Exercice 1 [03243] [Correction]
Soit G un groupe multiplicatif de cardinal p^α avec p premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que
$$Z(G) \neq \{1\}.$$

Exercice 2 [04972] [Correction]
Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 3 [03353] [Correction]
Soient $n \geq 3$, $\omega_1, \dots, \omega_n$ les racines n-ième de l'unité avec $\omega_n = 1$.

(a) Calculer pour $p \in \mathbb{Z}$,
$$S_p = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^p.$$

(b) Calculer
$$T = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1-\omega_i}.$$

Exercice 4 [03040] [Correction]
Quelle est l'image du cercle unité par l'application $z \mapsto \frac{1}{1-z}$?

Exercice 5 [03107] [Correction]
Soit B une partie bornée non vide de $\mathbb{C}$.
On suppose que si $z \in B$ alors $1 - z + z^2 \in B$ et $1 + z + z^2 \in B$.
Déterminer B.

Exercice 6 [03048] [Correction]
Étudier la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ définie par $z_0 \in \mathbb{C}$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}.$$

Exercice 7 [03039] [Correction]
Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$. Existence et calcul de
$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} \left(1 + z^{2^k}\right).$$

Exercice 8 [03165] [Correction]
Soient (a_n) une suite réelle positive, bornée et (u_n) la suite récurrente définie par
$$u_0 > 0 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{u_n + a_n + 1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$
Montrer que la suite (u_n) converge si, et seulement si, la suite (a_n) converge.

Exercice 9 [03105] [Correction]
Soit α un réel compris au sens large entre 0 et $1/\mathrm{e}$.

(a) Démontrer l'existence d'une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant
$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \alpha f(x+1).$$

(b) Si $\alpha = 1/\mathrm{e}$, déterminer deux fonctions linéairement indépendantes vérifiant la relation précédente.

Exercice 10 [03350] [Correction]
Montrer la surjectivité de l'application
$$z \in \mathbb{C} \mapsto z \exp(z) \in \mathbb{C}.$$

Exercice 11 [00727] [Correction]
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$.

(a) Si f'' est bornée, que dire de $f'(x)$ quand $x \to +\infty$?

(b) Le résultat subsiste-t-il sans l'hypothèse du a) ?

Exercice 12 [03034] [Correction]
Soit $f\colon [0\,;1[\to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que f est bornée.

Exercice 13 [03051] [Correction]
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^0([a\,;b], \mathbb{C})$.
À quelle condition portant sur f a-t-on
$$\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|\,?.$$

Exercice 14 [03089] [Correction]
Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $\mu\in\mathbb{R}_+^*$ et $f\in\mathcal{C}^2([a\,;b],\mathbb{R})$ telles que

$$\forall x\in[a\,;b],\left|f'(x)\right|\geq\mu \text{ et } f' \text{ monotone.}$$

Montrer :

$$\left|\int_a^b \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi f(t)}\,\mathrm{d}t\right|\leq\frac{1}{\mu\pi}.$$

Exercice 15 [02981] [Correction]
Déterminer un équivalent lorsque $n\to+\infty$ de

$$I_n=\int_0^1\left(\frac{t}{1+t^2}\right)^n\mathrm{d}t.$$

Exercice 16 [03380] [Correction]
Soit $f\colon[0\,;1]\to\mathbb{R}$ continue vérifiant

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=0.$$

Montrer qu'il existe $x\in\,]0\,;1[$ vérifiant

$$\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t=0.$$

Exercice 17 [02966] [Correction]
Soient $f\colon[0\,;1]\to\mathbb{R}$ continue telle que

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=0$$

m le minimum de f et M son maximum.
Prouver

$$\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t\leq -mM.$$

Exercice 18 [00318] [Correction]
Pour $n\geq 2$, on considère le polynôme

$$P_n=X^n-nX+1.$$

(a) Montrer que P_n admet exactement une racine réelle entre 0 et 1, notée x_n.
(b) Déterminer la limite de x_n lorsque $n\to+\infty$.
(c) Donner un équivalent de (x_n) puis le deuxième terme du développement asymptotique x_n.

Exercice 19 [03351] [Correction]
Soient $a,b\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et $n\in\mathbb{N}^*$.
On suppose que a^n+b^n est un nombre premier. Montrer que n est une puissance de 2.

Exercice 20 [00271] [Correction]
Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ non constant et tel que $P(0)=1$. Montrer que :

$$\forall\varepsilon>0,\exists z\in\mathbb{C},|z|<\varepsilon \text{ et } \left|P(z)\right|<1.$$

Exercice 21 [02143] [Correction]
Soient $t\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$.
Déterminer le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ de $(X\cos t+\sin t)^n$ par X^2+1.

Exercice 22 [00274] [Correction]
Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ simplement scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que P ne peut avoir deux coefficients consécutifs nuls.

Exercice 23 [02375] [Correction]
Trouver les $P\in\mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$P(X^2)=P(X)P(X+1).$$

Exercice 24 [03696] [Correction]
Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout réel α, le polynôme $P'+\alpha P$ est lui aussi scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 25 [03041] [Correction]
Trouver les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$P(1) = 1, P(2) = 2, P'(1) = 3, P'(2) = 4, P''(1) = 5 \text{ et } P''(2) = 6.$$

Exercice 26 [03336] [Correction]
Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ x^4 + y^4 + z^4 = 0 \\ x^5 + y^5 + z^5 = 0. \end{cases}$$

Exercice 27 [01352] [Correction]
Soient $\mathbb{K}$ un corps et $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.

(a) Calculer
$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

(b) On pose $A(X) = \prod_{j=1}^{n} (X - a_j)$. Calculer
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{A'(a_i)}.$$

Exercice 28 [02464] [Correction]
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Les fonctions $x \mapsto \sin(x + a), x \mapsto \sin(x + b)$ et $x \mapsto \sin(x + c)$ sont-elles linéairement indépendantes ?

Exercice 29 [03046] [Correction]
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que la suite $(P(n))_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire à coefficients constants.

Exercice 30 [02909] [Correction]
Soient E un espace vectoriel, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

(a) Montrer que si F_1 et F_2 ont un supplémentaire commun alors ils sont isomorphes.

(b) Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 31 [04968] [Correction]
Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice nilpotente.

Exercice 32 [04976] [Correction]
À quelle condition existe-t-il des matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $(AB - BA)^2 = \mathrm{I}_n$?

Exercice 33 [00403] [Correction]
Soit
$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$
avec $0 \le d \le c \le b \le a$ et $b + c \le a + d$.
Pour tout $n \ge 2$, on note
$$M^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}.$$
Démontrer que, pour tout $n \ge 2$,
$$b_n + c_n \le a_n + d_n.$$

Exercice 34 [02929] [Correction]
Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

(a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Majorer les coefficients de A^k.

(b) Calculer A^{-1}.

(c) Calculer $(A^{-1})^k$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 35 [03864] [Correction]
Soient $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$A_1 + \dots + A_k = \mathrm{I}_n \text{ et } \forall 1 \leq i \leq k, A_i^2 = A_i.$$

Montrer

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq k, A_i A_j = \mathrm{O}_n.$$

Exercice 36 [04960] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et X, Y deux colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Établir

$$A + Y{}^tX \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \iff 1 + {}^tXA^{-1}Y \neq 0.$$

Exercice 37 [01432] [Correction]
Calculer

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} C_0^0 & C_1^1 & \cdots & C_n^n \\ C_1^0 & C_2^1 & \cdots & C_{n+1}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_n^0 & C_{n+1}^1 & \cdots & C_{2n}^n \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

en notant par

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Exercice 38 [00299] [Correction]
On pose

$$P_n(X) = X^n - X + 1 \text{ (avec } n \geq 2).$$

(a) Montrer que P_n admet n racines distinctes $z_1, \dots, z_n$ dans $\mathbb{C}$.

(b) Calculer le déterminant de

$$\begin{pmatrix} 1+z_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+z_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+z_n \end{pmatrix}.$$

Exercice 39 [00229] [Correction]
Soient A et H dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\operatorname{rg} H = 1$. Montrer :

$$\det(A+H)\det(A-H) \leq \det A^2.$$

Exercice 40 [03047] [Correction]
Soit (u_n) une suite complexe telle que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $u_{pn} - u_n \to 0$. Peut-on affirmer que la suite (u_n) converge ?

