv) + u^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u+v,uv).$$

22.5 Fonctions numériques

Ici les fonctions étudiées sont supposées à valeurs réelles.
Pour $f : U \to \mathbb{R}$ le développement limité à l'ordre 1 de f en a prend la forme

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{p} \mathrm{D}_j f(a) h_j + o(h) = f(a) + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j h_j + o(h)$$

22.5.1 Accroissements finis

Soit U un ouvert convexe de E. Pour tout $a, b \in U$, on a $[a,b] \subset U$ avec $[a,b] = \{(1-t)a + tb / t \in [0,1]\}$.
On suppose E muni d'une norme notée $\| \, . \, \|$. Pour $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, on peut alors introduire

$$\|\varphi\| = \sup_{x \neq 0_E} \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|}$$

Théorème

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
S'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\forall a \in U, \|df(a)\| \leqslant k$$

alors f est k lipschitzienne

$$\forall a, b \in U,\ |f(b) - f(a)| \leqslant k \, \|b - a\|$$

dém. :
Soit $\gamma : [0,1] \to E$ définie par $\gamma(t) = (1-t)a + tb = a + t(b-a)$
γ est de classe $\mathcal{C}^1$ et prend ses valeurs dans U.
Soit $\varphi = f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$.
$\varphi(0) = f(a)$, $\varphi(1) = f(b)$ et φ est de classe $\mathcal{C}^1$.
$\varphi'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t)).\gamma'(t)$ donc

$$|\varphi'(t)| \leqslant k \, \|\gamma'(t)\| \leqslant k \, \|b - a\| = M$$

Par l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction φ

$$|\varphi(1) - \varphi(0)| \leqslant M \, |1 - 0|$$

donc

$$|f(b) - f(a)| \leqslant M = k \, \|b - a\|$$

□

Corollaire

Soient U un ouvert convexe et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
Si
$$\forall a \in U,\ \mathrm{d}f(a) = 0$$
alors f est constante.

22.5.2 Gradient

22.5.2.1 Définition

Ici E désigne un espace vectoriel euclidien dont on note $(. \mid .)$ le produit scalaire.

Théorème

Si $f : U \subset E \to \mathbb{R}$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ alors pour tout $a \in U$, il existe un unique vecteur dans E noté $\mathrm{grad} f(a)$ et appelé gradient de f en a vérifiant
$$\forall h \in E, \mathrm{D}_h f(a) = (\mathrm{grad} f(a) \mid h)$$
De plus, si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthonormée de E alors $\mathrm{grad} f(a) = \mathrm{D}_1 f(a) e_1 + \cdots + \mathrm{D}_p f(a) e_p$.

dém. :
Analyse : Si $\mathrm{grad} f(a)$ est solution alors
$$\mathrm{grad} f(a) = \sum_{j=1}^{p} (\mathrm{grad} f(a) \mid e_j) e_j = \sum_{j=1}^{p} \mathrm{D}_j f(a) e_j$$
car
$$(\mathrm{grad} f(a) \mid e_j) = \mathrm{D}_{e_j} f(a) = \mathrm{D}_j f(a)$$
Synthèse : Posons $\mathrm{grad} f(a) = \mathrm{D}_1 f(a) e_1 + \cdots + \mathrm{D}_p f(a) e_p$.

Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$, f est diffentiable en a et pour tout $h = \sum_{j=1}^{p} h_j e_j \in E$,
$$\mathrm{D}_h f(a) = \mathrm{d}f(a) h = \sum_{j=1}^{p} h_j . \mathrm{d}f(a) e_j = \sum_{j=1}^{p} h_j \mathrm{D}_j f(a) = (\mathrm{grad} f(a) \mid h)$$

□

Remarque En fait $h \mapsto \mathrm{d}f(a)(h)$ est une forme linéaire sur E donc par représentation d'une forme linéaire dans un espace euclidien, il existe un unique vecteur $\mathrm{grad} f(a)$ tel que
$$\forall h \in E, \mathrm{d}f(a) h = (\mathrm{grad} f(a) \mid h)$$

Corollaire

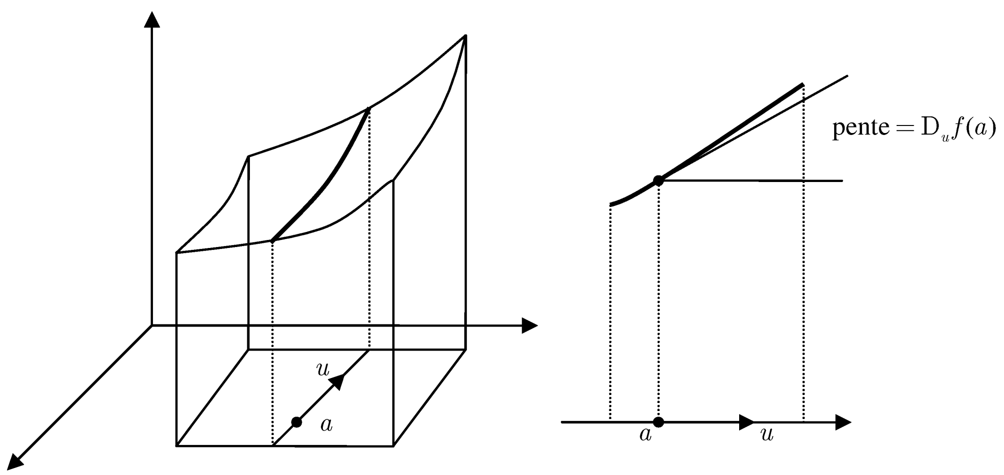
Le développement limité à l'ordre 1 de f en a s'écrit alors
$$f(a+h) = f(a) + (\mathrm{grad} f(a) \mid h) + o(h) \text{ quand } h \to 0_E$$

Exemple Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + 2xy$.
f est de classe $\mathcal{C}^1$.
En munissant $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique et en considérant (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{grad} f(a) = \mathrm{D}_1 f(a) e_1 + \mathrm{D}_2 f(a) e_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)$.
Ainsi $\mathrm{grad} f(x,y) = (2x + 2y, 2x)$.

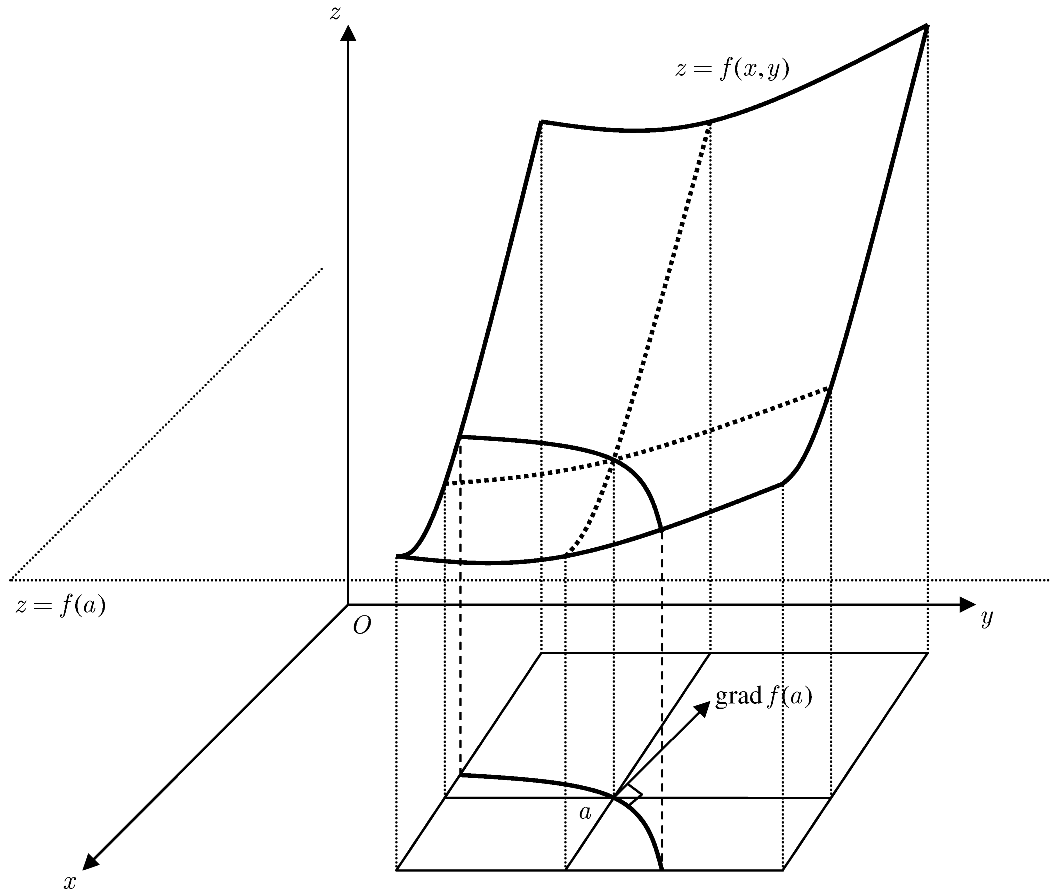
Remarque Pour u un vecteur unitaire

$$\mathrm{D}_u f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(f(a + tu) - f(a)\right)$$

Cette quantité se comprend comme étant la pente de f dans la direction donnée par le vecteur u.



Puisque $\mathrm{D}_u f(a) = (\mathrm{grad} f(a) \mid u)$, cette pente est maximale quand u a le sens et la direction de $\mathrm{grad} f(a)$.
Ainsi le vecteur $\mathrm{grad} f(a)$ indique la direction de la plus grande pente, son sens donne le sens de progression croissante sur cette pente et $\|\mathrm{grad} f(a)\|$ donne la valeur de cette pente maximale.



22.5.2.2 Ligne de niveau

Définition

> Soit $f : X \subset E \to \mathbb{R}$ et $\gamma : I \to \mathbb{R}$ un arc continue inscrit dans U (i.e. $\gamma(I) \subset U$)
> On dit que l'arc γ est une ligne de niveau de f si la fonction $f \circ \gamma$ est constante.

Proposition

> Soient $f : U \subset E \to \mathbb{R}$ et $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to E$ un arc $\mathcal{C}^1$.
> Si γ est une ligne de niveau de f alors en tout point régulier de γ le vecteur gradient est normal à la tangente à l'arc γ.

dém. :
Par dérivation d'une fonction constante

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(\gamma(t))\right) = \mathrm{d}f(\gamma(t))\gamma'(t) = (\mathrm{grad} f(\gamma(t)) \mid \gamma'(t)) = 0$$

□

22.5.2.3 Gradient géométrique

On suppose le plan géométrique muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$.
Soit F une fonction réelle définie sur une partie du plan.
Si (x, y) sont les coordonnées cartésiennes de M, on pose $f(x, y) = F(M)$.

Définition

f est appelée représentation cartésienne de F dans le repère $\mathcal{R}$

Sous réserve d'existence, on pose

$$\frac{\partial F}{\partial x}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ et } \frac{\partial F}{\partial y}(M) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

Définition

On appelle vecteur gradient de F en M le vecteur

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F(M) = \frac{\partial F}{\partial x}(M)\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}(M)\vec{j}$$

On vérifie

$$F(M + \vec{h}) = F(M) + (\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F(M) \mid \vec{h}) + o(\vec{h}) \text{ quand } \vec{h} \to \vec{0}$$

Cette relation caractérise le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F(M)$ et assure que celui-ci est indépendant du choix du repère orthonormé $\mathcal{R}$.
Si (r, θ) est un système de coordonnées polaires de M dans $\mathcal{R}$, on pose $\tilde{f}(r, \theta) = F(M)$.

Définition

$\tilde{f}$ est appelée représentation polaire de F dans le repère $\mathcal{R}$.

Sous réserve d'existence, on pose

$$\frac{\partial F}{\partial r}(M) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta) \text{ et } \frac{\partial F}{\partial \theta}(M) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r, \theta)$$

Proposition

On a

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F(M) = \frac{\partial F}{\partial r}(M)\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}(M)\vec{u}_\theta$$

en notant $\vec{u}_r = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$ et $\vec{u}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$.

dém. :
Si (r, θ) est un système de coordonnées polaires de M alors ses coordonnées cartésiennes sont $(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
Par suite $\tilde{f}(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
On en déduit

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta) = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r, \theta) = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

ce qui se réécrit
$$\frac{\partial F}{\partial r}(M) = \cos\theta \frac{\partial F}{\partial x}(M) + \sin\theta \frac{\partial F}{\partial y}(M) \ (1)$$
$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(M) = -r\sin\theta \frac{\partial F}{\partial x}(M) + r\cos\theta \frac{\partial F}{\partial y}(M) \ (2)$$
$\cos\theta \times (1) - \dfrac{1}{r}\sin\theta \times (2)$ donne
$$\frac{\partial F}{\partial x}(M) = \cos\theta \frac{\partial F}{\partial r}(M) - \frac{1}{r}\sin\theta \frac{\partial F}{\partial \theta}(M)$$
$\sin\theta \times (1) + \dfrac{1}{r}\cos\theta \times (2)$ donne
$$\frac{\partial F}{\partial y}(M) = \sin\theta \frac{\partial F}{\partial r}(M) + \frac{1}{r}\cos\theta \frac{\partial F}{\partial \theta}(M)$$
On en déduit
$$\overrightarrow{\text{grad}}\, F(M) = \frac{\partial F}{\partial x}(M)\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}(M)\vec{j} = \frac{\partial F}{\partial r}(M)\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}(M)\vec{u}_\theta$$

□

Remarque Le physicien retrouve les relations (1) et (2) de la démonstration ci-dessus en écrivant
$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial F}{\partial y}$$

Remarque Dans un esprit analogue, on peut aussi présenter le laplacien en coordonnées polaires et obtenir
$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$$
On peut aussi étudier une fonction définie sur une partie de l'espace géométrique en coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques…

22.5.3 Recherche d'extremum

22.5.3.1 Point critique

Définition

Soit $f : X \subset E \to \mathbb{R}$.
On dit que f admet un minimum (global) en $a \in A$ si
$$\forall x \in X, f(x) \geqslant f(a)$$
On dit que f admet un minimum local en en $a \in A$ si
$$\exists \alpha > 0, \forall x \in X \cap B(a, \alpha), f(x) \geqslant f(a)$$

Remarque Les extremums globaux sont a fortiori des extremums locaux.

Définition

On dit qu'une application $f : U \subset E \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ admet un point critique en $a \in U$ si $\mathrm{d}f(a) = 0$.

Proposition

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, $f : U \subset E \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in U$.
On a équivalence entre :
(i) a est point critique de f ;
(ii) $\forall j \in \{1, \dots, p\}, \mathrm{D}_j f(a) = 0$.

dém. :
(i) $\Rightarrow$ (ii) via $\mathrm{D}_j f(a) = \mathrm{d}f(a)e_j$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) via pour tout $h = h_1 e_1 + \cdots + h_p e_p \in E,\ \mathrm{d}f(a)h = \sum_{j=1}^{p} h_j \mathrm{D}_j f(a)$.
□

Théorème

Si $f : U \subset E \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ admet un extremum local en $a \in U$ alors a est point critique de f.

dém. :
Cas a minimum local :
Il existe $\alpha > 0$ tel que $B(a, \alpha) \subset U$ et $\forall x \in B(a, \alpha), f(x) \geqslant f(a)$.
Pour tout $h \in E$, $\mathrm{d}f(a)h = \mathrm{D}_h f(a) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1}{t}\left(f(a + t.h) - f(a)\right)$.
Quand $t \to 0^+$,
Pour t suffisamment proche de 0, $a + t.h \in B(a, \alpha)$ et $\dfrac{1}{t}\left(f(a + t.h) - f(a)\right) \geqslant 0$ donc à la limite $\mathrm{d}f(a)h \geqslant 0$.
Quand $t \to 0^-$,
On obtient de façon semblable $\mathrm{d}f(a)h \leqslant 0$.
Ainsi $\mathrm{d}f(a)h = 0$ pour tout $h \in E$.
□

Attention : La réciproque n'est pas vraie.

Attention : Ce résultat ne s'applique qu'à une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert.

22.5.3.2 En pratique

Protocole Pour étudier les extremums locaux de $f : U \subset E \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$:
- on recherche les points critiques ;
- on étudie chacun en se ramenant en 0_E par translation si besoin.

Exemple Considérons $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 1$.
f est de classe $\mathcal{C}^1$.
Points critiques :

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + x$.

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$(0,0)$ est seul point critique.
Etude de $(0,0)$.
$f(0,0) = 1$, étudions le signe de $g(x,y) = f(x,y) - f(0,0) = x^2 + y^2 + xy$.
En écrivant $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, $g(x,y) = r^2(1 + \cos\theta\sin\theta) \geqslant 0$.
$(0,0)$ est un minimum global.

Exemple Considérons $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4xy - 1$.
f est de classe $\mathcal{C}^1$.
Points critiques :
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 4y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + 4x$.

$$\begin{cases} 4x + y = 0 \\ x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$(0,0)$ est seul point critique.
Etude de $(0,0)$.
$f(0,0) = -1$. Etudions le signe de $g(x,y) = f(x,y) - f(0,0) = x^2 + y^2 + 4xy$.
En écrivant $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, $g(x,y) = r^2(1 + 4\cos\theta\sin\theta) = r^2(1 + 2\sin 2\theta)$ qui change de signe.
Concrètement :
$g\left(\dfrac{1}{n}, 0\right) = \dfrac{1}{n^2} > 0$ donc $(0,0)$ n'est pas un maximum local,
$g\left(-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) = -\dfrac{2}{n^2} < 0$ donc $(0,0)$ n'est pas un maximum local.

Exemple Considérons $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
f est de classe $\mathcal{C}^1$.
Points critiques :
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x$.

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = 0 \text{ ou } 1 \end{cases}$$

$(0,0), (1,1)$ seuls points critique
Etude en $(0,0)$:
$g(x,y) = f(x,y) - f(0,0) = x^3 + y^3 - 3xy$.
$g\left(\dfrac{1}{n}, 0\right) = \dfrac{1}{n^3} > 0$ et $g\left(-\dfrac{1}{n}, 0\right) = -\dfrac{1}{n^3} < 0$ donc $(0,0)$ n'est pas extremum local.
Etude en $(1,1)$:

$g(x,y) = f(x,y) - f(1,1) = x^3 + y^3 - 3xy + 1$.
$\begin{cases} x = 1+u \\ y = 1+v \end{cases}$
$g(x,y) = 3u^2 + 3v^3 - 3uv + u^3 + v^3$.
$\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r\sin\theta \end{cases}$
$g(x,y) = r^2\left(3 - \dfrac{3}{2}\sin 2\theta + r\cos^3\theta + r\sin^3\theta\right)$.
Quand $(x,y) \to (1,1)$, on a $(u,v) \to (0,0)$ donc $r \to 0$ puis
$3 - \dfrac{3}{2}\sin 2\theta + r\cos^3\theta + r\sin^3\theta = 3 - \dfrac{3}{2}\sin 2\theta + o(1) \geqslant \dfrac{3}{2} + o(1) \geqslant 0$.
$(1,1)$ est un minimum local. Cependant $f(t,0) = t^3 \xrightarrow[t\to-\infty]{} -\infty$ donc f n'est pas minorée et donc $(1,1)$ n'est pas un minimum global.

22.5.3.3 Calcul d'inf et de sup

Soient I, J des intervalles non vides de $\mathbb{R}$.
Remarque Pour $\varphi : I \to \mathbb{R}$, le calcul de $\inf\limits_{t\in I} \varphi(t)$ est facile en dressant un tableau de variation.

Proposition

Si $f : I \times J \to \mathbb{R}$ est minorée alors

$$\inf_{(x,y)\in I\times J} f(x,y) = \inf_{x\in I}\left(\inf_{y\in J} f(x,y)\right)$$

dém. :
Posons $m = \inf\limits_{(x,y)\in I\times J} f(x,y)$.
Pour tout $x \in I$ et $y \in J$, $m \leqslant f(x,y)$ donc $m \leqslant \inf\limits_{y\in J} f(x,y)$ puis

$$m \leqslant \inf_{x\in I}\left(\inf_{y\in J} f(x,y)\right)$$

Inversement, pour $x_0 \in I$ et $y_0 \in J$,

$$\inf_{y\in J} f(x_0,y) \leqslant f(x_0,y_0)$$

or

$$\inf_{x\in I}\left(\inf_{y\in J} f(x,y)\right) \leqslant \inf_{y\in J} f(x_0,y)$$

donc

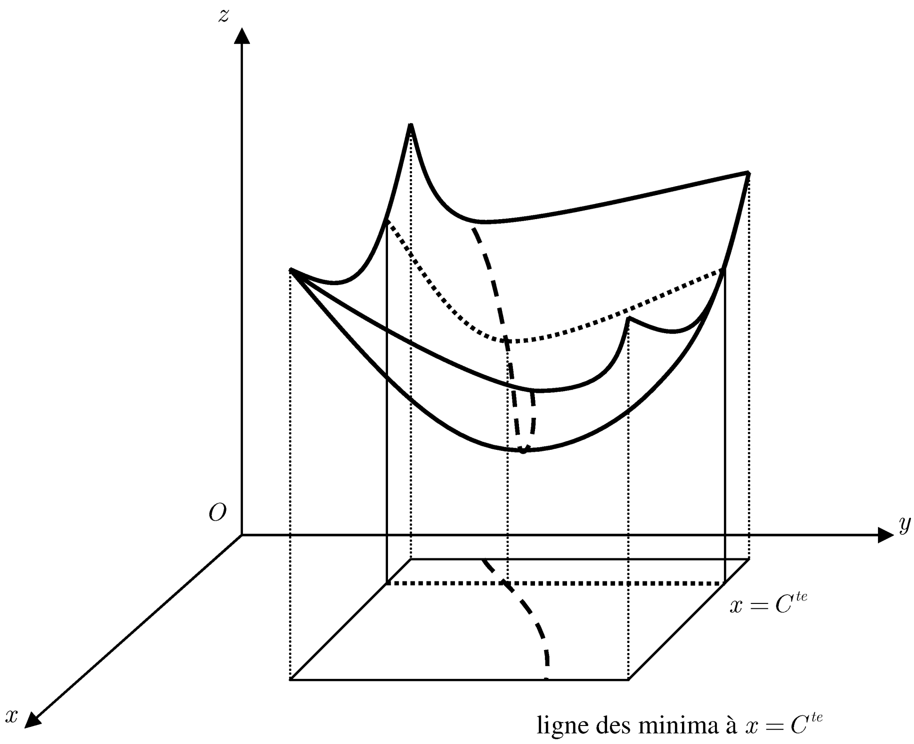
$$\inf_{x\in I}\left(\inf_{y\in J} f(x,y)\right) \leqslant f(x_0,y_0)$$

Par suite $\inf\limits_{x\in I}\left(\inf\limits_{y\in J} f(x,y)\right)$ minore f et donc

$$\inf_{x\in I}\left(\inf_{y\in J} f(x,y)\right) \leqslant m$$

Finalement

$$\inf_{x\in I}\left(\inf_{y\in J} f(x,y)\right) = m$$



□

Exemple Calculons

$$M = \inf_{x,y>0}\left(x + y + \frac{1}{xy}\right)$$

$M = \inf\limits_{x>0} m(x)$ avec $m(x) = \inf\limits_{y>0} \varphi(y)$ où $\varphi(y) = x + y + 1/xy$.
Après étude des variations de φ $m(x) = \varphi\left(1/\sqrt{x}\right) = x + 2/\sqrt{x}$.
Après étude des variations de m, $M = m(1) = 3$.

22.5.3.4 Borne d'une fonction continue sur un compact

Exemple Calculons

$$M = \sup_{(x,y)\in T} xy(1-x-y) \text{ avec } T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x, y \geqslant 0, x+y \leqslant 1\right\}$$

La partie T est compacte et non vide et la fonction $f : (x,y) \mapsto xy(1-x-y)$ est continue sur T donc f admet un maximum en $a \in T$ et $M = f(a)$.
Puisque la fonction f est nulle sur le bord de T strictement positive sur l'intérieur de T on peut affirmer que a appartient à l'ouvert $U = T^\circ$. Or f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U donc a est point critique de f.
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y(1-2x-y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x(1-2y-x)$,

$$\begin{cases} y(1-2x-y) = 0 \\ x(1-2y-x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y = 1 \\ x+2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/3 \\ y = 1/3 \end{cases}$$

car $x, y \neq 0$ pour $a \in U$.
Finalement

$$M = f(1/3, 1/3) = \frac{1}{27}$$

Remarque Cette borne supérieure peut aussi être déterminée en exploitant

$$M = \sup_{x\in[0,1]} \sup_{y\in[0,1-x]} xy(1-x-y)$$

22.5.4 Extremum d'une fonction de deux variables réelles

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ qui à (x,y) associe $f(x,y)$.
On introduit $\|\,.\,\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.

22.5.4.1 Développement limité à l'ordre 2

Théorème

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ alors pour tout $a \in U$ on peut écrire quand $h = (h_x, h_y) \to 0$,

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + \frac{1}{2}q(h) + o\left(\|h\|^2\right)$$

avec

$$\ell(h) = \mathrm{d}f(a)h = \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_x + \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_y$$

et

$$q(h) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)h_x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)h_x h_y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)h_y^2$$

dém. :
Soit a un élément de l'ouvert U. Il existe une boule centrée en a incluse dans U. Pour $h \in E$ suffisamment petit, on a

$$\forall t \in [0,1], a + t.h \in U$$

Considérons alors $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = f(a + t.h)$.
φ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^2$ par composition. Par la formule de Taylor reste-intégrale

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(0) + \int_0^1 (1-t)\left(\varphi''(t) - \varphi''(0)\right)\,\mathrm{d}t$$

Or

$$\varphi(1) = f(a+h), \varphi(0) = f(a)$$

et

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(a+t.h)h_x + \frac{\partial f}{\partial y}(a+t.h)h_y, \varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_x + \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_y = \ell(h)$$

et enfin

$$\varphi''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+t.h)h_x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+t.h)h_x h_y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+t.h)h_y^2$$

et

$$\varphi''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)h_x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)h_x h_y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)h_y^2 = q(h)$$

Il reste à montrer

$$\int_0^1 (1-t)\left(\varphi''(t) - \varphi''(0)\right)\,\mathrm{d}t = o\left(\|h\|^2\right)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité des dérivées partielles d'ordre 2 en a, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\|k\| \leqslant \alpha \Rightarrow \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+k) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\right| \leqslant \varepsilon, \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+k) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)\right| \leqslant \varepsilon \text{ et } \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+k) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\right| \leqslant \varepsilon$$

On a alors

$$\|h\| \leqslant \alpha \Rightarrow \forall t \in [0,1], |\varphi''(t) - \varphi''(0)| \leqslant 4\varepsilon \|h\|^2$$

car $k = t.h$ vérifie $\|k\| \leqslant \alpha$.
Par suite

$$\left|\int_0^1 (1-t)\left(\varphi''(t) - \varphi''(0)\right)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\varepsilon \|h\|^2$$

Ainsi

$$\int_0^1 (1-t)\left(\varphi''(t) - \varphi''(0)\right)\,\mathrm{d}t = o\left(\|h\|^2\right)$$

□

Remarque Plus généralement, si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E, pour $f : U \subset E \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, on a

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + \frac{1}{2}q(h) + o(\|h\|^2) \text{ quand } h \to 0_E$$

avec $\ell = \mathrm{d}f(a)$ forme linéaire donnée par

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\ell = \begin{pmatrix} \mathrm{D}_1 f(a) & \cdots & \mathrm{D}_p f(a) \end{pmatrix} = L$$

et q forme quadratique donnée par

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} q = (\mathrm{D}_i \mathrm{D}_j f(a)) = H$$

22.5.4.2 Recherche d'extremum

On suppose $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

Définition

Notations de Monge en a :

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}(a), q = \frac{\partial f}{\partial y}(a), r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \text{ et } t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$$

Remarque Le développement limité à l'ordre de f en a s'écrit alors

$$f(a+h) = f(a) + p.h_x + q.h_y + \frac{1}{2}\left(r.h_x^2 + 2s.h_xh_y + t.h_y^2\right) + o(\|h\|^2)$$

Théorème

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.
Si a est un point critique de f (i.e. $p = q = 0$) alors :
- si $rt - s^2 < 0$ alors a n'est pas extremum de f ;
- si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ alors a est minimum local de f ;
- si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$ alors a est maximum local de f.

dém. :
Par développement limité à l'ordre 2

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}q(h) + o\left(\|h\|^2\right) = \frac{1}{2}q(h) + \|h\|^2 \varepsilon(h)$$

avec $q(h) = r.h_x^2 + 2s.h_xh_y + t.h_y^2$ une forme quadratique et $\varepsilon \xrightarrow[(0,0)]{} 0$.
On va étudier le signe de $q(h)$ en procédant à une diagonalisation de la forme quadratique q.
Dans la base canonique orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la matrice de la forme quadratique q est

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}q = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} = A$$

La matrice A étant symétrique réelle, il existe $P \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ tel que

$$A = PD^tP \text{ avec } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

et λ_1, λ_2 les deux valeurs propres de A.
Considérons alors la base orthonormée $\mathcal{B}' = (e_1', e_2')$ déterminée par $\text{Mat}_{\mathcal{B}}\mathcal{B}' = P \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. Par formule de changement de base, la matrice de la forme quadratique q dans la base $\mathcal{B}'$ est

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}q = {}^tPAP = D$$

Pour $h = h_1'e_1' + h_2'e_2'$, on a $q(h) = \lambda_1(h_1')^2 + \lambda_2(h_2')^2$ dont le signe est déteminable en fonction de ceux de λ_1 et λ_2.
Puisque les matrices D et A sont semblables, par égalité du déterminant et de la trace

$$\begin{cases} rt - s^2 = \lambda_1\lambda_2 \\ r + t = \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases}$$

Cas $rt - s^2 < 0$.
On a $\lambda_1\lambda_2 < 0$. Quitte à échanger on peut supposer $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.

$$f(a + \frac{1}{n}e'_1) - f(a) = \frac{\lambda_1}{2n^2} + \frac{1}{n^2}o(1) = \frac{\lambda_1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{\lambda_1}{2n^2} < 0$$

et

$$f(a + \frac{1}{n}e'_2) - f(a) = \frac{\lambda_2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{\lambda_2}{2n^2} > 0$$

Par suite a n'est pas extremum local de f.
Cas $rt - s^2 > 0$.
On a alors $\lambda_1\lambda_2 > 0$ donc λ_1 et λ_2 ont le même signe et celui-ci est celui de $\lambda_1 + \lambda_2$.
Or $rt > s^2 \geqslant 0$ donc r et t ont aussi le même signe et celui-ci est celui de $r + t = \lambda_1 + \lambda_2$.
Ainsi λ_1 et λ_2 ont le signe de r.
Sous-cas $r > 0$.
Quitte à échanger on peut supposer $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2$
On a alors $q(h) = \lambda_1 h_1^2 + \lambda_2 h_2^2 \geqslant \lambda_1 h_1^2 + \lambda_1 h_2^2 = \lambda_1 \|h\|^2$ puis

$$f(a+h) - f(a) \geqslant \lambda_1 \|h\|^2 + o\left(\|h\|^2\right) = \|h\|^2 (\lambda_1 + \varepsilon(h)) \geqslant 0$$

a est donc un minimum local de f.
Sous cas $r < 0$.
On a $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 < 0$ et alors

$$f(a+h) - f(a) \leqslant \lambda_2 \|h\|^2 + o(h^2) = \|h\|^2 (\lambda_2 + \varepsilon(h)) \leqslant 0$$

a est donc un maximum local de f.
Sous cas $r = 0$: impossible car $rt > s^2 \geqslant 0$
Cas $rt - s^2 = 0$: on ne peut rien dire car le signe de $f(a+h) - f(a)$ dépendra du $o(\|h\|^2)$ en h annulant q.
□

Exemple Reprenons l'étude $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3x$$

Points critiques $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -3,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$$

Etude en (0,0) :
$r = 0, s = -3, t = 0, rt - s^2 = -9 < 0$. Il n'y a pas d'extremum local
Etude en $(1, 1)$:
$r = 6, s = -3, t = 6, rt - s^2 = 27 > 0$ et $r > 0$. Il y a minimum local.

22.5.5 Equations aux dérivées partielles

22.5.5.1 Équation aux dérivées partielles d'ordre 1

Définition

Résoudre sur U une équation aux dérivées partielles d'ordre 1 en la fonction inconnue f, c'est déterminer toutes les fonctions $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant une relation donnée engageant f et/ou ses dérivées partielles.

