Exercice 1 [02598] [Correction]
Soient A et B deux matrices réelles carrées d'ordre n telles qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au moins égal à 1 et vérifiant

$$P(0) = 1 \text{ et } AB = P(A).$$

Montrer que A est inversible et que A et B commutent.

Exercice 2 [02493] [Correction]
Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}^*$, tous distincts et $P(x) = \det(A + xI_n)$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_n \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer $P(a_i)$ et décomposer en éléments simples la fraction

$$\frac{P(x)}{\prod_{i=1}^{n}(x - a_i)}.$$

(b) En déduire $\det A$.

Exercice 3 [02524] [Correction]
Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $B = A^p$.
Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, B l'est.

Exercice 4 [02595] [Correction]
Soient $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et

$$N = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

Calculer N^2, la matrice N est-elle diagonalisable ?
Montrer que $M = 2N + I_n$ est inversible et calculer M^{-1}.

Exercice 5 [03191] [Correction]

(a) Montrer que si P est un polynôme annulateur d'un endomorphisme f alors $P(\lambda) = 0$ pour toute valeur propre λ de f.

(b) Montrer que si f vérifie

$$f^3 + 2f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$$

alors f est bijectif.

Exercice 6 [03795] [Correction]
$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie la propriété (P) si

$$\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(M + \lambda A) \neq 0.$$

(a) Rappeler pourquoi une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet au moins une valeur propre.

(b) Soit T une matrice triangulaire supérieure de diagonale nulle.
Calculer $\det(I_n + \lambda T)$. En déduire que T vérifie la propriété (P)

(c) Déterminer le rang de la matrice

$$T_r = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

(d) Soient A vérifiant (P) et B une matrice de même rang que A ; montrer

$$\exists (P, Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^2, B = PAQ$$

et en déduire que B vérifie (P).

(e) Conclure que, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, les matrices non inversibles vérifient (P) et que ce sont les seules.

(f) Que dire des cette propriété dans le cas $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (on distinguera n pair et n impair) ?

Exercice 7 [02577] [Correction]

(a) Montrer que Φ, qui à P associe

$$(X^2 - 1)P'(X) - (4X + 1)P(X)$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.

(b) Résoudre l'équation différentielle

$$y' = \left(\frac{5-\lambda}{2(x-1)} + \frac{3+\lambda}{2(x+1)}\right)y.$$

(c) En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ.

Exercice 8 [03583] [Correction]
Trigonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 [03187] [Correction]

(a) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Si a est valeur propre de f, de multiplicité m, et si $E(f,a)$ est le sous-espace propre attaché, montrer

$$1 \leq \dim E(f,a) \leq m.$$

(b) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Déterminer simplement les valeurs propres de A.
La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 10 [03582] [Correction]
Soit A, B fixés dans $\mathbb{R}_n[X]$.
On note f l'application qui, à $P \in \mathbb{R}_n[X]$ associe le reste de la division euclidienne de AP par B.

(a) Montrer que f est un endomorphisme ; est-ce un isomorphisme ?

(b) On suppose dans la suite que les polynômes A et B premiers entre eux avec B scindé à racines simples ; donner les valeurs propres de f.

(c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 11 [02526] [Correction]
Montrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

est trigonalisable et préciser une matrice de passage.

Exercice 12 [00042] [Correction]
Soient u, v deux endomorphismes d'un espace vectoriel.

(a) Si $\lambda \neq 0$ est valeur propre de $u \circ v$, montrer qu'il l'est aussi de $v \circ u$.

(b) Pour $P \in E = \mathbb{R}[X]$, on pose

$$u(P) = P' \text{ et } v(P) = \int_0^X P(t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui définit des endomorphismes de E. Déterminer

$$\operatorname{Ker}(u \circ v) \text{ et } \operatorname{Ker}(v \circ u).$$

(c) Montrer que la propriété de la première question reste valable pour $\lambda = 0$ si l'espace E est de dimension finie.

Exercice 13 [03693] [Correction]
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -b & a \\ b & 0 & -c \\ -a & c & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

(a) A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

(b) A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

(c) Soit λ un réel non nul ; la matrice $B = A + \lambda I_3$ est-elle inversible ?

(d) Montrer qu'il existe trois réels α, β, γ tels que

$$B^{-1} = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3.$$

Exercice 14 [02511] [Correction]
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \geq 2$.

(a) Montrer que $\phi(P)(X) = (X-a)\big(P'(X) - P'(a)\big) - 2(P(X) - P(a))$ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) À l'aide de la formule de Taylor, déterminer l'image et le noyau de ϕ.

(c) Trouver ses éléments propres. L'endomorphisme est-il diagonalisable ?

Exercice 15 [03299] [Correction]
Soient $n \geq 2$, A et B des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ de déterminants non nuls et premiers entre eux.
Montrer qu'il existe U et V dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que

$$UA + VB = \mathrm{I}_n$$

(on pourra écrire $\chi_A(X) = XQ_A(X) \pm \det A$)
On donnera un exemple pour $n = 2$.

Exercice 16 [03767] [Correction]
Considérons la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C}).$$

(a) On suppose k réel, la matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$? (sans calculs) ;

(b) Déterminer le rang de A.

(c) Donner la raison pour laquelle le polynôme caractéristique de A est de la forme

$$X^2(X-u_1)(X-u_2)$$

avec u_1, u_2 appartenant à $\mathbb{C}^*$ et vérifiant

$$u_1 + u_2 = k \text{ et } u_1^2 + u_2^2 = k^2 + 6.$$

(d) Étudier les éléments propres dans le cas où $u_1 = u_2$.

(e) En déduire les valeurs de k pour que A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

Exercice 17 [03433] [Correction]
Pour quelle(s) valeurs de $x \in \mathbb{R}$, la matrice suivante n'est-elle pas diagonalisable ?

$$A = \begin{pmatrix} -2-x & 5+x & x \\ x & -2-x & -x \\ -5 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 18 [03776] [Correction]
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
On considère l'endomorphisme f de E déterminé par

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, f(e_k) = e_k + \sum_{i=1}^{n} e_i.$$

(a) Donner la matrice de f dans e.

(b) Déterminer les sous-espaces propres de f.

(c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

(d) Calculer le déterminant de f. L'endomorphisme f est-il inversible ?

Exercice 19 [02543] [Correction]
Expliquer brièvement pourquoi

$${}^t\mathrm{Com}(A)A = \det(A)\mathrm{I}_n.$$

On suppose que A admet n valeurs propres distinctes ; que vaut $\det(A)$?
Que représente un vecteur propre de A pour ${}^t\mathrm{Com}(A)$?
On suppose de plus que A n'est pas inversible. Déterminer

$$\dim \operatorname{Ker} {}^t\mathrm{Com}(A).$$

Prouver que ${}^t\mathrm{Com}(A)$ n'admet que deux valeurs propres, les expliciter.

Exercice 20 [03809] [Correction]

(a) Déterminer l'ensemble Ω des réels a tels que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable.

(b) Pour $a \in \Omega$, trouver P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.

Exercice 21 [03450] [Correction]
On considère un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie E, u un endomorphisme de E, $U = (u_{i,j})$ la matrice de u dans une base de E, $e_{i,j}$ les projecteurs associés à cette base et $E_{i,j}$ la matrice de ces projecteurs.
On considère φ l'endomorphisme dans $\mathcal{L}(E)$ tel que

$$\varphi(v) = u \circ v.$$

(a) Montrer que φ et u ont les mêmes valeurs propres.

(b) Calculer $UE_{i,j}$ en fonction des $E_{k,j}$. En déduire qu'il existe une base de $\mathcal{L}(E)$ dans laquelle la matrice de φ est diagonale par blocs.

(c) Exprimer cette matrice.

Exercice 22 [03205] [Correction]
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E vérifiant

$$u^3 + u = 0.$$

(a) Montrer que l'espace $\operatorname{Im} u$ est stable par u.

(b) Pour $x \in \operatorname{Im} u$, calculer $u^2(x)$

(c) Soit v l'endomorphisme induit par u sur $\operatorname{Im} u$.
Montrer que v est un isomorphisme.

(d) En déduire que le rang de l'endomorphisme u est un entier pair.

Exercice 23 [03810] [Correction]

(a) Trouver les valeurs propres des matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant

$$M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Déterminer alors les matrices M solutions à l'aide de polynômes annulateurs appropriés.

Exercice 24 [02536] [Correction]
Soient a, b, c, d quatre nombres complexes avec $a^2 + b^2 \neq 0$ et

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer A^tA, $\det A$ et montrer que $\operatorname{rg}(A) = 2$ ou 4.

(b) On pose $\alpha^2 = b^2 + c^2 + d^2$ supposé non nul. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 25 [02522] [Correction]
Soit $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$.

