Exercice 1 [03012] [Correction]
La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est définie par $a_0 \in \left]0\,;\pi/2\right[$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sin(a_n).$$

Quelle est la nature de la série de terme général a_n ?

Exercice 2 [03196] [Correction]
Étudier la convergence de deux suites réelles (u_n) et (v_n) vérifiant

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{u_n} + \mathrm{e}^{v_n}\right) = 2.$$

Exercice 3 [02510] [Correction]
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \frac{\sin t + |\sin t|}{2}.$$

(a) Préciser le mode de convergence de la série de Fourier de f.

(b) En déduire

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}.$$

Exercice 4 [03206] [Correction]
Soit $f\colon [1\,;+\infty[\, \to \mathbb{R}$ continue vérifiant

$$\forall x, a \geq 1, 0 \leq f(x) \leq \frac{a}{x^2} + \frac{1}{a^2}.$$

La fonction f est-elle intégrable sur $[1\,;+\infty[$?

Exercice 5 [02505] [Correction]
Soit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & \ddots & 1 \\ 1 & (0) & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

(a) Calculer le polynôme caractéristique de M. La matrice M est-elle diagonalisable ? est-elle inversible ?

(b) Soit $G = \left\{M^k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Montrer que G est une groupe cyclique et préciser son cardinal.

Exercice 6 [03780] [Correction]
Donner l'ensemble G des inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$.
Montrer que $(G, \times)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$

Exercice 7 [03210] [Correction]
Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B^p = O_n$.

(a) Montrer que $\mathrm{I}_n + A^{-1}BA$ est inversible et exprimer son inverse.

(b) On pose

$$H = \left\{\mathrm{I}_n + P(B) \mid P \in \mathbb{C}[X], P(0) = 0\right\}.$$

Montrer que H est un sous-groupe commutatif de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \times)$.

Exercice 8 [03792] [Correction]
Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et M une matrice carrée de taille n telle que $M^2 + {}^tM = \mathrm{I}_n$
Quelles sont les valeurs propres de M ? Est-elle symétrique ? Est-elle diagonalisable ?

Exercice 9 [01582] [Correction]
Montrer que si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions polynomiales toutes de degrés inférieurs à N convergeant simplement vers une fonction f sur $\mathbb{R}$ alors f est une fonction polynomiale et la convergence est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Exercice 10 [03010] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. On suppose que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers B.
Montrer que B est semblable à une matrice diagonale n'ayant que des 0 et des 1.

Exercice 11 [03200] [Correction]
D désigne le demi-disque supérieur de centre $(1, 0)$ et de rayon 1. Calculer

$$I = \iint_D \frac{y}{1 + x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Exercice 12 [01732] [Correction]
Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que f et f'' soient bornées.
Montrer, à l'aide d'une formule de Taylor, que

$$\|f'\|_\infty^2 \le 4\|f\|_\infty \|f''\|_\infty.$$

Exercice 13 [02507] [Correction]
Soient $E = \mathcal{C}([0\,;1],\mathbb{R})$ normé par $\|\cdot\|_\infty$ et la partie

$$A = \left\{ f \in E \,\middle|\, f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \ge 1 \right\}.$$

(a) Montrer que A est une partie fermée.

(b) Vérifier que
$$\forall f \in A, \|f\|_\infty > 1.$$

Exercice 14 [03791] [Correction]
Étude et expression de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n.$$

Exercice 15 [03621] [Correction]

(a) Déterminer le domaine de définition de
$$f(x) = \int_1^x \frac{\cos^2 t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

(b) Donner un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 16 [03790] [Correction]
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$f_n(x) = x^n(1-\sqrt{x}).$$

(a) Montrer que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

(b) En déduire la valeur de
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+3)}.$$

Exercice 17 [02503] [Correction]
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M + {}^tM$ soit nilpotente.
Montrer que M est antisymétrique.

Exercice 18 [03779] [Correction]
Soient q une fonction continue sur $[a\,;b]$ à valeurs réelles et f une solution non nulle sur $[a\,;b]$ de l'équation différentielle

$$(E)\colon y''(x) + q(x)y(x) = 0.$$

Montrer que f admet un nombre fini de zéros.

Exercice 19 [03209] [Correction]
Soient $n \ge 2$ et N la somme de n entiers impairs consécutifs. Montrer que N n'est pas un nombre premier.