Exercice 41 [02949] [Correction]
Étudier la limite quand $n \to +\infty$ de

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n.$$

Exercice 42 [02957] [Correction]
Soit (u_n) une suite réelle strictement positive, décroissante, de limite nulle.
On suppose que la suite de terme général

$$\sum_{k=1}^{n} u_k - nu_n$$

est bornée.
Montrer que la série de terme général u_n converge.

Exercice 43 [02956] [Correction]
Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = u_n / S_n \text{ où } S_n = u_1 + \dots + u_n.$$

Déterminer la nature de $\sum v_n$.

Exercice 44 [02958] [Correction]
Soit (u_n) une suite réelle strictement positive telle que la série de terme général u_n converge.
On note le reste d'ordre n

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Étudier la nature des séries de termes généraux u_n/R_n et u_n/R_{n-1}.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Considérons la relation binaire $\mathcal{R}$ sur G définie par

$$y_1 \mathcal{R} y_2 \iff \exists x \in G, xy_1 = y_2 x.$$

Il est immédiat de vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur G. Les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ forment donc une partition de G ce qui permet d'affirmer que le cardinal de G est la somme des cardinaux des classes d'équivalence de $\mathcal{R}$.
Une classe d'équivalence d'un élément y est réduite à un singleton si, et seulement si,

$$\forall x \in G, xy = yx.$$

i.e.

$$y \in Z(G).$$

En dénombrant G en fonction des classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ et en isolant parmi celles-ci celles qui sont réduites à un singleton on a

$$\operatorname{Card} G = \operatorname{Card} Z(G) + N$$

avec N la somme des cardinaux des classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ qui ne sont pas réduites à un singleton.
Pour poursuivre, montrons maintenant que le cardinal d'une classe d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$ divise le cardinal de G.
Considérons une classe d'équivalence $\{y_1, \dots, y_n\}$ pour la relation $\mathcal{R}$ et notons

$$H_i = \{x \in G \mid xy_1 = y_i x\}.$$

Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, puisque $y_1 \mathcal{R} y_i$, il existe $x_i \in G$ tel que

$$x_i y_1 = y_i x_i.$$

Considérons alors l'application $\varphi \colon H_1 \to H_i$ définie par

$$\varphi(x) = x_i x.$$

On vérifie que cette application est bien définie et qu'elle est bijective.
On en déduit

$$\operatorname{Card} H_1 = \ldots = \operatorname{Card} H_n = m$$

et puisque G est la réunion disjointes des $H_1, \dots, H_n$

$$\operatorname{Card} G = mn = p^\alpha.$$

Ainsi toutes les classes d'équivalences qui ne sont pas réduites à 1 élément ont un cardinal multiple de p et donc $p \mid N$.
Puisque p divise $\operatorname{Card} G = \operatorname{Card} Z(G) + N$, on a

$$p \mid \operatorname{Card} Z(G).$$

Sachant $Z(G) \neq \emptyset$ (car $1 \in Z(G)$) on peut affirmer

$$\operatorname{Card} Z(G) \geq p.$$

Exercice 2 : [énoncé]

On exprime $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ comme solution d'une équation « simple ».

En développant [1] le premier membre de l'équation $\left(x - \sqrt{2}\right)^3 = 3$, on obtient

$$x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 6x - 2\sqrt{2} = 3.$$

En réordonnant les membres de cette équation, on écrit

$$\left(3x^2 + 2\right)\sqrt{2} = x^3 + 6x - 3 \quad \text{puis} \quad \sqrt{2} = \frac{x^3 + 6x - 3}{3x^2 + 2}.$$

Par l'absurde, si x est un nombre rationnel, alors $\sqrt{2}$ est aussi un nombre rationnel par opérations dans $\mathbb{Q}$. C'est absurde.

Exercice 3 : [énoncé]
Quitte à réindexer, on peut supposer

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \omega_k = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n} = \omega^k \text{ avec } \omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}.$$

(a) Si n ne divise pas p alors, puisque $\omega^p \neq 1$

$$S_p = \sum_{k=1}^{n} \omega^{kp} = \omega^p \frac{1 - \omega^{np}}{1 - \omega^p} = 0.$$

Si n divise p alors

$$S_p = \sum_{k=1}^{n} \omega^{kp} = \sum_{k=1}^{n} 1 = n.$$

1. On emploie la formule $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$.

(b) Pour $1 \leq k \leq n-1$, on a

$$\frac{1}{1-\omega_k} = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi/n}\frac{1}{2\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{n}} = \frac{\mathrm{i}}{2}\cot\frac{k\pi}{n} + \frac{1}{2}.$$

Puisque

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cot\frac{k\pi}{n} \underset{\ell=n-k}{=} \sum_{\ell=1}^{n-1}\cot\left(\pi - \frac{\ell\pi}{n}\right) = \sum_{\ell=1}^{n-1} -\cot\left(\frac{\ell\pi}{n}\right)$$

on a

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cot\frac{k\pi}{n} = 0$$

puis

$$T = \frac{(n-1)}{2}.$$

On peut aussi lier le calcul au précédent en écrivant

$$\frac{1}{1-\omega_i} = \sum_{p=0}^{n-1}\omega_i^p + \frac{\omega_i^n}{1-\omega_i}.$$

On peut aussi retrouver cette relation en considérant que T est la somme des racines d'un polynôme bien construit

$$P^n = (X-1)^n - X^n = -nX^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}X^{n-2} + \dots$$

Exercice 4 : [énoncé]
Soit z un complexe du cercle unité avec $z \neq 1$. Il existe $\theta \in \left]0\,;2\pi\right[$ tel que $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
On a alors

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}\frac{\mathrm{i}}{2\sin\theta/2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\cot\frac{\theta}{2}.$$

Quand θ parcourt $\left]0\,;2\pi\right[$ (ce qui revient à faire parcourir à z le cercle unité), l'expression $\cot(\theta/2)$ prend toutes les valeurs de $\mathbb{R}$. L'image du cercle unité est la droite d'équation $x = 1/2$.

Exercice 5 : [énoncé]
On observe que $B = \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$ est solution. Montrons qu'il n'y en a pas d'autres...
Posons $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définies par

$$f(z) = 1 - z + z^2 \text{ et } g(z) = 1 + z + z^2.$$

On remarque

$$\left|f(z) - \mathrm{i}\right| = |z+\mathrm{i}|\left|z - (1+\mathrm{i})\right|, \left|f(z) + \mathrm{i}\right| = |z - \mathrm{i}|\left|z - (1-\mathrm{i})\right|.$$

$$\left|g(z) - \mathrm{i}\right| = |z - \mathrm{i}||z + 1 + \mathrm{i}| \text{ et } \left|g(z) + \mathrm{i}\right| = |z + \mathrm{i}||z + 1 - \mathrm{i}|.$$

Soient $a \in B$ et $(z_n)_{n\geq 0}$ la suite d'éléments de B définie par $z_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$z_{n+1} = \begin{cases} f(z_n) & \text{si } \operatorname{Re}(z_n) \leq 0 \\ g(z_n) & \text{si } \operatorname{Re}(z_n) > 0. \end{cases}$$

Posons enfin

$$u_n = \left|z_n^2 + 1\right| = |z_n - \mathrm{i}||z_n + \mathrm{i}|.$$

Si $\operatorname{Re}(z_n) \leq 0$ alors

$$u_{n+1} = \left|f(z_n) - \mathrm{i}\right|\left|f(z_n) + \mathrm{i}\right| = u_n\left|z_n - (1+\mathrm{i})\right|\left|z_n - (1-\mathrm{i})\right|.$$

Selon le signe de la partie imaginaire de z_n, l'un au moins des deux modules $\left|z_n - (1+\mathrm{i})\right|$ et $\left|z_n - (1-\mathrm{i})\right|$ est supérieur à $\sqrt{2}$ alors que l'autre est supérieur à 1.
Ainsi

$$u_{n+1} \geq \sqrt{2}u_n.$$

Si $\operatorname{Re}(z_n) > 0$, on obtient le même résultat.
On en déduit que si $u_0 \neq 0$ alors la suite (u_n) n'est pas bornée. Or la partie B est bornée donc $u_0 = 0$ puis $a = \pm\mathrm{i}$. Ainsi $B \subset \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$.
Sachant $B \neq \emptyset$ et sachant que l'appartenance de i entraîne celle de $-\mathrm{i}$ et inversement, on peut conclure

$$B = \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}.$$

Exercice 6 : [énoncé]
On peut écrire $z_0 = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\rho \geq 0$ et $\theta \in \left]-\pi\,;\pi\right]$
On a alors

$$z_1 = \rho\frac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{2} = \rho\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}, z_2 = \rho\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{4}}, \dots, z_n = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2^n}}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\theta}{2^k}.$$

Si $\theta = 0$ alors $z_n = \rho \to \rho$.
Sinon, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sin\frac{\theta}{2^n} \neq 0$ et

$$\sin\frac{\theta}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\theta}{2^k} = \frac{\sin\theta}{2^n}$$

par exploitations successives de l'identité $\sin 2a = 2\sin a\cos a$.

