Endomorphismes des espaces euclidiens

Matrices orthogonales

Exercice 1 [02744] [Correction]
Soit $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. On suppose que 1 n'est pas valeur propre de A.

(a) Étudier la convergence de
$$\frac{1}{p+1}(I_n + A + \cdots + A^p)$$
lorsque $p \to +\infty$.

(b) La suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 2 [02746] [Correction]
Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Quelles sont les A de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $J + A$ soit inversible ?

Exercice 3 [02749] [Correction]
(Transformation de Cayley)

(a) Si A est une matrice antisymétrique réelle, que peut-on dire des valeurs propres complexes de A ?

(b) Soit
$$\varphi\colon A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \mapsto (\mathrm{I}_n - A)(\mathrm{I}_n + A)^{-1}.$$
Montrer que φ réalise une bijection de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sur
$$\left\{\Omega \in GO_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, -1 \notin \mathrm{Sp}(\Omega)\right\}.$$

Exercice 4 [03610] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dira que M a la propriété (P) si, et seulement si, il existe une matrice $U \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que M soit la sous-matrice de U obtenue en supprimant les dernières ligne et colonne de U et que U soit une matrice orthogonale, soit encore si, et seulement si, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n+1} \in \mathbb{R}$ tels que
$$U = \begin{pmatrix} & & & \alpha_{2n+1} \\ & M & & \vdots \\ & & & \alpha_{n+2} \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_n & \alpha_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

(a) Ici
$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$
est une matrice diagonale. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les λ_i pour que M ait la propriété (P).

(b) Ici $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que M ait la propriété (P).

(c) Si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = US$.
On admettra qu'une telle décomposition existe encore si M n'est pas inversible.

(d) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque ait la propriété (P).
Cette condition portera sur ${}^tMM$.

(e) Montrer le résultat admis dans la question c).
Énoncé fourni par le CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA

Exercice 5 [04167] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer qu'il existe une matrice O orthogonale et une matrice T triangulaire supérieure telles que $A = OT$.
On pourra commencer par le cas où la matrice A est inversible.

La fonction `numpy.linalg.qr` de **Python** donne une telle décomposition.

(b) On pose
$$N_1(A) = \sum_{1\le i,j\le n} |a_{i,j}|.$$
Montrer que N_1 admet un minimum m_n et un maximum M_n sur $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

(c) Utilisation de **Python**.
Écrire une fonction `randO(n)` qui génère une matrice aléatoire A et qui renvoie la matrice orthogonale O de la question précédente.
Écrire une fonction N_1 de la variable matricielle A qui renvoie $N_1(A)$. On pourra utiliser les fonctions `numpy.sum` et `numpy.abs`.
Écrire une fonction `test(n)` qui, sur 1 000 tests, renvoie le minimum et le maximum des valeurs de N_1 pour des matrices orthogonales aléatoires.

(d) Déterminer la valeur de m_n. Pour quelles matrices, ce minimum est-il atteint ?
Montrer qu'il y a un nombre fini de telles matrices.

(e) Montrer que $M_n \le n\sqrt{n}$ et que $M_3 < 3\sqrt{3}$.

Isométries vectorielles

Exercice 6 [00345] [Correction]
Soient $f \in \mathrm{O}(E)$ et V un sous-espace vectoriel de E.
Montrer que :

$$V \text{ est stable pour } f \text{ si, et seulement si, } V^\perp \text{ l'est.}$$

Exercice 7 [02730] [Correction]
Soit E un espace euclidien. Quels sont les endomorphismes de E tels que pour tout sous-espace vectoriel V de E

$$f(V^\perp) \subset (f(V))^\perp ?$$

Exercice 8 [00342] [Correction]
Soit $f \in \mathrm{O}(E)$ diagonalisable. Montrer que f est une symétrie.

Exercice 9 [03082] [Correction]
Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme de E conservant l'orthogonalité :

$$\forall x, y \in E, (x \mid y) = 0 \implies (f(x) \mid f(y)) = 0.$$

(a) Calculer $(u + v \mid u - v)$ pour u, v vecteurs unitaires.

(b) Établir qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \alpha\|x\|.$$

(c) Conclure qu'il existe $g \in \mathrm{O}(E)$ vérifiant $f = \alpha.g$

Exercice 10 [02740] [Correction]
Dans un espace euclidien E, soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que deux des trois propriétés suivantes entraînent la troisième :

(i) f est une isométrie vectorielle ;
(ii) $f^2 = -\mathrm{Id}$;
(iii) $f(x)$ est orthogonal à x pour tout x.

Exercice 11 [02731] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{M}$ l'espace vectoriel réel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose

$$\varphi\colon (A, B) \in \mathcal{M}^2 \mapsto \operatorname{tr} {}^t AB.$$

(a) Montrer que φ est un produit scalaire.

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\Omega \in \mathcal{M}$ pour que $M \mapsto \Omega M$ soit φ-orthogonale.

Exercice 12 [03076] [Correction]
Soit $(E, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ un espace euclidien.
Pour $\varphi \in \mathrm{O}(E)$, on note $M(\varphi) = \operatorname{Im}(\varphi - \mathrm{Id}_E)$ et $F(\varphi) = \operatorname{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}_E)$.
Si $u \in E \setminus \{0\}$, s_u désigne la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $u^\perp$.

(a) Soit $\varphi \in \mathrm{O}(E)$. Montrer que $M(\varphi) \oplus^\perp F(\varphi) = E$.

(b) Si $(u_1, \dots, u_k)$ est libre, montrer :

$$M(s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_k}) = \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_k).$$

(c) On suppose $(u_1, \dots, u_k)$ libre. Soient $v_1, \dots, v_k \in E \setminus \{0\}$ tels que

$$s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_k} = s_{v_1} \circ \dots \circ s_{v_k}.$$

Montrer que $(v_1, \dots, v_k)$ est libre.

Exercice 13 [02748] [Correction]
On note $(\cdot \mid \cdot)$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour toute famille $u = (u_1, \dots, u_p) \in (\mathbb{R}^n)^p$ on pose

$$M_u = ((u_i \mid u_j))_{1 \le i,j \le p}.$$

(a) Montrer que la famille $(u_1, \dots u_p)$ est libre si, et seulement si, M_u est inversible.

(b) On suppose qu'il existe $u = (u_1, \dots, u_p)$ et $v = (v_1, \dots, v_p)$ telles que $M_u = M_v$.
Montrer qu'il existe $f \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$ telle que $f(u_i) = v_i$ pour tout i.

Exercice 14 [02554] [Correction]
Soient u une isométrie de E euclidien et $v = u - \mathrm{Id}_E$.

(a) Montrer que $\operatorname{Ker} v = (\operatorname{Im} v)^\perp$.

(b) Soit
$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k.$$
Montrer que $\left(u_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, pour tout vecteur x, vers le projeté orthogonal de x sur $\operatorname{Ker} v$.

Exercice 15 [03379] [Correction]
Soit u un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien E de dimension n.

(a) On pose $v = u - \mathrm{Id}$. Montrer
$$\operatorname{Ker} v = (\operatorname{Im} v)^\perp.$$
(b) Soit $x \in E$. Justifier l'existence de $(x_1, y) \in \operatorname{Ker} v \times E$ tel que
$$x = x_1 + v(y).$$
Montrer
$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u^k(x) = x_1 + \frac{1}{N}(u^N(y) - y).$$
(c) On note p la projection orthogonale sur $\operatorname{Ker} v$. Montrer
$$\forall x \in E, \lim_{N\to+\infty}\left\| p(x) - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u^k(x)\right\| = 0.$$

Exercice 16 [03743] [Correction]
p, q sont deux entiers strictement positifs. A, B deux matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ telles que ${}^tAA = {}^tBB$.

(a) Comparer $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Ker} B$.

(b) Soit f (respectivement g) l'application linéaire de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^p$ de matrice A (respectivement B) dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^q$ et $\mathbb{R}^p$. On munit $\mathbb{R}^p$ de sa structure euclidienne canonique. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}^q, \langle f(x), f(y)\rangle = \langle g(x), g(y)\rangle.$$
(c) Soient $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ et $(\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_r)$ deux bases d'un espace euclidien F de dimension r vérifiant
$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,r\}^2, \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle = \langle \varepsilon'_i, \varepsilon'_j\rangle.$$
Montrer qu'il existe une application orthogonale s de F telle que
$$\forall i \in \{1,\dots,r\}, s(\varepsilon_i) = \varepsilon'_i.$$
(d) Montrer qu'il existe $U \in \mathrm{O}_p(\mathbb{R})$ tel que $A = UB$. [Énoncé fourni par le concours CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA]

Exercice 17 [03741] [Correction]
Soit E un espace euclidien ; on note $\mathrm{O}(E)$ le groupe des endomorphismes orthogonaux de E et on définit l'ensemble
$$\Gamma = \left\{ u \in \mathcal{L}(E) \;\middle|\; \forall x \in E, \left\|u(x)\right\| \le \|x\| \right\}.$$
(a) Montrer que Γ est une partie convexe de $\mathcal{L}(E)$ qui contient $\mathrm{O}(E)$.

(b) Soit $u \in \Gamma$ tel qu'il existe $(f, g) \in \Gamma^2$ vérifiant
$$f \ne g \text{ et } u = \frac{1}{2}(f+g).$$
Montrer que $u \notin \mathrm{O}(E)$.

(c) Soit v un automorphisme de E ; montrer qu'il existe $\rho \in \mathrm{O}(E)$ et s un endomorphisme autoadjoint positif de E tels que $v = \rho \circ s$.
On admet que ce résultat reste valable si on ne suppose plus v bijectif.

(d) Soit $u \in \Gamma$ qui n'est pas un endomorphisme orthogonal.
Montrer qu'il existe $(f, g) \in \Gamma^2$ tels que
$$f \ne g \text{ et } u = \frac{1}{2}(f+g).$$
(e) Démontrer le résultat admis à la question c). [Énoncé fourni par le concours CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA]

Isométries de l'espace de dimension 3

Exercice 18 [01610] [Correction]
Soit E un espace vectoriel euclidien orienté.
Étudier l'endomorphisme f de E dont la matrice dans une base orthonormale directe (i, j, k) est
$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 19 [01611] [Correction]
Soit E un espace vectoriel euclidien orienté muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (i, j, k)$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Former une base orthonormée directe $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ telle que $v, w \in P : x + z = 0$.

(b) Former la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ et reconnaître f.

Exercice 20 [01612] [Correction]
E désigne un espace vectoriel euclidien orienté muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (i, j, k)$. Déterminer la nature, et préciser les éléments caractéristique, de l'endomorphisme f de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est donnée ci-après :

(a) $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$

(b) $A = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}$

(c) $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$

Exercice 21 [01613] [Correction]
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

(a) Pour quels $a, b \in \mathbb{R}$, a-t-on $A \in \mathrm{O}(3)$?

(b) Préciser alors la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique serait A.

Exercice 22 [01616] [Correction]
Soit f une rotation d'axe D dirigé et orienté par un vecteur unitaire u et d'angle $\theta \neq 0\ [(2\pi)]$.
Soit s une réflexion de E montrer que f et s commutent si, et seulement si, D est orthogonale au plan de réflexion de s ou bien D est incluse dans ce plan et f est un retournement.

Exercice 23 [01617] [Correction]
Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

(a) Montrer que deux rotations de même axe ou deux retournements d'axes orthogonaux commutent.
Soit f et g deux rotations de E, autres que Id_E, telles que $f \circ g = g \circ f$.

(b) Soit u un vecteur unitaire appartenant à l'axe de la rotation f.
Montrer que $g(u)$ appartient à l'axe de la rotation f et en déduire que $g(u) = u$ ou $g(u) = -u$.

(c) Dans le cas où $g(u) = u$, conclure que les rotations f et g ont même axe.

(d) Dans le cas où $g(u) = -u$, justifier que les axes de f et g sont orthogonaux puis que f et g sont des retournements autour de ceux-ci.

Exercice 24 [02924] [Correction]
Soient E un espace vectoriel euclidien, $u \in E$ non nul, $g \in \mathrm{O}(E)$. On note σ la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $u^\perp$. Décrire $g \circ \sigma \circ g^{-1}$.

Exercice 25 [03186] [Correction]
E désigne un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (i, j, k)$.
Rechercher les rotations R de E telles que

$$R(i) = -j \text{ et } R(i - j + k) = i - j + k.$$

Exercice 26 [03190] [Correction]
Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (i, j, k)$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, déterminer les éléments caractéristiques de

$$\mathrm{Rot}_{k,\pi/2} \circ \mathrm{Rot}_{\cos\theta i + \sin\theta j, \pi}.$$

Réduction des endomorphismes orthogonaux

Exercice 27 [02562] [Correction]
Soit $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale.
Soit λ une valeur propre complexe de Ω et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ vérifiant

$$\Omega X = \lambda X.$$

En calculant de deux façons

$${}^t\left(\overline{\Omega X}\right)\Omega X$$

établir que λ est de module 1.

Exercice 28 [03343] [Correction]
Soit $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que si λ est une valeur propre complexe de A alors $|\lambda| = 1$.

(b) Soit λ une valeur propre complexe non réelle de A et $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.
On pose $X = \mathrm{Re}(Z)$ et $Y = \mathrm{Im}(Z)$. Montrer que $\mathrm{Vect}(X, Y)$ est stable par A.

(c) Montrer que les colonnes X et Y ont alors même norme et sont orthogonales.
Quelle est la nature de l'endomorphisme induit par la matrice A sur l'espace $\mathrm{Vect}(X, Y)$?

Exercice 29 [03487] [Correction]
Déterminer les applications $u \in \mathrm{O}(E)$ vérifiant

$$(u - \mathrm{Id})^2 = \tilde{0}.$$

Endomorphismes symétriques

Exercice 30 [00350] [Correction]
Quels sont les automorphismes orthogonaux symétriques d'un espace vectoriel euclidien E ?

Exercice 31 [00362] [Correction]
Soient f et g deux endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien E.
Montrer que $f \circ g$ est symétrique si, et seulement si, $f \circ g = g \circ f$.

Exercice 32 [00083] [Correction]
Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, a un vecteur unitaire de E et k un réel avec $k \neq -1$.

(a) Montrer que

$$f(x) = x + k(x \,|\, a)a$$

définit un endomorphisme symétrique de E.

(b) Montrer que f est un automorphisme.

(c) Étudier les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Exercice 33 [00363] [Correction]
Soit p une projection d'un espace vectoriel euclidien E.
Montrer que la projection p est orthogonale si, et seulement si, p est symétrique.

Exercice 34 [03430] [Correction]
On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire définie par

$$(P \,|\, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que la relation

$$u(P)(x) = \int_0^1 (x + t)^n P(t)\,\mathrm{d}t$$

définit un endomorphisme u de l'espace E.

(b) Vérifier que l'endomorphisme u est symétrique

(c) Calculer la trace de u.

Exercice 35 [03118] [Correction]
Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension non nulle.

(a) Montrer que si p est un projecteur orthogonal de E alors p est symétrique.

Soient p et q deux projecteurs orthogonaux de E.

(b) Montrer que $p \circ q \circ p$ est symétrique.

(c) Montrer que

$$(\mathrm{Im}\, p + \mathrm{Ker}\, q)^\perp = \mathrm{Im}\, q \cap \mathrm{Ker}\, p.$$

(d) En déduire que $p \circ q$ est diagonalisable.

Exercice 36 [02408] [Correction]
On se place dans l'espace euclidien E.

1) Soit p un projecteur de E.
Établir l'équivalence des conditions suivantes :
(i) p est un projecteur orthogonal ;
(ii) $\forall x \in E, \left\|p(x)\right\| \leq \|x\|$;
(iii) p est symétrique.

2) Soient p et q deux projecteurs orthogonaux.

(a) Montrer que $p \circ q \circ p$ est symétrique.

(b) Montrer que
$$(\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q)^\perp = \operatorname{Im} q \cap \operatorname{Ker} p.$$

(c) Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.

Exercice 37 [03486] [Correction]

(a) Vérifier que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ par :
$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 5x_2y_2 - 2(x_1y_2 + x_2y_1).$$

(b) Pour quelle(s) valeur(s) de $a \in \mathbb{R}$ l'endomorphisme u canoniquement représenté par
$$M = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
est-il symétrique ?

Exercice 38 [03591] [Correction]

Soient $a \in \mathbb{R}^*$, u un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ euclidien.

(a) Montrer que l'application f_a définie par
$$f_a(x) = x + a\langle x, u\rangle u$$
est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(b) Montrer qu'il existe un unique $a' \neq 0$ vérifiant
$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \left\|f_{a'}(x)\right\| = \|x\|.$$
Donner la nature de $f_{a'}$ (on pourra s'intéresser à $f_{a'}^2$).

(c) Montrer que f_a est un endomorphisme symétrique et déterminer ses éléments propres.

Théorème spectral

Exercice 39 [00364] [Correction]

Soit f un endomorphisme symétrique de E vérifiant
$$\forall x \in E, (f(x)\,|\,x) = 0.$$
Déterminer f.

Exercice 40 [03939] [Correction]

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E.
On pose
$$k = \sup_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} |\lambda|.$$
Vérifier
$$\forall x \in E, \left\|u(x)\right\| \leq k\left\|x\right\|.$$

Exercice 41 [00368] [Correction]

Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension n et S sa sphère unité
$$S = \left\{x \in E \,\middle|\, \|x\| = 1\right\}.$$
Pour $p \in \{1, \dots, n\}$, on note $\mathcal{V}_p$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension p.
Soit f un endomorphisme symétrique de E de valeurs propres $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ comptées avec multiplicité. Établir
$$\lambda_p = \min_{V \in \mathcal{V}_p} \max_{x \in S \cap V} (f(x)\,|\,x).$$

Exercice 42 [03941] [Correction]

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E de dimension n non nulle.
On pose
$$H_u = \left\{x \in E \,\middle|\, (u(x)\,|\,x) = 1\right\}.$$
Énoncer une condition nécessaire et suffisante portant sur le spectre de u pour qu'il existe un vecteur unitaire élément de H_u.

Équations matricielles avec transposition

Exercice 43 [03751] [Correction]

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = A^2$.

(a) Montrer que $A^3 = \mathrm{I}_n$ et que A est orthogonale.

(b) Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A.
Montrer que le noyau de $f^2 + f + \mathrm{Id}$ est de dimension paire et en déduire la forme de la matrice de f dans une base bien choisie.

Exercice 44 [03923] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant
$$A^3 = A^t A.$$
Montrer que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice 45 [02716] [Correction]
Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le système
$$\begin{cases} M^2 + M + I_n = 0 \\ {}^t MM = M^t M. \end{cases}$$

Exercice 46 [02600] [Correction]
On étudie l'équation $M^t MM = I_n$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer qu'une solution est une matrice symétrique.

(b) En déduire les solutions de l'équation étudiée.

Exercice 47 [02715] [Correction]
Trouver les M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^t M = M^2$ et que M n'ait aucune valeur propre réelle.

Matrices commutant avec leur transposée

Matrices symétriques

Exercice 48 [02614] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique.
On suppose $A^n = O_n$. Déterminer A.

Exercice 49 [01330] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^t AA = A^t A$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.

(a) Montrer que ${}^t AA = 0$.

(b) En déduire que $A = 0$.

Exercice 50 [00370] [Correction]
Soit A une matrice réelle carrée d'ordre n.

(a) Montrer que
$$\chi_{{}^t AA} = \chi_{A^t A}.$$

(b) Montrer que les matrices ${}^t AA$ et $A^t A$ sont semblables.

Exercice 51 [03491] [Correction]
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

(a) Justifier que le spectre de A est une partie finie non vide de $\mathbb{R}$.
On pose
$$\lambda_{\min} = \min \operatorname{Sp} A \text{ et } \lambda_{\max} = \max \operatorname{Sp} A.$$

(b) Montrer
$$\forall 1 \le i \le n, \lambda_{\min} \le a_{i,i} \le \lambda_{\max}.$$

Exercice 52 [00372] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres positives. Établir
$$(\det A)^{1/n} \le \frac{1}{n} \operatorname{tr} A.$$

Exercice 53 [02401] [Correction]
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer, si $A^t A = B^t B$, qu'il existe $Q \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $B = AQ$.

Exercice 54 [02750] [Correction]
Si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifie $M^p = I_n$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, que vaut M^2 ?

Exercice 55 [02751] [Correction]
Montrer que le rang de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est égal au nombre de valeurs propres non nulles (comptées avec leur ordre de multiplicité) de ${}^t AA$.

Exercice 56 [03077] [Correction]
Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
Établir l'existence de $U \in \mathrm{O}_m(\mathbb{R})$ et $V \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $N = UMV$ vérifie :
$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}, i \ne j \implies N_{i,j} = 0.$$

Exercice 57 [03088] [Correction]
Soit
$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & (0)\\ c_1 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1}\\ (0) & & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$
vérifiant $b_kc_k>0$ pour tout $1\le k\le n-1$.

(a) Montrer qu'il existe une matrice diagonale inversible D vérifiant
$$D^{-1}AD\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

(b) En déduire que A est diagonalisable.

Exercice 58 [03162] [Correction]
Soient $A,B\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $p\in\mathbb{N}$. On suppose que $A^{2p+1}=B^{2p+1}$. Montrer que $A=B$.

Exercice 59 [03163] [Correction]
Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les matrices ${}^tAA$ et A^tA sont orthogonalement semblable *i.e.*
$$\exists P\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R}),{}^t\Omega({}^tAA)\Omega=A^tA.$$

Exercice 60 [03488] [Correction]
Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant
$$\mathrm{Sp}\big({}^tAA-A^tA\big)\subset\mathbb{R}_+.$$
Montrer que A et ${}^tA$ commutent.

Exercice 61 [03489] [Correction]
Soit $A\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2=A$. Établir
$$\|A\|_1\le n\sqrt{\operatorname{tr}A}.$$

Exercice 62 [03664] [Correction]
Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A={}^tMM$.