Proposition

Les solutions sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$$
sont les fonctions
$$f : (x,y) \mapsto C(y) \text{ avec } C \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

dém. :
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solution de l'équation aux dérivées partielles
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$$
Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. L'application partielle $x \mapsto f(x,y)$ a pour dérivée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.
L'application partielle $x \mapsto f(x,y)$ est donc de dérivée nulle sur $\mathbb{R}$, c'est donc une fonction constante.
Ainsi il existe $C_y \in \mathbb{R}$ telle que
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x,y) = C_y$$
Considérons alors $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $C(y) = C_y$.
On définit ainsi une application $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = C(y)$$
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé. La composition $y \mapsto (x_0,y) \mapsto f(x_0,y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc C est une fonction $\mathcal{C}^1$.
Résumons :
Si f est solution sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ alors il existe $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = C(y)$$
Inversement, les fonctions proposées sont évidemment solutions.
□

Exemple La solution générale sur $\mathbb{R}^2$ de
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xy$$
est
$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y + C(y) \text{ avec } C : \mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}$$

Exemple La solution générale sur $\mathbb{R}^3$ de

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = xy + z$$

est

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2y + xz + C(y,z) \text{ avec } C : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}$$

Exemple Résolvons sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xf(x,y)$$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solution.
Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, l'application partielle $y \mapsto f(x,y)$ a pour dérivée $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
L'application partielle $y \mapsto f(x,y)$ est donc solution de l'équation différentielle

$$z'(y) = xz(y)$$

dont la solution générale est de la forme

$$z(y) = C\mathrm{e}^{xy}$$

Par suite, il existe une constante $C(x) \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = C(x)\mathrm{e}^{xy}$$

$C : x \mapsto (x,0) \mapsto f(x,0)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par composition.
Inversement, de telle fonctions sont solutions.

Exemple Résolvons sur $\mathbb{R}^2$ l'équation

$$(E) : 2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

via le changement de variable

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x + 2y \end{cases}$$

Commençons par étudier le changement de variable de sorte d'exprimer les anciennes variables en fonction des nouvelles variables :

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x + 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2u - v \\ y = v - u \end{cases}$$

L'application $\Phi : (u,v) \mapsto (2u - v, v - u)$ traduit le changement de variable.
Φ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$.
Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par « $g(u,v) = f(x,y)$ »i.e.

$$g : (u,v) = f(2u - v, v - u)$$

$g = f \circ \Phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 2\frac{\partial f}{\partial x}(2u-v, v-u) - \frac{\partial f}{\partial y}(2u-v, v-u) = \left[2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right]_{\substack{x=2u-v\\ y=v-u}}$$

f est solution sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation aux dérivées partielles proposée
$\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, 2\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0,$
$\Leftrightarrow \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 0$
$(\Rightarrow)$ immédiat et $(\Leftarrow)$ car Φ est surjective.
$\Leftrightarrow \exists C : \mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}, \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, g(u,v) = C(v),$
$\Leftrightarrow \exists C : \mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = C(x+2y).$
$(\Rightarrow)$ car $f = g \circ \Phi^{-1}$ et $(\Leftarrow)$ car $g = f \circ \Phi$
Finalement la solution générale de E est $f(x,y) = C(x+2y)$ avec $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Exemple Résolvons sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ l'équation aux dérivées partielles

$$(E) : x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$$

en passant en coordonnées polaires.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Puisqu'on se limite à $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on peut se contenter de $r \in \mathbb{R}^{+\star}$ auquel cas $r = \sqrt{x^2+y^2}$.
En revanche on ne peut pas exprimer θ mais au final ce ne sera pas utile.
Soit $\Phi : \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ définie par $\Phi(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$.
Φ est une surjection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $g : \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie de sorte que
« $g(r,\theta) = f(x,y)$ »i.e.

$$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$g = f \circ \Phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) &= -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ &= \left[-y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right]_{\substack{x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta}}\end{aligned}$$

f est solution sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ de l'équation aux dérivées partielles proposée E
$\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0,$
$\Leftrightarrow \forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}, \dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = 0$
$(\Rightarrow)$ immédiat et $(\Leftarrow)$ car Φ est surjective.
$\Leftrightarrow \exists C : \mathbb{R}^{+\star} \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}, \forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}, g(r,\theta) = C(r),$
$\Leftrightarrow \exists C : \mathbb{R}^{+\star} \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, f(x,y) = C(\sqrt{x^2+y^2}),$

($\Leftarrow$) car $g = f \circ \Phi$ et ($\Rightarrow$) car Φ est surjective et $\Phi(r,\theta) = (x,y) \Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2}$.
$\Leftrightarrow \exists \tilde{C} : \mathbb{R}^{+\star} \overset{\mathcal{C}^1}{\to} \mathbb{R}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}, f(x,y) = \tilde{C}(x^2+y^2)$.
($\Rightarrow$) via $\tilde{C} = C \circ \sqrt{.}$ et ($\Leftarrow$) via $\tilde{C} = C \circ .^2$.
Finalement, la solution générale sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ de l'équation aux dérivées partielles E est
$f(x,y) = C(x^2+y^2)$ avec $C : \mathbb{R} \overset{\mathcal{C}^1}{\to} \mathbb{R}$.

22.5.5.2 Équations aux dérivées partielles d'ordre 2

Définition

Résoudre sur U une équation aux dérivées partielles d'ordre 2 en la fonction inconnue f, c'est déterminer toutes les fonctions $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant une relation donnée engageant f et/ou ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.

Proposition

La solution générale sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0$$

est

$$f : (x,y) \mapsto xC(y) + D(y) \text{ avec } C, D : \mathbb{R} \overset{\mathcal{C}^2}{\to} \mathbb{R}$$

Proposition

La solution générale sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$$

est

$$f : (x,y) \mapsto C(x) + D(y) \text{ avec } C, D : \mathbb{R} \overset{\mathcal{C}^2}{\to} \mathbb{R}$$

Exemple Soit $c > 0$.
Résolvons sur $\mathbb{R}^2$ l'équation

$$(E) : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = 0$$

via le changement de variable :

$$\begin{cases} u = x + ct \\ v = x - ct \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} u = x + ct \\ v = x - ct \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (u+v)/2 \\ t = (u-v)/2c \end{cases}$$

L'application $\Phi : (u,v) \mapsto ((u+v)/2, (u-v)/2c)$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$.

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par « $g(u,v) = f(x,t)$ »i.e.

$$g(u,v) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right)$$

$g = f \circ \Phi$ est de classe $\mathcal{C}^2$.
Après calculs,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t)\right]_{\substack{x=(u+v)/2 \\ y=(u-v)/2c}}$$

f est solution sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation des ondes
$\Leftrightarrow \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = 0$
$\Leftrightarrow \exists C, D : \mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{C}^2} \mathbb{R}, \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, g(u,v) = C(u) + D(v),$
$\Leftrightarrow \exists C, D : \mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{C}^2} \mathbb{R}, \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, f(x,t) = C(x+ct) + D(x-ct).$

Exemple Résolvons sur $\mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}$ l'équation aux dérivées partielles

$$(E) : x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = xy$$

en passant aux coordonnées polaires.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan(y/x) \end{cases}$$

L'application $\Phi : (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^{+\star} \times \left]-\pi/2, \pi/2\right[$ vers $\mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}$.
Soit $f : \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $g : \mathbb{R}^{+\star} \times \left]-\pi/2, \pi/2\right[\to \mathbb{R}$ définie de sorte que « $g(r,\theta) = f(x,y)$ »i.e.

$$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$g = f \circ \Phi$ est de classe $\mathcal{C}^2$.
Après calculs,

$$r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) = \left[x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]_{\substack{x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta}}$$

f est solution sur $\mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}$ de l'équation E
$\Leftrightarrow \forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{+\star} \times \left]-\pi/2, \pi/2\right[, r^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) = r^2\cos\theta\sin\theta,$
$\Leftrightarrow \exists C, D : \left]-\pi/2, \pi/2\right[\xrightarrow{\mathcal{C}^2} \mathbb{R}, \forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{+\star} \times \left]-\pi/2, \pi/2\right[, g(r,\theta) = \dfrac{1}{2}r^2\cos\theta\sin\theta + rC(\theta) + D(\theta),$
$\Leftrightarrow \exists C, D : \left]-\pi/2, \pi/2\right[\xrightarrow{\mathcal{C}^2} \mathbb{R}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}, f(x,y) =$
$\dfrac{1}{2}xy + \sqrt{x^2+y^2}C(\arctan(y/x)) + D(\arctan(y/x)),$
$\Leftrightarrow \exists \tilde{C}, \tilde{D} : \mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{C}^2} \mathbb{R}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{1}{2}xy + \sqrt{x^2+y^2}\tilde{C}(y/x) + \tilde{D}(y/x),$
$\Leftrightarrow \exists \hat{C}, \tilde{D} : \mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{C}^2} \mathbb{R}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{1}{2}xy + x\hat{C}(y/x) + \tilde{D}(y/x)$
car $\sqrt{x^2+y^2} \underset{x>0}{=} x\psi(t)$ avec $\psi(t) = \sqrt{1+t^2}$, ψ de classe $\mathcal{C}^2$ ne s'annulant pas.

Chapitre 23

Compléments de calcul intégral

23.1 Intégrale double sur un compact sympathique

23.1.1 Intégration sur un pavé

Définition

On appelle pavé de $\mathbb{R}^2$ toute partie P de $\mathbb{R}^2$ de la forme $P = [a, b] \times [c, d]$ avec $a < b$ et $c < d$.

Théorème

Si $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{C}$ est une fonction continue alors les fonctions

$$x \mapsto \int_{y=c}^{d} f(x, y)\,\mathrm{d}y \text{ et } y \mapsto \int_{x=a}^{b} f(x, y)\,\mathrm{d}x$$

sont continues et

$$\int_{x=a}^{c} \left(\int_{y=c}^{d} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=a}^{b} f(x, y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

dém. :
Puisque la fonction f est continue sur le compact $[a, b] \times [c, d]$, elle y est bornée et donc il existe $M \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d]\,, |f(x, y)| \leqslant M$$

Etudions $x \mapsto \displaystyle\int_{y=c}^{d} f(x, y)\,\mathrm{d}y$.
Pour tout $y \in [c, d]$, la fonction $x \mapsto f(x, y)$ est continue sur $[a, b]$.
Pour tout $x \in [a, b]$, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est continue par morceaux sur $[c, d]$.
Pour tout $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$, $|f(x, y)| \leqslant M = \varphi(y)$ avec φ intégrable sur $[c, d]$.
Par domination, on en déduit que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{y=c}^{d} f(x, y)\,\mathrm{d}y$ est définie et continue sur $[a, b]$.
On procède de même pour la fonction $y \mapsto \displaystyle\int_{x=a}^{b} f(x, y)\,\mathrm{d}x$.

Considérons ensuite la fonction $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ définie par

$$g(x) = \int_c^d \left(\int_a^x f(t, y) \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}y = \int_c^d u(x, y) \, \mathrm{d}y$$

Comme ci-dessus, on peut affirmer que pour tout chaque $x \in [a, b]$, la fonction $y \mapsto u(x, y) = \displaystyle\int_a^x f(t, y) \, \mathrm{d}t$ est définie et continue sur $[c, d]$ de sorte que l'intégrale définissant g existe bien.
Pour $y \in [c, d]$ fixé, la fonction $x \mapsto u(x, y) = \displaystyle\int_a^x f(t, y) \, \mathrm{d}t$ est la primitive s'annulant en a de la fonction $x \mapsto f(x, y)$. On en déduit l'existence de $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ avec

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, y)$$

Pour tout $y \in [c, d]$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial u}{\partial x}(x, y) = f(x, y)$ est continue sur $[a, b]$.
Pour tout $x \in [a, b]$, la fonction $y \mapsto \dfrac{\partial u}{\partial x}(x, y) = f(x, y)$ est continue par morceaux sur $[c, d]$.
Pour tout $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$, $\left| \dfrac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right| = |f(x, y)| \leqslant M = \varphi(y)$ avec φ intégrable sur $[c, d]$.
Par domination, on en déduit que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$g'(x) = \int_c^d \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \, \mathrm{d}y = \int_c^d f(x, y) \, \mathrm{d}y$$

On peut alors conclure car

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = g(b) = g(a) + \int_a^b g'(x) \, \mathrm{d}x = 0 + \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

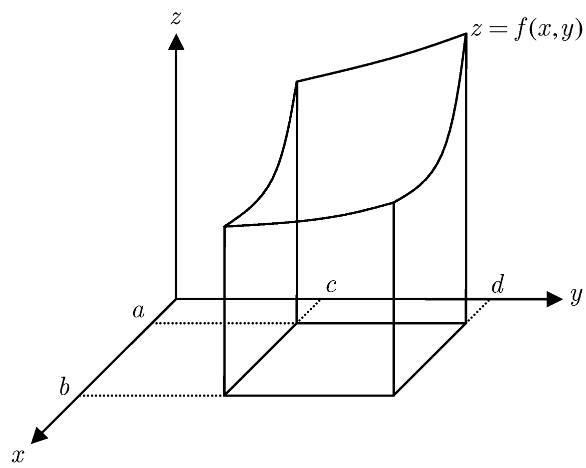
□

Définition

La valeur commune de ces deux intégrales est appelée intégrale (double) de f sur $[a, b] \times [c, d]$, on la note

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f$$

Remarque $\displaystyle\iint_{[a,b]\times[c,d]} f$ se comprend comme le volume algébrique de la portion d'espace comprise entre le plan (xOy) et la surface $\Sigma_f : z = f(x, y)$.



Exemple Calculons $I = \iint_{[a,b]\times[c,d]} 1$.

$$I = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=c}^{d} 1 \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{x=a}^{b} (d-c) \, \mathrm{d}x = (b-a)(d-c) = \text{Aire}\left([a,b] \times [c,d]\right)$$

Exemple Si $f(x,y) = g(x)h(y)$ alors

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \left(\int_{a}^{b} g(x) \, \mathrm{d}x \right) \left(\int_{c}^{d} h(y) \, \mathrm{d}y \right)$$

23.1.2 Intégration sur une partie élémentaire

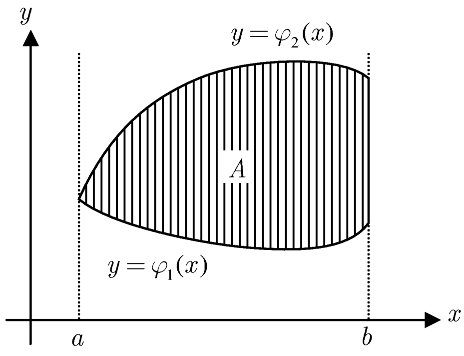
Définition

Une partie A du plan $\mathbb{R}^2$ est dite x-élémentaire si on peut écrire

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leqslant x \leqslant b, \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x) \right\}$$

avec $a < b$ et $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonctions continues vérifiant

$$\forall x \in \left]a,b\right[, \varphi_1(x) < \varphi_2(x)$$



Remarque A est une est une partie compacte d'intérieur

$$A^\circ = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a < x < b, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\right\} \neq \emptyset$$

Remarque Il y a unicité des éléments a, b, φ_1 et φ_2 décrivant une partie x-élémentaire A.
En effet

$$a = \min\left\{x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x, y) \in A\right\}, b = \max\left\{x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x, y) \in A\right\}$$

et

$$\varphi_1(x) = \min\left\{y \in \mathbb{R}/(x, y) \in A\right\} \text{ et } \varphi_2(x) = \max\left\{y \in \mathbb{R}/(x, y) \in A\right\}$$

Définition

Si A est une partie x -élémentaire de $\mathbb{R}^2$ alors pour toute fonction $f : A \to \mathbb{C}$ continue, on pose

$$\iint_A f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

Remarque On peut montrer qu'ici $x \mapsto \displaystyle\int_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y$ est une fonction continue.

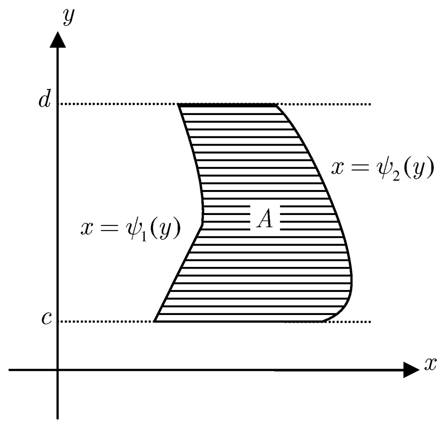
Définition

Une partie A du plan $\mathbb{R}^2$ est dite y-élémentaire si on peut écrire

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / c \leqslant y \leqslant d, \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\right\}$$

avec $c < d$ et $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ fonctions continues vérifiant

$$\forall y \in \left]c, d\right[, \psi_1(y) < \psi_2(y)$$



Définition

Si A est une partie y -élémentaire alors pour toute fonction $f : A \to \mathbb{C}$ continue, on pose

$$\iint_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y$$

Définition

Une partie A du plan $\mathbb{R}^2$ est dite élémentaire si elle à la fois x et y-élémentaire.

Exemple Un pavé est une partie élémentaire.
Un disque est une partie élémentaire.

Théorème

Si A désigne une partie élémentaire et $f : A \to \mathbb{C}$ une fonction continue alors

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

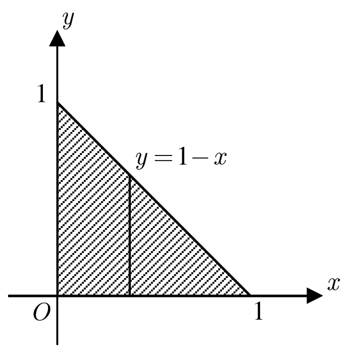
Cette valeur commune est appelée intégrale (double) de f et est notée

$$\iint_A f$$

Exemple Calculons $\iint_A 1$.

$$\iint_A 1 = \int_a^b \left(\int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} 1\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_a^b \varphi_2(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi_1(x)\,\mathrm{d}x = \text{Aire}(A)$$

Exemple Calculons $I = \iint_A xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ avec $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x, y \geqslant 0 \text{ et } x + y \leqslant 1\right\}$.



A est une partie x-élémentaire.

$$I = \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^{1-x} xy\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^1 \frac{1}{2}x(1-x)^2\,\mathrm{d}x$$

Par intégration par parties

$$I = \left[-\frac{1}{6}x(1-x)^3\right]_0^1 + \frac{1}{6}\int_0^1 (1-x)^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{24}$$

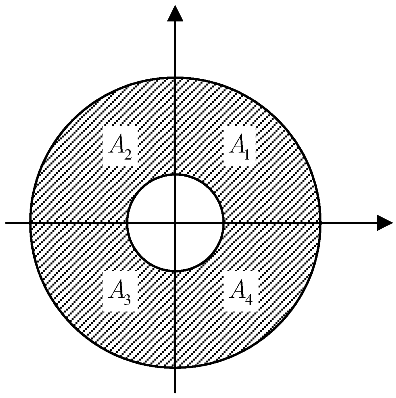
Attention : Ecrire ici $\displaystyle\int_{y=0}^{1-x}\left(\int_{x=0}^1 xy\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y$ n'a pas de sens.

23.1.3 Intégrale double sur une partie simple

Définition

Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est dite simple si elle est réunion d'une famille finie non vide de parties élémentaires d'intérieurs deux à deux disjoints i.e.
$A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ avec $A_1, \ldots, A_n$ élémentaires et $i \neq j \Rightarrow A_i^\circ \cap A_j^\circ = \emptyset$.

Exemple Une couronne est une partie simple.



Définition

Si A est une partie simple alors pour toute fonction $f : A \to \mathbb{C}$ continue, on appelle intégrale (double) de f sur A le scalaire :

$$\iint_A f = \sum_{i=1}^{n} \iint_{A_i} f$$

Exemple $\displaystyle\iint_A 1 = \sum_{i=1}^{n} \iint_{A_i} f = \sum_{i=1}^{n} Aire(A_i) = Aire(A)$

Théorème

Avec des notations immédiates
$\displaystyle\iint_A \lambda f + \mu g = \lambda \iint_A f + \mu \iint_A g$,
$\displaystyle f \geqslant 0 \Rightarrow \iint_A f \geqslant 0$,
$\displaystyle f \geqslant 0$ et $\displaystyle\iint_A f = 0 \Rightarrow f = 0$,
$\displaystyle\left|\iint_A f\right| \leqslant \iint_A |f|$,

dém. :
Les propriétés sont immédiates lorsque A est une partie élémentaire et s'étendent facilement au cas où A

est une partie simple.
□

Théorème

Si $A^\circ \cap B^\circ = \emptyset$ alors $\displaystyle\iint_{A\cup B} f = \iint_A f + \iint_B f$.

dém. :
La description de A et B comme réunion de parties élémentaires d'intérieurs deux à deux disjoints entraîne une telle description pour $A \cup B$ rendant la propriété énoncée immédiate.
□

23.1.4 Formule de changement de variables

Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi : U \to V$ un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme.
$\varphi(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$. Le jacobien de φ en (x,y) est noté

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Théorème

Soit A est une partie incluse dans U.
Si A et $\varphi(A)$ sont des parties simples de $\mathbb{R}^2$ alors pour toute fonction $f : \varphi(A) \to \mathbb{C}$ continue on a la relation

$$\iint_{\varphi(A)} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint_A f(u(x,y), v(x,y)) \left|\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\right| \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Le passage d'une quantité à l'autre est appelé changement de variable défini par la relation $(u,v) = \varphi(x,y)$.

Exemple Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un isomorphisme affine.
$\varphi : (x,y) \mapsto (u,v)$ avec

$$\begin{cases} u = ax + by + \alpha \\ v = cx + dy + \beta \end{cases} \text{ avec } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

L'application φ est $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme et son jacobien en (x,y) est

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Par changement de variable

$$\mathrm{Aire}(\varphi(A)) = \iint_{\varphi(A)} 1\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint_A 1.\left|ad - bc\right| \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = |ad - bc|\,\mathrm{Aire}(A)$$

Si φ est une isométrie alors $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ donc $ad - bc = \pm 1$ et

$$\mathrm{Aire}(\varphi(A)) = \mathrm{Aire}(A)$$

Si φ est une similitude de rapport λ alors $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda U$ avec $U \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ donc $ad - bc = \pm\lambda^2$ et

$$\text{Aire}(\varphi(A)) = \lambda^2 \text{Aire}(A)$$

23.1.5 Intégration en coordonnées polaires

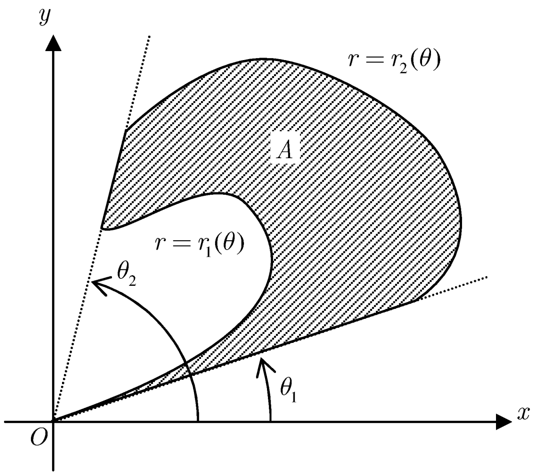
Définition

Une partie A du plan $\mathbb{R}^2$ est dite θ-élémentaire si on peut écrire :

$$A = \{(r\cos\theta, r\sin\theta)/\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2, r_1(\theta) \leqslant r \leqslant r_2(\theta)\}$$

avec $\theta_1 < \theta_2 \leqslant \theta_1 + 2\pi$ et $r_1, r_2 : [\theta_1, \theta_2] \to \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\forall \theta \in \left]\theta_1, \theta_2\right[, 0 \leqslant r_1(\theta) < r_2(\theta)$$



Théorème

Si A est une partie simple et θ-élémentaire alors pour toute fonction $f : A \to \mathbb{C}$ continue

$$\iint_A f = \int_{\theta=\theta_1}^{\theta_2} \left(\int_{r=r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\theta$$

Exemple Calculons

$$I = \iint_A x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

avec A l'intérieur de la cardioïde d'équation $r = 1 + \cos\theta$.

A est une partie θ élémentaire avec

$$A = \{(r\cos\theta, r\sin\theta)/0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant 1+\cos\theta\}$$

$$I = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{1+\cos\theta} r\cos\theta r\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^3\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{5\pi}{4}$$

Exemple Calculons

$$I = \iint_A x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

avec $A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2-2x\leqslant 0\right\}$.

$$x^2+y^2-2x = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 = 1$$

A est une partie θ élémentaire.

$$A = \{(r\cos\theta, r\sin\theta)/-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2, 0 \leqslant r \leqslant 2\cos\theta\}$$

donc en intégrant en coordonnées polaires

$$I = \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{2\cos\theta} r\cos\theta r\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta = \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \pi$$

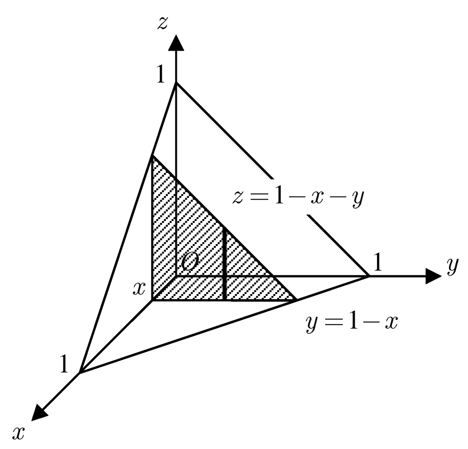
23.1.6 Généralisations aux intégrales triples

Ce qui a été dit ci-dessus se généralise…

Exemple Calculons $I = \iiint_{\mathcal{D}} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ avec

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x,y,z\geqslant 0 \text{ et } x+y+z\leqslant 1\right\}$$

La partie $\mathcal{D}$ est xy -élémentaire.



On peut écrire

$$\mathcal{D} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1-x, 0 \leqslant z \leqslant 1-x-y\big\}$$

et alors

$$I = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x}\int_{z=0}^{1-x-y} xyz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x} xy(1-x-y)^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

puis par intégration par parties

$$I = \frac{1}{6}\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x} x(1-x-y)^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{24}\int_{x=0}^{1} x(1-x)^4\,\mathrm{d}x$$

et par une nouvelle intégration par parties

$$I = \frac{1}{120}\int_{x=0}^{1} (1-x)^5\,\mathrm{d}x = \frac{1}{720}$$

Passage en coordonnées cylindriques :

En écrivant $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$, $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ devient $\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$.

Passage en coordonnées sphériques :

En écrivant $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ devient $r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$.

Exemple Calculons le volume d'une boule de rayon R.

$$V = \iiint_B 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{\theta=0}^{\pi}\left(\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\int_{r=0}^{R} 1r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\theta$$

En séparant les variables

$$V = \left(\int_{\theta=0}^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_{\varphi=0}^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\right)\left(\int_{0}^{R} r^2\,\mathrm{d}r\right) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

23.2 Intégrale double sur un produit d'intervalles quelconques

I et J désignent des intervalles d'intérieurs non vides de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

23.2.1 Intégrabilité des fonctions positives

Définition

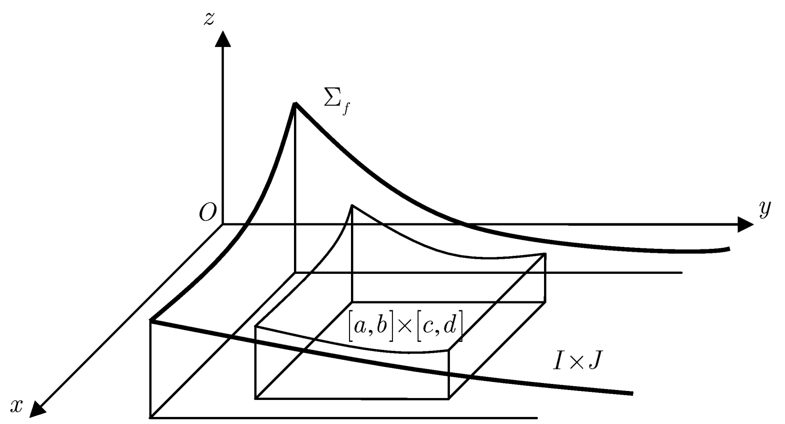
On dit qu'une $f : I \times J \to \mathbb{R}^+$ continue est intégrable s'il existe un réel M tel que pour tout pavé $P = [a, b] \times [c, d] \subset I \times J$,

$$\iint_P f \leqslant M$$

On pose alors

$$\iint_{I \times J} f = \sup_{P \text{ pavé } \subset I \times J} \iint_P f$$

appelée intégrale (double) de f.



Exemple Si I et J sont des segments alors f est intégrable sur le pavé $I \times J$.

Proposition

Soit $f : I \times J \to \mathbb{R}^+$ continue et (P_n) est une suite croissante de pavés de réunion $I \times J$:
1) $\forall n \in \mathbb{N}, P_n = [a_n, b_n] \times [c_n, d_n]$;
2) $\forall n \in \mathbb{N}, P_n \subset P_{n+1}$;
3) $I \times J = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} P_n$.
On a équivalence entre :
(i) f est intégrable ;
(ii) la suite $\left(\iint_{P_n} f\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
De plus, on a alors

$$\iint_{I \times J} f = \lim_{n \to +\infty} \iint_{P_n} f$$

dém. :
Notons pour commencer que la suite $\left(\iint_{P_n} f\right)$ est croissante car f positive et $P_n \subset P_{n+1}$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons f intégrable.
La suite $\left(\iint_{P_n} f\right)$ est croissante et majorée par $\iint_{I\times J} f$ donc convergente.
De plus sa limite vérifie

$$\lim_{n\to+\infty}\iint_{P_n} f \leqslant \iint_{I\times J} f$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons la suite $\left(\iint_{P_n} f\right)$ convergente.
Soit $P=[a,b]\times[c,d]$ un pavé inclus dans $I\times J$.
Puisque $I\times J$ est la réunion des P_n, il existe $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ tels que $(a,c)\in P_{n_1}$ et $(b,d)\in P_{n_2}$.
Puisque la suite (P_n) est croissante, pour $n_0=\max(n_1,n_2)$, $(a,c),(b,d)\in P_{n_0}$ et donc $P=[a,b]\times[c,d]\subset P_{n_0}$.
On a alors

$$\iint_P f \leqslant \iint_{P_{n_0}} f \leqslant \lim_{n\to+\infty}\iint_{P_n} f$$

puis

$$\iint_{I\times J} f \leqslant \lim_{n\to+\infty}\iint_{P_n} f$$

□

23.2.2 Intégrabilité des fonctions réelles ou complexes

Définition

On dit qu'une fonction continue $f : I\times J\to\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est intégrable si $|f| : I\times J\to\mathbb{R}^+$ l'est i.e. :

$$\exists M\in\mathbb{R}^+,\forall P=[a,b]\times[c,d]\subset I\times J,\iint_P |f|\leqslant M$$

On note $L^1(I\times J,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $f : I\times J\to\mathbb{K}$ continues et intégrables sur $I\times J$.

Exemple $L^1([a,b]\times[c,d],\mathbb{K})=\mathcal{C}([a,b]\times[c,d],\mathbb{K})$.

