Exercice 1 [03880] [Correction]
Soient a, b, c des réels strictement positifs.
À quelle condition existe-t-il des complexes t, u, v de somme nulle vérifiant

$$t\bar{t} = a^2, u\bar{u} = b^2 \text{ et } v\bar{v} = c^2.$$

Exercice 2 [02781] [Correction]
Étudier la convergence de la suite $\left(\lfloor a^n \rfloor^{1/n}\right)$, où $a > 0$.

Exercice 3 [02783] [Correction]
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs. On pose, pour tout $n > 0$,

$$y_n = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \cdots + \sqrt{x_n}}}.$$

(a) Ici $x_n = a$ pour tout n, où $a > 0$. Étudier la convergence de (y_n).
(b) Même question dans le cas où $x_n = ab^{2^n}$ pour tout n, avec $b > 0$.
(c) Montrer que (y_n) converge si, et seulement si, la suite $(x_n^{2^{-n}})$ est bornée.

Exercice 4 [02645] [Correction]
Calculer

$$\sum_{k=1}^{4} \cos^2 \frac{k\pi}{9}.$$

Exercice 5 [00501] [Correction]
Soit f une fonction croissante de $[0\,;1]$ dans $[0\,;1]$.
(a) Montrer que s'il existe $x \in [0\,;1]$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $f^k(x) = x$ alors x est un point fixe pour f.
(b) Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 6 [02820] [Correction]
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I et a, b, c trois points distincts de I.
Montrer

$$\exists d \in I, \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{2} f''(d).$$

Exercice 7 [02785] [Correction]
Étudier les limites de $\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)\right)^{1/n}$ et de $\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)\right)^{1/n}$.

Exercice 8 [02786] [Correction]
Calculer les limites de

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \text{ et } \sum_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{1}{\sqrt{k+n}}$$

lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 9 [02816] [Correction]
Énoncer et établir la formule de Taylor avec reste intégrale.

Exercice 10 [02787] [Correction]
Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, soit $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k}$.
Soit x_n le plus petit réel strictement positif en lequel f_n atteint un maximum local. Calculer $\lim f_n(x_n)$.

Exercice 11 [02817] [Correction]
(a) Montrer, pour tout $x \in \left]0\,;\pi/2\right[$, l'existence de $\theta_x \in \left]0\,;1\right[$ tel que

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6}\cos(x\theta_x).$$

(b) Étudier la limite de θ_x quand x tend vers 0 par valeur supérieure.

Exercice 12 [03198] [Correction]
Déterminer un équivalent quand $n \to +\infty$ de

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+2k)^3}.$$

Exercice 13 [02788] [Correction]

Donner un développement asymptotique de $\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k!\right)_{n\in\mathbb{N}}$ à la précision $o(n^{-3})$.

Exercice 14 [02656] [Correction]

Soient des entiers $a > 1$ et $n > 0$.
Montrer que si $a^n + 1$ est premier alors n est une puissance de 2.

Exercice 15 [04951] [Correction]

Soit P un polynôme réel unitaire de degré $n \in \mathbb{N}$. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, pour tout z complexe

$$\left|\mathrm{Im}(z)\right|^n \leq \left|P(z)\right|.$$

Exercice 16 [04978] [Correction]

Soit P un polynôme complexe non constant. Existe-t-il $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $P - \lambda$ soit scindé à racines simples ?

Exercice 17 [02674] [Correction]

Trouver les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.

Exercice 18 [02669] [Correction]

(a) Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé sur $\mathbb{R}$, montrer que P' est scindé ou constant sur $\mathbb{R}$.

(b) Si $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, montrer que $X^{10} + aX^9 + bX^8 + cX^7 + X + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19 [02668] [Correction]

Déterminer les P de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$(X + 4)P(X) = XP(X + 1).$$

Exercice 20 [02670] [Correction]

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(\cos\theta) = \cos n\theta$ pour tout θ réel. On le note T_n.

(a) Lier T_{n-1}, T_n et T_{n+1}.

(b) Donner une équation différentielle vérifiée par T_n.

(c) Calculer $T_n^{(k)}(1)$ et $T_n^{(k)}(-1)$.

Exercice 21 [02673] [Correction]

On cherche les polynômes P non nuls tels que

$$P(X^2) = P(X - 1)P(X).$$

(a) Montrer que toute racine d'un tel P est de module 1.

(b) Déterminer les polynômes P.

Exercice 22 [02671] [Correction]

Quels sont les couples $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ vérifiant $P^2 + (1 - X^2)Q^2 = 1$?

Exercice 23 [02375] [Correction]

Trouver les $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$P(X^2) = P(X)P(X + 1).$$

Exercice 24 [02672] [Correction]

Déterminer les polynômes P de $\mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ vérifiant

$$P(X^2) = P(X - 1)P(X).$$

Exercice 25 [02663] [Correction]

(a) Montrer que $a = \cos(\pi/9)$ est racine d'un polynôme de degré trois à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

(b) Justifier que le nombre a est irrationnel.

Exercice 26 [02676] [Correction]
Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle

$$\frac{X^{n-1}}{X^n - 1}.$$

Exercice 27 [02665] [Correction]
Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, qu'il existe un unique $P_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que $P_n(0) = 0$ et $P_n(X+1) - P_n(X) = X^n$.

Exercice 28 [04984] [Correction]
Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n et $\Phi\colon \mathcal{L}(E) \to E^n$ l'application définie par

$$\Phi(u) = \bigl(u(e_1), \dots, u(e_n)\bigr).$$

À quelle condition sur la famille $(e_1, \dots, e_n)$ l'application Φ est-elle un isomorphisme d'espaces vectoriels ?

Exercice 29 [02682] [Correction]
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie. Montrer

$$\bigl|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)\bigr| \le \mathrm{rg}(f+g) \le \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g).$$

Exercice 30 [02685] [Correction]
Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels non nuls deux à deux distincts.
On note F_j l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$F_j(P) = \int_0^{a_j} P.$$

Montrer que $(F_0, F_1, \dots, F_n)$ est une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$.

Exercice 31 [02242] [Correction]
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies respectives n et p avec $n > p$.
On considère $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ vérifiant

$$u \circ v = \mathrm{Id}_F.$$

(a) Montrer que $v \circ u$ est un projecteur.
(b) Déterminer son rang, son image et son noyau.

Exercice 32 [02684] [Correction]
Soit E et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, de dimensions finies ou non. Montrer que $(E \times F)^*$ et $E^* \times F^*$ sont isomorphes.

Exercice 33 [02680] [Correction]
Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On se donne $f \in \mathcal{L}(E, F)$, une famille $(E_i)_{1 \le i \le n}$ de sous-espaces vectoriels de E et une famille $(F_j)_{1 \le j \le p}$ de sous-espaces vectoriels de F.

(a) Montrer

$$f\left(\sum_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n f(E_i).$$

(b) Montrer que si f est injective et si la somme des E_i est directe alors la somme des $f(E_i)$ est directe.
(c) Montrer

$$f^{-1}\left(\sum_{j=1}^p F_j\right) \supset \sum_{j=1}^p f^{-1}(F_j).$$

Montrer que cette inclusion peut être stricte. Donner une condition suffisante pour qu'il y ait égalité.

Exercice 34 [04952] [Correction]
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(a) Exprimer le rang de

$$M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}.$$

(b) Calculer l'inverse de M lorsque cela est possible.

Exercice 35 [04974] [Correction]
Soient $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ deux familles libres d'éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Établir que la famille $\bigl(X_i{}^tY_j\bigr)_{1 \le i,j \le n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de matrices de rang 1.

Exercice 36 [02689] [Correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des complexes distincts, $A = \operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et

$$C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AM = MA\}.$$

Montrer que $(A^k)_{0 \leq k \leq n-1}$ est une base de $C(A)$.

Exercice 37 [02679] [Correction]
Soient $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que $f^2 = g^2 = 0$ et $f \circ g = g \circ f$. Calculer $f \circ g$.

Exercice 38 [02687] [Correction]
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où B est nilpotente et commute avec A. Montrer que A et $A + B$ sont simultanément inversibles.

Exercice 39 [02688] [Correction]
Soit ω une racine primitive n-ième de 1. On pose

$$F_\omega(P) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^k) X^k$$

pour tout $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.
Montrer que F_ω est un automorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et exprimer son inverse.

Exercice 40 [03976] [Correction]
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$A + A^{-1} = \mathrm{I}_n.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $A^k + A^{-k}$.

Exercice 41 [02651] [Correction]

(a) Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $\sum_{g \in G} \operatorname{tr} g = 0$. Montrer que $\sum_{g \in G} g = 0$.
(b) Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par les éléments de G. Montrer qu'il existe un supplémentaire de V dans $\mathbb{R}^n$ stable par tous les éléments de G.

Exercice 42 [02686] [Correction]

(a) Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(AB) = f(BA)$$

montrer que f est proportionnelle à la trace.
(b) Soit g un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$g(AB) = g(BA)$$

pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $g(I_n) = I_n$. Montrer que g conserve la trace.

Exercice 43 [04965] [Correction]
Soient $n \geq 2$ et $a_1, \dots, a_n$ des réels tous non nuls. Calculer le déterminant de

$$M = \left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}\right)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 44 [04970] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer $\det(A^2 + \mathrm{I}_n) \geq 0$.

Exercice 45 [04981] [Correction]
Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de fonctions de I vers $\mathbb{R}$.
Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre si, et seulement si, il existe $x_1, \dots, x_n$ dans I tels que le déterminant de la matrice $\big(f_i(x_j)\big)_{1 \leq i,j \leq n}$ soit non nul.

Exercice 46 [02693] [Correction]
Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 + x & & (x) \\ & \ddots & \\ (x) & & a_n + x \end{vmatrix}$$

où $x, a_1, \dots, a_n$ réels.

Exercice 47 [02694] [Correction]
Soient $A,B,C,D\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $AC=CA$. Montrer que

$$\det\begin{pmatrix}A & C\\ B & D\end{pmatrix}=\det(DA-BC).$$

Exercice 48 [02659] [Correction]
Soient des matrices $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $\det A$ et $\det B$ sont premiers entre eux.
Montrer l'existence de $U,V\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que

$$UA+VB=I_n.$$

Exercice 49 [02695] [Correction]
Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (avec $n\geq 2$) vérifiant pour tout $X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\det(A+X)=\det A+\det X.$$

Montrer que $\det A=0$ puis $A=0$.

Exercice 50 [03288] [Correction]
Soient A,B,C,D des matrices carrées d'ordre n, réelles et commutant deux à deux. Montrer que la matrice

$$M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$$

est inversible si, et seulement si, $AD-BC$ l'est.

Exercice 51 [04958] [Correction]
Soient $n\in\mathbb{N}$, $a_0,a_1,\dots,a_n$ des réels deux à deux distincts et $E=\mathbb{R}_n[X]$.