(a) Montrer que les valeurs propres de A sont positives.

(b) Soit $(X_i)_{1\le i\le n}$ une famille orthonormée de colonnes telle que la famille $(MX_i)_{1\le i\le n}$ soit orthogonale.
Montrer que les X_i sont des vecteurs propres de A.

Exercice 63 [03762] [Correction]
Soient $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. On pose
$$B=A^3+A+I_n.$$
Montrer que A est un polynôme en B.

Exercice 64 [03758] [Correction]
Soient $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique et positive. On pose
$$B=A^2+A+I_n.$$
Montrer que A est un polynôme en B.

Exercice 65 [03738] [Correction]

(a) $A=\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $B=\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$
À quelles conditions nécessaires et suffisantes sur a,b,c existe-t-il $P\in\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ telle que $A=PB^tP$?
À quelles conditions nécessaires et suffisantes sur a existe-t-il $b,c\in\mathbb{R}$ et $P\in\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ tels que $A=PB^tP$?
À quelles conditions nécessaires et suffisantes sur c existe-t-il $a,b\in\mathbb{R}$ et $P\in\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ tels que $A=PB^tP$?

(b) $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $B=\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$
À quelles conditions nécessaires et suffisantes sur a,b,c,d existe-t-il $P\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $A=PBP^{-1}$?
À quelles conditions nécessaires et suffisantes sur a existe-t-il $b,c,d\in\mathbb{R}$ et $P\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tels que $A=PBP^{-1}$?
À quelles conditions nécessaires et suffisantes sur d existe-t-il $a,b,c\in\mathbb{R}$ et $P\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tels que $A=PBP^{-1}$?

(c) Si $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, justifier l'existence de
$$\max_{P,Q\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})}\det\big(PA^tP+QB^tQ\big).$$

(d) Calculer ce maximum si $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

(e) Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\sup_{P,Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} \det\left(PAP^{-1} + QBQ^{-1}\right)$$

est-il fini en général ? (Si oui, le montrer, si non, donner un contre-exemple).

(f) De manière générale, si $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})$ déterminer

$$\max_{P_1,\dots,P_k \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})} \det\left(P_1 A_1 {}^t P_1 + \dots + P_k A_k {}^t P_k\right)$$

[Énoncé fourni par le concours CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA]

Exercice 66 [03919] [Correction]
Soit $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 2$.

(a) Soient $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E, $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ dans E^n. On introduit

$$A = \mathrm{Mat}_e(x_1, \dots, x_n) \text{ et } B = \mathrm{Mat}_e(y_1, \dots, y_n).$$

Déterminer les coefficients de la matrice ${}^t AB$.

(b) Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une base de E. Montrer qu'il existe une unique famille $(y_1, \dots, y_n)$ de E telle que

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, \langle y_i, x_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

Montrer que $(y_1, \dots, y_n)$ est une base de E et exprimer la matrice de passage de la base $(x_1, \dots, x_n)$ à la base $(y_1, \dots, y_n)$ à l'aide de la matrice

$$M = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

On considère dans la suite une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de E vérifiant

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \|x_i\| = 1, \forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, i \neq j \implies \langle x_i, x_j \rangle < 0$$

et

$$\exists v \in E, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \langle x_i, v \rangle > 0.$$

(c) Montrer que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E.

(d) On pose $M = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S = I_n - M/n$. Montrer que S est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(S) \subset \left]0\,;1\right[$.

(e) Montrer que les coefficients de M^{-1} sont positifs.

(f) Soit $(y_1, \dots, y_n)$ déduit de $(x_1, \dots, x_n)$ comme dans b). Montrer

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, \langle y_i, y_j \rangle \geq 0.$$

Exercice 67 [01331] [Correction]
Soient A et B dans $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$ et $B^2 = B$.

(a) La matrice AB est-elle diagonalisable ?

(b) Encadrer les valeurs propres de AB.

Exercice 68 [04108] [Correction]
Soient $n \geq 3$, $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, A, B deux colonnes non colinéaires dans E et $M = AB^T + BA^T$.

(a) Justifier que M est diagonalisable.

(b) Déterminer $\mathrm{rg}(M)$ en fonction de A et B.

(c) Déterminer le spectre de M et décrire les sous-espaces propres associés.

Exercice 69 [04997] [Correction]
Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) On suppose que ${}^t XAY = {}^t XBY$ pour toutes colonnes X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que les matrices A et B sont égales.

(b) On suppose que ${}^t XAX = {}^t XBX$ pour toute colonne X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Les matrices A et B sont-elles nécessairement égales ?

(c) On suppose de plus que les matrices A et B sont symétriques. Montrer que celles-ci sont alors égales.

Orthodiagonalisation de matrices symétriques

Exercice 70 [02757] [Correction]
Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficient sont égaux à 1. Trouver $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que ${}^t PJP = D$.

Exercice 71 [03398] [Correction]
Justifier que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable et trouver P telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.

Exercice 72 [02413] [Correction]
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Justifiez que la matrice A est diagonalisable.

(b) Déterminer P et D dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que ${}^tP = P^{-1}$, D est diagonale et ${}^tPAP = D$.

Exercice 73 [04157] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ à coefficients tous positifs.
On veut montrer que M admet un vecteur propre à coordonnées toutes positives, associé à une valeur propre positive.

(a) Trouver les valeurs propres de

$$\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}.$$

(b) Montrer que si $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ a des valeurs propres toutes positives, ses coefficients ne sont pas forcément tous positifs.

(c) Montrer que

$$\alpha = \sup\left\{\langle X, MX\rangle \;\middle|\; X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\| = 1\right\}$$

existe et est valeur propre de M.

(d) En considérant la valeur absolue d'un vecteur X à définir, établir la propriété voulue.

(e) Cette propriété reste-t-elle vraie si la matrice M n'est pas symétrique ?

Matrices antisymétriques

Exercice 74 [02503] [Correction]
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M + {}^tM$ soit nilpotente.
Montrer que M est antisymétrique.

Exercice 75 [03084] [Correction]
Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique réelle est positif ou nul.

Exercice 76 [02606] [Correction]
Soit E un espace vectoriel euclidien dont le produit scalaire est noté $(\cdot \mid \cdot)$
Une application $f\colon E \to E$ est dite antisymétrique lorsque

$$\forall x, y \in E, (f(x) \mid y) = -(x \mid f(y)).$$

(a) Montrer qu'une telle application est linéaire (ce qui permet dès lors de parler d'endomorphisme antisymétrique)

(b) Montrer que la matrice dans une base orthonormée d'un endomorphisme antisymétrique de E est elle-même antisymétrique.

(c) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique, λ une valeur propre complexe de A et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ une colonne non nulle vérifiant

$$AX = \lambda X.$$

En calculant de deux façons ${}^t\overline{X}AX$, établir

$$\lambda \in \mathrm{i}\mathbb{R}.$$

(d) En déduire que le déterminant d'un endomorphisme antisymétrique est un réel positif.

Exercice 77 [00375] [Correction]
Un endomorphisme u d'un espace euclidien E est dit antisymétrique si

$$\forall x \in E, (u(x) \mid x) = 0.$$

Soit u un endomorphisme antisymétrique.

(a) Quelles sont les seules valeurs propres réelles possibles pour u ?
À quelle condition un endomorphisme antisymétrique est-il diagonalisable ?

(b) Établir que, pour tout $x, y \in E$,

$$(u(x) \mid y) = -(x \mid u(y)).$$

En déduire que la matrice A dans une base orthonormée d'un endomorphisme antisymétrique est elle-même antisymétrique.

(c) Soient A une matrice antisymétrique réelle, λ une valeur propre complexe de la matrice A et X un vecteur propre associé.
En étudiant ${}^t\overline{X}AX$, établir que $\lambda \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

Exercice 78 [03748] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = -A$.

(a) Montrer que si n est impair alors A n'est pas inversible.

(b) Montrer que si n est pair, $\det A \geq 0$. Sous quelle condition l'inégalité est-elle stricte ?

Exercice 79 [03749] [Correction]
Montrer que A antisymétrique réelle d'ordre n est semblable à

$$B = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où C est une matrice inversible d'ordre pair.

Exercice 80 [03618] [Correction]
Soit f un endomorphisme bijectif d'un espace euclidien E vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, (f(x) \mid y) = -(x \mid f(y)).$$

(a) Montrer que pour tout vecteur x de E, les vecteurs x et $f(x)$ sont orthogonaux.

(b) Montrer que l'endomorphisme $s = f \circ f$ est symétrique.
Soit a l'une de ses valeurs propres et V_a le sous-espace propre associé.

(c) Soit $x \in V_a \setminus \{0_E\}$. Montrer que

$$(s(x) \mid x) = a\|x\|^2 = -\left\|f(x)\right\|^2$$

et en déduire que $a < 0$.

(d) On considère toujours $x \in V_a \setminus \{0_E\}$
Montrer que $F = \operatorname{Vect}(x, f(x))$ et $F^\perp$ sont stables par f.
Montrer que l'endomorphisme induit sur F par f a une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

dans une base orthonormée (on précisera b)

(e) Conclure que la dimension de E est paire.

Exercice 81 [02552] [Correction]
On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, muni de sa structure euclidienne canonique. Le produit scalaire est noté $(\cdot \mid \cdot)$.
On dit qu'une application $f : E \to E$ est antisymétrique si

$$\forall x, y \in E, (x \mid f(y)) = -(f(x) \mid y).$$

(a) Montrer qu'une application antisymétrique de E est linéaire.
Que dire de sa matrice dans la base canonique de E ?

(b) Montrer que l'ensemble des endomorphismes antisymétriques de E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et donner sa dimension.

Exercice 82 [03922] [Correction]
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} & 1 \\ -1 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer A^2. La matrice A est-elle diagonalisable ?

(b) Les matrices antisymétriques complexes sont-elles toujours diagonalisables ?

Exercice 83 [04168] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer qu'il existe un unique couple $(A, S) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que

$$M = A + S, {}^tA = -A, {}^tS = S.$$

(b) Montrer que M et ${}^tM$ commutent si, et seulement si, A et S commutent.

(c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = -A$. On suppose que A est inversible. Montrer que n est pair et qu'il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $(a_1, \dots, a_p) \in (\mathbb{R}_+^*)^p$ tels que $A = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale par blocs avec des blocs $D_1, \dots, D_p$ où

$$D_i = \begin{pmatrix} 0 & -a_i \\ a_i & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Énoncer et prouver un théorème de réduction pour les matrices normales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M{}^tM = {}^tMM$.

Endomorphismes symétriques à valeurs propres positives

Exercice 84 [03692] [Correction]
Soit p un entier naturel impair et u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien de dimension n.

(a) Montrer qu'il existe un unique endomorphisme symétrique v tel que $v^p = u$.

(b) Que se passe-t-il si p est pair ?

(c) Si p est pair et u à valeurs propres positives ?

(d) Si p est pair et u et v à valeurs propres positifs ?

Exercice 85 [03942] [Correction]
Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ symétrique à valeurs propres strictement positives.

(a) Montrer qu'il existe un endomorphisme s symétrique vérifiant $s^2 = v$.

(b) Soit u un endomorphisme symétrique de E. Établir que $v^{-1} \circ u$ est diagonalisable.

Exercice 86 [00009] [Correction]
Soit u un endomorphisme symétrique à valeurs propres positives d'un espace vectoriel euclidien E.

(a) Montrer qu'il existe un endomorphisme v symétrique à valeurs propres positives tel que $u = v^2$.

(b) Établir l'unicité de v en étudiant l'endomorphisme induit par v sur les sous-espaces propres de u.

Exercice 87 [02753] [Correction]
Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique à valeurs propres strictement positives.
Montrer que, pour tout $x \in E$,

$$\|x\|^4 \le \langle u(x), x\rangle \langle u^{-1}(x), x\rangle.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait égalité.

Matrices symétriques à valeurs prores positives

Exercice 88 [00010] [Correction]
Soient a, b, c trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et

$$M = \begin{pmatrix} a.a & a.b & a.c \\ b.a & b.b & b.c \\ c.a & c.b & c.c \end{pmatrix}.$$

Montrer que M diagonalisable, de valeurs propres positives et $\det M \ge 0$.

Exercice 89 [02549] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives.
Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$${}^tXAX \in \mathbb{R}_+.$$

Exercice 90 [00011] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX \ge 0 \iff \operatorname{Sp} A \subset \mathbb{R}_+.$$

Exercice 91 [03091] [Correction]
On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres positives.
Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On veut montrer qu'il existe une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que

$$B^2 = A.$$

(a) Prouver l'existence.

On considère maintenant $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ vérifiant $B^2 = A$.

(b) Établir par le lemme de décomposition des noyaux que pour tout $\lambda > 0$

$$\operatorname{Ker}\big(B - \sqrt{\lambda}\mathrm{I}_n\big) = \operatorname{Ker}\big(A - \lambda\mathrm{I}_n\big).$$

(c) Montrer aussi

$$\operatorname{Ker} B = \operatorname{Ker} A.$$

(d) Conclure l'unicité.

Exercice 92 [00015] [Correction]

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres positives.

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On veut montrer qu'il existe une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que

$$B^2 = A.$$

(a) Prouver l'existence.

(b) Établir que si $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ vérifie $B^2 = A$ alors pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp} A$,

$$\operatorname{Ker}(B - \sqrt{\lambda}I_n) \subset \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$$

puis

$$\operatorname{Ker}(B - \sqrt{\lambda}I_n) = \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n).$$

(c) Conclure l'unicité.

Exercice 93 [03090] [Correction]

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres positives. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

(a) Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ qui est un polynôme en S vérifiant

$$A^2 = S.$$

(b) Soit $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ vérifiant $B^2 = S$. Montrer que B commute avec A puis que $B = A$.

Exercice 94 [00016] [Correction]

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres positives.

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

Exercice 95 [00018] [Correction]

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A = {}^tMM \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\operatorname{Sp} A \subset \mathbb{R}_+$.

Inversement, pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{Sp} A \subset \mathbb{R}_+$, établir qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tMM$.

Exercice 96 [03752] [Correction]

Soient A une matrice symétrique réelle à valeurs propres positives et U une matrice orthogonale de même taille.

Comparer $\operatorname{tr}(AU)$ et $\operatorname{tr}(UA)$ à $\operatorname{tr} A$.

Exercice 97 [02759] [Correction]

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques à valeurs propres positives.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(AU) \le \operatorname{tr} A$.

(a) Déterminer le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

(b) Soit $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(xB) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

(c) Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

(d) Étudier la réciproque.

(e) Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ il existe $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = SU$.

Exercice 98 [02514] [Correction]

Soit A une matrice symétrique réelle positive de taille n.

Pour $\alpha > 0$, on note

$$\mathcal{S}_\alpha = \big\{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \,\big|\, \operatorname{Sp} M \subset \mathbb{R}_+ \text{ et } \det(M) \ge \alpha\big\}.$$

Le but est de montrer la formule :

$$\inf_{M \in \mathcal{S}_\alpha} \operatorname{tr}(AM) = n(\alpha \det(A))^{1/n}.$$

(a) Démontrer la formule dans le cas $A = I_n$.

(b) Montrer que toute matrice A symétrique réelle positive peut s'écrire $A = {}^tPP$ avec P matrice carrée de taille n.

(c) Démontrer la formule.

(d) Le résultat est-il encore vrai si $\alpha = 0$?

(e) Le résultat reste-t-il vrai si A n'est que symétrique réelle ?

Exercice 99 [03927] [Correction]
Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ avec $\operatorname{Sp} A \subset \mathbb{R}_+$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose

$$AB + BA = 0.$$

Montrer $AB = BA = 0$.

Exercice 100 [03943] [Correction]
(Décomposition de Cartan) On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices de valeurs propres strictement positives.
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

(a) Établir que ${}^tAA \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

(b) Montrer qu'il existe une matrice $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = {}^tAA$.

(c) Conclure

$$\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \exists (O, S) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), A = OS.$$

(d) Établir l'unicité de cette écriture.

Exercice 101 [04996] [Correction]
Soit A une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

(a) Montrer que $\varphi\colon (X, Y) \mapsto {}^tXAY$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

(b) En déduire qu'il existe une matrice triangulaire supérieure T telle que $A = {}^tTT$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

(a) Posons
$$U_p = \frac{1}{p+1}(I_n + A + \cdots + A^p).$$
On a
$$(I - A)U_p = \frac{1}{p+1}(I_n - A^{p+1}) \to 0$$
car pour la norme euclidienne
$$\forall M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \|M\| = \sqrt{n}.$$
Puisque $1 \notin \operatorname{Sp} A$, $U_p \to 0$.

(b) Par l'absurde si A^p converge vers B alors pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,
$A^{p+1}X = AA^pX$ donne à la limite $BX = ABX$. Or $1 \notin \operatorname{Sp} A$ donc $BX = 0$ et puisque ceci vaut pour tout X, $B = 0$.
Or $\|A^p\| = \sqrt{n} \not\to 0$. Absurde.
La suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est divergente.

Exercice 2 : [énoncé]

$J + A$ n'est pas inversible si, et seulement si, il existe une colonne non nulle vérifiant $AX = -JX$.
On a alors ${}^tAJX = -X$ et donc $-1 \in \operatorname{Sp}({}^tAJ) = \operatorname{Sp}(JA)$ avec une réciproque immédiate.
Le polynôme caractéristique de JA étant
$$X^{n-1}(X - \sum_{i,j} a_{i,j})$$
on obtient le critère
$$J + A \text{ est inversible si, et seulement si, } \sum_{i,j} a_{i,j} \neq -1.$$

Exercice 3 : [énoncé]

(a) Soit λ une valeur propre complexe de A et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ une colonne propre associée.
D'une part ${}^t\overline{X}AX = \lambda {}^t\overline{X}X$, d'autre part ${}^t\overline{X}AX = {}^t\overline{AX}X = -\overline{\lambda}{}^t\overline{X}X$.
Puisque ${}^t\overline{X}X \in \mathbb{R}_+^*$, on obtient $\overline{\lambda} = -\lambda$ donc $\lambda \in i\mathbb{R}$.

(b) Pour tout $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $\Omega = \varphi(A)$ est bien définie car $-1 \notin \operatorname{Sp} A$.
${}^t\Omega\Omega = (\mathrm{I}_n - A)^{-1}(\mathrm{I}_n + A)(\mathrm{I}_n - A)(\mathrm{I}_n + A)^{-1}$ or $\mathrm{I}_n + A$ et $\mathrm{I}_n - A$ commutent donc ${}^t\Omega\Omega = \mathrm{I}_n$.
De plus, si $\Omega X = -X$ alors $(\mathrm{I}_n - A)X = -(\mathrm{I}_n + A)X$ (car $\mathrm{I}_n - A$ et $(\mathrm{I}_n + A)^{-1}$ commutent) et donc $X = 0$.
Ainsi l'application $\varphi\colon \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \to \left\{\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, -1 \notin \operatorname{Sp}(\Omega)\right\}$ est bien définie.
Si $\varphi(A) = \varphi(B)$ alors $(\mathrm{I}_n - A)(\mathrm{I}_n + B) = (\mathrm{I}_n + A)(\mathrm{I}_n - B)$. En développant et en simplifiant on obtient $A = B$ et donc l'application φ est injective.
Enfin soit $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $-1 \notin \operatorname{Sp}(\Omega)$.
Posons $A = (\Omega + \mathrm{I}_n)^{-1}(\mathrm{I}_n - \Omega)$ qui est bien définie car $-1 \notin \operatorname{Sp}\Omega$.
On a ${}^tA = (\mathrm{I}_n - \Omega^{-1})(\Omega^{-1} + \mathrm{I}_n)^{-1} = (\Omega - \mathrm{I}_n)\Omega^{-1}\Omega(\mathrm{I}_n + \Omega)^{-1} =$
$(\Omega - \mathrm{I}_n)(\mathrm{I}_n + \Omega)^{-1} = -A$ et $\varphi(A) = \Omega$.
Finalement φ est bijective.

Exercice 4 : [énoncé]

(a) Si M possède la propriété (P) alors les colonnes de la matrice U introduites doivent être unitaires donc
$$\forall 1 \le i \le n, \lambda_i^2 + \alpha_i^2 = 1$$
et elles doivent être deux à deux orthogonales donc
$$\forall 1 \le i \neq j \le n, \alpha_i\alpha_j = 0.$$
Cette dernière condition ne permet qu'au plus un α_k non nul et alors $|\lambda_k| \le 1$ tandis que pour $i \neq k$, $|\lambda_i| = 1$.
Inversement, si tous les λ_i vérifient $|\lambda_i| = 1$ sauf peut-être un vérifiant $|\lambda_k| < 1$, alors on peut construire une matrice U affirmant que la matrice M possède la propriété (P) en posant
$$\forall 1 \le i \neq k \le n, \alpha_i = \alpha_{2n+2-i} = 0, \alpha_k = \alpha_{2n+2-k} = \sqrt{1 - \lambda_k^2} \text{ et } \alpha_{n+1} = -\lambda_k.$$

(b) La matrice M est orthogonalement diagonalisable, on peut donc écrire
$$M = {}^tPDP \text{ avec } P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \text{ et } D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$
Considérons alors la matrice
$$Q = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Si la matrice M possède la propriété (P) alors on peut introduire $U \in \mathrm{O}_{n+1}(\mathbb{R})$ prolongeant M et alors

$$V = {}^tQUQ = \begin{pmatrix} & & & \beta_{2n+1} \\ & D & & \vdots \\ & & & \beta_{n+2} \\ \beta_1 & \cdots & \beta_n & \beta_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_{n+1}(\mathbb{R})$$

ce qui entraîne que les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de M sont toutes égales à ± 1 sauf peut être une élément de $[-1\,;1]$.
La réciproque est immédiate.

(c) La matrice ${}^tMM$ est symétrique définie positive. On peut donc en diagonalisant orthogonalement celle-ci déterminer une matrice S symétrique définie positive telle que

$${}^tMM = S^2.$$

On pose alors $U = MS^{-1}$ et on vérifie $U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ par le calcul de ${}^tUU$.

