Espaces préhilbertiens réels

Produit scalaire

Exercice 1 [03322] [Correction]
Soient a un vecteur unitaire d'un espace préhilbertien réel E, k un réel et $\varphi\colon E \times E \to \mathbb{R}$ l'application déterminée par

$$\varphi(x, y) = \langle x, y\rangle + k\langle x, a\rangle\langle y, a\rangle.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit un produit scalaire.

Exercice 2 [04092] [Correction]
Soit $E = \mathcal{C}^1\Big([0\,;1], \mathbb{R}\Big)$. Pour $f, g \in E$, on pose

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t + f(1)g(0) + f(0)g(1).$$

Montrer que φ définit un produit scalaire sur E.

Calculs dans un espace préhilbertien réel

Exercice 3 [00505] [Correction]
Démontrer que la boule unité fermée B d'un espace préhilbertien réel est strictement convexe *i.e.* que pour tout $x, y \in B$ différents et tout $t \in \left]0\,;1\right[$, $\big\|(1-t)x + ty\big\| < 1$.

Exercice 4 [00511] [Correction]
On munit $E = \mathcal{C}([a\,;b], \mathbb{R})$ du produit scalaire défini par

$$(f \,|\, g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

En exploitant le théorème d'approximation uniforme de Weierstrass, établir que l'orthogonal du sous-espace vectoriel F de E formé des fonctions polynomiales est réduit à $\{0\}$.

Exercice 5 [03318] [Correction]
Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs d'un espace préhilbertien E.
On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{1, -1\}^n, \left\|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k\right\| \le M.$$

Montrer

$$\sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 \le M^2.$$

Exercice 6 [03321] [Correction]
On munit l'espace $E = \mathcal{C}([0\,;1], \mathbb{R})$ du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pour $f \in E$, on note F la primitive de f qui s'annule en 0

$$\forall x \in [0\,;1], F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

et on considère l'endomorphisme v de E déterminé par $v(f) = F$.

(a) Déterminer un endomorphisme v^* vérifiant

$$\forall(f, g) \in E^2, \langle v(f), g\rangle = \langle f, v^*(g)\rangle.$$

(b) Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme $v^* \circ v$.

Exercice 7 [03325] [Correction]
Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel E. Établir

$$F^\perp = \overline{F}^\perp.$$

Exercice 8 [00351] [Correction]
Soient $e = (e_i)_{1\le i\le n}$ et $f = (f_j)_{1\le j\le n}$ deux bases orthonormales d'un espace euclidien E.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose

$$A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (f_i \,|\, u(e_j))^2.$$

Montrer que A ne dépend pas des bases orthonormales choisies

Exercice 9 [04995] [Correction]
Soient $x_1,\dots,x_n$ des vecteurs d'un espace euclidien E. On pose

$$M=\max_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\{1,-1\}^n}\left\|\sum_{k=1}^n\varepsilon_k x_k\right\|.$$

(a) Soient $r_1,\dots,r_n$ des variables aléatoires indépendantes et uniformes sur $\{1,-1\}$. Montrer

$$\mathrm{E}\left(\left\|\sum_{k=1}^n r_k x_k\right\|^2\right)=\sum_{k=1}^n\|x_k\|^2.$$

(b) En déduire

$$\sum_{k=1}^n\|x_k\|^2\le M^2.$$

Représentation d'une forme linéaire

Exercice 10 [03024] [Correction]
On définit sur $\mathbb{R}[X]$ le produit scalaire

$$\langle P,Q\rangle=\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

Existe-t-il $A\in\mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall P\in\mathbb{R}[X],P(0)=\langle A,P\rangle?$$

Exercice 11 [01573] [Correction]
Soit $E=\mathbb{R}[X]$.

(a) Montrer que $\varphi(P,Q)=\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.

(b) Soit $\theta\colon E\to\mathbb{R}$ la forme linéaire définie par $\theta(P)=P(0)$.
Montrer qu'il n'existe pas de polynôme Q tel que pour tout $P\in E$ on ait $\theta(P)=\varphi(P,Q)$.

Polynômes orthogonaux

Exercice 12 [03079] [Correction]
On définit

$$Q_n(X)=\frac{1}{2^n n!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}.$$

(a) Soit $n\ge 1$. Montrer que Q_n possède n racines simples dans $]-1\,;1[$.

(b) Montrer que

$$Q_n=X^n+(X^2-1)R_n(X)$$

avec $R_n\in\mathbb{R}[X]$. En déduire $Q_n(1)$ et $Q_n(-1)$.

(c) On pose, pour $(P,Q)\in\mathbb{R}[X]^2$,

$$\langle P,Q\rangle=\int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que Q_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

(d) Calculer $\|Q_n\|^2$.

Exercice 13 [03657] [Correction]
On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire

$$\langle P,Q\rangle=\int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Établir l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes (P_n) formée de polynômes deux à deux orthogonaux avec chaque P_n de degré n et de coefficient dominant 1.

(b) Étudier la parité des polynômes P_n.

(c) Prouver que pour chaque $n\ge 1$, le polynôme $P_{n+1}-XP_n$ est élément de l'orthogonal à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.

(d) En déduire alors qu'il existe $\lambda_n\in\mathbb{R}$ tel que

$$P_{n+1}=XP_n+\lambda_n P_{n-1}.$$

Exercice 14 [01332] [Correction]
Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $E=\mathbb{R}_n[X]$ et

$$\langle\cdot\,,\cdot\rangle\colon(P,Q)\in E^2\mapsto\langle P,Q\rangle=\int_0^{+\infty}P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Justifier la définition de $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ et montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.
On pose $F=\left\{P\in E,P(0)=0\right\}$. On cherche à déterminer $d(1,F)$. On note $(P_0,\dots,P_n)$ l'orthonormalisée de Schmidt de $(1,X,\dots,X^n)$.