On en déduit

$$\prod_{k=1}^{n} \cos \frac{\theta}{2^k} = \frac{\sin\theta}{2^n \sin \frac{\theta}{2^n}} \to \frac{\sin\theta}{\theta}.$$

Finalement

$$z_n \to \rho \frac{\sin\theta}{\theta}.$$

Exercice 7 : [énoncé]
On a

$$(1-z)\prod_{k=0}^{n}\left(1+z^{2^k}\right) = (1-z)(1+z)(1+z^2)\dots(1+z^{2^n}).$$

Or $(1-z)(1+z) = 1-z^2$ donc

$$(1-z)\prod_{k=0}^{n}\left(1+z^{2^k}\right) = (1-z^2)(1+z^2)\dots(1+z^{2^n}).$$

En répétant la manipulation

$$(1-z)\prod_{k=0}^{n}\left(1+z^{2^k}\right) = (1-z^{2^{n+1}}).$$

Or $z^{2^{n+1}} \to 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{n}\left(1+z^{2^k}\right) = \frac{1}{1-z}.$$

Exercice 8 : [énoncé]
Posons

$$M = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

On vérifie aisément que la suite (u_n) est bien définie et que pour tout $n \geq 2$

$$\frac{1}{M+2} \leq u_n \leq 1.$$

Supposons la convergence de la suite (u_n). Sa limite est strictement positive. En résolvant l'équation définissant u_{n+1} en fonction de u_n, on obtient

$$a_n = \frac{1}{u_{n+1}} - u_n - 1.$$

On en déduit que la suite (a_n) converge.
Inversement, supposons que la suite (a_n) converge vers une limite ℓ, $\ell \geq 0$.
Considérons la suite (v_n) définie par

$$v_0 = 1 \text{ et } v_{n+1} = \frac{1}{v_n+\ell+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On vérifie que la suite (v_n) est bien définie et à termes strictement positifs.
L'équation

$$x = \frac{1}{x+\ell+1}$$

possède une racine $L > 0$ et on a

$$|v_{n+1} - L| \leq \frac{|v_n - L|}{1+L}$$

ce qui permet d'établir que la suite (v_n) converge vers L. Considérons ensuite la suite (α_n) définie par

$$\alpha_n = u_n - v_n.$$

On a

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n + (\ell - a_n)}{(u_n+a_n+1)(v_n+\ell+1)}$$

et donc

$$|\alpha_{n+1}| \leq k\big(|\alpha_n| + |a_n - \ell|\big)$$

avec

$$k = \frac{1}{m+1} \in [0\,;1[$$

où $m > 0$ est un minorant de la suite convergente (v_n).
Par récurrence, on obtient

$$|\alpha_n| \leq k^n|\alpha_0| + \sum_{p=0}^{n-1} k^{n-p}|a_p - \ell|.$$

Soit $\varepsilon > 0$.
Puisque la suite (a_n) converge vers ℓ, il existe p_0 tel que

$$\forall p \geq p_0, |a_p - \ell| \leq \varepsilon$$

et alors

$$\sum_{p=p_0}^{n-1} k^{n-p}|a_p - \ell| \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{+\infty} k^p = \frac{k\varepsilon}{1-k}.$$

Pour n assez grand

$$\sum_{p=0}^{p_0-1} k^{n-p}|a_p-\ell| = C^{te}k^n \leq \varepsilon \text{ et } k^n|\alpha_0| \leq \varepsilon$$

et on en déduit

$$|\alpha_n| \leq 2\varepsilon + \frac{k\varepsilon}{1-k}.$$

Ainsi $\alpha_n \to 0$ et par conséquent

$$u_n \to L.$$

Exercice 9 : [énoncé]

(a) Cherchons f de la forme

$$f(x) = \mathrm{e}^{\beta x}.$$

Après calculs, si $\alpha = \beta\mathrm{e}^{-\beta}$ alors f est solution.
En étudiant les variations de la fonction $\beta \mapsto \beta\mathrm{e}^{-\beta}$, on peut affirmer que pour tout $\alpha \in [0\,;1/\mathrm{e}]$, il existe $\beta \in \mathbb{R}_+$ tel que $\beta\mathrm{e}^{-\beta} = \alpha$ et donc il existe une fonction f vérifiant la relation précédente.

(b) Pour $\alpha = 1/\mathrm{e}$, les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto x\mathrm{e}^x$ sont solutions.
Notons que pour $\alpha \in \,]0\,;1/\mathrm{e}[$ il existe aussi deux solutions linéairement indépendantes car l'équation $\beta\mathrm{e}^{-\beta} = \alpha$ admet deux solutions, une inférieure à 1 et l'autre supérieure à 1

Exercice 10 : [énoncé]
Soit $Z \in \mathbb{C}$. On recherche $z \in \mathbb{C}$ tel que $z\exp(z) = Z$.
Si $Z = 0$, on observe simplement que $z = 0$ est solution.
On suppose désormais $Z \neq 0$ et on écrit $Z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $R > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On recherche alors $z \in \mathbb{C}$ solution de l'équation $z\exp(z) = Z$ de la forme $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ avec $r > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Puisque

$$z\exp(z) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\mathrm{e}^{r\cos(\alpha)+\mathrm{i}r\sin(\alpha)} = r\mathrm{e}^{r\cos(\alpha)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\alpha+r\sin(\alpha)\right)}$$

l'identification du module et d'un argument conduit à l'étude du système

$$\begin{cases} r\mathrm{e}^{r\cos(\alpha)} = R \\ \alpha + r\sin(\alpha) \equiv \theta\ [2\pi] \end{cases} \tag{1}$$

dont on recherche une solution.

La deuxième équation du système permet d'exprimer r en fonction de α sous réserve de pouvoir diviser par $\sin(\alpha)$.

*On recherche une solution (r,α) au système (**??**) avec $\alpha \in \,]0\,;\pi[$.*

Soit $\alpha \in \,]0\,;\pi[$. On pose

$$r = \frac{\theta + 2k\pi - \alpha}{\sin(\alpha)}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$ suffisamment grand afin que r soit un réel strictement positif (par exemple, k tel que $\theta + 2k\pi > \pi$). Par ce choix de r, la deuxième équation du système est assurément vérifiée tandis que la première l'est si, et seulement si, $f(\alpha) = R$ avec f la fonction définie sur $]0\,;\pi[$ par

$$f(\alpha) = \frac{\theta + 2k\pi - \alpha}{\sin(\alpha)}\exp\left(\frac{\theta + 2k\pi - \alpha}{\sin(\alpha)}\cos(\alpha)\right).$$

Une étude complète de la fonction f n'est pas utile : sa continuité et ses limites en 0 et π suffisent à pouvoir affirmer que f prend la valeur R.