(a) Quel est le rang de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} ?.$$

(b) Avec la trace, que peut-on dire des valeurs propres ?

(c) A est-elle diagonalisable ?

Exercice 26 [02502] [Correction]
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$, $v \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisables vérifiant

$$u^3 = v^3.$$

Montrer que $u = v$.

Exercice 27 [02521] [Correction]
Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit $A * B \in \mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{C})$ par

$$A * B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \cdots & a_{1,n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}B & \cdots & a_{n,n}B \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que si $A, A', B, B' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors $(A * B)(A' * B') = (AA') * (BB')$.

(b) En déduire que $A * B$ est inversible si, et seulement si, A et B sont inversibles.

(c) Déterminer le spectre de $A * B$.
En déduire le polynôme caractéristique, la trace et le déterminant de $A * B$.

Exercice 28 [03192] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que $\det A = 1$ et qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ pour lequel

$$A^p = \mathrm{I}_2.$$

(a) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

On note α et β les deux valeurs propres de A.

(b) Montrer que $|\alpha| = |\beta| = 1$, que $\alpha = \overline{\beta}$ et

$$\left|\mathrm{Re}(\alpha)\right| \in \{0, 1/2, 1\}.$$

(c) Montrer que $A^{12} = \mathrm{I}_2$

(d) Montrer que l'ensemble $G = \left\{A^n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ est un groupe monogène fini pour le produit matriciel.

Exercice 29 [02501] [Correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ ayant 0 comme racine simple et tel que $P(u) = 0$.

(a) Montrer

$$\operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u \text{ et } \operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Im} u.$$

(b) En déduire

$$E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u.$$

Exercice 30 [03056] [Correction]
Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^*$, $\lambda \neq \mu$ et $A, B, M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telles que

$$\begin{cases} \mathrm{I}_p = A + B \\ M = \lambda A + \mu B \\ M^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B. \end{cases}$$

(a) Montrer que M est inversible et exprimer M^{-1}.
On pourra calculer $M^2 - (\lambda + \mu)M + \lambda\mu I_p$

(b) Montrer que A et B sont des projecteurs.

(c) La matrice M est-elle diagonalisable ? Déterminer son spectre.

Exercice 31 [02410] [Correction]
Soit $n \geq 2$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$f(M) = \mathrm{tr}(A)M - \mathrm{tr}(M)A$$

où tr désigne la forme linéaire trace.
Étudier la réduction de l'endomorphisme f et préciser la dimension de ses sous-espaces propres.

Exercice 32 [02513] [Correction]
Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie tel qu'il existe deux réels non nuls distincts a et b vérifiant

$$(u - a\mathrm{Id})(u - b\mathrm{Id}) = 0.$$

Soient

$$p = \frac{1}{b-a}(u - a\mathrm{Id}) \text{ et } q = \frac{1}{a-b}(u - b\mathrm{Id}).$$

(a) Calculer $p + q$, $p \circ p$, $q \circ q$ et $q \circ p$.

(b) Montrer que $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Ker} q$.

(c) Trouver les éléments propres de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Exercice 33 [00083] [Correction]
Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, a un vecteur unitaire de E et k un réel avec $k \neq -1$.

(a) Montrer que

$$f(x) = x + k(x \mid a)a$$

définit un endomorphisme symétrique de E.

(b) Montrer que f est un automorphisme.

(c) Étudier les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Exercice 34 [03692] [Correction]
Soit p un entier naturel impair et u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien de dimension n.

(a) Montrer qu'il existe un unique endomorphisme symétrique v tel que $v^p = u$.

(b) Que se passe-t-il si p est pair ?

(c) Si p est pair et u à valeurs propres positives ?

(d) Si p est pair et u et v à valeurs propres positifs ?

Exercice 35 [03618] [Correction]
Soit f un endomorphisme bijectif d'un espace euclidien E vérifiant :

$$\forall (x,y)\in E^2, (f(x)\,|\,y) = -(x\,|\,f(y)).$$

(a) Montrer que pour tout vecteur x de E, les vecteurs x et $f(x)$ sont orthogonaux.

(b) Montrer que l'endomorphisme $s = f\circ f$ est symétrique.
Soit a l'une de ses valeurs propres et V_a le sous-espace propre associé.

(c) Soit $x\in V_a\setminus\{0_E\}$. Montrer que

$$(s(x)\,|\,x) = a\left\|x\right\|^2 = -\left\|f(x)\right\|^2$$

et en déduire que $a<0$.

(d) On considère toujours $x\in V_a\setminus\{0_E\}$
Montrer que $F = \mathrm{Vect}(x, f(x))$ et $F^\perp$ sont stables par f.
Montrer que l'endomorphisme induit sur F par f a une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -b\\ b & 0\end{pmatrix}$$

dans une base orthonormée (on précisera b)

(e) Conclure que la dimension de E est paire.

Exercice 36 [02552] [Correction]
On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, muni de sa structure euclidienne canonique. Le produit scalaire est noté $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$.
On dit qu'une application $f\colon E\to E$ est antisymétrique si

$$\forall x,y\in E, (x\,|\,f(y)) = -(f(x)\,|\,y).$$

(a) Montrer qu'une application antisymétrique de E est linéaire.
Que dire de sa matrice dans la base canonique de E ?

(b) Montrer que l'ensemble des endomorphismes antisymétriques de E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et donner sa dimension.

Exercice 37 [03190] [Correction]
Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (i,j,k)$. Soit $\theta\in\mathbb{R}$, déterminer les éléments caractéristiques de

$$\mathrm{Rot}_{k,\pi/2}\circ\mathrm{Rot}_{\cos\theta i+\sin\theta j,\pi}\,.$$

Exercice 38 [02554] [Correction]
Soit u une isométrie de E euclidien et $v = u - \mathrm{Id}_E$.

(a) Montrer que $\operatorname{Ker} v = (\operatorname{Im} v)^\perp$.

(b) Soit

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k.$$

Montrer que $\left(u_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, pour tout vecteur x, vers le projeté orthogonal de x sur $\operatorname{Ker} v$.

Exercice 39 [03379] [Correction]
Soit u un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien E de dimension n.

(a) On pose $v = u - \mathrm{Id}$. Montrer

$$\operatorname{Ker} v = (\operatorname{Im} v)^\perp.$$

(b) Soit $x\in E$. Justifier l'existence de $(x_1,y)\in\operatorname{Ker} v\times E$ tel que

$$x = x_1 + v(y).$$

Montrer

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u^k(x) = x_1 + \frac{1}{N}(u^N(y) - y).$$

(c) On note p la projection orthogonale sur $\operatorname{Ker} v$. Montrer

$$\forall x\in E, \lim_{N\to+\infty}\left\|p(x) - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u^k(x)\right\| = 0.$$

Exercice 40 [03591] [Correction]
Soient $a \in \mathbb{R}^*$, u un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ euclidien.

(a) Montrer que l'application f_a définie par
$$f_a(x) = x + a\langle x, u\rangle u$$
est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(b) Montrer qu'il existe un unique $a' \neq 0$ vérifiant
$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \left\|f_{a'}(x)\right\| = \|x\|\,.$$
Donner la nature de $f_{a'}$ (on pourra s'intéresser à $f_{a'}^2$).

(c) Montrer que f_a est un endomorphisme symétrique et déterminer ses éléments propres.

Exercice 41 [03398] [Correction]
Justifier que
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
est diagonalisable et trouver P telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.

Exercice 42 [02413] [Correction]
On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Justifiez que la matrice A est diagonalisable.

(b) Déterminer P et D dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que ${}^tP = P^{-1}$, D est diagonale et ${}^tPAP = D$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
On peut écrire
$$AB = P(A) = \alpha_n A^n + \cdots + \alpha_1 A + I_n$$
donc
$$A\big(B - (\alpha_n A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 I_n)\big) = I_n.$$
Par le théorème d'inversibilité, A est inversible et
$A^{-1} = B - (\alpha_n A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 I_n)$.
Puisque A commute avec A^{-1} et ses puissances, on en déduit que A commute avec
$$B = A^{-1} + \alpha_n A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 I.$$

Exercice 2 : [énoncé]

(a) On obtient
$$P(a_i) = a_i \prod_{j \neq i} (a_i - a_j)$$
P est de degré n et unitaire donc
$$\frac{P(x)}{\prod_{i=1}^n (x - a_i)} = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x - a_i}.$$

(b) On en déduit
$$\det A = P(0) = (-1)^{n-1}(n-1)\prod_{i=1}^n a_i.$$
Notons que l'on peut proposer une démarche plus simple en commençant par factoriser les a_i par colonnes.