Théorème

$L^1(I\times J,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I\times J,\mathbb{K})$

dém. :
$L^1(I\times J,\mathbb{K})\subset\mathcal{C}(I\times J,\mathbb{K})$ et $0\in L^1(I\times J,\mathbb{K})$.
Soient $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$ et $f,g\in L^1(I\times J,\mathbb{K})$.
Pour tout pavé $P\subset I\times J$,

$$\iint_P|\lambda f+\mu g|\leqslant|\lambda|\iint_P|f|+|\mu|\iint_P|g|\leqslant|\lambda|\iint_{I\times J}|f|+|\mu|\iint_{I\times J}|g|$$

Par suite $\lambda f+\mu g\in L^1(I\times J,\mathbb{K})$.
□

Théorème

Soient $f : I\times J\to\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continue.
Si $|f|\leqslant\varphi$ avec φ continue et intégrable sur $I\times J$ alors f est intégrable sur $I\times J$.

dém. :
Pour tout pavé $P \subset I \times J$,

$$\iint_P |f| \leqslant \iint_P \varphi \leqslant \iint_{I\times J} \varphi = M$$

d'où l'intégrabilité de $|f|$ donc de f.
□

Définition

Pour $f : I \times J \to \mathbb{R}$ continue et intégrable, on pose

$$\iint_{I\times J} f = \iint_{I\times J} f^+ - \iint_{I\times J} f^-$$

avec $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = \sup(-f, 0)$.
Pour $f : I \times J \to \mathbb{C}$ continue et intégrable, on pose

$$\iint_{I\times J} f = \iint_{I\times J} \mathrm{Re} f + i \iint_{I\times J} \mathrm{Im} f$$

Proposition

Soit $f : I \times J \to \mathbb{R}^+$ continue et (P_n) est une suite croissante de pavés de réunion $I \times J$:
Si f est intégrable alors la suite $\left(\iint_{P_n} f\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\iint_{I\times J} f = \lim_{n\to+\infty} \iint_{P_n} f$$

dém. :
Cas f à valeurs réelles :
Les fonctions f^+ et f^- sont intégrables et positives donc

$$\iint_{P_n} f = \iint_{P_n} f^+ - \iint_{P_n} f^- \to \iint_{I\times J} f^+ - \iint_{I\times J} f^- = \iint_{I\times J} f$$

Cas f à valeur complexes :
Analogue avec $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
□

Proposition

Soit $f : I \times J \to \mathbb{C}$ continue.
On a équivalence entre :
(i) f est intégrable sur $I \times J$;
(ii) f est intégrable sur $I^\circ \times J^\circ$.
De plus on a alors

$$\iint_{I^\circ\times J^\circ} f = \iint_{I\times J} f$$

dém. :
Cas f positive :

(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons f intégrable sur $I \times J$.
Pour tout pavé $P \subset I^\circ \times J^\circ$, $P \subset I \times J$ et

$$\iint_P f \leqslant \iint_{I\times J} f$$

On en déduit l'intégrabilité de f sur $I^\circ \times J^\circ$ et l'inégalité

$$\iint_{I^\circ\times J^\circ} f \leqslant \iint_{I\times J} f$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons f est intégrable sur $I^\circ \times J^\circ$.
Soit un pavé $P \subset I \times J$. $P = [a,b] \times [c,d]$
Pour $\varepsilon > 0$ assez petit on peut considérer le pavé

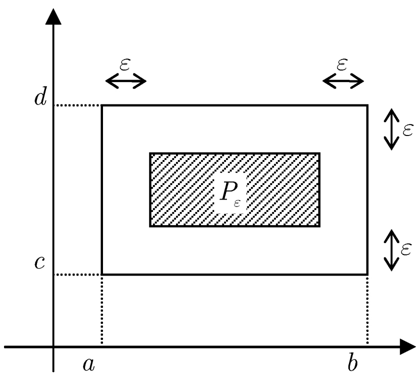
$$P_\varepsilon = [a+\varepsilon, b-\varepsilon] \times [c+\varepsilon, d-\varepsilon]$$

On a $P_\varepsilon \subset I^\circ \times J^\circ$ donc

$$\iint_{P_\varepsilon} f \leqslant \iint_{I^\circ\times J^\circ} f$$

Puisque f est continue sur le compact $[a,b]\times[c,d]$, f y est majorée par un certain M et alors

$$\left|\iint_P f - \iint_{P_\varepsilon} f\right| \leqslant M(2\varepsilon(b-a) + 2\varepsilon(d-c))$$



Quand $\varepsilon \to 0^+$, on obtient $\displaystyle\iint_{P_\varepsilon} f \to \iint_P f$ et donc

$$\iint_P f \leqslant \iint_{I^\circ\times J^\circ} f$$

On en déduit que f est intégrable sur $I \times J$ et $\displaystyle\iint_{I\times J} f \leqslant \iint_{I^\circ\times J^\circ} f$.
Cas f à valeurs réelles : l'équivalent est immédiate en revenant à $|f|$ et l'égalité s'obtient par l'intermédiaire de f^+ et f^-.
Cas f à valeurs complexes : Idem.
$\square$

23.2.3 Propriétés

Théorème

Avec des notations entendues

$\iint_{I\times J} \lambda f + \mu g = \lambda \iint_{I\times J} f + \mu \iint_{I\times J} g$

$f \geqslant 0 \Rightarrow \iint_{I\times J} f \geqslant 0$

$f \geqslant 0$ et $\iint_{I\times J} f = 0 \Rightarrow f = \tilde{0}$

$\left|\iint_{I\times J} f\right| \leqslant \iint_{I\times J} |f|$

dém. :

Si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de pavés de réunion $I \times J$,

$$\iint_{I\times J} \lambda f + \mu g = \lim_{n\to+\infty} \iint_{P_n} \lambda f + \mu g = \lim_{n\to+\infty} \left(\lambda \iint_{P_n} f + \mu \iint_{P_n} g\right) = \lambda \iint_{I\times J} f + \mu \iint_{I\times J} g$$

Les trois autres propriétés peuvent être obtenues avec une démarche analogue.

□

23.2.4 Formules de Fubini

23.2.4.1 Cas des fonctions positives

Théorème

Soit $f : I \times J \to \mathbb{R}^+$ continue.

Si

1) $\forall x \in I$, $y \mapsto f(x, y)$ est intégrable sur J ;

2) $x \mapsto \int_J f(x, y)\,\mathrm{d}y$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;

Alors

1) f est intégrable sur $I \times J$;

2) $\iint_{I\times J} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_I \left(\int_J f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x$.

dém. ;

Soit $P = [a, b] \times [c, d] \subset I \times J$.

$$\iint_P f = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \int_J f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leqslant \int_I \left(\int_J f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x$$

On en déduit que f est intégrable sur $I \times J$ et

$$\iint_{I\times J} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \int_I \left(\int_J f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x$$

Pour tout $[a, b] \times [c, d] \subset I \times J$, on a

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x \leqslant \iint_{I\times J} f$$

Fixons le segment $[c, d]$, ce qui précède assure que la fonction $x \mapsto \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y$ est intégrable sur I et

$$\int_I \left(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\right) = \sup_{[a,b]\subset I} \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x \leqslant \iint_{I\times J} f$$

Il ne reste plus qu'à passer à la limite quand « le segment $[c, d]$ tend vers J ».
Soit $(J_n) = ([c_n, d_n])$ une suite croissante de segments de réunion J.
Pour tout $x \in I$,

$$\varphi_n(x) = \int_{c_n}^{d_n} f(x, y)\,\mathrm{d}y \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_J f(x, y)\,\mathrm{d}y = \varphi(x)$$

Ainsi $\varphi_n \xrightarrow[{[a,b]}]{CS} \varphi$. Les fonctions φ_n et φ sont continues par morceaux et

$$|\varphi_n(x)| = \int_{c_n}^{d_n} f(x, y)\,\mathrm{d}y \leqslant \int_J f(x, y)\,\mathrm{d}y = \varphi(x)$$

avec φ est intégrable sur I. Par convergence dominée

$$\int_I \left(\int_{c_n}^{d_n} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x \to \int_I \left(\int_J f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x$$

Or

$$\int_I \left(\int_{c_n}^{d_n} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x \leqslant \iint_{I\times J} f$$

donc à la limite

$$\int_I \left(\int_J f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x \leqslant \iint_{I\times J} f$$

Remarque On peut énoncer un résultat analogue en échangeant les rôles de x et y : cela propose deux démarches pour calculer l'intégrale double de f, c'est souvent à l'origine d'exercice conduisant au calcul d'intégrales non triviales.

Exemple Considérons $f : (x, y) \mapsto \mathrm{e}^{-(1+x^2)y}$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.
La fonction f est continue et positive.
1) Soit $x \in \mathbb{R}$,
La fonction $y \mapsto \mathrm{e}^{-(1+x^2)y}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $\mathrm{e}^{-(1+x^2)y} = O(\mathrm{e}^{-y})$ quand $y \to +\infty$ et

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(1+x^2)y}\,\mathrm{d}y = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-(1+x^2)y}}{1+x^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1+x^2}$$

2) La fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{1+x^2}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ car $\frac{1}{1+x^2} \sim \frac{1}{x^2}$ quand $x \to \pm\infty$.
On en déduit que f est intégrable sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ et

$$\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

Remarque Ce résultat peut être utilisé pour donner la valeur d'intégrales non triviales en procédant au calcul d'intégrales doubles dans les deux ordres possibles

Exemple Soit $f(x, y) = y^x$ continue et positive sur $[0, 1] \times]0, 1[$.
1) Pour $x \in [0, 1]$, la fonction $y \mapsto y^x$ est intégrable sur $]0, 1[$ et

$$\int_0^1 y^x \, \mathrm{d}y = \frac{1}{x+1}$$

2) La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(x, y) \, \mathrm{d}y = \frac{1}{x+1}$ est intégrable sur $[0, 1]$.
On en déduit que f est intégrable sur $[0, 1] \times]0, 1[$ et

$$\iint_{[0,1]\times]0,1[} f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \ln 2$$

1) Pour $y \in]0, 1[$, la fonction $x \mapsto y^x$ est intégrable sur $[0, 1]$ et

$$\int_0^1 y^x \, \mathrm{d}x = \frac{y-1}{\ln y}$$

2) La fonction $y \mapsto \dfrac{y-1}{\ln y}$ est intégrable sur $]0, 1[$ car

$$\frac{y-1}{\ln y} \xrightarrow[y\to 0^+]{} 0 \text{ et } \frac{y-1}{\ln y} \xrightarrow[y\to 1^-]{} 1$$

On en retrouve à nouveau que f est intégrable sur $[0, 1] \times]0, 1[$ et on a la relation :

$$\iint_{[0,1]\times]0,1[} f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{y-1}{\ln y} \, \mathrm{d}y$$

On en déduit

$$\int_0^1 \frac{y-1}{\ln y} \, \mathrm{d}y = \ln 2$$

23.2.4.2 Cas général

Théorème

Soit $f : I \times J \to \mathbb{C}$ continue.
Si
1) f est intégrable ;
2) $\forall x \in I$, $y \mapsto f(x, y)$ est intégrable sur J ;
3) $x \mapsto \displaystyle\int_J f(x, y) \, \mathrm{d}y$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;
Alors

$$\iint_{I\times J} f = \int_I \left(\int_J f(x, y) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Corollaire

Soit $f : I \times J \to \mathbb{C}$ continue.
Si f est intégrable alors sous réserve d'intégrabilité des fonctions engagées dans la relation

$$\int_I \left(\int_J f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x = \int_J \left(\int_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y$$

Attention : Il est essentiel de justifier l'intégrabilité de f.

Exemple Considérons $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$ sur $]0,1] \times]0,1]$.
On observe

$$f(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

D'une part

$$\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=0}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{\pi}{4}$$

D'autre part

$$\int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=0}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y = \int_{y=0}^{1} \frac{-\,\mathrm{d}y}{y^2+1} = -\frac{\pi}{4}$$

Conclusion : f n'est pas intégrable sur $]0,1] \times]0,1]$!

23.2.5 Passage en coordonnées polaires

Théorème

Soit $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ continue.
Si $(x,y) \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ et si $g : (r,\theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)r$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+ \times [0,\pi/2]$ alors

$$\iint_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathbb{R}^+ \times [0,\pi/2]} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

Remarque Ce résultat s'adapte à une intégration sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$,...

Exemple On désire calculer l'intégrale de Gauss

$$\gamma = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Considérons $f(x,y) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ sur $\mathbb{R}^{+2}$.
f est continue et positive sur $\mathbb{R}^{+2}$.

1) Soit $x \in \mathbb{R}^+$, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\int_0^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \gamma \mathrm{e}^{-x^2}$$

2) La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \gamma \mathrm{e}^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
On en déduit que f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+2}$ et

$$\iint_{\mathbb{R}^{+2}} f = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \gamma \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \gamma^2$$

Considérons maintenant $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)r = r\,\mathrm{e}^{-r^2}$.
1) Soit $r \in \mathbb{R}^+$. La fonction $\theta \mapsto r\mathrm{e}^{-r^2}$ est intégrable sur $[0,\pi/2]$ et

$$\int_0^{\pi/2} r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}$$

2) La fonction $r \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2} r\mathrm{e}^{-r^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
On en déduit que g est intégrable sur $\mathbb{R}^+ \times [0,\pi/2]$

$$\iint_{\mathbb{R}^+ \times [0,\pi/2]} g(r,\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{\pi/2} r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}r = \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{2} r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}$$

Par intégration en coordonnées polaires,

$$\gamma^2 = \frac{\pi}{4}$$

puis $\gamma = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ car $\gamma \geqslant 0$.

23.3 Intégrales curvilignes

U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

23.3.1 Forme différentielle

Définition

> On appelle forme différentielle définie sur U toute application continue
>
> $$\omega : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

Exemple Si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ alors $\mathrm{d}f$ est une forme différentielle sur U.

Pour décrire ω, nous allons introduire une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $(e_1^\star, \ldots, e_n^\star)$ sa base duale. $e_i^\star : x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$.
Pour tout $a \in U$, $\omega(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ donc on peut écrire de façon unique

$$\omega(a) = P_1(a)e_1^\star + \cdots + P_n(a)e_n^\star$$

ce qui introduit $P_1, \dots, P_n : U \to \mathbb{R}$ continues (ce sont les fonctions composantes de ω dans la base $\mathcal{B}^\star$).
L'application $e_i^\star : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ est linéaire donc différentiable et $\mathrm{d}e_i^\star(a) = e_i^\star$.
Abusivement, on note $\mathrm{d}x_i$ au lieu de $e_i^\star$ et on peut désormais écrire

$$\omega(x) = P_1(x)\,\mathrm{d}x_1 + \cdots + P_n(x)\,\mathrm{d}x_n$$

Théorème

Si ω est une forme différentielle sur U alors il existe d'uniques applications $P_1, \dots, P_n : U \to \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} P_i\,\mathrm{d}x_i$$

De plus ω est de classe $\mathcal{C}^k$ si, et seulement si, les applications $P_1, \dots, P_n$ le sont.

Exemple Sur $\mathbb{R}^2$, on préfère les notations $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ au lieu de $\mathrm{d}x_1$ et $\mathrm{d}x_2$.

$$\omega(x, y) = \frac{(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)}{x^2 + y^2}$$

est une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Exemple Si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ alors

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n$$

En effet, pour tout $a \in U$ et tout $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\mathrm{d}f(a)h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\,\mathrm{d}x_i\right)(h)$$

car $\mathrm{d}x_i(h) = e_i^\star(h) = h_i$.

23.3.2 Forme différentielle exacte

Définition

Une forme différentielle ω définie sur U est dite exacte s'il existe $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\omega = \mathrm{d}f$. On dit alors que f est une primitive de ω.

Proposition

La forme différentielle $\omega = \sum_{i=1}^{n} P_i\,\mathrm{d}x_i$ est exacte si, et seulement si, il existe une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \frac{\partial f}{\partial x_i} = P_i$$

dém. :
La famille $(\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n)$ étant une base, on peut identifier les composantes dans celle-ci.
□

Exemple Considérons la forme différentielle

$$\omega(x, y, z) = (x - yz)\,\mathrm{d}x + (y - xz)\,\mathrm{d}y + (z - xy)\,\mathrm{d}z$$

définie sur $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = x - yz & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = y - xz & (2) \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = z - xy & (3) \end{cases}$$

Supposons f solution.
(1) donne $f(x, y, z) = \dfrac{1}{2}x^2 - xyz + C(y, z)$.
Dans (2), on obtient $\dfrac{\partial C}{\partial y}(y, z) = y$ donc $C(y, z) = \dfrac{1}{2}y^2 + D(z)$.
Dans (3), on obtient $D'(z) = z$ donc $D(z) = \dfrac{1}{2}z^2 + C^{te}$.
Finalement $f(x, y, z) = \dfrac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - xyz + C^{te}$.
Inversement, une telle fonction est solution du système et donc ω est une forme différentielle exacte.

Exemple Considérons la forme différentielle $\omega(x, y) = \dfrac{1}{2}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -y/2 & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = +x/2 & (2) \end{cases}$$

Supposons f solution.
(1) donne $f(x, y) = -xy/2 + C(y)$.
Dans (2) on obtient $C'(y) = x$. C'est impossible.
Le système n'est pas compatible, la forme différentielle n'est pas exacte.

Proposition

Soit $\omega = \sum_{i=1}^{n} P_i\,\mathrm{d}x_i$ une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
Si ω est exacte alors

$$\forall i \neq j \in \{1, \ldots, n\}, \frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}$$

dém. :
Si ω est exacte alors il existe $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\omega = \mathrm{d}f$. Les dérivées partielles de f sont alors des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ et on peut appliquer le théorème de Schwarz.
□

23.3.3 Forme différentielle fermée

Définition

Une forme différentielle $\omega = \sum_{i=1}^{n} P_i \, \mathrm{d}x_i$ de classe $\mathcal{C}^1$ est dite fermée si elle satisfait la condition

$$\forall i \neq j \in \{1, \ldots, n\}, \frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}$$

Exemple Les formes différentielles exactes sont fermées.

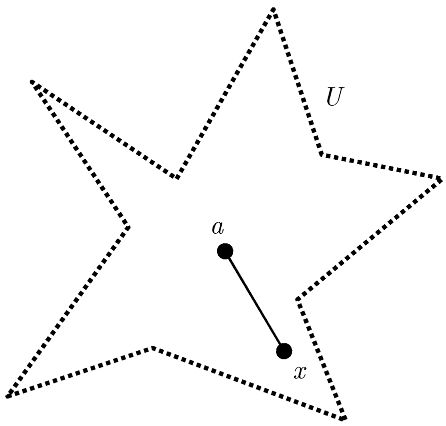
Exemple $\omega(x, y) = \dfrac{x \, \mathrm{d}y - y \, \mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$ est une forme différentielle fermée sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
En effet pour $P(x, y) = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}$ et $Q(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, on a

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

Définition

Un ouvert U est dit étoilé si

$$\exists a \in U, \forall x \in U, [a, x] \subset U$$



Exemple Les ouverts convexes non vides sont étoilés.

Exemple $\mathbb{R}^2 \setminus \left(\mathbb{R}^- \times \{0\}\right)$ est étoilé mais $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ n'est pas étoilé.

Théorème

Une forme différentielle fermée définie sur un ouvert étoilé est exacte.

Exemple La forme différentielle $\omega(x, y) = \dfrac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$ est exacte sur $U = \mathbb{R}^2 \backslash \left(\mathbb{R}^- \times \{0\}\right)$ car fermée sur un étoilé.
On obtient comme primitive

$$\theta(x, y) = 2 \arctan \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

En effet, pour $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, on a
$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ donc $\begin{cases} \mathrm{d}x = \cos\theta\,\mathrm{d}r - r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}y = \sin\theta\,\mathrm{d}r + r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \end{cases}$ puis
$r^2\,\mathrm{d}\theta = -r\sin\theta\,\mathrm{d}x + r\cos\theta\,\mathrm{d}y = -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$.
En revanche que $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$, on ne peut rien dire.
On verra plus tard que cette forme n'est pas exacte sur $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.

23.3.4 Intégrale d'une forme différentielle

Soient $\omega = \sum_{i=1}^{n} P_i\,\mathrm{d}x_i$ une forme différentielle définie sur U et $\Gamma = ([a, b], M)$ un arc compact de classe $\mathcal{C}^1$ inscrit dans U i.e. tel que

$$\forall t \in [a, b], M(t) \in U$$

Notons $M(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$.

Définition

On appelle intégrale (curviligne) de ω le long de l'arc Γ le réel

$$\int_\Gamma \omega = \int_\Gamma \sum_{i=1}^{n} P_i(x)\,\mathrm{d}x_i = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} P_i(x_1(t), \ldots, x_n(t))x_i'(t)\,\mathrm{d}t$$

Lorsque l'arc Γ est fermé (i.e. $M(a) = M(b)$), on note $\oint_\Gamma \omega$.

Exemple Soient $a, b > 0$ et $\Gamma = ([0, 2\pi], M)$ avec $M(t) = (a\cos t, b\sin t)$.
Γ est un paramétrage de l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.
Considérons $\omega(x, y) = \dfrac{1}{2}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$.

$$\oint_\Gamma \omega = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\cos^2 t + ab\sin^2 t = \pi ab$$

Proposition

L'intégrale $\int_\Gamma \omega$ est inchangée par changement de paramétrage croissant.
L'intégrale $\int_\Gamma \omega$ est transformée en son opposé par changement de paramétrage décroissant.

dém. :
$\Gamma = ([a,b], M)$ avec $M : t \in [a,b] \mapsto M(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$.

$$\int_\Gamma \omega = \int_a^b \sum_{i=1}^n P_i(x_1(t), \dots, x_n(t)) x_i'(t)\,\mathrm{d}t$$

Soit $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Réalisons le changement de paramétrage $t = \varphi(u)$.
Cela introduit $\Gamma' = ([\alpha,\beta], N)$ avec $N(u) = M(\varphi(u)) = (x_1 \circ \varphi(u), \dots, x_n \circ \varphi(u))$
Cas φ croissant : $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$.

$$\int_{\Gamma'} \omega = \int_\alpha^\beta \sum_{i=1}^n P_i\left(x_1(\varphi(u)), \dots, x_n(\varphi(u))\right) x_i'(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

Par le changement de variable $u = \varphi(t)$

$$\int_{\Gamma'} \omega = \int_a^b \sum_{i=1}^n P_i(x_1(t), \dots, x_n(t)) x_i'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\Gamma \omega$$

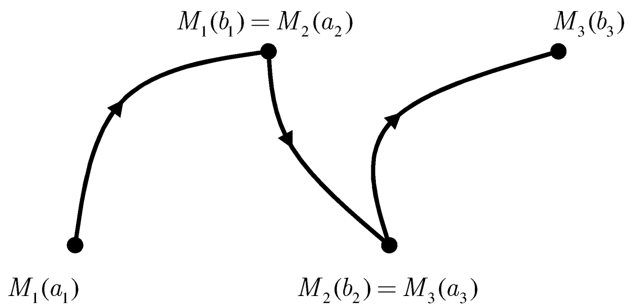
Cas φ décroissant : semblable avec $\varphi(\alpha) = b$ et $\varphi(\beta) = a$.
□

Remarque Ce qui précède permet de parler abusivement d'intégrale curviligne le long d'une courbe orientée.

Définition

On appelle arc $\mathcal{C}^1$ par morceaux toute famille $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_p)$ formée d'arcs compacts $\Gamma_j = ([a_j, b_j], M_j)$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant la condition de continuité

$$\forall 1 \leqslant j \leqslant p-1, M_j(b_j) = M_{j+1}(a_{j+1})$$

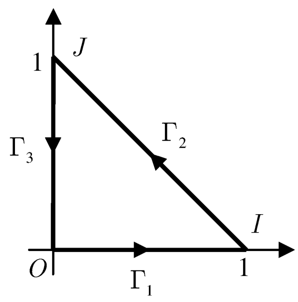


Définition

Soient ω une forme différentielle définie sur U et $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_p)$ un arc $\mathcal{C}^1$ par morceaux inscrit dans U. On appelle intégrale (curviligne) de ω le long de Γ le réel

$$\int_\Gamma \omega = \sum_{j=1}^p \int_{\Gamma_j} \omega$$

Exemple Calculons $\oint_{(OIJ)^+} \omega$ avec $\omega = x\,\mathrm{d}y$ et



Soit $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ un paramétrage $\mathcal{C}^1$ par morceaux de $(OIJ)^+$.
$\Gamma_i = ([0,1], M_i)$ avec $M_1(t) = (t, 0), M_2(t) = (1-t, t)$ et $M_3(t) = (0, 1-t)$.

$$\oint_{(OIJ)^+} \omega = \int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_2} \omega + \int_{\Gamma_3} \omega = \int_0^1 0\,\mathrm{d}t + \int_0^1 (1-t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 0\,\mathrm{d}t = 1/2$$

23.3.5 Intégrale d'une forme différentielle exacte

Théorème

Si ω est une forme différentielle exacte sur U de primitive f et si Γ est un arc $\mathcal{C}^1$ par morceaux d'extrémités A et B alors

$$\int_\Gamma \omega = f(B) - f(A)$$

dém. :
Cas Γ arc de classe $\mathcal{C}^1$:
Si $\omega = \mathrm{d}f$ alors $P_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ donc

$$\int_\Gamma \omega = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(M(t))\right)\mathrm{d}t = f(M(b)) - f(M(a))$$

Cas Γ arc de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux :

$$\int_\Gamma \omega = \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} \omega = \sum_{i=1}^n f(M_i(b_i)) - f(M_i(a_i)) = f(M_n(b_n)) - f(M_1(a_1))$$

□

Corollaire

Si Γ est un arc fermé et ω une forme différentielle exacte alors $\oint_\Gamma \omega = 0$.

Exemple Soit $\omega(x,y) = \dfrac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ forme différentielle définie sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

ω est une forme différentielle fermée. Cependant ω n'est pas exacte.
En effet pour $\Gamma = ([0, 2\pi], M)$, avec $M(t) = (\cos(t), \sin(t))$, on a

$$\int_\Gamma \omega = \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t \,\mathrm{d}t = 2\pi \neq 0$$

23.3.6 Circulation d'un champ de vecteurs

Soit $\vec{F}$ un champ de vecteurs continue de l'espace.

$$\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$$

On note $\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \mathrm{d}x.\vec{i} + \mathrm{d}y.\vec{j} + \mathrm{d}z.\vec{k}$ et alors

$$\overrightarrow{F(M)} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M} = P(x, y, z)\,\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y + R(x, y, z)\,\mathrm{d}z$$

est une forme différentielle.

Proposition

$\vec{F}$ dérive d'un potentiel si, et seulement si, la forme différentielle $\omega = \overrightarrow{F(M)} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M}$ est exacte.

dém. :
$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\, V$ si, et seulement si, $P = \dfrac{\partial V}{\partial x}$, $Q = \dfrac{\partial V}{\partial y}$ et $R = \dfrac{\partial V}{\partial z}$ i.e. $\omega = \mathrm{d}V$.
□

Remarque $\text{Rot}\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \omega$ fermée $\Rightarrow \vec{F}$ dérive d'un potentiel (sous réserve d'ouvert étoilé)

Considérons $\Gamma = ([a, b], M)$ un arc compact de classe $\mathcal{C}^1$ de l'espace.

Définition

On appelle circulation du champ de vecteurs $\vec{F}$ le long de Γ le l'intégrale curviligne

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F(M)} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M}$$

Proposition

Si $\vec{F}$ dérive d'un potentiel V alors

$$\overrightarrow{F(M)} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M} = V(M(b)) - V(M(a))$$

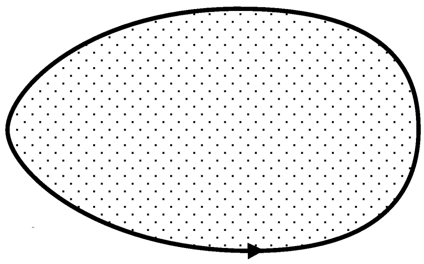
En particulier si Γ est fermé

$$\oint_\Gamma \overrightarrow{F(M)} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M} = 0$$

dém. :
$\overrightarrow{F(M)} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M} = \mathrm{d}V$
□

23.3.7 Formule de Green-Riemann

Soit $\mathcal{D}$ une partie simple non vide de $\mathbb{R}^2$ dont le bord $\partial\mathcal{D}$ est parcouru dans le sens direct.



Théorème

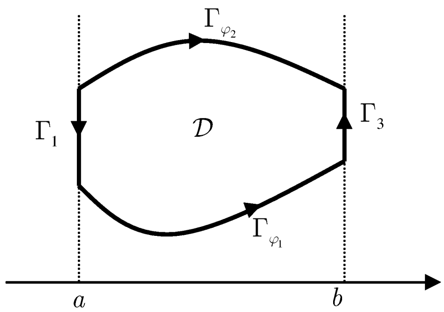
Si $\omega(x,y) = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ est une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert U contenant $\mathcal{D}$ alors

$$\oint_{\partial\mathcal{D}^+} \omega = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

dém. :
Cas : $\mathcal{D}$ est une partie élémentaire.

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial Q}{\partial x} - \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial y}$$

$\mathcal{D}$ est une partie x élémentaire



$$(\partial D)^+ = (\Gamma_1, \Gamma_{\varphi_1}, \Gamma_2, -\Gamma_{\varphi_2})$$

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leqslant x \leqslant b, \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\right\}$$

$$-\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial y} = -\int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \int_a^b P(x,\varphi_1(x)) - P(x,\varphi_2(x))\,\mathrm{d}x$$

Ainsi

$$-\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial y} = \int_{\Gamma_1} P(x,y)\,\mathrm{d}x - \int_{\Gamma_2} P(x,y)\,\mathrm{d}x = \oint_{\partial\mathcal{D}^+} P(x,y)\,\mathrm{d}x$$

De même en observant que $\mathcal{D}$ est y élémentaire on obtient de façon semblable

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial Q}{\partial x} = \oint_{\partial \mathcal{D}^+} Q(x,y)\,\mathrm{d}x$$

Cas : $\mathcal{D}$ est la réunion de deux parties élémentaires d'intérieurs disjoints.

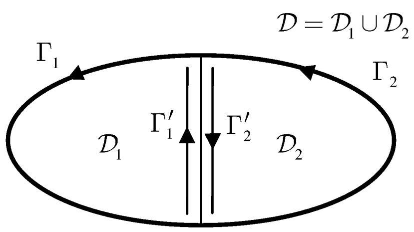
$\partial\mathcal{D}^+ = (\Gamma_1, \Gamma_2)$, $\partial\mathcal{D}_1^+ = (\Gamma_1, \Gamma_1')$ et $\partial\mathcal{D}_2^+ = (\Gamma_2, \Gamma_2')$
donc

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \iint_{\mathcal{D}_1} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} + \iint_{\mathcal{D}_2} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

donne

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_1'} \omega + \int_{\Gamma_2'} \omega + \int_{\Gamma_2} \omega = \oint_{\partial\mathcal{D}^+} \omega$$

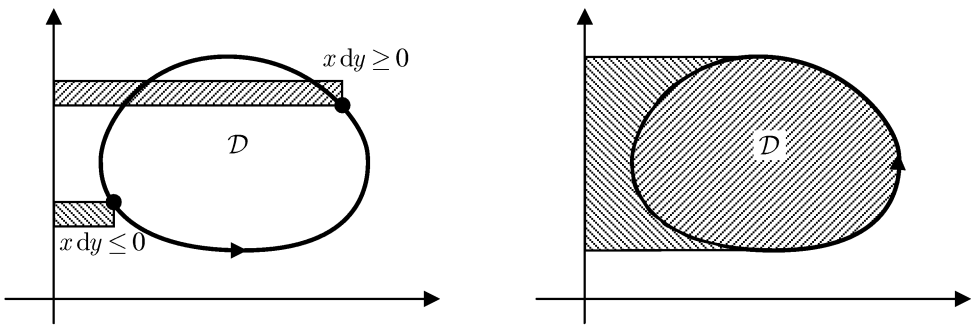
car les intégrales le long des arcs Γ_1' et Γ_2' s'annulent puisque les arcs sont parcourues en sens inverse.



□

Corollaire

$$\text{Aire}(D) = \oint_{\partial D^+} x\,\mathrm{d}y = -\oint_{\partial D^+} y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\oint_{\partial D^+} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x.$$



Exemple Considérons l'astroïde définie par

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$$

La courbe délimite un domaine bornée $\mathcal{D}$. Calculons l'aire de $\mathcal{D}$.

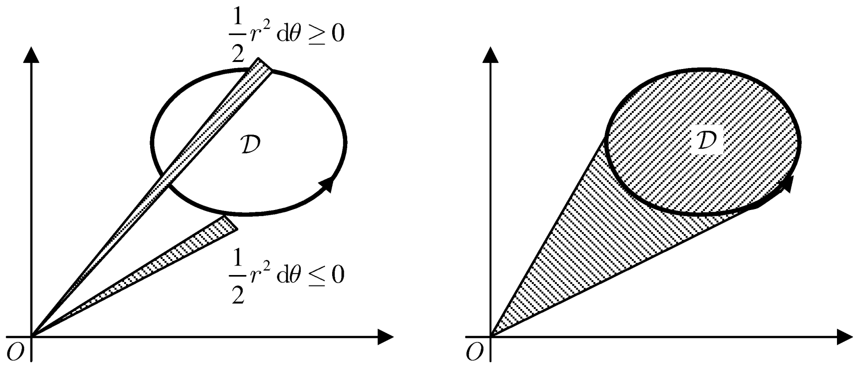
$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \text{ avec } t \in [0, 2\pi]$$

est un paramétrage direct du bord de $\mathcal{D}$.

$$\text{Aire}(\mathcal{D}) = \frac{1}{2} \oint_{\partial D^+} x \,\mathrm{d}y - y \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 3 \cos^2 t \sin^2 t \,\mathrm{d}t = \frac{3\pi}{8}$$

Corollaire

$\text{Aire}(\mathcal{D}) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\oint_{\partial D^+} r^2 \mathrm{d}\theta.$



dém. :

Pour $\begin{cases} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases}$ avec $t \in [a, b]$ on a $\begin{cases} x = r(t) \cos \theta(t) \\ y = r(t) \sin \theta(t) \end{cases}$ avec $t \in [a, b]$ puis après calcul

$$\text{Aire}(\mathcal{D}) = \frac{1}{2} \oint_{\partial D^+} x \,\mathrm{d}y - y \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_a^b r^2(t) \theta'(t) \,\mathrm{d}t$$

□

Exemple Considérons la cardioïde d'équation polaire $r = 1 + \cos \theta$.
La cardioïde délimite un domaine borné $\mathcal{D}$. Calculons l'aire de $\mathcal{D}$

$$\begin{cases} r = 1 + \cos t \\ \theta = t \end{cases}$$

avec $t \in [0, 2\pi]$ est un paramétrage direct du bord de $\mathcal{D}$.

$$\text{Aire}(\mathcal{D}) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos t)^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta)^2 \,\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{2}$$

Troisième partie

Géométrie

Chapitre 24

Géométrie des courbes

I et J désignent des intervalles d'intérieurs non vides de $\mathbb{R}$.
$k \in \mathbb{N}^\star \cup \{\infty\}$.