Par opérations sur les fonctions, on peut affirmer que f est continue sur $]0\,;\pi[$.
Lorsque α tend vers 0 par valeurs supérieures,

$$\frac{\theta + 2k\pi - \alpha}{\sin(\alpha)} \to +\infty \quad \text{car} \quad \sin(\alpha) \to 0^+ \text{ et } \theta + 2k\pi > 0$$

et

$$\exp\left(\frac{\theta + 2k\pi - \alpha}{\sin(\alpha)}\cos(\alpha)\right) \to +\infty \quad \text{car} \quad \cos(\alpha) \to 1.$$

Parallèlement, lorsque α tend vers π par valeurs inférieures,

$$\frac{\theta + 2k\pi - \alpha}{\sin(\alpha)} \to +\infty \quad \text{et} \quad \exp\left(\frac{\theta + 2k\pi - \alpha}{\sin(\alpha)}\cos(\alpha)\right) \to 0 \quad \text{car} \quad \cos(\alpha) \to -1.$$

Ceci conduit à la résolution d'une forme indéterminée « $(+\infty) \times 0$ ». On raisonne par comparaison. Pour $\alpha \in [2\pi/3\,;\pi[$, on a $\cos(\alpha) \leq -1/2$ et donc

$$\exp\left(\frac{\theta + 2k\pi - \alpha}{\sin(\alpha)}\cos(\alpha)\right) \leq \exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\theta + 2k\pi - \alpha}{\sin(\alpha)}\right)$$

puis

$$0 \leq f(\alpha) \leq 2X\exp(-X) \quad \text{avec} \quad X = \frac{1}{2}\cdot\frac{\theta + 2k\pi - \alpha}{\sin(\alpha)} \to +\infty.$$

Par encadrement, on peut affirmer que f tend vers 0 en π par valeurs inférieures.

Ainsi, f est continue sur $]0\,;\pi[$ et a pour limites 0 et $+\infty$ en les extrémités de cet intervalle. Par le théorème des valeurs intermédiaires généralisé, on peut affirmer que f prend la prend valeur R et qu'il existe donc α appartenant à $]0\,;\pi[$ solution de l'équation $f(\alpha)=R$.
Finalement, on a prouvé l'existence d'un couple (r,α) solution du système (**??**) et donc l'existence d'un complexe z tel que $ze^z = Z$.

Exercice 11 : [énoncé]

(a) Posons $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\left|f''(x)\right| \le M$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
Soit $\varepsilon > 0$. La suite (x_n) de terme général

$$x_n = n\frac{\varepsilon}{M}$$

diverge vers $+\infty$ et donc

$$f(x_{n+1}) - f(x_n) \to 0.$$

Par suite il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \ge N$

$$\left|f(x_{n+1}) - f(x_n)\right| \le \frac{\varepsilon^2}{M}.$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe $c_n \in\,]x_n\,;x_{n+1}[$ tel que

$$\left|f'(c_n)\right|(x_{n+1}-x_n) \le \frac{\varepsilon^2}{M}$$

ce qui donne

$$\left|f'(c_n)\right| \le \varepsilon.$$

Puisque f'' est bornée par M, la fonction f' est M-lipschitzienne et donc

$$\forall u \in [x_n\,;x_{n+1}], \left|f'(u)-f'(c_n)\right| \le M|u-c_n| \le \varepsilon$$

puis

$$\forall u \in [x_n\,;x_{n+1}], \left|f'(u))\right| \le \varepsilon + \left|f'(c_n)\right| \le 2\varepsilon$$

et, puisque ceci vaut pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a en posant $A = x_N$,

$$\forall u \ge A, \left|f'(u)\right| \le 2\varepsilon.$$

On peut conclure que f' converge vers 0 en $+\infty$.

(b) Posons

$$f(t) = \frac{\cos(t^2)}{t+1}.$$

On vérifie aisément que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et converge en $+\infty$ sans que f' converge en 0.

Exercice 12 : [énoncé]
Pour $\varepsilon = 1$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x,y \in [0\,;1[, |y-x| \le \alpha \implies \left|f(y)-f(x)\right| \le 1.$$

Par suite, pour tout $x \in [1-\alpha\,;1[$, on a $\left|f(x)-f(1-\alpha)\right| \le 1$ puis $\left|f(x)\right| \le 1 + \left|f(1-\alpha)\right|$.
De plus, la fonction f est continue donc bornée sur le segment $[0\,;1-\alpha]$ par un certain M.
On a alors f bornée sur $[0\,;1[$ par $\max\left\{M, 1+\left|f(1-\alpha)\right|\right\}$.

Exercice 13 : [énoncé]
Supposons $\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|$.
On peut écrire $\int_a^b f = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r = \left|\int_a^b f\right|$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Considérons alors $g\colon t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.
On a $\int_a^b g = \left|\int_a^b f\right| \in \mathbb{R}$ donc $\int_a^b g = \int_a^b \mathrm{Re}(g)$.
Or $|g| = |f|$ et l'hypothèse de départ donne $\int_a^b |g| = \int_a^b \mathrm{Re}(g)$ puis $\int_a^b |g| - \mathrm{Re}(g) = 0$.
Puisque la fonction réelle $|g| - \mathrm{Re}(g)$ est continue, positive et d'intégrale nulle, c'est la fonction nulle.
Par suite $\mathrm{Re}(g) = |g|$ et donc la fonction g est réelle positive.
Finalement, la fonction f est de la forme $t \mapsto g(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec g fonction réelle positive.
La réciproque est immédiate.

Exercice 14 : [énoncé]
Écrivons

$$\int_a^b \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi f(t)}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{f'(t)}{f'(t)}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi f(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Par intégration par parties

$$\int_a^b \frac{f'(t)}{f'(t)} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi f(t)}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi f(t)}}{2\mathrm{i}\pi f'(t)}\right]_a^b + \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_a^b \frac{f''(t)}{f'(t)^2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi f(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Quitte à considérer $-f$, supposons $f'' \geq 0$

$$\left|\int_a^b \frac{f''(t)}{f'(t)^2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi f(t)}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b \frac{f''(t)}{f'^2(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{f'(a)} - \frac{1}{f'(b)}$$

et donc

$$\left|\int_a^b \frac{f'(t)}{f'(t)}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi f(t)}\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{|f'(b)|} + \frac{1}{|f'(a)|} + \frac{1}{f'(a)} - \frac{1}{f'(b)}\right).$$

Selon le signe (constant) de f', le terme en $f'(b)$ ou le terme en $f'(a)$ se simplifie et on obtient

$$\left|\int_a^b \frac{f'(t)}{f'(t)}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi f(t)}\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{\mu\pi}.$$

Exercice 15 : [énoncé]

On a

$$2^n I_n = \int_0^1 \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n \mathrm{d}t$$

où l'on remarque que la fonction $t \mapsto 2t/(1+t^2)$ croît de $[0\,;1]$ sur $[0\,;1]$.

Introduisons

$$J_n = \int_0^1 \frac{2}{1+t^2}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n \mathrm{d}t \underset{t=\tan x/2}{=} \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n\,\mathrm{d}x.$$

On sait

$$J_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$$

(via $nJ_nJ_{n+1} = \pi/2$ et $J_n \sim J_{n+1}$, cf. intégrales de Wallis)

Montrons $2^n I_n \sim J_n$ en étudiant la différence

$$J_n - 2^n I_n = \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^2}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n \mathrm{d}t.$$

On a

$$0 \leq \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^2}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n \mathrm{d}t \leq \int_0^1 \frac{2}{1+t^2}\frac{1-t^2}{1+t^2}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n \mathrm{d}t$$

et le changement de variable $t = \tan x/2$ donne

$$0 \leq \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^2}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n \mathrm{d}t \leq \int_0^{\pi/2} \cos x(\sin x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}.$$

On peut alors affirmer

$$2^n I_n - J_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

puis

$$2^n I_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$$

et finalement

$$I_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2^n\sqrt{2n}}.$$

Exercice 16 : [énoncé]

Introduisons

$$F\colon x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } G\colon x \mapsto \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par intégration par parties

$$G(x) = xF(x) - \int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \big(F(x) - F(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Cas F n'est pas de signe constant

Il existe alors $a, b \in \,]0\,;1[$ tel que

$$F(a) = \min_{[0;1]} F < 0 \text{ et } F(b) = \max_{[0;1]} F > 0.$$

Par intégration d'une fonction continue, non nulle et de signe constant sur un intervalle non singulier, on a

$$G(a) < 0 \text{ et } G(b) > 0$$

et le théorème des valeurs intermédiaires assure que G s'annule.

