Calcul différentiel

Problème de primitivation

Exercice 1 [01772] [Correction]
Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ solutions des systèmes suivants :

(a) $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xy^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 y \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \end{cases}$

Différentielle

Exercice 2 [02976] [Correction]
On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$.
On suppose que $\mathrm{d}f(x)$ est orthogonale pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
Montrer que f est orthogonale.

Exercice 3 [03050] [Correction]
Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que $\mathrm{d}\varphi(0)$ soit inversible.
Montrer qu'il existe un voisinage V de 0 tel que la restriction de φ à V soit injective.

Exercice 4 [03415] [Correction]
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f, g, h\colon U \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in U, f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

On suppose de f et h sont différentiables en $a \in U$ et $f(a) = h(a)$. Montrer que g est différentiable en a.

Jacobien

Exercice 5 [00052] [Correction]

(a) Calculer le jacobien de l'application $(r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$

(b) Même question avec $(r, \theta, \varphi) \mapsto (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$.

Difféomorphisme

Exercice 6 [00053] [Correction]
Montrer que $(u, v) \mapsto (u + v, uv)$ définit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de

$$U = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, u < v\right\}$$

vers un ouvert V que l'on précisera.

Exercice 7 [00054] [Correction]
Montrer que

$$\varphi\colon (x, y) \mapsto (x + \frac{1}{2}\cos y, y + \frac{1}{2}\cos x)$$

est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

Exercice 8 [02908] [Correction]
Soient $k \in \left]0\,;1\right[$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left|f'(x)\right| \leq k.$$

On définit une application $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par

$$\varphi(x, y) = (y + f(x), x + f(y)).$$

Montrer que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même.

Exercice 9 [01328] [Correction]
On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on considère $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, croissante vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.
On pose

$$F(x) = f\big(\|x\|\big)x.$$

(a) Montrer que $N\colon x \mapsto \|x\|$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et exprimer sa différentielle.

(b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et déterminer sa différentielle.

(c) Montrer que

$$\forall (x, h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, (\mathrm{d}F(x)(h) \,|\, h) \geq f(\|x\|)\,\|h\|^2.$$

(d) Montrer que F est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$.

Divers

Exercice 10 [03510] [Correction]
Soit S le sommet de coordonnées $(a,0)$ de l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Déterminer deux points M,N de l'ellipse tels que l'aire du triangle (SMN) soit maximale.

Recherche d'extremum

Exercice 11 [02473] [Correction]
Avec Maple, trouver les extrema de

$$f(x,y)=y\exp(x)+x\exp(y).$$

Exercice 12 [03740] [Correction]
$\mathbb{R}^n$ est muni de la structure euclidienne canonique.

(a) Comment détermine-t-on les extrémums d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$(n fixé dans $\mathbb{N}^*$) ?

(b) Étudier l'existence d'extrémums de la fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur $\mathbb{R}^3$ par
$$(x,y,z)\mapsto(2x+y-z)(x+y+2z).$$

(c) Déterminer les extrémums de la fonction f dans la boule unité fermée de $\mathbb{R}^3$.

(d) E étant un espace vectoriel euclidien, f et g étant deux formes linéaires non nulles sur E, déterminer les extrémums globaux de la fonction fg dans la boule unité fermée de E en utilisant des vecteurs représentants f et g à travers le produit scalaire. [Énoncé fourni par le concours CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA]

Exercice 13 [02548] [Correction]
Extremum locaux et globaux de $f(x,y)=y(x^2+(\ln y)^2)$ sur $\mathbb{R}\times\,]0\,;+\infty[$.

Exercice 14 [02496] [Correction]
Extremum locaux et globaux de

$$f(x,y)=y(x^2+(\ln y)^2).$$

Exercice 15 [00060] [Correction]
Extrema locaux et globaux de

$$f(x,y)=y(x^2+(\ln y)^2).$$

Formes différentielles

Exercice 16 [00258] [Correction]

(a) Montrer que la forme différentielle $\omega=(x+y)\,\mathrm{d}x+(x-y)\,\mathrm{d}y$ est exacte et déterminer une primitive de ω.