(d) Supposons que la matrice $M = US$ possède la propriété (P). En multipliant par la matrice

$$V = \begin{pmatrix} {}^tU & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_{n+1}(\mathbb{R})$$

on démontre que la matrice S possède aussi la propriété (P).
Puisque les valeurs propres de S sont les racines des valeurs propres de ${}^tMM$, on obtient la condition nécessaire suivante : les valeurs propres de ${}^tMM$ doivent être égales à 1 sauf peut-être une dans $[0\,;1]$ (ces valeurs propres sont nécessairement positives).
La réciproque est immédiate.

(e) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour p assez grand, la matrice

$$M_p = M + \frac{1}{p} I_n$$

est assurément inversible ce qui permet d'écrire $M_p = U_p S_p$ avec U_p orthogonale et S_p symétrique réelle.
La suite (U_p) évolue dans le compact $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, elle possède une valeur d'adhérence $U_\infty \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et la matrice $S_\infty = U_\infty^{-1} M$ est symétrique réelle en tant que limite d'une suite de matrices symétriques réelles.
On peut donc conclure.

Exercice 5 : [énoncé]

(a) *Cas:* A inversible. La matrice A est la matrice de passage de la base canonique c de $\mathbb{R}^n$ à une base e. Par le procédé de Schmidt, on orthonormalise (pour le produit scalaire canonique) cette base en une base e'. La matrice de passage de e à e' est triangulaire supérieure et la matrice de passage de la base canonique c à e' est orthogonale. Par formule de changement de base

$$A = \mathrm{Mat}_c\, e = \mathrm{Mat}_c\, e' \times \mathrm{Mat}_{e'}\, e$$

ce qui conduit à l'identité voulue.
Cas général: On introduit $A_p = A + \frac{1}{p}\mathrm{I}_n$. Pour p assez grand, A_p est inversible et on peut écrire $A_p = O_p T_p$ avec O_p orthogonale et T_p triangulaire supérieure. La suite (O_p) évolue dans un compact : il existe une extraction $(O_{\varphi(p)})$ de limite $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Puisque $T_{\varphi(p)} = O_{\varphi(p)}^{-1} A_{\varphi(p)}$ est de limite $O^{-1}A$ et évolue dans le fermé des matrices triangulaires supérieures, on peut conclure à l'écriture $A = OT$.

(b) La fonction N_1 est une fonction continue, à valeurs réelles définie sur le compact non vide $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$: elle admet un minimum et un maximum.

(c)
```
import random as rnd
import numpy as np
import numpy.linalg

def randO(n):
    A = np.zeros((n,n))
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            A[i,j] = 2 * rnd.random() - 1
    q,r = numpy.linalg.qr(A)
    return q

def N1(A):
    S = 0
    N,M = np.shape(A)
    for i in range(N):
        for j in range(M):
            S = S + np.abs(A[i,j])
    return S

def test(n):
    A = randO(n)
    m = N1(A)
    M = N1(A)
```

```
    for t in range(1000):
        A = randO(n)
        N = N1(A)
        if N < m:
            m = N
        if N > M:
            M = N
    return m,M
```

(d) Si $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, on a $a_{i,j} \in [-1\,;1]$ donc $|a_{i,j}| \geq a_{i,j}^2$ puis

$$N_1(A) \geq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 \geq \sum_{i=1}^n 1 = n$$

car les lignes d'une matrice orthogonale sont unitaires. De plus, pour $A = \mathrm{I}_n \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, on a $N_1(A) = n$. On en déduit $m_n = n$.
Une matrice A de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $N_1(A) = n$ doit satisfaire $|a_{i,j}| = a_{i,j}^2$ et donc $a_{i,j} \in \{0, 1, -1\}$. De plus, les rangées étant unitaires, ils ne peut figurer qu'un coefficient non nul par rangée et celui-ci est alors un 1 ou un -1. La réciproque est immédiate.
Ces matrices sont évidemment en nombre fini, précisément, il y en a $2^n n!$ (il y a $n!$ matrice de permutation et 2^n choix de signe pour chaque coefficient 1).

(e) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$N_1(A) \leq \sum_{i=1}^n \left(\left(\sum_{j=1}^n 1^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j}^2\right)^{1/2} \right) = n\sqrt{n}.$$

Pour qu'il y ait égalité, il faut qu'il y ait égalité dans chaque inégalité de Cauchy-Schwarz. Ceci entraîne que chaque ligne $(|a_{i,j}|)_{1 \leq j \leq n}$ est colinéaire à $(1, \ldots, 1)$ et donc

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!], \forall (j,k) \in [\![1\,;n]\!]^2, |a_{i,j}| = |a_{i,k}|.$$

La ligne étant de plus unitaire, les $a_{i,j}$ sont égaux à $\pm 1/\sqrt{n}$.
Lorsque $n = 3$, les coefficients de A sont égaux à $\pm 1/\sqrt{3}$. Cependant, il n'est pas possible de construire des rangées orthogonales avec de tels coefficients : le cas d'égalité est impossible quand $n = 3$.

Exercice 6 : [énoncé]
$(\Longrightarrow)$ Si V est stable pour f alors $f(V) \subset V$ et puisque f est un automorphisme $f(V) = V$. Soient $x \in V^\perp$ et $y \in V$

$$(f(x)\,|\,y) = (x\,|\,f^{-1}(y)) = 0$$

car $f^{-1}(y) \in V$ donc $f(x) \in V^\perp$ puis $V^\perp$ stable par f.
$(\Longleftarrow)$ Si $V^\perp$ stable par f alors $V = V^{\perp\perp}$ aussi

Exercice 7 : [énoncé]
Un tel endomorphisme conserve l'orthogonalité. Pour tout x, y vérifiant $\|x\| = \|y\|$, on a $x + y$ et $x - y$ orthogonaux donc $f(x) + f(y)$ et $f(x) - f(y)$ aussi. Par suite $\|f(x)\| = \|f(y)\|$. Ainsi un tel endomorphisme transforme une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ en une famille orthogonale aux vecteurs isométriques. Par suite $f = \lambda g$ avec $g \in \mathrm{O}(E)$.
La réciproque est immédiate.

Exercice 8 : [énoncé]
Soit λ valeur propre de f. Pour x vecteur propre, on a $f(x) = \lambda x$ avec $\|f(x)\| = \|x\|$ d'où $\lambda = \pm 1$. Une diagonalisation de f est alors réalisée avec des 1 et des -1 sur la diagonale, c'est une symétrie.

Exercice 9 : [énoncé]

(a) $(u + v\,|\,u - v) = \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0$ pour u et v unitaires.

(b) Soient u et v des vecteurs unitaires de E.
$u + v$ et $u - v$ sont orthogonaux donc $f(u + v)$ et $f(u - v)$ le sont aussi.
Or par linéarité

$$f(u + v) = f(u) + f(v) \text{ et } f(u - v) = f(u) - f(v)$$

de sorte que l'orthogonalité de ces deux vecteurs entraîne

$$\|f(u)\| = \|f(v)\|.$$

Ainsi les vecteurs unitaires de E sont envoyés par f sur des vecteurs ayant tous la même norme $\alpha \in \mathbb{R}_+$.
Montrons qu'alors

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \alpha\|x\|.$$

Soit $x \in E$.
Si $x = 0$ alors on a $f(x) = 0$ puis $\|f(x)\| = \alpha\|x\|$.
Si $x \neq 0$ alors en introduisant le vecteur unitaire $u = x/\|x\|$, on a $\|f(u)\| = \alpha$ puis $\|f(x)\| = \alpha\|x\|$

(c) Si $\alpha = 0$ alors $f = \tilde{0}$ et n'importe quel $g \in \mathrm{O}(E)$ convient.
Si $\alpha \neq 0$ alors introduisons l'endomorphisme

$$g = \frac{1}{\alpha} f.$$

La relation obtenue en b) assure que g conserve la norme et donc $g \in \mathrm{O}(E)$ ce qui permet de conclure.

Exercice 10 : [énoncé]
Supposons (i) et (ii).
Pour $x \in E$, on a

$$(f(x)\,|\,x) = -(f(x)\,|\,f^2(x)) = -(x\,|\,f(x))$$

et donc

$$(f(x)\,|\,x) = 0.$$

Supposons (ii) et (iii)
Le vecteur $x + f(x)$ et son image par f sont orthogonaux donc

$$(x + f(x)\,|\,f(x + f(x))) = (x + f(x)\,|\,f(x) - x) = 0$$

puis $\left\|f(x)\right\|^2 = \|x\|^2$. Ainsi f est une isométrie.
Supposons (i) et (iii)
Pour tous vecteurs x et y

$$(f^2(x) + x\,|\,f(y)) = (f(x)\,|\,y) + (x\,|\,f(y)).$$

Or

$$(f(x+y)\,|\,x+y) = (f(x)\,|\,y) + (f(y)\,|\,x) = 0$$

donc

$$(f^2(x) + x\,|\,f(y)) = 0.$$

Puisque f est surjective, $f^2(x) + x = 0_E$.

Exercice 11 : [énoncé]

(a) On reconnaît le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Posons $f\colon M \mapsto \Omega M$. $(f(M)\,|\,f(N)) = \mathrm{tr}({}^tM{}^t\Omega\Omega N)$.
f est φ-orthogonale si, et seulement si, pour tout $M, N \in \mathcal{M}$,
$(M\,|\,{}^t\Omega\Omega N) = (M\,|\,N)$ *i.e.* pour tout $N \in \mathcal{M}$, ${}^t\Omega\Omega N = N$ *i.e.* ${}^t\Omega\Omega = \mathrm{I}_n$.
Ainsi f est φ-orthogonale si, et seulement si, Ω l'est.

Exercice 12 : [énoncé]

(a) Soient $y \in M(\varphi)$ et $x \in F(\varphi)$.
$\varphi(x) = x$ et il existe $a \in E$ tel que $y = \varphi(a) - a$.
On a alors

$$\langle x, y\rangle = \langle x, \varphi(a)\rangle - \langle x, a\rangle = \langle \varphi(x), \varphi(a)\rangle - \langle x, a\rangle = 0$$

car $\varphi \in \mathrm{O}(E)$.
Ainsi, $M(\varphi)$ et $F(\varphi)$ sont orthogonaux et par la formule du rang

$$\dim M(\varphi) + \dim F(\varphi) = \dim E$$

donne

$$M(\varphi) \oplus^\perp F(\varphi) = E.$$

(b) Par récurrence sur $k \geq 1$.
Pour $k = 1$: la propriété est immédiate.
Supposons la propriété vraie au rang $k \geq 1$.
Soient $(u_1, \dots, u_{k+1})$ une famille libre et $\varphi = s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_{k+1}} \in \mathrm{O}(E)$.
Étudions $F(\varphi)$.
Soit $x \in F(\varphi)$. La relation $\varphi(x) = x$ donne

$$s_{u_2} \circ \cdots \circ s_{u_{k+1}}(x) = s_{u_1}(x)$$

puis

$$s_{u_2} \circ \cdots \circ s_{u_{k+1}}(x) - x = s_{u_1}(x) - x.$$

Or $s_{u_1}(x) - x \in \mathrm{Vect}(u_1)$ et par hypothèse de récurrence
$s_{u_2} \circ \cdots \circ s_{u_{k+1}}(x) - x \in \mathrm{Vect}(u_2, \dots, u_{k+1})$.
Puisque la famille $(u_1, \dots, u_{k+1})$ est libre, on obtient

$$s_{u_2} \circ \cdots \circ s_{u_{k+1}}(x) - x = s_{u_1}(x) - x = 0.$$

Ainsi x est point fixe de $s_{u_2} \circ \cdots \circ s_{u_{k+1}}$ et de s_{u_1} et donc

$$x \in \mathrm{Vect}(u_2, \dots, u_{k+1})^\perp \cap \mathrm{Vect}(u_1)^\perp = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{k+1})^\perp.$$

Par suite

$$F(\varphi) \subset \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{k+1})^\perp.$$

L'autre inclusion étant immédiate, on obtient

$$F(\varphi) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{k+1})^\perp$$

puis

$$M(\varphi) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{k+1}).$$

Récurrence établie.

(c) Posons
$$\varphi = s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_k} = s_{v_1} \circ \cdots \circ s_{v_k}.$$
Par l'étude qui précède
$$F(\varphi) = \operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_k)^\perp.$$
De façon immédiate
$$\operatorname{Vect}(v_1, \ldots, v_k)^\perp \subset F(\varphi).$$
En passant à l'orthogonal
$$\operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_k) \subset \operatorname{Vect}(v_1, \ldots, v_k).$$
Puisque la famille $(u_1, \ldots, u_k)$ est supposé libre, un argument de dimension permet d'affirmer que la famille $(v_1, \ldots, v_k)$ l'est aussi.

Exercice 13 : [énoncé]

(a) Notons $C_1, \ldots, C_p$ les colonnes de M_u.
Si $(u_1, \ldots, u_p)$ est liée alors il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ non tous nuls vérifiant
$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0_E.$$
On a alors
$$\forall 1 \le i \le p, (\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p \mid u_i) = 0$$
et donc
$$\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_p C_p = 0.$$
La matrice M_u n'est alors pas inversible.
Inversement, supposons la matrice M_u non inversible.
Il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ non tous nuls vérifiant
$$\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_p C_p = 0$$
et donc
$$\forall 1 \le i \le p, (\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p \mid u_i) = 0.$$
Ainsi
$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p \in \operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_p)^\perp$$
or
$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p \in \operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$$
donc
$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0_E$$
et la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est liée.

(b) Posons $r = \operatorname{rg}(u_1, \ldots, u_p)$ et quitte à permuter les vecteurs $(u_1, \ldots, u_p)$, supposons que les r premiers vecteurs de la famille u sont indépendants. On permute de la même façon les vecteurs $(v_1, \ldots, v_p)$ et ainsi l'hypothèse $M_u = M_v$ est conservée. Par l'étude qui précède, on peut affirmer que les r premiers vecteurs de la famille v sont indépendants et que les autres en sont combinaisons linéaires.
Considérons alors l'application linéaire $h\colon \operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_r) \to \operatorname{Vect}(v_1, \ldots, v_r)$ déterminée par
$$\forall 1 \le k \le r, h(u_k) = v_k.$$
Pour tout $x = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r$, on a par construction $h(x) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r$.
Or
$$\|x\|^2 = \sum_{i,j=1}^{r} \lambda_i \lambda_j (u_i \mid u_j) \text{ et } \|h(x)\|^2 = \sum_{i,j=1}^{r} \lambda_i \lambda_j (v_i \mid v_j)$$
et puisque $(u_i \mid u_j) = (v_i \mid v_j)$, on obtient
$$\|x\|^2 = \|h(x)\|^2.$$
L'application h conserve donc la norme
Pour tout $k \in \{r+1, \ldots, p\}$, u_k est combinaison linéaire des $u_1, \ldots, u_r$ ce qui permet d'écrire
$$u_k = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r.$$
On a alors pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$,
$$(u_k - (\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r) \mid u_i) = 0$$
et donc
$$(v_k - (\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r) \mid v_i) = 0.$$
On en déduit $v_k = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_r$ puis $v_k = h(u_k)$.
Enfin, on prolonge h en un automorphisme orthogonal solution défini sur $\mathbb{R}^n$ en introduisant une application linéaire transformant une base orthonormée de $\operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_r)^\perp$ en une base orthonormée de $\operatorname{Vect}(v_1, \ldots, v_r)^\perp$

Exercice 14 : [énoncé]

(a) Soient $x \in \operatorname{Ker} v$ et $y = v(a) \in \operatorname{Im} v$. On a$u(x) = x$ et $y = u(a) - a$ donc
$$(x \mid y) = (u(x) \mid u(a)) - (x \mid a) = 0$$
car u conserve le produit scalaire. Ainsi $\operatorname{Ker} v \subset (\operatorname{Im} v)^\perp$ puis l'égalité par égalité des dimensions.

(b) Pour $x \in E$, on peut écrire $x = a + b$ avec $a \in \operatorname{Ker} v$ et $b \in (\operatorname{Ker} v)^\perp = \operatorname{Im} v$.
On a $u(a) = a$ et donc $u^k(a) = a$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'autre part, il existe c tel que $b = v(c) = u(c) - c$ de sorte que $u^k(b) = u^{k+1}(c) - u^k(c)$. Par télescopage,

$$u_n(x) = a + \frac{1}{n}u^n(c) - \frac{1}{n}c.$$

Puisque u conserve la norme :

$$\left\|\frac{1}{n}u^n(c)\right\| = \frac{1}{n}\|c\| \to 0$$

et donc

$$u_n(x) \to a.$$

Exercice 15 : [énoncé]

(a) Soit $x \in \operatorname{Ker} v$ et $y = v(a) \in \operatorname{Im} v$. On a $u(x) = x$ et $y = u(a) - a$ donc

$$(x \,|\, y) = (u(x) \,|\, u(a)) - (x \,|\, a) = 0.$$

Car u conserve le produit scalaire.
On en déduit $\operatorname{Ker} v \subset (\operatorname{Im} v)^\perp$ puis l'égalité par un argument de dimension.

(b) Par ce qui précède, on peut affirmer

$$E = \operatorname{Ker} v \oplus^\perp \operatorname{Im} v$$

et cette supplémentarité assure l'existence de x_1 et y.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$u^k(x_1) = x_1 \text{ et } u^k(v(y)) = u^{k+1}(y) - u^k(y).$$

En sommant et après télescopage, on obtient

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u^k(x) = x_1 + \frac{1}{N}(u^N(y) - y).$$

(c) Avec les notations qui précèdent $p(x) = x_1$. Ainsi

$$\left\|p(x) - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u^k(x)\right\| = \frac{\|u^N(y) - y\|}{N} \le \frac{\|u^N(y)\| + \|y\|}{N} = \frac{2}{N}\|y\| \to 0.$$

Exercice 16 : [énoncé]

(a) Soit $X \in \operatorname{Ker} A$. On a ${}^tBBX = {}^tAAX = 0$ donc ${}^tX{}^tBBX = 0$. Or ${}^tX{}^tBBX = \|BX\|^2$ et donc $X \in \operatorname{Ker} B$.Ainsi $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} B$ et même $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} B$ par une démarche symétrique.

(b) En notant X, Y les colonnes des coordonnées de X et Y

$$\langle f(x), f(y)\rangle = {}^t(AX)AY = {}^tX{}^tAAY$$

et

$$\langle g(x), g(y)\rangle = {}^t(BX)BY = {}^tX{}^tBBY$$

d'où la conclusion.

(c) Considèrons l'application linéaire $s \in \mathcal{L}(F)$ déterminée par

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}, s(\varepsilon_i) = \varepsilon'_i.$$

Il s'agit de montrer que s est orthogonale, par exemple en observant que s conserve la norme.
Soit $x \in F$. On peut écrire

$$x = \sum_{i=1}^r x_i\varepsilon_i \text{ et } s(x) = \sum_{i=1}^r x_i\varepsilon'_i.$$

On a alors

$$\|s(x)\|^2 = \sum_{i,j=1}^r x_ix_j\langle\varepsilon'_i, \varepsilon'_j\rangle = \sum_{i,j=1}^r x_ix_j\langle\varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle = \|x\|^2.$$

(d) Soit H un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} B$ dans $\mathbb{R}^q$.
Introduisons $(x_1, \dots, x_r)$ une base de H et posons $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ et $(\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_r)$ les familles données par

$$\varepsilon_i = f(x_i) \text{ et } \varepsilon'_i = g(x_i).$$

En vertu du b), on peut affirmer

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, r\}^2, \langle\varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle = \langle\varepsilon'_i, \varepsilon'_j\rangle.$$

Introduisons $(\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_p)$ une base orthonormée de l'orthogonal de l'image de f et $(\varepsilon'_{r+1}, \dots, \varepsilon'_p)$ une base orthonormée de l'orthogonal de l'image de g.
On vérifie alors

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, p\}^2, \langle\varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle = \langle\varepsilon'_i, \varepsilon'_j\rangle.$$

On peut alors introduire une application orthogonale $s\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ vérifiant

$$\forall i \in \{1,\dots,r\}, s(\varepsilon_i) = \varepsilon_i'.$$

On a alors l'égalité d'application linéaire

$$u \circ f = g$$

car celle-ci vaut sur les x_i donc sur H et vaut aussi évidement sur
$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$.
En introduisant U matrice de s^{-1} dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$, on obtient

$$A = US \text{ avec } U \in \mathrm{O}_p(\mathbb{R}).$$

Exercice 17 : [énoncé]

(a) Soient $u, v \in \Gamma$ et $\lambda \in [0\,;1]$. Pour tout $x \in E$,

$$\big\|(\lambda u + (1-\lambda)v(x)\big\| \leq \lambda\big\|u(x)\big\| + (1-\lambda)\big\|v(x)\big\| \leq \|x\|$$

donc $\lambda u + (1-\lambda)v \in \Gamma$.
Pour $u \in \mathrm{O}(E)$, on a

$$\forall x \in E, \big\|u(x)\big\| = \|x\| \leq \|x\|$$

et donc $u \in \Gamma$.

(b) Puisque $f \neq g$, il existe un vecteur x vérifiant $f(x) \neq g(x)$.
Si $\big\|f(x)\big\| < \|x\|$ ou $\big\|g(x)\big\| < \|x\|$ alors

$$\big\|u(x)\big\| = \frac{1}{2}\big\|f(x) + g(x)\big\| \leq \frac{\|f(x)\| + \|g(x)\|}{2} < \|x\|$$

et donc $u \notin \mathrm{O}(E)$.
Si $\big\|f(x)\big\| = \|x\|$ et $\big\|g(x)\big\| = \|x\|$ alors la condition $f(x) \neq g(x)$ entraîne

$$\big\|f(x) + g(x)\big\| < \big\|f(x)\big\| + \big\|g(x)\big\|$$

car il y a égalité dans l'inégalité triangulaire euclidienne si, et seulement si, les vecteurs sont positivement liés.
On en déduit que dans ce cas aussi $\big\|u(x)\big\| < \|x\|$ et donc $u \notin \mathrm{O}(E)$.