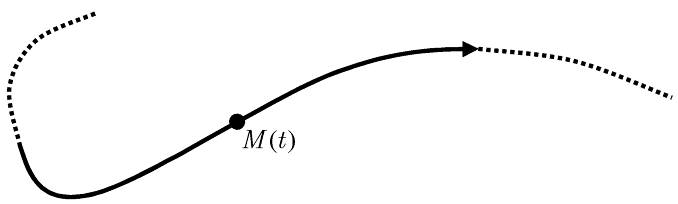
24.1 Arc géométrique

$\mathcal{E}$ désigne un espace affine euclidien d'origine O (i.e. un ensemble de points en bijection avec un espace euclidien E via une application $M \mapsto \overrightarrow{OM}$ vérifiant $\overrightarrow{OO} = 0_E = \vec{0}$).
En pratique $\mathcal{E}$ est le plan géométrique ou l'espace géométrique.

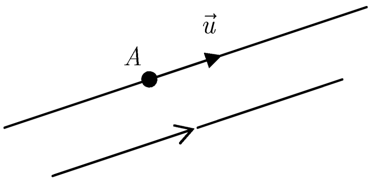
24.1.1 Arc paramétré

Définition

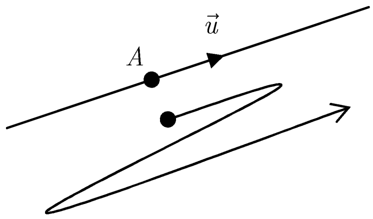
On appelle arc paramétré de $\mathcal{E}$ tout couple $\Gamma = (I, M)$ formé d'un intervalle I d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$ et d'une application $M : I \to \mathcal{E}$.
On appelle classe de l'arc Γ, la classe de la fonction vectorielle $t \mapsto \overrightarrow{OM}(t)$. $M(t)$ est alors appelé point courant de paramètre $t \in I$ de l'arc Γ, Supp$\Gamma = \{M(t)/t \in I\}$ est appelé support de l'arc Γ et enfin on dit que Γ est un paramétrage de SuppΓ.



Exemple Soit A un point et $\vec{u} \neq \vec{o}$
$M(t) = A + t\vec{u}$, $\Gamma = (\mathbb{R}, M)$ est un paramétrage de la droite $(A; \vec{u})$.
$N(t) = A + t\cos t\vec{u}$, $\Gamma = (\mathbb{R}^+, N)$ est aussi un paramétrage de la droite $(A; \vec{u})$.



$M(t) = A + t.\vec{u}$

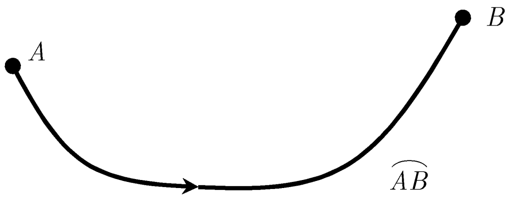


$N(t) = A + t\cos(t).\vec{u}$

Un arc paramétré ne se réduit pas à son support.

Définition

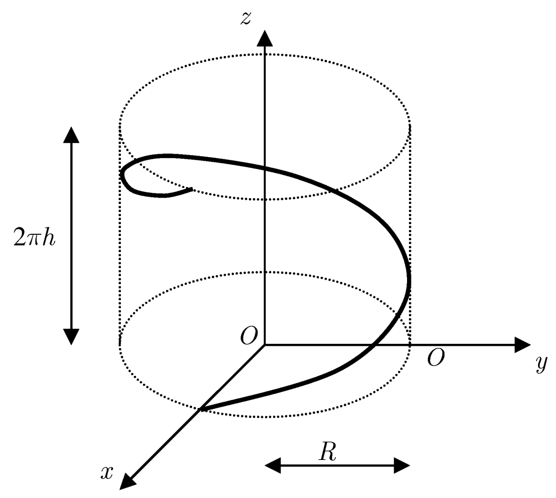
Un arc $\Gamma = (I, M)$ de classe $\mathcal{C}^k$ est dit compact si $I = [a, b]$.
Les points $A = M(a)$ et $B = M(b)$ sont appelés extrémités initiale et finale de l'arc Γ. Le support de Γ est alors parfois noté $\widehat{AB}$.
Si $A = B$, on dit que l'arc est fermé.



Exemple Dans l'espace géométrique muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le système

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \ \text{ avec } t \in [0, 2\pi] \\ z = ht \end{cases}$$

détermine l'arc $\Gamma = (I, M)$ avec $M(t)$ le point de coordonnées $(R\cos, R\sin t, ht\ )$
Γ est la paramétrage d'une portion d'hélice.



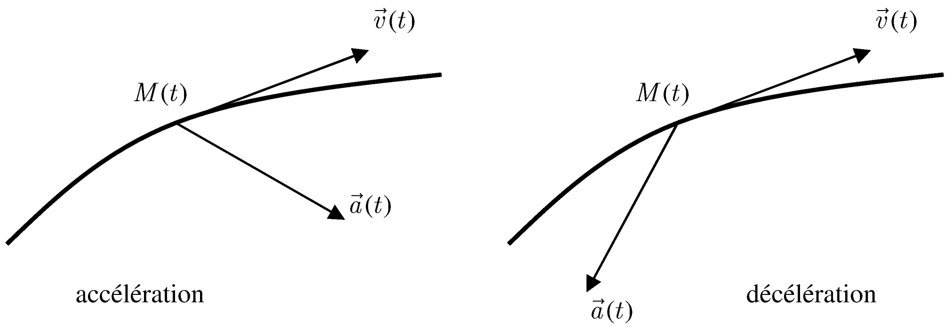
24.1.2 Notions cinématiques

Soit $\Gamma = (I, M)$ est un arc de classe $\mathcal{C}^2$.

Définition

$\vec{v}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t)$ est appelé vecteur vitesse à l'instant t
$v(t) = \|\vec{v}(t)\|$ est appelé vitesse à l'instant t.
$\vec{a}(t) = \dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}(t)$ est appelé vecteur accélération à l'instant t.

Remarque Selon que l'angle géométrique entre $\vec{v}(t)$ et $\vec{a}(t)$ est aigu ou obtus il y a accélération ou décélération.
En effet $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v^2) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{v} \mid \vec{v}) = 2(\vec{a}, \vec{v})$.



Définition

Soit $t_0 \in I$. On dit que le point $M_0 = M(t_0)$ de l'arc $\Gamma = (I, M)$ est régulier si $\vec{v}(t_0) \neq \vec{0}$, sinon, on dit que ce point est stationnaire.
On dit le point M_0 est birégulier si $\vec{v}(t_0)$ et $\vec{a}(t_0)$ ne sont pas colinéaires.
Enfin, on dit que l'arc Γ est régulier (resp. birégulier) si tous ses points le sont.

Exemple Un arc de l'espace géométrique est birégulier si, et seulement si,

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \wedge \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right)(t_0) \neq \vec{0}$$

24.1.3 Changement de paramétrage

Soit $\varphi : I \to J$ un $\mathcal{C}^k$ difféomorphisme.
Réaliser le changement de paramétrage défini par la relation $u = \varphi(t)$, consiste à transposer toute fonction

$$f : t \in I \mapsto f(t)$$

en une fonction

$$\tilde{f} : u \in J \mapsto \tilde{f}(u)$$

définie de sorte que $f(t) = \tilde{f}(u)$.
Plus précisément, la fonction $\tilde{f}$ est définie par $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$.
On a alors

$$\forall t \in I, f(t) = \tilde{f}(\varphi(t)) \text{ et } \forall u \in J, \tilde{f}(u) = f(\varphi^{-1}(u))$$

En dérivant ces relations, on obtient

$$f'(t) = \varphi'(t)\tilde{f}'(\varphi(t)) \text{ (1) et } \tilde{f}'(u) = (\varphi^{-1})'(u)f'(\varphi^{-1}(u)) \text{ (2)}$$

De plus, la relation $\varphi^{-1}(\varphi(t)) = t$ donne

$$\varphi'(t)(\varphi^{-1})'(\varphi(t)) = 1 \text{ (3)}$$

Afin de manipuler plus aisément ces relations, on réalise les abus suivants :
- on écrit u pour $\varphi(t)$ et t pour $\varphi^{-1}(u)$;
- on écrit $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ pour $\varphi'(t)$ et $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}$ pour $(\varphi^{-1})'(u)$;
- on confond $f(t)$ et $\tilde{f}(u)$;
- on écrit $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}$ pour $f'(t)$ et $\tilde{f}'(u)$.

Les relations (1), (2) et (3) s'écrivent alors

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}, \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \text{ et } \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 1$$

On peut aussi dériver à l'ordre 2 et écrire

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} + \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}u^2}$$

Définition

On appelle paramétrage $\mathcal{C}^k$ admissible d'un arc $\Gamma = (I, M)$ de classe $\mathcal{C}^k$, tout arc $\Gamma' = (J, M)$ obtenu par un changement de paramétrage $u = \varphi(t)$ avec φ $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme de I vers J.

24.1.4 Notions géométriques

Définition

Une notion relative à un arc invariante par changement de paramétrage est qualifiée de géométrique.

Exemple Le support d'un arc est une notion géométrique.

Exemple La vitesse en un point n'est pas une notion géométrique.

Proposition

La régularité et la birégularité d'un point sont des notions géométriques.

dém. :
Soit $\Gamma = (I, M)$ un arc de classe $\mathcal{C}^2$.
Réalisons le changement de paramétrage donné par $u = \varphi(t)$.
D'une part

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}u}$$

donc

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}u} = \vec{0}$$

D'autre part

$$\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}u} + \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}u^2}$$

donc

$$\mathrm{Vect}\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right) = \mathrm{Vect}\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}u}, \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}u^2}\right)$$

□

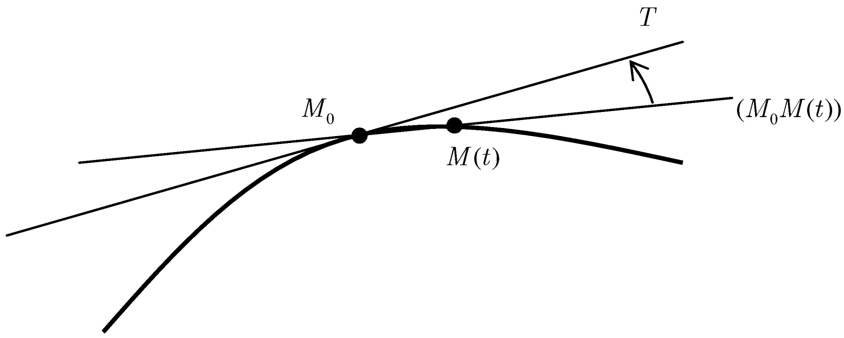
Définition

Une notion relative à un arc invariante par changement de paramétrage croissant est qualifiée de géométrique orientée.

Exemple Le sens du vecteur vitesse en un point régulier est une notion géométrique orientée.

24.1.5 Tangente

Soient $\Gamma = (I, M)$ un arc de classe $\mathcal{C}^1$ et $t_0 \in I$.
On désire étudier l'existence d'une tangente en $M_0 = M(t_0)$.



Définition

Sous réserve d'existence, on appelle tangente à l'arc Γ en M_0 la position limite de la droite $(M_0M(t))$ quand $t \to t_0$ (avec $t \neq t_0$)

Remarque Comme les droites $(M_0M(t))$ pivotent autour du point M_0, dire que celles-ci ont une position limite quand $t \to t_0$ signifie qu'elles admettent un vecteur directeur $\vec{u}(t)$ tel que
$\vec{u}(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} \vec{u}_0 \neq \vec{0}$.
La droite passant par M_0 et dirigée par $\vec{u}_0$ est alors la tangente.

Remarque C'est une notion géométrique.

Remarque On peut aussi parler de demi-tangente si l'on travaille avec $t \to t_0^+$ et $t \to t_0^-$.
Ces notions sont géométriques orientées.

Théorème

Si l'un des vecteurs dérivés successifs

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0), \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}(t_0), \ldots$$

n'est pas nul alors Γ admet une tangente en $M_0 = M(t_0)$ et qui est dirigée par le premier de ces vecteurs à être non nul.

dém. :
La droite $(M_0M(t))$ est dirigée par

$$\overrightarrow{M_0M}(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} \vec{0}$$

ce qui ne permet de rien dire... Notons $p \geqslant 1$ le plus petit entier tel que

$$\frac{\mathrm{d}^p\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^p}(t_0) \neq \vec{0}$$

Par la formule de Taylor-Young :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OM_0} + \frac{(t-t_0)^p}{p!}\frac{\mathrm{d}^p\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^p}(t_0) + \overrightarrow{o\left((t-t_0)^p\right)}$$

donc

$$\overrightarrow{M_0M}(t) = \frac{(t-t_0)^p}{p!}\frac{\mathrm{d}^p\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^p}(t_0) + \overrightarrow{o\left((t-t_0)^p\right)}$$

La droite $(M_0M(t))$ est alors dirigée par

$$\vec{u}_t = \frac{p!}{(t-t_0)^p}\overrightarrow{M_0M}(t) = \frac{\mathrm{d}^p\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^p}(t_0) + \overrightarrow{o(1)} \to \frac{\mathrm{d}^p\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^p}(t_0) \neq \vec{0}$$

□

Corollaire

En un point régulier, un arc admet une tangente dirigée par le vecteur vitesse.

Exemple Considérons l'hélice

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \quad \text{avec } t \in [0, 2\pi] \\ z = ht \end{cases}$$

On a

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\left|\begin{array}{l} -R\sin t \\ R\cos t \\ h \end{array}\right. \neq \vec{0}$$

donc l'hélice admet une tangente en $M(t)$ qui est la droite donnée par le paramétrage

$$\begin{cases} x = R\cos t - \lambda R\sin t \\ y = R\sin t + \lambda R\cos t \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \\ z = ht + \lambda h \end{cases}$$

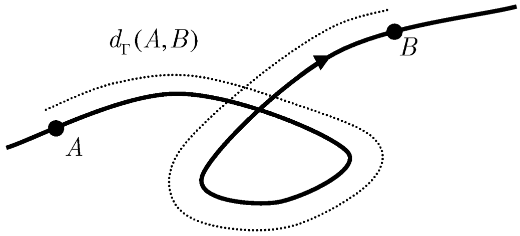
24.1.6 Distance curviligne

Soit $\Gamma = (I, M)$ un arc de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition

Pour $a, b \in I$, on appelle distance curviligne le long de l'arc Γ de $A = M(a)$ à $B = M(b)$ le réel

$$d_\Gamma(A, B) = \int_a^b \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \right\|$$



Remarque Motivation cinématique : $d_\Gamma(A, B)$ est l'intégrale de la vitesse entre les instants $t = a$ et $t = b$ ce qui donne la distance parcourue.

Proposition

C'est une notion géométrique orientée.

dém. :
Soient $\varphi : I \to J$ un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme et considérons $\Gamma' = (J, M)$ le paramétrage $\mathcal{C}^k$ -admissible correspondant au changement de paramétrage $u = \varphi(t)$.

$$d_\Gamma(A, B) = \int_a^b \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) \right\| \mathrm{d}t \text{ et } d_{\Gamma'}(A, B) = \int_\alpha^\beta \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}u}(u) \right\| \mathrm{d}u$$

Par le changement de variable $u = \varphi(t)$

$$d_{\Gamma'}(A, B) = \int_a^b \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}u}(\varphi(t)) \right\| \varphi'(t)\mathrm{d}t$$

Si φ est croissant alors $\varphi'(t) > 0$ donc

$$\varphi'(t) \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}u}(\varphi(t)) \right\| = \left\| \varphi'(t) \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}u}(\varphi(t)) \right\| = \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) \right\|$$

puis $d_{\Gamma'}(A, B) = d_\Gamma(A, B)$.
□

Remarque Si φ est décroissante alors $\varphi'(t) < 0$ et $d_{\Gamma'}(A, B) = -d_\Gamma(A, B)$

Définition

On appelle longueur d'un arc compact la distance curviligne de son extrémité initiale à son extrémité finale.

Exemple Considérons la portion d'hélice donnée par :

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \quad \text{avec } t \in [0, 2\pi] \\ z = ht \end{cases}$$

Sa longueur est

$$L = \int_0^{2\pi} \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \right\| = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + h^2} = 2\pi\sqrt{R^2 + h^2}$$

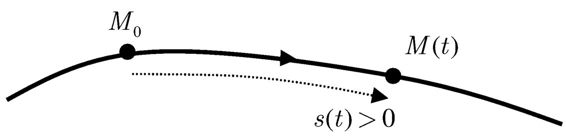
24.1.7 Abscisse curviligne

Soit $\Gamma = (I, M)$ un arc de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition

Soient $t_0 \in I$. On appelle abscisse curviligne d'origine $M_0 = M(t_0)$ le long de l'arc $\Gamma = (I, M)$ l'application $s : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$s(t) = d_\Gamma(M_0, M(t)) = \int_{t_0}^{t} \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \right\|$$



Proposition

s est une application dérivable et

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \right\|$$

dém. :

Car $s : t \mapsto \displaystyle\int_{t_0}^{t} \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \right\|$ est la primitive de $\left\| \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \right\|$ s'annulant en t_0.

□

Définition

On appelle abscisse curviligne le long de Γ toute fonction $s : I \to \mathbb{R}$ dérivable et vérifiant

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \right\|$$

Proposition

Si s est une abscisse curviligne le long de l'arc Γ alors

$$\forall a, b \in I, \mathrm{d}_\Gamma(M(a), M(b)) = s(b) - s(a)$$

dém. :

$$\mathrm{d}_\Gamma(M(a), M(b)) = \int_a^b \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \right\| = [s(t)]_a^b$$

□

24.1.8 Paramétrage normal d'un arc régulier

Soient $\Gamma = (I, M)$ un arc $\mathcal{C}^k$ régulier et s une abscisse curviligne le long de Γ.
La fonction $s : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \right\|$$

Puisque $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ et ne s'annule pas, s' est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ et donc s de classe $\mathcal{C}^k$.
De plus s' est strictement positive et donc s réalise un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme strictement croissant de I vers l'intervalle $J = s(I)$.
Réalisons le changement de paramétrage défini par la relation $s = s(t)$.

Définition

Le paramétrage $\mathcal{C}^k$ admissible $\Gamma' = (J, M)$ ainsi obtenu est appelé paramétrage normal de l'arc Γ.

Proposition

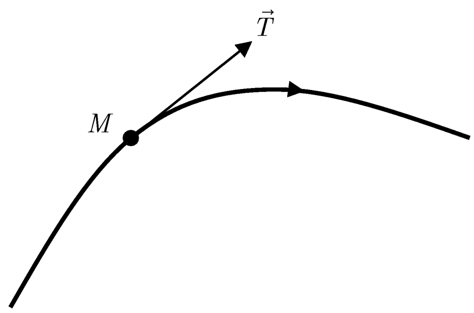
Ce paramétrage est réalisé à vitesse constante égale à 1.

dém. :
$\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} / \left\| \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \right\|$ donc $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s}$ est unitaire.

□

Définition

Le vecteur $\vec{T} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s}$ est appelé vecteur tangent au point M, c'est une notion géométrique orientée.



24.2 Courbes du plan

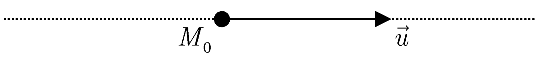
Désormais, $\mathcal{P}$ désigne le plan géométrique muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Soit $\Gamma = (I, M)$ un arc de classe $\mathcal{C}^k$ du plan $\mathcal{P}$.

24.2.1 Etude locale

Soient $t_0 \in I$ et $M_0 = M(t_0)$.
On désire préciser le comportement de $M(t)$ pour t voisin de t_0.
Supposons qu'il existe un plus petit entier $p \geqslant 1$ tel que

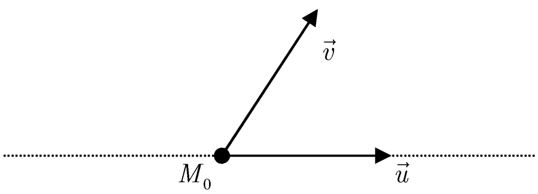
$$\vec{u} = \frac{\mathrm{d}^p\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^p}(t_0) \neq \vec{0}$$

La tangente en M_0 existe et est dirigée par $\vec{u}$.



Exemple Si M_0 est régulier alors $p = 1$ et $\vec{u} = \vec{v}(t_0)$

Supposons de plus, qu'il existe un plus petit entier $q \geqslant p+1$ tel que $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}^q\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^q}(t_0)$ ne soit pas colinéaire à $\vec{u}$.



Exemple Si M_0 est birégulier $p = 1$, $q = 2$, $\vec{u} = \vec{v}(t_0)$ et $\vec{v} = \vec{a}(t_0)$.

Par Taylor-Young

$$\overrightarrow{OM}(t_0+h) = \overrightarrow{OM_0} + h\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0) + \cdots + \frac{h^q}{q!}\frac{\mathrm{d}^q\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^q}(t_0) + \overrightarrow{o(h^q)}$$

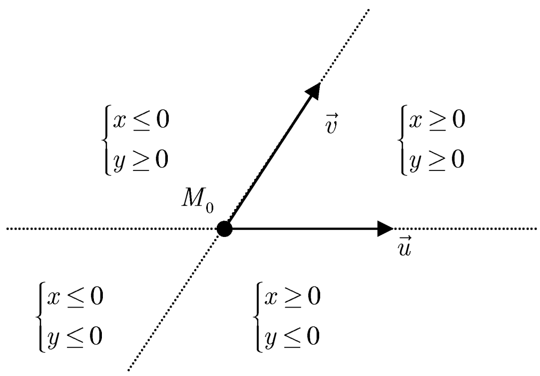
Par définition des entiers p et q :
pour $1 \leqslant j < p$, $\dfrac{\mathrm{d}^j\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^j}(t_0) = \vec{0}$,
pour $j = p$, $\dfrac{\mathrm{d}^p\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^p}(t_0) = \vec{u}$,
pour $p < j < q$, $\dfrac{\mathrm{d}^j\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^j}(t_0) = \lambda_j\vec{u}$,
et pour $j = q$, $\dfrac{\mathrm{d}^q\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^q}(t_0) = \vec{v}$.
Enfin $\overrightarrow{o(h^q)} = h^q\overrightarrow{\varepsilon(h)}$ avec $\overrightarrow{\varepsilon(h)} \to 0$.
Puisque $(\vec{u},\vec{v})$ est une base, $\overrightarrow{\varepsilon(h)} = \varepsilon_u(h)\vec{u} + \varepsilon_v(h)\vec{v}$ avec $\varepsilon_u(h), \varepsilon_v(h) \to 0$ et donc $\overrightarrow{\varepsilon(h)} = o(h^q)\vec{u} + o(h^q)\vec{v}$.
On parvient à la relation

$$\overrightarrow{M_0M(t_0+h)} = \left(\frac{h^p}{p!} + o(h^p)\right)\vec{u} + \left(\frac{h^q}{q!} + o(h^q)\right)\vec{v}$$

Les coordonnées du point $M(t_0+h)$ dans le repère oblique $(M_0;\vec{u},\vec{v})$ sont

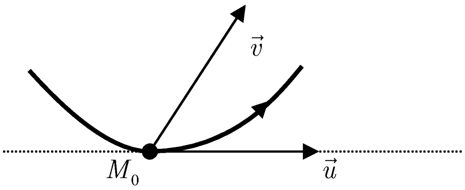
$$x(h) = \frac{h^p}{p!} + o(h^p) \sim \frac{1}{p!}h^p \text{ et } y(h) = \frac{h^q}{q!} + o(h^q) \sim \frac{1}{q!}h^q$$

L'étude du signe de ces coordonnées permet de positionner le point $M(t_0+h)$



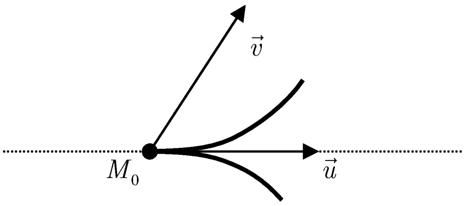
On peut alors justifier les figures classiques suivantes

Cas p impair et q pair



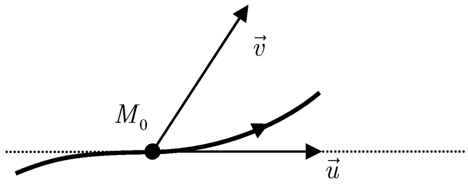
Point ordinaire

Cas p pair et q impair



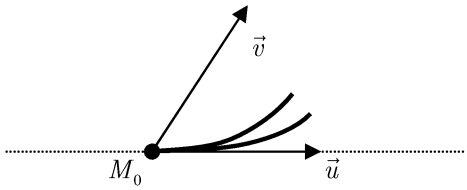
Point de rebroussement de 1ère espèce

Cas p impair et q impair



Point d'inflexion

Cas p pair et q pair



Point de rebroussement de 2nde espèce

Remarque Un point régulier est soit un point ordinaire, soit un point d'inflexion.
Un point birégulier est un point ordinaire.

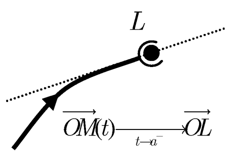
Remarque On peut montrer que les valeurs des entiers p et q sont géométriques.

24.2.2 Etude asymptotique

On suppose que l'intervalle I possède une extrémité ouverte $a \in \bar{\mathbb{R}}$.
On désire préciser le comportement de $M(t)$ quand $t \to a$
Les limites qui suivent sont étudiées quand $t \to a$.

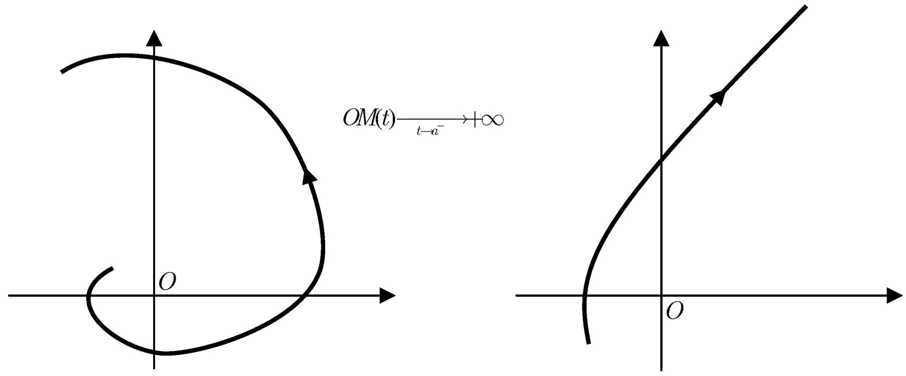
Définition

S'il existe un point L tel que $\overrightarrow{OM(t)} \to \overrightarrow{OL}$ alors on dit que L est un point limite de Γ en a.
En étudiant la position limite de la droite $(LM(t))$, on peut éventuellement définir la tangente en L.



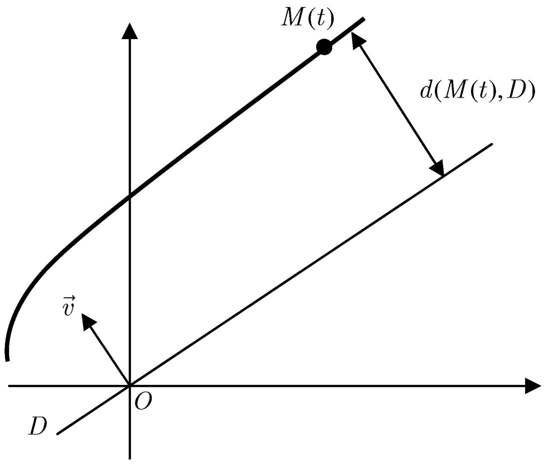
Définition

Si $OM(t) \to +\infty$, on dit que Γ présente une branche infinie en a.



Définition

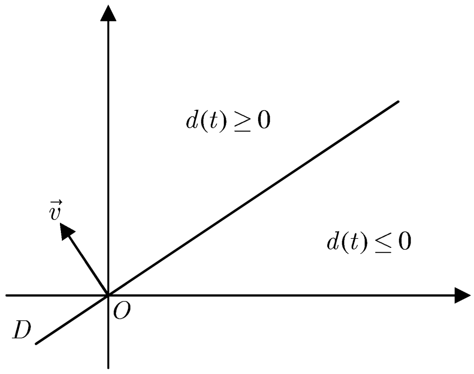
Supposons que Γ ait une branche infinie en a.
Si la droite $(OM(t))$ admet une position limite alors cette droite limite D est appelée direction asymptotique de l'arc Γ en a.



Supposons que Γ présente une branche infinie de direction D.
Considérons alors $\vec{v}$ vecteur unitaire normal à D. On a

$$d(M(t), D) = \left|(\overrightarrow{OM(t)} \mid \vec{v})\right|$$

Introduisons la distance algébrique $d(t) = (\vec{v} \mid \overrightarrow{OM}(t))$.

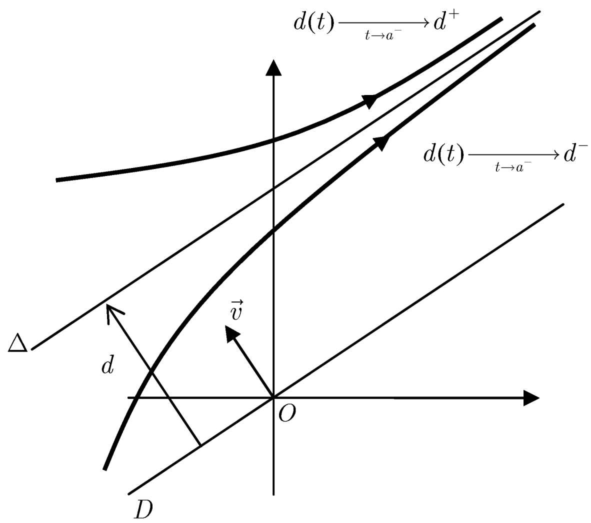


Définition

Si $d(t) \to \pm\infty$ alors on dit que Γ présente une branche parabolique de direction D.

Définition

Si $d(t) \to d$ alors la droite $\Delta = D + d\vec{v}$ est dite asymptote à Γ en a (car $d(M(t), \Delta) \to 0$).
En étudiant si $d(t) \to d^+$ ou d^- on peut positionner courbe et asymptote.



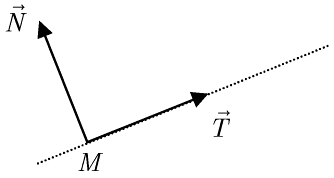
24.2.3 Etude métrique

On suppose l'arc Γ régulier et on introduit s une abscisse curviligne le long de Γ ce qui permet de considérer un paramétrage normal de l'arc Γ.

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \text{ avec } \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right\|$$

24.2.3.1 Repère de Frénêt.

Le vecteur unitaire
$$\vec{T} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s} = \frac{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}}{\left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right\|}$$
dirige la tangente en tout point M. On pose $\vec{N} = \mathrm{Rot}_{\pi/2}(\vec{T})$.

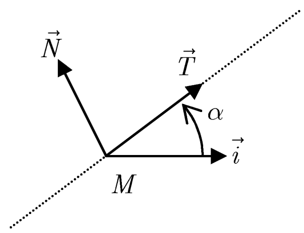


Définition

Le repère orthonormé direct $(M; \vec{T}, \vec{N})$ est appelé repère de Frénêt au point M.