Exercice 3 : [énoncé]
Si A est diagonalisable, on peut écrire $A = PDP^{-1}$ avec P inversible et D diagonale. On a alors $B = A^p = P^{-1}D^pP$ avec D^p diagonale et donc B est diagonalisable.
Inversement, si B est diagonalisable alors il existe un polynôme annulateur de B scindé à racines simple de la forme
$$\prod_{k=1}^m (X - \lambda_k).$$
De plus, puisque B est inversible, on peut supposer les λ_k tous non nuls.
Sachant $B = A^p$, le polynôme
$$\prod_{k=1}^m (X^p - \lambda_k)$$
est annulateur de A. Or ce dernier est scindé à racines simples car
- les facteurs $X^p - \lambda_k$ et $X^p - \lambda_\ell$ (avec $k \neq \ell$) ont des racines deux à deux distinctes ;
- les racines de $X^p - \lambda_k$ sont toutes simples (car $\lambda_k \neq 0$).
On en déduit que A est diagonalisable.

Exercice 4 : [énoncé]
On obtient $N^2 = sN$ avec $s = a_1 + \cdots + a_n$.
Puisque $s > 0$, N annule un polynôme scindé simple et donc est diagonalisable.
$-1/2$ n'est pas valeur propre de N car n'est pas racine du polynôme annulateur $X^2 - sX$ donc M est inversible. En recherchant M^{-1} de la forme $xM + yI_n$, on obtient
$$M^{-1} = I_n - (2+s)N.$$

Exercice 5 : [énoncé]

(a) Soit x un vecteur propre associé à la valeur propre λ. On a $f(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0_E$. Par composition $f^n(x) = \lambda^n x$ puis $P(f)(x) = P(\lambda)x$. Or $P(f)(x) = 0_E$ et $x \neq 0_E$ donc $P(\lambda) = 0$.

(b) Le polynôme $X^3 + 2X^2 - X - 2$ est annulateur de f et 0 n'en est pas racine donc $0 \notin \operatorname{Sp} f$. Cela suffit pour conclure si l'espace est de dimension finie. Sinon, on exploite
$$f \circ \left(\frac{1}{2}(f^2 + 2f - \mathrm{Id})\right) = \left(\frac{1}{2}(f^2 + 2f - \mathrm{Id})\right) \circ f = \mathrm{Id}_E$$
pour conclure.

Exercice 6 : [énoncé]

(a) Le polynôme caractéristique d'une matrice complexe possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

(b) $\det(I_n + \lambda T) = 1 \neq 0$ et donc T vérifie (P).

(c) $\operatorname{rg} T_r = r$.

(d) Les matrices A et B étant de même rang, elles sont équivalentes et donc il existe P, Q inversibles vérifiant $A = PBQ$. Puisqu'il existe une matrice M telle que $\det(M + \lambda A) \neq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\det(PMQ + \lambda B) = \det P \det(M + \lambda A) \det Q \neq 0$$

et donc B vérifie la propriété (P).

(e) Si une matrice est non inversible, elle est de même rang qu'une matrice T_r avec $r < n$ et comme cette dernière vérifie (P), on peut conclure qu'une matrice non inversible vérifie (P).
Inversement, si A est une matrice inversible alors pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$\det(M + \lambda A) = \det(A) \det(MA^{-1} + \lambda I_n)$$

et puisque la matrice MA^{-1} admet une valeur propre, il est impossible que $\det(M + \lambda A)$ soit non nul pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

(f) Si n est impair alors toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet une valeur propre (car le polynôme caractéristique réel est de degré impair). On peut alors conclure comme au dessus.
Si n est pair, la propriété précédente n'est plus vraie. Par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible et vérifie la propriété (P) avec $M = I_n$.

Exercice 7 : [énoncé]

(a) L'application Φ est évidemment linéaire, il reste à voir qu'elle est à valeurs dans $\mathbb{R}_4[X]$.
Pour un polynôme P de degré inférieur à 4, le polynôme $(X^2 - 1)P'(X) - (4X + 1)P(X)$ est de degré inférieur à 5 et, si a est le coefficient de X^4 dans P, le coefficient de X^5 dans $\Phi(P)$ est $4a - 4a = 0$. Par suite Φ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_4[X]$ et c'est donc un endomorphisme de cet espace.

(b) L'équation

$$y' = \left(\frac{5 - \lambda}{2(x-1)} + \frac{3 + \lambda}{2(x+1)}\right) y$$

est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de solution générale

$$y(x) = C\,|x - 1|^{(5-\lambda)/2}\,|x + 1|^{(3+\lambda)/2}$$

sur $I =]-\infty\,;-1[$, $]-1\,;1[$ ou $]1\,;+\infty[$.

(c) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Phi(P) = \lambda P$ si, et seulement si, $P'(X) = \frac{4X+(1+\lambda)}{X^2-1} P(X)$ *i.e.* si, et seulement si, la fonction polynomiale P est solution, par exemple sur $]1\,;+\infty[$, de l'équation différentielle

$$y' = \frac{4x + (1+\lambda)}{x^2 - 1} y.$$

Or moyennant une décomposition en éléments simples et passage à l'opposé de λ, cette équation est celle précédemment résolue et le problème est alors de déterminer pour quel paramètre $-\lambda$, la solution précédemment présentée est une fonction polynomiale de degré inférieur à 4. Les valeurs $3, 1, -1, -3, -5$ conviennent et ce sont donc des valeurs propres de Φ, de plus il ne peut y en avoir d'autres car $\dim \mathbb{R}_4[X] = 5$. Les vecteurs propres associés à ces valeurs propres λ sont les polynômes

$$C(X-1)^{\frac{5+\lambda}{2}}(X+1)^{\frac{3-\lambda}{2}} \text{ avec } C \neq 0.$$

Exercice 8 : [énoncé]

Le polynôme caractéristique $\chi_A(X) = (X-1)^3$ est scindé donc A est trigonalisable.
On a

$$E_1(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

et puisque

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on a $A = PTP^{-1}$ avec

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 : [énoncé]

(a) Il suffit de calculer le polynôme caractéristique de f à partir d'une représentation matricielle triangulaire par blocs relative à une base adaptée à l'espace non nul $E(f, a)$.

(b) La matrice A est de rang 1 donc 0 est valeur propre de A et par la formule du rang $\dim E(A,0) = 3$.
Le polynôme caractéristique de A étant de degré 4 et factorisable par X^3, c'est un polynôme scindé. La somme des valeurs propres de A comptées avec multiplicité vaut alors $\operatorname{tr} A = 10$.
Par suite 10 est valeur propre de A de multiplicité nécessairement 1.
Finalement A est diagonalisable semblable à $\operatorname{diag}(0,0,0,10)$.

Exercice 10 : [énoncé]

(a) L'application f est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$ car le reste R d'une division euclidienne par B vérifie

$$\deg R < \deg B \leq n.$$

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_n[X]$.
On a

$$AP_1 = BQ_1 + f(P_1) \text{ et } AP_2 = BQ_2 + f(P_2)$$

donc

$$A(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = B(\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2) + \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2)$$

avec

$$\deg\bigl(\lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2)\bigr) \leq \max\bigl\{\deg f(P_1), \deg f(P_2)\bigr\} < \deg B.$$

Par unicité d'une division euclidienne, on peut affirmer

$$f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2).$$

Puisque les valeurs prises par f sont $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, l'endomorphisme f ne peut être surjectif, ce n'est donc pas un isomorphisme.

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $f(P) = \lambda P$ alors c'est qu'il existe un polynôme Q tel que

$$AP = BQ + \lambda P.$$

Cas $\lambda = 0$.
On a $f(P) = 0$ si, et seulement si, le polynôme B divise le polynôme AP. Or A et B sont premiers entre eux, donc $f(P) = 0$ si, et seulement si, B divise P.
On en déduit que 0 est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est

$$E_0(f) = B.\operatorname{Vect}(1, X, \ldots, X^{n-\deg B})$$

c'est-à-dire l'espace des multiples de B inclus dans $\mathbb{R}_n[X]$.
Cas $\lambda \neq 0$. On obtient

$$(A-\lambda)P = BQ$$

et donc B divise le polynôme $(A-\lambda)P$. Or $\deg P < \deg B$ donc au moins une des racines de B n'est pas racine de P et est donc racine de $A - \lambda$. Ainsi $\lambda = A(x_k)$ avec x_k une des racines de B.
Inversement, soit x_k une racine de B,$\lambda = A(x_k)$ et

$$P_k = \prod_{j \neq k} (X - x_j) \neq 0.$$

On a $\deg P_k < \deg B$ et $B \mid (A - A(x_k))P_k$. On en déduit $f(P_k) = A(x_k)P_k$ et donc $A(x_k)$ est valeur propre de f et P_k en est un vecteur propre associé.

(c) La famille de P_k se comprend comme la famille d'interpolation de Lagrange en les x_k, elle constitue donc une base de $\mathbb{R}_{\deg B-1}[X]$. Puisque $\operatorname{Ker} f = E_0(f)$ est un supplémentaire de cet espace, l'endomorphisme est diagonalisable.