(a) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant, pour tous $P,Q\in E$,

$$(P\,|\,Q)=\sum_{k=0}^{n}P(a_k)Q(a_k).$$

(b) Déterminer une base orthonormale de E pour le produit scalaire précédent.

(c) Exprimer la distance du polynôme X^n à l'espace

$$H=\bigl\{P\in E\bigm| P(a_0)+\dots+P(a_n)=0\bigr\}.$$

Exercice 52 [04969] [Correction]
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E.
Montrer que F et G sont supplémentaires orthogonaux si, et seulement si,

$$\|x\|^2=\bigl(d(x,F)\bigr)^2+\bigl(d(x,G)\bigr)^2\quad\text{pour tout } x\in E.$$

Exercice 53 [02734] [Correction]
Calculer le minimum de

$$\int_0^1\bigl(t^3-at^2-bt-c\bigr)^2\,\mathrm{d}t$$

pour a,b,c parcourant $\mathbb{R}$.

Exercice 54 [02736] [Correction]
On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire rendant orthonormée la base canonique, dont on note $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Si $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\|M-aI_n-bJ\|$.

Exercice 55 [03764] [Correction]
Soit $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer

$$\inf_{M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}\Biggl(\sum_{1\leq i,j\leq n}(a_{i,j}-m_{i,j})^2\Biggr).$$

Exercice 56 [02743] [Correction]
Soit $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice réelle orthogonale. Montrer que

$$\Biggl|\sum_{1\leq i,j\leq n}a_{i,j}\Biggr|\leq n.$$

Exercice 57 [02745] [Correction]
Soient $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, $\sigma = ab+bc+ca$, $S=a+b+c$ et la matrice

$$M=\begin{pmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix}.$$

(a) Montrer
$$M\in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}) \iff \sigma = 0 \text{ et } S\in\{-1,1\}.$$

(b) Montrer
$$M\in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \iff \sigma = 0 \text{ et } S=1.$$

(c) Montrer que M est dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ si, et seulement si, il existe $k\in[0\,;4/27]$ tel que a,b et c sont les racines du polynôme X^3-X^2+k.

Exercice 58 [03883] [Correction]
Soit $A=(a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ une matrice réelle vérifiant

$$\forall i\in\{1,\dots,n\}, a_{i,i}\ge 1 \text{ et } \sum_{i=1}^n\sum_{j=1,j\ne i}^n a_{i,j}^2<1.$$

(a) Montrer
$$\forall X\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}, {}^tXAX>0.$$

(b) En déduire que la matrice A est inversible.

Exercice 59 [03926] [Correction]
Soient A et B dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $(A+2B)/3$ appartienne à $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Que dire de A et B ?

Exercice 60 [02800] [Correction]

(a) Soient $(u_n)_{n\ge 0}$ et $(v_n)_{n\ge 0}$ deux suites réelles, $\lambda\in\mathbb{R}$. On suppose :

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n\ge 0, \sum|v_n| \text{ converge et } \frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{\lambda}{n}+v_n.$$

Montrer que $(n^\lambda u_n)$ converge.

(b) Nature de la série de terme général

$$\frac{n^n}{n!\mathrm{e}^n}\ ?.$$

Exercice 61 [02799] [Correction]
Soient $\alpha>0$ et (u_n) une suite de réels strictement positifs vérifiant

$$u_n^{1/n}=1-\frac{1}{n^\alpha}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

La série de terme général u_n converge-t-elle ?

Exercice 62 [02784] [Correction]
Soit $u_0\in\,]0\,;2\pi[$ puis
$$\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\sin(u_n/2).$$

(a) Montrer que (u_n) tend vers 0.

(b) Montrer que $\lim(2^n u_n)=A$ pour un certain $A>0$.

(c) Trouver un équivalent simple de (u_n-A2^{-n}).

Exercice 63 [02809] [Correction]
On pose
$$a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{3n}.$$

(a) Montrer que la suite (a_n) converge et trouver sa limite λ.

(b) Trouver un équivalent simple de $a_n-\lambda$.

Exercice 64 [02792] [Correction]
Nature de la série de terme général

$$\frac{n^\alpha}{\sum_{k=2}^n \ln^2 k}$$

où α est réel.

Exercice 65 [02789] [Correction]
Nature de la série de terme général

$$\frac{\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^{3/2}-\lfloor n^{3/2}\rfloor+n}.$$

Exercice 66 [02795] [Correction]
Soit $\alpha\in\mathbb{R}^*$. On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*$

$$u_n=\frac{1}{\sum_{k=1}^n k^\alpha}.$$

Nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 67 [02798] [Correction]
Soient $\alpha\in\mathbb{R}$ et $f\in\mathcal{C}^0([0\,;1],\mathbb{R})$ telle que $f(0)\neq 0$. Étudier la convergence de la série de terme général

$$u_n=\frac{1}{n^\alpha}\int_0^{1/n} f(t^n)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 68 [03750] [Correction]
Soit (u_n) une suite réelle strictement positive et convergeant vers 0. On pose

$$v_n=\frac{u_{n+1}}{S_n}\text{ avec }S_n=\sum_{k=0}^n u_k.$$

Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

Exercice 69 [03119] [Correction]
Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ dans $(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n\in\mathbb{N}, v_n=\frac{1}{1+n^2u_n}.$$

Montrer que si la série de terme général v_n converge alors la série de terme général u_n diverge.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
En multipliant les trois complexes t, u, v par $e^{i\theta}$, on peut former un nouveau triplet solution à partir d'un premier. Sans perte de généralité, on peut donc supposer $t \in \mathbb{R}_+$ auquel cas $t = a$.
En écrivant $u = x + iy$ et $v = x' + iy'$ avec $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$, la condition $t + u + v = 0$ donne

$$\begin{cases} x' = -(a + x) \\ y' = -y \end{cases}$$

et les deux conditions $u\overline{u} = b^2$ et $v\overline{v} = c^2$ équivalent alors au système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = b^2 \\ (x + a)^2 + y^2 = c^2. \end{cases}$$

Ce système possède une solution si, et seulement si, le cercle de centre O et de rayon b coupe le cercle de centre $\Omega(-a, 0)$ et de rayon c. Ces deux cercles se coupent si, et seulement si,

$$|b - c| \leq a \leq b + c.$$

On peut alors conclure que le triplet (t, u, v) existe si, et seulement si, chacun des paramètres a, b, c est inférieur à la somme des deux autres.

Exercice 2 : [énoncé]
Si $a \in \left]0\,;1\right[$, la suite est constante égale à 0.
Si $a = 1$, la suite est constante égale à 1.
Si $a > 1$ alors $a^n - 1 < \lfloor a^n \rfloor \leq a^n$ donne $\left(a^n - 1\right)^{1/n} < \lfloor a^n \rfloor^{1/n} \leq a$ et donc, par encadrement, la suite converge vers a.

Exercice 3 : [énoncé]
Notons que la suite (y_n) est croissante, elle est donc convergente si, et seulement si, elle est majorée.

(a) Ici $y_{n+1} = \sqrt{a + y_n}$. Soit ℓ la racine positive de l'équation $\ell^2 - \ell - a = 0$ *i.e.*

$$\ell = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$

On remarque que $y_1 = \sqrt{a} \leq \ell$ et on montre par récurrence $y_n \leq \ell$. La suite (y_n) est croissante et majorée donc convergente.

(b) On observe que la nouvelle suite (y_n) est désormais égale à b fois la précédente, elle est donc convergente.

(c) Si (y_n) converge vers ℓ alors $x_n^{2^{-n}} \leq y_n \leq \ell$ donc $(x_n^{2^{-n}})$ est bornée.
Si $(x_n^{2^{-n}})$ est bornée par une certain M alors $x_n \leq M^{2^n}$, la suite (y_n) définie par (x_n) est alors inférieure à celle obtenue par (M^{2^n}), cette dernière étant convergente, la suite (y_n) converge.

Exercice 4 : [énoncé]
En linéarisant et en faisant quelques transformations angulaires de simplification

$$\sum_{k=1}^{4} \cos^2 \frac{k\pi}{9} = \frac{7}{4}.$$

Exercice 5 : [énoncé]

(a) Si $f(x) > x$ alors par croissance de f,

$$f^k(x) \geq f^{k-1}(x) \geq \ldots \geq f(x) > x$$

ce qui est absurde. Une étude analogue contredit $f(x) < x$.

(b) On a $f(0) \geq 0$ et $f(1) \leq 1$. Par dichotomie, on peut construire deux suites (a_n) et (b_n) vérifiant

$$f(a_n) \geq a_n \text{ et } f(b_n) \leq b_n.$$

On initie les suites (a_n) et (b_n) en posant $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.
Une fois les termes a_n et b_n déterminés, on introduit $m = (a_n + b_n)/2$.
Si $f(m) \geq m$ on pose $a_{n+1} = m$ et $b_{n+1} = b_n$.
Sinon, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m$.
Les suites (a_n) et (b_n) ainsi déterminées sont adjacentes et convergent donc vers une limite commune c. Puisque $a_n \leq c \leq b_n$, on a par croissance

$$f(a_n) \leq f(c) \leq f(b_n)$$

et donc

$$a_n \leq f(c) \leq b_n.$$

Or (a_n) et (b_n) convergent vers c donc par encadrement

$$f(c) = c.$$

On peut aussi décrire un point fixe de f en considérant

$$c = \sup\{x \in [0\,;1], f(x) \geq x\}.$$

Les deux questions de cet oral ne semblent pas être liées.

Exercice 6 : [énoncé]
Considérons

$$g\colon x\mapsto (x-b)f(a)+(a-x)f(b)+(b-a)f(x)-\frac{1}{2}(a-b)(b-x)(x-a)K$$

où la constante K est choisie de sorte que $g(c)=0$ (ce qui est possible).
La fonction g s'annule en a, en b et en c donc par le théorème de Rolle, il existe $d\in I$ tel que $g''(d)=0$ ce qui résout le problème posé.

Exercice 7 : [énoncé]

$$\ln\left(\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{1/n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\to\int_0^1\ln(1+t)\,\mathrm{d}t=2\ln 2-1$$

donc

$$\left(\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{1/n}\to\frac{4}{\mathrm{e}}.$$

Pour $k\in\{1,\dots,n\}$, $\frac{k}{n^2}\leq\frac{1}{n}$ donc

$$1\leq\left(\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)^{1/n}\leq 1+\frac{1}{n}$$

puis

$$\left(\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)^{1/n}\to 1.$$

Exercice 8 : [énoncé]
Pour $x\geq 0$, $x-\frac{1}{6}x^3\leq\sin x\leq x$ donc $|\sin x-x|\leq Mx^3$ avec $M=1/6$.
On a alors

$$\left|\sin\frac{k}{n^2}-\frac{k}{n^2}\right|\leq M.\frac{k^3}{n^6}\leq\frac{M}{n^3}$$

donc

$$\left|\sum_{k=1}^n\sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)-\sum_{k=1}^n\sin\left(\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n^2}\right|\leq\frac{M}{n^2}\to 0.$$

Or

$$\sum_{k=1}^n\sin\left(\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n^2}\to\int_0^1 t\sin t\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\sum_{k=1}^n\sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\to\sin 1-\cos 1.$$

Pour $x\geq 0$, $x-\frac{1}{6}x^3\leq\sin x\leq x$ donne aussi $\left|\sin^2 x-x^2\right|\leq M'x^4$ avec $M'=1/3$.
Ainsi

$$\left|\sum_{k=1}^n\sin^2\frac{1}{\sqrt{k+n}}-\sum_{k=1}^n\frac{1}{k+n}\right|\leq M'\sum_{k=1}^n\frac{1}{(k+n)^2}\leq\frac{M'}{n}\to 0.$$

Or

$$\sum_{k=1}^n\frac{1}{k+n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{1+k/n}\to\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\ln 2$$

donc

$$\sum_{k=1}^n\sin^2\frac{1}{\sqrt{k+n}}\to\ln 2.$$

Exercice 9 : [énoncé]
C'est du cours !