(c) L'endomorphisme $f = v^* \circ v$ est autoadjoint défini positif. Moyennant une diagonalisation en base orthonormée, on peut déterminer s autoadjoint défini positif tel que $f = s^2$. Posons alors $\rho = v \circ s^{-1}$ ce qui est possible car s inversible puisque défini positif. On a alors

$$\rho^* \circ \rho = s^{-1} \circ v^* \circ v \circ s^{-1} = \mathrm{Id}_E$$

et donc $\rho \in \mathrm{O}(E)$. Finalement $v = \rho \circ s$ est l'écriture voulue.

(d) Soit $u \in \Gamma \setminus \mathrm{O}(E)$. On peut écrire $u = \rho \circ s$ avec $\rho \in \mathrm{O}(E)$ et s endomorphisme autoadjoint positif. Puisque

$$\forall x \in E, \big\|u(x)\big\| = \big\|s(x)\big\|$$

on a $s \in \Gamma$ et donc les valeurs propres de s sont éléments de $[0\,;1]$. Dans une base orthonormée de diagonalisation, la matrice de s est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda_1,\dots,\lambda_n \in [0\,;1].$$

Si les λ_i sont tous égaux à 1 alors $s = \mathrm{Id}_E$ et $u = \rho \in \mathrm{O}(E)$ ce qui est exclu. Il y a donc au moins un λ_i différent de 1. Considérons alors l'endomorphisme t dont la matrice dans la base orthonormée précédente est

$$\begin{pmatrix} 2\lambda_1 - 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 2\lambda_n - 1 \end{pmatrix}.$$

On peut écrire

$$s = \frac{1}{2}(\mathrm{Id}_E + t)$$

avec $\mathrm{Id}_E \in \Gamma$, $\mathrm{Id}_E \neq t$ et $t \in \Gamma$ car les coefficients diagonaux précédents sont inférieurs à 1 en valeur absolue.
On en déduit

$$u = \frac{1}{2}(\rho + \rho \circ t)$$

avec $\rho, \rho \circ t \in \Gamma$ et $\rho \neq \rho \circ t$.

(e) Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Pour $k > 0$ assez grand

$$v_k = v + \frac{1}{k}\mathrm{Id}_E \in GL(E)$$

car v ne possède qu'un nombre fini de valeurs propres.
On peut alors écrire

$$v_k = \rho_k \circ s_k \text{ avec } \rho_k \in \mathrm{O}(E) \text{ et } s_k \in \mathcal{S}^+(E).$$

Puisque $\mathrm{O}(E)$ est compact, il existe une suite extraite $(\rho_{\varphi(k)})$ qui converge $\rho_\infty \in \mathrm{O}(E)$. On a alors

$$s_{\varphi(k)} = \rho_{\varphi(k)}^{-1} \circ v_{\varphi(k)} \to \rho_\infty^{-1} \circ v.$$

En posant $s_\infty = \rho_\infty^{-1} \circ v$, on a $s_\infty \in \mathcal{S}^+(E)$ car $\mathcal{S}^+(E)$ est fermé et donc $v = \rho_\infty \circ s_\infty$ donne l'écriture voulue.

Exercice 18 : [énoncé]
$A \in \mathrm{O}(3)$ donc $f \in \mathrm{O}(E)$
Soit $u = x.i + y.j + z.k \in E$.

$$f(u) = u \iff \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ x - 5y + 2z = 0 \\ 2x - y - 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3z \\ y = z \end{cases}$$

f est une rotation autour de l'axe dirigé et orienté par $u = 3.i + j + k$. Notons θ son angle.
On a $\cos\theta = -5/6$ et $\mathrm{Det}(u, i, f(i)) < 0$ donc $\theta = -\arccos(-5/6)\ [(]\ 2\pi)$.

Exercice 19 : [énoncé]

(a) Les vecteurs suivants conviennent

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(i + k), v = j \text{ et } w = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i + k).$$

(b)

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc f est le quart de tour direct autour de la droite dirigée et orientée par u.

Exercice 20 : [énoncé]

(a) f est la rotation d'axe dirigé et orienté par $w = i + j$ et d'angle $\theta = \pi/3$.
(b) f est la rotation d'axe dirigé et orienté par $w = i - 4k$ et d'angle $\theta = -\arccos(-8/9)$.
(c) f est le retournement d'axe dirigé par $w = i + 4j + k$.

Exercice 21 : [énoncé]

(a) Par orthogonalité et unitarité des colonnes

$$A \in \mathrm{O}(3) \iff a^2 + 2b^2 = 1 \text{ et } 2ab + b^2 = 0.$$

Ainsi

$$A \in \mathrm{O}(3) \iff (a, b) \in \left\{(1, 0), (-1, 0), (1/3, -2/3), (-1/3, 2/3)\right\}.$$

(b) Si $a = 1$ et $b = 0$ alors $f = \mathrm{Id}$.
Si $a = -1$ et $b = 0$ alors $f = -\mathrm{Id}$.
Si $a = 1/3$ et $b = -2/3$ alors f est la réflexion par rapport au plan d'équation $x + y + z = 0$.
Si $a = -1/3$ et $b = 2/3$ alors f est opposée à la transformation précédente, c'est le retournement d'axe dirigé par $w = i + j + k$.

Exercice 22 : [énoncé]
Si $f \circ s = s \circ f$ alors $f(s(u)) = s(u)$ donc $s(u) = u$ ou $s(u) = -u$.
Si $s(u) = -u$ alors s est la réflexion par rapport à $P = \{u\}^\perp$.
Si $s(u) = u$ alors u appartient au plan de réflexion P et v est un vecteur de ce plan orthogonal à u alors $s(f(v)) = f(v)$ donc $f(v)$ est aussi un vecteur de ce plan orthogonal à u. Or ce ne peut être v, c'est donc $-v$ et par suite f est un retournement.
Inversement : ok

Exercice 23 : [énoncé]

(a) Si les deux rotations ont le même axe, il est connu que celles-ci commutent.
Si on considère deux retournements d'axes orthogonaux, alors relativement à une base orthonormée dont les deux premiers vecteurs dirigeraient leurs axes, leurs matrices sont $\mathrm{diag}(1, -1, -1)$ et $\mathrm{diag}(-1, 1, -1)$ qui commutent.
(b) $f(g(u)) = g(f(u)) = g(u)$ donc $g(u)$ appartient à l'axe de f.
Comme $\|g(u)\| = \|u\|$, on a $g(u) = u$ ou $g(u) = -u$.
(c) Si $g(u) = u$ alors u appartient à l'axe de la rotation g et donc f et g ont même axe.
(d) Supposons $g(u) = -u$. Soit v un vecteur unitaire de l'axe de la rotation g.
On a $(u\,|\,v) = (g(u)\,|\,g(v)) = (-u\,|\,v) = -(u\,|\,v)$ donc $(u\,|\,v) = 0$. Les axes de f et g sont donc orthogonaux. De plus, puisque $u \in \{v\}^\perp$ et $g(u) = -u$, g est un retournement.
Enfin, comme ci-dessus, on a aussi $f(v) = \pm v$. Or le cas $f(v) = v$ est à exclure puisque les axes de f et g sont orthogonaux. Il reste donc $f(v) = -v$ qui donne que f est un retournement.

Exercice 24 : [énoncé]
On a

$$(g \circ \sigma \circ g^{-1})(g(u)) = -g(u)$$

et pour $g(v) \perp g(u)$,

$$(g \circ \sigma \circ g^{-1})(g(v)) = g(v).$$

Ainsi $g \circ \sigma \circ g^{-1}$ est la réflexion par rapport à $g(u)^\perp$.

Exercice 25 : [énoncé]
Soit R une rotation solution (s'il en existe).
La rotation R n'est pas l'identité et son axe est dirigé par le vecteur $u = i - j + k$.
Orientons cet axe par ce vecteur. Pour déterminer l'angle θ de la rotation, déterminons l'image d'un vecteur orthogonal à l'axe. Considérons

$$v = -2i - j + k = -3i + u.$$

Le vecteur v est orthogonal à u et

$$R(v) = i + 2j + k.$$

On a

$$\cos\theta = \frac{(v \mid R(v))}{\|v\|\|R(v)\|} = -\frac{1}{2}$$

et le signe de $\sin\theta$ est celui de

$$\det\big(v, R(v), u\big) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -9 < 0.$$

On en déduit que R n'est autre que la rotation d'axe dirigé et orienté par u et d'angle $\theta = -2\pi/3$.
Inversement, cette rotation est solution car pour celle-ci le vecteur u est invariant alors et le vecteur v est envoyé sur le vecteur $R(v)$ du calcul précédent ce qui entraîne que i est envoyé sur $-j$.

Exercice 26 : [énoncé]
Posons

$$R_1 = \mathrm{Rot}_{k,\pi/2} \text{ et } R_2 = \mathrm{Rot}_{\cos\theta i + \sin\theta j, \pi}.$$

La composée de deux rotations est une rotation, donc $R_1 \circ R_2$ est une rotation.
Puisque les vecteurs k est $u = \cos\theta i + \sin\theta j$ sont orthogonaux

$$R_2(k) = -k$$

et donc

$$R_1 \circ R_2(k) = -k.$$

On en déduit que $R_1 \circ R_2$ est un retournement dont l'axe est orthogonal à k *i.e.* inclus dans $\mathrm{Vect}(i, j)$.
Puisque

$$R_2(u) = u \text{ et } R_1(u) = -\sin\theta i + \cos\theta j$$

on a

$$R_2 \circ R_1(u) = -\sin\theta i + \cos\theta j$$

et donc

$$u + R_2 \circ R_1(u) = (\cos\theta - \sin\theta)i + (\cos\theta + \sin\theta)j \neq 0$$

dirige l'axe du retournement.

Exercice 27 : [énoncé]
D'une part

$${}^t\big(\overline{\Omega X}\big)\Omega X = {}^t\overline{X}\,{}^t\Omega\Omega X = {}^t\overline{X}X$$

et d'autre part

$${}^t\big(\overline{\Omega X}\big)\Omega X = {}^t(\overline{\lambda X})\lambda X = |\lambda|^2\,{}^t\overline{X}X.$$

Puisque ${}^t\overline{X}X$ est un réel non nul, on en déduit $|\lambda| = 1$.

Exercice 28 : [énoncé]

(a) Soit λ une valeur propre complexe de A et Z un vecteur propre associé.
On a $AZ = \lambda Z$ et $A\overline{Z} = \overline{\lambda Z}$ donc

$${}^t(\overline{AZ})AZ = |\lambda|^2\,{}^t\overline{Z}Z.$$

On a aussi

$${}^t(\overline{AZ})AZ = {}^t\overline{Z}\,{}^t\overline{A}AZ = {}^t\overline{Z}Z.$$

Puisque ${}^t\overline{Z}Z = \|Z\|^2 \in \mathbb{R}_+^*$, on obtient $|\lambda|^2 = 1$.

(b) Écrivons $\lambda = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. L'identité $AZ = \lambda Z$ donne

$$\begin{cases} AX = \cos\theta X - \sin\theta Y \\ AY = \sin\theta X + \cos\theta Y. \end{cases}$$

Il est alors immédiat que $\mathrm{Vect}(X, Y)$ est stable par A.

(c) On a

$${}^tZZ = {}^tXX - {}^tYY + 2\mathrm{i}\,{}^tXY.$$

Or ${}^tZAZ = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,{}^tZZ$ et ${}^tZAZ = {}^t\big({}^tAZ\big)Z = {}^t\big(A^{-1}Z\big)Z = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\,{}^tZZ$. On en déduit

$${}^tZZ = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}\,{}^tZZ.$$

Or $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} \neq 1$ (car λ non réelle) donc ${}^tZZ = 0$ puis

$${}^tXX = {}^tYY \text{ et } {}^tXY = 0.$$

Quitte à multiplier les colonnes X et Y par un même scalaire unitaire, on peut affirmer que la famille (X, Y) est une base orthonormée du plan $\mathrm{Vect}(X, Y)$. En orientant ce plan par cette base, l'endomorphisme induit apparaît comme étant une rotation d'angle θ.

Exercice 29 : [énoncé]
Il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs de blocs diagonaux

$$(1),(-1) \text{ ou } \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

Pour que $(u-\mathrm{Id})^2=0$, il faut et il suffit qu'il n'y ait que des blocs (1) ce qui correspond au cas où $u=\mathrm{Id}$.

Exercice 30 : [énoncé]
Un tel endomorphisme est représenté dans une base orthonormale par une matrice A vérifiant

$$A\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \text{ et } {}^tA=A.$$

On a alors $A^2={}^tAA=I_n$. L'endomorphisme est donc une symétrie, de surcroît orthogonale.
La réciproque est vraie.

Exercice 31 : [énoncé]
Soit e une base orthonormale de E.
Notons A et B les matrices de f et g dans la base e.
Ces matrices sont symétrique et

$${}^t(AB)=AB \iff BA=AB.$$

Ainsi

$$f\circ g \text{ est symétrique } \iff f\circ g=g\circ f.$$

Exercice 32 : [énoncé]

(a) L'application f est évidemment bien définie de E dans E et est aussi linéaire car

$$f(\lambda x+\mu y)=\lambda x+\mu y+k(\lambda(x\,|\,a)+\mu(x\,|\,a))a=\lambda f(x)+\mu f(y).$$

L'application f est donc endomorphisme de E. De plus

$$(f(x)\,|\,y)=(x\,|\,y)+k(x\,|\,a)(y\,|\,a)=(x\,|\,f(y)).$$

Ainsi l'endomorphisme f est symétrique (et par conséquent diagonalisable dans une base orthonormée).

(b) Si $f(x)=0_E$ alors $x+k(x\,|\,a)a=0_E$ et donc $x\in\mathrm{Vect}\,a$.
Or $f(a)=(1+k)a\neq 0_E$ donc $\mathrm{Ker}\,f=\{0_E\}$ et par suite f est un automorphisme de E.

(c) On a $f(a)=(1+k)a$ donc $1+k\in\mathrm{Sp}\,f$ et

$$\mathrm{Vect}\,a\subset E_{1+k}(f).$$

Pour $x\in\mathrm{Vect}(a)^\perp$, $f(x)=x$ donc $1\in\mathrm{Sp}\,f$ et

$$(\mathrm{Vect}\,a)^\perp\subset E_1(f).$$

On peut alors conclure que si $k\neq 0$ alors

$$\mathrm{Sp}\,f=\{1,1+k\}, E_{1+k}(f)=\mathrm{Vect}\,a \text{ et } E_1(f)=(\mathrm{Vect}\,a)^\perp$$

car la somme des dimensions des sous-espaces propres de f ne peut excéder n.
Dans le cas $k=0$, on a $f=\mathrm{Id}$.

Exercice 33 : [énoncé]
Si p est une projection orthogonale alors

$$\forall x,y\in E, (x\,|\,p(y))=(x-p(x)\,|\,p(y))+(p(x)\,|\,p(y))=(p(x)\,|\,p(y)-y)+(p(x)\,|\,y)=(p(x)\,|\,y).$$

Ainsi, l'endomorphisme p est symétrique.
Inversement, si p est symétrique alors $\mathrm{Im}\,p=(\mathrm{Ker}\,p)^\perp$ et donc p est une projection orthogonale.

Exercice 34 : [énoncé]

(a) En développant

$$u(P)(X)=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\left(\int_0^1 t^{n-k}P(t)\,\mathrm{d}t\right)X^k.$$

Ceci assure la bonne définition de l'application $u\colon E\to E$ et permet aussi de vérifier sa linéarité.

(b) Pour $P,Q\in E$,

$$(u(P)\,|\,Q)=\int_0^1\left(\int_0^1(x+t)^nP(t)\,\mathrm{d}t\right)Q(x)\,\mathrm{d}x$$

et par le théorème de Fubini

$$(u(P)\,|\,Q) = \iint_{[0;1]^2} (x+t)^n P(t)Q(x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x+t)^n Q(x)\,\mathrm{d}x\right) P(t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui se relit

$$(u(P)\,|\,Q) = (P\,|\,u(Q)).$$

(c) Les coefficients diagonaux de la matrice de u dans la base canonique sont les

$$\binom{n}{k}\int_0^1 t^{n-k}\times t^k\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}\binom{n}{k}.$$

La trace de u est donc donnée par

$$\operatorname{tr} u = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n}{k} = \frac{2^n}{n+1}.$$

Exercice 35 : [énoncé]

(a) En décomposant x et y on observe

$$(p(x)\,|\,y) = (p(x)\,|\,p(y)) = (x\,|\,p(y)).$$

(b) Pour $x, y \in E$,

$$(p(q(p(x)))\,|\,y) = (q(p(x))\,|\,p(y)) = \ldots = (x\,|\,p(q(p(x)))).$$

(c) $(\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q)^\perp = (\operatorname{Im} p)^\perp \cap (\operatorname{Ker} q)^\perp = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q$.

(d) $p\circ q\circ p$ est autoadjoint donc diagonalisable. De plus $\operatorname{Im} p$ est stable par $p\circ q\circ p$ donc il existe donc une base $(e_1,\ldots,e_r)$ de $\operatorname{Im} p$ diagonalisant l'endomorphisme induit par $p\circ q\circ p$. On a alors $(p\circ q\circ p)(e_i) = \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Or $e_i \in \operatorname{Im} p$ donc $p(e_i) = e_i$ puis

$$(p\circ q)(e_i) = \lambda_i e_i.$$

On complète cette famille de vecteurs propres de $p\circ q$ par des éléments de $\operatorname{Ker} q$ pour former une base de $\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q$. Sur ces vecteurs complétant, q est nul donc $p\circ q$ aussi.
Enfin, on complète cette dernière famille par des éléments de $\operatorname{Im} q \cap \operatorname{Ker} p$ pour former une base de E. Sur ces vecteurs complétant, $p\circ q$ est nul car ces vecteurs sont invariants par q et annule p. Au final, on a formé une base diagonalisant $p\circ q$.

Exercice 36 : [énoncé]

1) (i) $\Longrightarrow$ (ii) par le théorème de Pythagore.
(ii) $\Longrightarrow$ (i) Supposons (ii). Pour $x \in \operatorname{Im} p$ et $y \in \operatorname{Ker} p$, $p(x+\lambda y) = x$ donc

$$\|x\|^2 \le \|x+\lambda y\|^2$$

puis

$$0 \le 2\lambda(x\,|\,y) + \lambda^2\|y\|^2.$$

Cette relation devant être valable pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $(x\,|\,y) = 0$.
Par suite $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont orthogonaux et donc p est une projection orthogonale.
(i) $\Longrightarrow$ (iii) car en décomposant x et y on observe

$$(p(x)\,|\,y) = (p(x)\,|\,p(y)) = (x\,|\,p(y))$$

(iii) $\Longrightarrow$ (i) car $\operatorname{Im} p = (\operatorname{Ker} p)^\perp$.

2) (a) Pour $x, y \in E$,

$$\begin{aligned}(p\circ q\circ p(x)\,|\,y) &= (q\circ p(x)\,|\,p(y))\\ &= (p(x)\,|\,q\circ p(y))\\ &= (x\,|\,p\circ q\circ p(y)).\end{aligned}$$

Ainsi, $p\circ q\circ p$ est un endomorphisme symétrique.

(b) $(\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q)^\perp = (\operatorname{Im} p)^\perp \cap (\operatorname{Ker} q)^\perp = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q$.

(c) $p\circ q\circ p$ est autoadjoint donc diagonalisable. De plus $\operatorname{Im} p$ est stable par $p\circ q\circ p$ donc il existe donc une base $(e_1,\ldots,e_r)$ de $\operatorname{Im} p$ diagonalisant l'endomorphisme induit par $p\circ q\circ p$. On a alors $(p\circ q\circ p)(e_i) = \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Or $e_i \in \operatorname{Im} p$ donc $p(e_i) = e_i$ puis

$$(p\circ q)(e_i) = \lambda_i e_i.$$

On complète cette famille de vecteurs propres de $p\circ q$ par des éléments de $\operatorname{Ker} q$ pour former une base de $\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q$. Sur ces vecteurs complétant, q est nul donc $p\circ q$ aussi.
Enfin, on complète cette dernière famille par des éléments de $\operatorname{Im} q \cap \operatorname{Ker} p$ pour former une base de E. Sur ces vecteurs complétant, $p\circ q$ est nul car ces vecteurs sont invariants par q et annule p. Au final, on a formé une base diagonalisant $p\circ q$.

Exercice 37 : [énoncé]

(a) L'application $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ est évidemment une forme bilinéaire symétrique.
Puisque
$$\langle x,x\rangle = x_1^2+5x_2^2-4x_1x_2 = (x_1-2x_2)^2+x_2^2$$
cette forme bilinéaire symétrique est aussi définie positive et c'est donc un produit scalaire.

(b) De façon immédiate
$$\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(1,0) \text{ et } \operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}(-a,2).$$
Si l'endomorphisme est symétrique alors $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u^\perp$ et donc
$$\langle (1,0),(-a,2)\rangle = -a-4 = 0$$
et donc $a=-4$.
Inversement, si $a=-4$ alors les vecteurs $(1,0)$ et $(-a,2)$ sont orthogonaux et l'on peut diagonaliser u dans une base orthonormale.

Exercice 38 : [énoncé]

(a) L'application est évidemment linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$

(b) Si $f_{a'}$ conserve la norme alors en particulier $\|f_{a'}(u)\| = \|u\|$ *i.e.* $|1+a'|\|u\| = \|u\|$.
La seule valeur a' non nulle est alors $a'=-2$.
Inversement f_{-2} se reconnaît comme la réflexion d'hyperplan $\operatorname{Vect}(u)^\perp$ et conserve donc la norme.