Exercice 20 [03793] [Correction]
On étudie l'équation aux dérivées partielles

$$(E)\colon x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y)$$

où la fonction inconnue f est de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$.

(a) Montrer l'existence de solutions non nulles.

(b) Soit $g\colon t \mapsto f(tx,ty)$ avec (x,y) un couple de $\mathbb{R}^2$.
Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et exploiter cette fonction pour résoudre l'équation (E).

Exercice 21 [03014] [Correction]
Réduire la conique d'équation :

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8x + 8y + 6 = 0.$$

Donner, sa nature et ses éléments caractéristiques.

Exercice 22 [03195] [Correction]
Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}.$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
La suite (a_n) est décroissante et minorée par 0 donc convergente. En passant la relation de récurrence à la limite, on obtient que (a_n) tend vers 0.
Puisque

$$\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2} = \frac{a_n^2 - a_{n+1}^2}{a_n^2 a_{n+1}^2} \sim \frac{1}{3}$$

on obtient par le théorème de Césaro

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{a_{k+1}^2} - \frac{1}{a_k^2}\right) \to \frac{1}{3}$$

puis

$$\frac{1}{n}\frac{1}{a_n^2} \to \frac{1}{3}.$$

Finalement $a_n \sim \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}$ et la série étudiée est divergente.

Exercice 2 : [énoncé]
Exploitons

$$S_n = \mathrm{e}^{u_n} + \mathrm{e}^{v_n} \to 2 \text{ et } P_n = \mathrm{e}^{u_n}.\mathrm{e}^{v_n} = \mathrm{e}^{u_n+v_n} \to 1.$$

Les nombres e^{u_n} et e^{v_n} sont solutions de l'équation

$$(X - \mathrm{e}^{u_n})(X - \mathrm{e}^{v_n}) = 0 \text{ } i.e. X^2 - S_n X + P_n = 0.$$

À l'ordre près, on peut exprimer e^{u_n} et e^{v_n} à partir du discriminant de cette équation. Or $S_n \to 2$ et $P_n \to 1$, le discriminant tend alors vers 0 et les deux suites tendent vers 1. On en déduit $u_n \to 0$ puis $v_n \to 0$.

Exercice 3 : [énoncé]

(a) La fonction f est continue, 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. La série de Fourier de f converge donc uniformément vers f.

(b) Après calculs

$$a_{2n}(f) = -\frac{2}{\pi(4n^2-1)}, a_{2n+1}(f) = 0$$

et

$$b_1(f) = 1/2 \text{ et } b_n(f) = 0 \text{ pour } n > 1.$$

La série de Fourier de f est donc

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{2}{\pi(4n^2-1)}\cos(nt).$$

En calculant en $t = 0$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$$

(ce qui aurai pu aussi s'obtenir par décomposition en éléments simples puis télescopage).
Par la formule de Parseval

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{8} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.$$

Exercice 4 : [énoncé]
Pour $a = x^\alpha$ avec $\alpha > 0$ on obtient

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^{2-\alpha}} + \frac{1}{x^{2\alpha}}.$$

En prenant $\alpha = 2/3$,

$$0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x^{4/3}}$$

et donc, par comparaison de fonctions positives, f est intégrable sur $[1\,;+\infty[$.

Exercice 5 : [énoncé]

(a) On obtient $\chi_M(X) = (-1)^n(X^n - 1)$.
Les racines de χ_M sont les racines de l'unité, il y en a n ce qui est la taille de la matrice et donc M est diagonalisable.
Puisque 0 n'est pas racine de χ_M, la matrice M est inversible.

(b) Par Cayley-Hamilton, nous savons $M^n = I_n$ et donc M est un élément d'ordre fini du groupe $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \times)$. Par calcul ou par considération de polynôme minimal, on peut affirmer que n est le plus petit exposant $p > 0$ tel que $M^p = I_n$ et donc M est un élément d'ordre exactement n. On en déduit que G est un groupe cyclique de cardinal n.

Exercice 6 : [énoncé]
Les inversibles sont obtenus à partir des nombres premiers avec 20

$$G = \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$$

3 est un élément d'ordre 4 dans $(G, \times)$ avec

$$\langle 3 \rangle = \{1, 3, 9, 7\}$$

et 11 est un élément d'ordre 2 n'appartenant pas à $\langle 3 \rangle$.
Le morphisme $\varphi\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to G$ donné par

$$\varphi(k, \ell) = 11^k \times 3^\ell$$

est bien défini et injectif par les arguments qui précèdent.
Par cardinalité, c'est un isomorphisme.