Exercice 10 : [énoncé]
On a

$$f_n'(x)=\sum_{k=1}^n\cos kx=\cos\frac{(n+1)x}{2}\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

donc

$$x_n=\frac{\pi}{n+1}.$$

Par suite

$$f_n(x_n)=\sum_{k=1}^n\frac{\sin\frac{k\pi}{n+1}}{k}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^n\frac{\sin\frac{k\pi}{n+1}}{\frac{k}{n+1}}.$$

Or la fonction $t\mapsto\sin(\pi t)/t$ peut être prolongée en une fonction continue sur $[0\,;1]$ donc par somme de Riemann

$$f_n(x_n)\to\int_0^1\frac{\sin(\pi t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 11 : [énoncé]
Par l'égalité de Taylor-Lagrange (hors-programme) :

$$\forall x \in \left]0\,;\pi/2\right[, \exists \xi \in \left]0\,;x\right[, \sin x = x - \frac{1}{6}x^3\cos(\xi).$$

Le réel $\theta_x = \xi/x$ convient alors
À défaut de connaître l'égalité de Taylor-Lagrange, par l'égalité de Taylor avec reste-intégrale

$$\sin x = x - \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!}\cos t\,\mathrm{d}t.$$

Or pour $t \in [0\,;x]$, on a

$$\cos x \le \cos t \le 1$$

avec inégalité stricte pour $t \in \left]0\,;x\right[$ donc

$$\frac{x^3}{6}\cos x < \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!}\cos t\,\mathrm{d}t < \frac{x^3}{6}.$$

Ainsi

$$\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!}\cos t\,\mathrm{d}t = \lambda\frac{x^3}{6} \text{ avec } \cos x < \lambda < 1 = \cos 0.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, on peut écrire

$$\lambda = \cos(x\theta_x) \text{ avec } \theta_x \in \left]0\,;1\right[.$$

Quand $x \to 0$, $x\theta_x \to 0$ donc

$$\cos(x\theta_x) = 1 - \frac{1}{2}x^2\theta_x^2 + \mathrm{o}(x^2)$$

puis

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^5\theta_x^2 + \mathrm{o}(x^5)$$

or

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \mathrm{o}(x^5)$$

donc $\theta_x^2 \to 1/10$ puis

$$\theta_x \to \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Exercice 12 : [énoncé]
On peut écrire

$$u_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+2k/n)^3} = \frac{1}{n^2}S_n$$

avec

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+2k/n)^3}.$$

Par les sommes de Riemann, on a

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+2t)^3} = \left[-\frac{1}{4(1+2t)^2}\right]_0^1 = \frac{2}{9}.$$

On en déduit

$$u_n \sim \frac{2}{9n^2}.$$

Exercice 13 : [énoncé]
On a

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^n k! = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) + \sum_{k=0}^{n-5}\frac{k!}{n!}.$$

Or

$$\sum_{k=0}^{n-5}\frac{k!}{n!} \le (n-4)\frac{(n-5)!}{n!} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

donc

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^n k! = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 14 : [énoncé]
On peut écrire

$$n = 2^k(2p+1).$$

On a alors

$$a^n + 1 = b^{2p+1} - (-1)^{2p+1} = \big(b - (-1)\big)\sum_{k=0}^{2p} b^k(-1)^{2p-k} = (b+1)c$$

avec $b = a^{2^k}$.
On en déduit que $b+1 \mid a^n+1$, or a^n+1 est supposé premier et $b+1>1$ donc $b+1 = a^n+1$ puis $n = 2^k$.

Exercice 15 : [énoncé]

($\Longrightarrow$) Supposons P scindé sur $\mathbb{R}$. Celui-ci possède exactement n racines réelles comptées avec multiplicité $a_1, \dots, a_n$. Sachant que le polynôme est unitaire, on peut écrire

$$P = (X - a_1) \dots (X - a_n).$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a alors

$$\left|P(z)\right| = \prod_{k=1}^{n} |z - a_k| \geq \left|\mathrm{Im}(z)\right|^n$$

car

$$|z - a_k| = \sqrt{\left(\mathrm{Re}(z) - a_k\right)^2 + \left(\mathrm{Im}(z)\right)^2} \geq \left|\mathrm{Im}(z)\right|.$$

($\Longleftarrow$) Supposons $\left|\mathrm{Im}(z)\right|^n \leq \left|P(z)\right|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. On sait que le polynôme P est assurément scindé sur $\mathbb{C}$. Or, si z est une racine de P, la propriété précédente donne $\left|\mathrm{Im}(z)\right|^n \leq 0$ et donc $z \in \mathbb{R}$. Ainsi, les racines de P sont toutes réelles et le polynôme P est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16 : [énoncé]

Quel que soit le complexe λ, le polynôme $P - \lambda$ est non nul donc scindé sur $\mathbb{C}$. La difficulté est ici de trouver λ pour lequel les racines de $P - \lambda$ soient simples.

> *Les racines multiples d'un polynôme sont les racines qui sont communes à son polynôme dérivé.*

Notons $z_1, \dots, z_p$ les racines de $P' = (P - \lambda)'$. Pour λ différent de chacune des valeurs $P(z_1), \dots, P(z_n)$, le polynôme $P - \lambda$ ne s'annule pas en les $z_1, \dots, z_p$ et ses racines sont donc simples.

Exercice 17 : [énoncé]

Parmi les polynômes constants, seuls le polynôme nul est solution.
Si $\deg P \geq 1$ alors, pour vérifier l'équation, il est nécessaire que $\deg P = 2$. On peut alors écrire P sous la forme $aX^2 + bX + c$. Parmi, les polynômes de cette forme, ceux solutions sont ceux obtenus pour $b = 0$ et $c = -a$. Conclusion, les polynômes solutions sont les $a(X^2 - 1)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 18 : [énoncé]

(a) Si P est degré 1 alors P' est constant. Si P est de degré $n \geq 2$, par application du théorème de Rolle, il figure une racine de P' entre deux racines consécutives de P. De surcroît, si a est racine de multiplicité $\alpha \in \mathbb{N}^*$ de P, a est aussi racine de multiplicité $\alpha - 1$ de P'. Par suite, P' en admet $n - 1$ racines comptées avec multiplicité et est donc scindé.

(b) 0 est racine multiple du polynôme dérivé à l'ordre 2. Si le polynôme était scindé, l'étude qui précède permet d'observer que 0 est racine du polynôme. Ce n'est pas le cas.

Exercice 19 : [énoncé]

Soit P solution. $X \mid (X+4)P(X)$ donc $X \mid P$ puis $(X+1) \mid P(X+1)$ donc $(X+1) \mid (X+4)P(X)$ puis $X + 1 \mid P$ etc.
Ainsi on obtient que $P(X) = X(X+1)(X+2)(X+3)Q(X)$ avec $Q(X+1) = Q(X)$ donc Q constant.
La réciproque est immédiate.

Exercice 20 : [énoncé]

On a

$$\cos n\theta = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{in\theta}) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{i}^k \cos^{n-k}\theta \sin^k\theta\right)$$

donc

$$\cos n\theta = \sum_{\ell=0}^{E(n/2)} (-1)^\ell \binom{n}{2\ell} \cos^{n-2\ell}\theta (1 - \cos^2\theta)^\ell$$

est un polynôme en $\cos\theta$. Cela assure l'existence de T_n, l'unicité provenant de ce que deux polynômes coïncidant en un nombre infini de points sont nécessairement égaux.

(a)

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta$$

donne

$$T_{n+1} - 2XT_n + T_{n-1} = 0.$$

(b) On a

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$$

donc en dérivant

$$-\sin\theta T_n'(\cos\theta) = -n\sin n\theta$$

et

$$\sin^2\theta T_n''(\cos\theta) - \cos\theta T_n'(\cos\theta) = -n^2\cos n\theta.$$

On en déduit par coïncidence de polynômes sur $[-1\,;1]$ que

$$(1-X^2)T_n''-XT_n'+n^2T_n=0.$$

(c) En dérivant cette relation à l'ordre k :

$$(1-X^2)T_n^{(k+2)}-2kXT_n^{(k+1)}-k(k-1)T_n^{(k)}-XT_n^{(k+1)}-kT_n^{(k)}+n^2T_n^{(k)}=0 \; (1)\,.$$

En évaluant (1) en 1 :

$$(2k+1)T_n^{(k+1)}(1)=(n^2-k^2)T_n^{(k)}(1).$$

Comme $T_n^{(0)}(1)=1$, on obtient

$$T_n^{(k)}(1)=\begin{cases}\frac{(n!)^2 2^k k!}{(n-k)!(n+k)!(2k+1)!} & \text{si } k\leq n\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

En évaluant (1) en -1 :

$$(2k+1)T_n^{(k+1)}(1)=-(n^2-k^2)T_n^{(k)}(1).$$

Comme $T_n^{(0)}(-1)=(-1)^n$, on obtient

$$T_n^{(k)}(-1)=(-1)^{n-k}T_n^{(k)}(1).$$

Exercice 21 : [énoncé]

(a) Si a est une racine de P non nulle alors $a^2,a^4,\dots$ sont racines de P. Or $P\neq 0$ donc P n'admet qu'un nombre fini de racines. La série précédente est donc redondante et par suite a est une racine de l'unité et donc $|a|=1$.
Si $a=0$ est racine de P alors $1=(0+1)^2$ aussi puis $4=(1+1)^2$ l'est encore,… et finalement P admet une infinité de racines ce qui est exclu.
Finalement les racines de P sont toutes de module 1.