Exercice 11 : [énoncé]

Notons A la matrice étudiée.
Après calcul, son polynôme caractéristique est $\chi_A = (X-9)^3$.
Celui-ci est scindé et par conséquent la matrice A est trigonalisable.
Après résolution

$$E_9(A) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$\dim E_9(A) = 1$ et $X_1 = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$ est vecteur propre. Complétons ce vecteur en une base et considérons la matrice de passage associée

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 9 & -5 & -2 \\ 0 & 12 & -6 \\ 0 & 3/2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Considérons alors la sous matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 3/2 & 6 \end{pmatrix}$$

de polynôme caractéristique $(X-9)^2$ car $\chi_A(X) = (X-9)\chi_{A'}(X)$. Après résolution

$$E_9(A') = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1, 1/2 \end{pmatrix}.$$

Considérons la matrice de passage
$$P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$
On a
$$(P'^{-1})A'P' = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$
Enfin, pour
$$Q = P \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$
on obtient
$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 0 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12 : [énoncé]

(a) Il existe $x \neq 0_Z$, vérifiant
$$u(v(x)) = \lambda x.$$
On a alors
$$(v \circ u)(v(x)) = \lambda v(x).$$
Or $v(x) \neq 0_E$ car $u(v(x)) \neq 0_E$ et $u(0_E) = 0_E$.
On en déduit que λ est valeur propre de $v \circ u$.

(b) On observe
$$u \circ v(P) = P \text{ et } v \circ u(P) = P - P(0).$$
On en déduit
$$\operatorname{Ker}(u \circ v) = \{0\} \text{ et } \operatorname{Ker}(v \circ u) = \mathbb{R}_0[X].$$
En substance, la propriété précédente ne vaut pas pour $\lambda = 0$ en dimension quelconque.

(c) Cependant, en dimension finie, si 0 est valeur propre de $u \circ v$ alors $\det(u \circ v) = 0$ et donc $\det(v \circ u) = 0$ d'où 0 valeur propre de $v \circ u$.

Exercice 13 : [énoncé]

Par Sarrus
$$\chi_A = X(X^2 + (a^2 + b^2 + c^2)).$$

(a) Si $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ alors $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ et la matrice A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ car son polynôme caractéristique n'est pas scindé.
Si $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ alors A est la matrice nulle.

(b) Si $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ alors la matrice A diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ car possède trois valeurs propres distinctes à savoir 0 et $\pm i\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
Si $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ alors A est la matrice nulle.

(c) Puisque 0 est la seule valeur propre réelle de A et puisque B est inversible si, et seulement si, $-\lambda$ est valeur propre de A, on peut conclure que B est inversible pour tout $\lambda \neq 0$.

(d) Puisque le polynôme caractéristique est annulateur de A on a
$$A^3 + (a^2 + b^2 + c^2)A = O_3$$
donc
$$(B - \lambda I_3)^3 + (a^2 + b^2 + c^2)(B - \lambda I_3) = O_3.$$
Il suffit de développer et de réorganiser pour obtenir une expression du type
$$B(uB^2 + vB + wI_3) = I_3$$
et conclure
$$B^{-1} = uB^2 + vB + wI_3 = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3.$$

Exercice 14 : [énoncé]

(a) La linéarité est immédiate et sans peine $\deg(\phi(P)) \leq n$ pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

(b) On a
$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X - a)^k.$$
$$P'(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{(k-1)!}(X - a)^{k-1}$$
puis
$$\phi(P)(X) = \sum_{k=2}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{(k-1)!}(X - a)^k - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X - a)^k$$
donc
$$\phi(P)(X) = \sum_{k=3}^{n} (k-2)\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X - a)^k - 2P'(a)(X - a).$$
Ainsi
$$P \in \operatorname{Ker} \phi \iff P'(a) = 0 \text{ et } \forall 3 \leq k \leq n, P^{(k)}(a) = 0$$

et donc
$$\operatorname{Ker}\phi = \operatorname{Vect}(1,(X-a)^2).$$
Aussi
$$P \in \operatorname{Im}\phi \iff P(a) = P''(a) = 0$$
et donc
$$\operatorname{Im}\phi = (X-a)^3\mathbb{R}_{n-3}[X] + \operatorname{Vect}(X-a).$$

(c) On a
$$\phi(P) = \lambda P \iff \begin{cases} 0 = \lambda P(a) \\ -2P'(a) = \lambda P'(a) \\ (k-2)P^{(k)}(a) = \lambda P^{(k)}(a) \text{ pour } k \in \{2,\dots,n\}. \end{cases}$$
Cette équation possède une solution non nulle si, et seulement si, $\lambda = 0$, $\lambda = -2$ et $\lambda = k-2$ avec $k \in \{2,\dots,n\}$.
Ainsi
$$\operatorname{Sp}(\phi) = \{-2,0,1,\dots,n-2\}.$$
On a $E_{-2}(\phi) = \operatorname{Vect}(X-a)$, $E_0(\phi) = \operatorname{Ker}\phi$, $E_{k-2}(\phi) = \operatorname{Vect}(X-a)^k$ pour $k \in \{3,\dots,n\}$.
La somme des dimensions des sous-espaces propres vaut $\dim \mathbb{R}_n[X]$: l'endomorphisme est diagonalisable.
En fait, la base des $(X-a)^k$ est base de diagonalisation de l'endomorphisme ϕ.

Exercice 15 : [énoncé]
Puisque les entiers $\det A$ et $\det B$ sont premiers entre eux, on peut écrire par l'égalité de Bézout
$$u.\det A + v.\det B = 1 \text{ avec } u,v \in \mathbb{Z}.$$
On écrit $\chi_A(X) = XQ_A(X) + (-1)^n \det A$ et de même $\chi_B(X)$ (ces écritures sont possibles car le déterminant est au signe près le coefficient constant d'un polynôme caractéristique).
Posons alors
$$U = (-1)^{n-1}uQ_A(A) \text{ et } V = (-1)^{n-1}vQ_B(B).$$
Puisque χ_A et χ_B sont à coefficients entiers, on a $U,V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.
Puisque χ_A et χ_B sont annulateurs, on a
$$Q_A(A)A = (-1)^{n-1}\det A.\mathrm{I}_n \text{ et } Q_B(B)B = (-1)^{n-1}\det B.\mathrm{I}_n.$$
On observe alors
$$UA + VB = (u.\det A + v.\det B)\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n.$$
Remarquons que prendre
$$U = u^t\mathrm{Com}\,A \text{ et } V = v^t\mathrm{Com}\,B$$
était sans doute plus simple...
Pour
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
les matrices
$$U = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
conviennent...

Exercice 16 : [énoncé]
(a) La matrice A est symétrique réelle donc orthogonalement diagonalisable.
(b) $\operatorname{rg} A = 2$.
(c) Le polynôme caractéristique de A est scindé et unitaire.
Puisque $\dim\operatorname{Ker} A = 2$, 0 est valeur propre au moins double de A et donc
$$\chi_A = X^2(X-u_1)(X-u_2)$$
avec $u_1, u_2 \in \mathbb{C}$.
La matrice A est trigonalisable semblable à une matrice triangulaire où figurent sur la diagonale les valeurs $0,0,u_1$ et u_2. Par similitude, on a
$$\operatorname{tr} A = u_1 + u_2 \text{ et } \operatorname{tr} A^2 = u_1^2 + u_2^2$$
et donc
$$u_1 + u_2 = k \text{ et } u_1^2 + u_2^2 = k^2 + 6.$$
Enfin $u_1 \neq 0$ car sinon $u_2 = k$ et $u_2^2 = k^2 \neq k^2 + 6$. De même $u_2 \neq 0$.
(d) Si $u_1 = u_2$ alors $u_1 = u_2 = k/2$ et $k^2/2 = k^2 + 6$ donc $k = \pm \mathrm{i}2\sqrt{3}$.
La résolution du système
$$AX = \frac{k}{2}X$$
conduit à un espace de solution de dimension 1
$$\operatorname{Vect}{}^t(1,k/2,1,1).$$

(e) Finalement, la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ si, et seulement si, $k \neq \pm i2\sqrt{3}$.