Exercice 7 : [énoncé]

(a) Posons $N = -A^{-1}BA$. On a

$$N^p = (-1)^p A^{-1} B^p A = O_n$$

donc

$$\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n - N^p = (\mathrm{I} - N)(\mathrm{I} + N + N^2 + \cdots + N^{p-1}).$$

On en déduit que $\mathrm{I} - N = \mathrm{I}_n + A^{-1}BA$ est inversible et

$$\left(\mathrm{I}_n + A^{-1}BA\right)^{-1} = \mathrm{I} + N + N^2 + \cdots + N^{p-1}.$$

(b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(0) = 0$. On a

$$P(X) = aX + bX^2 + \dots$$

Donc

$$P(B) = aB + bB^2 + \cdots$$

puis

$$P(B)^p = a^p B^p + b' B^{p+1} + \cdots = O_n.$$

On peut alors reprendre le raisonnement de la question précédente et affirmer que la matrice $\mathrm{I}_n + P(B)$ est inversible et que son inverse est de la forme

$$\mathrm{I}_n - P(B) + P(B)^2 + \cdots + (-1)^p P(B)^p.$$

On en déduit que H est inclus dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et que l'inverse d'un élément de H est encore dans H.
Il est immédiat de vérifier que H est non vide et stable par produit. On en déduit que H est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \times)$. Enfin, on vérifie que H est commutatif car les polynômes en une matrice commutent entre eux.

Exercice 8 : [énoncé]
La relation donnée entraîne

$$\left({}^t M\right)^2 = \left(\mathrm{I}_n - M^2\right)^2 = M^4 - 2M^2 + \mathrm{I}_n.$$

Or

$$\left({}^t M\right)^2 = {}^t(M^2) = \mathrm{I}_n - M$$

donc

$$M^4 - 2M^2 + \mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n - M$$

et donc la matrice M est annulée par le polynôme

$$P(X) = X^4 - 2X^2 + X = X(X-1)(X^2 + X - 1).$$

Les valeurs propres possibles de M sont les racines de ce polynôme.
Chacune de celles-ci peut être valeur propre. En effet pour les racines de $X^2 + X - 1$, il suffit de considérer une matrice diagonale avec les coefficients diagonaux correspondant aux racines. Pour les racines de $X(X-1)$, il suffit de considérer

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice M n'est pas nécessairement symétrique comme le montre l'exemple au dessus.
La matrice M annule un polynôme scindé à racines simples, elle est donc diagonalisable.

Exercice 9 : [énoncé]
Soient $a_0, \dots, a_N$ des réels deux à deux distincts. Considérons la fonction polynôme P de degré inférieur à N vérifiant

$$\forall k \in \{0, \dots, N\}, P(a_k) = f(a_k).$$

Sur l'espace $\mathbb{R}_N[X]$, on peut introduire la norme donnée par

$$N(Q) = \max_{0 \le k \le N} \left|Q(a_k)\right|.$$

Pour cette norme, on peut affirmer que la suite (P_n) converge vers P. Or l'espace $\mathbb{R}_N[X]$ est de dimension finie, toutes les normes y sont donc équivalentes. La convergence de (P_n) vers P a donc aussi lieu pour les normes données par

$$\|Q\|_{\infty,[a;b]} = \sup_{t \in [a;b]} \left|Q(t)\right|.$$

La suite (P_n) converge vers P sur tout segment de $\mathbb{R}$ et donc converge simplement vers P. Par unicité de la limite simple, la fonction f est égale à P.

Exercice 10 : [énoncé]
$A^{2n} \to B$ et $A^{2n} = A^n \times A^n \to B^2$ donc $B = B^2$ et B est une matrice de projection.