(b) Soit $a\in\mathbb{C}$ une racine de P. $a+1$ est racine de $P(X-1)$ donc $(a+1)^2$ est aussi racine de P. Il s'ensuit que $|a|=|a+1|=1$. En résolvant cette double équation on obtient $a=j$ ou j^2 et donc P est de la forme

$$P(X)=\lambda(X-j)^\alpha(X-j^2)^\beta.$$

Le nombre j est racine de multiplicité α de P donc j est racine de multiplicité au moins α de

$$P(X^2)=(X^2-j)^\alpha(X^2-j^2)^\beta$$

et par suite $\beta\geq\alpha$. Un raisonnement symétrique permet de conclure $\beta=\alpha$ et le polynôme$P$ est de la forme

$$\lambda(X^2+X+1)^\alpha.$$

Un tel P est solution du problème posé si, et seulement si,

$$\lambda^2(X^4+X^2+1)^\alpha=\lambda((X-1)^2+(X-1)+1)^\alpha(X^2+X+1)^\alpha$$

égalité qui est vérifiée si, et seulement si, $\lambda=1$.
Finalement les solutions du problème posé sont les polynômes
$P=(X^2+X+1)^\alpha$ avec $\alpha\in\mathbb{N}$.

Exercice 22 : [énoncé]

Soit (P,Q) un couple solution.
Si le polynôme P est constant alors nécessairement $Q=0$ et $P=\pm 1$. Vérification immédiate.
Sinon, posons $n=\deg P\in\mathbb{N}^*$. La relation $P^2+(1-X^2)Q^2=1$ impose que P et Q sont premiers entre eux et en dérivant on obtient
$PP'-XQ^2+(1-X^2)QQ'=0$. Par suite $Q\mid PP'$ puis $Q\mid P'$. Par des considérations de degré et de coefficient dominant on peut affirmer $P'=\pm nQ$.
Quitte à considérer $-Q$, supposons $P'=nQ$ et la relation
$PP'-XQ^2+(1-X^2)QQ'=0$ donne $(1-X^2)P''-XP'+n^2P=0$.
Résolvons l'équation différentielle $(1-t^2)y''-ty'+n^2y=0$ sur $[-1\,;1]$.
Par le changement de variable $t=\cos\theta$, on obtient pour solution générale
$y(t)=\lambda\cos(n\arccos t)+\mu\sin(n\arccos t)$.
La fonction $t\mapsto\cos(n\arccos t)$ est polynômiale (cf. polynôme de Tchebychev), cela définit le polynôme T_n.
La fonction $t\mapsto\sin(n\arccos t)$ ne l'est pas car de dérivée $\frac{-n}{\sqrt{1-t^2}}\cos(n\arccos t)$ non polynômiale.
Par suite $P=\lambda T_n$ et $Q=\pm\frac{1}{n}T_n'$.
La relation $P^2+(1-X^2)Q^2=1$ évaluée en 1 impose $\lambda^2=1$ et finalement $(P,Q)=(\pm T_n,\pm\frac{1}{n}T_n')$.
Vérification : pour le couple $(P,Q)=(\pm T_n,\pm\frac{1}{n}T_n')$, le polynôme $P^2+(1-X^2)Q^2$ est constant car de polynôme dérivé nul et puisqu'il prend la valeur 1 en 1, on peut affirmer $P^2+(1-X^2)Q^2=1$.

Exercice 23 : [énoncé]

Le polynôme nul est solution. Soit P une solution non nulle.
Si a est racine de P alors a^2 l'est aussi puis $a^4,a^8,\dots$.

Or les racines de P sont en nombre fini donc les éléments a^{2^n} $(n \in \mathbb{N})$ sont redondants. On en déduit que $a = 0$ ou a est une racine de l'unité.
De plus, si a est racine de P alors $(a-1)$ est aussi racine de $P(X+1)$ donc $(a-1)^2$ est racine de P. On en déduit que $a-1=0$ ou $a-1$ est racine de l'unité.
Si $a \neq 0, 1$ alors $|a| = |a-1| = 1$ d'où l'on tire $a = -j$ ou $-j^2$.
Au final, les racines possibles de P sont $0, 1, -j$ et $-j^2$.
Le polynôme P s'écrit donc

$$P(X) = \lambda X^\alpha (X-1)^\beta (X+j)^\gamma (X+j^2)^\delta$$

avec $\lambda \neq 0$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$.
En injectant cette expression dans l'équation

$$P(X^2) = P(X)P(X+1)$$

on obtient

$$\lambda^2 = \lambda, \alpha = \beta \text{ et } \gamma = \delta = 0.$$

On conclut

$$P(X) = \big(X(X-1)\big)^\alpha.$$

Exercice 24 : [énoncé]
Supposons P solution.
Le coefficient dominant λ de P vérifie $\lambda = \lambda^2$ et donc est égal à 1.
Si a est racine de P alors a^2 et $(a+1)^2$ le sont aussi.
Si $a \neq 0$ est une racine de P alors $a^2, a^4, \dots$ sont racines de P. Or $P \neq 0$ et donc P n'admet qu'un nombre fini de racines. La suite précédente est donc redondante et par conséquent a est une racine de l'unité. En particulier $|a| = 1$.
Si $a = 0$ est racine de P alors $1 = (0+1)^2$ aussi puis $4 = (1+1)^2$ l'est encore,... et finalement P admet une infinité de racines ce qui est exclu.
Finalement les racines de P sont toutes de module 1.
Or si a est racine de P, $(a+1)^2$ l'étant encore et donc

$$|a| = |a+1| = 1.$$

Les seuls complexes vérifiant cette identité sont j et j^2 (ce sont les points intersection du cercle unité et du cercle de centre -1 et de rayon 1 du plan complexe). On en déduit

$$P = (X^2 + X + 1)^n$$

car P est un polynôme réel et que donc ses racines complexes conjuguées sont d'égales multiplicités.
Inversement, on vérifie par le calcul qu'un tel polynôme est bien solution.

Exercice 25 : [énoncé]

(a) On a

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

donc

$$4a^3 - 3a = \cos(\pi/3) = 1/2.$$

Ainsi a est racine du polynôme $8X^3 - 6X - 1$.

(b) Soit x une racine rationnelle de ce polynôme. On peut écrire $x = p/q$ avec $p \wedge q = 1$. On a alors

$$8p^3 - 6pq^2 - q^3 = 0.$$

On en déduit $p \mid 8p^3 - 6pq^2 = q^3$. Or p et q sont premiers entre eux et donc par le théorème de Gauss $p = \pm 1$. De plus $q^2 \mid 6pq^2 + q^3 = 8p^3$ et, par un argument analogue au précédent, $q^2 \mid 8$. Ainsi $q = \pm 1$ ou $q = \pm 2$.
Or $1, -1, 1/2$ et $-1/2$ ne sont pas les valeurs de $\cos(\pi/9)$. On peut donc conclure que a est irrationnel.

Exercice 26 : [énoncé]
Les pôles de cette fraction rationnelles sont simples et sont les racines n-ième de l'unité $\omega_0, \dots, \omega_{n-1}$. Sachant que la fraction rationnelle est de degré strictement négatif, sa partie entière est nulle et sa décomposition en éléments simples cherchée s'écrit

$$\frac{X^{n-1}}{X^n - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k}{X - \omega_k}.$$

La partie polaire

$$\frac{\lambda}{X-a}$$

d'un pôle simple a d'une fraction rationnelle P/Q s'obtient par la relation

$$\lambda = \frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

En effet, si $Q(X) = (X-a)R(X)$ on a $Q'(a) = R(a)$
Ici

$$\alpha_k = \left(\frac{X^{n-1}}{(X^n-1)'}\right)(\omega_k) = \frac{1}{n}$$

et donc

$$\frac{X^{n-1}}{X^n - 1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{X - \omega_k}.$$

Exercice 27 : [énoncé]
Considérons l'application $\varphi\colon \mathbb{R}_{n+1}[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $\varphi(P) = P(X+1) - P(X)$. L'application φ est bien définie, linéaire et de noyau $\mathbb{R}_0[X]$. Par le théorème du rang elle est donc surjective et les solutions de l'équation $\varphi(P) = X^n$ se déduisent les unes des autres par l'ajout d'un élément de $\mathbb{R}_0[X]$ c'est-à-dire d'une constante. Ainsi il existe une unique solution vérifiant $P(0) = 0$.

Exercice 28 : [énoncé]
L'application Φ est bien définie et celle-ci est linéaire car, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et tous $u, v \in \mathcal{L}(E)$,

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda u + \mu v) &= \big((\lambda u + \mu v)(e_i)\big)_{1\le i\le n}\\ &= \big(\lambda u(e_i) + \mu v(e_i)\big)_{1\le i\le n}\\ &= \lambda\big(u(e_i)\big)_{1\le i\le n} + \mu\big(v(e_i)\big)_{1\le i\le n} = \lambda\Phi(u) + \mu\Phi(v).\end{aligned}$$

De plus, l'application linéaire Φ opère entre deux espaces vectoriels de dimensions finies égales puisque

$$\dim \mathcal{L}(E) = \dim(E) \times \dim(E) = n^2 = n \times \dim E = \dim\big(E^n\big).$$

L'application Φ est donc un isomorphisme si, et seulement si, celle-ci est injective.

On montre que Φ est injective si, et seulement si, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.

($\Longleftarrow$) Supposons que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ soit une base de E et étudions le noyau de Φ. Soit $u \in \operatorname{Ker}(\Phi)$. On a

$$\Phi(u) = 0_{E^n} \quad \text{donc} \quad u(e_1) = \dots = u(e_n) = 0_E.$$

Pour x vecteur arbitraire de E, on peut écrire $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ et alors, par linéarité de u,

$$u(x) = \lambda_1 u(e_1) + \dots + \lambda_n u(e_n) = 0_E.$$

On en déduit [1] que l'application u est nulle. Ainsi, le noyau de Φ est réduit à l'endomorphisme nul et on peut conclure que Φ est un isomorphisme.

1. Plus rapidement, on peut rappeler que l'image d'une base détermine entièrement une application linéaire.

($\Longrightarrow$) Supposons que Φ soit un isomorphisme. Soit p la projection sur l'espace $F = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ parallèlement à un espace supplémentaire arbitraire. On a $p(e_i) = e_i$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ et donc $\Phi(p) = \Phi(\mathrm{Id}_E)$. Par injectivité de Φ, il vient $p = \mathrm{Id}_E$ et p est donc la projection sur l'espace E. On en déduit $\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_n) = E$. La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est alors génératrice de E et puisqu'elle est de longueur $n = \dim E$, c'est une base de E.

Exercice 29 : [énoncé]
Facilement $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$ donc

$$\operatorname{rg}(f+g) \le \dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g) \le \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g).$$

Puisque $f = f + g + (-g)$,

$$\operatorname{rg}(f) \le \operatorname{rg}(f+g) + \operatorname{rg}(-g) = \operatorname{rg}(f+g) + \operatorname{rg}(g).$$

Aussi $\operatorname{rg}(g) \le \operatorname{rg}(f+g) + \operatorname{rg}(f)$ donc

$$\big|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)\big| \le \operatorname{rg}(f+g).$$

Exercice 30 : [énoncé]
Il est clair que les application F_j sont éléments de $(\mathbb{R}_n[X])^*$ espace de dimension $n+1$. Pour conclure, il suffit d'observer la liberté de la famille $(F_0, \dots, F_n)$.
Supposons $\lambda_0 F_0 + \dots + \lambda_n F_n = 0$.
En appliquant cette égalité aux polynômes $1, 2X, \dots, (n+1)X^n$ on obtient les équations formant le système linéaire :

$$\begin{cases} \lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_n a_n = 0\\ \lambda_0 a_0^2 + \dots + \lambda_n a_n^2 = 0\\ \dots\\ \lambda_0 a_0^{n+1} + \dots + \lambda_n a_n^{n+1} = 0.\end{cases}$$

Par un déterminant de Vandermonde, ce système est de Cramer ce qui entraîne

$$\lambda_0 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

La famille est alors libre et constituée du bon nombre de vecteurs pour former une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$.