24.2.3.2 Détermination angulaire

Posons
$$\alpha(t) = (\vec{i}, \vec{T}(t)) \quad [2\pi]$$



Chacune des valeurs $\alpha(t)$ est déterminée à un multiple de 2π près. Cependant, puisque l'application
$$t \mapsto \vec{T}(t) = \frac{1}{\left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t)\right\|} \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t)$$
est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ et prend pour valeur des vecteurs unitaires, on peut par le théorème de relèvement déterminer une fonction $\alpha : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ telle que
$$\forall t \in I, \alpha(t) = (\vec{i}, \vec{T}(t)) \quad [2\pi]$$

Définition

α est appelée détermination angulaire le long de l'arc Γ.

Proposition

$\vec{T}\left|\begin{array}{l}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{array}\right.$ et $\vec{N}\left|\begin{array}{l}-\sin\alpha \\ \cos\alpha\end{array}\right.$.

24.2.3.3 Courbure

Définition

On pose $\gamma = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$ appelée courbure le long de l'arc Γ.

Proposition

$\dfrac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = \gamma\vec{N}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}s} = -\gamma\vec{T}$.

dém. :

$\vec{T}\left|\begin{array}{l}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{array}\right.$ donc $\dfrac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}\left|\begin{array}{l}-\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\sin\alpha\\ \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\cos\alpha\end{array}\right. = \gamma\vec{N}$ et de même on obtient $\dfrac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}s} = -\gamma\vec{T}$.

Interprétons la courbure

Soit $M_0 = M(s_0)$.

$\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s}(s_0) = \vec{T}$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s^2}(s_0) = \gamma\vec{N}$ donc

$$\mathrm{Det}\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s}(s_0), \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s^2}(s_0)\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{vmatrix} = \gamma$$

Ainsi

$$M_0 \text{ est birégulier } \Leftrightarrow \gamma \neq 0$$

De plus, si tel est le cas, la formule de Taylor-Young donne

$$\overrightarrow{OM}(s_0+h) = \overrightarrow{OM_0} + h\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s}(s_0) + \frac{1}{2}h^2\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s^2}(s_0) + \overrightarrow{o(h^2)}$$

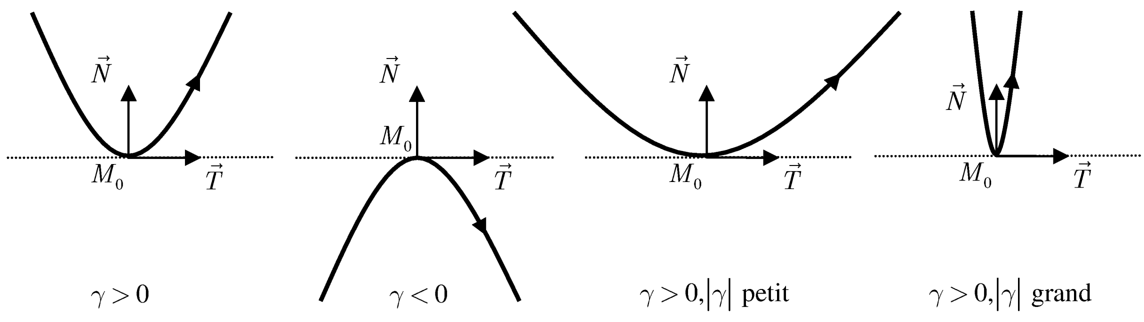
donc

$$\overrightarrow{M_0M}(s_0+h) = (h+o(h))\,\vec{T} + \left(\frac{\gamma}{2}h^2 + o(h^2)\right)\vec{N}$$

Dans le repère de Frénêt $(M_0;\vec{T},\vec{N})$, le point $M(s_0+h)$ a pour coordonnées

$$x = h + o(h) \sim h \text{ et } y = \frac{\gamma}{2}h^2 + o(h^2) \sim \frac{\gamma}{2}h^2 \sim \frac{\gamma}{2}x^2$$

Ainsi, asymptotiquement, $M(s_0+h)$ évolue sur la parabole d'équation $y = \dfrac{\gamma}{2}x^2$.



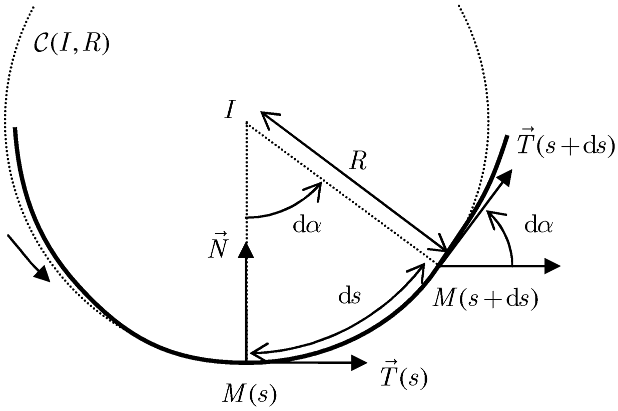
□

24.2.3.4 Rayon de courbure

Définition

Si M est birégulier on pose
$R = 1/\gamma$: rayon de courbure en M.
$I = M + R\vec{N}$: centre de courbure en M.
$\mathcal{C}(I, |R|)$: cercle osculateur en M.

Remarque Le cercle osculateur est le cercle le plus proche de la courbe au point considéré.



24.2.3.5 Formules de Frénêt

$\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s} = v.\vec{T}$ avec $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ et $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v\vec{T}\right) = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{T} + \gamma v^2\vec{N}$.

Théorème

On a

$$\gamma = \frac{\mathrm{Det}(\vec{v}, \vec{a})}{v^3}$$

dém. :

$\mathrm{Det}(\vec{v}, \vec{a}) = \begin{vmatrix} v & \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ 0 & \gamma v^2 \end{vmatrix} = \gamma v^3$.

□

24.3 Arc cartésiens

24.3.1 Paramétrage cartésien

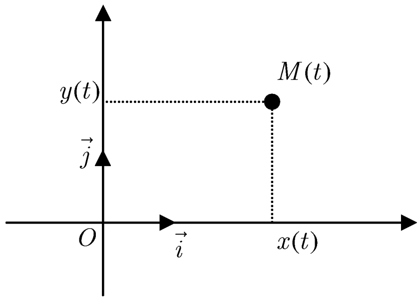
Soient $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ deux fonctions réelles définies sur I de classe $\mathcal{C}^k$.

Définition

On appelle arc cartésien défini par le système

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \text{ avec } t \in I$$

l'arc $\Gamma = (I, M)$ avec $M(t)$ le point déterminé par $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$.



Proposition

L'arc Γ est de classe $\mathcal{C}^k$, $\vec{v}(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}$ et $\vec{a}(t) = x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j}$.

Exemple Soient $A \left| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right.$ et $\vec{u} \left| \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right. \neq \vec{0}$.

$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ est un paramétrage cartésien régulier de la droite $(A; \vec{u})$.

Exemple Soient $\Omega \left| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right.$ et $R > 0$.

$\begin{cases} x = x_0 + R\cos t \\ y = y_0 + R\sin t \end{cases}$ avec $t \in [0, 2\pi]$ est un paramétrage cartésien birégulier du cercle $\mathcal{C}(\Omega, R)$.

Exemple Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$.

$\begin{cases} x = t \\ y = \varphi(t) \end{cases}$ avec $t \in I$ est un paramétrage cartésien régulier cartésien de classe $\mathcal{C}^k$ de Γ_φ.

24.3.2 Réduction d'étude

Cas $I = \mathbb{R}$

S'il existe $T > 0$ et une transformation f du plan tels que $M(t + T) = f(M(t))$, on peut limiter l'étude de l'arc à un segment de longueur T : on complètera la courbe par f^k avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple Si $\begin{cases} x(t+T) = x(t) \\ y(t+T) = y(t) \end{cases}$ alors alors $M(t+T) = M(t)$. Etude sur $[0, T]$.

Cas I symétrique par rapport à t_0
S'il existe une transformation f du plan telle que $M(2t_0 - t) = f(M(t))$, on peut limiter l'étude de l'arc à $I \cap [t_0, +\infty[$ ou $I \cap]-\infty, t_0]$: on complétera la courbe par f. En effet $M(t_0 - h) = f\left(M(t_0 + h)\right)$

Exemple Si $\begin{cases} x(2t_0 - t) = x(t) \\ y(2t_0 - t) = -y(t) \end{cases}$ alors $M(2t_0 - t) = s_{(Ox)}(M(t))$. Etude sur $I \cap [t_0, +\infty[$.

24.3.3 Etude locale

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j},\ \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} \text{ et } \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}(t) = x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j}$$

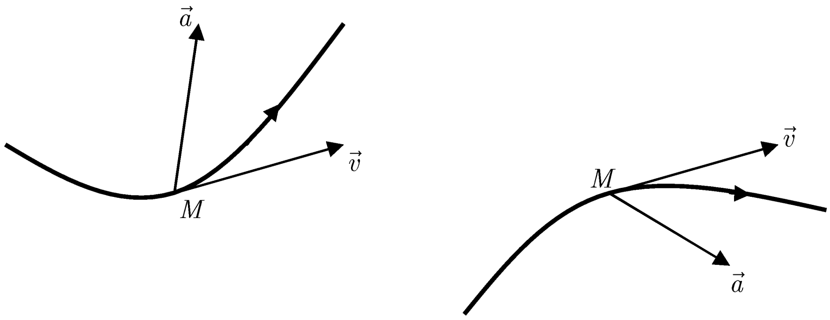
$M(t)$ régulier si, et seulement si, $\vec{v}(t) \neq \vec{0}$ i.e. $(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$.
La tangente en M a alors pour pente

$$m(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

$M(t)$ birégulier si, et seulement si, Det$(\vec{v}(t), \vec{a}(t)) \neq 0$ i.e.

$$(x'y'' - x''y')(t) \neq 0$$

En un point birégulier, le signe de $(x'y'' - x''y')(t)$ donne l'orientation de la courbe.



$x'y'' - x''y' > 0$ — La courbe tourne à gauche

$x'y'' - x''y' < 0$ — La courbe tourne à droite

Si $x'y'' - x''y'$ s'annule en changeant de signe, il y a un point d'inflexion.
Si $M_0 = M(t_0)$ n'est pas birégulier, on réalise les développements limités de x et y en t_0 :

$$\begin{cases} x(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + \cdots + a_n(t - t_0)^n + o((t - t_0)^n) \\ y(t) = b_0 + b_1(t - t_0) + \cdots + b_n(t - t_0)^n + o((t - t_0)^n) \end{cases}$$

Par la formule de Taylor-Young et l'unicité des coefficients d'un développements limités, on obtient :

$$x(t_0) = a_0,\, x'(t_0) = a_1,\, \frac{1}{2}x''(t_0) = a_2, \ldots$$

et donc

$$M(t_0) \left| \begin{array}{l} a_0 \\ b_0 \end{array} \right. \text{ et } \forall 1 \leqslant k \leqslant n,\, \frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^k\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^k}(t_0) \left| \begin{array}{l} a_k \\ b_k \end{array} \right.$$

L'entier p est le plus petit $\geqslant 1$ tel que $\begin{pmatrix} a_p \\ b_p \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on peut prendre $\frac{1}{p!}\vec{u} \left| \begin{array}{l} a_p \\ b_p \end{array} \right.$.
L'entier q est le plus petit $\geqslant p+1$ tel que $\begin{vmatrix} a_p & a_q \\ b_p & b_q \end{vmatrix} \neq 0$ et on peut prendre $\frac{1}{q!}\vec{v} \left| \begin{array}{l} a_q \\ b_q \end{array} \right.$.
On peut alors donner l'allure de la courbe au voisinage de M_0.

24.3.4 Branche infinie

On suppose que I possède un extrémité ouverte, $a \in \bar{\mathbb{R}}$.
Les limites qui suivent seront entendues quand t tend vers a.
Si $\begin{cases} x(t) \to x_0 \\ y(t) \to y_0 \end{cases}$ alors $L \left| \begin{array}{l} x_0 \\ y_0 \end{array} \right.$ est point limite en a.
En étudiant $\lim\limits_{t \to a} \frac{y(t) - y_0}{x(t) - x_0}$ on peut préciser une éventuelle tangente en L.
Si $x(t) \to \pm\infty$ ou $y(t) \to \pm\infty$ alors Γ présente une branche infinie en a.
Cas $\frac{y(t)}{x(t)} \to \alpha \in \mathbb{R}$
La droite $D : y = \alpha x$ est direction asymptotique à Γ en a et :
- si $y(t) - \alpha x(t) \to \pm\infty$ alors Γ présente une branche parabolique de direction D en a ;
- si $y(t) - \alpha x(t) \to \beta \in \mathbb{R}$ alors $\Delta : y = \alpha x + \beta$ est asymptote à Γ en a.

Cas $\frac{y(t)}{x(t)} \to \pm\infty$
La droite $D : x = 0$ est direction asymptotique à Γ en a et :
- si $x(t) \to \pm\infty$ alors Γ présente une branche parabolique verticale en a ;
- si $x(t) \to x_0$ alors la droite $\Delta : x = x_0$ est asymptote à Γ en a.

24.3.5 Etude métrique

Une abscisse curviligne s est donnée par $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \right\|$ donc

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

Supposons l'arc régulier (quitte à le découper en sous-arcs)
Détermination angulaire α
On exploite $\vec{T} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s}$ avec $\vec{T} \left| \begin{array}{l} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{array} \right.$ et $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s} \left| \begin{array}{l} \mathrm{d}x/\,\mathrm{d}s \\ \mathrm{d}y/\,\mathrm{d}s \end{array} \right.$.

Une détermination angulaire s'obtient alors par relèvement du système

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} \\ \sin\alpha = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} \end{cases}$$

Enfin la courbure Γ est donnée par

$$\gamma = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}$$

Théorème

On a

$$\gamma = \frac{x'y'' - x''y'}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

dém. :
Car

$$\gamma = \frac{\mathrm{Det}(\vec{v},\vec{a})}{v^3}$$

□

24.3.6 Etude pratique

Exemple Etudions l'arc paramétré par

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$$

Les fonctions $x : t \mapsto \cos^3 t$ et $y : t \mapsto \sin^3 t$ sont définies et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Puisque x et y sont 2π-périodiques, $M(t) = M(t+2\pi)$.
On peut limiter l'étude à $[-\pi,\pi]$.
Puisque

$$\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$$

les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à (Ox).
On peut limiter l'étude à $[0,\pi]$.
Puisque

$$\begin{cases} x(\pi - t) = -x(t) \\ y(\pi - t) = y(t) \end{cases}$$

les points $M(t)$ et $M(\pi - t)$ sont symétriques par rapport à (Oy).
On peut limiter l'étude à $[0,\pi/2]$.
Puisque

$$\begin{cases} x(\pi/2 - t) = y(t) \\ y(\pi/2 - t) = x(t) \end{cases}$$

les points $M(t)$ et $M(\pi/2 - t)$ sont symétriques par rapport $\Delta : y = x$.

On peut limiter l'étude a $[0, \pi/4]$.

$$\begin{cases} x'(t) = -3\sin t\cos^2 t \\ y'(t) = 3\cos t\sin^2 t \end{cases}$$

Dans $[0, \pi/4]$,

$$\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 0$$

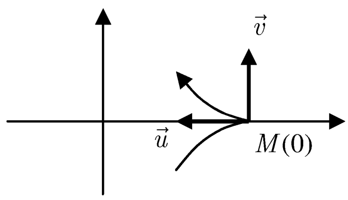
On obtient le tableau des variations simultanées suivant

t	0		$\pi/4$
$x'(t)$	0	$-$	$-3/2\sqrt{2}$
$x(t)$	1	$\searrow$	$1/2\sqrt{2}$
$y(t)$	0	$\nearrow$	$1/2\sqrt{2}$
$y'(t)$	0	$+$	$3/2\sqrt{2}$

Etude en $t = 0$:

$$\begin{cases} x(t) = 1 - \dfrac{3}{2}t^2 + o(t^3) \\ y(t) = t^3 + o(t^3) \end{cases}$$

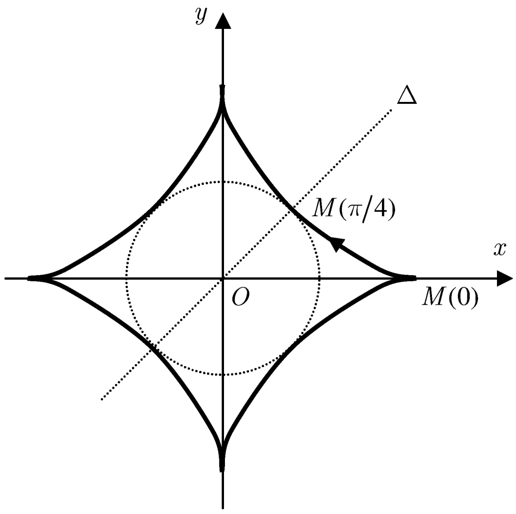
Par suite $p = 2$, $\vec{u}\begin{vmatrix} -3/2 \\ 0 \end{vmatrix}$, $q = 3$, $\vec{v}\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$.
$M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce.



Etude en $t = \pi/4$.
$M(\pi/4)$ a pour coordonnées $x = y = 1/2\sqrt{2}$. Il se situe à la distance $1/2$ de l'origine sur la droite Δ.
La tangente en ce point a pour pente

$$m = \frac{y'(\pi/4)}{x'(\pi/4)} = -1$$

Elle est perpendiculaire à Δ car le produit des pentes vaut -1.



Longueur :

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = 3\,|\sin t \cos t|$$

et

$$L = \int_0^{2\pi} 3\,|\sin t \cos t|\ \mathrm{d}t = 12 \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t \,\mathrm{d}t = 6$$

Courbure :
Pour $t \in \left]0, \pi/2\right[$,

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 3 \sin t \cos t$$

Une détermination angulaire s'obtient en résolvant

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = -\cos t \\ \sin\alpha = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \sin t \end{cases}$$

$\alpha = \pi - t$ convient
On en déduit

$$\gamma = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{-1}{3\sin t \cos t}$$

Exemple Etudions la courbe paramétrée par

$$\begin{cases} x = 3t/(t^3+1) \\ y = 3t^2/(t^3+1) \end{cases}$$

Commençons par remarquer

$$t^3 + 1 = (t+1)(t^2 - t + 1)$$

qui s'annule en $t = -1$ uniquement

Les fonctions $x : t \mapsto \dfrac{3t}{t^3+1}$ et $y : t \mapsto \dfrac{3t^2}{t^3+1}$ sont définies et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty,-1[$ et $]-1,+\infty[$.

$$\begin{cases} x'(t) = 3\dfrac{1-2t^3}{(t^3+1)^2} \\ y'(t) = 3t\dfrac{2-t^3}{(t^3+1)^2} \end{cases}$$

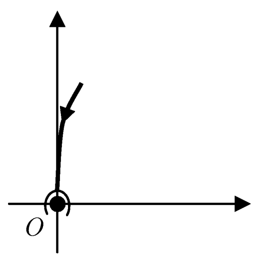
On a

$$\begin{cases} x'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1/\sqrt[3]{2} \\ y'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ ou } t = \sqrt[3]{2} \end{cases}$$

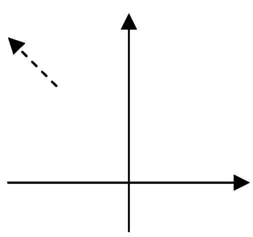
On obtient le tableau des variations simultanées suivant

t	$-\infty$		-1^-	-1^+		0		$1/\sqrt[3]{2}$		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
$x'(t)$		$+$			$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	$\sqrt[3]{2}$	$\searrow$	0
$y(t)$	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{2}$	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	0
$y'(t)$		$-$			$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

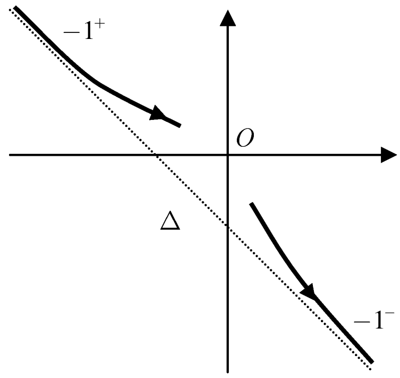
Etude quand $t \to +\infty$
O est point limite.
$\dfrac{y(t)-0}{x(t)-0} = t \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$. Il y a une tangente verticale.



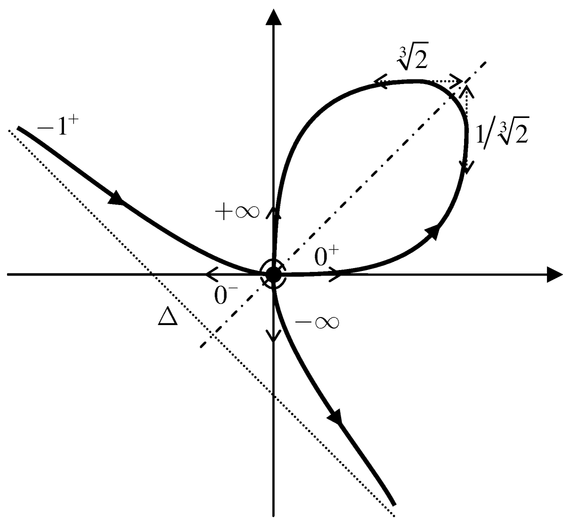
Etude quand $t \to -\infty$.
A nouveau O est point limite et il y a une tangente verticale.
Etude en quand $t \to -1^+$
$\begin{cases} x(t) \to -\infty \\ y(t) \to +\infty \end{cases}$
Il y a une branche infinie.



$\dfrac{y(t)}{x(t)} = t \to -1$ et $y(t) + x(t) = \dfrac{3t}{t^2 - t + 1} \to -1$
La droite Δ : $x + y + 1 = 0$ est asymptote en -1^+.
$y(t) + x(t) + 1 = \dfrac{(t+1)^2}{t^2 - t + 1} \geqslant 0$, la courbe est au dessus de l'asymptote.



Etude quand $t \to -1^-$:
A nouveau la droite Δ est asymptote et la courbe est au dessus.
Pour l'ébauche, remarquons $\sqrt[3]{2} = 1,26$ et $\sqrt[3]{4} = 1,59$ à 10^{-2} près.



Remarquons que la droite d'équation $y = x$ est axe de symétrie de la courbe puisque

$$x(1/t) = y(t) \text{ et } y(1/t) = x(t)$$

Rayon de courbure en $O = M(0)$

$$\gamma = \frac{\text{Det}(\vec{v}, \vec{a})}{v^3}$$

Par développements limités

$x(t) = 3t + o(t^3)$
$y(t) = 3t^2 + o(t^3)$.
On en déduit

$$\vec{v}(0)\begin{vmatrix}3\\0\end{vmatrix} \text{ et } \vec{a}\begin{vmatrix}0\\6\end{vmatrix} \text{ puis } \gamma = \frac{18}{3^3} = \frac{2}{3} \text{ et } R = \frac{3}{2}$$

Exemple Soit Γ un arc régulier de courbure constante. Considérons un paramétrage normal de cet arc et déterminons x et y en fonction de l'abscisse curviligne s.
Puisque $\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \gamma$ avec γ constant, on a $\alpha(s) = \gamma s + \alpha_0$ puis
$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos\alpha = \cos(\gamma s + \alpha_0)$ et $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \sin\alpha = \sin(\gamma s + \alpha_0)$.
Cas $\gamma = 0$

$$\begin{cases} x(s) = \cos(\alpha_0)s + x_0 \\ y(s) = \sin(\alpha_0)s + y_0 \end{cases}$$

Le support de l'arc Γ est inclus dans la droite $(A;\vec{u})$ avec $A\begin{vmatrix}x_0\\y_0\end{vmatrix}$ et $\vec{u}\begin{vmatrix}\cos\alpha_0\\\sin\alpha_0\end{vmatrix}$.
Cas $\gamma \neq 0$

$$\begin{cases} x(s) = \dfrac{1}{\gamma}\sin(\gamma s + \alpha_0) + x_0 \\ y(s) = -\dfrac{1}{\gamma}\cos(\gamma s + \alpha_0) + y_0 \end{cases}$$

Le support de l'arc Γ est inclus dans le cercle $\mathcal{C}(\Omega, R)$ avec $R = \dfrac{1}{|\gamma|}$.

24.4 Arc polaire

On pose

$$\vec{u}_\theta = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} \text{ et } \vec{v}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$$

On a

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}\theta} = \vec{v}_\theta \text{ et } \frac{\mathrm{d}\vec{v}_\theta}{\mathrm{d}\theta} = -\vec{u}_\theta$$

24.4.1 Définition

Soit $\theta \mapsto r(\theta)$ une fonction de I vers $\mathbb{R}$.

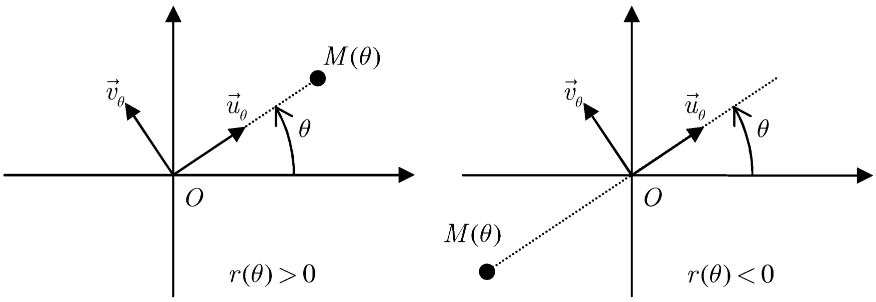
Définition

On appelle arc polaire défini par

$$r = r(\theta) \text{ avec } \theta \in I$$

l'arc $\Gamma = (I, M)$ avec $M(\theta)$ déterminé par

$$\overrightarrow{OM}(\theta) = r(\theta)\vec{u}_\theta$$

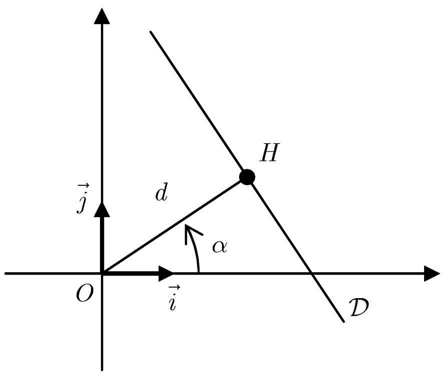


Proposition

Si r est de classe $\mathcal{C}^k$ alors Γ l'est aussi et

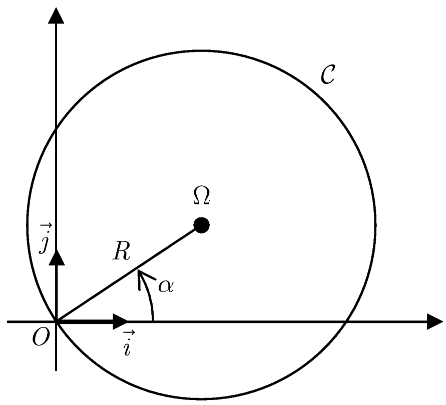
$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta} = r'(\theta)\vec{u}_\theta + r(\theta)\vec{v}_\theta \text{ et } \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta^2} = \left(r''(\theta) - r(\theta)\right)\vec{u}_\theta + 2r'(\theta)\vec{v}_\theta$$

Exemple Equation polaire d'une droite ne passant par O



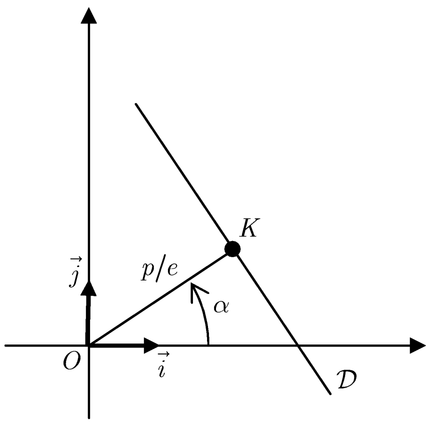
$\overrightarrow{OH} = d\vec{u}_\alpha$ avec H projeté orthogonal de O sur $\mathcal{D}$.
$r = \dfrac{d}{\cos(\theta - \alpha)}$ avec $\theta \in \left]\alpha - \pi/2, \alpha + \pi/2\right[$ définit un paramétrage polaire de $\mathcal{D}$.

Exemple Equation polaire d'un cercle passant par O.



$\overrightarrow{O\Omega} = R\vec{u}_\alpha$
$r = 2R\cos(\theta - \alpha)$ avec $\theta \in [-\alpha + \pi/2, \alpha + \pi/2]$ définit un paramétrage polaire de $\mathcal{C}$.

Exemple Equation polaire d'une conique de foyer O.

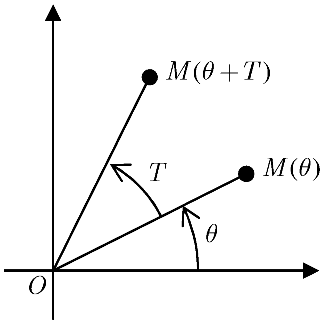


$\overrightarrow{OK} = \dfrac{p}{e}\vec{u}_\alpha$
$r = \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta - \alpha)}$ définit un paramétrage polaire de la conique de foyer O, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e.
Notons que la directrice a alors pour équation polaire $r = \dfrac{p}{e\cos(\theta - \alpha)}$.

24.4.2 Réduction d'étude

Cas $I = \mathbb{R}$
Si $r(\theta + T) = r(\theta)$ alors
$\overrightarrow{OM}(\theta + T) = r(\theta)\vec{u}_{\theta+T}$ et $\overrightarrow{OM}(\theta) = r(\theta)\vec{u}_\theta$ donc

$$M(\theta + T) = \mathrm{Rot}_{O,T}(M(\theta))$$



On limite l'étude à un segment de longueur T et on complète la courbe obtenue par la rotation $\text{Rot}_{O,kT}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

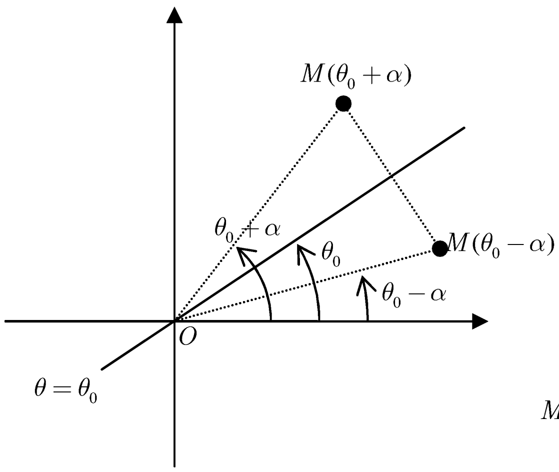
Exemple Si $r(\theta+\pi) = -r(\theta)$ (π-antipériodicité) alors $M(\theta+\pi) = M(\theta)$. Etude sur $[0, \pi]$ et courbe intégralemeent obtenue !