Cas F est de signe constant

Quitte à considérer $-f$, supposons F positive.

Si F est nulle, il en est de même de f et la propriété est immédiate, sinon, on peut introduire $b \in \,]0\,;1[$ tel que

$$F(b) = \max_{[0;1]} F > 0.$$

On a alors

$$G(b) > 0 \text{ et } G(1) = -\int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t < 0$$

car $F(1)$ est nul.
À nouveau, le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure.

Exercice 17 : [énoncé]
La fonction $t \mapsto (M - f(t))(f(t) - m)$ est positive donc

$$\int_0^1 (M - f(t))(f(t) - m)\,\mathrm{d}t \geq 0.$$

En développant et par linéarité, on obtient $-mM - \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$ sachant $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
On en déduit l'inégalité demandée.

Exercice 18 : [énoncé]

(a) La fonction $x \mapsto P_n(x)$ est strictement décroissante sur $[0\,;1]$ car

$$P_n'(x) = n(x^{n-1} - 1)$$

est strictement négatif sauf pour $x = 1$.
La fonction continue P_n réalise donc une bijection strictement décroissante de $[0\,;1]$ vers $[P_n(1)\,;P_n(0)] = [2-n\,;1]$.
On en déduit l'existence et l'unicité de la solution x_n à l'équation $P_n(x) = 0$.

(b) Puisque $x_n \in [0\,;1]$, on a $x_n^{n+1} \leq x_n^n$ puis

$$P_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - (n+1)x_n + 1 \leq P_n(x_n) = 0.$$

Ainsi $P_{n+1}(x_n) \leq P_{n+1}(x_{n+1})$ et donc $x_{n+1} \leq x_n$ car la fonction P_{n+1} est strictement décroissante.
La suite (x_n) est décroissante et minorée, elle converge donc vers un réel $\ell \in [0\,;1]$.
Si $\ell > 0$ alors

$$P_n(x_n) = x_n^n - nx_n + 1 \to -\infty$$

ce qui est absurde. On conclut $\ell = 0$.

(c) On a

$$\frac{x_n^n}{nx_n} = \frac{1}{n}x_n^{n-1} \to 0$$

et donc $x_n^n = \mathrm{o}(nx_n)$.
Sachant $x_n^n - nx_n + 1 = 0$, on obtient $nx_n \sim 1$ puis

$$x_n \sim \frac{1}{n}.$$

Écrivons ensuite

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n} \text{ avec } \varepsilon_n \to 0.$$

Puisque $x_n^n = nx_n - 1$, on a

$$\varepsilon_n = x_n^n = \frac{(1+\varepsilon_n)^n}{n^n} \geq 0.$$

Nous allons montrer

$$(1+\varepsilon_n)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

ce qui permettra de déterminer un équivalent de ε_n puis de conclure.
Puisque $\varepsilon_n \to 0$, pour n assez grand, on a $|1+\varepsilon_n| \leq 2$ et alors

$$\varepsilon_n = \frac{(1+\varepsilon_n)^n}{n^n} \leq \frac{2^n}{n^n}.$$

On en déduit

$$1 \leq (1+\varepsilon_n)^n \leq \left(1 + \frac{2^n}{n^n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1 + \frac{2^n}{n^n}\right)\right).$$

Or

$$n\ln\left(1 + \frac{2^n}{n^n}\right) \sim \frac{2^n}{n^{n-1}} \to 0$$

et par encadrement

$$(1+\varepsilon_n)^n \to 1.$$

On peut conclure $\varepsilon_n \sim \frac{1}{n^n}$ et finalement

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^{n+1}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right).$$

Exercice 19 : [énoncé]
On peut écrire $n = 2^k(2p+1)$ avec $k, p \in \mathbb{N}$ et l'enjeu est d'établir $p = 0$.
Posons $\alpha = a^{2^k}$ et $\beta = b^{2^k}$. On a

$$a^n + b^n = \alpha^{2p+1} + \beta^{2p+1} = \alpha^{2p+1} - (-\beta^{2p+1}).$$

On peut alors factoriser par $\alpha - (-\beta) = \alpha + \beta$ et puisque $a^n + b^n$ est un nombre premier, on en déduit que $\alpha + \beta = 1$ ou $\alpha + \beta = a^n + b^n$. Puisque $\alpha, \beta \geq 1$, le cas $\alpha + \beta = 1$ est à exclure et puisque $\alpha \leq a^n$ et $\beta \leq b^n$, le cas $\alpha + \beta = a^n + b^n$ entraîne

$$\alpha = a^n \text{ et } \beta = b^n.$$

Puisque $a \geq 2$, l'égalité $\alpha = a^n = \alpha^{2p+1}$ entraîne $p = 0$ et finalement n est une puissance de 2.

Exercice 20 : [énoncé]
Puisque le polynôme P est non constant, on peut écrire

$$P(z) = 1 + a_q z^q + z^{q+1} Q(z)$$

avec $a_q \neq 0$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$.
Posons θ un argument du complexe a_q et considérons la suite (z_n) de terme général

$$z_n = \frac{1}{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi - \theta)/q}.$$

On a $z_n \to 0$ et

$$P(z_n) = 1 - \frac{|a_q|}{n^q} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^q}\right)$$

donc $\left|P(z_n)\right| < 1$ pour n assez grand.

Exercice 21 : [énoncé]
$(X \cos t + \sin t)^n = (X^2 + 1)Q + R$ avec $\deg R < 2$ ce qui permet d'écrire $R = aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
Cette relation doit être aussi vraie dans $\mathbb{C}[X]$ et peut donc être évaluée en i :
$(\mathrm{i} \cos t + \sin t)^n = R(\mathrm{i}) = a\mathrm{i} + b$ or $(\mathrm{i} \cos t + \sin t)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\pi/2 - nt)}$ donc $a = \sin n(\pi/2 - t)$ et $b = \cos n(\pi/2 - t)$.

Exercice 22 : [énoncé]
Remarquons que puisque P est simplement scindé sur $\mathbb{R}$, l'application du théorème de Rolle entre deux racines consécutives de P donne une annulation de P' et permet de justifier que P' est simplement scindé sur $\mathbb{R}$. Il est en de même de $P'', P''', \ldots$
Or, si le polynôme P admet deux coefficients consécutifs nuls alors l'un de ses polynômes dérivées admet 0 pour racine double. C'est impossible en vertu de la remarque qui précède.

Exercice 23 : [énoncé]
Le polynôme nul est solution. Soit P une solution non nulle.
Si a est racine de P alors a^2 l'est aussi puis $a^4, a^8, \ldots$.
Or les racines de P sont en nombre fini donc les éléments a^{2^n} $(n \in \mathbb{N})$ sont redondants. On en déduit que $a = 0$ ou a est une racine de l'unité.
De plus, si a est racine de P alors $(a-1)$ est aussi racine de $P(X+1)$ donc $(a-1)^2$ est racine de P. On en déduit que $a - 1 = 0$ ou $a - 1$ est racine de l'unité.
Si $a \neq 0, 1$ alors $|a| = |a-1| = 1$ d'où l'on tire $a = -j$ ou $-j^2$.
Au final, les racines possibles de P sont $0, 1, -j$ et $-j^2$.
Le polynôme P s'écrit donc

$$P(X) = \lambda X^\alpha (X-1)^\beta (X+j)^\gamma (X+j^2)^\delta$$

avec $\lambda \neq 0$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$.
En injectant cette expression dans l'équation

$$P(X^2) = P(X)P(X+1)$$

on obtient

$$\lambda^2 = \lambda, \alpha = \beta \text{ et } \gamma = \delta = 0.$$

On conclut

$$P(X) = \big(X(X-1)\big)^\alpha.$$

Exercice 24 : [énoncé]
Rappelons qu'un polynôme est scindé sur un corps si, et seulement si, la somme des multiplicités des racines de ce polynôme sur ce corps égale son degré.
Notons $a_0 < a_1 < \ldots < a_m$ les racines réelles de P et $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ leurs multiplicités respectives. Le polynôme P étant scindé, on peut écrire