Exercice 31 : [énoncé]

(a) $(v \circ u)^2 = v \circ \mathrm{Id}_F \circ u = v \circ u$ donc $v \circ u$ est un projecteur.

(b) Le rang d'un projecteur est égal à sa trace donc

$$\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{tr}(v \circ u) = \mathrm{tr}(u \circ v) = \mathrm{tr}(\mathrm{Id}_F) = p.$$

On a

$$\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}\, v \text{ et } \dim \mathrm{Im}(v \circ u) = \mathrm{rg}(v \circ u) = p \geq \mathrm{rg}(v) = \dim \mathrm{Im}\, v.$$

On en déduit

$$\mathrm{Im}(v \circ u) = \mathrm{Im}\, v.$$

On a

$$\mathrm{Ker}\, u \subset \mathrm{Ker}(v \circ u) \text{ et } \dim \mathrm{Ker}\, u = n - \mathrm{rg}\, u \geq n - p = n - \mathrm{rg}(v \circ u) = \dim \mathrm{Ker}(v \circ u)$$

donc

$$\mathrm{Ker}(v \circ u) = \mathrm{Ker}\, u.$$

Exercice 32 : [énoncé]

Pour $f \in E^*$ et $g \in F^*$, posons $f \otimes g$ l'application définie sur $E \times F$ par $(f \otimes g)(x, y) = f(x) + g(y)$. Il est facile d'observer $f \otimes g \in (E \times F)^*$. Considérons $\varphi \colon E^* \times F^* \to (E \times F)^*$ définie par $\varphi(f, g) = f \otimes g$.
L'application φ est linéaire.
Si $\varphi(f, g) = 0$ alors pour tout $(x, y) \in E \times F$, $f(x) + g(y) = 0$.
Pour $y = 0$, on peut affirmer $f = 0$ et pour $x = 0$, on affirme $g = 0$. Ainsi $(f, g) = (0, 0)$ et donc φ est injective.
Soit $h \in (E \times F)^*$. Posons $f \colon x \mapsto h(x, 0)$, $g \colon y \mapsto h(y, 0)$. On vérifie aisément $f \in E^*$, $g \in F^*$ et $\varphi(f, g) = h$ car $h(x, y) = h(x, 0) + h(0, y)$.

Exercice 33 : [énoncé]

(a) Si $y \in f\left(\sum_{i=1}^n E_i\right)$ alors on peut écrire $y = f(x_1 + \cdots + x_n)$ avec $x_i \in E_i$. On alors $y = f(x_1) + \cdots + f(x_n)$ avec $f(x_i) \in f(E_i)$ et ainsi

$$f\left(\sum_{i=1}^n E_i\right) \subset \sum_{i=1}^n f(E_i).$$

Si $y \in \sum_{i=1}^n f(E_i)$ alors on peut écrire $y = f(x_1) + \cdots + f(x_n)$ avec $x_i \in E_i$. On a alors $y = f(x)$ avec $x = x_1 + \cdots + x_n \in \sum_{i=1}^n E_i$ donc

$$f\left(\sum_{i=1}^n E_i\right) \supset \sum_{i=1}^n f(E_i).$$

(b) Si $f(x_1) + \cdots + f(x_n) = 0$ avec $x_i \in E_i$ alors $f(x_1 + \cdots + x_n) = 0$ donc $x_1 + \cdots + x_n = 0$ car f injective puis $x_1 = \ldots = x_n = 0$ car les E_i sont en somme directe et enfin $f(x_1) = \ldots = f(x_n) = 0$. Ainsi les $f(E_i)$ sont en somme directe.

(c) Soit $x \in \sum_{j=1}^p f^{-1}(F_j)$. On peut écrire $x = x_1 + \cdots + x_p$ avec $f(x_j) \in F_j$ donc $f(x) = f(x_1) + \cdots + f(x_p) \in \sum_{j=1}^p F_j$. Ainsi

$$\sum_{j=1}^p f^{-1}(F_j) \subset f^{-1}\left(\sum_{j=1}^p F_j\right).$$

On obtient une inclusion stricte en prenant par exemple pour f une projection sur une droite D et en prenant F_1, F_2 deux droites distinctes de D et vérifiant $D \subset F_1 + F_2$.
$f = 0$ ou $f = \mathrm{Id}$ sont des conditions suffisantes faciles...
Plus finement, supposons chaque F_j inclus dans $\mathrm{Im}\, f$ (et $p \geq 1$)
Pour $x \in f^{-1}(\sum_{j=1}^p F_j)$, on peut écrire $f(x) = y_1 + \cdots + y_p$ avec $y_j \in F_j$. Or $F_j \subset \mathrm{Im}\, f$ donc il existe $x_j \in E$ vérifiant $f(x_j) = y_j$. Évidemment, $x_j \in f^{-1}(F_j)$. Considérons alors $x_1' = x - (x_2 + \cdots + x_p)$, on a $f(x_1') = y_1$ donc $x_1' \in f^{-1}(F_j)$ et $x = x_1' + x_2 + \cdots + x_p \in \sum_{j=1}^p f^{-1}(F_j)$. Ainsi

$$f^{-1}\left(\sum_{j=1}^p F_j\right) \subset \sum_{j=1}^p f^{-1}(F_j)$$

puis l'égalité.

Exercice 34 : [énoncé]

(a) Par opérations par blocs

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} A & A \\ O_n & B - A \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} A & O_n \\ O_n & B - A \end{pmatrix}.$$

On en déduit l'égalité

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B - A).$$

(b) La matrice M est inversible si, et seulement si, A et $B - A$ le sont. Supposons que ce soit le cas et recherchons l'inverse de M de la forme

$$N = \begin{pmatrix} C & D \\ D & E \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad C, D, E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

L'égalité $MN = \mathrm{I}_{2n}$ se traduit par le système

$$\begin{cases} AC + AD = \mathrm{I}_n \\ AD + AE = \mathrm{O}_n \\ AC + BD = \mathrm{O}_n \\ AD + BE = \mathrm{I}_n. \end{cases}$$

La deuxième équation et l'inversibilité de A donne $D = -E$ auquel cas la dernière équation produit $D = (A - B)^{-1}$ puis, par la troisième, il vient

$$C = A^{-1}B(B - A)^{-1}.$$

On observe alors que la première équation est vérifiée et, finalement,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1}B(B-A)^{-1} & (A-B)^{-1} \\ (A-B)^{-1} & (B-A)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Exercice 35 : [énoncé]
Le produit d'une colonne de hauteur n par une matrice ligne de longueur n est possible et définit une matrice carrée de taille n :

$$X^tY = \begin{pmatrix} x_1y_1 & \cdots & x_1y_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & \cdots & x_ny_n \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

De plus, si les colonnes X et Y sont non nulles, le produit X^tY n'est pas nul [2]. Au surplus, les colonnes d'une telle matrice sont colinéaires et il s'agit donc d'une matrice de rang 1.
Les colonnes X_i et Y_j n'étant pas nulles car éléments d'une famille libre, les produits $X_i{}^tY_j$ sont bien définis et sont des matrices de rang 1 éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Supposons

$$\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{i,j} X_i{}^tY_j = \mathrm{O}_n \quad \text{avec} \quad \lambda_{i,j} \in \mathbb{R}.$$

On interprète cette égalité de matrices carrées colonne par colonne afin d'employer la liberté de la famille $(X_1, \ldots, X_n)$.

2. Si les coefficients d'indice i de X et j de Y sont non nuls, le coefficient d'indice (i, j) de X^tY n'est pas nul.

En organisant le calcul de la somme, on écrit

$$\sum_{i=1}^{n} X_i L_i = \mathrm{O}_n \quad \text{avec} \quad L_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j}{}^tY_j = \begin{pmatrix} a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \end{pmatrix}.$$

Pour $k \in [\![1\,;n]\!]$, l'égalité des colonnes d'indice k donne

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,k} X_i = \mathrm{O}_{n,1}.$$

Par liberté de la famille $(X_1, \ldots, X_n)$, les $a_{i,k}$ sont tous nuls et donc les lignes L_i le sont aussi. Par transposition, on obtient

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j} Y_j = {}^tL_i = \mathrm{O}_{n,1} \quad \text{pour tout } i = 1, \ldots, n.$$

Par liberté de la famille $(Y_1, \ldots, Y_n)$, on conclut que les $\lambda_{i,j}$ sont tous nuls.
Finalement, la famille $(X_i{}^tY_j)_{1 \le i,j \le n}$ est une famille libre constituée de $n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrices de rang 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est donc une base de cet espace telle que voulue.

Exercice 36 : [énoncé]
En étudiant l'égalité $AM = MA$, on justifie $C(A) = D_n(\mathbb{C})$. $C(A)$ est donc un sous-espace vectoriel de dimension n. De plus il contient évidemment les éléments A^k pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ (et, plus généralement, tout polynôme en A).
Supposons

$$\lambda_0 I + \lambda_1 A + \cdots + \lambda_{n-1}A^{n-1} = 0.$$

Le polynôme $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_{n-1}X^{n-1}$ est annulateur de A, donc les $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ qui sont valeurs propres de A sont aussi racines de P qui possède alors plus de racines que son degré. On peut alors affirmer $P = 0$ puis $\lambda_0 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$.
La famille $(A^k)_{0 \le k \le n-1}$ est une famille libre à n éléments de $C(A)$, c'en est donc une base

Exercice 37 : [énoncé]
Si $f = 0$ alors $f \circ g = 0$.
Sinon il existe une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de g commutant avec f est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

et puisque $g^2 = 0$, $a = 0$.
Par suite la matrice de $f \circ g$ est nulle.

Exercice 38 : [énoncé]
Supposons A inversible. Puisque A et B commutent, A^{-1} et B aussi. Comme B est nilpotente, $-A^{-1}B$ l'est aussi. Or il est classique d'observer que si N est nilpotente, $I - N$ est inversible d'inverse $I + N + \cdots + N^{p-1}$ avec p l'ordre de nilpotence de N. Ainsi $I + A^{-1}B$ est inversible et $A + B = A(I + A^{-1}B)$ aussi.
Supposons $A + B$ inversible, puisque $-B$ est nilpotente et commute avec $A + B$, $A = A + B - B$ est inversible.