Exercice 17 : [énoncé]
En ajoutant la troisième colonne à la première puis en retranchant la première ligne à la troisième

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^3 \begin{vmatrix} -\lambda-2 & 5+x & x \\ 0 & -2-x-\lambda & -x \\ 0 & -x & 3-x-\lambda \end{vmatrix}$$

ce qui donne

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda+2)\big(\lambda^2 + (2x-1)\lambda - x - 6\big).$$

Le facteur a pour discriminant

$$\Delta = (2x-1)^2 + 4x + 24 = 4x^2 + 25 > 0$$

et possède donc deux racines réelles distinctes. Si celles-ci diffèrent de -2, alors la matrice A possède trois valeurs propres distinctes et est donc diagonalisable.
Il est donc nécessaire que -2 soit racine de $\lambda^2 + (2x-1)\lambda - x - 6$ pour que la matrice A ne soit pas diagonalisable. C'est le cas si, et seulement si, $x = 0$ et alors

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -5 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\mathrm{rg}(A + 2I_3) = 2$$

et donc $\dim E_{-2}(A) = 1 < m_{-2}(A)$ ce qui entraîne que la matrice A n'est pas diagonalisable.
Finalement A n'est pas diagonalisable si, et seulement si, $x = 0$.

Exercice 18 : [énoncé]

(a) On obtient

$$\mathrm{Mat}_e f = \begin{pmatrix} 2 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) D'une part

$$f(e_1 + \dots + e_n) = (n+1)(e_1 + \dots + e_n)$$

et d'autre part, pour $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ avec $x_1 + \dots + x_n = 0$ on a

$$f(x) = x.$$

On en déduit que 1 et $n+1$ sont valeurs propres de f et puisque la valeur propre 1 est associé à un hyperplan, il ne peut y avoir d'autres valeurs propres.
En résumé $\mathrm{Sp}\, f = \{1, n+1\}$ et

$$E_1(f) = \{x \mid x_1 + \dots + x_n = 0\} \text{ et } E_{n+1}(f) = \mathrm{Vect}(e_1 + \dots + e_n).$$

(c) L'endomorphisme f est diagonalisable car

$$\dim E_1(f) + \dim E_{n+1}(f) = n.$$

(d) Par les valeurs propres

$$\det f = (n+1) \neq 0$$

et l'endomorphisme f est inversible...

Exercice 19 : [énoncé]
Les coefficients de ${}^t\mathrm{Com}(A)A$ s'interprètent comme des développements de déterminants selon une colonne...
Si A admet n valeurs propres distinctes, $\det A$ est le produit de ces valeurs propres.
Si $X \neq 0$ vérifie $AX = \lambda X$ alors $\lambda {}^t\mathrm{Com}(A)X = (\det A)X$.
Ainsi quand $\lambda \neq 0$, X est vecteur propre de ${}^t\mathrm{Com}(A)$ associé à la valeur propre $\frac{\det A}{\lambda}$.
Si A n'est pas inversible alors $\det A = 0$ donc ${}^t\mathrm{Com}(A)A = 0$ puis $\mathrm{Im}\, A \subset \mathrm{Ker}\, {}^t\mathrm{Com}(A)$.
Ainsi $\dim \mathrm{Ker}\, {}^t\mathrm{Com}(A) \geq n-1$. De plus $\mathrm{Com}(A) \neq 0$ car $\mathrm{rg}\, A = n-1$ (car les valeurs propres de A sont simples, en particulier 0). Par suite $\dim \mathrm{Ker}\, {}^t\mathrm{Com}(A) = n-1$
Sous réserve que $n \geq 2$, 0 est valeur propre de ${}^t\mathrm{Com}(A)$ et puisque $\dim \mathrm{Ker}\, {}^t\mathrm{Com}(A) = n-1$, il ne reste de place que pour une seule autre valeur propre.
Soit $X \in \mathrm{Ker}\, A \setminus \{0\}$,. On a ${}^t\mathrm{Com}(A + t\mathrm{I}_n)(A + t\mathrm{I}_n)X = \det(A + t\mathrm{I}_n)X$
Pour $t \neq 0$, on a

$${}^t\mathrm{Com}(A + t\mathrm{I}_n)X = \frac{\det(A + t\mathrm{I}_n)}{t} X.$$

Quand $t \to 0^+$, par continuité

$$^t\mathrm{Com}(A+t\mathrm{I}_n)X \to {}^t\mathrm{Com}(A)X.$$

En calculant le déterminant par diagonalisation, $\frac{\det(A+t\mathrm{I}_n)}{t} \to \mu$ avec μ le produit des valeurs propres non nulles de A.
Par unicité de la limite, on obtient $^t\mathrm{Com}(A)X = \mu X$.
Au final, $^t\mathrm{Com}(A)$ admet 2 valeurs propres : 0 et μ.

Exercice 20 : [énoncé]

(a) $\chi_A = X(X-1)(X-a)$.
Si $a \neq 0, 1$ alors A est diagonalisable.
Si $a = 0$ alors $\mathrm{rg}\, A = 2$ donc $\dim \mathrm{Ker}\, A = 1 < m_0(A)$ et la matrice A n'est pas diagonalisable.
Si $a = 1$ alors $\mathrm{rg}(A - \mathrm{I}) = 2$ et par le même argument qu'au dessus, A n'est pas diagonalisable.
On conclut

$$\Omega = \{0, 1\}.$$

(b) Cas $a = 0$

$$\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{Ker}(A-\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Par conséquent la matrice suivante convient

$$P = \begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}.$$

Cas $a = 1$

$$\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{Ker}(A-\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Par conséquent la matrice suivante convient

$$P = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

Exercice 21 : [énoncé]

(a) Soit λ une valeur propre de φ.
Il existe $v \in \mathcal{L}(E) \setminus \{\tilde{0}\}$ tel que $u \circ v = \lambda v$.
Soit alors $x \in E$ tel que $v(x) \neq 0$ (ce qui est possible puisque $v \neq \tilde{0}$)
Puisque $u\big(v(x)\big) = \lambda v(x)$, on peut affirmer que λ est valeur propre de u.
Inversement soit λ une valeur propre de u et $x \neq 0$ un vecteur propre associé.
Considérons v l'endomorphisme de E déterminé par

$$\forall 1 \leq i \leq n, v(e_i) = x.$$

L'endomorphisme v est bien déterminé puisqu'on a ici fixé l'image d'une base.
Puisque a $u \circ v = \lambda v$ (car cette égalité vaut pour les vecteurs d'une base), on obtient $\varphi(v) = \lambda v$ avec $v \neq \tilde{0}$. Ainsi λ est aussi valeur propre de φ.
b et c) Sachant $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$,

$$UE_{i,j} = \sum_{k,\ell=1}^{n} u_{k,\ell}E_{k,\ell}E_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} u_{k,i}E_{k,j}.$$

Dans la base $\big((E_{1,1}, \dots, E_{n,1}), (E_{1,2}, \dots, E_{n,2}), \dots, (E_{1,n}, \dots, E_{n,n})\big)$, la matrice de φ est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux chacun égaux à U.

Exercice 22 : [énoncé]

(a) L'image d'un endomorphisme est toujours stable par celui-ci… En effet

$$\forall x \in \mathrm{Im}\, u, u(x) \in \mathrm{Im}\, u.$$

(b) Si $x \in \mathrm{Im}\, u$ alors il existe $a \in E$ tel que $x = u(a)$. On a alors

$$u^2(x) = u^3(a) = -u(a) = -x.$$

(c) En vertu de ce qui précède, $v^2 = -\mathrm{Id}$ donc v est un isomorphisme et $v^{-1} = -v$.

(d) D'une part

$$\det(v^{-1}) = \frac{1}{\det v}$$

et d'autre part

$$\det(-v) = (-1)^{\dim \mathrm{Im}\, u} \det v$$

donc

$$(-1)^{\dim \mathrm{Im}\, u} > 0.$$

On en déduit que la dimension de l'image de u est paire.

Exercice 23 : [énoncé]
Posons
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
On obtient aisément $\operatorname{Sp} A = \{0, 2\}$

(a) Soit M une matrice solution de l'équation $M^2 + M = A$.
Si λ est valeur propre de M alors $\lambda^2 + \lambda$ est valeur propre de A et donc
$$\lambda^2 + \lambda = 0 \text{ ou } \lambda^2 + \lambda = 2.$$
On en déduit
$$\lambda \in \{0, -1, 1, -2\}.$$

(b) Posons
$$P(X) = X(X+1)(X-1)(X+2) = (X^2 + X)(X^2 + X - 2).$$
On a
$$P(M) = A(A - 2I_2) = O_2.$$
Puisque M annule un polynôme scindé à racines simple, la matrice M est diagonalisable.
Notons λ et μ ses deux valeurs propres. Puisque $\lambda^2 + \lambda$ et $\mu^2 + \mu$ correspondent aux deux valeurs propres de A, on a, quitte à échanger λ et μ :
$$\lambda \in \{0, -1\} \text{ et } \mu \in \{1, -2\}.$$
Il y a alors quatre situations possibles :
Cas $\lambda = 0$ et $\mu = 1$
On a $M(M - I_2) = O_2$ donc $M^2 - M = O_2$. Combinée à la relation $M^2 + M = A$, on obtient
$$M = \frac{1}{2}A.$$
Cas $\lambda = 0$ et $\mu = -2$
Un raisonnement analogue donne
$$M = -A.$$
Cas $\lambda = -1$
On obtient
$$M = A - I_2 \text{ et } M = -I_2 - \frac{1}{2}A.$$
Inversement, on vérifie par le calcul que ces matrices sont solutions.