(b) Calculer $P_k(0)^2$.

(c) Déterminer une base de $F^\perp$ que l'on exprimera dans la base $(P_0, \dots, P_n)$. En déduire $d(1, F^\perp)$ et $d(1, F)$.

Exercice 15 [04994] [Correction]
(Polynômes orthogonaux de Legendre) Dans ce sujet, on identifie polynôme et fonction polynomiale associée sur $[-1\,;1]$.
On munit l'espace $E = \mathcal{C}\big([-1\,;1], \mathbb{R}\big)$ du produit scalaire

$$(f \,|\, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit le polynôme P_n défini par

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\Big(\big(x^2-1\big)^n\Big).$$

(a) Calculer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.

(b) Montrer que P_n est une fonction polynôme de degré n orthogonal à tout polynôme de degré inférieur à $n-1$.

(c) En commençant par dériver deux fois $(x^2-1)^{n+1}$, établir que pour tout $n \geq 1$

$$P'_{n+1} = (2n+1)P_n + P'_{n-1}.$$

(d) En déduire

$$\|P_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

Familles obtusangles

Exercice 16 [03157] [Correction]
Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de $n \geq 2$ vecteurs d'un espace préhilbertien réel. On suppose

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq n, (x_i \,|\, x_j) < 0.$$

Montrer que toute sous famille de $n-1$ vecteurs de $\mathcal{F}$ est libre.

Exercice 17 [01574] [Correction]
(Famille obtusangle) Soient $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$ des vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il est impossible que

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq n+2,\ (x_i \,|\, x_j) < 0.$$

Éléments propres d'endomorphismes euclidiens

Exercice 18 [00517] [Correction]
Soit a un vecteur normé d'un espace vectoriel euclidien E. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère l'endomorphisme

$$f_\alpha : x \mapsto x + \alpha(a \,|\, x)a.$$

(a) Préciser la composée $f_\alpha \circ f_\beta$. Quelles sont les f_α bijectives ?

(b) Déterminer les éléments propres de f_α.

Projections orthogonales

Exercice 19 [03766] [Correction]
On pose $E = \mathcal{C}^1([0\,;1], \mathbb{R})$ et

$$\forall f, g \in E, \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ définit un produit scalaire sur E.

(b) On pose

$$V = \big\{f \in E \,\big|\, f(0) = f(1) = 0\big\} \text{ et } W = \big\{f \in E \,\big|\, f \text{ est } \mathcal{C}^2 \text{ et } f'' = f\big\}.$$

Montrer que V et W sont supplémentaires et orthogonaux.
Exprimer la projection orthogonale sur W.

(c) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et

$$E_{\alpha,\beta} = \big\{f \in E \,\big|\, f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\big\}.$$

Calculer

$$\inf_{f \in E_{\alpha,\beta}} \int_0^1 \big(f(t)^2 + f'(t)^2\big)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 20 [00529] [Correction]
On définit une application $\varphi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ par

$$\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

(b) Calculer $\varphi(X^p, X^q)$.

(c) Déterminer

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(t^2-(at+b))^2\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 21 [02735] [Correction]
Calculer

$$\inf\left\{\int_0^1 t^2(\ln t - at - b)^2\,\mathrm{d}t, (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Familles totales

Exercice 22 [00530] [Correction]
(Formule de Parseval) On suppose que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale totale d'un espace préhilbertien E. Montrer que pour tout $x\in E$,

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|(e_n\,|\,x)\right|^2.$$

Produit scalaire et transposition matricielle

Exercice 23 [03936] [Correction]
Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|AX\| \le \|X\|$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne usuelle sur l'espace des colonnes.
Établir

$$\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \left\|{}^tAX\right\| \le \|X\|.$$

Exercice 24 [03938] [Correction]
Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|AX\| \le \|X\|$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne usuelle sur l'espace des colonnes.

(a) Établir

$$\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \left\|{}^tAX\right\| \le \|X\|.$$

(b) Soit $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que si $AX = X$ alors ${}^tAX = X$

(c) Établir

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker}(A-I_n)\oplus\operatorname{Im}(A-I_n).$$

Exercice 25 [00354] [Correction]
Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Établir

$$\operatorname{rg}({}^tAA) = \operatorname{rg}A.$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Il est immédiat que φ est une forme bilinéaire symétrique sur E.
On a
$$\varphi(x,x) = \|x\|^2 + k\langle x,a\rangle^2.$$
En particulier
$$\varphi(a,a) = \|a\|^2 + k\|a\|^4 = (1+k).$$
Pour que la forme bilinéaire symétrique φ soit définie positive, il est nécessaire que $1+k>0$.
Inversement, supposons $1+k>0$.
Si $k \geq 0$ alors $\varphi(x,x) \geq \|x\|^2$ et donc
$$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \varphi(x,x) > 0.$$
Si $k \in \left]-1\,;0\right[$, $k=-\alpha$ avec $\alpha \in \left]0\,;1\right[$ et
$$\varphi(x,x) = \|x\|^2 - \alpha\langle x,a\rangle^2.$$
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz
$$\langle x,a\rangle^2 \leq \|x\|^2\|a\|^2 = \|x\|^2$$
donc
$$\varphi(x,x) \geq \|x\|^2 - \alpha\|x\|^2 = (1-\alpha)\|x\|^2$$
de sorte que
$$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \varphi(x,x) > 0.$$
Ainsi φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive donc un produit scalaire.
Finalement, φ est un produit scalaire si, et seulement si, $1+k>0$.