Exercice 39 : [énoncé]
F_ω est clairement un endomorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$. Sa matrice dans la base $(1, X, \dots, X^{n-1})$ est $A = (a_{i,j})_{0 \le i,j \le n-1}$ avec $a_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{n}}\omega^{ij}$. On remarque que $\overline{A}A = I_n$ car $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(j-i)k} = \delta_{i,j}$. Par suite F_ω est un automorphisme et F_ω^{-1} étant représenté par $\overline{A}$, $F_\omega^{-1}(P) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^{-k})X^k$.

Exercice 40 : [énoncé]
Posons $B_k = A^k + A^{-k}$. On vérifie

$$\left(A^k + A^{-k}\right)\left(A + A^{-1}\right) = A^{k+1} + A^{-(k+1)} + A^{k-1} + A^{-(k-1)}$$

et donc

$$B_k = B_{k+1} + B_{k-1}.$$

Sachant $B_0 = 2\mathrm{I}_n$ et $B_1 = \mathrm{I}_n$, on a par récurrence $B_k = \lambda_k \mathrm{I}_n$ avec (λ_k) la suite récurrente linéaire double déterminée par

$$\begin{cases} \lambda_0 = 2, \lambda_1 = 1 \\ \lambda_{k+1} = \lambda_k - \lambda_{k-1}. \end{cases}$$

L'équation caractéristique a pour racines

$$-j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} \quad \text{et} \quad -\overline{j}$$

et le terme λ_k s'exprime

$$\lambda_k = \alpha \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) + \beta \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$$

Après résolution connaissant $\lambda_0 = 2$ et $\lambda_1 = 1$, on obtient

$$\lambda_k = 2\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right).$$

Exercice 41 : [énoncé]

(a) Posons $p = \sum_{g \in G} g$. $p^2 = \sum_{g \in G}\sum_{h \in G} gh$. Or pour $g \in G$, l'application $h \mapsto gh$ est une permutation du groupe G donc $\sum_{h \in G} gh = p$ et par suite $p^2 = \operatorname{Card} G.p$.
Par suite $\frac{1}{\operatorname{Card} G}p$ est une projection vectorielle et puisque son rang égale sa trace, $\operatorname{rg} p = 0$. Ainsi $p = 0$.

(b) Considérons $\varphi(x, y) = \sum_{g \in G}(g(x) \mid g(y))$. φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ pour lequel on a $\forall h \in G, h^* = h^{-1}$. Pour ce produit scalaire, $V^\perp$ est un supplémentaire de V stable pour tout h^{-1} avec h élément de G donc stable pour tout élément de G.

Exercice 42 : [énoncé]

(a) Notons $E_{i,j}$ les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Puisque

$$E_{i,i} = E_{i,j}E_{j,i} \text{ et } E_{j,j} = E_{j,i}E_{i,j}$$

l'hypothèse de travail donne

$$f(E_{i,i}) = f(E_{i,j}E_{j,i}) = f(E_{j,i}E_{i,j}) = f(E_{j,j}).$$

De plus, pour $i \neq j$, on a

$$E_{i,j} = E_{i,j}E_{j,j} \text{ et } O_n = E_{j,j}E_{i,j}$$

donc

$$f(E_{i,j}) = f(E_{i,j}E_{j,j}) = f(E_{j,j}E_{i,j}) = f(O_n) = 0.$$

Ainsi

$$f(A) = f\left(\sum a_{i,j}E_{i,j}\right) = \lambda \operatorname{tr} A$$

en notant λ la valeur commune des $f(E_{i,i})$.

(b) Posons $f = \operatorname{tr} \circ g$. L'application f est une forme linéaire vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(AB) = f(BA).$$

Ainsi $f = \lambda \operatorname{tr}$.
Or $f(I_n) = \operatorname{tr}\big(g(I_n)\big) = \operatorname{tr} I_n$ donc $\lambda = 1$. Ainsi $f = \operatorname{tr}$ et

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(g(M)) = f(M) = \operatorname{tr}(M).$$

Exercice 43 : [énoncé]

On remarque que les colonnes de M sont combinaisons linéaires de deux colonnes particulières.

Introduisons les colonnes $X = {}^t\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ et $X' = {}^t\begin{pmatrix} a_1^{-1} & \cdots & a_n^{-1} \end{pmatrix}$. La j-ème colonne de la matrice M s'écrit

$$C_j = \frac{1}{a_j} X + a_j X'.$$

Les colonnes de M sont donc toutes combinaisons linéaires des colonnes X et X'.
Cas: $n \geq 3$. Le déterminant de la matrice M est nul car ses colonnes forment une famille liées puisque c'est une famille de n éléments de l'espace $\operatorname{Vect}(X, X')$ de dimension au plus 2.
Cas: $n = 2$. Un calcul direct est possible

$$\det(M) = 2 \times 2 - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 = -\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2.$$

Exercice 44 : [énoncé]

On factorise $A^2 + \mathrm{I}_n$ dans le cadre des matrices complexes.

Puisque les matrices A et I_n commutent, on peut écrire

$$A^2 + \mathrm{I}_n = A^2 - (\mathrm{i}^2)\mathrm{I}_n = (A - \mathrm{i}\mathrm{I}_n)(A + \mathrm{i}\mathrm{I}_n).$$

Le déterminant d'un produit étant le produit des déterminants, on poursuit

$$\det\big(A^2 + \mathrm{I}_n\big) = \det(A - \mathrm{i}\mathrm{I}_n)\det(A + \mathrm{i}\mathrm{I}_n).$$

Or, si $\overline{M}$ désigne la matrice obtenue par conjugaison des coefficients d'une matrice carrée M, on observe

$$\det\big(\overline{M}\big) = \overline{\det(M)}$$

et donc

$$\det\big(A^2 + \mathrm{I}_n\big) = \overline{\det(A + \mathrm{i}\mathrm{I}_n)}\det(A + \mathrm{i}\mathrm{I}_n) = \big|\det(A + \mathrm{i}\mathrm{I}_n)\big|^2 \geq 0.$$

Exercice 45 : [énoncé]
Raisonnons par double implication.

($\Longleftarrow$) Supposons qu'il existe $x_1, \dots, x_n$ dans I tel que la matrice $A = \big(f_i(x_j)\big)_{1 \leq i,j \leq n}$ soit inversible. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0.$$

En évaluant cette égalité fonctionnelle en $x_1, \dots, x_n$ on obtient les n équations du système suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 f_1(x_1) + \cdots + \lambda_n f_n(x_1) = 0 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \lambda_1 f_1(x_n) + \cdots + \lambda_n f_n(x_n) = 0. \end{cases}$$

Ce système correspond à l'équation matricielle ${}^tAX = 0$ avec $X = {}^t\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$. Or la matrice A est inversible et la seule solution de ce système est la solution nulle : la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est donc libre.

($\Longrightarrow$) On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour $n = 1$, si (f_1) est une famille libre, la fonction f_1 n'est pas nulle et il existe donc $x_1 \in I$ tel que $f_1(x_1) \neq 0$.
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 1$. Au rang suivant, considérons $(f_1, \dots, f_n, f_{n+1})$ une famille libre de fonctions de I vers $\mathbb{R}$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à la sous-famille libre $(f_1, \dots, f_n)$, on obtient $x_1, \dots, x_n$ dans I tel que le déterminant de la matrice $\big(f_i(x_j)\big)_{1 \leq i,j \leq n}$ soit non nul.
Pour $x \in I$, étudions alors

$$D(x) = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_n) & f_1(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_n(x_1) & \cdots & f_{n+1}(x_n) & f_n(x) \\ f_{n+1}(x_1) & \cdots & f_{n+1}(x_n) & f_{n+1}(x) \end{vmatrix}.$$

On développe ce déterminant selon la dernière colonne.

Par l'absurde, si la fonction D est nulle sur I, on obtient par développement du déterminant selon la dernière colonne l'identité

$$\lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) + \lambda_{n+1} f_{n+1}(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in I \tag{1}$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ les réels (indépendant de x) donnés par

[Une figure]

En particulier, λ_{n+1} correspond au déterminant de $\left(f_i(x_j)\right)_{1\leq i,j\leq n}$ et n'est donc pas nul. L'égalité (**??**) détermine alors une relation linéaire sur les éléments de la famille $(f_1,\dots,f_n,f_{n+1})$. Ceci est absurde car cette famille est supposée libre. On en déduit l'existence d'un réel x_{n+1} dans I tel que $D(x_{n+1})\neq 0$.
La récurrence est établie.

Exercice 46 : [énoncé]
En retirant la première colonne aux autres, on obtient un déterminant où ne figurent des x que sur la première colonne. En développant selon cette première colonne, on obtient une expression affine de la variable x.

$$\begin{vmatrix} a_1+x & & (x)\\ & \ddots & \\ (x) & & a_n+x\end{vmatrix} = \alpha x+\beta.$$

Il reste à déterminer les réels α,β exprimant cette fonction affine.
D'une part

$$\beta = \left.\begin{vmatrix} a_1+x & & (x)\\ & \ddots & \\ (x) & & a_n+x\end{vmatrix}\right|_{x=0} = \begin{vmatrix} a_1 & & (0)\\ & \ddots & \\ (0) & & a_n\end{vmatrix} = a_1\dots a_n$$

et d'autre part

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left.\begin{vmatrix} a_1+x & & (x)\\ & \ddots & \\ (x) & & a_n+x\end{vmatrix}'\right|_{x=0}.$$

La dérivée d'un déterminant est la somme des déterminants obtenus lorsqu'on ne dérive qu'une colonne

$$\alpha=\sum_{j=1}^n\begin{vmatrix} a_1 & 1 & (0)\\ & \vdots & \\ (0) & 1 & a_n\end{vmatrix}$$

où la colonne formée de 1 est à la position j. Chaque déterminant se calcule en développant selon la ligne ne contenant que le coefficient 1 et l'on obtient

$$\alpha=\sum_{j=1}^n\prod_{i\neq j}a_i.$$

Exercice 47 : [énoncé]
Supposons pour commencer la matrice A inversible.
Par opérations par blocs :

$$\begin{pmatrix} A & C\\ B & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A^{-1}C\\ 0 & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & 0\\ B & D-BA^{-1}C\end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$\begin{vmatrix} A & C\\ B & D\end{vmatrix}=\det(D-BA^{-1}C)\det A=\det(DA-BA^{-1}CA).$$

Or les matrices A et C commutent donc A^{-1} et C commutent aussi et

$$\begin{vmatrix} A & C\\ B & D\end{vmatrix}=\det(DA-BC).$$

Supposons A non inversible.
Pour p assez grand, la matrice $A_p=A+\frac{1}{p}I$ est inversible et commute avec C donc

$$\det\begin{pmatrix} A_p & C\\ B & D\end{pmatrix}=\det(DA_p-BC).$$

En passant à la limite quand $p\to+\infty$, la continuité du déterminant donne

$$\det\begin{pmatrix} A & C\\ B & D\end{pmatrix}=\det(DA-BC).$$

Exercice 48 : [énoncé]
Il existe $u,v\in\mathbb{Z}$ tels que $u\det A+v\det B=1$. $U=u^t(\operatorname{Com}A)$ et $V=v^t(\operatorname{Com}B)$ conviennent alors.