$$\deg(P) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k.$$

On convient de dire qu'une racine de multiplicité 0 n'est en fait pas racine d'un polynôme. Avec ses termes, si a_k est racine de multiplicité $\alpha_k \geq 1$ de P alors a_k est racine de multiplicité $\alpha_k - 1$ du polynôme P' et donc racine de multiplicité au moins (et même exactement) $\alpha_k - 1$ du polynôme $P' + \alpha P$. Ainsi les a_k fournissent

$$\sum_{k=0}^{m}(\alpha_k - 1) = \deg(P) - (m+1)$$

racines comptées avec multiplicité au polynôme $P' + \alpha P$.
Considérons ensuite la fonction réelle $f\colon x \mapsto P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$.
Cette fonction est indéfiniment dérivable et prend la valeur 0 en chaque a_k.
En appliquant le théorème de Rolle à celle-ci sur chaque intervalle $[a_{k-1}\,; a_k]$, on produit des réels $b_k \in]a_{k-1}\,; a_k[$ vérifiant $f'(b_k) = 0$. Or

$$f'(x) = \big(P'(x) + \alpha P(x)\big)\mathrm{e}^{\alpha x}$$

et donc b_k est racine du polynôme $P' + \alpha P$.
Ajoutons à cela que les b_k sont deux à deux distincts et différents des précédents a_k car, par construction

$$a_0 < b_1 < a_1 < b_2 < \ldots < b_m < a_m.$$

On vient donc de déterminer m nouvelles racines au polynôme $P' + \alpha P$ et ce dernier possède donc au moins

$$\deg(P) - 1$$

racines comptées avec multiplicité.
Cas: $\alpha = 0$. Ce qui précède suffit pour conclure car $\deg(P') = \deg(P) - 1$.
Cas: $\alpha \neq 0$. Il manque encore une racine car $\deg(P' + \alpha P) = \deg(P)$. Par les racines précédentes, il est possible de factoriser $P' + \alpha P$ par un polynôme scindé Q de degré $\deg(P) - 1$ et le facteur correspondant étant de degré 1, ceci donne une écriture scindé du polynôme $P' + \alpha P$.

Exercice 25 : [énoncé]
Dans un premier temps cherchons P vérifiant $P(0) = 1$, $P(1) = 2$,$P'(0) = 3$, $P'(1) = 4$,$P''(0) = 5$ et $P''(1) = 6$ puis on considèrera $P(X-1)$ au terme des calculs.
Un polynôme vérifiant $P(0) = 1$ et $P(1) = 2$ est de la forme

$$P(X) = X + 1 + X(X-1)Q(X).$$

Pour que le polynôme P vérifie $P'(0) = 3$,$P'(1) = 4$,$P''(0) = 5$ et $P''(1) = 6$ on veut que Q vérifie $Q(0) = -2$, $Q(1) = 3$, $Q'(0) = -9/2$ et $Q'(1) = 0$.
Le polynôme $Q(X) = 5X - 2 + X(X-1)R(X)$ vérifie les deux premières conditions et vérifie les deux suivantes si $R(0) = 19/2$ et $R(1) = -5$.
Le polynôme $R = -\frac{29}{2}X + \frac{19}{2}$ convient.
Finalement

$$P(X) = X + 1 + X(X-1)\left(5X - 2 + X(X-1)\left(-\frac{29}{2}X + \frac{19}{2}\right)\right)$$

est solution du problème transformé et

$$P(X) = -\frac{29}{2}X^5 + 111X^4 - \frac{655}{2}X^3 + 464X^2 - 314X + 82$$

est solution du problème initial.
Les autres solutions s'en déduisent en observant que la différence de deux solutions possède 1 et 2 comme racine triple.
Finalement, la solution générale est

$$-\frac{29}{2}X^5 + 111X^4 - \frac{655}{2}X^3 + 464X^2 - 314X + 82 + (X-1)^3(X-2)^3Q(X)$$

avec $Q \in \mathbb{C}[X]$.

Exercice 26 : [énoncé]
Soit (x, y, z) un triplet de complexes et
$P(X) = (X-x)(X-y)(X-z) = X^3 - pX^2 + qX - r$ avec

$$\begin{cases} p = x + y + z \\ q = xy + yz + zx \\ r = xyz. \end{cases}$$

On a

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx).$$

Posons $t = x^3 + y^3 + z^3$ et $s = xy^2 + yx^2 + yz^2 + zy^2 + zx^2 + xz^2$
On a

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2) = t + s \text{ et } pq = s + 3r$$

donc $t = 3r - pq$.
Puisque x, y, z sont racines de $XP(X) = X^4 - pX^3 + qX^2 - rX$, on a

$$x^4 + y^4 + z^4 = pt - q \times (x^2 + y^2 + z^2) + rp.$$

Puisque x, y, z sont racine de $X^2P(X) = X^5 - pX^4 + qX^3 - rX^2$, on a

$$x^5 + y^5 + z^5 = p(x^4 + y^4 + z^4) - q(x^3 + y^3 + z^3) + r(x^2 + y^2 + z^2).$$

On en déduit que (x, y, z) est solution du système posé si, et seulement si,

$$\begin{cases} p^2 = 2q \\ pt + rp = 0 \\ -qt = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire, sachant $t = 3r - pq$,

$$\begin{cases} p^2 = 2q \\ p(4r - pq) = 0 \\ q(3r - pq) = 0. \end{cases}$$

Ce système équivaut encore à

$$\begin{cases} p^2 = 2q \\ 2pr = q^2 \\ 3qr = pq^2 \end{cases}$$

et aussi à

$$\begin{cases} p^2 = 2q \\ 2pr = q^2 \\ qr = 0. \end{cases}$$

Que r soit nul ou non, le système entraîne $q = 0$ et est donc équivalent au système

$$\begin{cases} p = 0 \\ q = 0. \end{cases}$$

Ainsi, un triplet (x, y, z) est solution du système proposé si, et seulement si, x, y et z sont les trois racines du polynôme $P_r(X) = X^3 - r$ (pour $r \in \mathbb{C}$ quelconque).
En introduisant $a \in \mathbb{C}$ tel que $a^3 = r$, les racines de $P_r(X)$ sont a, aj et aj^2.
Finalement les solutions du système, sont les triplets (x, y, z) avec

$$x = a, y = aj \text{ et } z = aj^2$$

pour $a \in \mathbb{C}$ quelconque.

Exercice 27 : [énoncé]

(a) Posons

$$P(X) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

On a $\deg P \leq n - 1$ et

$$\forall 1 \leq k \leq n, P(a_k) = 1.$$

Le polynôme $P - 1$ possède donc n racines et étant de degré strictement inférieur à n, c'est le polynôme nul. On conclut $P = 1$.

(b) On a

$$A'(X) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} (X - a_j)$$

donc

$$A'(a_i) = \prod_{i \neq j} (a_i - a_j).$$

La quantité

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{A'(a_i)}$$

apparaît alors comme le coefficient de X^{n-1} dans le polynôme P.
On conclut que pour $n \geq 2$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{A'(a_i)} = 0.$$

Exercice 28 : [énoncé]
Non car ces trois fonctions sont combinaisons linéaires des deux suivantes

$$x \mapsto \sin x \text{ et } x \mapsto \cos x.$$

Exercice 29 : [énoncé]
Posons $T \colon P(X) \mapsto P(X + 1)$ et $\Delta = T - \mathrm{Id}$ endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$.
$\Delta(P) = P(X + 1) - P(X)$.
On vérifie que si $\deg P \leq p$ alors $\deg \Delta(P) \leq p - 1$.
Soit $P \in \mathbb{R}_p[X]$.
Par ce qui précède, on a $\Delta^{p+1}(P) = 0$.
Or

$$\Delta^{p+1} = \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} (-1)^{p+1-k} T^k$$

car T et Id commutent.
On en déduit

$$\sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} (-1)^k P(X + k) = 0$$

et en particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} (-1)^k P(n + k) = 0.$$

Exercice 30 : [énoncé]

(a) Supposons que H est un supplémentaire commun à F_1 et F_2.
Considérons la projection p sur F_1 parallèlement à H. Par le théorème du rang, p induit par restriction un isomorphisme de tout supplémentaire de noyau vers l'image de p. On en déduit que F_1 et F_2 sont isomorphes.