Exercice 2 : [énoncé]
L'application φ est bien définie de $E \times E \to \mathbb{R}$ et clairement bilinéaire et symétrique.
Soit $f \in E$.
$$\varphi(f,f) = \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t + 2f(0)f(1).$$
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz
$$\left(\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t$$
et donc
$$\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t \geq \big(f(1)-f(0)\big)^2$$
puis
$$\varphi(f,f) \geq f(1)^2 + f(0)^2 \geq 0.$$
Au surplus, si $\varphi(f,f)=0$ alors $f(0)=f(1)=0$, mais aussi $\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$. La fonction f est donc constante égale à 0.

Exercice 3 : [énoncé]
Par l'inégalité triangulaire
$$\big\|(1-t)x+ty\big\| \leq (1-t)\|x\| + t\|y\| \leq 1.$$
De plus, s'il y a égalité alors $\|x\|=1$, $\|y\|=1$ et les vecteurs $(1-t)x$ et ty sont positivement liés.
Les vecteurs x et y étant unitaires et positivement liés, ils sont égaux. Ceci est exclu.

Exercice 4 : [énoncé]
Soit $f \in F^\perp$. Puisque f est continue sur le segment $[a\,;b]$, par le théorème d'approximation uniforme de Weierstrass :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathbb{R}[X], \|f-P\|_{\infty,[a;b]} \leq \varepsilon.$$
On a alors
$$\|f\|^2 = \int_a^b f^2 = \int_a^b f(f-P) + \int_a^b fP = \int_a^b f(f-P)$$
avec
$$\left|\int_a^b f(f-P)\right| \leq (b-a)\|f\|_\infty\|f-P\|_\infty \leq (b-a)\|f\|_\infty\varepsilon.$$
En faisant tendre ε vers 0, on obtient $\|f\|^2=0$ donc $f=0$. Ainsi $F^\perp \subset \{0\}$ puis $F^\perp = \{0\}$.

Exercice 5 : [énoncé]
Cas $n=1$, c'est immédiat.
Cas $n=2$:

Si $\|x+y\| \leq M$ et $\|x-y\| \leq M$ alors

$$\|x\|^2 + 2(x\,|\,y) + \|y\|^2 \leq M^2 \text{ et } \|x\|^2 - 2(x\,|\,y) + \|y\|^2 \leq M^2.$$

Si $(x\,|\,y) \geq 0$ alors première identité donne $\|x\|^2 + \|y\|^2 \leq M^2$, si $(x\,|\,y) \leq 0$, c'est la deuxième identité qui permet de conclure.
Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 1$.
Supposons

$$\forall(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}) \in \{1,-1\}^{n+1}, \left\|\sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k x_k\right\| \leq M.$$

Par l'étude du cas $n = 2$ appliquée au vecteur

$$x = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k \text{ et } y = x_{n+1}$$

on obtient

$$\forall(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{1,-1\}^n, \left\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k\right\|^2 + \|x_{n+1}\|^2 \leq M^2$$

donc

$$\forall(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{1,-1\}^n, \left\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k\right\| \leq \sqrt{M^2 - \|x_{n+1}\|^2}.$$

Par hypothèse de récurrence

$$\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 \leq M^2 - \|x_{n+1}\|^2$$

et l'on peut conclure.
Récurrence établie.
Une variante probabiliste élégante : On introduit des variables $r_1, \dots, r_n$ indépendantes et uniformes sur $\{\pm 1\}$. Par hypothèse

$$\mathrm{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right\|^2\right) \leq M^2.$$

Or en développant

$$\mathrm{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right\|^2\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{E}(r_i r_j)(x_i\,|\,x_j) = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

car $\mathrm{E}(r_i r_j) = \delta_{i,j}$.

Exercice 6 : [énoncé]

(a) Par intégration par parties

$$\int_0^1 F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(1)G(1) - \int_0^1 f(x)G(x)\,\mathrm{d}x$$

ce qui se réécrit

$$\int_0^1 F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\big(G(1) - G(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

Ainsi pour

$$v^*(g)\colon x \mapsto G(1) - G(x) = \int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t$$

on vérifie que v^* est un endomorphisme de E vérifiant

$$\forall(f,g) \in E^2, \langle v(f), g\rangle = \langle f, v^*(g)\rangle.$$

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$ vérifiant $(v^* \circ v)(f) = \lambda f$.
La fonction f est nécessairement dérivable et vérifie

$$\begin{cases} \lambda f(1) = 0 \\ v(f)(x) = -\lambda f'(x). \end{cases}$$

La fonction f est donc nécessairement deux fois dérivable et vérifie

$$\begin{cases} \lambda f(1) = 0 \\ \lambda f'(0) = 0 \\ f(x) = -\lambda f''(x). \end{cases}$$

Si $\lambda = 0$ alors $f = 0$ et donc λ n'est pas valeur propre.
Si $\lambda > 0$ alors en écrivant $\lambda = 1/\sqrt{\omega}$, l'équation différentielle $\lambda y'' + y = 0$ donne la solution générale

$$y(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t).$$

La condition $f'(0) = 0$ donne $\beta = 0$ et la condition $f(1) = 0$ donne $\alpha\cos(\omega) = 0$.
Si $\omega \notin \pi/2 + \pi\mathbb{N}$ alors $f = 0$ et $\lambda = 1/\sqrt{\omega}$ n'est pas valeur propre.
En revanche, si $\omega \in \pi/2 + \pi\mathbb{N}$, alors par la reprise des calculs précédents donne $\lambda = 1/\sqrt{\omega}$ valeur propre associé au vecteur propre associé $f(x) = \cos(\omega x)$.
Si $\lambda < 0$ alors la résolution de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants avec les conditions proposées donne $f = 0$ et donc λ n'est pas valeur propre.