(c) On vérifie aisément par le calcul
$$\forall x,y\in\mathbb{R}^3, \langle f_a(x),y\rangle = \langle x,f_a(y)\rangle\,.$$
On en déduit que f_a est un endomorphisme symétrique.
Pour $x\in\operatorname{Vect}(u)$, on a $f_a(x)=(1+a)x$ et pour $x\in\operatorname{Vect}(u)^\perp$, $f_a(x)=x$.
On en déduit que $1+a$ et 1 sont valeurs propres de u avec
$$E_{1+a}(f_a) = \operatorname{Vect}(u) \text{ et } E_1(f_a) = \operatorname{Vect}(u)^\perp.$$
Il n'y a pas d'autres valeurs propres (plus assez de place dans $\mathbb{R}^3$ ...).

Exercice 39 : [énoncé]
Si λ est valeur propre de f et si $x\neq 0$ est vecteur propre associé alors $(f(x)\,|\,x)=0$ donne $\lambda=0$. Sachant que f est diagonalisable car symétrique et que $\operatorname{Sp}(f)\subset\{0\}$, on peut conclure $f=0$.

Exercice 40 : [énoncé]
Par le théorème spectral, l'endomorphisme u est orthodiagonalisable.
Soit $e=(e_1,\dots,e_n)$ base orthonormale formée de vecteurs propres de u associés aux valeurs propres $\lambda_1,\dots,\lambda_n$.
Pour tout $x\in E$, on peut écrire $x=x_1e_1+\dots+x_ne_n$ et alors $u(x)=\lambda_1x_1e_1+\dots+\lambda_nx_ne_n$.
Puisque e est orthonormale
$$\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2x_i^2 \text{ et } \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$
Puisque $\lambda_i^2\le k^2$, on obtient
$$\|u(x)\|\le k\|x\|.$$

Exercice 41 : [énoncé]
Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormale de E formée de vecteurs vérifiant
$$f(e_i)=\lambda_ie_i.$$
Soit $V\in\mathcal{V}_p$. Établissons
$$\max_{x\in S\cap V}(f(x)\,|\,x)\ge\lambda_p.$$
On a
$$(f(x)\,|\,x) = \sum_{i=1}^n \lambda_ix_i^2.$$
Considérons $W=\operatorname{Vect}(e_p,\dots,e_n)$. On a $\dim V=p$ et $\dim W=n-p+1$ donc $V\cap W$ n'est pas réduit au vecteur nul.
Pour $x\in V\cap W\cap S$, on a
$$(f(x)\,|\,x) = \sum_{i=p}^n\lambda_ix_i^2 \ge \lambda_p\sum_{i=p}^n x_i^2 = \lambda_p$$
et donc
$$\max_{x\in S\cap V}(f(x)\,|\,x)\ge\lambda_p.$$
Par suite
$$\min_{V\in\mathcal{V}_p}\max_{x\in S\cap V}(f(x)\,|\,x)\ge\lambda_p.$$
Pour $V=\operatorname{Vect}(e_1,\dots,e_p)\in\mathcal{V}_p$, on a
$$\forall x\in V\cap S, (f(x)\,|\,x) = \sum_{i=1}^p\lambda_ix_i^2\le\lambda_p\sum_{i=1}^p x_i^2 = \lambda_p$$

donc

$$\max_{x\in S\cap V}(f(x)\,|\,x)\leq\lambda_p$$

puis

$$\min_{V\in\mathcal{V}_p}\max_{x\in S\cap V}(f(x)\,|\,x)\leq\lambda_p$$

et finalement l'égalité.

Exercice 42 : [énoncé]
Si $\lambda_{\min}=\min\operatorname{Sp}u$ et $\lambda_{\max}=\max\operatorname{Sp}u$, on montre en introduisant une base orthonormée diagonalisant u que

$$\forall x\in E,\lambda_{\min}\|x\|^2\leq(u(x)\,|\,x)\leq\lambda_{\max}\|x\|^2.$$

Pour qu'il existe un vecteur unitaire appartenant à H_u il est nécessaire que $1\in[\lambda_{\min}\,;\lambda_{\max}]$.
Inversement, supposons $1\in[\lambda_{\min}\,;\lambda_{\max}]$.
Si $\lambda_{\min}=\lambda_{\max}$ alors la réciproque est immédiate.
Supposons désormais $\lambda_{\min}<\lambda_{\max}$. On introduit $e_{\min}$ vecteur propre unitaire associé à $\lambda_{\min}$ et $e_{\max}$ vecteur propre unitaire associé à $\lambda_{\max}$. Considérons enfin

$$e_\theta=\cos(\theta)e_{\min}+\sin(\theta)e_{\max}.$$

Puisque $e_{\min}$ et $e_{\max}$ sont unitaires et orthogonaux, on vérifie $\|e_\theta\|=1$.
Considérons ensuite $f(\theta)=(u(e_\theta)\,|\,e_\theta)$. La fonction f est continue, $f(0)=\lambda_{\min}$ et $f(\pi/2)=\lambda_{\max}$ dont, en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\theta\in[0\,;\pi/2]$ vérifiant $e_\theta\in H_u$.

Exercice 43 : [énoncé]

(a) ${}^tA=A^2$ donne aussi $A={}^t(A^2)=({}^tA)^2=A^4$. Or A est inversible donc $A^3=\mathrm{I}_n$.
Enfin ${}^tAA=A^3=\mathrm{I}_n$ et donc A est orthogonale.

(b) L'endomorphisme induit par f sur le noyau de $f^2+f+\mathrm{Id}$ est représentable par une matrice $M\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2+M+\mathrm{I}_p=\mathrm{O}_p$. Cette matrice est diagonalisable dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ avec les deux valeurs propres complexes j et $j^2=\bar{j}$. Celles-ci ont même multiplicité m et donc $p=\dim\operatorname{Ker}(f^2+f+\mathrm{Id})=2m$ est un entier pair. De plus M est alors semblable dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ à une matrice diagonale avec des blocs diagonaux $\operatorname{diag}(j,j^2)$. Or la matrice de rotation

$$\Omega=\begin{pmatrix}\cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3)\\ \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3)\end{pmatrix}$$

est aussi semblable à la matrice $\operatorname{diag}(j,j^2)$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
En raisonnant par blocs, on obtient que la matrice M est semblable dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ à une matrice diagonale par blocs de blocs diagonaux Ω. Or ces deux matrices sont réelles et il est « bien connu » que deux matrices réelles semblables sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ le sont aussi sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
Enfin, par le lemme de décomposition des noyaux

$$\mathbb{R}^n=\operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id})\oplus\operatorname{Ker}(f^2+f+\mathrm{Id})$$

et dans une base adaptée à cette décomposition, on obtient que f peut être représenté par une matrice de la forme

$$\operatorname{diag}(1,\dots,1,\Omega,\dots,\Omega).$$

Exercice 44 : [énoncé]
On a

$$A^7=A^4\times(A^tA)=A^{5t}A$$

puis

$$A^7=A^3\left({}^tA\right)^2=A\left({}^tA\right)^3=A^t\left(A^tA\right)=A^{2t}A=A^4.$$

Ainsi $X^7-X^4=X^4(X^3-1)$ annule A.
Ce polynôme n'est pas à racines simples, mais en montrant

$$\operatorname{Ker}A^4=\operatorname{Ker}A$$

on pourra affirmer que le polynôme $X(X^3-1)$ annule aussi A et, ce dernier étant scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, cela sera décisif pour conclure.
Evidemment $\operatorname{Ker}A\subset\operatorname{Ker}A^4$. Inversement, soit $X\in\operatorname{Ker}A^4$. On a

$$A^tAAX=A^4X=0$$

donc

$$\left\|{}^tAAX\right\|^2={}^tX^tAA^tAAX=0$$

et par conséquent ${}^tAAX=0$. Alors

$$\|AX\|^2={}^tX^tAAX=0$$

et donc $AX=0$. Ainsi $\operatorname{Ker}A^4\subset\operatorname{Ker}A$ puis l'égalité.

Exercice 45 : [énoncé]
Soit M solution, M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ avec pour valeurs propres j et j^2. Puisque $\operatorname{tr} M$ est réel, les valeurs propres j et j^2 ont même multiplicité. Par suite n est pair, $n = 2p$.
Nous allons montrer, en raisonnant par récurrence sur p qu'il existe une matrice orthogonale P tel que

$$PMP^{-1} = \begin{pmatrix} J & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & J \end{pmatrix}$$

avec

$$J = R_{2\pi/3} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ ou } J = R_{-2\pi/3}.$$

Pour $n = 2$: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$^tMM = M^tM \iff \begin{cases} ab + cd = ac + db \\ b^2 = c^2. \end{cases}$$

Si $b = c$ alors M est symétrique donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ce qui n'est pas le cas.
Il reste $b = -c$ et donc $a = d$.
Ainsi $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ et la relation $M^2 + M + I = 0$ donne

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + a + 1 = 0 \\ 2ab + b = 0 \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} a = -1/2 \\ b = \pm\sqrt{3}/2 \end{cases}$$

ce qui permet de conclure (car le cas $b = 0$ est à exclure).
Supposons la propriété établie au rang $n = 2p$ et étudions le rang $n = 2p + 2$.
Soit M une matrice solution.
La matrice $S = {}^tM + M$ est symétrique et donc il existe $X \neq 0$ tel que $SX = \lambda X$.
On observe alors que l'espace $F = \operatorname{Vect}(X, MX)$ est stable par M et par ${}^tM$. Par suite $F^\perp$ est aussi stable par M et ${}^tM$. On peut alors appliquer l'étude menée pour $n = 2$ à l'action de M sur F et l'hypothèse de récurrence à celle sur $F^\perp$.
Cela établit la récurrence. Il ne reste plus qu'à souligner que les matrices ainsi obtenues sont bien solutions.

Exercice 46 : [énoncé]

(a) Soit M solution. On a $M({}^tMM) = I_n$ et aussi $({}^tMM){}^tM = I_n$.
Ainsi l'inverse de la matrice ${}^tMM$ est égale à M et à ${}^tM$. On en déduit $M = {}^tM$.

(b) Soit M solution. La matrice M est donc symétrique et vérifie $M^3 = I_n$.
Puisque $X^3 - 1$ est annulateur de M, 1 est sa seule valeur propre réelle.
Puisque M est symétrique réelle, M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Au final M est semblable à I_n donc $M = I_n$.
Réciproque immédiate.

Exercice 47 : [énoncé]
Soit M solution. $M^4 = {}^t(M^2) = M$ donc $X^4 - X$ est annulateur de M et puisque 0 et 1 ne sont pas valeurs propres de M, $X^3 - 1$ puis $X^2 + X + 1$ sont annulateurs de M.
Ainsi, on peut affirmer $M^3 = {}^tMM = I$ (ainsi $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$) et $M^2 + M + I = 0$.
Pour $X \neq 0$, $P = \operatorname{Vect}(X, MX)$ est un plan (car il n'y a pas de valeurs propres réelles) stable par M (car $M^2 = -M - I$). La restriction de M à ce plan est un automorphisme orthogonal sans valeur propre, c'est donc une rotation et celle-ci est d'angle $\pm 2\pi/3$ car $M^3 = I_n$. De plus ce plan est aussi stable par $M^2 = {}^tM$ donc $P^\perp$ est stable par M ce qui permet de reprendre le raisonnement à partir d'un $X' \in P^\perp \setminus \{0\}$. Au final, M est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs et aux blocs diagonaux égaux à

$$\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

La réciproque est immédiate.

Exercice 48 : [énoncé]
A est diagonalisable car symétrique et ses valeurs propres sont nulles car racines de X^n. On en déduit que A est semblable à la matrice nulle et donc égale à la matrice nulle.

Exercice 49 : [énoncé]

(a) Puisque A et ${}^tA$ commutent, on a $({}^tAA)^p = ({}^tA)^pA^p = 0$ et donc ${}^tAA$ est nilpotente.
D'autre part, la matrice ${}^tAA$ est symétrique réelle donc diagonalisable. Étant nilpotente, sa seule valeur propre possible est 0 et donc ${}^tAA$ est nulle car semblable à la matrice nulle.

(b) En exploitant le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a

$$\|A\|^2 = (AA \models) \operatorname{tr}\left({}^tAA\right) = 0$$

et donc $A = 0$

Exercice 50 : [énoncé]

(a) Pour A inversible

$$\det A.\chi_{{}^tAA}(\lambda) = \det(A^tAA - \lambda A) = \chi_{A^tA}(\lambda).\det A$$

donc $\chi_{{}^tAA} = \chi_{A^tA}$ puisque $\det A \neq 0$.
Les applications $A \mapsto \chi_{{}^tAA}$ et $A \mapsto \chi_{A^tA}$ étant continues et coïncidant sur la partie dense $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on peut affirmer qu'elles sont égales sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) ${}^tAA$ est une matrice symétrique réelle donc diagonalisable. Ses valeurs propres sont les racines de $\chi_{{}^tAA}$ et la dimension des espaces propres correspondent à la multiplicité des racines respectives de $\chi_{{}^tAA}$.
Puisqu'on a la même affirmation pour A^tA, on peut affirmer que ${}^tAA$ et A^tA sont semblables car toutes deux semblables à une même matrice diagonale.

Exercice 51 : [énoncé]

(a) La matrice est symétrique réelle donc orthogonalement diagonalisable et par conséquent possède des valeurs propres toutes réelles. Bien entendu ces valeurs propres sont en nombre fini.

(b) Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres comptées avec multiplicité de la matrice A. Puisque la matrice A est orthogonalement diagonalisable, il existe une matrice $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A = {}^tPDP \text{ avec } D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Pour tout colonne $X = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}$, en posant $Y = PX = {}^t\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}$, on a

$${}^tXAX = {}^tYDY = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2.$$

Or

$$\lambda_{\min} \sum_{i=1}^n y_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \leq \lambda_{\max} \sum_{i=1}^n y_i^2$$

avec

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = {}^tYY = {}^tX^tPPX = {}^tXX = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

On en déduit

$$\lambda_{\min} \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq {}^tXAX \leq \lambda_{\max} \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

En prenant la colonne élémentaire $X = E_i$, on obtient

$$\lambda_{\min} \leq a_{i,i} \leq \lambda_{\max}.$$

Exercice 52 : [énoncé]
Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A. On a

$$\det A = \lambda_1 \dots \lambda_n \text{ et } \operatorname{tr} A = \lambda_1 + \dots + \lambda_n.$$

L'inégalité de convexité

$$(\lambda_1 \dots \lambda_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$$

est bien connue, c'est la comparaison des moyennes géométrique et arithmétique qui s'obtient par la convexité de l'exponentielle appliquée aux réels $a_i = \ln \lambda_i$ lorsque $\lambda_i > 0$.

Exercice 53 : [énoncé]
La résolution est évidente si A est inversible puisque la matrice $Q = A^{-1}B$ convient.
Dans le cas général, munissons $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et considérons les endomorphismes u et v de $\mathbb{R}^n$ canoniquement représentés par A et B. La base canonique de $\mathbb{R}^n$ étant orthonormée on a $uu^* = vv^*$. Or il est connu que $r = \operatorname{rg} u = \operatorname{rg} uu^*$ donc $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} uu^*$ puis $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} v$.
Puisque $\dim \operatorname{Ker} u = \dim(\operatorname{Im} u)^\perp$, il existe $\rho_1 \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$ transformant $(\operatorname{Im} u)^\perp$ en $\operatorname{Ker} u$. Considérons alors $u' = u\rho_1$. On vérifie $u'u'^* = uu^*$ et $\operatorname{Ker} u' = (\operatorname{Im} u)^\perp$. De même, on définit $\rho_2 \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$ tel que $v' = v\rho_2$ vérifie $v'v'^* = vv^*$ et $\operatorname{Ker} v' = (\operatorname{Im} u)^\perp$.
Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée adaptée à la décomposition $\operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Im} u^\perp = \mathbb{R}^n$.
Dans cette base les matrices de u' et v' sont de la forme

$$\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $A', B' \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ inversibles et vérifiant $A'^tA' = B'^tB'$. Il existe alors $Q' \in \mathrm{O}_r(\mathbb{R})$ vérifiant $B' = A'Q'$. En considérant ρ l'endomorphisme de matrice

$$\begin{pmatrix} Q' & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

dans $\mathcal{B}$, on obtient $v' = u'\rho$ avec $\rho \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
Il en découle la relation $v = u(\rho_1\rho\rho_2^{-1})$ avec $\rho_1\rho\rho_2^{-1} \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$ qu'il suffit de retraduire matriciellement pour conclure.

Exercice 54 : [énoncé]
M est diagonalisable et ses valeurs propres sont racines de $X^p - 1$, elles ne peuvent donc qu'être 1 ou -1. Par suite $M^2 = I_n$.

Exercice 55 : [énoncé]
Par comparaison de noyau, il est facile d'obtenir : $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, {}^tAA$.
La matrice ${}^tAA$ étant symétrique réelle, elle est diagonalisable et donc son rang est égal au nombre de ses valeurs propres non nulles comptées avec multiplicité.

Exercice 56 : [énoncé]
Cas $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$
Soit u l'endomorphisme $\mathbb{R}^n$ canoniquement représenté par M.
Il s'agit d'établir, que u transforme une base orthonormée en une famille orthogonale.
On remarque que

$$(u(x) \,|\, u(y)) = (u^* \circ u(x) \,|\, y).$$

L'endomorphisme $u^* \circ u$ étant symétrique, le théorème spectral assure qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ le diagonalisant. Par le calcul qui précède, la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est orthogonale.
De plus elle ne comporte pas le vecteur nul car $u \in \mathrm{GL}(E)$. Posons alors $\mathcal{B}'$ la famille des vecteurs $u(e_k)/\left\|u(e_k)\right\|$.
La famille $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée et la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est diagonale (à coefficients diagonaux strictement positifs).
Une formule de changement de base orthonormée permet alors de conclure.
Cas général : $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$
Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$ canoniquement représenté par M.
Posons $F = \mathrm{Ker}\, u$ et $G = \mathrm{Im}\, u$. La matrice de u dans une base orthonormée adaptée à la décomposition $F^\perp \oplus^\perp F = \mathbb{R}^n$ au départ et dans une base orthonormée adaptée à la décomposition $G \oplus^\perp G^\perp = \mathbb{R}^m$ à l'arrivée est de la forme

$$M' = \begin{pmatrix} A & O \\ O & O \end{pmatrix} \text{ avec } A \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{R}), r = \mathrm{rg}\, M.$$

L'étude qui précède permet de transformer A en une matrice diagonale D via produit par des matrices orthogonales U et V :

$$UAV = D.$$

En introduisant les matrices orthogonales

$$U' = \begin{pmatrix} U & O \\ O & I_{m-r} \end{pmatrix} \text{ et } V' = \begin{pmatrix} V & O \\ O & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

on obtient en opérant par blocs

$$U'M'V' = \begin{pmatrix} D & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

Enfin par une formule de changement de bases orthonormées, il existe U'', V'' orthogonales telles que

$$M' = U''MV''$$

et on peut alors conclure.

Exercice 57 : [énoncé]

(a) Posons $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
En notant $a_{i,j}$ le coefficient d'indice (i,j) de la matrice A, le coefficient d'indice (i,j) de $D^{-1}AD$ est

$$\lambda_i^{-1}\lambda_j a_{i,j}.$$

La matrice $D^{-1}AD$ est alors symétrique si, et seulement si, ses coefficients d'indices $(i, i+1)$ et $(i+1, i)$ sont égaux *i.e.*

$$\lambda_i^{-1}\lambda_{i+1}b_i = \lambda_{i+1}^{-1}\lambda_i c_i$$

soit encore

$$\lambda_{i+1}^2 = \lambda_i^2 \frac{c_i}{b_i}.$$

En choisissant λ_1 non nul quelconque et en posant

$$\lambda_2 = \lambda_1\sqrt{c_1/b_1}, \dots, \lambda_n = \lambda_{n-1}\sqrt{c_{n-1}/b_{n-1}}$$

on forme une matrice D convenable.

(b) $D^{-1}AD$ est symétrique réelle donc diagonalisable et puisque A est semblable à une matrice diagonalisable, elle l'est aussi.

Exercice 58 : [énoncé]
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a de façon immédiate

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) \subset \operatorname{Ker}(A^{2p+1} - \lambda^{2p+1} I_n).$$

Or la matrice A est diagonalisable donc

$$n = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n).$$

Puisque les λ^{2p+1} sont deux à deux distincts quand les λ varient et puisque les sous-espaces propres de A^{2p+1} sont en somme directe, on peut affirmer que les inclusions précédentes sont en fait des égalités.
Ainsi

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) = \operatorname{Ker}(A^{2p+1} - \lambda^{2p+1} I_n).$$

Puisqu'on a la même affirmation pour B, on obtient

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) = \operatorname{Ker}(B - \lambda I_n).$$

Sachant que les matrices A et B sont diagonalisables et ont les mêmes sous-espaces propres, on peut conclure $A = B$.

Exercice 59 : [énoncé]
Puisqu'il est connu que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$, les matrices ${}^tAA$ et A^tA possèdent le même polynôme caractéristique. Ces deux matrices ont donc les mêmes valeurs propres et ces dernières ont même multiplicité. Puisque ces matrices sont symétriques réelles, elles sont toutes deux orthogonalement diagonalisables et donc orthogonalement semblables à une même matrice diagonale ce qui permet de conclure.

Exercice 60 : [énoncé]
La matrice ${}^tAA - A^tA$ est symétrique réelle et donc diagonalisable. Sa trace est alors égale à la somme de ses valeurs propres. Or

$$\operatorname{tr}\left({}^tAA - A^tA\right) = \operatorname{tr}\left({}^tAA\right) - \operatorname{tr}\left(A^tA\right) = 0$$

car $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. Puisque toutes les valeurs propres sont positives, on en déduit qu'elles sont toutes nulles et donc ${}^tAA - A^tA$ est la matrice nulle car diagonalisable de seule valeur propre 0.