Exercice 11 : [énoncé]
Le cercle délimitant le disque étudié a pour équation polaire

$$r = 2\cos\theta.$$

En passant en coordonnées polaires

$$I = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{2\cos\theta} \frac{r\sin\theta}{1+r^2} r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

On obtient

$$I = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin\theta \left[r - \arctan r\right]_{r=0}^{2\cos\theta} \mathrm{d}\theta$$

donc

$$I = 2\int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta \,\mathrm{d}\theta - \int_0^{\pi/2} \sin\theta\arctan(2\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

La première intégrale est immédiate et la seconde s'obtient par changement de variable puis intégration par parties

$$I = 1 - \frac{1}{2}\int_0^2 \arctan x \,\mathrm{d}x = 1 - \arctan 2 + \frac{1}{4}\ln 5.$$

Exercice 12 : [énoncé]
Par l'inégalité de Taylor Lagrange avec $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$

$$\left|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\right| \leq \frac{h^2}{2}\|f''\|_\infty$$

donc

$$h\left|f'(x)\right| \leq \left|f(x+h)\right| + \left|f(x)\right| + \frac{h^2}{2}\|f''\|_\infty$$

puis

$$\left|f'(x)\right| \leq \frac{2\|f\|_\infty}{h} + \frac{h\|f''\|_\infty}{2}.$$

Si f ou f'' est la fonction nulle, on peut conclure. Sinon, pour $h = 2\sqrt{\|f\|_\infty/\|f''\|_\infty} > 0$, on obtient

$$\left|f'(x)\right| \leq 2\sqrt{\|f\|_\infty\|f''\|_\infty}$$

et l'on peut à nouveau conclure.

Exercice 13 : [énoncé]

(a) Soient (f_n) une suite convergente d'éléments de A et $f_\infty \in E$ sa limite.
Puisque la convergence de la suite (f_n) a lieu pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, cette convergence correspond à la convergence uniforme. En particulier, il y a convergence simple et

$$f_n(0) \to f_\infty(0).$$

On en déduit $f_\infty(0) = 0$.
Puisqu'il y a convergence uniforme de cette suite de fonctions continues, on a aussi

$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_0^1 f_\infty(t)\,\mathrm{d}t$$

et donc

$$\int_0^1 f_\infty(t)\,\mathrm{d}t \geq 1.$$

Ainsi $f_\infty \in A$ et la partie A est donc fermée en vertu de la caractérisation séquentielle des parties fermées.

(b) Par l'absurde, supposons qu'il existe $f \in A$ vérifiant $\|f\|_\infty \leq 1$. Puisque

$$\left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 \left|f(t)\right|\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \|f\|_\infty \,\mathrm{d}t \leq 1$$

on peut affirmer que

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

et donc

$$\int_0^1 \left(1 - f(t)\right)\mathrm{d}t = 0.$$

Or la fonction $t \mapsto 1 - f(t)$ est continue et positive, c'est donc la fonction nulle.
Par suite f est la fonction constante égale à 1, or $f(0) = 0$, c'est absurde.

Exercice 14 : [énoncé]
Posons

$$u_n(x) = n^{(-1)^n} x^n.$$

Pour $x \in [0\,;1[$, on a $u_n(x) \to 0$ et pour $x = \pm 1$, $(u_n(x))$ ne tend pas vers 0.
Le rayon de convergence de cette série entière vaut donc $R = 1$ et l'intervalle de convergence est $]-1\,;1[$.

Pour $x \in]-1\,;1[$, on peut décomposer la somme en deux

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (2p)x^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} x^{2p+1}.$$

D'une part

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} x^{2p+1} = \operatorname{argth}(x)$$

et d'autre part

$$\sum_{p=0}^{+\infty} (2p)x^{2p} = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x^2}\right) = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2}.$$

Exercice 15 : [énoncé]

(a) Puisque

$$\frac{\cos^2 t}{t} \sim \frac{1}{t} \text{ quand } t \to 0^+$$

on peut affirmer, par équivalence de fonctions positives, que l'intégrale diverge en 0.
On peut alors conclure que f est définie sur $]0\,;+\infty[$ (car l'intégrale sur un segment d'une fonction continue converge) mais ne peut pas être définie sur un domaine plus grand.

(b) Posons

$$g(x) = \int_1^x \frac{\sin^2 t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Cette fois-ci

$$\frac{\sin^2 t}{t} \sim t \text{ quand } t \to 0^+$$

et donc la fonction g est définie et continue en 0.
Puisque

$$f(x) + g(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln x$$

on peut conclure

$$f(x) \sim \ln x \text{ quand } x \to 0^+.$$

Aussi

$$f(x) = \int_1^x \frac{1+\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln x + \int_1^x \frac{\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t.$$

Comme la nouvelle intégrale converge en $+\infty$ (cela s'obtient par une intégration par parties) on conclut

$$f(x) \sim \frac{1}{2}\ln x \text{ quand } x \to +\infty.$$

Exercice 16 : [énoncé]