Exercice 7 : [énoncé]
Puisque $F \subset \overline{F}$, on a déjà
$$\overline{F}^{\perp} \subset F^{\perp}.$$
Soit $a \in F^{\perp}$.
Pour tout $x \in \overline{F}$, il existe une suite (x_n) d'éléments de F telle que $x_n \to x$.
Puisque
$$\forall n \in \mathbb{N}, \langle x_n, a\rangle = 0$$
à la limite (le produit scalaire étant continue)
$$\langle x, a\rangle = 0$$
et donc $a \in \overline{F}^{\perp}$.
Finalement, par double inclusion $F^{\perp} = \overline{F}^{\perp}$.

Exercice 8 : [énoncé]
Puisque la base f est orthonormale, on a
$$A = \sum_{j=1}^{n} \left\|u(e_j)\right\|^2$$
et donc
$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (e_i \,|\, u(e_j))^2.$$
Notons $M = (m_{i,j})$ la matrice de u dans la base orthonormale e. On a
$$m_{i,j} = (e_i \,|\, u(e_j))$$
et donc
$$A = \mathrm{tr}\left({}^tMM\right).$$
Si $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ est une autre base orthonormale de E et si M' est la matrice de u dans e', on peut écrire
$$M' = {}^tPMP \text{ avec } P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$$
et alors
$$\mathrm{tr}({}^tM'M') = \mathrm{tr}({}^tP{}^tMMP) = \mathrm{tr}({}^tMMP{}^tP) = \mathrm{tr}({}^tMM).$$
Finalement, la quantité A ne dépend ni de choix de f ni de celui de e.

Exercice 9 : [énoncé]

(a) Par développement du produit scalaire
$$\left\|\sum_{k=1}^{n} r_k x_k\right\|^2 = \left\langle \sum_{k=1}^{n} r_k x_k, \sum_{\ell=1}^{n} r_\ell x_\ell \right\rangle = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} r_k r_\ell \langle x_k, x_\ell\rangle$$
puis par linéarité de l'espérance
$$\mathrm{E}\left(\left\|\sum_{k=1}^{n} r_k x_k\right\|^2\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \mathrm{E}(r_k r_\ell)\langle x_k, x_\ell\rangle.$$

L'espérance d'un produit de variables indépendantes est le produit des espérances.

Pour tous $k, \ell \in [\![1\,;n]\!]$ avec $k \neq \ell$
$$\mathrm{E}(r_k r_\ell) = \mathrm{E}(r_k)\mathrm{E}(r_\ell) = 0$$
car l'espérance d'une variable uniforme sur $\{-1, 1\}$ est nulle. Après simplification,
$$\mathrm{E}\left(\left\|\sum_{k=1}^{n} r_k x_k\right\|^2\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(r_k^2)\langle x_k, x_k\rangle = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$$
car la variable r_k^2 est constante égale à 1 donc d'espérance 1.

(b) Par définition de M, la variable aléatoire $X = \|r_1x_1 + \dots + r_nx_n\|$ est bornée par M et donc $\mathrm{E}(X^2) \leq M^2$ ce qui donne la comparaison demandée.

Exercice 10 : [énoncé]
Supposons l'existence d'un tel polynôme A et considérons $P(X) = XA(X)$.
On a
$$0 = P(0) = \langle A, P\rangle = \int_0^1 tA(t)^2 \,\mathrm{d}t.$$
Par nullité de l'intégrale d'une fonction continue positive, on obtient
$$\forall t \in [0\,;1], tA(t)^2 = 0.$$
Le polynôme A admet une infinité de racine, c'est donc le polynôme nul ce qui est absurde.

Exercice 11 : [énoncé]

(a) ras

(b) Supposons qu'un tel polynôme Q existe et considérons $P = XQ$.
On a $\theta(P) = 0 = \int_0^1 tQ^2(t)\,\mathrm{d}t$ donc $Q = 0$ d'où $\theta = 0$. Absurde.

Exercice 12 : [énoncé]

(a) 1 et -1 sont racines de multiplicité n du polynôme $(X^2-1)^n$.
1 et -1 sont donc racines des polynômes

$$(X^2-1)^n, \big((X^2-1)^n\big)',\dots, \big((X^2-1)^n\big)^{(n-1)}.$$

En appliquant le théorème de Rolle, on peut alors montrer par récurrence sur $k \in \{0,\dots,n\}$ que $\big((X^2-1)^n\big)^{(k)}$ possède au moins k racines dans l'intervalle $]-1\,;1[$.
En particulier Q_n possède au moins n racines dans $]-1\,;1[$, or $\deg Q_n = n$ donc il n'y a pas d'autres racines que celles-ci et elles sont simples.