(b) Résoudre alors l'équation différentielle
$$x+y+(x-y)y'=0$$
dont l'inconnue est la fonction y de la variable réelle x.

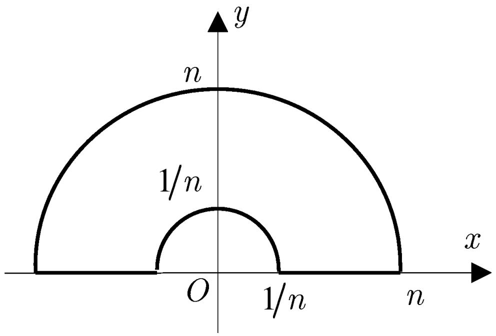
Exercice 17 [03367] [Correction]

(a) Montrer que la forme différentielle
$$\omega(x,y)=(xy-y^2+1)\,\mathrm{d}x+(x^2-xy-1)\,\mathrm{d}y$$
n'est pas fermée.

(b) Déterminer les fonctions $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable telle que la forme différentielle
$$\omega(x,y)f(xy)$$
soit exacte et déterminer ses primitives.

Exercice 18 [02566] [Correction]
La forme différentielle $\omega(x,y)=x^2\,\mathrm{d}y+y^2\,\mathrm{d}x$ est-elle fermée ? Exacte ?
Donner l'ensemble des cercles (parcourus une fois dans le sens direct) le long desquels ω est nulle ?

Exercice 19 [01350] [Correction]
Les formes différentielles ω suivantes sont-elles exactes ? Si oui, déterminer les primitives de ω :



(a) $\omega = x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x$ (b) $\omega = \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{(x-y)^2}$ (c) $\omega = \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} - y\,\mathrm{d}y$

Intégrales curvilignes

Exercice 20 [00106] [Correction]
On considère la forme différentielle

$$\omega(x,y) = \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(a) La forme différentielle ω est-elle fermée ?

(b) Calculer l'intégrale de ω le long du cercle de centre O, de rayon 1 parcouru dans le sens direct.

(c) La forme différentielle ω est-elle exacte ?

Exercice 21 [00107] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que la forme différentielle suivante est fermée

$$\omega(x,y) = \frac{\mathrm{e}^{-y}}{x^2+y^2}\big((x\sin x - y\cos x)\,\mathrm{d}x + (x\cos x + y\sin x)\,\mathrm{d}y\big).$$

(b) Calculer la circulation de ω le long de l'arc figuré direct ci-dessous

(c) En passant à la limite quand $n \to +\infty$ déterminer la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 22 [00109] [Correction]
Soient O, A, B les points d'affixes respectives $0, r, r\exp(\mathrm{i}\pi/4)$ avec $r > 0$.
Soit Γ_r l'arc paramétré de $\mathbb{C}$ constitué :
— du segment $[O\,;A]$, orienté de O vers A ;
— de l'arc $\mathcal{C}_r$ du cercle de centre O et de rayon r d'origine A et d'extrémité B ;
— du segment $[B\,;O]$ orienté de B vers O.

(a) Calculer l'intégrale curviligne

$$I_r = \oint_{\Gamma_r} \mathrm{e}^{-(x+\mathrm{i}y)^2}(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y).$$

(b) Que dire de la limite, quand $r \to +\infty$, de

$$J_r = \int_{\mathcal{C}_r} \mathrm{e}^{-(x+\mathrm{i}y)^2}(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y)\,?.$$

(c) Qu'en déduire ?

Exercice 23 [01351] [Correction]
Calculer

$$I = \oint_\Gamma x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x$$

où Γ est l'arc de parabole $y = x^2$ allant de O à $A(2,4)$.

Exercice 24 [00103] [Correction]
Calculer

$$I = \oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}y + y^2\,\mathrm{d}x$$

où Γ est un paramétrage direct du cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon $R > 0$.