Exercice 61 : [énoncé]
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\|A\|_1 = \sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}| \le \sqrt{\sum_{i,j=1}^n 1^2}\sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|^2} = n\|A\|_2.$$

Or la matrice A est orthogonalement semblable à une matrice de diagonale D. On peut donc écrire $A = PD^tP$ avec $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et alors

$$\|A\|_2^2 = \operatorname{tr}\left({}^tAA\right) = \operatorname{tr}\left(P^tD^tPPD^tP\right) = \operatorname{tr}(PD^{2t}P) = \operatorname{tr}(D^{2t}PP) = \operatorname{tr}(D^2).$$

Puisque A annule le polynôme $X(X-1)$, les valeurs propres de A ne peuvent qu'être égales à 0 ou 1 et donc

$$\operatorname{tr}(D^2) = \operatorname{tr}(D) = \operatorname{tr} A$$

et l'on obtient la relation proposée.

Exercice 62 : [énoncé]

(a) Soit λ une valeur propre de A et $X \neq 0$ un vecteur propre associé. On a $AX = \lambda X$.
D'une part

$${}^tXAX = \lambda^tXX = \lambda\|X\|^2.$$

D'autre part

$${}^tXAX = {}^t(MX)MX = \|MX\|^2$$

donc

$$\lambda = \frac{\|MX\|^2}{\|X\|^2} \ge 0.$$

(b) Pour $j \neq i$, on a

$${}^tX_jAX_i = {}^t(MX_j)MX_i = 0$$

donc

$$AX_i \in \operatorname{Vect}(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots X_n)^\perp = \operatorname{Vect}(X_i)$$

et par conséquent X_i est vecteurs propres de A.

Exercice 63 : [énoncé]
La matrice A est diagonalisable semblable à

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Posons $C = D^3 + D + I_n$. En montrant que D est un polynôme en C *i.e.* $D = P(C)$ on vérifie par similitude que A est un polynôme en B à savoir $A = P(B)$.
On a

$$C = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \text{ avec } \mu_i = \lambda_i^3 + \lambda_i + 1.$$

On vérifie aisément que la fonction $x \mapsto x^3 + x + 1$ est injective sur $\mathbb{R}$. Ainsi les μ_i égaux correspondent aux λ_i égaux et inversement ce qui permet de considérer un polynôme interpolateur construit de sorte que

$$\forall 1 \le i \le n, P(\mu_i) = \lambda_i.$$

On vérifie alors $P(C) = D$ et l'on conclut.

Exercice 64 : [énoncé]
La matrice A est diagonalisable semblable à

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{ avec } \lambda_i \ge 0.$$

Posons $C = D^2 + D + I_n$. En montrant que D est un polynôme en C *i.e.* $D = P(C)$ on vérifie par similitude que A est un polynôme en B à savoir $A = P(B)$.
On a

$$C = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \text{ avec } \mu_i = \lambda_i^2 + \lambda_i + 1.$$

On vérifie aisément que la fonction $x \mapsto x^2 + x + 1$ est injective sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi les μ_i égaux correspondent aux λ_i égaux et inversement ce qui permet de considérer un polynôme interpolateur construit de sorte que

$$\forall 1 \le i \le n, P(\mu_i) = \lambda_i.$$

On vérifie alors $P(C) = D$ et l'on conclut.

Exercice 65 : [énoncé]

(a) Si A et B sont orthogonalement semblables, ces deux matrices sont semblables et ont donc même trace et même déterminant. On en tire les conditions nécessaires $a + c = 4$ et $ac - b^2 = 3$
Inversement, si $a + c = 4$ et $ac - b^2 = 3$ alors A et B ont le même polynôme caractéristique $X^2 - 4X + 3$ de racines 1 et 3. Les matrices A et B étant symétriques réelles, elles sont toutes les deux orthogonalement semblables à $D = \operatorname{diag}(1, 3)$ et donc A et B sont orthogonalement semblables.
Pour a fixé, on trouvera b et c convenables si, et seulement si, on peut trouver $b \in \mathbb{R}$ tel que $b^2 = ac - 3 = a(4 - a) - 3$ d'où la condition nécessaire et suffisante $1 \le a \le 3$.
Par symétrie, pour c fixé, on obtient la condition $1 \le c \le 3$.

(b) Le raisonnement est analogue au précédent en parlant seulement de matrices semblables et l'on obtient la condition double $a + d = 4$ et $ad - bc = 3$.
Pour a fixé, il existe toujours $b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que A et B soient semblables : il suffit de prendre $d = 4 - a$ et b et c de sorte que $bc = -a^2 + 4a - 3$.
Pour d fixé : idem.

(c) La fonction $(P, Q) \mapsto \det\left(PA^tP + QB^tQ\right)$ est continue, à valeurs réelles et définie sur le compact non vide $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, elle y admet donc un maximum.

(d) Après réduction, la matrice symétrique réelle$A$ est orthogonalement semblable à la matrice $D = \operatorname{diag}(\sqrt{5}, -\sqrt{5})$ ce qui permet d'écrire $A = UD^tU$ avec $U \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$. On a alors

$$\det(PA^tP + QB^tQ) = \det(D + VB^tV)$$

avec $V = {}^tU^tPQ$ parcourant $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$. La matrice VB^tV est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \text{ avec } a + c = 4, ac - b^2 = 3 \text{ et } 1 \le a \le 3$$

et donc

$$\det(PA^tP + QB^tQ) = 2(2 - a)\sqrt{5} - 2$$

est maximal pour $a = 1$. Finalement

$$\max_{P,Q \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})} \det\left(PA^tP + QB^tQ\right) = 2\left(\sqrt{5} - 1\right).$$

(e) Non, prenons par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice
$$C=\begin{pmatrix} x & 1-x\\ x & 1-x\end{pmatrix}$$
est semblable à B et peut donc s'écrire $C=QBQ^{-1}$ avec $Q\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Pour $P=I_2\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, on obtient
$$PAP^{-1}+QBQ^{-1}=\begin{pmatrix} x & 1-x\\ x & 2-x\end{pmatrix}$$
de déterminant
$$x(2-x)-x(1-x)=x\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty.$$

(f) En remplaçant A_i par une matrice orthosemblable, on peut supposer A_i de la forme
$$A_i=\begin{pmatrix}\alpha_i & 0\\ 0 & \beta_i\end{pmatrix}\text{ avec }\alpha_i\geq\beta_i$$
et donc écrire
$$A_i=\frac{\mathrm{tr}(A_i)}{2}I_2+\begin{pmatrix}\delta_i & 0\\ 0 & -\delta_i\end{pmatrix}\text{ avec }\delta_i=\frac{\alpha_i-\beta_i}{2}\geq 0.$$
Une matrice orthogonale P_i peut s'écrire sous la forme
$$P_i=\begin{pmatrix}\cos\theta_i & -\sin\theta_i\\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\end{pmatrix}\text{ ou }P_i=\begin{pmatrix}\cos\theta_i & \sin\theta_i\\ \sin\theta_i & -\cos\theta_i\end{pmatrix}$$
et alors dans les deux cas
$$P_iA_i{}^tP_i=\frac{\mathrm{tr}(A_i)}{2}I_2+\begin{pmatrix}\delta_i\cos(2\theta_i) & \delta_i\sin(2\theta_i)\\ \delta_i\sin(2\theta_i) & -\delta_i\cos(2\theta_i)\end{pmatrix}.$$
En posant
$$m=\frac{1}{2}\bigl(\mathrm{tr}(A_1)+\cdots+\mathrm{tr}(A_k)\bigr)$$
on peut écrire
$$\det\bigl(P_1A_1{}^tP_1+\cdots+P_kA_k{}^tP_k\bigr)=\det\left(mI_2+\sum_{i=1}^k\begin{pmatrix}\delta_i\cos(2\theta_i) & \delta_i\sin(2\theta_i)\\ \delta_i\sin(2\theta_i) & -\delta_i\cos(2\theta_i)\end{pmatrix}\right)$$
et après calcul
$$\det\bigl(P_1A_1{}^tP_1+\cdots+P_kA_k{}^tP_k\bigr)=m^2-\left(\left(\sum_{i=1}^k\delta_i\cos(2\theta_i)\right)^2+\left(\sum_{i=1}^k\delta_i\sin(2\theta_i)\right)^2\right).$$

Pour maximiser le déterminant, il suffit de savoir minimiser la fonction donnée par
$$f(\alpha_1,\dots,\alpha_k)=\left(\sum_{i=1}^k\delta_i\cos(\alpha_i)\right)^2+\left(\sum_{i=1}^k\delta_i\sin(\alpha_i)\right)^2.$$
On peut interpréter f dans le plan complexe
$$f(\alpha_1,\dots,\alpha_k)=\left|\delta_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_1}+\cdots+\delta_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_i}\right|^2.$$
Quitte à réordonner les matrices A_i, on peut supposer
$$\delta_1\geq\delta_2\geq\ldots\geq\delta_k.$$
Cas $\delta_1\leq\delta_2+\cdots+\delta_k$
On peut montrer que la fonction f s'annule : c'est assez facile si $k=2$ car alors $\delta_1=\delta_2$, c'est aussi vrai si $k\geq 3$ en établissant que le système suivant possède une solution
$$\begin{cases}\delta_2\sin\alpha=\delta_3\sin\beta\\ \delta_2\cos\alpha+\delta_3\cos\beta=\delta_1-(\delta_4+\cdots+\delta_k)\end{cases}$$
que l'on obtient avec
$$\alpha=\arcsin\left(\frac{\delta_3\sin\beta}{\delta_2}\right)\text{ et }\beta\in[0\,;\pi/2]\text{ bien choisi.}$$
Dans ce cas le maximum de $\det\bigl(P_1A_1{}^tP_1+\cdots+P_kA_k{}^tP_k\bigr)$ vaut m^2.
Cas $\delta_1>\delta_2+\cdots+\delta_k$
La fonction f ne peut s'annuler car
$$\left|\delta_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_1}+\cdots+\delta_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_i}\right|=0\implies\delta_1=-\bigl(\delta_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_2-\alpha_1)}+\cdots+\delta_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_k-\alpha_1)}\bigr)$$
et en passant au module on obtient alors $\delta_1\leq\delta_2+\cdots+\delta_k$.
La fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ et admet donc un minimum sur le compact $[0\,;2\pi]^k$ qui est un point critique. Si $(\beta_1,\dots,\beta_k)$ est un point critique alors
$$\forall 1\leq i\leq k,\frac{\partial f}{\partial\alpha_i}(\beta_1,\dots,\beta_k)=0$$
ce qui donne
$$\forall 1\leq i\leq k,C\sin\beta_i=S\cos\beta_i\text{ avec }C=\sum_{j=1}^k\delta_j\cos\beta_j\text{ et }S=\sum_{j=1}^k\delta_j\sin\beta_j.$$

Ici $(C,S)\neq(0,0)$ car on est dans le cas où la fonction f ne s'annule pas. On obtient alors

$$\begin{vmatrix}\cos\beta_i & \cos\beta_j\\ \sin\beta_i & \sin\beta_j\end{vmatrix}=0.$$

Les points du cercles trigonométriques repérés par les angles β_i et β_j sont alors confondus ou diamétralement opposés. Cela permet d'écrire pour chaque indice i

$$\cos\beta_i=\varepsilon_i\cos\alpha \text{ et } \sin\alpha_i=\varepsilon_i\sin\alpha$$

avec $\varepsilon_i=\pm1$ et α un angle fixé. On a alors

$$f(\beta_1,\dots,\beta_n)=\left(\sum_{i=1}^k\varepsilon_i\delta_i\right)^2$$

et donc

$$\min f=\left(\min_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n=\pm1}\left|\sum_{i=1}^k\varepsilon_i\delta_i\right|\right)^2=\mu^2$$

et alors la borne supérieure cherchée vaut

$$m^2-\mu^2=(m-\mu)(m+\mu).$$

Cette quantité peut aussi s'interpréter comme égale à

$$\lambda(2m-\lambda)$$

avec λ la quantité la plus proche de m que l'on parvient à obtenir en sommant k valeurs chacune choisies parmi les deux valeurs propres possibles de chaque matrice $A_1,\dots,A_k$.
Cette résolution m'a pris des heures… elle me semble bien compliquée et n'exploite pas la positivité des matrices A_i ! Néanmoins l'expression compliquée de la solution et, notamment la discussion, ne me semble pas pouvoir être évitée !

Exercice 66 : [énoncé]

(a) On a $a_{i,j}=\langle e_i,x_j\rangle$, $b_{i,j}=\langle e_i,y_j\rangle$ donc

$$\left[{}^tAB\right]_{i,j}=\sum_{k=1}^n\langle e_k,x_i\rangle\langle e_k,y_j\rangle=\langle x_i,y_j\rangle.$$

(b) La condition étudiée sera remplie si, et seulement si, ${}^tAB=I_n$. Il existe donc une unique famille y solution et celle-ci est déterminée par

$$B=\left({}^tA\right)^{-1}.$$

La matrice B étant inversible, la famille y est une base et

$$P=\operatorname{Mat}_x y=\operatorname{Mat}_{e,x}\operatorname{Id}_E\times\operatorname{Mat}_{y,e}\operatorname{Id}_E=A^{-1}B$$

ce qui donne $P=M^{-1}$ car $M={}^tAA$.

(c) Supposons $\lambda_1x_1+\dots+\lambda_nx_n=0_E$. Notons $I=\{i\in[\![1\,;n]\!]\mid\lambda_i>0\}$ et $J=[\![1\,;n]\!]\setminus I$. On a

$$\sum_{i\in I}\lambda_ix_i=-\sum_{i\in J}\lambda_ix_i$$

donc

$$\left\|\sum_{i\in I}\lambda_ix_i\right\|^2=-\langle\sum_{i\in I}\lambda_ix_i,\sum_{i\in J}\lambda_ix_i\rangle=-\sum_{(i,j)\in I\times J}\lambda_i\lambda_j\langle x_i,x_j\rangle.$$

Or, dans les termes sommés, $\lambda_i\lambda_j\leq0$ et $\langle x_i,x_j\rangle\leq0$ donc

$$\left\|\sum_{i\in I}\lambda_ix_i\right\|^2\leq0.$$

On en déduit

$$\sum_{i\in I}\lambda_ix_i=0_E.$$

En faisant le produit scalaire avec un vecteur v comme dans l'énoncé, on obtient

$$\sum_{i\in I}\lambda_i\langle x_i,v\rangle=0$$

avec $\lambda_i>0$ et $\langle x_i,v\rangle>0$ pour tout $i\in I$. On en déduit $I=\emptyset$.
Un raisonnement analogue fournit aussi

$$\{i\in[\![1\,;n]\!]\mid\lambda_i<0\}=\emptyset$$

et l'on conclut que la famille x est libre. C'est donc une base puisqu'elle est de longueur $n=\dim E$.

(d) On a $M = {}^tAA$ et la matrice S est diagonalisable car symétrique réelle. Pour étudier ses valeurs propres, commençons par étudier celles de M. Soit λ une valeur propre de M et X vecteur propre associé. On a $MX = \lambda X$ donc

$$\|AX\|^2 = {}^tX^tAAX = \lambda^tXX = \lambda\|X\|^2$$

avec $\|X\|^2 > 0$ et $\|AX\|^2 > 0$ (car A est inversible) donc $\lambda > 0$.
Aussi

$$\|AX\|^2 = \sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_{i,j}\alpha_j\right)^2$$

avec $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les coefficients de X.
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\|AX\|^2 \leq \sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 \times \sum_{j=1}^n x_j^2\right)$$

et on peut même affirmer qu'il n'y a pas égalité car X ne peut être colinéaires aux transposées de chaque ligne de A. On a alors

$$\|AX\|^2 < \sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_{i,j}^2\right)\|X\|^2 = \sum_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^n a_{i,j}^2\right)\|X\|^2 = n\|X\|^2$$

car les colonnes de la matrice A sont unitaires puisque $\|x_j\|^2 = 1$.
On en déduit $\lambda < n$ et finalement

$$\operatorname{Sp} M \subset \left]0\,;n\right[.$$

En conséquence

$$\operatorname{Sp} S \subset \left]0\,;1\right[.$$

(e) On écrit $S = QDQ^{-1}$ avec D diagonale à coefficients diagonaux dans $]0\,;1[$.
On a

$$M^{-1} = \frac{1}{n}(I-S)^{-1} = \frac{1}{n}Q(I-D)^{-1}Q^{-1}.$$

Or

$$(I-D)^{-1} = I + D + D^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} D^n$$

avec convergence de la série matricielle. On en déduit

$$M^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{n=0}^{+\infty} S^n.$$

La matrice S est à coefficients positifs, ses puissances aussi et donc M^{-1} est à coefficients positifs.

(f) En reprenant les notations précédentes

$$M^{-1} = A^{-1}\left({}^tA\right)^{-1} = {}^tBB = (\langle y_i, y_j\rangle)_{1\leq i,j\leq n}.$$

Exercice 67 : [énoncé]
Notons que les matrices A et B sont des matrices de projections orthogonales car symétriques et idempotentes.
Les cas $A = O_2$ et $A = I_2$ sont immédiats. De même pour les cas $B = O_2$ et $B = I_2$.
On suppose dans la suite ces cas exclus et on travaille donc sous l'hypothèse supplémentaires

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 1.$$

(a) Si $\operatorname{Im} B = \operatorname{Ker} A$ alors $AB = O_2$ est donc AB est diagonalisable.
Si $\operatorname{Im} B = \operatorname{Ker} A$ alors en passant à l'orthogonal $\operatorname{Im} A \neq \operatorname{Ker} B$.
Les droites $\operatorname{Im} A$ et $\operatorname{Ker} B$ étant distinctes dans le plan, elles sont supplémentaires.
Considérons une base (X_1, X_2) adaptée à la supplémentarité de $\operatorname{Im} A$ et $\operatorname{Ker} B$.
$ABX_1 = A(BX_1) \in \operatorname{Im} A$ donc on peut écrire $ABX_1 = \lambda X_1$ car $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect} X_1$.
$ABX_2 = 0$ car $BX_2 = 0$.
Ainsi la base (X_1, X_2) diagonalise la matrice AB.

(b) Il s'agit ici essentiellement d'encadrer la valeur λ introduite dans l'étude précédente quand $\operatorname{Im} B \neq \operatorname{Ker} A$.
On a

$$\lambda\|X_1\|^2 = (\lambda X_1 \mid X_1) = (ABX_1 \mid X_1).$$

Puisque $X_1 \in \operatorname{Im} A$, on peut écrire $X_1 = AU$ et alors

$$(\lambda X_1 \mid X_1) = (ABAU \mid AU).$$

Puisque A est symétrique

$$(ABAU \mid AU) = (BAU \mid A^2U).$$

Puisque $A^2 = A$

$$(BAU \mid A^2U) = (BAU \mid AU).$$

Enfin en procédant de façon semblable

$$(BAU \mid AU) = (B^2AU \mid AU) = (BAU \mid BAU) = \|BX_1\|^2.$$

Au final

$$\lambda\|X_1\|^2 = \|BX_1\|^2.$$

Or B correspond à une projection orthogonale donc $\|BX_1\|^2 \leq \|X_1\|^2$ et on peut affirmer

$$\lambda \in [0\,;1].$$

Exercice 68 : [énoncé]

(a) La matrice M est symétrique réelle donc diagonalisable.

(b) Pour $X \in E$, on a $MX = AB^TX + BA^TX = \langle B, X\rangle A + \langle A, X\rangle B$. Les colonnes A et B n'étant pas colinéaires

$$MX = 0 \iff \langle A, X\rangle = \langle B, X\rangle = 0.$$

On en déduit

$$\operatorname{Ker} M = \big(\operatorname{Vect}(A, B)\big)^{\perp}.$$

Par la formule du rang, on obtient $\operatorname{rg}(M) = 2$.

(c) On complète la base (A, B) de $\operatorname{Vect}(A, B)$ par une base de $\operatorname{Ker} M$ et l'on obtient que la matrice M est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} \langle A, B\rangle & \|B\|^2 & O_{1,n-2} \\ \|A\|^2 & \langle A, B\rangle & O_{1,n-2} \\ O_{n-2,1} & O_{n-2,1} & O_{n-2} \end{pmatrix}.$$

L'étude des valeurs propres de cette matrice, donne

$$\operatorname{Sp} M = \big\{0, \langle A, B\rangle - \|A\|\|B\|, \langle A, B\rangle + \|A\|\|B\|\big\}.$$

Pour la valeur propre $\lambda = \langle A, B\rangle - \|A\|\|B\|$, le sous-espace propre associé est

$$\operatorname{Vect}\big(\|B\|A - \|A\|B\big).$$

Pour la valeur propre $\lambda = \langle A, B\rangle + \|A\|\|B\|$, le sous-espace propre associé est

$$\operatorname{Vect}\big(\|B\|A + \|A\|B\big)$$

et enfin, pour $\lambda = 0$,

$$\operatorname{Vect}(A, B)^{\perp}.$$

Exercice 69 : [énoncé]

(a) Même si les colonnes X et Y ne sont pas nulles, il n'est pas possible de simplifier par ${}^tX$ et Y dans l'égalité matricielle ${}^tXAY = {}^tXBY$.

On montre que les coefficients des matrices A et B sont égaux[1] *en exploitant l'hypothèse avec des colonnes X et Y élémentaires.*

Notons $a_{i,j}$ le coefficient général de la matrice A, $b_{i,j}$ celui de la matrice B et introduisons $E_1, \dots, E_n$ les matrices élementaires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
FIGURE ????
Soient $(i, j) \in [\![1\,;n]\!]^2$. Pour $Y = E_j$, le produit AY donne la j-ème colonne de A. Pour $X = E_i$, le produit ${}^tXAY$ détermine alors le i-ème coefficient de la colonne AY. En d'autres termes, on a ${}^tXAY = a_{i,j}$ et, de même, ${}^tXBY = b_{i,j}$. L'égalité ${}^tXAY = {}^tXBY$ étant supposée vraie pour toutes colonnes X et Y, on peut conclure que l'on a $a_{i,j} = b_{i,j}$ pour tout indice (i, j) : les matrices A et B sont égales.