(b) Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$, c'est immédiat.
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$.

$$Q_{n+1}(X) = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\big(2(n+1)X(X^2-1)^n\big)^{(n)}.$$

Par la formule de Leibniz

$$Q_{n+1}(X) = \frac{1}{2^n n!}\Big(X\big((X^2-1)^n\big)^{(n)} + nX\big((X^2-1)^n\big)^{(n-1)}\Big)$$

1 et -1 sont racines du polynôme $\big((X^2-1)^n\big)^{(n-1)}$ et donc celui-ci peut s'écrire $(X^2-1)S(X)$.
En exploitant l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$Q_{n+1}(X) = X^{n+1}+X(X^2-1)R_n(X)+2nX(X^2-1)S(X) = X^{n+1}+(X^2-1)R_{n+1}(X).$$

Récurrence établie

(c) Par intégration par parties successives et en exploitant l'annulation en 1 et -1 des polynômes

$$(X^2-1)^n, \big((X^2-1)^n\big)',\dots, \big((X^2-1)^n\big)^{(n-1)}$$

on obtient

$$\int_{-1}^1 P(t)Q_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^1 P^{(n)}(t)(t^2-1)^n\,\mathrm{d}t.$$

En particulier, si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,

$$\int_{-1}^1 P(t)Q_n(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

(d) Par la relation qui précède

$$\int_{-1}^1 \big(Q_n(t)\big)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^1 Q_n^{(n)}(t)(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t.$$

Puisque le polynôme $(X^2-1)^n$ est unitaire et de degré $2n$

$$\big((X^2-1)^n\big)^{(2n)} = (2n)! \text{ et } Q_n^{(n)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

De plus, par intégration par parties successives

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)^n(1+t)^n\,\mathrm{d}t = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Au final

$$\|Q_n\|^2 = \frac{2}{(2n+1)}.$$

Exercice 13 : [énoncé]

(a) Par récurrence sur $n \geq 0$, établissons l'existence et l'unicité de la sous-famille $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ telle que voulue.
Cas $n = 0$: le polynôme P_0 vaut 1.
Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 0$.
Les polynômes $P_0,\dots,P_n$ sont alors déterminés de façon unique par l'hypothèse de récurrence et il reste seulement à former P_{n+1}. Celui-ci peut s'écrire

$$P_{n+1} = X^{n+1} + Q(X) \text{ avec } Q(X) \in \mathbb{R}_n[X].$$

On veut $\langle P_{n+1}, P_k\rangle = 0$ pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$. Le polynôme Q doit donc vérifier

$$\forall k \in \{0,\dots,n\}, \langle Q(X), P_k\rangle = -\langle X^{n+1}, P_k\rangle.$$

Ces relations détermine entièrement le polynôme Q puisque $(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$Q = -\sum_{k=0}^{n} \frac{\langle X^{n+1}, P_k\rangle}{\|P_k\|^2} P_k.$$

Le polynôme P_{n+1} existe donc et est unique.
Récurrence établie.

(b) La famille $((-1)^n P_n(-X))$ vérifie les mêmes conditions que celles ayant défini la suite (P_n). On en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n(-X) = (-1)^n P_n(X).$$

(c) Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$.
On peut écrire $Q = \sum_{k=0}^{n-2} a_k P_k$ et donc

$$\langle P_{n+1}, Q\rangle = 0.$$

On peut aussi écrire $XQ = \sum_{k=0}^{n-1} a'_k P_k$ et donc

$$\langle XP_n, Q\rangle = \langle P_n, XQ\rangle = 0.$$

On en déduit

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X], \langle P_{n+1} - XP_n, Q\rangle = 0.$$

(d) Par simplification des termes de plus haut degré

$$P_{n+1} - XP_n \in \mathbb{R}_n[X].$$

On peut donc écrire

$$P_{n+1} - XP_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k.$$

Or $P_{n+1} - XP_n$ est orthogonal à $P_0, \dots, P_{n-2}$ donc

$$P_{n+1} - XP_n = \alpha_n P_n + \alpha_{n-1} P_{n-1}.$$

Enfin, par parité, $\alpha_n = 0$ et donc

$$P_{n+1} - XP_n = \alpha_{n-1} P_{n-1}.$$

Exercice 14 : [énoncé]

(a) Pour $P, Q \in E$, la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}$ est définie et continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$ et vérifie

$$t^2 P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

On peut donc affirmer que cette fonction est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ ce qui assure la bonne définition de $\langle\, \cdot\,,\, \cdot\,\rangle$.
On vérifie aisément que $\langle\, \cdot\,,\, \cdot\,\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique positive.
Si $\langle P, P\rangle = 0$ alors par nullité de l'intégrale d'une fonction continue positive

$$\forall t \in [0\,;+\infty[, P(t)^2\mathrm{e}^{-t} = 0.$$

On en déduit que le polynôme P admet une infinité de racines et donc $P = 0$.

(b) Pour $k \geq 1$ ou $k = 0$, on peut affirmer que les polynômes P_k et P'_k sont orthogonaux car

$$P'_k \in \operatorname{Vect}(P_1, \dots, P_{k-1}).$$

Par une intégration par parties

$$0 = \int_0^{+\infty} P'_k(t)P_k(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[P_k(t)^2\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} P_k(t)^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit

$$P_k(0)^2 = \|P_k\|^2 = 1.$$

(c) F est un hyperplan (car noyau de la forme linéaire non nulle $P \mapsto P(0)$). Son orthogonal est donc une droite vectorielle. Soit Q un vecteur directeur de celle-ci. On peut écrire

$$Q = \sum_{k=0}^{n} \langle P_k, Q\rangle P_k.$$

Or

$$\langle P_k, Q\rangle = \langle P_k - P_k(0), Q\rangle + P_k(0)\langle 1, Q\rangle.$$

Puisque le polynôme $P_k - P_k(0)$ est élément de F, il est orthogonal à Q et l'on obtient

$$\langle P_k, Q\rangle = P_k(0)\langle 1, Q\rangle$$

ce qui permet d'écrire

$$Q = \lambda \sum_{k=0}^{n} P_k(0)P_k \text{ avec } \lambda = \langle 1, Q\rangle \neq 0.$$