Exercice 49 : [énoncé]
Notons que pour $n=1$: la relation $\det(A+X)=\det A+\det X$ est vraie pour tout A et tout X.
On suppose dans la suite $n\geq 2$.
Pour $X=A$, la relation $\det(A+X)=\det A+\det X$ donne $2^n\det A=2\det A$ et donc $\det A=0$.
La matrice A n'est donc par inversible et en posant $r<n$ égal à son rang, on peut écrire $A=QJ_rP$ avec P,Q inversibles et

$$J_r=\begin{pmatrix} I_r & (0)\\ (0) & O_{n-r}\end{pmatrix}.$$

Posons alors $X = QJ_r'P$ avec

$$J_r' = \begin{pmatrix} O_r & (0) \\ (0) & I_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Puisque $A + X = QI_nP = QP$, la matrice $A + X$ est inversible et donc $\det X = \det(A + X) \neq 0$.
On en déduit que la matrice J_r' est l'identité et donc $r = 0$ puis $A = O_n$.

Exercice 50 : [énoncé]
Cas où la matrice A inversible :
Pour

$$P = \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ O_n & I_n \end{pmatrix}$$

on a

$$MP = \begin{pmatrix} A & O_n \\ C & -CA^{-1}B + D \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$\det M = \det(MP) = \det A \times \det(-CA^{-1}B + D).$$

Or

$$\det A \times \det(-CA^{-1}B + D) = \det(AD - ACA^{-1}B) = \det(AD - BC)$$

car la matrice C commute avec les matrices A et B.
On en déduit

$$\det M = \det(AD - BC).$$

Cas général :
Pour $p \in \mathbb{N}^*$ assez grand, la matrice $A_p = A + 1/pI_n$ est inversible et les matrices A_p, B, C, D commutent deux à deux. Si on pose

$$M_p = \begin{pmatrix} A_p & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

l'étude qui précède donne

$$\det M_p = \det(A_pD - BC).$$

En faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient à la limite

$$\det M = \det(AD - BC).$$

Il est alors immédiat de conclure que l'inversibilité de M équivaut à celle de $AD - BC$.

Exercice 51 : [énoncé]

(a) L'application $(\cdot \mid \cdot)$ est bien définie de $E \times E$ vers $\mathbb{R}$ et clairement bilinéaire symétrique. Elle est positive car, pour tout $P \in E$,

$$(P \mid P) = \sum_{k=0}^{n} \bigl(P(a_k)\bigr)^2 \geq 0.$$

De plus, si $(P \mid P) = 0$, on a $P(a_0) = \cdots = P(a_n) = 0$ ce qui détermine $n + 1$ racines distinctes au polynôme P. Ce dernier est de degré inférieur à n et est donc nul.
Finalement, $(\cdot \mid \cdot)$ est bien un produit scalaire sur E.

(b) Considérons la famille $(L_0, \dots, L_n)$ des polynômes interpolateurs de Lagrange en les $a_0, \dots, a_n$:

$$L_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{X - a_k}{a_i - a_k} \quad \text{pour tout } ii[\![0\,;n]\!].$$

On sait

$$L_i(a_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \deg L_i = n$$

de sorte que

$$(L_i \mid L_j) = \sum_{k=0}^{n} L_i(a_k)L_j(a_k) = \delta_{i,j}.$$

La famille $(L_0, \dots, L_n)$ est donc orthonormale. C'est par conséquent une famille libre et, puisqu'elle est formée de $n + 1 = \dim E$ vecteurs de E, c'est une base de E.

(c) Le polynôme constant égal à 1 est vecteur normal à l'hyperplan H et on sait qu'alors

$$d(X^n, H) = \frac{\bigl|(X^n \mid 1)\bigr|}{\|1\|} = \frac{\bigl|a_0^n + \cdots + a_n^n\bigr|}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 52 : [énoncé]
Introduisons p_F et p_G les projections orthogonales sur les espaces F et G. On sait

$$d(x, F) = \bigl\|x - p_F(x)\bigr\| \quad \text{et} \quad d(x, G) = \bigl\|x - p_G(x)\bigr\|.$$

$(\Longrightarrow)$ Supposons F et G sont supplémentaires orthogonaux.

Les projections orthogonales p_F et p_G sont liées par la relation $p_F + p_G = \mathrm{Id}_E$.

Pour tout vecteur x de E, on a alors

$$\|x\|^2 = \left\|p_F(x) + p_G(x)\right\|^2.$$

Les vecteurs $p_F(x)$ et $p_G(x)$ étant orthogonaux, le théorème de Pythagore donne

$$\|x\|^2 = \left\|p_F(x)\right\|^2 + \left\|p_G(x)\right\|^2. \tag{2}$$

De plus,

$$\big(d(x,F)\big)^2 + \big(d(x,G)\big)^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|x - p_G(x)\|^2$$

et donc

$$\big(d(x,F)\big)^2 + \big(d(x,G)\big)^2 = \left\|p_G(x)\right\|^2 + \left\|p_F(x)\right\|^2. \tag{3}$$

Les égalités (**??**) et (**??**) donnent alors l'égalité voulue.

($\Longleftarrow$) Supposons $\|x\|^2 = \big(d(x,F)\big)^2 + \big(d(x,G)\big)^2$ pour tout $x \in E$, autrement dit,

$$\|x\|^2 = \left\|p_G(x)\right\|^2 + \left\|p_F(x)\right\|^2. \tag{4}$$

Soit x un élément de F. Le projeté de x sur F est égal à x et l'égalité ci-dessus se simplifie en $\left\|p_G(x)\right\| = 0$. Par conséquent, x est élément de $G^\perp$. On a ainsi démontré l'inclusion de F dans l'orthogonal de G, autrement dit, les espaces F et G sont orthogonaux. En montrant que leur somme est égale à E, on peut conclure que les espaces F et G sont supplémentaires orthogonaux.

On étudie l'orthogonal de l'espace $F + G$.

Soit $x \in (F+G)^\perp$. Le vecteur x est élément de l'orthogonal de F et donc $p_F(x) = 0_E$. Un argument symétrique donne $p_G(x) = 0_E$ et l'égalité (**??**) donne $x = 0_E$. Ainsi, l'orthogonal de $F+G$ est l'espace nul et par conséquent

$$F + G = \big((F+G)^\perp\big)^\perp = \{0_E\}^\perp = E.$$

Exercice 53 : [énoncé]

Sur $\mathbb{R}[X]$, on définit un produit scalaire par

$$(P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

La quantité cherchée m apparaît alors sous la forme

$$m = \inf_{a,b,c\in\mathbb{R}} \left\|X^2 - (aX^2 + bX + c)\right\|^2.$$

C'est donc le carré de la distance de X^3 au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$. En introduisant la projection orthogonale p sur ce sous-espace vectoriel

$$m = d(X^3, \mathbb{R}_2[X])^2 = \left\|X^3 - p(X^3)\right\|^2.$$

On peut écrire

$$p(X^3) = a + bX + cX^2.$$

Pour chaque $i = 0,1,2$, on a

$$\big(p(X^3) \mid X^i\big) = (X^3 \mid X^i)$$

car

$$\big(p(X^3) - X^3 \mid X^i\big) = 0.$$

On obtient alors un système d'équations d'inconnue (a,b,c)

$$\begin{cases} c + b/2 + a/3 = 1/4 \\ c/2 + b/3 + a/4 = 1/5 \\ c/3 + b/4 + a/5 = 1/6. \end{cases}$$

La résolution de ce système donne

$$c = 1/20, b = -3/5 \text{ et } a = 3/2.$$

On en déduit

$$m = \left\|X^3 - p(X^3)\right\|^2 = \big(X^3 - p(X^3) \mid X^3\big) = \frac{1}{2800}.$$

Exercice 54 : [énoncé]

Le cas $n = 1$ étant évident, on suppose désormais $n \geq 2$.

La quantité cherchée est $m = d(M, \mathrm{Vect}(I,J)) = \left\|M - p(M)\right\|$ avec p la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(I,J)$.

$p(M) = aI + bJ$ avec $(p(M) \mid I) = (M \mid I) = \mathrm{tr}(M)$ et $(p(M) \mid J) = (M \mid J) = \sigma$ avec σ la somme des coefficients de M.

La résolution de ce système donne

$$a = \frac{n\,\mathrm{tr}(M) - \sigma}{n(n-1)} \text{ et } b = \frac{\sigma - \mathrm{tr}(M)}{n(n-1)}$$

donc

$$m^2 = \left\|M - p(M)\right\|^2 = (M - p(M) \mid M) = \|M\|^2 - \frac{(n-1)\,\mathrm{tr}(M)^2 + (\mathrm{tr}(M) - \sigma)^2}{n(n-1)}.$$

Exercice 55 : [énoncé]
En introduisant la norme euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\|A\| = \left(\sum_{1\leq i,j\leq} a_{i,j}^2\right)^{1/2}$$

on peut interpréter l'infimum calculé

$$\inf_{M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}\left(\sum_{1\leq i,j\leq n}(a_{i,j}-m_{i,j})^2\right) = d(A,\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2.$$

La distance introduite se calcule par projection orthogonale. Sachant $A = M+N$ avec

$$M = \frac{A+{}^tA}{2}\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } N = \frac{A-{}^tA}{2}\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$$

on obtient

$$d(A,\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2 = \|N\|^2 = \frac{1}{4}\sum_{1\leq i<j\leq n}(a_{i,j}-a_{j,i})^2.$$

Exercice 56 : [énoncé]
Pour $X = {}^t\begin{pmatrix}1 & \dots & 1\end{pmatrix}$, on vérifie

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j} = {}^tXAX.$$

Or ${}^tXAX = (X\,|\,AX)$ donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left|{}^tXAX\right| \leq \|X\|\|AX\|.$$

Or $\|X\| = \sqrt{n}$ et $\|AX\| = \|X\| = \sqrt{n}$ car $A\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ donc

$$\left|\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}\right| \leq n.$$

Exercice 57 : [énoncé]

(a) Les colonnes de M sont unitaires et deux à deux orthogonales si, et seulement si,

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2 = 1\\ ab+bc+ca = 0.\end{cases}$$

Puisque $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2\sigma$, on obtient

$$M\in\mathrm{O}_3(\mathbb{R}) \iff \sigma = 0 \text{ et } S^2 = 1.$$

(b) On suppose la matrice M orthogonale et l'on calcule sont déterminant. En ajoutant toutes les colonnes à la première puis en factorisant

$$\det M = (a+b+c)\begin{vmatrix}1 & b & c\\ 1 & a & b\\ 1 & c & a\end{vmatrix}$$

puis en retranchant les premières lignes aux suivantes

$$\det M = (a+b+c)\begin{vmatrix}1 & b & c\\ 0 & a-b & b-c\\ 0 & c-b & a-c\end{vmatrix}.$$