(b) En dimension finie, la réciproque est vraie car l'isomorphisme entraîne l'égalité des dimensions des espaces et on peut alors montrer l'existence d'un supplémentaire commun (voir l'exercice d'identifiant 181)
C'est en dimension infinie que nous allons construire un contre-exemple.
Posons $E = \mathbb{K}[X]$ et prenons $F_1 = E$, $F_2 = X.E$. Les espaces F_1 et F_2 sont isomorphes via l'application $P(X) \mapsto XP(X)$. Ils ne possèdent pas de supplémentaires communs car seul $\{0\}$ est supplémentaire de F_1 et cet espace n'est pas supplémentaire de F_2.

Exercice 31 : [énoncé]

Les matrices triangulaires supérieures strictes sont nilpotentes.

Commençons par étudier le cas $n = 3$.
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Introduisons ses coefficients :

$$A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ g & b & f \\ h & i & c \end{pmatrix}.$$

Soit T une matrice triangulaire supérieure stricte de taille 3 :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La différence $S = A - T$ est

$$S = \begin{pmatrix} a & d-x & e-y \\ g & b & f-z \\ h & i & c \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est symétrique si, et seulement si,

$$\begin{cases} g = d - x \\ h = e - y \\ u = f - z \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = d - g \\ y = e - h \\ z = f - u. \end{cases}$$

Pour ces valeurs, on obtient l'écriture $A = S + T$ avec S symétrique et T nilpotente puisque triangulaire supérieure stricte.
Cette résolution se généralise en taille n : pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut écrire $A = S + T$ avec $S = (s_{i,j})$ matrice symétrique et $T = (t_{i,j})$ matrice triangulaire supérieure stricte données par

$$s_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } i \geq j \\ a_{j,i} & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad t_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \geq j \\ a_{i,j} - a_{j,i} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 32 : [énoncé]
Supposons que de telles matrices existent et posons $M = AB - BA$. D'une part

$$\operatorname{tr}(M) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = 0$$

et d'autre part $M^2 = \mathrm{I}_n$ et M est donc la matrice d'une symétrie, semblable à

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_q \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad p = \dim \operatorname{Ker}(M - \mathrm{I}_n) \text{ et } q = \dim \operatorname{Ker}(M + \mathrm{I}_s).$$

On a donc

$$p - q = 0$$

et l'entier $n = p + q$ est nécessairement pair.
Inversement, si n est pair, on écrit $n = 2p$ et les matrices A et B suivantes sont solutions

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_p \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{I}_p & 0 \end{pmatrix}.$$

En résumé, de telles matrices A et B existent si, et seulement si, n est un entier pair.

Exercice 33 : [énoncé]
Pour $n \geq 1$, en exploitant $M^{n+1} = M \times M^n$, on a

$$\begin{cases} a_{n+1} = aa_n + bc_n \\ b_{n+1} = ab_n + bd_n \\ c_{n+1} = ca_n + dc_n \\ d_{n+1} = cb_n + dd_n. \end{cases}$$

Par suite

$$a_{n+1} + d_{n+1} - (b_{n+1} + c_{n+1}) = (a - c)(a_n - b_n) + (b - d)(c_n - d_n).$$

Sachant $a \geq c$ et $b \geq d$, il suffit d'établir $a_n \geq b_n$ et $c_n \geq d_n$ pour conclure.
Dans le cas $n = 1$, la propriété est vérifiée.
Dans le cas $n \geq 2$, exploitons la relation $M^n = M^{n-1} \times M$

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1}a + b_{n-1}c \\ b_n = a_{n-1}b + b_{n-1}d \\ c_n = c_{n-1}a + d_{n-1}c \\ d_n = c_{n-1}b + d_{n-1}d. \end{cases}$$

On a alors

$$a_n - b_n = a_{n-1}(a-b) + b_{n-1}(c-d) \text{ et } c_n - d_n = c_{n-1}(a-b) + d_{n-1}(c-d).$$

Puisqu'il est évident que $a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}, d_{n-1} \geq 0$ (cela se montre par récurrence), on obtient sachant $a - b \geq 0$ et $c - d \geq 0$ les inégalités permettant de conclure.
Notons que l'hypothèse $b + c \leq a + d$ ne nous a pas été utile.

Exercice 34 : [énoncé]

(a) Si M_k majore les coefficients de A^k alors nM_k majore les coefficients de A^{k+1}. On en déduit que les coefficients de A^k sont majorés par

$$n^{k-1}.$$

On peut sans doute proposer plus fin.

(b) Posons T la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de coefficients $(i, i+1)$ qui valent 1. On remarque

$$A = I_n + T + \cdots + T^{n-1}.$$

On en déduit

$$(I - T)A = I_n - T^n$$

et puisque $T^n = O_n$, on obtient

$$A^{-1} = I - T.$$

(c) Le calcul des puissances de A^{-1} est immédiat

$$(A^{-1})^k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} T^j$$

et donc le coefficient d'indice (i,j) de $(A^{-1})^k$ est

$$a_{i,j}^{-k} = (-1)^{j-i}\binom{k}{j-i} = (-1)^{j-i}\frac{k(k-1)\dots(k-j+i+1)}{(j-i)(j-i-1)\dots 1}.$$

Cette formule laisse présumer que le coefficient d'indice (i,j) de A^k est

$$a_{i,j}^{k} = (-1)^{j-i}\frac{(-k)(-k-1)\dots(-k-j+i+1)}{(j-i)(j-i-1)\dots 1} = \binom{k+j-i-1}{j-i}$$

ce que l'on démontre en raisonnant par récurrence.

Exercice 35 : [énoncé]
Les matrices A_i sont des matrices de projection et donc

$$\operatorname{tr} A_i = \operatorname{rg} A_i.$$

On en déduit

$$\sum_{i=1}^{k} \operatorname{rg} A_i = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{tr} A_i = \operatorname{tr} \mathrm{I}_n = n.$$

Or

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} \sum_{i=1}^{k} A_i \subset \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Im} A_i \subset \mathbb{R}^n.$$

Ainsi

$$\sum_{i=1}^{k} \operatorname{Im} A_i = \mathbb{R}^n$$

et la relation sur les rangs donne

$$\sum_{i=1}^{k} \dim(\operatorname{Im} A_i) = \dim \mathbb{R}^n.$$

Les espaces $\operatorname{Im} A_i$ sont donc en somme directe

$$\bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{Im} A_k = \mathbb{R}^n.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on peut écrire

$$x = A_1 x + \cdots + A_k x.$$

En particulier, pour le vecteur A_jx, on obtient

$$A_jx = A_1A_jx + \cdots + A_jx + \cdots + A_kA_jx.$$

La somme directe précédente donne alors par unicité d'écriture

$$\forall 1 \le i \ne j \le k, A_iA_jx = 0$$

et peut alors conclure.

Exercice 36 : [énoncé]

On commence par se ramener au cas où $A = \mathrm{I}_n$.

Puisque la matrice A est inversible, on obtient en multipliant à gauche par son inverse

$$A + Y^tX \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \iff \mathrm{I}_n + A^{-1}Y^tX \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

En considérant la colonne $Y' = A^{-1}Y$ au lieu de Y, on peut considérer que le problème est résolu dès lors que le cas $A = \mathrm{I}_n$ est élucidé. Supposons désormais $A = \mathrm{I}_n$ et étudions l'inversibilité de $M = \mathrm{I}_n + Y^tX$.

Le déterminant de M est lié au polynôme caractéristique de Y^tX.

La matrice Y^tX est de rang inférieur à 1, son noyau est donc de dimension $n-1$. Or le noyau d'une matrice correspond à l'espace propre associé à la valeur propre 0. On peut donc affirmer que 0 est racine de multiplicité au moins $n-1$ du polynôme caractéristique de Y^tX. Cependant, on sait aussi que ce polynôme est unitaire, de degré n et que le coefficient du terme d'exposant $n-1$ est lié à la trace de la matrice. On peut donc écrire

$$\chi_{Y^tX} = X^n - \operatorname{tr}\bigl(Y^tX\bigr)X^{n-1}.$$

En particulier,

$$\begin{aligned}\det\bigl(\mathrm{I}_n + {}^tXY\bigr) &= (-1)^n \det\bigl((-1).\mathrm{I}_n - Y^tX\bigr)\\ &= (-1)^n\chi_{Y^tX}(-1) = 1 + \operatorname{tr}\bigl(Y^tX\bigr).\end{aligned}$$

On peut alors conclure.