On en déduit

$$d(1, F) = \frac{|\langle 1, Q\rangle|}{\|Q\|} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=0}^{n} P_k(0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Enfin par Pythagore

$$\|1\|^2 = d(1,F)^2 + d(1,F^\perp)^2$$

et l'on obtient

$$d(1,F^\perp) = \sqrt{\frac{n}{n+1}}.$$

Exercice 15 : [énoncé]

(a) *On écrit* $(x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$ *et l'on dérive le produit par la formule de Leibniz.*

Introduisons les fonctions f et g données par $f(x) = (x-1)^n$ et $g(x) = (x+1)^n$. On a

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

avec, par dérivations successives,

$$f^{(k)}(x) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\bigl((x-1)^n\bigr) = \frac{n!}{(n-k)!}(x-1)^{n-k} \quad \text{et} \quad g^{(n-k)}(x) = \frac{n!}{k!}(x+1)^k$$

On obtient donc l'expression

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (x-1)^{n-k}(x+1)^k.$$

On peut alors directement évaluer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$:

$$P_n(1) = 1 \quad \text{et} \quad P_n(-1) = (-1)^n.$$

(b) Par dérivation à l'ordre n d'un polynôme de degré $2n$, le polynôme P_n est de degré[1] n.
Soit Q un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. Calculons $(P_n \mid Q)$.

On procède par intégration par parties où l'on dérive le polynôme Q.

On réalise une première intégration par parties où l'on intègre $P_n = U_n^{(n)}$ en $U_n^{(n-1)}$:

$$(P_n \mid Q) = \int_{-1}^{1} P_n(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = \Bigl[U_n^{(n-1)}(t)Q(t)\Bigr]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} U_n^{(n-1)}(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Les valeurs 1 et -1 sont racines de multiplicité n de U_n, elles sont donc aussi racines des polynômes $U_n', \dots, U_n^{(n-1)}$. L'égalité précédente devient alors

$$(P_n \mid Q) = -\int_{-1}^{1} U_n^{(n-1)}(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t.$$

On répète ces intégrations par parties jusqu'à disparition par dérivation du polynôme Q

$$(P_n \mid Q) = \int_{-1}^{1} U_n^{(n-2)}(t)Q''(t)\,\mathrm{d}t = \cdots = (-1)^n \int_{-1}^{1} U_n(t)Q^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{car} \quad Q^{(n)} =$$

Le polynôme P_n est donc orthogonal à tout polynôme de Q de degré inférieur à $n-1$.

(c) La dérivée seconde de $(x^2-1)^{n+1}$ peut s'écrire

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Bigl(\bigl(x^2-1\bigr)^{n+1}\Bigr) &= 2(n+1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Bigl(x\bigl(x^2-1\bigr)^n\Bigr)\\
&= 2(n+1)\Bigl(\bigl(x^2-1\bigr)^n + 2nx^2\bigl(x^2-1\bigr)^{n-1}\Bigr)\\
&= 2(n+1)\Bigl(\bigl(x^2-1\bigr)^n + 2n\bigl((x^2-1)+1\bigr)\bigl(x^2-1\bigr)^{n-1}\Bigr)\\
&= 2(n+1)(2n+1)\bigl(x^2-1\bigr)^n + 4n(n+1)\bigl(x^2-1\bigr)^{n-1}.
\end{aligned}$$

En dérivant encore à l'ordre $n-1$ et en divisant par $2^{n+1}(n+1)!$, on obtient la relation souhaitée

$$\begin{aligned}
P_{n+1}'(x) &= \frac{2(n+1)(2n+1)}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\Bigl(\bigl(x^2-1\bigr)^n\Bigr) + \frac{4n(n+1)}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\Bigl(\bigl(x^2-1\bigr)^{n-1}\Bigr)\\
&= \frac{(2n+1)}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\Bigl(\bigl(x^2-1\bigr)^n\Bigr) + \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\Bigl(\bigl(x^2-1\bigr)^{n-1}\Bigr)\\
&= (2n+1)P_n + P_{n-1}'.
\end{aligned}$$

(d) Pour $n=0$, l'égalité s'obtient par un calcul direct.
Pour $n \geq 1$, la relation qui précède permet d'écrire

$$(2n+1)\|P_n\|^2 = (P_n \mid (2n+1)P_n) = (P_n \mid P_{n+1}' - P_{n-1}') = (P_n \mid P_{n+1}') - (P_n \mid P_{n-1}').$$

1. On peut aussi employer la formule précédent ce qui donne de plus que le coefficient de x^n est $\frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}$.

D'une part, P_n et P'_{n-1} sont orthogonaux car P'_{n-1} est de degré strictement inférieur à n.
D'autre part, une intégration par parties donne

$$(P_n \mid P'_{n+1}) = \Big[P_n P_{n+1}\Big]_{-1}^{1} - (P'_n \mid P_{n+1})$$

avec $\Big[P_n P_{n+1}\Big]_{-1}^{1} = 1 - (-1)^n(-1)^{n+1} = 2$ et $(P'_n \mid P_{n+1}) = 0$ car P'_n est un polynôme de degré strictement inférieur à $n+1$.
Finalement, $(2n+1)\|P_n\|^2 = 2$ ce qui conduit à la formule voulue.