Exercice 25 [00104] [Correction]
Calculer

$$I = \oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}y + y^2\,\mathrm{d}x$$

où Γ est un paramétrage direct du triangle (OIJ) avec $I(1,0)$ et $J(0,1)$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

(a) $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + C^{te}$ sur $\mathbb{R}^2$.

(b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + C^{te}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(c) Il n'y a pas de solution car $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ donne $f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + C(y)$ qui injectée dans la deuxième équation donne : $\frac{y}{x^2+y^2} + C'(y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$ qui est incompatible avec C fonction de la seule variable y.

Exercice 2 : [énoncé]

Soient $a,b \in \mathbb{R}^n$ et $\varphi\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$\varphi(t) = f\big(a + t(b-a)\big).$$

La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est donnée par

$$\varphi'(t) = \mathrm{d}f\big(a+t(b-a)\big).(b-a).$$

Puisque $f(b) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0)$, on a

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f\big(a+t(b-a)\big).(b-a)\,\mathrm{d}t$$

et donc

$$\left\|f(b)-f(a)\right\| \le \int_0^1 \left\|\mathrm{d}f\big(a+t(b-a)\big).(b-a)\right\|\mathrm{d}t \le \|b-a\|\,.$$

Pour poursuivre supposons que l'on sache la fonction f bijective.
Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ et puisque son jacobien ne s'annule pas (car le déterminant d'une matrice orthogonale vaut ± 1), on peut, par le théorème d'inversion globale, affirmer que f est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$ et que

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \mathrm{d}(f^{-1})(y) = \big(\mathrm{d}f(x)\big)^{-1} \text{ avec } x = f^{-1}(y).$$

Puisqu'en tout point, la différentielle de f est orthogonale, il en est de même de la différentielle de f^{-1}.
L'étude précédente appliquée à f^{-1} donne alors

$$\forall c,d \in \mathbb{R}^n, \left\|f^{-1}(d) - f^{-1}(c)\right\| \le \|d-c\|\,.$$

Cette propriété et la précédente donne

$$\forall a,b \in \mathbb{R}^n, \left\|f(b)-f(a)\right\| = \|b-a\|\,.$$

Sachant $f(0)=0$, on obtient

$$\forall a \in \mathbb{R}^n, \left\|f(a)\right\| = \|a\|$$

et alors la relation

$$\left\|f(b)-f(a)\right\|^2 = \left\|f(b)\right\|^2 - 2(f(a)\,|\,f(b)) + \left\|f(a)\right\|^2$$

permet d'établir

$$\forall a,b \in \mathbb{R}^n, (f(a)\,|\,f(b)) = (a\,|\,b).$$

Soient $a,b,h \in \mathbb{R}^n$. Pour $t \neq 0$,

$$\left(\frac{1}{t}(f(a+t.h) - f(a)\,|\,f(b))\right) = (h\,|\,b)$$

et donc à la limite quand $t \to 0$

$$(df(a).h\,|\,f(b)) = (h\,|\,b).$$

Par la surjectivité de f, on en déduit

$$\forall a,a',c,h \in \mathbb{R}^n, (\mathrm{d}f(a).h\,|\,c) = (\mathrm{d}f(a').h\,|\,c)$$

et donc

$$\forall a,a' \in \mathbb{R}^n, \mathrm{d}f(a) = \mathrm{d}f(a').$$

La différentielle de f est donc constante. Notons ℓ l'endomorphisme orthogonal égal à cette constante.
En reprenant des calculs semblables à ceux initiaux

$$\forall a \in \mathbb{R}^n, f(a) = f(0) + \int_0^1 \mathrm{d}f(0+t.a).a\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \ell(a)\,\mathrm{d}t = \ell(a).$$