Exercice 24 : [énoncé]

(a) On obtient
$$A^tA = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)I_4$$
et donc $(\det A)^2 = \left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)^4$.
D'autre part, pour b, c, d fixés, $a \mapsto \det A$ est une fonction polynomiale unitaire de degré 4 donc
$$\det A = a^4 + \alpha(b,c,d)a^3 + \beta(b,c,d)a^2 + \gamma(b,c,d)a + \delta(b,c,d).$$
La valeur connue de $(\det A)^2$ permet alors de déterminer $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et d'affirmer
$$\det(A) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2.$$
Si $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$ alors $\operatorname{rg}(A) = 4$.
Si $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$ alors $\operatorname{rg}(A) \leq 3$. Or $a^2 + b^2 \neq 0$ donc la sous matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ est de rang 2 et donc $\operatorname{rg}(A) \geq 2$.
On observe de plus que
$$C_3 = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2}C_1 + \frac{bc - ad}{a^2 + b^2}C_2$$
et
$$C_4 = \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}C_1 + \frac{bd + ac}{a^2 + b^2}C_2$$
donc $\operatorname{rg}(A) = 2$.

(b) Par la formule obtenue ci-dessus, $\chi_A = ((a - X)^2 + b^2 + c^2 + d^2)$ et donc $\chi_A = ((a - X)^2 + \alpha^2)^2$.
Les valeurs propres de A sont $a + \alpha$ et $a - \alpha$.
Par l'étude qui précède $\operatorname{rg}(A - (a + \alpha)\mathrm{Id}) = 2$ et $\operatorname{rg}(A - (a - \alpha)\mathrm{Id}) = 2$ donc
$$\dim E_{a+\alpha}(A) = \dim E_{a-\alpha}(A) = 2$$
et par suite A est diagonalisable.

Exercice 25 : [énoncé]

(a) $\operatorname{rg}(A) = 0$ si $a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$ et $\operatorname{rg}(A) = 2$ sinon.

(b) La somme des valeurs propres est nulle.

(c) En développant le déterminant selon la dernière colonne puis en développant les mineurs obtenus selon leur k-ieme colonne, on obtient

$$\chi_A = X^{n-2}(X^2 - (a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2)).$$

Si $a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2 \neq 0$ alors A admet deux valeurs propres opposées non nulles et 0 pour valeur propre d'espace propre de dimension $n-2$ donc A est diagonalisable.
Si $a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2 = 0$ alors 0 est la seule valeur propre de A et A est diagonalisable si, et seulement si, $A = 0$ *i.e.* $a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$.

Exercice 26 : [énoncé]
Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et $x \in E_\lambda(u)$ non nul. On a

$$v^3(x) = u^3(x) = \lambda^3 x.$$

Or v est diagonalisable donc, en notant $\mu_1, \dots, \mu_p$ les valeurs propres de v, on a la décomposition en somme directe

$$E = \bigoplus_{j=1}^{p} E_{\mu_j}(v).$$

On peut alors écrire $x = \sum_{j=1}^p x_j$ avec $x_j \in E_{\mu_j}(u)$. L'égalité $v^3(x) = \lambda^3 x$ donne

$$\sum_{j=1}^{p} \mu_j^3 x_j = \sum_{j=1}^{p} \lambda^3 x_j.$$

Les espaces $E_{\mu_j}(v)$ étant en somme directe, on peut identifier les termes de ces sommes

$$\mu_j^3 x_j = \lambda^3 x_j.$$

Si $x_j \neq 0_E$, on obtient $\mu_j = \lambda$ et donc $\mu_j x_j = \lambda x_j$.
Si $x_j = 0_E$, l'identité $\mu_j x_j = \lambda x_j$ reste vraie.
On en déduit

$$v(x) = \lambda x = u(x).$$

Ainsi les endomorphismes v et u coïncident sur $E_\lambda(u)$. Or, l'endomorphisme u étant diagonalisable, E est la somme des sous-espaces propres de u. Les endomorphismes v et u coïncident donc sur E.

Exercice 27 : [énoncé]

(a) Poser le produit par blocs.

(b) Si A et B sont inversibles alors $(A * B)(A^{-1} * B^{-1}) = I_n * I_n = I_{n^2}$ donc $A * B$ est inversible.
Si A n'est pas inversible alors il existe $A' \neq 0$ tel que $AA' = O_n$ et alors $(A * B)(A' * I_n) = 0$ avec $A' * I_n \neq 0$ donc $A * B$ n'est pas inversible.
Un raisonnement semblable s'applique dans le cas où B n'est pas inversible.

(c) Il existe P, Q matrices inversibles telles que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ et } Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} \mu_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$$

avec λ_i et μ_i les valeurs propres de A et B.
On observe alors que $(P^{-1} * Q^{-1})(A * B)(P * Q) = (P^{-1}AP) * (Q^{-1}BQ)$ est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $\lambda_i \mu_j$. Les valeurs propres de $A * B$ sont les produits des valeurs propres de A et B.

(d) On note que $P^{-1} * Q^{-1} = (P * Q)^{-1}$ de sorte que $A * B$ est semblable à la matrice triangulaire précédente et donc

$$\chi_{A*B} = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} (X - \lambda_i \mu_j).$$

On en déduit

$$\det(A * B) = (\det A \det B)^n$$

et la relation

$$\mathrm{tr}(A * B) = \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)$$

est immédiate par un calcul direct.

Exercice 28 : [énoncé]

(a) La matrice A annule le polynôme $X^p - 1$ qui est scindé simple dans $\mathbb{C}[X]$ donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

(b) Les valeurs propres α et β sont racines du polynôme annulateur donc $\alpha^p = \beta^p = 1$. En particulier $|\alpha| = |\beta| = 1$.
Puisque $\det A = \alpha\beta = 1$, on a $\alpha = 1/\beta = \overline{\beta}/|\beta|^2 = \overline{\beta}$.
Enfin, $\mathrm{tr} A = 2\mathrm{Re}(\alpha) \in \mathbb{Z}$ et $2\mathrm{Re}(\alpha) \in [-2\,;2]$ car $|\alpha| \leq 1$ donc $\left|\mathrm{Re}(\alpha)\right| \in \{0, 1/2, 1\}$.

(c) Selon la valeur de $\mathrm{Re}(\alpha)$ et sachant $|\alpha| = 1$, les valeurs possibles de α sont

$$-1, j, i, -j^2, 1$$

et leurs conjuguées.
Dans tous les cas, on vérifie $\alpha^{12} = 1$ et on a aussi $\beta^{12} = 1$.
Puisque A est semblable à la matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\alpha, \beta)$ et que celle-ci vérifie $D^{12} = \mathrm{I}_2$, on a $A^{12} = \mathrm{I}_2$.

(d) On vérifie aisément que G est un sous-groupe du groupe $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}), \times)$ et puisque

$$G = \left\{\mathrm{I}_2, A, A^2, \dots, A^{11}\right\}$$

G est un groupe monogène fini.

Exercice 29 : [énoncé]

(a) On sait déjà $\mathrm{Ker}\, u \subset \mathrm{Ker}\, u^2$. On a $P = XQ$ avec $Q(0) \neq 0$. Pour $x \in \mathrm{Ker}\, u^2$, on a $u^2(x) = 0$ et $Q(u)(u(x)) = 0$ donc $u(x) \in \mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Ker}\, Q(u)$ puis $u(x) = 0$ car $Q(0) \neq 0$. On en déduit $\mathrm{Ker}\, u^2 \subset \mathrm{Ker}\, u$ puis l'égalité.
L'inclusion $\mathrm{Im}\, u^2 \subset \mathrm{Im}\, u$ est entendue.
Inversement, soit $x \in \mathrm{Im}\, u$. On peut écrire $x = u(a)$ pour un certain $a \in E$.
Or $P(u)(a) = 0$ et l'on peut écrire P sous la forme

$$P(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X \text{ avec } a_1 \neq 0$$

donc

$$a_1 u(a) \in \mathrm{Im}\, u^2$$

puis $x \in \mathrm{Im}\, u^2$.
Ainsi $\mathrm{Im}\, u^2 = \mathrm{Im}\, u$

(b) Pour $x \in \mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Im}\, u$, il existe $a \in E$, $x = u(a)$ et $a \in \mathrm{Ker}\, u^2 = \mathrm{Ker}\, u$ donc $x = 0$.
Pour $x \in E$, $u(x) \in \mathrm{Im}\, u = \mathrm{Im}\, u^2$ et on peut écrire $u(x) = u^2(a)$ pour un certain $a \in E$. On a alors $x = y + z$ avec $y = u(a) \in \mathrm{Im}\, u$ et $z = x - y$ où l'on vérifie $z \in \mathrm{Ker}\, u$.