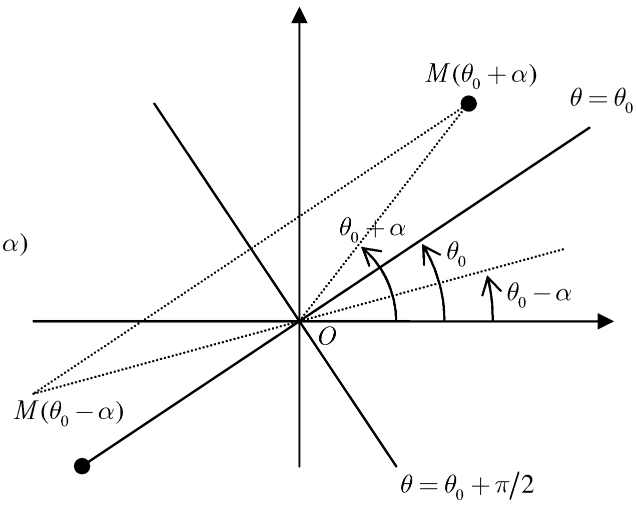
Cas I symétrique par rapport à θ_0 :
Si $r(2\theta_0 - \theta) = r(\theta)$ alors $r(\theta_0 - \alpha) = r(\theta_0 + \alpha)$ et donc

$$M(\theta_0 - \alpha) = s_{\theta=\theta_0}(M(\theta_0 + \alpha))$$

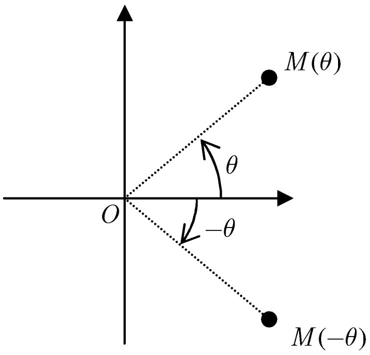
Si $r(2\theta_0 - \theta) = -r(\theta)$ alors $r(\theta_0 - \alpha) = -r(\theta_0 + \alpha)$ et donc

$$M(\theta_0 - \alpha) = s_{\theta=\theta_0+\pi/2}(M(\theta_0 + \alpha))$$

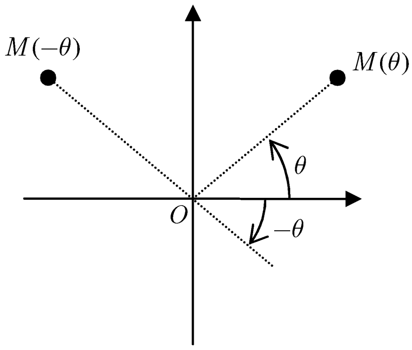




Dans les deux cas, on limite l'étude à $I \cap [\theta_0, +\infty[$ ou $I \cap]-\infty, \theta_0]$.
En particulier :
- si r paire, il y a une symétrie d'axe (Ox) ;
- si r impaire, il y a une symétrie d'axe (Oy).



r paire

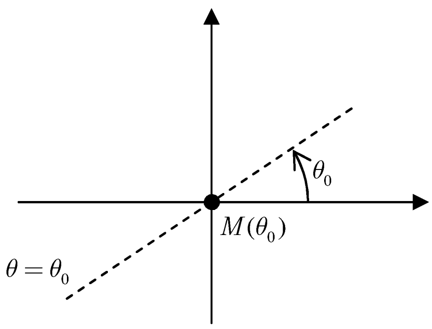


r impaire

24.4.3 Etude locale

24.4.3.1 Étude au pôle

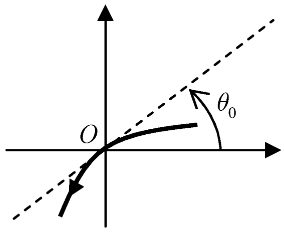
Soit $\theta_0 \in I$ tel que $r(\theta_0) = 0$ de sorte que $M(\theta_0) = O$.
Tangente :
Quand $\theta \to \theta_0$, si $r(\theta) \neq 0$ alors la droite $(OM(\theta))$ est dirigée par $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\theta \xrightarrow[\theta \to \theta_0]{} \vec{u}_{\theta_0} \neq \vec{0}$ donc l'arc admet une tangente en $M(\theta_0) = O$ qui est la droite d'équation polaire $\theta = \theta_0$.



Allure :
On peut déterminer l'allure de l'arc en $M(\theta_0) = O$ en dressant le tableau de signe de r au voisinage de θ_0.
Quelques cas usuels :

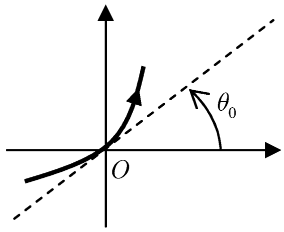
Cas

θ		θ_0	
$r(\theta)$	$+$	0	$-$



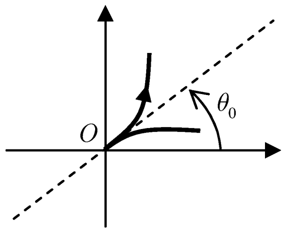
Cas

θ		θ_0	
$r(\theta)$	$-$	0	$+$



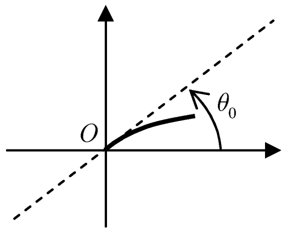
Cas

θ		θ_0	
$r(\theta)$	$+$	0	$+$



Cas

θ		θ_0	
$r(\theta)$	$+$	0	$\|\|$



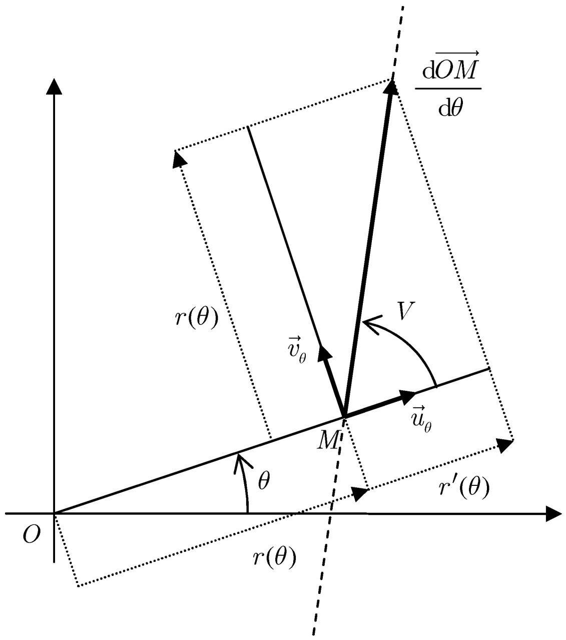
24.4.3.2 Étude en dehors du pôle

Soit $\theta \in I$ tel que $r(\theta) \neq 0$. On a $M(\theta) \neq O$.
Tangente

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}(\theta) = r'(\theta)\vec{u}_\theta + r(\theta)\vec{v}_\theta \neq \vec{0}$$

donc $M(\theta)$ est régulier.

La tangente en $M(\theta)$ est dirigée par $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}(\theta)$.



Pour repérer cette tangente, on introduit

$$V(\theta) = (\vec{u}_\theta, \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}(\theta)) \quad [2\pi]$$

Si $r'(\theta) = 0$ alors $V(\theta) = \pi/2 \quad [\pi]$, la tangente est orthoradiale.
Si $r'(\theta) \neq 0$ alors $\tan V(\theta) = \dfrac{r(\theta)}{r'(\theta)}$ ce qui suffit pour positionner la tangente.
Plus précisément, l'angle V est déterminé par le système

$$\begin{cases} \cos V = \dfrac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \\ \sin V = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \end{cases}$$

Allure :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta} = r'\vec{u}_\theta + r\vec{v}_\theta, \ \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta^2} = (r'' - r)\vec{u}_\theta + 2r'\vec{v}_\theta$$

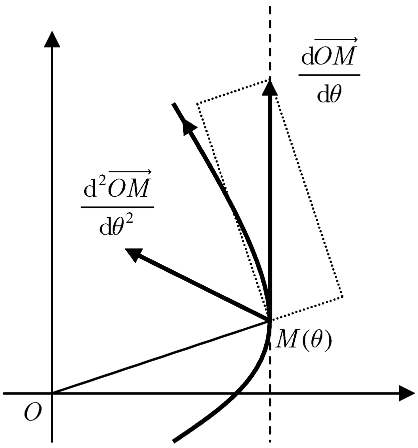
donc

$$\operatorname{Det}\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}, \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta^2}\right) = \begin{vmatrix} r' & r'' - r \\ r & 2r' \end{vmatrix} = r^2 + 2r'^2 - rr''$$

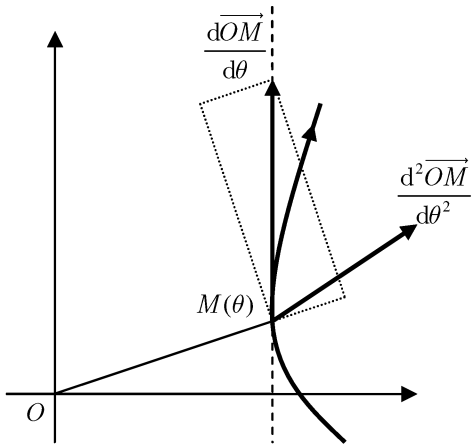
M est birégulier si, et seulement si,

$$\left(r^2 + 2r'^2 - rr''\right)(\theta) \neq 0$$

Si $\left(r^2 + 2r'^2 - rr''\right)(\theta) > 0$ alors la concavité est tournée vers O.
Si $\left(r^2 + 2r'^2 - rr''\right)(\theta) < 0$ alors la concavité est tournée vers l'extérieur.
Si $r^2 + 2r'^2 - rr''$ s'annule en changeant de signe, il y a un point d'inflexion.



cas $\left(r^2+2r'^2-rr''\right)(\theta)>0$



cas $\left(r^2+2r'^2-rr''\right)(\theta)<0$

Remarque En notant $u = \dfrac{1}{r}$ on a

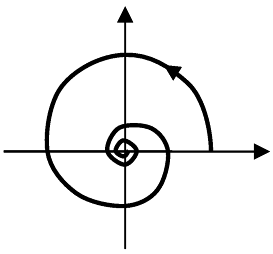
$$u + u'' = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r^3}$$

Les annulations avec changement de signe de $u + u''$ permettent de déterminer les inflexions de Γ.

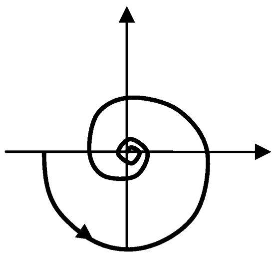
24.4.4 Etude asymptotique

Soit θ_0 une extrémité ouverte de I.
Les limites qui suivent sont entendues quand $\theta \to \theta_0$.
24.4.4.1 Cas $\theta_0 = +\infty$

Si $r(\theta) \to 0^+/0^-$, on dit que Γ s'enroule autour de O en $+\infty$.

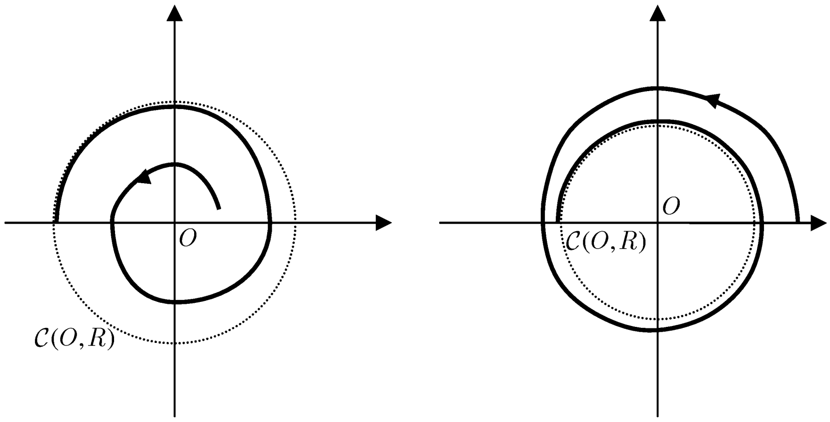


$r(\theta) \xrightarrow[\theta\to+\infty]{} 0^+$



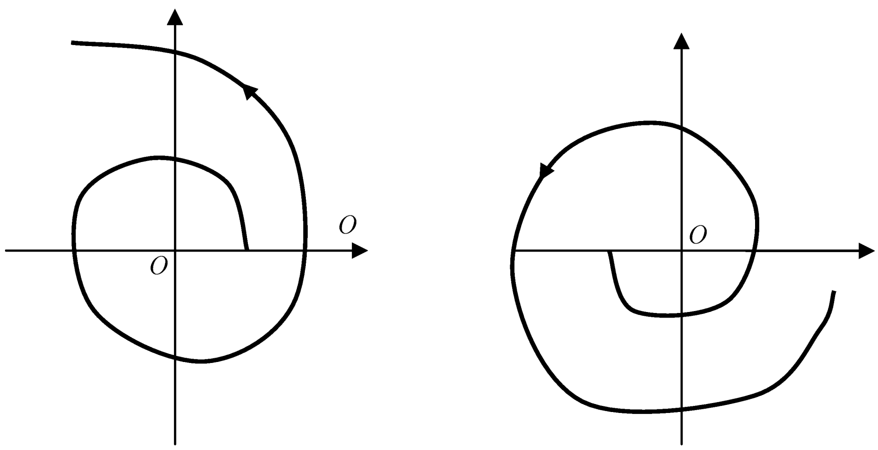
$r(\theta) \xrightarrow[\theta\to+\infty]{} 0^-$

Si $r(\theta) \to R \neq 0$, on dit que le cercler $\mathcal{C}(O, |R|)$ est asymptote à Γ en $+\infty$.



$r(\theta) \xrightarrow[\theta \to +\infty]{} R^-, R > 0$ $\qquad$ $r(\theta) \xrightarrow[\theta \to +\infty]{} R^+, R > 0$

Si $r(\theta) \to +\infty / -\infty$, on dit que Γ présente une branche spirale en $+\infty$.



$r(\theta) \xrightarrow[\theta \to +\infty]{} +\infty$ $\qquad$ $r(\theta) \xrightarrow[\theta \to +\infty]{} -\infty$

24.4.4.2 Cas $\theta_0 = -\infty$

Idem mais avec des enroulements en sens inverse.

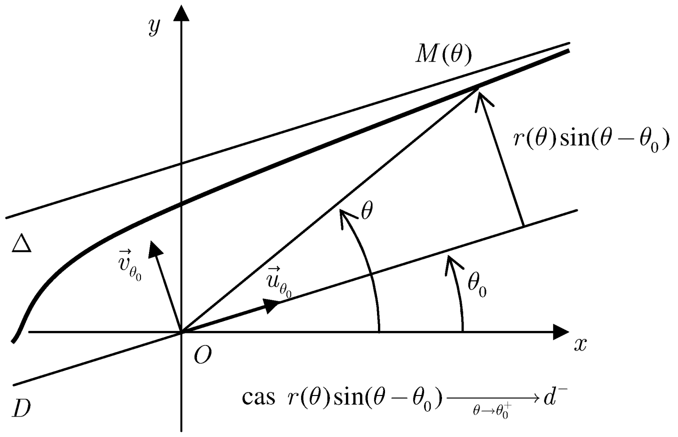
24.4.4.3 Cas $\theta_0 \in \mathbb{R}$

Si $r(\theta) \to r_0$ alors il y a un point limite L donné par $\overrightarrow{OL} = r_0 \vec{u}_{\theta_0}$.
On peut éventuellement étudier ce point en l'adjoignant à la courbe.
Supposons désormais $r(\theta) \to \pm\infty$
Γ présente une branche infinie.

$(OM(\theta))$ dirigée par $\vec{u}_\theta \to \vec{u}_{\theta_0}$.
Γ présente une branche infinie de direction asymptotique $D : \theta = \theta_0$.
$\vec{v}_{\theta_0}$ est un vecteur unitaire normal à D.
Posons

$$d(\theta) = (\vec{v}_{\theta_0} \mid \overrightarrow{OM}(\theta)) = r(\theta)\sin(\theta - \theta_0)$$

Si $r(\theta)\sin(\theta - \theta_0) \to \pm\infty$ alors Γ présente une branche parabolique de direction $D : \theta = \theta_0$ en θ_0.
Si $r(\theta)\sin(\theta - \theta_0) \to d$ alors la droite $\Delta = D + d\vec{v}_{\theta_0}$ est asymptote à Γ en θ_0.
Selon que $r(\theta)\sin(\theta - \theta_0) \to d^+$ ou d^-, on peut positionner la courbe relativement à l'asymptote.



Remarque $d(\theta)$ est l'ordonnée du point $M(\theta)$ dans le repère polaire $(O; \vec{u}_{\theta_0}, \vec{v}_{\theta_0})$.

24.4.5 Etude métrique

Abscisse curviligne s
$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = \left\|\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}\right\|$ avec $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta} = r'\vec{u}_\theta + r\vec{v}_\theta$ donne

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = \sqrt{r^2 + r'^2}$$

Supposons l'arc régulier.
Détermination angulaire α

$$\alpha = \left(\vec{i}, \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s}\right) = \left(\vec{i}, \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}\right) = \left(\vec{i}, \vec{u}_\theta\right) + \left(\vec{u}_\theta, \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}\right) \quad [2\pi]$$

donc

$$\alpha = \theta + V$$

avec $V = (\vec{u}_\theta, \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta})$ qui s'obtient par relèvement de

$$\begin{cases} \cos V = \dfrac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \\ \sin V = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \end{cases}$$

Courbure γ

$$\gamma = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} \text{ et } \gamma = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}$$

24.4.6 Etude pratique

Exemple Etude de la courbe d'équation polaire

$$r = \tan(2\theta)$$

La fonction $r : \theta \mapsto \tan(2\theta)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur les intervalles $\left]-\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
$r(\theta + \frac{\pi}{2}) = r(\theta)$ donc

$$M(\theta + \pi/2) = \mathrm{Rot}_{O,\pi/2}(M(\theta))$$

On peut limiter l'étude à $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$.
$r(-\theta) = -r(\theta)$ donc

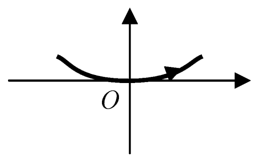
$$M(-\theta) = s_{(Oy)}(M(\theta))$$

On peut limiter l'étude de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$.
$r'(\theta) = 2(1 + \tan^2 2\theta) \geqslant 0$

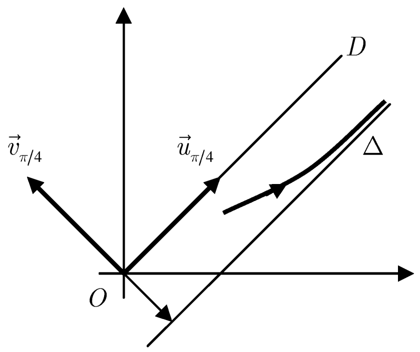
θ	0		$\pi/4$
$r'(\theta)$	2	$+$	
$r(\theta)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Etude en $\theta = 0$
$r(\theta) = 0$, c'est un passage par l'origine. La tangente a pour équation $\theta = 0$.

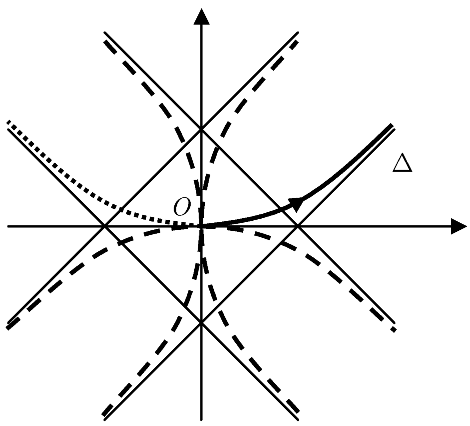
θ		0	
$r(\theta)$	$-$	0	$+$



Etude quand $\theta \to (\pi/4)^-$
$r(\theta) \to +\infty$, il y a une branche infinie de direction $D : \theta = \pi/4$.
$d(\theta) = r(\theta)\sin(\theta - \pi/4) = \dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}\sin(\theta - \pi/4)$
Posons $\theta = \pi/4 - h$ avec $h \to 0^+$,
$d(\theta) = -\dfrac{\cos 2h}{\sin 2h}\sin h = -\dfrac{\cos 2h}{2\cos h} \to -\dfrac{1}{2}$
La droite $\Delta = D - \frac{1}{2}\vec{v}_{\pi/4}$ est asymptote à la courbe.
Quand $h \to 0^+$, $\cos 2h \leqslant \cos h$ et donc $d(\theta) \geqslant -1/2$.
La courbe est au dessus de l'asymptote.



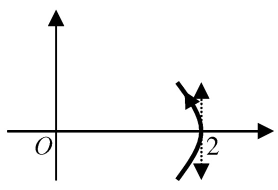
Finalement, on peut donner l'allure de la courbe



Exemple Etudions la courbe d'équation polaire $r = 1 + \cos\theta$.
La fonction $r : \theta \mapsto 1 + \cos\theta$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
$r(\theta + 2\pi) = r(\theta)$ donc $M(\theta + 2\pi) = M(\theta)$. On peut limiter l'étude à $[-\pi, \pi]$.
$r(-\theta) = r(\theta)$ donc $M(-\theta) = s_{(Ox)}(M(\theta))$. On peut limiter l'étude à $[0, \pi]$.
$r'(\theta) = -\sin\theta$.

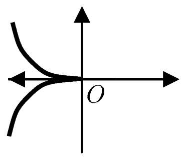
θ	0		π
$r'(\theta)$	0	$-$	0
$r(\theta)$	2	$\searrow$	0

Etude en $\theta = 0$.
$r(\theta) = 2$ et $r'(\theta) = 0$. La tangente est orthoradiale.

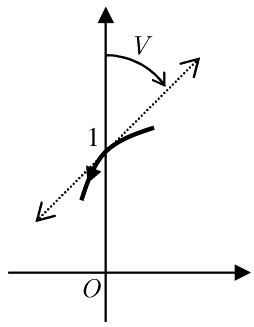


Etude en $\theta = \pi$
$r(\theta) = 0$, c'est un passage par l'origine. La tangente a pour équation $\theta = \pi$.

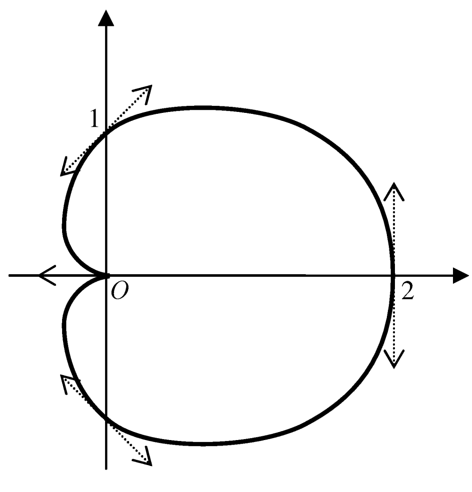
$$\begin{array}{c|ccc} \theta & & \pi & \\ \hline r(\theta) & + & 0 & + \end{array}$$



Etude en $\theta = \pi/2$.
$r(\theta) = 1$ et $r'(\theta) = -1$. $\tan V = -1$ donc $V = -\pi/4 \quad [\pi]$.



On peut alors donner l'allure de la courbe



Longueur

$$L = \int_0^{2\pi} \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta} \right\|$$

avec

$$\left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta} \right\| = \sqrt{r^2 + r'^2} = \sqrt{2 + 2\cos\theta} = 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$$

car $1 + \cos x = 2\cos^2\dfrac{x}{2}$.
On en déduit

$$L = 2\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = 8$$

Courbure en tout point régulier.
On suppose $\theta \in \left]-\pi, \pi\right[$.
$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = 2\cos\dfrac{\theta}{2}$, $\alpha = \theta + V$ avec V déterminé par

$$\begin{cases} \cos V = \dfrac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = -\sin\dfrac{\theta}{2} \\ \sin V = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = \cos\dfrac{\theta}{2} \end{cases}$$

$V = \dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{2}$ convient puis $\alpha = \dfrac{3\theta}{2} + \dfrac{\pi}{2}$ et

$$\gamma = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \frac{3}{4\cos\frac{\theta}{2}}$$

Exemple Etudions la courbe d'équation polaire

$$r = \frac{1}{\cos^3\theta}$$

La fonction $r : \theta \to \dfrac{1}{\cos^3\theta}$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur les intervalles $\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
$r(\theta + \pi) = -r(\theta)$ donc

$$M(\theta + \pi) = M(\theta)$$

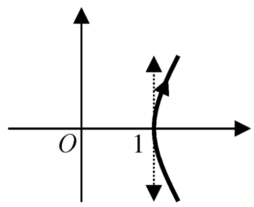
On peut limiter l'étude à $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
$r(-\theta) = r(\theta)$ donc

$$M(-\theta) = s_{(Ox)}(M(\theta))$$

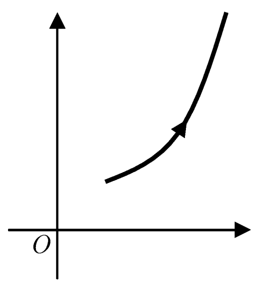
On peut limiter l'étude à $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
$r'(\theta) = 3\dfrac{\sin\theta}{\cos^4\theta}$.

θ	0		$\pi/2$
$r'(\theta)$	0	$+$	
$r(\theta)$	1	$\nearrow$	$+\infty$

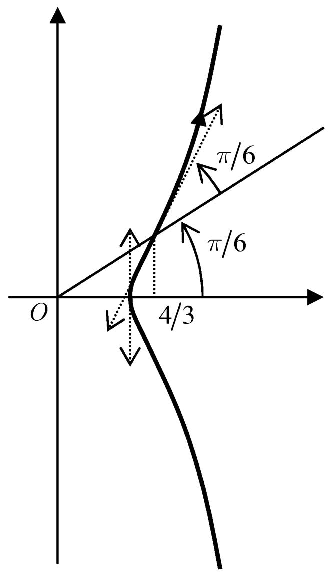
Etude en $\theta = 0$:
$r(\theta) = 1$ et $r'(\theta) = 0$. La tangente est orthoradiale.



Etude quand $\theta \to (\pi/2)^-$:
$r(\theta) \to +\infty$, il y a une branche parabolique de direction $\theta = \pi/2$.
$d(\theta) = r(\theta)\sin(\theta - \pi/2) = -\dfrac{1}{\cos^2\theta} \to -\infty$.
La courbe présente une branche parabolique verticale.



A la vue des allures, il doit figurer un point d'inflexion, cherchons celui-ci.
Posons $u = \dfrac{1}{r} = \cos^3\theta$.
$u' = -3\sin\theta\cos^2\theta$, $u'' = -\cos^3\theta + 6\sin^2\theta\cos\theta$.
$u + u'' = 2\cos\theta(3\sin^2\theta - \cos^2\theta) = 2\cos\theta(4\sin^2\theta - 1) = 2\cos\theta(2\sin\theta - 1)(2\sin\theta + 1)$.
$u + u''$ s'annule en changeant de signe pour $\theta = \pi/6$.
Etude en $\theta = \pi/6$.
$r(\theta)$ est un peut compliqué mais $x(\theta) = 4/3$.
$\tan V = \dfrac{r(\theta)}{r'(\theta)} = \dfrac{\cos\theta}{3\sin\theta} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $V = \pi/6 \quad [\pi]$.
On peut alors proposer l'allure de la courbe.



24.5 Courbe définie par une équation cartésienne

24.5.1 Définition

Soit $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Définition

On appelle courbe définie (implicitement) par l'équation cartésienne $f(x, y) = 0$ l'ensemble Γ des points M de coordonnées $(x, y) \in X$ tels que $f(x, y) = 0$.
On note alors

$$\Gamma : f(x, y) = 0$$

Exemple Soient $A \left|\begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix}\right.$ et $\vec{u} \left|\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right. \neq \vec{0}$.
La droite $(A; \vec{u})$ a pour équation

$$-b(x - x_0) + a(y - y_0) = 0$$

Exemple Soient $\Omega \left|\begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix}\right.$ et $R > 0$.
Le cercle $\mathcal{C}(\Omega, R)$ a pour équation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Exemple Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$. Le graphe Γ_φ de φ est la courbe d'équation cartésienne $y = \varphi(x)$.

Protocole Pour étudier une courbe $\Gamma : f(x, y) = 0$ on peut :
- simplifier l'équation en changeant de repère (exemple : réduction d'une conique) ;
- résoudre l'équation $f(x, y) = 0$ de sorte d'exprimer y en fonction de x (ou l'inverse) (exemple : cercle unité) ;
- chercher un paramétrage cartésien (exemple : ellipse, hyperbole) ou polaire.

Exemple Soit

$$\Gamma : x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

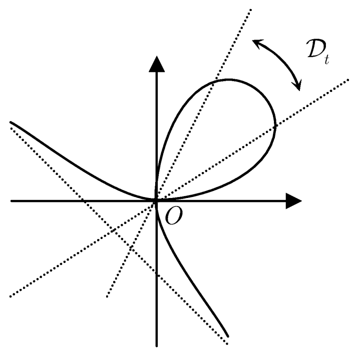
On étudie l'intersection de Γ avec toutes les droites passant par O :
$\mathcal{D}_t : y = tx$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_\infty : x = 0$.
$\Gamma \cap \mathcal{D}_\infty =?$

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 3xy = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\Gamma \cap \mathcal{D}_\infty = \{O\}$.
$\Gamma \cap \mathcal{D}_t =?$

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 3xy = 0 \\ y = tx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} t \neq -1 \\ x = 3t/(1 + t^3) \\ y = 3t^2/(1 + t^3) \end{cases}$$

Si $t = -1$, $\Gamma \cap \mathcal{D}_t = \{O\}$.
Si $t \neq -1$, $\Gamma \cap \mathcal{D}_t = \{O, M(t)\}$ avec $M(t)$ point courant de l'arc Γ' paramétré par $\begin{cases} x = 3t/(1 + t^3) \\ y = 3t^2/(1 + t^3) \end{cases}$.
Ainsi $\Gamma = \Gamma' \cup \{O\} = \Gamma'$ car $O \in \Gamma'$ pour $t = 0$.
Finalement Γ est le folium de Descartes déjà étudié.



Exemple Soit $\Gamma : x^3 = x^2 + y^2$
Soient $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et (r, θ) un système de coordonnées polaires de M.

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow r^3 \cos^3 \theta = r^2 \Leftrightarrow r = 0 \text{ ou } r \cos^3 \theta = 1$$

Considérons la courbe $\Gamma' : r = \dfrac{1}{\cos^3\theta}$ déjà étudiée.
On a $\Gamma = \{O\} \cup \Gamma'$.

24.5.2 Théorème des fonctions implicites

Théorème

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k \in \mathbb{N}^\star \cup \{\infty\}$) et $(x_0, y_0) \in U$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$.
Si

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

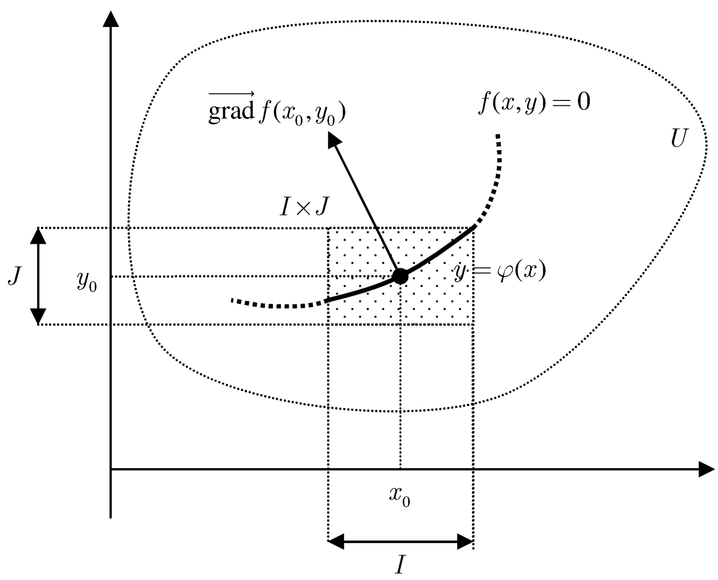
alors il existe deux intervalles ouverts I et J centrés en x_0 et y_0 et il existe une fonction $\varphi : I \to J$ de classe $\mathcal{C}^k$ vérifiant

$$I \times J \subset U \text{ et } \forall (x, y) \in I \times J, f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$$

Définition

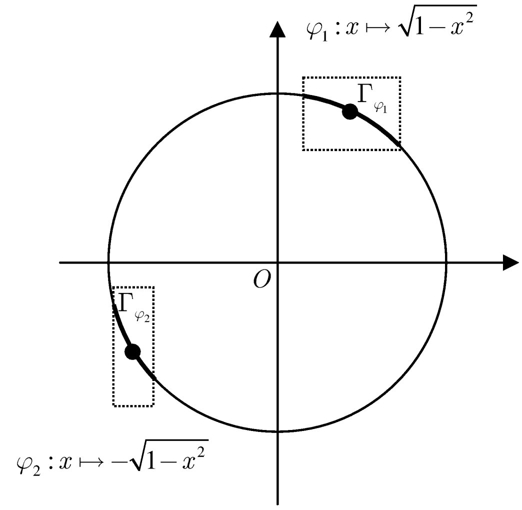
On dit que la relation $f(x, y) = 0$ définit (implicitement) une fonction $\varphi : x \mapsto y$ au voisinage de (x_0, y_0)

Géométriquement Dans le plan $\mathbb{R}^2$, notons $\Gamma : f(x, y) = 0$ et $\Gamma_\varphi : y = \varphi(x)$.
Le théorème donne $\Gamma \cap (I \times J) = \Gamma_\varphi$.



Si le vecteur gradient de f en M_0 n'est pas horizontal, alors Γ est au voisinage de M_0 le graphe d'une fonction $x \mapsto y$ de classe $\mathcal{C}^k$.

Exemple $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ et $\Gamma : x^2 + y^2 - 1 = 0$.
Soit $M = (x_0, y_0) \in \Gamma$.
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 2y_0$.
Si $y_0 \neq 0$ alors au voisinage de M, Γ est le graphe d'une fonction $\varphi : x \mapsto y$.



Si $y_0 = 0$ on ne peut appliquer le TFI.