Enfin

$$\det M = (a+b+c)\big((a-b)(a-c)+(b-c)^2\big).$$

Ainsi

$$\det M = S\big(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac\big) = S$$

car $a^2+b^2+c^2 = 1$ et $\sigma = 0$.
Finalement

$$M\in\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \iff \sigma = 0 \text{ et } S = 1.$$

(c) Les nombres a,b,c sont les racines du polynôme X^3-X^2+k si, et seulement si,

$$X^3-X^2+k = (X-a)(X-b)(X-c).$$

En identifiant les coefficients, cette identité polynomiale équivaut à la satisfaction du système

$$\begin{cases} a+b+c = 1\\ ab+bc+ca = 0\\ abc = -k.\end{cases}$$

De plus, le polynôme X^3-X^2+k admet trois racines réelles si, et seulement si, $k\in[0\,;4/27]$. En effet, considérons la fonction $f\colon x\mapsto x^3-x^2+k$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = x(3x-2)$.
Compte tenu de ses variations, pour que f s'annule 3 fois il est nécessaire que $f(0)\geq 0$ et $f(2/3)\leq 0$.
Cela fournit les conditions $k\geq 0$ et $k\leq 4/27$.
Inversement, si $k\in[0\,;4/27]$, f admet trois racines réelles (comptées avec multiplicité)
Ainsi, si $M\in\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ alors a,b,c sont les racines du polynôme X^3-X^2+k avec $k\in[0\,;4/27]$.
Inversement, si $k\in[0\,;4/27]$, le polynôme X^3-X^2+k admet trois racines a,b,c vérifiant $\sigma = 0$ et $S = 1$ donc $M\in\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 58 : [énoncé]

(a) En notant $X = (x_1, \dots, x_n)$, on obtient

$$^tXAX = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_ix_j$$

et donc

$$^tXAX = \sum_{i=1}^n a_{i,i}x_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^n a_{i,j}x_ix_j.$$

Par l'inégalité triangulaire

$$\left|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^n a_{i,j}x_ix_j\right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \sum_{j=1, j\neq i}^n |a_{i,j}||x_j|.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^n a_{i,j}x_ix_j\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1, j\neq i}^n |a_{i,j}||x_j|\right)^2}$$

et une nouvelle fois

$$\left(\sum_{j=1, j\neq i}^n |a_{i,j}||x_j|\right)^2 \leq \sum_{j=1, j\neq i}^n a_{i,j}^2 \sum_{j=1, j\neq i}^n x_j^2 \leq \sum_{j=1, j\neq i}^n a_{i,j}^2 \sum_{j=1}^n x_j^2.$$

On obtient donc

$$\left|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^n a_{i,j}x_ix_j\right| \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^n a_{i,j}^2 < \sum_{i=1}^n x_i^2$$

puis

$$^tXAX > \sum_{i=1}^n a_{i,i}x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0.$$

(b) Si $X \in \operatorname{Ker} A$ alors $^tXAX = 0$ et donc $X = 0$ en vertu de ce qui précède.

Exercice 59 : [énoncé]

Puisque $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif, on a

$$(I + 2M)/3 \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$$

avec $M = A^{-1}B \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ unitaire,

$$\|x + 2Mx\| = 3.$$

Mais aussi

$$\|x\| + \|2Mx\| = \|x\| + 2\|x\| = 3.$$

Il y a donc égalité dans l'inégalité triangulaire et, par conséquent, il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$2Mx = \lambda x.$$

En considérant à nouveau la norme, on obtient $\lambda = 2$ puis $Mx = x$. Ceci valant pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on conclut $M = I_n$ puis $A = B$.

Exercice 60 : [énoncé]

(a) Le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1 donc la suite (u_n) est de signe constant à partir d'un certain rang ; quitte à passer à l'opposé on peut supposer $u_n > 0$ pour n assez grand.
Posons

$$w_n = \ln((n+1)^\lambda u_{n+1}) - \ln(n^\lambda u_n).$$

On a

$$w_n = \lambda \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n} + v_n\right)$$

est le terme général d'une série absolument convergente. Par conséquent la suite $(\ln(n^\lambda u_n))$ converge et donc $(n^\lambda u_n)$ aussi.

(b) Posons $u_n = \frac{n^n}{n!\mathrm{e}^n}$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En reprenant l'étude qui précède on peut affirmer que $n^{1/2}u_n \to \ell > 0$ donc $\sum u_n$ diverge.
Ce résultat peut être confirmé par la formule de Stirling.

Exercice 61 : [énoncé]

On a

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{n^\alpha} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)^n = \exp\left(-\frac{1}{n^{\alpha-1}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)\right).$$

Si $\alpha \geq 1$ alors (u_n) ne tend pas vers zéro et $\sum u_n$ est grossièrement divergente.
Si $\alpha \in \left]0\,;1\right[$ alors $n^2u_n \to 0$ et $\sum u_n$ est convergente.

Exercice 62 : [énoncé]

(a) Par récurrence $0 \leq u_n \leq u_0/2^n$.

(b)
$$\ln(2^{n+1}u_{n+1}) - \ln(2^n u_n) = \ln\left(\frac{\sin(u_n/2)}{u_n/2}\right) \sim -\frac{1}{6}\left(\frac{u_n}{2}\right)^2$$
est terme général d'une série convergente donc la suite $(\ln(2^n u_n))$ converge et finalement $(2^n u_n)$ converge vers un réel A strictement positif.

(c)
$$u_n - A2^{-n} = 2^{-n}\sum_{k=n}^{+\infty}(2^k u_k - 2^{k+1}u_{k+1}).$$
Or
$$2^k u_k - 2^{k+1}u_{k+1} \sim \frac{2^{k+1}}{6}\left(\frac{u_k}{2}\right)^3 \sim \frac{A^3}{24.2^{2k}}.$$
Par comparaison de restes de séries convergentes à termes positifs,
$$u_n - A2^{-n} \sim 2^{-n}\frac{A^3}{24}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{2^{2k}} = \frac{A^3}{18.2^{-3n}}.$$

Exercice 63 : [énoncé]

(a) On sait
$$H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)$$
donc
$$a_n = H_{3n} - H_n \to \ln(3) = \lambda.$$

(b) Si on sait
$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$
les choses vont assez vites... mais sans doute l'examinateur souhaitera la démonstration de ce résultat.
$$a_n = \sum_{k=1}^{3n}\frac{1}{k} + \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) + \sum_{k=n+1}^{3n}\ln\left(\frac{k-1}{k}\right)$$
avec
$$\sum_{k=n+1}^{3n}\ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = \ln 3$$
donc
$$a_n - \lambda = \sum_{k=1}^{3n}\frac{1}{k} + \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \ln\left(1-\frac{1}{k}\right).$$
Or $\sum \frac{1}{k} + \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$ est absolument convergente car
$$\frac{1}{k} + \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \sim -\frac{1}{2k^2}$$
donc $a_n - \lambda = R_n - R_{3n}$ avec
$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k} + \ln\left(1-\frac{1}{k}\right).$$
Or par sommation d'équivalent sur des restes de séries convergentes à termes de signe constant,
$$R_n \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} -\frac{1}{2k^2} \sim -\frac{1}{2n}$$
(le dernier équivalent s'obtenant, soit par comparaison série intégrale, soit par $\frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{k(k-1)}$ et sommation télescopique).
Au final
$$a_n - \lambda = -\frac{1}{2n} + \frac{1}{6n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{3n}.$$

Exercice 64 : [énoncé]

Par comparaison série intégral,
$$\sum_{k=2}^{n}\ln^2 k \sim n(\ln n)^2$$
donc
$$u_n = \frac{n^\alpha}{\sum_{k=2}^{n}\ln^2 k} \sim \frac{1}{n^{1-\alpha}(\ln n)^2}.$$
Par référence aux séries de Bertrand, $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha \leq 0$.

Exercice 65 : [énoncé]
On a
$$\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$
et
$$n^{3/2}-\lfloor n^{3/2}\rfloor+n=n+\mathrm{O}(1)\sim n$$
donc
$$\frac{\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^{3/2}-\lfloor n^{3/2}\rfloor+n}=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
ce qui permet de conclure à une absolue convergence.

Exercice 66 : [énoncé]
Par comparaison série intégrale :
Si $\alpha>0$, $u_n\sim\frac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}}$ est terme général d'une série absolument convergente.
Si $-1<\alpha<0$, $u_n\sim\frac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}}$ n'est pas le terme général d'une série convergente.
Si $\alpha=-1$, $u_n\sim\frac{1}{\ln n}$ n'est pas le terme général d'une série convergente.
Si $\alpha<-1$, $u_n\not\to 0$ et donc $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

Exercice 67 : [énoncé]
Pour $t\in[0\,;1/n]$, on peut affirmer $t^n\in[0\,;1/n]$ donc
$$\left|\int_0^{1/n}f(t^n)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{n}f(0)\right|\le\frac{1}{n}\sup_{t\in[0;1/n]}\left|f(t)-f(0)\right|.$$
Par continuité de f en 0, on peut affirmer,
$$\sup_{t\in[0;1/n]}\left|f(t)-f(0)\right|\to 0$$
et donc
$$\int_0^{1/n}f(t^n)\,\mathrm{d}t\sim\frac{1}{n}f(0).$$
Ainsi
$$u_n\sim\frac{f(0)}{n^{\alpha+1}}$$
et $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha>0$.

Exercice 68 : [énoncé]
Puisque la suite (S_n) est croissante
$$0\le v_n\le\frac{u_{n+1}}{S_0}\to 0$$
et donc $v_n\to 0$. On en tire
$$v_n\sim\ln(1+v_n)=\ln\frac{S_{n+1}}{S_n}=\ln(S_{n+1})-\ln(S_n).$$
La série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, la suite $\ln(S_n)$ converge et donc si, et seulement si, la série télescopique $\sum(\ln S_{n+1}-\ln S_n)$ converge. Par équivalence de série à termes positifs, cela équivaut à affirmer la convergence de la série $\sum v_n$.

Exercice 69 : [énoncé]
Supposons la série $\sum v_n$ convergente. On a $v_n\to 0^+$ donc $1+n^2u_n\to+\infty$ et on en déduit
$$v_n\sim\frac{1}{n^2u_n}$$
puis
$$\sqrt{u_nv_n}\sim\frac{1}{n}.$$
Par comparaison de séries à termes positifs, il y a divergence de la série $\sum\sqrt{u_nv_n}$.
Or, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz
$$\left(\sum_{k=0}^n\sqrt{u_kv_k}\right)^2\le\sum_{k=0}^n u_n\sum_{k=0}^n v_k\le\sum_{k=0}^n u_n\sum_{k=0}^{+\infty}v_k.$$
On en déduit la divergence de la série $\sum u_n$.