(b) Si A est une matrice antisymétrique, on a[2] ${}^tXAX = 0$ pour toute colonne X. Si l'on choisit de plus A non nulle (ce qui est possible si $n \geq 2$) et $B = O_n$, on a ${}^tXAX = {}^tXBX$ pour tout X alors que $A \neq B$.

(c) *On ramène le problème au cas $B = O_n$ avant d'étudier les valeurs propres de A.*

Supposons ${}^tXAX = {}^tXBX$ pour toute colonne X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec A et B symétriques. Par différence de membres, on obtient ${}^tX(A - B)X = 0$ avec $A - B$ symétrique. Si l'on parvient à montrer que la matrice $A - B$ est nécessairement nulle, on peut conclure que les matrices A et B sont égales. Ainsi, en résolvant le problème dans le cas où la seconde matrice est nulle, on parvient à résoudre le problème dans la situation générale.
Désormais, supposons ${}^tXAX = 0$ pour toute colonne X avec A matrice symétrique. Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé

$$AX = \lambda X \quad \text{avec} \quad X \neq 0$$

En multipliant à gauche par ${}^tX$, on obtient

$$\lambda {}^tXX = {}^tXAX = 0$$

Cependant, on a ${}^tXX = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \neq 0$ en notant $x_1, \dots, x_n$ les coefficients de la colonne non nulle X. On en déduit $\lambda = 0$ et, ainsi, 0 est la

1. On peut aussi proposer une démonstration géométrique. Par différence de membres on ramène le problème au cas $B = O_n$ puis on introduit le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. L'hypothèse ${}^tXAY = 0$ pour tous X, Y signifie alors que l'image de A est orthogonale à tout vecteur de l'espace, l'image de A est donc réduite à l'élément nul et la matrice A est la matrice nulle.

2. Voir sujet silya ???.

seule valeur propre de A. Or la matrice A est diagonalisable car symétrique réelle, elle est donc semblable à une matrice diagonale donc les coefficients diagonaux sont tous nuls, autrement dit, elle est semblable à la matrice nulle et c'est donc la matrice nulle.

Exercice 70 : [énoncé]
$\mathrm{Sp}(J) = \{0, n\}$, $E_0(J)\colon x_1 + \cdots + x_n = 0$ et $E_n(J)\colon x_1 = \ldots = x_n$.
Les matrices

$$D = \mathrm{diag}(n, 0, \ldots, 0)$$

et

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{n} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & & 1/\sqrt{n^2-n} \\ \vdots & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & -2/\sqrt{6} & \ddots & \vdots \\ & & & & 1/\sqrt{n^2-n} \\ 1/\sqrt{n} & (0) & & & -(n-1)/\sqrt{n^2-n} \end{pmatrix}$$

conviennent.
Les colonnes d'indices 2 à n de la matrice P sont formées de coefficients de $a, \ldots a, b, 0, \ldots, 0$ de somme nulle et de somme de carrés égale à 1.

Exercice 71 : [énoncé]
La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable.
Après calculs

$$\chi_A = -(X+3)(X-3)^2.$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 3 est le plan d'équation $x + y + z = 0$.
Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle étant deux à deux orthogonaux, on peut affirmer que le sous-espace propre associé à la valeur propre -3 est la droite $x = y = z$.
On en déduit une base orthonormée de diagonalisation puis une matrice P convenable

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Exercice 72 : [énoncé]

(a) La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable.

(b) Après calculs

$$\chi_A = (X-3)(X+3)^2.$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre -3 est le plan d'équation

$$x - 2y + z = 0.$$

Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle étant deux à deux orthogonaux, on peut affirmer que le sous-espace propre associé à la valeur propre 3 est la droite

$$\mathrm{Vect}(1, -2, 1).$$

On en déduit une base orthonormée de diagonalisation puis une matrice orthogonale P convenable

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

pour

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 73 : [énoncé]

(a) C'est un calcul classique

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - a - (n-1)b)(\lambda - a + b)^{n-1}.$$

Les valeurs propres de A sont $a + (n-1)b$ et $a - b$.

(b) Pour $a = n$ et $b = -1$, la matrice précédente produit un contre-exemple.

(c) La matrice M est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée. En décomposant, une colonne unitaire X dans cette base et en notant $x_1, \ldots, x_n$ ses coordonnées, on a

$$\langle X, MX \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \text{ et } \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de M.
On en déduit que α est la plus grande valeur propre de M.

(d) Soit X un vecteur propre unitaire associé à la plus grande valeur propre de M et Y la colonne (unitaire) formée par les valeurs absolues des coefficients de X. On a
$$\alpha = \langle X, MX\rangle \leq |\langle X, MX\rangle| \leq \langle Y, MY\rangle \leq \alpha$$
et donc $\langle Y, MY\rangle = \alpha$. En décomposant le vecteur Y sur la base orthonormée de vecteurs propres précédente, on obtient que Y est combinaison linéaire des vecteurs propres associés à la plus grande valeur propre de M (il peut y en avoir plusieurs). Le vecteur Y est donc vecteur propre de M à coefficients positifs.

(e) Oui, c'est le théorème de Perron-Frobenius. Cependant cela n'a rien d'immédiat...

Exercice 74 : [énoncé]
$A = M + {}^tM$ est diagonalisable car symétrique et ses valeurs propres sont nulles car racines de X^n. On en déduit que A est semblable à la matrice nulle et donc égale à la matrice nulle. Ainsi M est antisymétrique.

Exercice 75 : [énoncé]
Soit A une matrice antisymétrique réelle.
Le déterminant de A est le produit des valeurs propres complexes de A comptées avec multiplicité. Puisque la matrice A est réelle, ses valeurs propres complexes non réelles sont deux à deux conjuguées et forment donc un produit positif. Il reste à étudier les valeurs propres réelles de A.
Soient λ une valeur propre réelle de A et X est une colonne propre associée.
D'une part
$${}^tXAX = \lambda{}^tXX.$$
D'autre part
$${}^tXAX = -{}^t(AX)X = -\lambda{}^tXX.$$
On en déduit $\lambda = 0$ sachant $X \neq 0$.
Par suite le déterminant de A est positif ou nul.

Exercice 76 : [énoncé]

(a) Pour tout vecteur x de E,
$$(x\,|\,f(\lambda y+\mu z)) = -(f(x)\,|\,\lambda y+\mu z) = -\lambda(f(x)\,|\,y) - \mu(f(x)\,|\,z).$$
Ainsi
$$(x\,|\,f(\lambda y+\mu z)) = (x\,|\,\lambda f(y)+\mu f(z)).$$
Or ceci valant pour tout x, on peut affirmer la linéarité de f.

(b) Notons $A = (a_{i,j})$ la matrice de f dans une base orthonormée $(e_1,\dots,e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.
On a $a_{i,j} = (e_i\,|\,f(e_j))$ et l'antisymétrie de f donne alors $a_{i,j} = -a_{j,i}$ d'où ${}^tA = -A$.

(c) D'une part ${}^t\overline{X}AX = \lambda{}^t\overline{X}X$ et d'autre part ${}^t\overline{X}AX = -{}^t\overline{X}{}^t\overline{A}X = -{}^t\big(\overline{AX}\big)X = -\overline{\lambda}{}^t\overline{X}X$.
Puisque ${}^t\overline{X}X$ est un réel non nul (car $X \neq 0$), on obtient $\lambda = -\overline{\lambda}$ et donc $\lambda \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

(d) Un endomorphisme antisymétrique est représenté par une matrice A antisymétrique réelle. Celle-ci est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et est donc semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à une matrice triangulaire supérieure où figure sur la diagonale ses valeurs propres complexes comptées avec multiplicité. Le déterminant de f est donc le produit des valeurs propres complexes comptées avec multiplicité de la matrice A, or cette dernière est réelle donc ses valeurs propres complexes sont deux à deux conjuguées et de plus ses valeurs propres sont imaginaires pures. Ainsi le déterminant de f est le produit d'éventuels 0 et de termes $\mathrm{i}\lambda$ et $-\mathrm{i}\lambda$; cela donne un réel positif.

Exercice 77 : [énoncé]

(a) Si λ est valeur propre de u de vecteur propre $x \neq 0$ alors la relation $(u(x)\,|\,x) = 0$ donne $\lambda\|x\|^2 = 0$ qui entraîne $\lambda = 0$.
Seule 0 peut être valeur propre de u. Par suite un endomorphisme antisymétrique est diagonalisable si, et seulement si, il est nul.

(b) L'égalité $(u(x+y)\,|\,x+y) = 0$ avec $(u(x)\,|\,x) = (u(y)\,|\,y) = 0$ donne le résultat.
Soient $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E et $A = (a_{i,j})$ la matrice de u dans $\mathcal{B}$. On sait que
$$a_{i,j} = (e_i\,|\,u(e_j))$$
donc par la relation précédente $a_{i,j} = -a_{j,i}$ et la matrice A est antisymétrique.

(c) D'une part
$${}^t\overline{X}AX = \lambda{}^t\overline{X}X.$$
D'autre part
$${}^t\overline{X}AX = -{}^t\overline{X}{}^t\overline{A}X = -{}^t\overline{AX}X = -\overline{\lambda}{}^t\overline{X}X.$$
Or, en notant $x_1,\dots,x_n$ les éléments de la colonne X, on a
$${}^t\overline{X}X = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 > 0$$
car $X \neq 0$.
On en déduit $\overline{\lambda} = -\lambda$ et donc $\lambda \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

Exercice 78 : [énoncé]

(a) ${}^tA = -A$ donne $\det A = (-1)^n \det A$ donc $\det A = 0$ si n est impair.

(b) Si λ est valeur propre réelle de A alors on peut écrire $AX = \lambda X$ pour une certaine colonne X non nulle. On a alors ${}^tXAX = \lambda {}^tXX$ mais aussi ${}^tXAX = -{}^t(AX)X = -\lambda {}^tXX$. On en déduit que la seule valeur propre réelle de A possible est la valeur nulle.
Par l'absurde, si $\det A < 0$ alors le théorème des valeurs intermédiaires assure que le polynôme caractéristique de A s'annule ailleurs qu'en 0. C'est contraire à l'affirmation qui précède.
Ainsi $\det A \geq 0$ avec inégalité stricte si, et seulement si, A est inversible.

Exercice 79 : [énoncé]

Soit $Y \in \operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} A$. On peut écrire $Y = AX$ pour une certaine colonne X.
On a

$${}^tYY = {}^t(AX)Y = -{}^tXAY = 0$$

et donc $Y = 0$.En sus,

$$\operatorname{rg} A + \dim \operatorname{Ker} A = n$$

et donc les espaces $\operatorname{Im} A$ et $\operatorname{Ker} A$ sont supplémentaires. Puisque l'espace $\operatorname{Im} A$ est évidemment stable, on obtient que la matrice A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le rang de la matrice A est égale par similitude au rang de la matrice C mais aussi par construction à la taille de C. On en déduit que la matrice C est inversible (On peut aussi établir que les espaces $\operatorname{Im} A$ et $\operatorname{Ker} A$ sont orthogonaux et, en considérant des bases orthonormées, observer que la matrice A est orthogonalement semblable à B avec un bloc C antisymétrique).
Enfin, si λ est valeur propre réelle de A de vecteur propre $X \neq 0$ on a

$${}^tXAX = \lambda X \text{ et } {}^tXAX = -{}^t(AX)X = -\lambda {}^tXX.$$

On en déduit que seule 0 peut être valeur propre réelle de A. La matrice C n'a donc pas d'autre valeur propre que 0, or elle est inversible, elle n'admet donc pas de valeur propre. Elle est alors nécessairement de taille paire.

Exercice 80 : [énoncé]

(a) On a

$$(x \mid f(x)) = -(x \mid f(x))$$

donc x et $f(x)$ sont orthogonaux et ce, quel que soit x dans E.

(b) Pour tout $x, y \in E$

$$(s(x) \mid y) = -(f(x) \mid f(y)) = (x \mid s(y))$$

et donc l'endomorphisme s est symétrique.

(c) Ici $x \in V_a \setminus \{0_E\}$ donc $s(x) = ax$ puis

$$(s(x) \mid x) = (ax \mid x) = a\|x\|^2.$$

On a aussi comme vu ci-dessus

$$(s(x) \mid x) = -(f(x) \mid f(x)) = -\|f(x)\|^2.$$

Puisque $x \neq 0_E$ et $f(x) \neq 0_E$ (car f est bijective), on en déduit $a < 0$.

(d) Puisque $f(x) \in F$ et $f(f(x)) = s(x) = ax \in F$, on peut assurer que F est stable par f.
Pour $y \in F^\perp$, on a

$$(f(y) \mid x) = -(y \mid f(x)) = 0 \text{ et } (f(y) \mid f(x)) = -(y \mid s(x)) = -a(y \mid x) = 0$$

et donc $f(y) \in F^\perp$. L'espace $F^\perp$ est donc aussi stable par f.
Posons

$$u = \frac{x}{\|x\|} \text{ et } v = \frac{1}{b} f(u) \text{ avec } b = \sqrt{-a}.$$

La famille (u, v) est une base orthonormée de F notamment car

$$\|v\|^2 = \frac{1}{b^2}(f(u) \mid f(u)) = -\frac{1}{b^2}(u \mid s(u)) = -\frac{a}{b^2}\|u\|^2 = 1.$$

Puisque

$$f(u) = bv \text{ et } f(v) = \frac{1}{b} s(x) = \frac{a}{b} x = -bx$$

la matrice de l'endomorphisme induit par f sur F dans la base orthonormée (u, v) est

$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

(e) Par les outils qui précèdent, on parvient par récurrence, à décomposer l'espace E en somme directe orthogonale de plans stables par f, l'espace E est donc de dimension paire.

Exercice 81 : [énoncé]

(a) Pour tout vecteur x de E,

$$(x \mid f(\lambda y+\mu z)) = -(f(x) \mid \lambda y+\mu z) = -\lambda(f(x) \mid y) - \mu(f(x) \mid z).$$

Ainsi

$$(x \mid f(\lambda y+\mu z)) = (x \mid \lambda f(y)+\mu f(z)).$$

Or ceci valant pour tout x, on peut affirmer

$$f(\lambda y+\mu z) = \lambda f(y)+\mu f(z)$$

(par exemple, parce que le vecteur différence est orthogonal à tout vecteur de E et donc nul)
L'application f est donc linéaire.
Notons $A = (a_{i,j})$ la matrice de f dans la base canonique $(e_1,\dots,e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.
Puisque $a_{i,j}$ correspond à la i-ème coordonnée de l'image du j-ème vecteur, on a

$$a_{i,j} = (e_i \mid f(e_j))$$

car la base canonique est orthonormée. L'antisymétrie de f donne alors

$$a_{i,j} = -a_{j,i}$$

et la matrice A est donc antisymétrique.

(b) Les endomorphismes antisymétriques sont, par représentation matricielle, en correspondance avec les matrices antisymétriques. L'ensemble des matrices antisymétriques est un sous-espace vectoriel de dimension $n(n-1)/2$, donc, par l'isomorphisme de représentation matricielle, l'ensemble des endomorphismes antisymétriques est un sous-espace vectoriel de dimension

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Exercice 82 : [énoncé]

(a) $A^2 = \mathrm{O}_4$. Seule 0 est valeur propre de A et si A est diagonalisable alors $A = \mathrm{O}_4$. Ce n'est visiblement pas le cas...

(b) La matrice A est antisymétrique complexe mais pas diagonalisable. C'est donc un contre-exemple.
Il est en revanche remarquable que les matrices antisymétriques réelles sont diagonalisables (dans $\mathbb{C}$).

Exercice 83 : [énoncé]

(a) *Unicité:*
Si $M = A+S$ avec A et S comme voulues, on a ${}^tM = -A+S$ et donc

$$S = \frac{1}{2}\left(M+{}^tM\right) \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{2}\left(M-{}^tM\right).$$

Existence:
Les matrices S et A proposées ci-dessus conviennent.

(b) Si M et ${}^tM$ commutent, il en est de même des matrices A et S fournies par les expressions précédentes. Inversement, si A et S commutent, il en est de même de $M = A+S$ et ${}^tM = -A+S$.

(c) ${}^tA = -A$ donne $\det\left({}^tA\right) = \det(-A)$ et donc $\det A = (-1)^n \det A$. On en déduit que n est pair lorsque $\det A \neq 0$.
La matrice A^2 est symétrique réelle et possède donc une valeur propre λ. Soit x un vecteur propre associé et $y = Ax$. On a

$$(x \mid y) = {}^txAx = -{}^t(Ax)x = -(y \mid x).$$

On en déduit que x et y sont orthogonaux. Posons alors

$$e_1 = \frac{1}{\|x\|}x \quad \text{et} \quad e_2 = \frac{1}{\|y\|}y$$

et complétons la famille (e_1, e_2) en une base orthonomale. L'endomorphisme canoniquement associé à A est alors figuré dans cette base par une matrice de la forme

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \beta & (*) \\ \alpha & 0 & (*) \\ (0) & (0) & A' \end{pmatrix}.$$

Les matrices A et B sont orthogonalement semblables et donc B est antisymétrique. On en déduit $\beta = -\alpha$, les étoiles sont nulles et A' est antisymétrique ce qui permet de propager une récurrence.

(d) Lorsque la matrice antisymétrique A n'est pas inversible, le résultat qui précède est étendu en autorisant des blocs nuls en plus des D_i.
Supposons $M{}^tM = {}^tMM$. Par commutation, les sous-espaces propres de S sont stables par A ce qui permet de mener le raisonnement précédent en choisisssant e_1 vecteur propre commun à S et A^2. En notant que e_2 sera alors vecteur propre de S pour la même valeur propre que e_1, on obtient que M est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de la forme

$$(\lambda) \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Exercice 84 : [énoncé]

(a) Existence :
L'endomorphisme u est symétrique donc diagonalisable en base orthonormée.
Soit $\mathcal{B}$ une telle base et

$$D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Considérons alors v l'endomorphisme de E déterminé par

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \sqrt[p]{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt[p]{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme v est symétrique car représenté par une matrice symétrique en base orthonormée.
L'endomorphisme v vérifie par construction $v^p = u$: il est solution.
Unicité :
Soit v un endomorphisme symétrique solution. L'endomorphisme v commute avec u, les sous-espaces propres de u sont donc stables par v. Soit $E_\lambda(u)$ un tel sous-espace propre. L'endomorphisme induit par v sur ce sous-espace propre est diagonalisable, considérons une base $\mathcal{B}_\lambda$ de diagonalisation. La matrice de l'endomorphisme induit par v dans cette base $\mathcal{B}_\lambda$ est diagonale et sa puissance p -ième est égale à $\lambda\mathrm{Id}$ car $v^p = u$. On en déduit que l'endomorphisme induit par v sur l'espace $E_\lambda(u)$ n'est autre que $\sqrt[p]{\lambda}\mathrm{Id}$. Ceci détermine entièrement v sur chaque sous-espace propre de u. Or ces derniers forment une décomposition en somme directe de E, l'endomorphisme v est donc entièrement déterminé.

(b) Si p est pair et que u possède une valeur propre négative, l'endomorphisme v n'existe pas.

(c) Si p est pair et u positif alors on peut à nouveau établir l'existence mais l'unicité n'est plus vraie car on peut changer les signes des valeurs propres de v tout en conservant la propriété $v^p = u$.

(d) On retrouve existence et unicité en adaptant la démonstration qui précède.

Exercice 85 : [énoncé]

(a) Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale diagonalisant v

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda_k > 0.$$

L'endomorphisme s déterminé par

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

vérifie $s^2 = v$ et puisque sa matrice dans une base orthonormale est symétrique, c'est endomorphisme symétrique.

(b) On a

$$v^{-1} \circ u = s^{-1} \circ s^{-1} \circ u = s^{-1} \circ (s^{-1} \circ u \circ s^{-1}) \circ s.$$

Considérons l'endomorphisme $w = s^{-1} \circ u \circ s^{-1}$. Pour $x, y \in E$,

$$(w(x) \,|\, y) = (u(s^{-1}(x) \,|\, s^{-1}(y)) = (x \,|\, w(y)).$$

L'endomorphisme w est symétrique donc diagonalisable.
L'endomorphisme semblable $s^{-1} \circ w \circ s$ est aussi diagonalisable.

Exercice 86 : [énoncé]

(a) u est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ positives. E est la somme directe orthogonale des sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_r}$, notons $p_1, \dots, p_r$ les projecteurs orthogonaux associés à cette décomposition.
On a $u = \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_r p_r$ et en posant $v = \sqrt{\lambda_1} p_1 + \dots + \sqrt{\lambda_r} p_r$, on a $v^2 = u$ avec v endomorphisme symétrique à valeurs propres positives. On peut aussi proposer une résolution matricielle via représentation dans une base orthonormée

(b) Soit v solution. Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $F = E_\lambda(u)$ est stable par v car u et v commutent. $v_F \in \mathcal{S}^+(F)$ et $v_F^2 = \lambda \mathrm{Id}_F$ donc via diagonalisation de v_F, on obtient $v_F = \sqrt{\lambda}\mathrm{Id}_F$. Ceci détermine v de manière unique sur chaque sous-espace propre de u et puisque ceux-ci sont en somme directe égale à E, on peut conclure à l'unicité de v.

Exercice 87 : [énoncé]

Puisque les valeurs propres de u sont strictement positives, on montre par orthodiagonalisation

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \langle u(x), x \rangle > 0.$$

Soit $x \in E$.
Si $x = 0_E$, l'inégalité demandée est évidente et c'est même une égalité.