Exercice 30 : [énoncé]

(a) On vérifie par le biais des relations proposées

$$M^2 - (\lambda + \mu)M + \lambda\mu \mathrm{I}_p = O_p.$$

On en déduit

$$M\left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda\mu}\mathrm{I}_p - \frac{1}{\lambda\mu}M\right) = \mathrm{I}_p.$$

Par le théorème d'inversibilité, M est inversible et

$$M^{-1} = \frac{\lambda + \mu}{\lambda\mu}\mathrm{I}_p - \frac{1}{\lambda\mu}M.$$

(b) $M - \mu\mathrm{I}_p = (\lambda - \mu)A$ et $M - \lambda\mathrm{I}_p = (\mu - \lambda)B$.
Or

$$(M - \mu\mathrm{I}_p)(M - \lambda\mathrm{I}_p) = M^2 - (\lambda + \mu)M + \lambda\mu\mathrm{I}_p = \mathrm{O}_p$$

donc $(\lambda - \mu)^2 AB = \mathrm{O}_p$ puis $AB = \mathrm{O}_p$ car $\lambda \neq \mu$.
Puisque $A = A \times \mathrm{I}_p = A^2 + AB = A^2$, A est un projecteur.
Il en est de même pour B.

(c) M annule le polynôme scindé simple

$$X^2 - (\lambda + \mu)X + \lambda\mu = (X - \lambda)(X - \mu).$$

La matrice M est donc diagonalisable et $\mathrm{Sp}(M) \subset \{\lambda, \mu\}$.
Il se peut que cette inclusion soit stricte, c'est le cas si $M = \lambda\mathrm{I}_p$ avec $A = \mathrm{I}_p$ et $B = \mathrm{O}_p$.
En tout cas, le spectre n'est pas vide car M est diagonalisable.

Exercice 31 : [énoncé]
On observe

$$f \circ f(M) = \mathrm{tr}(A)\big(\mathrm{tr}(A)M - \mathrm{tr}(M)A\big) - \mathrm{tr}\big(\mathrm{tr}(A)M - \mathrm{tr}(M)A\big)A = \mathrm{tr}(A)f(M).$$

Ainsi

$$f \circ f = \mathrm{tr}(A).f.$$

Si $\mathrm{tr}\, A \neq 0$ alors l'endomorphisme f est diagonalisable car annule le polynôme $X^2 - \mathrm{tr}(A)X$ qui est scindé à racines simples.
Si $\mathrm{tr}\, A = 0$ alors les valeurs propres de f figurent parmi les racines du polynôme X^2. Seule 0 peut donc être valeur propre de f et par conséquent f est diagonalisable si, et seulement si, $f = \tilde{0}$. Ceci correspond au cas $A = O_n$.
Déterminons maintenant les sous-espaces propres de f.
Le cas $A = O_n$ est immédiat. Supposons-le désormais exclu.
Si $\mathrm{tr}(M) = 0$ alors

$$f(M) = \mathrm{tr}(A)M.$$

Pour M matrice de l'hyperplan des matrices de trace nulle, $f(M) = \lambda M$ avec $\lambda = \operatorname{tr}(A)$. On en déduit que $\operatorname{tr}(A)$ est valeur propre de M et le sous-espace propre associé est de dimension au moins $n^2 - 1$.
Dans le cas où $\operatorname{tr}(A) = 0$, l'endomorphisme n'est pas diagonalisable et la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre $\operatorname{tr}(A)$ est exactement $n^2 - 1$.
Dans le cas où $\operatorname{tr}(A) \neq 0$, l'endomorphisme f est diagonalisable et donc la dimension des sous-espaces propres des valeurs propres 0 et $\operatorname{tr}(A)$ sont respectivement 1 et $n^2 - 1$.

Exercice 32 : [énoncé]

(a) $p + q = \mathrm{Id}$, $p \circ q = 0$ car $(u - a\mathrm{Id})(u - b\mathrm{Id}) = 0$,
$p = p \circ \mathrm{Id} = p \circ p + p \circ q = p \circ p$, aussi $q \circ q = q$ via $q \circ p = 0$.

(b) $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker}(u - a\mathrm{Id})$, $\operatorname{Ker} q = \operatorname{Ker}(u - b\mathrm{Id})$ et $(u - a\mathrm{Id})(u - b\mathrm{Id}) = 0$ donne par le lemme de décomposition des noyaux, $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Ker} q$.

(c) u est diagonalisable car annule un polynôme scindé simple,
$\operatorname{Sp}(u) = \{a, b\}$, $E_a(u) = \operatorname{Ker} p$, $E_b(u) = \operatorname{Ker} q$ à moins que $u = a\mathrm{Id}$ ou $u = b\mathrm{Id}$.

Exercice 33 : [énoncé]

(a) L'application f est évidemment bien définie de E dans E et est aussi linéaire car

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda x + \mu y + k(\lambda(x \,|\, a) + \mu(x \,|\, a))a = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

L'application f est donc endomorphisme de E. De plus

$$(f(x) \,|\, y) = (x \,|\, y) + k(x \,|\, a)(y \,|\, a) = (x \,|\, f(y)).$$

Ainsi l'endomorphisme f est symétrique (et par conséquent diagonalisable dans une base orthonormée).

(b) Si $f(x) = 0_E$ alors $x + k(x \,|\, a)a = 0_E$ et donc $x \in \operatorname{Vect} a$.
Or $f(a) = (1 + k)a \neq 0_E$ donc $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ et par suite f est un automorphisme de E.

(c) On a $f(a) = (1 + k)a$ donc $1 + k \in \operatorname{Sp} f$ et

$$\operatorname{Vect} a \subset E_{1+k}(f).$$

Pour $x \in \operatorname{Vect}(a)^\perp$, $f(x) = x$ donc $1 \in \operatorname{Sp} f$ et

$$(\operatorname{Vect} a)^\perp \subset E_1(f).$$

On peut alors conclure que si $k \neq 0$ alors

$$\operatorname{Sp} f = \{1, 1 + k\}, E_{1+k}(f) = \operatorname{Vect} a \text{ et } E_1(f) = (\operatorname{Vect} a)^\perp$$

car la somme des dimensions des sous-espaces propres de f ne peut excéder n.
Dans le cas $k = 0$, on a $f = \mathrm{Id}$.

Exercice 34 : [énoncé]

(a) Existence :
L'endomorphisme u est symétrique donc diagonalisable en base orthonormée.
Soit $\mathcal{B}$ une telle base et

$$D = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Considérons alors v l'endomorphisme de E déterminé par

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \sqrt[p]{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt[p]{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme v est symétrique car représenté par une matrice symétrique en base orthonormée.
L'endomorphisme v vérifie par construction $v^p = u$: il est solution.
Unicité :
Soit v un endomorphisme symétrique solution. L'endomorphisme v commute avec u, les sous-espaces propres de u sont donc stables par v. Soit $E_\lambda(u)$ un tel sous-espace propre. L'endomorphisme induit par v sur ce sous-espace propre est diagonalisable, considérons une base $\mathcal{B}_\lambda$ de diagonalisation. La matrice de l'endomorphisme induit par v dans cette base $\mathcal{B}_\lambda$ est diagonale et sa puissance p -ième est égale à $\lambda\mathrm{Id}$ car $v^p = u$. On en déduit que l'endomorphisme induit par v sur l'espace $E_\lambda(u)$ n'est autre que $\sqrt[p]{\lambda}\mathrm{Id}$. Ceci détermine entièrement v sur chaque sous-espace propre de u. Or ces derniers forment une décomposition en somme directe de E, l'endomorphisme v est donc entièrement déterminé.

(b) Si p est pair et que u possède une valeur propre négative, l'endomorphisme v n'existe pas.

(c) Si p est pair et u positif alors on peut à nouveau établir l'existence mais l'unicité n'est plus vraie car on peut changer les signes des valeurs propres de v tout en conservant la propriété $v^p = u$.

(d) On retrouve existence et unicité en adaptant la démonstration qui précède.

Exercice 35 : [énoncé]

(a) On a
$$(x \mid f(x)) = -(x \mid f(x))$$
donc x et $f(x)$ sont orthogonaux et ce, quel que soit x dans E.

(b) Pour tout $x, y \in E$
$$(s(x) \mid y) = -(f(x) \mid f(y)) = (x \mid s(y))$$
et donc l'endomorphisme s est symétrique.