Exercice 16 : [énoncé]
Raisonnons par récurrence sur $n \geq 2$.
Pour $n = 2$ la propriété est immédiate car aucun vecteur ne peut être nul.
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 2$.
Soit $(x_1, \dots, x_{n+1})$ une famille de vecteurs vérifiant

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq n+1, (x_i \mid x_j) < 0.$$

Par projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel de dimension finie $D = \operatorname{Vect} x_{n+1}$, on peut écrire pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$

$$x_i = y_i + \lambda_i x_{n+1}$$

avec y_i un vecteur orthogonal à x_{n+1} et $\lambda_i < 0$ puisque $(x_i \mid x_{n+1}) < 0$.
On remarque alors

$$(x_i \mid x_j) = (y_i \mid y_j) + \lambda_i \lambda_j \|x_{n+1}\|^2$$

et on en déduit

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq n, (y_i \mid y_j) < 0.$$

Par hypothèse de récurrence, on peut affirmer que la famille $(y_2, \dots, y_n)$ est libre et puisque ses vecteurs sont orthogonaux au vecteur x_{n+1} non nul, on peut aussi dire que la famille $(y_2, \dots, y_n, x_{n+1})$ est libre. Enfin, on en déduit que la famille $(x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ car cette dernière engendre le même espace que la précédente et est formée du même nombre de vecteurs.
Par permutation des indices, ce qui précède vaut pour toute sous-famille formée de n vecteurs de la famille initiale $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$.
Récurrence établie.

Exercice 17 : [énoncé]
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$
Pour $n = 1$: Soit u un vecteur unitaire de E. On peut écrire $x_1 = \lambda_1.u, x_2 = \lambda_2.u, x_3 = \lambda_3.u$
On a alors

$$(x_1 \mid x_2) = \lambda_1\lambda_2, (x_2 \mid x_3) = \lambda_2\lambda_3, (x_3 \mid x_1) = \lambda_3\lambda_1.$$

Ces trois quantités ne peuvent être négatives car

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_2\lambda_3\lambda_3\lambda_1 = (\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^2 \geq 0.$$

Supposons la propriété établie au rang $(n-1) \in \mathbb{N}^*$:
Par l'absurde, supposons que la configuration soit possible :
Nécessairement $x_{n+2} \neq 0$.
Posons $F = \operatorname{Vect}(x_{n+2})^\perp$. On a $\dim F = n - 1$.

$$\forall 1 \leq i \leq n+1, x_i = y_i + \lambda_i.x_{n+2}$$

avec $y_i \in F$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$.
Comme $(x_i \mid x_{n+2}) < 0$ on a $\lambda_i < 0$.

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq n+1, (x_i \mid x_j) = (y_i \mid y_j) + \lambda_i\lambda_j \|x_{n+2}\|^2 < 0$$

donc $(y_i \mid y_j) < 0$.
On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à la famille $(y_1, \dots, y_{n+1})$ formée de vecteurs qui évoluent dans F. Récurrence établie.

Exercice 18 : [énoncé]

(a) $f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta+\alpha\beta}$.
Si $\alpha = -1$ alors $a \in \operatorname{Ker} f_\alpha$ et donc f_α n'est pas bijective.
Si $\alpha \neq -1$ alors, pour $\beta = -\frac{\alpha}{1+\alpha}$,

$$f_\beta \circ f_\alpha = f_\alpha \circ f_\beta = f_0 = \mathrm{Id}$$

d'où la bijectivité de f_α.

(b) Tout vecteur non nul orthogonal à a est vecteur propre associé à la valeur propre 1.
Tout vecteur non nul colinéaire à a est vecteur propre associé à la valeur propre $1 + \alpha$.
Pour une raison de dimension, il ne peut y avoir d'autres vecteurs propres.

Exercice 19 : [énoncé]

(a) Vérification sans peine.

(b) Soit $(f,g)\in V\times W$. On a

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)g''(t)+f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t=\Big[f(t)g'(t)\Big]_0^1=0$$

et les espaces V et W sont donc en somme directe.
Soit $f\in E$. Posons

$$\lambda=f(0)\text{ et }\mu=\frac{f(1)-f(0)\operatorname{ch}(1)}{\operatorname{sh}(1)}.$$

On a $f=g+h$ avec $h=\lambda\operatorname{ch}+\mu\operatorname{sh}\in W$ et $g=f-h\in V$ par construction.
Les espaces V et W sont donc supplémentaires orthogonaux et l'on peut introduire la projection orthogonale p sur W. Par ce qui précède

$$p(f)=f(0)\operatorname{ch}+\frac{f(1)-f(0)\operatorname{ch}(1)}{\operatorname{sh}(1)}\operatorname{sh}.$$

(c) Soit g la fonction de $E_{\alpha,\beta}$ définie par

$$g=\alpha\operatorname{ch}+\frac{\beta-\alpha\operatorname{ch}(1)}{\operatorname{sh}(1)}\operatorname{sh}.$$

Les fonctions de $E_{\alpha,\beta}$ sont alors de la forme $f=g+h$ avec h parcourant V et par orthogonalité de g et h

$$\int_0^1\left(f(t)^2+f'(t)^2\right)\mathrm{d}t=\|f\|^2=\|g\|^2+\|h\|^2.$$

On en déduit

$$\inf_{f\in E_{\alpha,\beta}}\int_0^1\left(f(t)^2+f'(t)^2\right)\mathrm{d}t=\|g\|^2=\frac{(\alpha^2+\beta^2)\operatorname{ch}(1)-2\alpha\beta}{\operatorname{sh}(1)}.$$

Exercice 20 : [énoncé]

(a) symétrie, bilinéarité et positivité : ok
Si $\varphi(P,P)=0$ alors $\int_0^{+\infty}P^2(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=0$ donc (fonction continue positive d'intégrale nulle)

$$\forall t\in\mathbb{R}_+,P(t)=0.$$

Comme le polynôme P admet une infinité de racines, c'est le polynôme nul.