Il ne reste plus qu'à démontrer le résultat sans supposer la fonction f bijective... ce que je ne sais pas simplement argumenter !
On peut cependant exploiter le théorème d'inversion locale et les idées suivantes :
L'application f réalise un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 vers un ouvert V contenant aussi 0.
Ce qui est embêtant pour poursuivre, c'est qu'on ne sait pas si cet ouvert V est convexe... Cependant, il existe une boule ouverte $B(0,R)$ incluse dans V et quitte à restreindre l'ouvert U, on peut désormais supposer que f réalise un $\mathcal{C}^1$

difféomorphisme d'un ouvert U contenant 0 vers l'ouvert $B(0,R)$. On a alors comme dans l'étude qui précède

$$\forall a,b \in U, \left\|f(b)-f(a)\right\| \leq \|b-a\|$$

et

$$\forall c,d \in B(0,R), \left\|f^{-1}(d)-f^{-1}(c)\right\| \leq \|d-c\|$$

ce qui assure

$$\forall a,b \in U, \left\|f(b)-f(a)\right\| = \|b-a\|.$$

On en déduit

$$\forall a,b \in U, (f(a)\,|\,f(b)) = (a\,|\,b).$$

Sachant que les $f(b)$ parcourent un ouvert de $\mathbb{R}^n$ centré en 0, on peut comme au dessus conclure que la différentielle de f est constante sur l'ouvert U.
Pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on reprend l'étude avec l'application $g\colon x \mapsto f(x_0+x)-f(x_0)$ et on obtient que la différentielle de f est localement constante puis constante car continue. On peut alors enfin conclure.

Exercice 3 : [énoncé]
Cas $\mathrm{d}\varphi(0) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$:
Considérons l'application $\psi\colon x \mapsto \varphi(x) - x$.
ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathrm{d}\psi(0) = \tilde{0}$, il existe donc une boule B centrée en 0 telle que

$$\forall x \in B, \left\|\mathrm{d}\psi(x)\right\| \leq \frac{1}{2}.$$

Par l'inégalité des accroissements finis, on a alors

$$\forall x,y \in B, \left\|\psi(y)-\psi(x)\right\| \leq \frac{1}{2}\|y-x\|.$$

Pour $x,y \in B$, si $\varphi(x)=\varphi(y)$ alors $\psi(y)-\psi(x) = y-x$ et la relation précédente donne

$$\|y-x\| \leq \frac{1}{2}\|y-x\|$$

d'où l'on tire $y = x$.
Cas général :
Considérons l'application $\theta = (\mathrm{d}\varphi)^{-1}(0) \circ \varphi$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ par composition. Pour celle-ci

$$\mathrm{d}\theta(0) = (\mathrm{d}\varphi^{-1})(0) \circ \mathrm{d}\varphi(0) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}.$$

Par l'étude précédente, il existe V voisinage de 0 tel que la restriction de θ au départ de V soit injective et alors, par un argument de composition, la restriction de φ au départ de ce même voisinage V est aussi injective.

Exercice 4 : [énoncé]
La fonction $h-f$ est positive et nulle en a qui est donc minimum de cette fonction. La fonction $h-f$ est en outre différentiable en a et donc la différentielle de $h-f$ en a est nulle (point critique). On en déduit que les différentielles de f et h en a sont égales. Notons ℓ cette différentielle commune.
Quand $u \to 0$, on a

$$f(a+u) = f(a) + \ell(u) + \mathrm{o}_1(u) \text{ et } h(a+u) = h(a) + \ell(u) + \mathrm{o}_2(u)$$

donc

$$g(a) + \ell(u) + \mathrm{o}_1(u) \leq g(a+u) \leq g(a) + \ell(u) + \mathrm{o}_2(u)$$

et on en déduit

$$g(a+u) = g(a) + \ell(u) + \mathrm{o}(u).$$

Ainsi g est différentiable en a et sa différentielle en a est l'application linéaire ℓ.

Exercice 5 : [énoncé]
Les deux applications sont de classe $\mathcal{C}^1$

(a) On obtient r.

(b) On obtient $r^2\sin\theta$.