Si $x \neq 0_E$, considérons $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\langle u(x + \lambda u^{-1}(x)), x + \lambda u^{-1}(x) \rangle \geq 0$$

donc en développant

$$\lambda^2 \langle x, u^{-1}(x) \rangle + 2\lambda \langle x, x \rangle + \langle u(x), x \rangle \geq 0.$$

Or $\langle x, u^{-1}(x) \rangle = \langle u(u^{-1}(x)), u^{-1}(x) \rangle > 0$, par suite, le discriminant

$$\Delta = 4\|x\|^4 - 4\langle u(x), x \rangle \langle u^{-1}(x), x \rangle$$

est négatif ou nul car sinon le trinôme en λ précédent posséderait deux racines et ne serait donc pas de signe constant.
On en déduit l'inégalité proposée.
De plus, il y a égalité si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant
$x + \lambda u^{-1}(x) = 0_E$ *i.e.* si, et seulement si, x est vecteur propre de u.

Exercice 88 : [énoncé]
La matrice M est symétrique réelle et donc diagonalisable.
Soit λ une valeur propre de M de colonne propre associé $X = {}^t\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$.
On a

$${}^tXMX = \lambda {}^tXX = \lambda \|X\|^2$$

et

$${}^tXMX = \|x.a + y.b + z.c\|^2 \geq 0.$$

Par conséquent $\lambda \geq 0$ et $\det M \geq 0$ car $\det M$ est le produit des valeurs propres comptées avec multiplicité.
En fait, si P est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs a, b, c dans une base orthonormale, on observe que $M = {}^tPP$ ce qui permet de retrouver les résultats précédents.

Exercice 89 : [énoncé]
On peut écrire $A = {}^tPDP$ avec $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_k \geq 0$.
On a alors

$${}^tXAX = {}^tYDY \text{ avec } Y = PX.$$

et alors

$${}^tYDY = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \geq 0.$$

Exercice 90 : [énoncé]
($\Longrightarrow$) Supposons

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX \geq 0.$$

Pour X vecteur propre associé à la valeur propre λ, on obtient

$${}^tXAX = \lambda {}^tXX \text{ avec } {}^tXX > 0$$

et donc $\lambda \geq 0$.
($\Longleftarrow$) Supposons $\mathrm{Sp}\, A \subset \mathbb{R}_+$.
Par le théorème spectral, on peut écrire $A = PD{}^tP$ avec $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale. De plus, les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ de A. Pour toute colonne X, on a alors

$${}^tXAX = {}^tYDY \text{ avec } Y = {}^tPX$$

puis

$${}^tXAX = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \geq 0.$$

Exercice 91 : [énoncé]

(a) Puisque A est symétrique réelle, A est orthogonalement diagonalisable et donc il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, vérifiant $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i \geq 0$. Posons alors $B = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$. On vérifie $B^2 = A$ et ${}^tB = B$ (car ${}^tP = P^{-1}$) et les valeurs propres de B sont évidemment positives.

(b) Pour $\lambda > 0$,

$$X^2 - \lambda = \left(X - \sqrt{\lambda}\right)\left(X + \sqrt{\lambda}\right)$$

avec $X - \sqrt{\lambda}$ et $X + \sqrt{\lambda}$ premier entre eux. Par le lemme de décomposition des noyaux

$$\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \mathrm{Ker}(B - \sqrt{\lambda} I_n) \oplus \mathrm{Ker}(B + \sqrt{\lambda} I_n)$$

or $\mathrm{Ker}(B + \sqrt{\lambda} I_n) = \{0\}$ car les valeurs propres de B sont positives et donc

$$\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \mathrm{Ker}(B - \sqrt{\lambda} I_n).$$

(c) Il est immédiat que $\mathrm{Ker}\, B \subset \mathrm{Ker}\, B^2 = \mathrm{Ker}\, A$.
Inversement, soit $X \in \mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, B^2 = \mathrm{Ker}\, {}^tBB$. On a ${}^tBBX = 0$ donc ${}^tX{}^tBBX = 0$ *i.e.* $\|BX\|^2 = 0$.
On en déduit $X \in \mathrm{Ker}\, B$ et donc $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, B$

(d) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Puisque A est diagonalisable, on peut écrire

$$X = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} X_\lambda \text{ avec } X_\lambda \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n).$$

Puisque $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) = \operatorname{Ker}(B - \sqrt{\lambda} I_n)$, on a alors

$$BX = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} B} BX_\lambda = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} B} \sqrt{\lambda} X_\lambda$$

ce qui détermine B de façon unique.

Exercice 92 : [énoncé]

(a) Puisque A est symétrique réelle, A est orthogonalement diagonalisable et donc il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, vérifiant $A = PDP^{-1}$ avec $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i \geq 0$. Posons alors $B = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$. On vérifie $B^2 = A$ et ${}^tB = B$ (car ${}^tP = P^{-1}$) et les valeurs propres de B sont évidemment positives.

(b) Soit $X \in \operatorname{Ker}(B - \sqrt{\lambda} I_n)$, $BX = \sqrt{\lambda} X$ donc $AX = B^2 X = \lambda X$ puis $X \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$.
Puisque A est diagonalisable,

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n).$$

Puisque B est diagonalisable,

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{\mu \in \operatorname{Sp} B} \operatorname{Ker}(B - \mu I_n).$$

Or les valeurs propres de B sont positives et leurs carrés sont valeurs propres de A donc

$$\operatorname{Sp} B \subset \left\{ \sqrt{\lambda} \mid \lambda \in \operatorname{Sp} A \right\}.$$

Ceci permet d'écrire

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} \operatorname{Ker}(B - \sqrt{\lambda} I_n)$$

quitte à introduire quelques espaces nuls.
On en déduit

$$\dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} \dim \operatorname{Ker}(B - \sqrt{\lambda} I_n) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) \ (1).$$

Or l'inclusion $\operatorname{Ker}(B - \sqrt{\lambda} I_n) \subset \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$ donne

$$\dim \operatorname{Ker}(B - \sqrt{\lambda} I_n) \leq \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) \ (2).$$

L'égalité (1) et la majoration (2) donne alors

$$\dim \operatorname{Ker}(B - \sqrt{\lambda} I_n) = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$$

pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp} A$.
Par inclusion et égalité des dimensions

$$\operatorname{Ker}(B - \sqrt{\lambda} I_n) = \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n).$$

(c) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Puisque A est diagonalisable, on peut écrire

$$X = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} X_\lambda \text{ avec } X_\lambda \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n).$$

Puisque $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) = \operatorname{Ker}(B - \sqrt{\lambda} I_n)$, on a alors

$$BX = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} B} BX_\lambda = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} B} \sqrt{\lambda} X_\lambda$$

ce qui détermine B de façon unique.

Exercice 93 : [énoncé]

(a) Il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, vérifiant $S = PDP^{-1}$ avec $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i \geq 0$.
Considérons alors un polynôme Π, construit par interpolation de Lagrange vérifiant

$$\forall 1 \leq i \leq n, \pi(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}.$$

Posons ensuite $A = \Pi(S)$. A est un polynôme en S, A est symétrique réelle et

$$P^{-1}AP = P^{-1}\Pi(S)P = \Pi(D) = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}).$$

Les valeurs propres de A sont positives donc $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Enfin, puisque

$$P^{-1}A^2P = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D$$

on a $A^2 = S$.

(b) Soit $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ vérifiant $B^2 = S$. On a $BS = S^3 = SB$ donc B commute avec S et donc avec A qui est un polynôme en S. Puisque A et B sont diagonalisables et qu'elle commutent toutes deux, elles sont codiagonalisables. Ainsi, il existe une matrice de passage $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$Q^{-1}AQ = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) \text{ et } Q^{-1}BQ = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n).$$

Or $A^2 = S = B^2$ donc $\mu_i^2 = \lambda_i$ puis $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ car $\mu_i \geq 0$.
Finalement $A = B$

Exercice 94 : [énoncé]
Existence : Il existe $U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale positive telle que ${}^tUAU = D$. Soit Δ la matrice diagonale dont les coefficients sont les racines carrée des coefficients de D. Δ est diagonale positive et $\Delta^2 = D$.
Pour $B = U\Delta{}^tU$, on a $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $B^2 = A$ donc B solution.
Unicité : Supposons B solution et introduisons un espace vectoriel euclidien E de dimension n et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ représentés par A et B dans une base orthonormée.
Avec des notations immédiates $E_\lambda(v) \subset E_{\lambda^2}(u)$, or $E = \oplus_{\lambda \in \mathbb{R}_+} E_\lambda(v)$ et $E = \oplus_{\lambda \in \mathbb{R}_+} E_{\lambda^2}(u)$ donc $\dim E_\lambda(v) = \dim E_{\lambda^2}(u)$ puis $E_\lambda(v) = E_{\lambda^2}(u)$. Ceci détermine entièrement v et permet de conclure à l'unicité de B.

Exercice 95 : [énoncé]
Si $A = {}^tMM$ alors pour toute colonne X

$${}^tXAX = {}^t(MX)MX \geq 0$$

et donc $\mathrm{Sp}\, A \subset \mathbb{R}_+$.
Inversement, pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$, il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\lambda_i \geq 0$.
Posons alors $M = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$. On a $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $M^2 = A$ ce qui fournit $A = {}^tMM$.

Exercice 96 : [énoncé]
Si A est diagonale égale à $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$ alors

$$\mathrm{tr}(AU) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_{i,i}.$$

Or les coefficients d'une matrice orthogonale appartiennent à $[-1\,;1]$ donc

$$\mathrm{tr}(AU) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i = \mathrm{tr}(A).$$

Plus généralement, si A est symétrique réelle à valeurs propres positives, on peut écrire $A = {}^tVDV$ avec V orthogonale et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$. On a alors

$$\mathrm{tr}(AU) = \mathrm{tr}\big({}^tVDVU\big) = \mathrm{tr}(DW)$$

avec $W = VU{}^tV$ orthogonale. On a alors

$$\mathrm{tr}(AU) \leq \mathrm{tr}\, D = \mathrm{tr}\, A.$$

L'étude de $\mathrm{tr}(UA)$ est analogue.

Exercice 97 : [énoncé]
Le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est donné par

$$(A\,|\,B) = \mathrm{tr}({}^tAB).$$

(a) L'espace solution est $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. En effet, les espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux car pour $(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ on a

$$(A\,|\,B) = \mathrm{tr}\big({}^tAB\big) = \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$

et

$$(A\,|\,B) = (B\,|\,A) = \mathrm{tr}\big({}^tBA\big) = -\,\mathrm{tr}(BA)$$

donc $(A\,|\,B) = 0$.
Les espaces étant orthogonaux, ils sont donc en somme directe. Puisque de plus on peut écrire n'importe quelle matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sous la forme $M = A + B$ avec

$$A = \frac{M + {}^tM}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } B = \frac{M - {}^tM}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

les espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux et donc chacun est l'orthogonale de l'autre.
car ces espaces sont évidemment orthogonaux et supplémentaires.

(b) On a

$${}^t\mathrm{exp}(xB)\exp(xB) = \exp({}^t(xB))\exp(xB) = \exp(-xB)\exp(xB).$$

Or $-xB$ et xB commutent donc

$${}^t\mathrm{exp}(xB)\exp(xB) = \exp(-xB + xB) = \exp(0) = I_n.$$

(c) La fonction dérivable $f: x \mapsto \operatorname{tr}(A\exp(xB))$ admet un maximum en 0 donc $f'(0) = 0$ ce qui donne $\operatorname{tr}(AB) = 0$ pour tout $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Ainsi A est une matrice symétrique car dans l'orthogonal de l'espace des matrices antisymétrique.
Par le théorème spectrale, on peut écrire $A = {}^tPDP$ avec $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
Posons $V = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_i = \pm 1$ et $\varepsilon_i\lambda_i = |\lambda_i|$.
Considérons alors $U = {}^tPVP \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

$$\operatorname{tr}(AU) = \operatorname{tr}(A^tPVP) = \operatorname{tr}(PA^tPV) = \operatorname{tr}(DV) = |\lambda_1| + \dots + |\lambda_n|$$

et

$$\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n.$$

La propriété $\operatorname{tr}(AU) \le \operatorname{tr} A$ entraîne $\lambda_i \ge 0$ pour tout i.
La matrice A est alors symétrique positive.

(d) Supposons $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On peut écrire $A = {}^tPDP$ avec $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i \ge 0$ et $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(AU) = \operatorname{tr}(DV)$ avec $V = (v_{i,j}) = {}^tPUP \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
On a alors

$$\operatorname{tr}(DV) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_{i,i} \le \sum_{i=1}^n \lambda_i = \operatorname{tr}(A)$$

car $v_{i,i} \le 1$.

(e) L'application réelle $f: V \to \operatorname{tr}(MV)$ est continue sur le compact $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, elle y admet donc un maximum en un certain $U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. On a alors pour tout $V \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$,

$$\operatorname{tr}(MV) \le \operatorname{tr}(MU).$$

Posons alors $A = MU$. Pour tout $W \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$,

$$\operatorname{tr}(AW) \le \operatorname{tr} A$$

donc $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et ainsi $M = AU^{-1}$ avec $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $U^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 98 : [énoncé]

(a) Soit $M \in \mathcal{S}_\alpha$. La matrice M est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n \ge 0$ avec $\lambda_1 \dots \lambda_n \ge \alpha$ et on a $\operatorname{tr} M = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$. Par l'inégalité arithmético-géométrique

$$\frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}{n} \ge \sqrt[n]{\lambda_1 \dots \lambda_n}$$

et donc

$$\operatorname{tr}(M) \ge n\alpha^{1/n}$$

avec égalité si $M = \alpha^{1/n} I_n \in \mathcal{S}_\alpha$.

(b) Par orthodiagonalisation de la matrice A, on peut écrire

$$A = Q\Delta^tQ \text{ avec } \Delta = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{ et } Q \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}).$$

Les valeurs propres de A étant positives, on peut poser $P = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})^tQ$ et vérifier $A = {}^tPP$.

(c) On peut écrire

$$\operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}({}^tPPM) = \operatorname{tr}(PM^tP)$$

avec PM^tP matrice symétrique de déterminant $\det M \times \det A \ge \alpha \det(A)$.
Par l'étude qui précède avec $\alpha' = \alpha \det A$, on obtient

$$\operatorname{tr}(AM) \ge n(\alpha \det A)^{1/n}.$$

Cependant, lorsque M parcourt $\mathcal{S}_\alpha$, on n'est pas assuré que PM^tP parcourt l'intégralité $\mathcal{S}_{\alpha'}$. Cela est néanmoins le cas lorsque la matrice A est inversible car alors la matrice P l'est aussi. L'inégalité précédente est alors une égalité pour

$$M = (\alpha \det A)^{1/n} A^{-1}.$$

Lorsque la matrice A n'est pas inversible, c'est qu'au moins l'une de ses valeurs propres est nulle. Sans perte de généralité, supposons que ce soit la premier de la séquence $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$$A = Q\Delta^tQ \text{ avec } \Delta = \operatorname{diag}(0, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \lambda_2, \dots, \lambda_n \ge 0.$$

Considérons alors pour $\varepsilon > 0$

$$M_\varepsilon = Q \operatorname{diag}(\alpha\varepsilon^{-(n-1)}, \varepsilon, \dots, \varepsilon)^tQ.$$

La matrice M_ε est élément de $\mathcal{S}_\alpha$ et

$$\operatorname{tr}(AM_\varepsilon) = (n-1)\varepsilon.$$

Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient

$$\inf_{M \in \mathcal{S}_\alpha} \operatorname{tr}(AM) = 0 = n(\alpha \det(A))^{1/n}.$$

(d) Soit $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\det(M) \geq 0$. Via diagonalisation de M avec des valeurs propres positives, on peut affirmer $\beta = \det(M + \lambda I_n) > 0$ pour tout $\lambda > 0$. Par ce qui précède,

$$\operatorname{tr}(A(M + \lambda I_n)) \geq n(\beta \det(A))^{1/n}.$$

Par continuité, quand $\lambda \to 0^+$, on obtient

$$\operatorname{tr}(AM) \geq 0$$

et, bien évidemment, il y a égalité si $M = O_n$.
Le résultat est donc encore vrai si $\alpha = 0$.

(e) Le résultat n'a plus de sens si A est symétrique réelle de déterminant négatif avec n pair.

Exercice 99 : [énoncé]

Cas A diagonale :
On écrit $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$. On a

$$AB + BA = \left((\lambda_i + \lambda_j)b_{i,j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

et donc

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, (\lambda_i + \lambda_j)b_{i,j} = 0.$$

Si $\lambda_i \neq 0$ alors $\lambda_i + \lambda_j > 0$ et donc $b_{i,j} = 0$ puis $\lambda_i b_{i,j} = 0$.
Sinon, on a encore $\lambda_i b_{i,j} = 0$.
Ainsi $AB = 0$ puis aussi $BA = 0$.
Cas général :
Par le théorème spectral, on peut écrire $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale à coefficients diagonaux positifs et $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
La relation $AB + BA = 0$ donne alors $DM + MD = 0$ avec $M = P^{-1}BP$. Comme au dessus, on obtient $DM = 0$ puis

$$AB = PDP^{-1}PMP^{-1} = 0.$$

Exercice 100 : [énoncé]

(a) La matrice ${}^tAA$ est évidemment symétrique.
Pour λ valeur propre de ${}^tAA$ et X vecteur propre associé, on a

$${}^tX{}^tAAX = {}^t(AX)AX = \|AX\|^2$$

et

$${}^tX{}^tAAX = \lambda{}^tXX = \lambda\|X\|^2.$$

Ainsi

$$\lambda = \frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} > 0$$

car A est inversible.

(b) Par le théorème spectral, il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^tP{}^tAAP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0$.
La matrice

$$S = {}^tP \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})P$$

est alors solution.

(c) Posons $O = AS^{-1}$. On a $A = OS$ et ${}^tOO = {}^tS^{-1}{}^tAAS^{-1} = I_n$ donc $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $A = OS$.

(d) Si $A = OS$ alors $S^2 = {}^tAA$.
Pour $\lambda \in \operatorname{Sp}({}^tAA)$,

$$\operatorname{Ker}({}^tAA - \lambda I_n) = \operatorname{Ker}(S^2 - \lambda I_n).$$

Or par le lemme de décomposition des noyaux,

$$\operatorname{Ker}(S^2 - \lambda I_n) = \operatorname{Ker}(S - \sqrt{\lambda} I_n) \oplus \operatorname{Ker}(S + \sqrt{\lambda} I_n)$$

car $\lambda > 0$. Or

$$\operatorname{Ker}(S + \sqrt{\lambda} I_n) = \{0\}$$

car $\operatorname{Sp} S \subset \mathbb{R}_+^*$. Ainsi pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp}({}^tAA)$,

$$\operatorname{Ker}({}^tAA - \lambda I_n) = \operatorname{Ker}(S - \lambda I_n)$$

ce qui suffit à établir l'unicité de S car

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}({}^tAA)} \operatorname{Ker}({}^tAA - \lambda I_n).$$

Exercice 101 : [énoncé]

(a) Commençons par comprendre la définition de l'application φ. Tout élément de $\mathbb{R}^n$ s'identifie avec la colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée des mêmes coefficients. De plus, pour toutes colonnes X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit matriciel ${}^tXAY$ est possible et détermine une matrice carrée de taille 1 que l'on indentifie avec son coefficient. Dans ce sens, φ est une application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$. Reste à vérifier que celle-ci est bilinéaire sysmétrique et définie positive.

Soient $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On vérifie par un simple calcul que φ est linéaire en sa deuxième variable :

$$\varphi(X, \lambda Y + \mu Z) = {}^tXA(\lambda Y + \mu Z) = \lambda {}^tXAY + \mu {}^tXAZ = \lambda\varphi(X, Y) + \mu\varphi(X, Z)$$

Aussi, l'application φ est symétrique car, par transposition d'un réel et symétrie de la matrice A,

$$\varphi(X, Y) = {}^t\left({}^tXAY\right) = {}^tY{}^tAX = {}^tYAX = \varphi(Y, X)$$

On en déduit que φ est une forme bilinéaire symétrique.

On diagonalise la matrice A à l'aide d'une matrice de passage orthogonale.

La matrice A est symétrique réelle, il existe donc $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telle que

$$A = PDP^{-1} = PD{}^tP$$

Pour $X \in \mathbb{R}^n$, on écrit alors

$$\varphi(X, X) = {}^tXPD{}^tPX = {}^tYDY \quad \text{avec} \quad Y = {}^tPX$$

En notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de D et $y_1, \dots, y_n$ les coefficients de la colonne Y, on constate

$$\varphi(X, X) = {}^tYDY = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \geq 0$$

car les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de A, ils sont donc tous strictement positifs par hypothèse. Au surplus, si $\varphi(X, X)$ est nul, on obtient $y_i = 0$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$. Le vecteur Y est alors nul puis $X = PY$ aussi.
Finalement, φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

(b) *On orthonormalise la base canonique de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire précédent.*

Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Par le procédé de Gram-Schmidt, on orthonormalise la famille libre $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ de sorte que $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale pour le produit scalaire φ. La matrice de passage T de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure car, pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, e_j est combinaison linéaire[3] des vecteurs $e'_1, \dots, e'_j$. Vérifions alors que les matrices A et ${}^tTT$ sont égales.

Soient $X, Y \in \mathbb{R}^n$. Par la formule de changement de base, les colonnes des coordonnées de X et Y dans $\mathcal{B}'$ sont $X' = TX$ et $Y' = TY$. La base $\mathcal{B}'$ étant orthonormée pour φ, on peut calculer le produit scalaire de X et Y à partir des coordonnées dans $\mathcal{B}'$ et on obtient ainsi

$$\varphi(X, Y) = {}^tX'Y' \quad \text{c'est-à-dire} \quad {}^tXAY = {}^tX{}^tTTY$$

Cette dernière égalité étant vraie pour toutes colonnes X et Y, on peut conclure $A = {}^tTT$.

3. Rappelons que, par le procédé de Schmidt, on a $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_j) = \mathrm{Vect}(e'_1, \dots, e'_j)$ pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$.