Exercice 37 : [énoncé]

En retirant à chaque ligne la précédente (et en commençant par la dernière) on obtient

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} C_0^0 & C_1^1 & \cdots & C_n^n \\ 0 & C_1^0 & \cdots & C_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & C_n^0 & \cdots & C_{2n-1}^{n-1} \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

en vertu de la formule du triangle de Pascal

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k.$$

En développant selon la première colonne

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} C_1^0 & \cdots & C_n^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ C_n^0 & \cdots & C_{2n-1}^{n-1} \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Via $C_n \leftarrow C_n - C_{n-1}, \ldots, C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et en exploitant $C_p^0 = C_{p+1}^0$, on obtient

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} C_0^0 & \cdots & C_{n-1}^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n-1}^0 & \cdots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix} = D_n.$$

Finalement

$$D_n = 1.$$

Exercice 38 : [énoncé]

(a) Par l'absurde, supposons que P_n possède une racine multiple z. Celle-ci vérifie

$$P_n(z) = P_n'(z) = 0.$$

On en tire

$$z^n - z + 1 = 0 (1) \text{ et } nz^{n-1} = 1 \ (2)$$

(1) et (2) donnent

$$(n-1)z = n \ (3)$$

(2) impose $|z| \le 1$ alors que (3) impose $|z| > 1$. C'est absurde.

(b) Posons $\chi(X)$ le polynôme caractéristique de la matrice étudiée. On vérifie

$$\chi(z_i) = \begin{vmatrix} 1 + z_1 - z_i & & 1 & & (1) \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & & \\ (1) & & 1 & & 1 + z_n - z_i \end{vmatrix}.$$

En retranchant la i-ème colonne à toutes les autres et en développant par rapport à la $i$ème ligne, on obtient

$$\chi(z_i) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} (z_j - z_i) = (-1)^{n-1} P'(z_i).$$

Cependant les polynômes χ et P' ne sont pas de même degré... En revanche, les polynômes χ et $(-1)^n(P-P')$ ont même degré n, même coefficient dominant $(-1)^n$ et prennent les mêmes valeurs en les n points distincts $z_1, \dots, z_n$. On en déduit qu'ils sont égaux. En particulier le déterminant cherché est

$$\chi(0) = (-1)^n \big(P(0) - P'(0)\big) = 2(-1)^n.$$

Exercice 39 : [énoncé]

La matrice H est équivalente à la matrice J_1 dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position $(1,1)$. Notons $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$H = QJ_1P$$

et introduisons $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ déterminée par

$$A = QBP.$$

La relation

$$\det(A+H)\det(A-H) \leq \det A^2$$

équivaut alors à la relation

$$\det(B+J_1)\det(B-J_1) \leq \det B^2.$$

Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de B et $\mathcal{B} = (E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On a

$$\det(B+J_1) = \det_{\mathcal{B}}(C_1+E_1, C_2, \dots, C_n) \text{ et } \det(B-J_1) = \det_{\mathcal{B}}(C_1-E_1, C_2, \dots, C_n).$$

Par multilinéarité du déterminant

$$\det(B+J_1) = \det B + \det_{\mathcal{B}}(E_1, C_2, \dots, C_n) \text{ et } \det(B-J_1) = \det B - \det_{\mathcal{B}}(E_1, C_2, \dots, C_n)$$

d'où l'on tire

$$\det(B+J_1)\det(B-J_1) = \det B^2 - \det_{\mathcal{B}}(E_1, C_2, \dots, C_n)^2 \leq \det B^2.$$

Exercice 40 : [énoncé]

Non, en effet considérons

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}.$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $u_{np} - u_n = \sum_{k=n+1}^{np} \frac{1}{k\ln k}$

On en déduit

$$0 \leq u_{np} - u_n \leq \frac{np-(n+1)+1}{n \ln n} = \frac{p-1}{\ln n} \to 0$$

alors que

$$u_n \geq \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} = \int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \Big[\ln(\ln t)\Big]_2^{n+1} \to +\infty.$$

Exercice 41 : [énoncé]

On peut écrire

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} u_k(n)$$

avec $u_k(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-k}$.

On peut alors présumer

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k} = \frac{1}{1-1/\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}.$$

Il ne reste plus qu'à l'établir...

Puisque $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x > -1$, on a

$$\left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = \exp\big(n \ln(1-k/n)\big) \leq \mathrm{e}^{-k}$$

et donc on a déjà

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n \leq \frac{1}{1-1/\mathrm{e}}.$$

De plus, pour $N \in \mathbb{N}$, on a pour tout $n \geq N$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n \geq \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-k}.$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-k} \geq \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} - \varepsilon$$

et pour ce N fixé, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N'$,

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n \geq \sum_{n=0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \geq \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-k} - \varepsilon.$$

On a alors pour tout $n \geq N'$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n \geq \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} - 2\varepsilon.$$

On peut donc conclure

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n \to \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}.$$

Exercice 42 : [énoncé]
Posons $v_n = \sum_{k=1}^n u_k - nu_n$. On a

$$v_{n+1} - v_n = n(u_n - u_{n+1}) \geq 0.$$

La suite (v_n) est croissante et majorée donc convergente. Posons ℓ sa limite.
On a

$$u_n - u_{n+1} = \frac{1}{n}(v_{n+1} - v_n)$$

donc

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k}(v_{k+1} - v_k) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k)$$

ce qui donne

$$u_n \leq \frac{1}{n}(\ell - v_n).$$

On en déduit $0 \leq nu_n \leq \ell - v_n$ et donc $nu_n \to 0$ puis $\sum_{k=1}^n u_k \to \ell$.
Finalement $\sum u_n$ converge.

Exercice 43 : [énoncé]
Si $\sum u_n$ converge alors en notant S sa somme (strictement positive), $v_n \sim u_n/S$ et donc $\sum v_n$ converge.
Supposons désormais que $\sum u_n$ diverge et montrons qu'il en est de même de $\sum v_n$.
Par la décroissante de $t \mapsto 1/t$, on a

$$\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} = \frac{u_n}{S_{n-1}}.$$

En sommant ces inégalités

$$\int_{S_1}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{u_k}{S_{k-1}}.$$

Or

$$\int_{S_1}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln S_n - \ln S_1 \to +\infty$$

car $S_n \to +\infty$ donc par comparaison$\sum \frac{u_n}{S_{n-1}}$ diverge.
Puisque

$$\frac{u_n}{S_{n-1}} = \frac{u_n}{S_n - u_n} = v_n \frac{1}{1 - v_n}.$$

Si $v_n \not\to 0$ alors $\sum v_n$ diverge.
Si $v_n \to 0$ alors $v_n \sim \frac{u_n}{S_{n-1}}$ et à nouveau $\sum v_n$ diverge.
Finalement $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature.

Exercice 44 : [énoncé]
$u_n = R_{n-1} - R_n$ et la décroissance de $t \to 1/t$,

$$\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{R_{n-1} - R_n}{R_n} = \frac{u_n}{R_n}.$$

On a

$$\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln R_{n-1} - \ln R_n$$

donc la série à termes positifs $\sum \int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge car $\ln R_n \to -\infty$ puisque $R_n \to 0$.
Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n/R_n$ diverge.

$$\frac{u_n}{R_n} = \frac{u_n}{R_{n-1} - u_n} = \frac{u_n}{R_{n-1}} \frac{1}{1 - u_n/R_{n-1}}.$$

Si $u_n/R_{n-1} \not\to 0$ alors $\sum u_n/R_{n-1}$ diverge.
Si $u_n/R_{n-1} \to 0$ alors $\frac{u_n}{R_{n-1}} \sim \frac{u_n}{R_n}$ et donc $\sum u_n/R_{n-1}$ diverge encore.
Dans tous les cas, $\sum u_n/R_{n-1}$ diverge.