(b) Par intégration par parties successives, $\int_0^{+\infty}t^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=n!$ donc

$$\varphi(X^p,X^q)=(p+q)!$$

(c) On interprète

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}(t^2-(at+b))^2\,\mathrm{d}t=d(X^2,\mathbb{R}_1[X])^2=\left\|X^2-\pi\right\|^2$$

avec $\pi=aX+b$ le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$
$(X^2-\pi\,|\,1)=(X^2-\pi\,|\,X)=0$ donne

$$\begin{cases}a+b=2\\2a+b=6.\end{cases}$$

Après résolution $a=4$, $b=-2$ et

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}(t^2-(at+b))^2\,\mathrm{d}t=4.$$

Exercice 21 : [énoncé]

En introduisant l'espace E des fonctions réelles f continues sur $]0\,;1]$ telles que $t\mapsto(tf(t))^2$ soit intégrable et en munissant cet espace du produit scalaire

$$(f\,|\,g)=\int_0^1 t^2f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

la quantité cherchée est : $m=d(f,F)^2$ avec $f\colon t\mapsto\ln t$ et $F=\operatorname{Vect}(f_0,f_1)$ où $f_0(t)=1$ et $f_1(t)=t$.
$m=\left\|f-p(f)\right\|^2$ avec p la projection orthogonale sur F.
$p(f)(t)=a+bt$ avec $(p(f)\,|\,f_0)=(f\,|\,f_0)$ et $(p(f)\,|\,f_1)=(f\,|\,f_1)$.
La résolution du système ainsi obtenu donne $a=5/3$ et $b=-19/12$.
$m=\left\|f-p(f)\right\|^2=(f-p(f)\,|\,f)=1/432$.

Exercice 22 : [énoncé]

On sait déjà

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(e_n\,|\,x)^2\leq\|x\|^2$$

en vertu de l'inégalité de Bessel.

Par totalité de la famille, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in \operatorname{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\|x - y\| \leq \varepsilon$.
Le vecteur y est une combinaison linéaire de la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $y \in \operatorname{Vect}(e_0, \ldots, e_N)$ et donc

$$\varepsilon \geq \|x - y\| \geq \|x - p(x)\|$$

avec $p(x)$ le projeté de x sur $\operatorname{Vect}(e_0, \ldots, e_N)$ c'est-à-dire

$$p(x) = \sum_{n=0}^{N} (e_n \,|\, x) e_n.$$

Par suite $\big|\|x\| - \|p(x)\|\big| \leq \|x - p(x)\| \leq \varepsilon$ donne

$$\|x\| \leq \|p(x)\| + \varepsilon = \sqrt{\sum_{n=0}^{N} (e_n \,|\, x)^2} + \varepsilon \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} (e_n \,|\, x)^2} + \varepsilon.$$

Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient $\|x\| \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} (e_n \,|\, x)^2}$ et finalement

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (e_n \,|\, x)^2.$$

Exercice 23 : [énoncé]
On a

$$\left\|{}^t AX\right\|^2 = {}^t X A {}^t AX = \langle X, A {}^t AX\rangle.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left\|{}^t AX\right\|^2 = \langle X, A {}^t AX\rangle \leq \|X\| \left\|A {}^t AX\right\| \leq \|X\| \left\|{}^t AX\right\|.$$

Ainsi

$$\left\|{}^t AX\right\| \leq \|X\|$$

et ce que ${}^t AX = 0$ ou non.

Exercice 24 : [énoncé]

(a) On a

$$\left\|{}^t AX\right\|^2 = {}^t X A {}^t AX = \langle X, A {}^t AX\rangle.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left\|{}^t AX\right\|^2 = \langle X, A {}^t AX\rangle \leq \|X\| \left\|A {}^t AX\right\| \leq \|X\| \left\|{}^t AX\right\|.$$

Ainsi

$$\left\|{}^t AX\right\| \leq \|X\|$$

et ce que ${}^t AX = 0$ ou non.

(b) Si $AX = X$ alors

$$\left\|{}^t AX - X\right\|^2 = \left\|{}^t AX\right\|^2 - 2\langle {}^t AX, X\rangle + \|X\|^2 \leq 2\big(\|X\|^2 - {}^t XAX\big) = 0.$$

On en déduit ${}^t AX = X$.

(c) Soit $X \in \operatorname{Ker}(A - I_n) \cap \operatorname{Im}(A - I_n)$.
On a $AX = X$ (et donc ${}^t AX = X$) et il existe $Y \in E$ vérifiant $X = AY - Y$.

$$\|X\|^2 = \langle X, AY - Y\rangle = {}^t XAY - {}^t XY.$$

Or

$${}^t XAY = {}^t\big({}^t AX\big)Y = {}^t XY$$

et donc $\|X\|^2 = 0$. Ainsi

$$\operatorname{Ker}(A - I_n) \cap \operatorname{Im}(A - I_n) = \{0\}.$$

Enfin, le théorème du rang

$$\dim \operatorname{Ker}(A - I_n) + \operatorname{rg}(A - I_n) = \dim E$$

permet de conclure

$$E = \operatorname{Ker}(A - I_n) \oplus \operatorname{Im}(A - I_n).$$

Exercice 25 : [énoncé]
Si $X \in \operatorname{Ker} A$ alors $X \in \operatorname{Ker} {}^t AA$.
Inversement, si $X \in \operatorname{Ker} {}^t AA$ alors ${}^t AAX = 0$ donc ${}^t X {}^t AAX = {}^t(AX)AX = 0$ d'où $AX = 0$ puis $X \in \operatorname{Ker} A$.
Ainsi

$$\operatorname{Ker}({}^t AA) = \operatorname{Ker} A$$

puis par la formule du rang

$$\operatorname{rg}({}^t AA) = \operatorname{rg} A.$$