Que sait-on sur φ ?
φ est de classe $\mathcal{C}^k$
$\varphi(x_0) = y_0$ et $f(x, \varphi(x)) = 0$ au voisinage de x_0.
En dérivant

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \varphi'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) = 0$$

En évaluant en x_0, on obtient

$$\varphi'(x_0) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) / \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Plus généralement, la relation $f(x, \varphi(x)) = 0$ permet de former un développement limité de φ en x_0.

Exemple Considérons

$$\Gamma : y\,\mathrm{e}^{xy} = x$$

Le point O appartient à Γ.
Visualisons Γ au voisinage de O.
On introduit $f(x,y) = y\,\mathrm{e}^{xy} - x$ fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\Gamma : f(x,y) = 0$.

$$f(0,0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$$

donc la relation $f(x,y) = 0$ définit implicitement au voisinage de $(0,0)$ une fonction $\varphi : x \mapsto y$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Au voisinage de O, la courbe Γ et le graphe de φ se confondent.
Cette fonction φ vérifie $\varphi(0) = 0$ et admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 car au moins de classe $\mathcal{C}^3$. Ce développement est de la forme

$$\varphi(x) = ax + bx^2 + cx^3 + o(x^3)$$

quand $x \to 0$.
La relation $f(x, \varphi(x)) = 0$ donne alors

$$(ax + bx^2 + cx^3 + o(x^3))\mathrm{e}^{ax^2+bx^3+o(x^3)} = x$$

puis, après calculs,

$$ax + bx^2 + (c + a^2)x^3 + o(x^3) = x \text{ quand } x \to 0$$

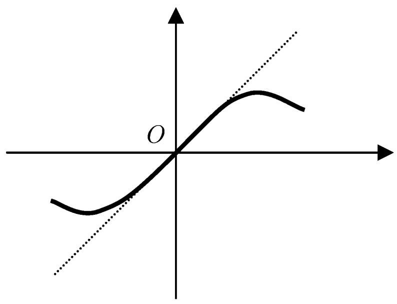
Par unicité des coefficients d'un développement limité, on obtient

$$a = 1, b = 0 \text{ et } c = -1$$

Finalement

$$\varphi(x) = x - x^3 + o(x^3) \text{ quand } x \to 0$$

On peut en déduire l'allure de φ au voisinage de O et donc celle de Γ.



Théorème

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k \in \mathbb{N}^\star \cup \{\infty\}$) et $(x_0, y_0) \in U$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$.
Si

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$$

alors il existe deux intervalles ouverts I et J centrés respectivement en x_0 et y_0 et il existe une fonction $\psi : J \to I$ de classe $\mathcal{C}^k$ vérifiant

$$I \times J \subset U \text{ et } \forall (x, y) \in I \times J, f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = \psi(y)$$

Définition

On dit que la relation $f(x, y) = 0$ définit implicitement une fonction $\psi : y \mapsto x$ au voisinage de (x_0, y_0)

Géométriquement, si le vecteur gradient de f en $M_0(x_0, y_0)$ n'est pas vertical alors la courbe Γ : $f(x, y) = 0$ est au voisinage de M_0 le graphe d'une fonction $y \mapsto x$.
Que sait-on sur ψ ?
ψ est de classe $\mathcal{C}^k$, $\psi(y_0) = x_0$, $f(\psi(y), y) = 0$ au voisinage de y_0 et

$$\psi'(y_0) = -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) / \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

24.5.3 Tangente à une courbe définie par une équation cartésienne

Soient $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $\Gamma : f(x, y) = 0$.

Définition

On dit qu'un point $M(x_0, y_0) \in \Gamma$ est régulier si $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0) \neq \vec{0}$

Théorème

Si $M_0(x_0, y_0)$ est un point régulier de $\Gamma : f(x, y) = 0$ alors Γ admet une tangente en M_0 dont le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0)$ est vecteur normal.
Cette droite a pour équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).(y - y_0) = 0$$

dém. :
Si $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ alors la relation $f(x, y) = 0$ définit implicitement au voisinage de (x_0, y_0) une fonction $\varphi : x \mapsto y$. Au voisinage du point M les courbes Γ et Γ_φ se correspondent et donc Γ admet une tangente en M qui est la droite d'équation $y = \varphi'(x_0)(x - x_0) + \varphi(x_0)$.
Puisque

$$\varphi(x_0) = y_0 \text{ et } \varphi'(x_0) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) / \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

on parvient l'équation proposée.
Si $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$: même démarche avec l'introduction de $\psi : y \mapsto x$.
□

Exemple Considérons le folium de Descartes

$$\Gamma : x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

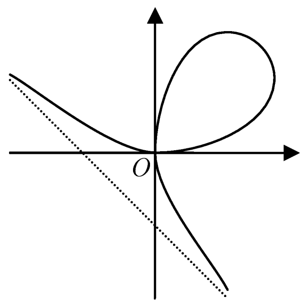
$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Le point O appartient à Γ alors que le point de coordonnées $(1, 1)$ n'y appartient pas.
Ainsi O est le seul point non régulier de Γ.

La tangente en $M_0 \left| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right. \neq O$ à Γ a pour équation

$$(x_0^3 - y_0)x + (y_0^3 - x_0)y = x_0 y_0$$



24.6 Coniques

24.6.1 Définition

Définition

On appelle conique du plan toute courbe Γ définie par une équation du second degré i.e. une équation de la forme
$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + k = 0$$
avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Remarque On peut montrer que cette notion ne dépend pas du repère choisi. En effet dans un nouveau repère les coordonnées sont des expressions affines de x, y et une équation du second degré est alors transformée en une équation de degré $\leqslant 2$. Pour des raisons de changement de coordonnées inverse, la nouvelle équation est obligatoirement de degré 2.

Théorème

Si $M_0 \left| \begin{array}{l} x_0 \\ y_0 \end{array} \right.$ est un point régulier d'une conique $\Gamma : ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + k = 0$ avec $(a, b, c) \neq 0$
alors la tangente en ce point a pour équation
$$ax_0x + b(x_0y + xy_0) + cy_0y + d(x + x_0) + e(y + y_0) + k = 0$$
Cette équation s'obtient par dédoublement
$$x^2 \to x_0x, 2xy \to x_0y + xy_0, 2x \to x + x_0$$

dém. :
Puisque le point M est régulier, Γ admet une tangente en ce point dont le vecteur gradient est vecteur normal. Ainsi
$$\vec{n} \left| \begin{array}{l} 2ax_0 + 2by_0 + 2d \\ 2bx_0 + 2cy_0 + 2e \end{array} \right.$$

est vecteur normal à cette tangente qui a pour équation :

$$(ax_0 + by_0 + d)(x - x_0) + (bx_0 + cy_0 + e)(y - y_0) = 0$$

soit encore

$$ax_0x + b(y_0x + x_0y) + cy_0y + dx + ey = ax_0^2 + 2bx_0y_0 + cy_0^2 + dx_0 + ey_0$$

et enfin

$$ax_0x + b(x_0y + xy_0) + cy_0y + d(x + x_0) + e(y + y_0) + k = 0$$

car $ax_0^2 + 2bx_0y_0 + cy_0^2 + 2dx_0 + 2ey_0 + k = 0$ puisque $M_0 \in \Gamma$.
□

24.6.2 Réduction de l'équation d'une conique

Dans le plan géométrique muni du repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$, considérons la conique Γ d'équation

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + k = 0$$

avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
On veut préciser cette courbe et pour cela nous allons simplifier son équation par changement de repère.
Pour $M(x, y)_{\mathcal{R}}$, on pose

$$F(M) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + k$$

Ainsi

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow F(M) = 0$$

On va déterminer un repère du plan dans lequel l'expression de F est plus simple.

24.6.2.1 Dérectangulation

Pour $M(x, y)_{\mathcal{R}}$, on a

$$F(M) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + k$$

Puisque

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

On peut alors écrire

$$F(M) = q(\overrightarrow{OM}) + 2\ell(\overrightarrow{OM}) + k$$

avec

$$q(\overrightarrow{OM}) = ax^2 + 2bxy + cy^2, \ell(\overrightarrow{OM}) = dx + ey$$

q est une forme quadratique et ℓ est une forme linéaire de matrices

$$\mathrm{Mat}_{(\vec{i},\vec{j})}(q) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = A, \mathrm{Mat}_{(\vec{i},\vec{j})}(\ell) = \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}$$

Par réduction de la matrice symétrique réelle A, il existe $P \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

Considérons alors la base orthonormée $(\vec{u}, \vec{v})$ déterminée par $P = \text{Mat}_{(i,j)}(\vec{u}, \vec{v})$.
Par formule de changement de base

$$\text{Mat}_{(\vec{u},\vec{v})}q = {}^tPAP = {}^tPPDP^{-1}P = D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

et alors

$$\text{Mat}_{(\vec{u},\vec{v})}(\ell) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

Introduisons le repère orthonormé $\mathcal{R}' = (O; \vec{u}, \vec{v})$.
Si $M(x, y)_{\mathcal{R}'}$ alors $\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ et donc

$$q(\overrightarrow{OM}) = \lambda x^2 + \mu y^2, \ell(\overrightarrow{OM}) = \alpha x + \beta y$$

et donc

$$F(M) = \lambda x^2 + \mu y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + k$$

Ainsi dans $\mathcal{R}' = (O; \vec{u}, \vec{v})$

$$\Gamma : \lambda x^2 + \mu y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + k = 0$$

Remarque Puisque les matrices A et D sont orthogonalement semblables, on a $ac - b^2 = \lambda\mu$ [discriminant de la conique].

24.6.2.2 Conique non dégénérée

Définition

La conique Γ est dite non dégénérée si la forme quadratique q qui lui est associée est non dégénérée i.e. si $ac - b^2 \neq 0$.

Supposons la conique Γ non dégénérée.
On a $ac - b^2 = \lambda\mu \neq 0$ donc $\lambda, \mu \neq 0$.
On peut écrire

$$F(M) = \lambda(x - x_0)^2 + \mu(y - y_0)^2 + C^{te}$$

avec $x_0 = -\alpha/\lambda$ et $y_0 = -\beta/\mu$.
Considérons le point $\Omega(x_0, y_0)_{\mathcal{R}'}$.
Introduisons le repère orthonormé $\mathcal{R}'' = (\Omega, \vec{u}, \vec{v})$.
Puisqu'on a $\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{O\Omega}$, si $M(x, y)_{\mathcal{R}'}$ alors $M(x - x_0, y - y_0)_{\mathcal{R}''}$.
Ainsi, si $M(x, y)_{\mathcal{R}''}$ alors

$$F(M) = \lambda x^2 + \mu y^2 + C^{te} \text{ avec } C^{te} = F(\Omega)$$

Finalement, dans le repère $\mathcal{R}''$,

$$\Gamma : \lambda x^2 + \mu y^2 = \chi$$

avec $\chi = -F(\Omega)$.
On observe que Ω est centre de symétrie de Γ.

Définition

Le point Ω est appelé centre de la conique non dégénérée Γ.
On dit qu'une conique non dégénérée est une conique à centre.

Théorème

Le centre d'une conique non dégénérée Γ est l'unique point M vérifiant $\overrightarrow{\text{grad}}\, F(M) = \vec{0}$

dém. :
Pour $M(x, y)_{\mathcal{R}''}$,

$$F(M) = \lambda x^2 + \mu y^2 + F(\Omega)$$

donc

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, F(M) = 2\lambda x\vec{u} + 2\mu y\vec{v}$$

Par suite

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, F(M) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda x = 0 \\ 2\mu y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M = \Omega$$

□

Remarque Pour une conique non dégénérée Γ, son centre Ω peut être directement déterminé dans le repère initial en calculant le gradient de F dans ce repère.

Classification :

$$\Gamma : \lambda x^2 + \mu y^2 = \chi$$

Quitte à passer l'équation à l'opposé, on peut supposer $\lambda > 0$.
Cas $\mu > 0$ (i.e. $ac - b^2 > 0$)
Si $\chi < 0$ alors $\Gamma = \emptyset$.
Si $\chi = 0$ alors $\Gamma = \{\Omega\}$.
Si $\chi > 0$ alors $\Gamma : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a = \sqrt{\dfrac{\chi}{\lambda}}$ et $b = \sqrt{\dfrac{\chi}{\mu}}$
La courbe Γ est alors un cercle de centre Ω (si $\lambda = \mu$), un ellipse d'axe focal $(\Omega; \vec{u})$ (si $\lambda < \mu$) ou une ellipse d'axe focal $(\Omega; \vec{v})$ (si $\lambda > \mu$).
Cas $\mu < 0$ (i.e. $ac - b^2 < 0$)
Si $\chi = 0$ alors $\Gamma : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ avec $a^2 = \sqrt{\dfrac{1}{\lambda}}$, $b = \sqrt{-\dfrac{1}{\mu}}$.
Γ est alors la réunion de deux droites sécantes en Ω.
Si $\chi > 0$ alors $\Gamma : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a = \sqrt{\dfrac{\chi}{\lambda}}$, $b = \sqrt{\dfrac{\chi}{-\mu}}$.
Γ est une hyperbole d'axe focal $(\Omega; \vec{u})$.
Si $\chi < 0$ alors $\Gamma : -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ et Γ est une hyperbole d'axe focal $(\Omega; \vec{v})$.

24.6.2.3 Conique dégénérée

Dans $\mathcal{R}' = (O; \vec{u}, \vec{v})$,

$$\Gamma : \lambda x^2 + \mu y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + k = 0$$

Supposons la conique Γ dégénérée.
On a $ac - b^2 = 0$ et donc $\lambda\mu = 0$.
Par suite $\lambda = 0$ ou $\mu = 0$ mais pas les deux car la forme quadratique q n'est pas nulle.
Quitte à échanger les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on peut supposer $\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$.
Dans $\mathcal{R}' = (O; \vec{u}, \vec{v})$,

$$\Gamma : \mu y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + k = 0$$

Cas $\alpha = 0$
On a $\Gamma : \mu y^2 + 2\beta y + k = 0$ équation lacunaire en x.
Selon le signe de $\Delta = 4\beta^2 - 4\mu k$, Γ est vide, une droite, ou la réunion de deux droites parallèles à l'axe dirigé par $\vec{u}$.
Cas $\alpha \neq 0$

$$\mu y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + k = 0 \Leftrightarrow \mu(y - y_0)^2 + 2\alpha(x - x_0)$$

avec x_0, y_0 bien choisis.
Soit S le point de coordonnées (x_0, y_0) dans $\mathcal{R}' = (O; \vec{u}, \vec{v})$.
Dans le repère orthonormée $\mathcal{R}'' = (S; \vec{u}, \vec{v})$,

$$\Gamma : \mu y^2 + 2\alpha x = 0$$

Ainsi $\Gamma : y^2 = 2px$ avec $p = -\alpha/\mu \neq 0$.
Γ est une parabole d'axe focal $(S; \vec{u})$

24.6.3 Un exemple

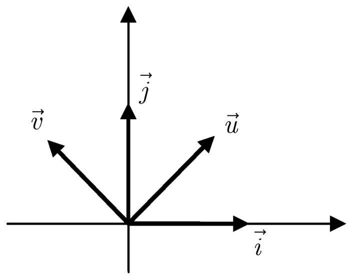
Dans le plan géométrique muni du repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$, on étudie la conique

$$\Gamma : x^2 + 2kxy + y^2 - 2(x + y) = 0 \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Pour M de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$, on pose

$$F(M) = x^2 + 2kxy + y^2 - 2(x + y)$$

La forme quadratique associée à Γ a pour matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
$\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$ et $\vec{v} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j})$ sont vecteurs propres associés aux valeurs propres $1 + k$ et $1 - k$.



La forme quadratique associée à Γ a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 1+k & 0 \\ 0 & 1-k \end{pmatrix}$$

dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.
Cas $k \neq \pm 1$:
La conique Γ n'est pas dégénérée, c'est une conique à centre.

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, F(M) = \frac{\partial F}{\partial x}(M)\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}(M)\vec{j}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, F(M) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2ky - 2 = 0 \\ 2kx + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + ky = 1 \\ kx + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{k+1}$$

Le centre de la conique est le point Ω de coordonnées $\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1}\right)$ dans le repère $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$.
Dans le repère $\mathcal{R}' = (\Omega; \vec{u}, \vec{v})$,

$$F(M) = (1+k)x^2 + (1-k)y^2 + F(\Omega)$$

avec $F(\Omega) = -2/(k+1)$.
Finalement, dans le repère $\mathcal{R}'$,

$$\Gamma : \frac{x^2}{\frac{2}{(1+k)^2}} + \frac{y^2}{\frac{2}{1-k^2}} = 1$$

Si $k \in]-1, 1[$ alors on obtient l'équation réduite

$$\Gamma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ avec } a = \frac{\sqrt{2}}{1+k}, b = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-k^2}}$$

$\frac{a^2}{b^2} = \frac{1-k^2}{(1+k)^2} = \frac{1-k}{1+k}$.
Si $k = 0$ alors $a = b$ et Γ est un cercle.
Si $k \in]-1, 0[$ alors $a > b$ et Γ est une ellipse d'axe focal est $(\Omega, \vec{u})$.
Si $k \in]0, 1[$ alors $b > a$ et Γ est une ellipse d'axe focal est $(\Omega, \vec{v})$.
Si $|k| > 1$ alors on obtient l'équation réduite

$$\Gamma : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ avec } a = \frac{\sqrt{2}}{k+1} \text{ et } b = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k^2-1}}$$

Γ est une hyperbole d'axe focal $(\Omega, \vec{u})$.
Cas $k = 1$
La conique Γ est dégénérée.
Dans $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$,

$$\Gamma : (x+y)(x+y-2) = 0$$

Γ est la réunion de droites parallèles.
Cas $k = -1$:
La conique Γ est dégénérée.
Dans $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$,

$$\Gamma : (x-y)^2 - 2(x+y) = 0$$

Considérons le repère orthonormé $\mathcal{R}' = (O; \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$ et $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j})$.
Soit $M(x, y)_{\mathcal{R}}$ et $M(x', y')_{\mathcal{R}'}$.La relation $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{u} + y'\vec{v}$ donne

$$\begin{cases} x = (x'-y')/\sqrt{2} \\ y = (x'+y')/\sqrt{2} \end{cases} \text{ puis } \begin{cases} x+y = \sqrt{2}x' \\ x-y = -\sqrt{2}y' \end{cases}$$

Dans $\mathcal{R}' = (O; \vec{u}, \vec{v})$, $\Gamma : (-\sqrt{2}y)^2 - 2\sqrt{2}x = 0$ puis

$$\Gamma : y^2 = \sqrt{2}x$$

Γ est une parabole de sommet O et d'axe $(O; \vec{u})$.

Remarque Pour visualiser avec Maple ces différentes courbes :

```
animate(plot,[[2*(1+t)/(1+2*k*t+t^2),2*t*(1+t)/(1+2*k*t+t^2),
t=-500..500],view=[-3..3,-3..3],numpoints=500],
k=-3..3,frames=61);
```


Chapitre 25

Géométrie des surfaces

$\mathcal{E}$ désigne l'espace géométrique muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
k désigne un élément de $\mathbb{N}^\star \cup \{\infty\}$.

25.1 Surfaces définies par paramétrage

25.1.1 Nappes paramétrées

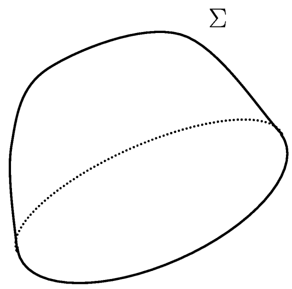
Définition

On appelle domaine de $\mathbb{R}^2$ toute partie U de $\mathbb{R}^2$ ouverte et connexe par arcs.

Exemple Un ouvert convexe, un ouvert étoilé sont des domaines.

Définition

On appelle nappe paramétrée de $\mathcal{E}$ tout couple $\Sigma = (U, M)$ formé d'un domaine U de $\mathbb{R}^2$ et d'une application $M : (u, v) \in U \mapsto M(u, v) \in \mathcal{E}$.
On appelle classe de la nappe Σ la classe de la fonction vectorielle $(u, v) \mapsto \overrightarrow{OM}(u, v)$.
$M(u, v)$ est appelé point courant de paramètre (u, v) de Σ.
Supp$\Sigma = \{M(u, v)/(u, v) \in U\}$ est appelé support de la nappe Σ.
On dit aussi que Σ est un paramétrage de son support.



Exemple Soient A un point et $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace.
Posons $M(s, t) = A + s\vec{u} + t\vec{v}$.

$\Sigma = (\mathbb{R}^2, M)$ paramétrage $\mathcal{C}^\infty$ du plan $A + \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$.

Définition

Soit $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ de $U \subset \mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^3$.
On appelle nappe cartésienne définie par le système

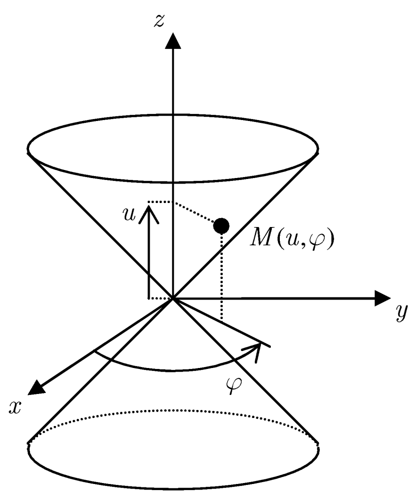
$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \quad \text{avec } (u, v) \in U \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

la nappe $\Sigma = (U, M)$ avec $M(u, v)$ le point déterminé par

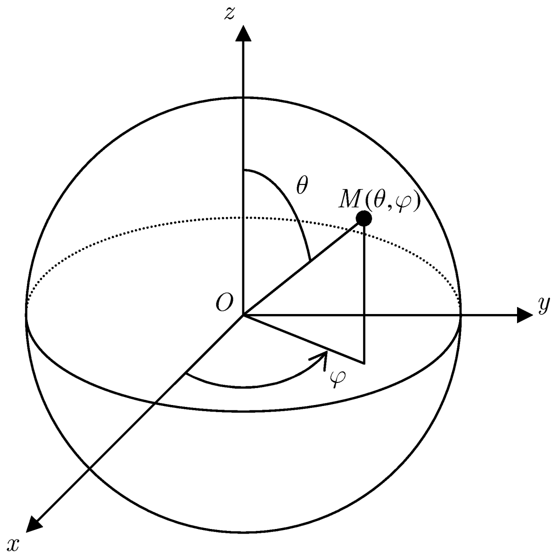
$$\overrightarrow{OM}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$$

Cette nappe est de classe $\mathcal{C}^k$.

Exemple $\begin{cases} x = u\cos(\varphi) \\ y = u\sin(\varphi) \quad \text{avec } (u, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \\ z = u \end{cases}$
est un paramétrage cartésien $\mathcal{C}^\infty$ du cône de sommet O d'équation $x^2 + y^2 = z^2$.



Exemple $\begin{cases} x = \cos\varphi\sin\theta \\ y = \sin\varphi\sin\theta \quad \text{avec } (\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2 \\ z = \cos\theta \end{cases}$
est un paramétrage cartésien $\mathcal{C}^\infty$ de la sphère unité.



Remarque On peut aussi parler de nappe définie en coordonnées cylindriques ou sphériques…

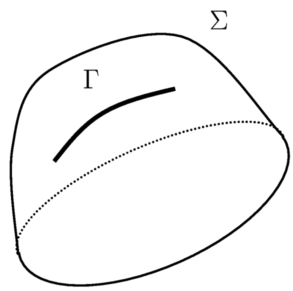
25.1.2 Arc tracé sur une nappe

Soit $\Sigma = (U, M)$ une nappe de classe $\mathcal{C}^k$.

Définition

On appelle arc $\mathcal{C}^k$ tracé sur la nappe $\Sigma = (U, M)$ tout arc $\Gamma = (I, M)$ pour lequel il existe une application $t \in I \mapsto (u(t), v(t)) \in U$ de classe $\mathcal{C}^k$ telle que $M(t) = M(u(t), v(t))$.
On dit que l'arc Γ est obtenu par le système

$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases} \text{avec } t \in I$$

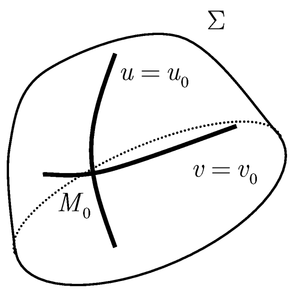


Exemple $\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$
est un paramétrage cartésien du cylindre d'équation cartésienne $x^2 + y^2 = R^2$.
En posant
$\begin{cases} \varphi = t \\ z = ht \end{cases}$,
on définit le paramétrage d'une hélice tracée sur ce cylindre.

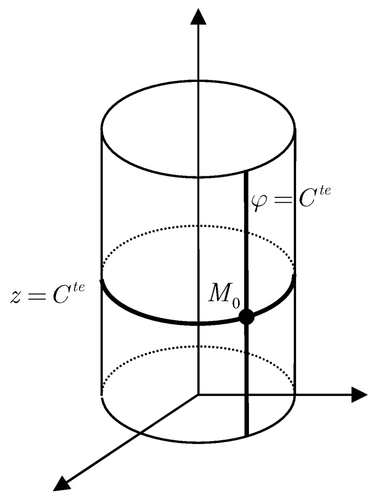
Définition

Soit $M_0 = M(u_0, v_0)$ avec $(u_0, v_0) \in U$.
On appelle arcs coordonnées en M_0 tracés sur Σ les arcs obtenus pour

$$\begin{cases} u = u_0 \\ v = t \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u = t \\ v = v_0 \end{cases}$$



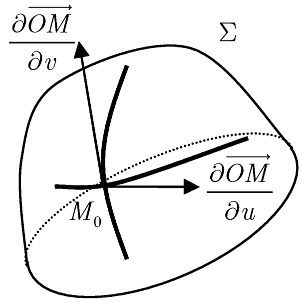
Exemple Arcs coordonnées sur le cylindre précédent :



25.1.3 Plan tangent

Soient $\Sigma = (U, M)$ une nappe classe $\mathcal{C}^k$ et $M_0 = M(u_0, v_0)$ avec $(u_0, v_0) \in U$.
Les arcs coordonnées en M_0 sont donnés par $t \mapsto \overrightarrow{OM}(t, v_0)$ et $t \mapsto \overrightarrow{OM}(u_0, t)$.
Les vecteurs dérivés en M_0 à ces arcs coordonnées sont

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{OM}(t, v_0)\right)_{t=u_0} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}(u_0, v_0) \text{ et } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{OM}(u_0, t_0)\right)_{t=v_0} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}(u_0, v_0)$$



Définition

Le point M_0 est dit régulier si les vecteurs $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}(u_0, v_0)$ et $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}(u_0, v_0)$ constituent une famille libre.
Sinon on dit que le point est stationnaire.

Définition

La nappe Σ est dite régulière si tous ses points le sont.

Remarque Si M_0 est régulier alors les tangentes en M_0 aux arcs coordonnées existent et sont distinctes : elles déterminent un plan passant par M_0.

Théorème

Si M_0 est régulier et si Γ est un arc régulier tracé sur Σ passant par M_0 alors la tangente à Γ en M_0 est incluse dans le plan Π passant par M_0 et dirigé par

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}(u_0, v_0) \text{ et } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}(u_0, v_0)$$

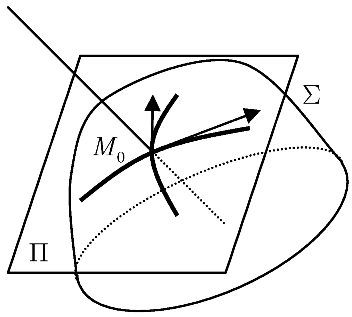
dém. :
Supposons l'arc Γ obtenu à partir d'une application $t \mapsto (u(t), v(t))$.
On a $M(t) = M(u(t), v(t))$.
Soit t_0 tel que $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$ de sorte que $M(t_0) = M_0$.
La tangente à l'arc Γ en le point régulier M_0 est dirigée par

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{OM}(u(t), v(t))\right)_{t=t_0} = u'(t_0)\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}(u_0, v_0) + v'(t)\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}(u_0, v_0)$$

□

Définition

Si M_0 est régulier alors le plan Π est appelé plan tangent à Σ en M_0.
La droite perpendiculaire à Π en M_0 est appelée droite normale à Σ en M_0.



Remarque Pour étudier la régularité d'un point, on calcule $\vec{n} = \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}$.
Si $\vec{n} \neq \vec{0}$ alors le point est régulier et le plan tangent en ce point a pour vecteur normal $\vec{n}$.

Exemple Considérons

$$\begin{cases} x = z\cos\varphi \\ y = z\sin\varphi \quad \text{avec } (\varphi, z) \in \mathbb{R}^2 \\ z = z \end{cases}$$

paramétrage du cône d'équation $x^2 + y^2 = z^2$.

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} \left| \begin{array}{l} -z\sin\varphi \\ z\cos\varphi \\ 0 \end{array} \right. , \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} \left| \begin{array}{l} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 \end{array} \right. , \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} \left| \begin{array}{l} z\cos\varphi \\ z\sin\varphi \\ -z \end{array} \right.$$

Soit M_0 un point de la nappe de coordonnées (x_0, y_0, z_0).
$M_0 = M(\varphi_0, z_0)$ avec $x_0 = z_0\cos\varphi_0$, $y_0 = z_0\sin\varphi_0$
Si $z_0 \neq 0$ alors M_0 est régulier et le plan tangent en M_0 a pour équation :
$z_0\cos(\varphi_0)x + z_0\sin(\varphi_0)y - z_0 z = 0$ i.e. $x_0 x + y_0 y - z_0 z = 0$.
Pour $z_0 = 0$, le $M_0 = O$ est stationnaire.

25.2 Surfaces définies par une équation cartésienne

25.2.1 Définition

Définition

Soit $f : X \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. On appelle surface Σ définie (implicitement) par l'équation cartésienne $f(x,y,z) = 0$ l'ensemble formé des points M de l'espace dont les coordonnées $(x,y,z) \in X$ vérifient : $f(x,y,z) = 0$. On note alors

$$\Sigma : f(x,y,z) = 0$$

Exemple Soient $A(x_0,y_0,z_0)$ et $\vec{n}(a,b,c) \neq \vec{o}$.
La plan $\Pi = A + \text{Vect}(\vec{n})^\perp$ a pour équation cartésienne

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

Exemple Soient $\Omega(x_0,y_0,z_0)$ et $R \geqslant 0$.
La sphère $\mathcal{S}(\Omega,R)$ a pour équation cartésienne

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$$

Pour étudier $\Sigma : f(x,y,z) = 0$, on peut :
- simplifier l'équation définissant Σ en changeant de repère ;
- former un paramétrage de Σ ;
- résoudre $f(x,y,z) = 0$ de sorte, à permutation des variables près, d'exprimer z en fonction de x et y.

25.2.2 Surface représentative

Soient U un domaine de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$.