(a) Sur $[0\,;1[$, la série de fonction $\sum f_n$ converge simplement et sa somme est

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \frac{x}{1-x}(1-\sqrt{x}) = \frac{x}{1+\sqrt{x}}.$$

Cette fonction somme est continue par morceaux sur $[0\,;1[$.
Les fonction f_n sont intégrables sur $[0\,;1[$ et

$$\int_0^1 \left|f_n(x)\right|\mathrm{d}x = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \underset{u=\sqrt{x}}{=} \frac{1}{(n+1)(2n+3)}.$$

Ce terme est sommable et l'on peut donc intégrer terme à terme ce qui donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

(b) Ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+3)} = \int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \underset{u=\sqrt{x}}{=} \frac{5}{3} - 2\ln 2.$$

Exercice 17 : [énoncé]
$A = M + {}^tM$ est diagonalisable car symétrique et ses valeurs propres sont nulles car racines de X^n. On en déduit que A est semblable à la matrice nulle et donc égale à la matrice nulle. Ainsi M est antisymétrique.

Exercice 18 : [énoncé]
Par l'absurde, si f admet une infinité de zéros, on peut construire une suite (x_n) formée de zéros de f deux à deux distincts. Puisque $[a\,;b]$ est compact, on peut extraire de cette suite (x_n), une suite convergente que nous noterons encore (x_n). Soit c la limite de (x_n). Par continuité, on a $f(c) = 0$.

En appliquant le théorème de Rolle à f entre x_n et x_{n+1}, on détermine c_n compris entre x_n etx_{n+1} tel que $f'(c_n) = 0$. Par encadrement, $c_n \to c$ et par continuité $f'(c) = 0$.
Le problème de Cauchy linéaire formé par l'équation (E) et les conditions initiales

$$y(c) = 0 \text{ et } y'(c) = 0$$

possède une unique solution qui est la fonction nulle.
La fonction f est donc nulle : c'est absurde.

Exercice 19 : [énoncé]
Notons $2p+1$ le premier nombre impair sommé. On a

$$N = \sum_{k=0}^{n-1}(2k+2p+1) = n(n+2p)$$

avec $n \geq 2$ et $n + 2p \geq 2$. Ainsi N est composé.

Exercice 20 : [énoncé]

(a) Les fonctions données par $f(x, y) = ax + by$ sont solutions.

(b) Par composition, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$g'(t) = x\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)$$

de sorte que

$$tg'(t) = f(tx, ty) = g(t).$$

La résolution de l'équation différentielle $ty'(t) = y$ après raccord donne

$$y(t) = \lambda t \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

On en déduit

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, f(tx, ty) = tf(x, y).$$

En dérivant cette relation en le paramètre x, on obtient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, t\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = t\frac{\partial f}{\partial x}(x, y).$$

En simplifiant par t

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}^*, \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y).$$

Or la relation engage des fonctions continues, elle donc encore valable en $t = 0$ ce qui fourni

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0).$$

De même, on obtient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

Enfin, en posant

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \text{ et } b = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$$

l'équation initiale fournit

$$f(x, y) = ax + by.$$

Exercice 21 : [énoncé]
La forme quadratique sous-jacente a pour valeurs propres 2 et 4. C'est une conique à centre.
La forme quadratique est diagonalisée dans la base orthonormée formée des vecteurs

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}) \text{ et } \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j}).$$

Par annulation de gradient, le centre est $\Omega \left| \begin{array}{l} 1 \\ -1 \end{array} \right.$.
L'équation dans le repère $\mathcal{R} = (\Omega; \vec{u}, \vec{v})$ est

$$2x^2 + 4y^2 + C = 0$$

avec la constante C égale à la valeur du premier membre de l'équation initiale en Ω.
On obtient $C = -2$ et finalement on parvient à l'équation

$$x^2 + 2y^2 = 1.$$

La conique est donc une ellipse de centre Ω, d'axe focal $(\Omega; \vec{u})$ et les valeurs caractéristiques sont

$$a = 1, b = 1/\sqrt{2}, c = 1/\sqrt{2} \text{ et } e = 1/\sqrt{2}.$$

Exercice 22 : [énoncé]
On a

$$nu_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} = \exp\left(-\frac{1}{n}\ln n\right) \to 1$$

donc pour n assez grand

$$u_n \geq \frac{1}{2n}$$

et par comparaison de série à termes positifs on peut affirmer que $\sum u_n$ diverge.