(c) Ici $x \in V_a \setminus \{0_E\}$ donc $s(x) = ax$ puis
$$(s(x) \mid x) = (ax \mid x) = a \|x\|^2 .$$
On a aussi comme vu ci-dessus
$$(s(x) \mid x) = -(f(x) \mid f(x)) = -\|f(x)\|^2.$$
Puisque $x \neq 0_E$ et $f(x) \neq 0_E$ (car f est bijective), on en déduit $a < 0$.

(d) Puisque $f(x) \in F$ et $f(f(x)) = s(x) = ax \in F$, on peut assurer que F est stable par f.
Pour $y \in F^\perp$, on a
$$(f(y) \mid x) = -(y \mid f(x)) = 0 \text{ et } (f(y) \mid f(x)) = -(y \mid s(x)) = -a(y \mid x) = 0$$
et donc $f(y) \in F^\perp$. L'espace $F^\perp$ est donc aussi stable par f.
Posons
$$u = \frac{x}{\|x\|} \text{ et } v = \frac{1}{b} f(u) \text{ avec } b = \sqrt{-a}.$$
La famille (u, v) est une base orthonormée de F notamment car
$$\|v\|^2 = \frac{1}{b^2}(f(u) \mid f(u)) = -\frac{1}{b^2}(u \mid s(u)) = -\frac{a}{b^2} \|u\|^2 = 1.$$
Puisque
$$f(u) = bv \text{ et } f(v) = \frac{1}{b} s(x) = \frac{a}{b} x = -bx$$
la matrice de l'endomorphisme induit par f sur F dans la base orthonormée (u, v) est
$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

(e) Par les outils qui précèdent, on parvient par récurrence, à décomposer l'espace E en somme directe orthogonale de plans stables par f, l'espace E est donc de dimension paire.

Exercice 36 : [énoncé]

(a) Pour tout vecteur x de E,
$$(x \mid f(\lambda y + \mu z)) = -(f(x) \mid \lambda y + \mu z) = -\lambda(f(x) \mid y) - \mu(f(x) \mid z).$$
Ainsi
$$(x \mid f(\lambda y + \mu z)) = (x \mid \lambda f(y) + \mu f(z)).$$
Or ceci valant pour tout x, on peut affirmer
$$f(\lambda y + \mu z) = \lambda f(y) + \mu f(z)$$
(par exemple, parce que le vecteur différence est orthogonal à tout vecteur de E et donc nul)
L'application f est donc linéaire.
Notons $A = (a_{i,j})$ la matrice de f dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.
Puisque $a_{i,j}$ correspond à la i-ème coordonnée de l'image du j-ème vecteur, on a
$$a_{i,j} = (e_i \mid f(e_j))$$
car la base canonique est orthonormée. L'antisymétrie de f donne alors
$$a_{i,j} = -a_{j,i}$$
et la matrice A est donc antisymétrique.

(b) Les endomorphismes antisymétriques sont, par représentation matricielle, en correspondance avec les matrices antisymétriques. L'ensemble des matrices antisymétriques est un sous-espace vectoriel de dimension $n(n-1)/2$, donc, par l'isomorphisme de représentation matricielle, l'ensemble des endomorphismes antisymétriques est un sous-espace vectoriel de dimension
$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Exercice 37 : [énoncé]
Posons
$$R_1 = \mathrm{Rot}_{k,\pi/2} \text{ et } R_2 = \mathrm{Rot}_{\cos\theta i + \sin\theta j, \pi} .$$

La composée de deux rotations est une rotation, donc $R_1 \circ R_2$ est une rotation.
Puisque les vecteurs k est $u = \cos\theta i + \sin\theta j$ sont orthogonaux

$$R_2(k) = -k$$

et donc

$$R_1 \circ R_2(k) = -k.$$

On en déduit que $R_1 \circ R_2$ est un retournement dont l'axe est orthogonal à k *i.e.* inclus dans $\mathrm{Vect}(i, j)$.
Puisque

$$R_2(u) = u \text{ et } R_1(u) = -\sin\theta i + \cos\theta j$$

on a

$$R_2 \circ R_1(u) = -\sin\theta i + \cos\theta j$$

et donc

$$u + R_2 \circ R_1(u) = (\cos\theta - \sin\theta)i + (\cos\theta + \sin\theta)j \neq 0$$

dirige l'axe du retournement.

Exercice 38 : [énoncé]

(a) Soient $x \in \operatorname{Ker} v$ et $y = v(a) \in \operatorname{Im} v$. On a$u(x) = x$ et $y = u(a) - a$ donc

$$(x \,|\, y) = (u(x) \,|\, u(a)) - (x \,|\, a) = 0$$

car u conserve le produit scalaire. Ainsi $\operatorname{Ker} v \subset (\operatorname{Im} v)^\perp$ puis l'égalité par égalité des dimensions.

(b) Pour $x \in E$, on peut écrire $x = a + b$ avec $a \in \operatorname{Ker} v$ et $b \in (\operatorname{Ker} v)^\perp = \operatorname{Im} v$. On a $u(a) = a$ et donc $u^k(a) = a$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'autre part, il existe c tel que $b = v(c) = u(c) - c$ de sorte que $u^k(b) = u^{k+1}(c) - u^k(c)$. Par télescopage,

$$u_n(x) = a + \frac{1}{n}u^n(c) - \frac{1}{n}c.$$

Puisque u conserve la norme :

$$\left\|\frac{1}{n}u^n(c)\right\| = \frac{1}{n}\|c\| \to 0$$

et donc

$$u_n(x) \to a.$$

Exercice 39 : [énoncé]

(a) Soit $x \in \operatorname{Ker} v$ et $y = v(a) \in \operatorname{Im} v$. On a $u(x) = x$ et $y = u(a) - a$ donc

$$(x \,|\, y) = (u(x) \,|\, u(a)) - (x \,|\, a) = 0.$$

Car u conserve le produit scalaire.
On en déduit $\operatorname{Ker} v \subset (\operatorname{Im} v)^\perp$ puis l'égalité par un argument de dimension.

(b) Par ce qui précède, on peut affirmer

$$E = \operatorname{Ker} v \oplus^\perp \operatorname{Im} v$$

et cette supplémentarité assure l'existence de x_1 et y.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$u^k(x_1) = x_1 \text{ et } u^k(v(y)) = u^{k+1}(y) - u^k(y).$$

En sommant et après télescopage, on obtient

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u^k(x) = x_1 + \frac{1}{N}(u^N(y) - y).$$

(c) Avec les notations qui précèdent $p(x) = x_1$. Ainsi

$$\left\|p(x) - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u^k(x)\right\| = \frac{\left\|u^N(y) - y\right\|}{N} \leq \frac{\left\|u^N(y)\right\| + \|y\|}{N} = \frac{2}{N}\|y\| \to 0.$$

Exercice 40 : [énoncé]

(a) L'application est évidemment linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$

(b) Si $f_{a'}$ conserve la norme alors en particulier $\left\|f_{a'}(u)\right\| = \|u\|$ *i.e.* $|1 + a'|\,\|u\| = \|u\|$.
La seule valeur a' non nulle est alors $a' = -2$.
Inversement f_{-2} se reconnaît comme la réflexion d'hyperplan $\mathrm{Vect}(u)^\perp$ et conserve donc la norme.

(c) On vérifie aisément par le calcul

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^3, \langle f_a(x), y\rangle = \langle x, f_a(y)\rangle\,.$$

On en déduit que f_a est un endomorphisme symétrique.
Pour $x \in \mathrm{Vect}(u)$, on a $f_a(x) = (1 + a)x$ et pour $x \in \mathrm{Vect}(u)^\perp$, $f_a(x) = x$.
On en déduit que $1 + a$ et 1 sont valeurs propres de u avec

$$E_{1+a}(f_a) = \mathrm{Vect}(u) \text{ et } E_1(f_a) = \mathrm{Vect}(u)^\perp.$$

Il n'y a pas d'autres valeurs propres (plus assez de place dans $\mathbb{R}^3$ ...).

Exercice 41 : [énoncé]
La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable.
Après calculs
$$\chi_A = -(X+3)(X-3)^2.$$
Le sous-espace propre associé à la valeur propre 3 est le plan d'équation
$x+y+z=0$.
Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle étant deux à deux orthogonaux, on peut affirmer que le sous-espace propre associé à la valeur propre -3 est la droite $x=y=z$.
On en déduit une base orthonormée de diagonalisation puis une matrice P convenable
$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Exercice 42 : [énoncé]

(a) La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable.

(b) Après calculs
$$\chi_A = (X-3)(X+3)^2.$$
Le sous-espace propre associé à la valeur propre -3 est le plan d'équation
$$x-2y+z=0.$$
Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle étant deux à deux orthogonaux, on peut affirmer que le sous-espace propre associé à la valeur propre 3 est la droite
$$\mathrm{Vect}(1,-2,1).$$
On en déduit une base orthonormée de diagonalisation puis une matrice orthogonale P convenable
$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$
pour
$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$