Définition

On appelle surface représentative de φ l'ensemble

$$\Sigma_\varphi : z = \varphi(x,y)$$

Proposition

Le système

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \varphi(u,v) \end{cases} \quad \text{avec } (u,v) \in U$$

définit un paramétrage cartésien régulier de classe $\mathcal{C}^k$ de Σ_φ.

dém. :

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}\left|\begin{array}{l}1\\0\\\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(u,v)\end{array}\right. \text{ et } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}\left|\begin{array}{l}0\\1\\\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(u,v)\end{array}\right.$$

ne sont pas colinéaires.
Introduisons les notations de Monge associée à φ en (x_0, y_0) :

$$p = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0), q = \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0), r = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x_0,y_0), s = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) \text{ et } t = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(x_0,y_0)$$

□

Théorème

En M_0 de coordonnées $(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0))$, la surface Σ_φ admet un plan tangent qui est le plan Π d'équation

$$z = p(x - x_0) + q(y - y_0) + \varphi(x_0, y_0)$$

De plus :
- si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ alors Σ_φ est localement au dessus de Π (point elliptique) ;
- si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$ alors Σ_φ est localement en dessous de Π (point elliptique) ;
- si $rt - s^2 < 0$ alors Σ_φ traverse le plan Π (point hyperbolique ou point col).

dém. :

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}\left|\begin{array}{l}1\\0\\p\end{array}\right., \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}\left|\begin{array}{l}0\\1\\q\end{array}\right. \text{ donc } \vec{n} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}\left|\begin{array}{l}-p\\-q\\1\end{array}\right. \neq \vec{0}$$

donc en le point M_0, Σ_φ admet un plan tangent Π d'équation cartésienne :

$$-p(x - x_0) - q(y - y_0) + (z - \varphi(x_0, y_0)) = 0$$

i.e.

$$z = p(x - x_0) + q(y - y_0) + \varphi(x_0, y_0)$$

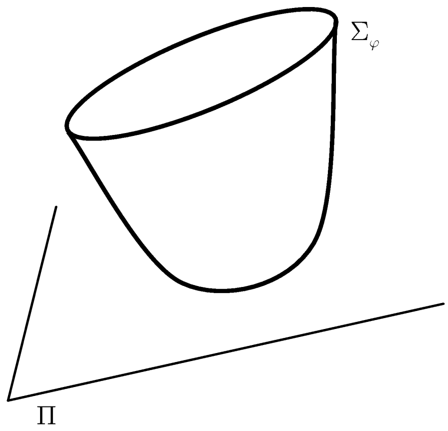
Pour positionner localement Σ_φ par rapport à son plan tangent Π, on étudie le signe au voisinage de (x_0, y_0), de

$$\delta(x,y) = \varphi(x,y) - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + \varphi(x_0,y_0)\right)$$

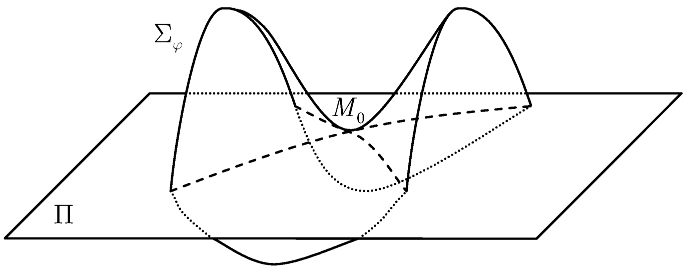
On a $\delta(x_0, y_0) = 0$ et $\dfrac{\partial\delta}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial\delta}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$ donc (x_0, y_0) est point critique de δ et selon que (x_0, y_0) est extremum local ou non de δ, on peut préciser le signe de δ au voisinage de (x_0, y_0).

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2}(x_0,y_0) = r, \frac{\partial^2\delta}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) = s \text{ et } \frac{\partial^2\delta}{\partial y^2}(x_0,y_0) = t$$

Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ alors δ admet un minimum local en (x_0, y_0).
Par suite δ est positive au voisinage de (x_0, y_0) et donc Σ_φ est localement au dessus de Π.



Si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$ alors par maximum local, Σ_φ est localement en dessous de Π.
Enfin $rt - s^2 < 0$ alors le δ n'est pas de signe constant au voisinage de (x_0, y_0), la surface Σ_φ traverse le plan Π.



□

25.2.3 Théorème des fonctions implicites

Théorème

Soient V un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $f : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k \geqslant 1$) et $(x_0, y_0, z_0) \in V$ tel que
$f(x_0, y_0, z_0) = 0$.
Si
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$
alors il existe une boule ouverte B centrée en (x_0, y_0), un intervalle ouvert J centré en z_0 et il existe une fonction $\varphi : B \to J$ de classe $\mathcal{C}^k$ vérifiant
$$B \times J \subset V \text{ et } \forall (x, y, z) \in B \times J,\, f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = \varphi(x, y)$$

Définition

On dit que la relation $f(x, y, z) = 0$ définit implicitement $\varphi : (x, y) \mapsto z$ au voisinage de (x_0, y_0, z_0).

Géométriquement Notons $\Sigma : f(x,y,z)=0$ et $\Sigma_\varphi : z=\varphi(x,y)$.
Au voisinage de $M_0(x_0,y_0,z_0)$, Σ et Σ_φ se confondent.

Que sait-on sur φ ?
φ est de classe $\mathcal{C}^k$, $z_0=\varphi(x_0,y_0)$ et $f(x,y,\varphi(x,y))=0$ au voisinage de (x_0,y_0).
En dérivant par rapport à x et y :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0)=-\left(\frac{\partial f}{\partial x}/\frac{\partial f}{\partial z}\right)(x_0,y_0,z_0) \text{ et } \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0)=-\left(\frac{\partial f}{\partial y}/\frac{\partial f}{\partial z}\right)(x_0,y_0,z_0)$$

Remarque Par permutation des variables, les conditions $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ permettent de définir implicitement des fonctions $(y,z)\mapsto x$ et $(x,z)\mapsto y$.

25.2.4 Plan tangent

Soient V un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $f : V\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $\Sigma : f(x,y,z)=0$.

Définition

Un point $M_0(x_0,y_0,z_0)$ de la surface Σ est dit régulier si

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0)\left|\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\\ \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\end{array}\right. \neq \vec{0}$$

Théorème

Si $M_0(x_0,y_0,z_0)$ est un point régulier de Σ alors Σ admet un plan tangent en M_0 dont $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0)$ est vecteur normal.

dém. :
Quitte à permuter les variables, on peut supposer $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.
La relation $f(x,y,z)=0$ définit alors implicitement une fonction $\varphi : (x,y)\mapsto z$ au voisinage de (x_0,y_0,z_0).
Au voisinage de M_0, les surfaces Σ et Σ_φ se confondent.
Puisque Σ_φ admet un plan tangent en M_0 d'équation

$$z=p(x-x_0)+q(y-y_0)+\varphi(x_0,y_0)$$

avec $\varphi(x_0,y_0)=z_0$,

$$p=\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0)=-\left(\frac{\partial f}{\partial x}/\frac{\partial f}{\partial z}\right)(x_0,y_0,z_0) \text{ et } q=\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0)=-\left(\frac{\partial f}{\partial y}/\frac{\partial f}{\partial z}\right)(x_0,y_0,z_0)$$

on obtient que Σ admet un plan tangent en M_0 d'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

□

Exemple En un point $M_0(x_0,y_0,z_0)$ du cône $\Sigma : x^2+y^2=z^2$ autre que O, M_0 est régulier et le plan tangent en ce point à pour équation $x_0x+y_0y-z_0z=0$.

25.2.5 Courbe intersection de deux surfaces

Soient $f_1,f_2 : V\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ et $\Sigma_1 : f_1(x,y,z)=0$, $\Sigma_2 : f_2(x,y,z)=0$.
On désire étudier $\Sigma_1\cap\Sigma_2$.
Considérons $M_0(x_0,y_0,z_0)$ un point commun à Σ_1 et Σ_2.
On suppose le point M_0 régulier pour Σ_1 et Σ_2.
Σ_1 et Σ_2 admettent des plans tangents Π_1 et Π_2 en ce point.

Définition

On dit que les surfaces Σ_1 et Σ_2 sont tangentes en le point M_0 si $\Pi_1=\Pi_2$.

Théorème

Si les surfaces Σ_1 et Σ_2 ne sont pas tangentes en M_0 alors au voisinage de M_0, $\Sigma_1\cap\Sigma_2$ est le support d'un arc régulier de classe $\mathcal{C}^k$ dont la tangente en M_0 est $\Pi_1\cap\Pi_2$.

dém. :
En M_0, $\overrightarrow{\text{grad}}\, f_1(M_0)\wedge\overrightarrow{\text{grad}}\, f_2(M_0)\neq\vec{o}$.
Quitte à permuter les variables, on peut supposer

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial z}-\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)(x_0,y_0,z_0)\neq 0$$

De plus, quitte à échanger f_1 et f_2, on peut supposer

$$\frac{\partial f_2}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$$

Etudions $\Sigma_1\cap\Sigma_2$ au voisinage de M_0 i.e. résolvons $\begin{cases} f_1(x,y,z)=0\\ f_2(x,y,z)=0\end{cases}$ au voisinage de (x_0,y_0,z_0).
Puisque $\dfrac{\partial f_2}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$, la relation $f_2(x,y,z)=0$ définit implicitement au voisinage de (x_0,y_0,z_0) une fonction $\psi : (x,y)\mapsto z$ de classe $\mathcal{C}^k$.
Au voisinage de (x_0,y_0,z_0) :

$$\begin{cases} f_1(x,y,z)=0\\ f_2(x,y,z)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} f_1(x,y,\psi(x,y))=0\\ z=\psi(x,y)\end{cases}$$

Posons $g(x,y)=f_1(x,y,\psi(x,y))$.
$g(x_0,y_0)=0$.

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,\psi(x,y))-\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,\psi(x,y))\times\frac{\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,\psi(x,y))}{\frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,\psi(x,y))}$$

Puisque $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$, la relation $g(x,y)=0$ définit implicitement au voisinage de (x_0,y_0) une fonction $\varphi : x \mapsto y$ de classe $\mathcal{C}^k$.
Au voisinage de (x_0,y_0,z_0)

$$\begin{cases} f_1(x,y,z)=0 \\ f_2(x,y,z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\varphi(x) \\ z=\psi(x,\varphi(x)) \end{cases}$$

Au final, au voisinage de M_0, $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ est le support d'un arc régulier cartésien donné par

$$\begin{cases} x=t \\ y=\varphi(t) \\ z=\psi(t,\varphi(t)) \end{cases}$$

Par calculs, on vérifie que la tangente en M_0 est incluse dans Π_1 et Π_2.
□

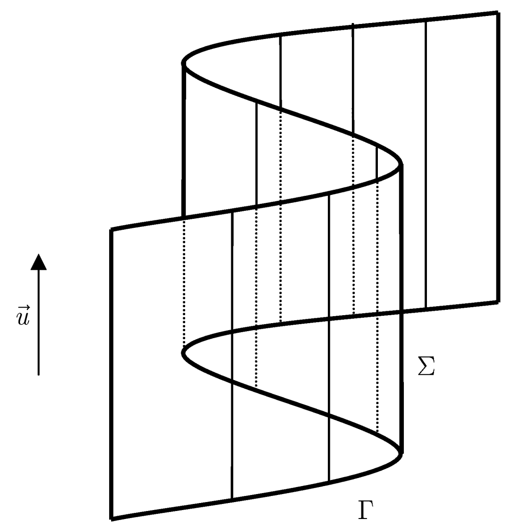
25.3 Surfaces usuelles

25.3.1 Cylindres

Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul et Γ une courbe de l'espace.

Définition

On appelle cylindre de direction $\vec{u}$ engendré par Γ la surface Σ réunion des droites $(M;\vec{u})$ avec M parcourant Γ.
Ces droites sont appelées génératrices du cylindre.
L'intersection du cylindre avec un plan de vecteur normal $\vec{u}$ est appelée section droite du cylindre. Selon la nature de cette section, on qualifie le cylindre.



Exemple $\Sigma : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ est un cylindre elliptique de direction verticale.
$\Sigma : \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ est un cylindre hyperbolique de direction $\vec{j}$.

Proposition

On a

$$M \in \Sigma \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, M + t\vec{u} \in \Gamma$$

On peut former une équation cartésienne de Σ par élimination de t.

Exemple Σ cylindre de direction $\vec{u}(1, 0, -1)$ engendré par

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Soit $M(x, y, z)$ un point.

$$M \in \Sigma \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, M + t\vec{u} \in \Gamma \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} (x+t)^2 + y^2 + (z-t)^2 = 0 \\ x + t + y = 0 \end{cases}$$

Donc

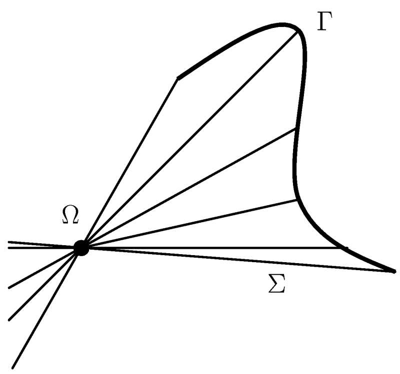
$$\Sigma : 2y^2 + (z + x + y)^2 = 1$$

25.3.2 Cônes

Soient Ω un point et Γ une courbe de l'espace ne contenant pas Ω.

Définition

On appelle cône de sommet Ω engendré par Γ la surface Σ réunion des droites (ΩM) avec M parcourant Γ.
Ces droites sont appelées génératrices du cône.



Exemple Considérons

$$\Sigma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Σ est un cône de sommet O engendré par l'ellipse

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = c \end{cases}$$

Σ est aussi un cône de sommet O engendré par l'hyperbole

$$\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1 \\ y = b \end{cases}$$

Proposition

On a

$$M \in \Sigma \Leftrightarrow M = \Omega \text{ ou } \exists t \in \mathbb{R}, \Omega + t\overrightarrow{\Omega M} \in \Gamma$$

On peut former une équation cartésienne de Σ par élimination de t.

Exemple Σ cône de sommet $\Omega(1, 0, 0)$ engendré par

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Soit $M(x, y, z)$ différent de Ω.

$$M \in \Sigma \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \Omega + t\overrightarrow{\Omega M} \in \Gamma \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} (1 + t(x-1))^2 + t^2y^2 + t^2z^2 = 1 \\ t(x + y - 1) = -1 \end{cases}$$

Ce qui implique

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 - 2(x + y - 1)(x - 1) = 0$$

qui est aussi vérifiée par Ω.
Inversement, si M satisfait cette équation alors si $x + y - 1 = 0$ alors $M = \Omega$ et sinon

$$\exists t \in \mathbb{R}, \Omega + t\overrightarrow{\Omega M} \in \Gamma$$

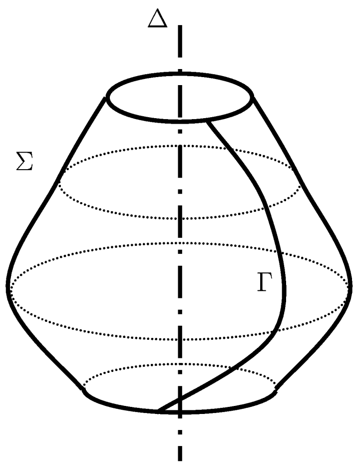
Dans les deux cas, $M \in \Sigma$.

25.3.3 Surface de révolution

Soient $\Delta = (A; \vec{u})$ une droite et Γ une courbe de l'espace.

Définition

On appelle surface de révolution d'axe Δ engendrée par Γ, la surface Σ réunion des cercles centrés sur Δ inclus dans des plans perpendiculaires à Δ et passant par un point M parcourant Γ.
Ces cercles sont appelés parallèles de Σ tandis que les intersections de Γ avec les plans contenant Δ sont appelées méridienne de Σ.



Exemple $\Sigma : x^2 + y^2 = R^2$ est l'équation d'un cylindre de révolution d'axe (Oz).

Exemple $\Sigma : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ est l'équation d'un cône de révolution d'axe (Oz).

Proposition

On a
$$M \in \Sigma \Leftrightarrow \exists P \in \Gamma, AM = AP \text{ et } \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AP} \cdot \vec{u}$$
On peut former une équation cartésienne de Σ par élimination de P.

dém. :
Les conditions $AM = AP$ et $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AP} \cdot \vec{u}$ définissent par intersection d'une sphère et d'un plan le cercle centré sur Δ passant par P.
□

Exemple $\Gamma : \begin{cases} (y-1)^2 + z^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ et $\Delta = (Oz)$.

$$M(x,y,z) \in \Sigma \Leftrightarrow \exists (X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \\ z = Z \\ (Y-1)^2 + Z^2 = 1 \\ X = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists (X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x^2 + y^2 = Y^2 \\ X = 0 \\ 2Y = Y^2 + z^2 \\ Z = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists (X,Y,Z)\in\mathbb{R}^3, \begin{cases} x^2+y^2=Y^2 \\ X=0 \\ 2Y=x^2+y^2+z^2 \\ Z=z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2+y^2)=\left(x^2+y^2+z^2\right)^2$$

Ainsi

$$\Sigma : 4(x^2+y^2)=\left(x^2+y^2+z^2\right)^2$$

25.4 Quadriques

25.4.1 Bestiaire dégénéré

25.4.1.1 Paraboloïde elliptique

Définition

On appelle paraboloïde elliptique ($\mathcal{PE}$) toute surface admettant une équation de la forme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$

dans un repère orthonormé bien choisi.

C'est le graphe de l'application $(x,y)\mapsto \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$.
La droite (Oz) et les plans (Oxz) et (Oyz) sont éléments de symétrie.
Si $a=b$, c'est une surface obtenue par révolution d'une parabole autour de l'axe (Oz).

25.4.1.2 Paraboloïde hyperbolique

Définition

On appelle paraboloïde hyperbolique ($\mathcal{PH}$) toute surface admettant un équation de la forme

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$$

dans un repère orthonormé bien choisi.

C'est le graphe de l'application $(x,y)\mapsto \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$.
La droite (Oz) et les plans (Oxz) et (Oyz) sont éléments de symétrie.
Exemple Considérons la surface $\Sigma : z=xy$.
Soient $\vec{u}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j})$, $\vec{v}=\dfrac{1}{2}(-\vec{i}+\vec{j})$.
Si M a pour coordonnées (x,y,z) dans $\mathcal{R}$ et (x',y',z') dans $\mathcal{R}'=(O;\vec{u},\vec{v},\vec{k})$, on a

$$\begin{cases} x=(x'-y')/\sqrt{2} \\ y=(x'+y')/\sqrt{2} \\ z'=z \end{cases}$$

Par suite, dans le repère $\mathcal{R}'$,

$$\Sigma : z^2 = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

Σ est un $\mathcal{PH}$.

Exemple Considérons la surface

$$\Sigma : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

Σ est une réunion de droite.
En effet

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = z$$

donc

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = \lambda \\ \lambda\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = z \end{cases}$$

Introduisons les droites D_λ données pour $\lambda \in \mathbb{R}$ par

$$D_\lambda : \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = \lambda \\ \lambda\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = z \end{cases}$$

On a

$$\Sigma = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} D_\lambda$$

En observant

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z \Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = \mu \\ \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right)\mu = z \end{cases}$$

on obtient

$$\Sigma = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} D'_\lambda \text{ avec } D'_\lambda : \begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = \lambda \\ \lambda\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = z \end{cases}$$

25.4.2 Bestiaire non dégénéré

25.4.2.1 Ellipsoïde

Définition

On appelle ellipsoïde (nom masculin) toute surface admettant une équation cartésienne de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

dans un repère orthonormé bien choisi.

On peut représenter un ellipsoïde par le paramétrage

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi\cos\theta \\ y = b\sin\varphi\cos\theta \quad \text{avec } (\varphi,\theta)\in\mathbb{R}^2 \\ z = c\sin\theta \end{cases}$$

O, (Ox), (Oy), (Oz), (Oxy), (Oyz) et (Oxz) sont éléments de symétrie.
Si $a = b$ alors c'est une surface obtenue par révolution d'une ellipse autour de l'axe (Oz).
Si $a = b = c$ alors c'est une sphère.

25.4.2.2 Hyperboloïde à une nappe

Définition

On appelle hyperboloïde à une nappe toute surface admettant une équation cartésienne de la forme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

dans un repère orthonormé bien choisi.
On peut représenter un hyperboloïde à une nappe par le paramétrage

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi\,\mathrm{ch}t \\ y = b\sin\varphi\,\mathrm{ch}t \quad \text{avec } (\varphi,t)\in\mathbb{R}^2 \\ z = c\,\mathrm{sh}t \end{cases}$$

$\mathcal{C} : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ est cône asymptote intérieur.
O, (Ox), (Oy), (Oz), (Oxy), (Oyz) et (Oxz) sont éléments de symétrie.
Si $a = b$ alors $\mathcal{H}_1$ est une surface de révolution d'axe (Oz).

Exemple Soient Δ et $\mathcal{D}$ deux droites non coplanaires et non orthogonales.
La surface de révolution d'axe Δ engendrée par $\mathcal{D}$ est un hyperboloïde à une nappe.

Exemple Considérons

$$\Sigma : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

On a

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right)$$

Considérons :

$$\mathcal{D}_\lambda : \begin{cases} \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\lambda\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \\ \lambda\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\left(1+\dfrac{y}{b}\right) \end{cases} \text{ et } \mathcal{D}_\infty : \begin{cases} 1-\dfrac{y}{b}=0 \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=0 \end{cases}$$

On a évidemment $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}} \mathcal{D}_\lambda \subset \Sigma$
Inversement si $M(x,y,z)\in\Sigma$ alors
Si $1-y/b\neq 0$ alors pour $\lambda=(x/a-z/c)/(1-y/b)$, on a $M\in\mathcal{D}_\lambda$.

Si $x/a + z/c \neq 0$ alors pour $\lambda = (1 + y/b)/(x/a + z/c)$, on a $M \in \mathcal{D}_\lambda$.
Sinon $M \in \mathcal{D}_\infty$.
Finalement par double inclusion

$$\Sigma = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}} \mathcal{D}_\lambda$$

Aussi, pour

$$\mathcal{D}'_\lambda : \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \lambda \left(1 + \dfrac{y}{b}\right) \\ \lambda \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = \left(1 - \dfrac{y}{b}\right) \end{cases} \text{ et } \mathcal{D}'_\infty : \begin{cases} 1 + \dfrac{y}{b} = 0 \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 0 \end{cases}$$

on obtient

$$\Sigma = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}} \mathcal{D}'_\lambda$$

25.4.2.3 Hyperboloïde à deux nappes

Définition

> On appelle hyperboloïde à deux nappes toute surface admettant une équation cartésienne de la forme
> $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$
> dans un repère orthonormé bien choisi.

On peut représenter un hyperboloïde à deux nappes par les paramétrages

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi \operatorname{sh} t \\ y = b \sin \varphi \operatorname{sh} t \quad \text{avec } (\varphi, t) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \varepsilon = \pm 1 \\ z = \varepsilon c \operatorname{ch} t \end{cases}$$

$\mathcal{C} : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ est cône asymptote extérieur.
O, (Ox), (Oy), (Oz), (Oxy), (Oyz) et (Oxz) sont éléments de symétrie.
Si $a = b$ alors $\mathcal{H}_2$ est une surface obtenue par révolution d'une hyperbole autour de l'axe (Oz).

Remarque On peut distinguer une équation d'$\mathcal{H}_1$ et d'$\mathcal{H}_2$ en comptant le nombre de signe moins.

25.4.3 Quadriques

Définition

> On appelle quadrique toute surface pouvant être définie par une équation du second degré i.e. une équation de la forme
> $$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2(dxy + eyz + fzx) + 2(gx + hy + iz) + k = 0$$
> avec $(a, b, c, d, e, f) \neq 0$.

Exemple Les surfaces des deux bestiaires précédents sont des quadriques.

Théorème

> Aux points réguliers, on peut former une équation du plan tangent à une quadrique par dédoublement.

25.4.4 Réduction de l'équation d'une quadrique

Etudions la quadrique d'équation dans $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\Sigma : ax^2 + by^2 + cz^2 + 2(dxy + eyz + fzx) + 2(gx + hy + iz) + k = 0$$

Pour $M(x, y, z)_{\mathcal{R}}$ on pose

$$F(M) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2(dxy + eyz + fzx) + 2(gx + hy + iz) + k$$

Formons un repère dans lequel l'expression de F est plus simple.

25.4.4.1 Dérectangulation

Pour $M(x, y, z)_{\mathcal{R}}$, on a $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et on peut écrire

$$F(M) = q(\overrightarrow{OM}) + 2\ell(\overrightarrow{OM}) + k$$

avec

$$q(\overrightarrow{OM}) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2(dxy + eyz + fzx) \text{ et } \ell(\overrightarrow{OM}) = gx + hy + iz$$

q est une forme quadratique et ℓ une forme linéaire avec

$$\text{Mat}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(q) = \begin{pmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{pmatrix} = A \text{ et } \text{Mat}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(\ell) = \begin{pmatrix} g & h & i \end{pmatrix}$$

Par réduction de la matrice symétrique réelle A, il existe $P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ telle

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$$

Considérons alors la base orthonormée $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ déterminée par

$$P = \text{Mat}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

Par formule de changement de base

$$\text{Mat}_{(\vec{u},\vec{v},\vec{w})}(q) = {}^tPAP = {}^tPPDP^{-1}P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$$

et alors

$$\text{Mat}_{(\vec{u},\vec{v},\vec{w})}(\ell) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

Considérons $\mathcal{R}' = (O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
Pour $M(x, y, z)_{\mathcal{R}'}$, on $\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$ et donc

$$q(\overrightarrow{OM}) = \lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2, \ell(\overrightarrow{OM}) = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

et alors

$$F(M) = \lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 + 2(\alpha x + \beta y + \gamma z) + k$$

25.4.4.2 Quadrique non dégénérée

Définition

> La quadrique Σ est dite non dégénérée si la forme quadratique q n'est pas dégénérée (i.e. $\text{rg}q = 3$)

Supposons la quadrique Σ non dégénérée.
On a

$$\text{rg}q = \text{rg}\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} = 3$$

donc $\lambda, \mu, \nu \neq 0$.
On peut alors écrire

$$F(M) = \lambda(x - x_0)^2 + \mu(y - y_0)^2 + \nu(z - z_0)^2 + C^{te}$$

avec $x_0 = -\alpha/\lambda$, $y_0 = -\beta/\mu$ et $z_0 = -\gamma/\nu$.
Considérons le point $\Omega(x_0, y_0, z_0)_{\mathcal{R}'}$ et le repère $\mathcal{R}'' = (\Omega; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$
Pour $M(x, y, z)_{\mathcal{R}''}$ on a

$$F(M) = \lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 + C^{te}$$

avec $C^{te} = F(\Omega)$.
Finalement, dans le repère $\mathcal{R}'' = (\Omega; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ on obtient l'équation réduite.

$$\Sigma : \lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 = \chi$$

avec $\chi = -F(\Omega)$.
Le point Ω est alors centre de symétrie de la quadrique Σ.

Définition

> Le point Ω est appelé centre de la quadrique non dégénérée Σ.
> On dit qu'une quadrique non dégénérée est une quadrique à centre.

Théorème

> Le centre d'une quadrique non dégénérée est l'unique point M vérifiant $\overrightarrow{\text{grad}}\, F(M) = \vec{0}$.

Classification de

$$\Sigma : \lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 = \chi$$

Quitte à permuter $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ on peut supposer λ et μ de même signe et quitte à passer l'équation à l'opposé, on peut supposer $\lambda, \mu > 0$.
Cas $\nu > 0$
Si $\chi < 0$ alors $\Sigma = \emptyset$.
Si $\chi = 0$ alors $\{\Omega\}$.
Si $\chi > 0$ alors

$$\Sigma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ avec } a = \sqrt{\frac{\chi}{\lambda}}, b = \sqrt{\frac{\chi}{\mu}}, c = \sqrt{\frac{\chi}{\nu}}$$

Σ est un ellipsoïde.
De plus, si deux des valeurs propres λ, μ, χ sont égales, c'est un ellipsoïde de révolution.

Cas $\nu < 0$
Si $\chi = 0$ alors

$$\Sigma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ avec } a = \sqrt{\frac{1}{\lambda}}, b = \sqrt{\frac{1}{\mu}}, c = \sqrt{-\frac{1}{\nu}}$$

Σ est un cône de sommet Ω engendré par une ellipse.
Si $\chi > 0$ alors

$$\Sigma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ avec } a = \sqrt{\frac{\chi}{\lambda}}, b = \sqrt{\frac{\chi}{\mu}}, c = \sqrt{\frac{\chi}{-\nu}}$$

Σ est un hyperboloïde à une nappe.
Si $\chi < 0$ alors

$$\Sigma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \text{ avec } a = \sqrt{\frac{-\chi}{\lambda}}, b = \sqrt{\frac{-\chi}{\mu}}, c = \sqrt{\frac{\chi}{\nu}}$$

Σ est un hyperboloïde à deux nappes.
Dans chacune des trois situations précédentes, si $\lambda = \mu$ on obtient une surface de révolution.

25.4.4.3 Quadrique dégénérée

On suppose la quadrique Σ dégénérée et donc rg$q = 1$ ou 2.
Cas

$$\text{rg}(q) = \text{rg}\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} = 2$$

Quitte à permuter $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, on peut supposer $\lambda, \mu \neq 0$ et $\nu = 0$.
Dans $\mathcal{R}' = (O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$,

$$\Sigma : \lambda x^2 + \mu y^2 + 2(\alpha x + \beta y + \gamma z) + k = 0$$

Cas $\gamma = 0$
L'équation précédente est lacunaire en z, Σ est donc un cylindre de direction $\vec{w}$ de section conique (non dégénérée)
Cas $\gamma \neq 0$
Par translation d'origine, on parvient à $\Sigma : \lambda x^2 + \mu y^2 + 2\gamma z = 0$.
Si $\lambda\mu > 0$ alors quitte à transformer $\vec{w}$ en $-\vec{w}$, on obtient

$$\Sigma : z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

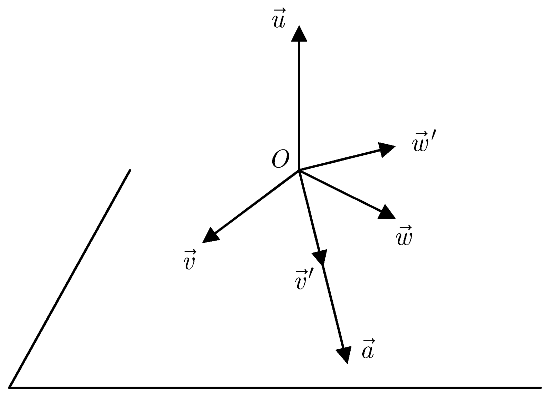
Σ est un paraboloïde elliptique.
Si $\lambda = \mu$, c'est une surface de révolution.
Si $\lambda\mu < 0$ alors quitte à transformer $\vec{w}$ en $-\vec{w}$, on obtient

$$\Sigma : z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

Σ est un paraboloïde hyperbolique.
Cas rg$(q) = 1$
Quitte à permuter les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, on peut supposer $\lambda \neq 0$ et $\mu = \nu = 0$.
Dans $\mathcal{R}' = (O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$,

$$\Sigma : \lambda x^2 + 2(\alpha x + \beta y + \gamma z) + k = 0$$

On peut écrire $\beta y + \gamma z = (\vec{a} \mid \overrightarrow{OM})$ avec $\vec{a}(0, \beta, \gamma)$.



Par rotation autour de l'axe $(O;\vec{u})$, on peut trouver un repère $\mathcal{R}'' = (O,\vec{u},\vec{v}',\vec{w}')$ dans lequel $\vec{a}(0,\|\vec{a}\|,0)$ avec $\delta = \|\vec{a}\| = \sqrt{\beta^2+\gamma^2}$.
Pour $M(x,y,z)_{\mathcal{R}'}$ et $M(x',y',z')_{\mathcal{R}''}$, on a $x = x'$ et $(\vec{a} \mid \overrightarrow{OM}) = \|\vec{a}\|\, y'$ de sorte que

$$F(M) = \lambda x'^2 + 2\alpha x' + 2\delta y' + k$$

Ainsi, dans $\mathcal{R}''$

$$\Sigma : \lambda x^2 + 2\alpha x + 2\delta y + k$$

Σ est un cylindre de direction $\vec{w}'$ de section conique (dégénérée).

25.4.5 En pratique

Soient $k \in \mathbb{R}$ et

$$\Sigma : 2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz - 2y + 4z = k$$

Σ est une quadrique.
Pour M de coordonnées (x,y,z) dans $\mathcal{R} = (O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, posons

$$F(M) = 2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz - 2y + 4z - k$$

La forme quadratique associée à Σ a pour matrice dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

En calculant χ_A, on obtient les valeurs propres sont $1, 4, -2$. Par le calcul on obtient

$$E_1(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } E_4(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On pose alors

$$\vec{u}\left|\begin{array}{l} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{array}\right., \vec{v}\left|\begin{array}{l} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{array}\right. \text{ et } \vec{w} = \vec{u}\wedge\vec{v}\left|\begin{array}{l} -1/3 \\ -2/3 \\ -2/3 \end{array}\right.$$

La forme quadratique associée à Σ a pour matrice dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

La quadrique Σ est non dégénérée.
Le centre de la quadrique Σ s'obtient en résolvant $\overrightarrow{\text{grad}}\, F(M) = \vec{0}$ i.e.

$$\begin{cases} 4x - 4y = 0 \\ 2y - 4x - 4z - 2 = 0 \\ -4y + 4 = 0 \end{cases}$$

Le point Ω de coordonnées $(1, 1, -1)$ dans $\mathcal{R} = (\Omega; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est le centre de la quadrique Σ.
Pour M de coordonnées (x, y, z) dans le repère $(\Omega; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$,

$$F(M) = x^2 + 4y^2 - 2z^2 + F(\Omega)$$

avec $F(\Omega) = -3 - k$.
Finalement, dans $\mathcal{R} = (\Omega; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$,

$$\Sigma : x^2 + 4y^2 - 2z^2 = k + 3$$

Selon que $k > -3$, $k = -3$ ou $k < -3$ on obtient un $\mathcal{H}_1$, un cône ou un $\mathcal{H}_2$.

Table des matières