Exercice 6 : [énoncé]
L'application $\varphi\colon (u,v) \mapsto (u+v, uv)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de U vers $\mathbb{R}^2$.
Soit $(s,p) \in \mathbb{R}^2$
Si $(s,p) = \varphi(u,v)$ alors u et v sont les deux racines de $x^2 - sx + p = 0$ et donc $\Delta = s^2 - 4p > 0$.
Les valeurs prises par φ appartiennent à

$$V = \left\{(s,p) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, s^2 - 4p > 0\right\}.$$

De plus, pour $(s,p) \in V$, il existe un unique couple (u,v) tel que $u < v$ et $\varphi(u,v) = (s,p)$, c'est le couple formé des deux racines de l'équation $x^2 - sx + p = 0$

$$u = \frac{s - \sqrt{s^2-4p}}{2} \text{ et } v = \frac{s+\sqrt{s^2-4p}}{2}.$$

Ainsi φ réalise une bijection de U sur V.
On vérifie aisément que U et V sont des ouverts (par image réciproque d'ouverts par des applications continues pertinemment construites) et que φ ainsi que φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$.

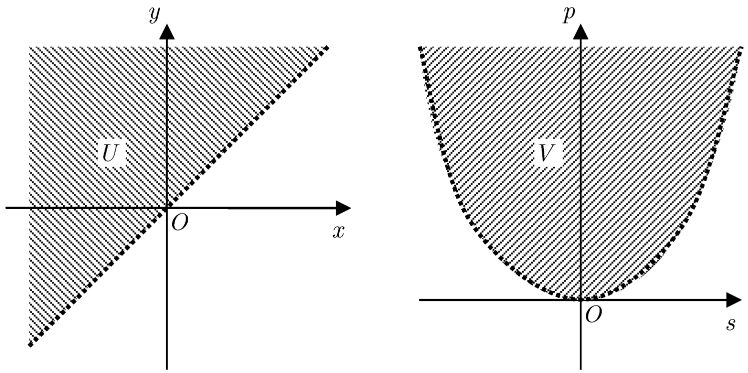


FIGURE 1 – les ouverts U et V

Exercice 7 : [énoncé]
L'application φ est de classe $\mathcal{C}^1$.
Le jacobien de φ en (x, y) est $1 - \frac{1}{4}\sin x \sin y$: il ne s'annule pas.
Pour conclure, il ne reste plus qu'à observer que φ est bijective.
Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$:

$$\varphi(x,y) = (u,v) \iff \begin{cases} u = x + \frac{1}{2}\cos(y) \\ v = y + \frac{1}{2}\cos(x) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + \frac{1}{2}\cos\left(v - \frac{1}{2}\cos(x)\right) = u \\ y = v - \frac{1}{2}\cos(x). \end{cases}$$

Considérons

$$f_v \colon x \mapsto x + \frac{1}{2}\cos\left(v - \frac{1}{2}\cos(x)\right).$$

Une étude fonctionnelle montre que f_v réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
Ainsi

$$\varphi(x,y) = (u,v) \iff \begin{cases} x = f_v^{-1}(u) \\ y = v - \frac{1}{2}\cos(f_v^{-1}(u)) \end{cases}$$

ce qui donne la bijectivité de φ.

Exercice 8 : [énoncé]
L'application φ est clairement de classe $\mathcal{C}^1$.
Étudions sa bijectivité. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\varphi(x,y) = (a,b) \iff \begin{cases} y + f(x) = a \\ x + f(y) = b \end{cases}$$

ce qui nous ramène au système

$$\begin{cases} y + f(b - f(y)) = a \\ x = b - f(y). \end{cases}$$

Considérons l'application

$$\varphi_b \colon y \mapsto y + f(b - f(y))$$

φ_b est continue dérivable et

$$\varphi_b'(y) = 1 - f'(y)f'(b - f(y))$$

donc $\varphi_b'(y) > 0$ car

$$\left|f'(y)f'(b - f(y))\right| \le k^2 < 1.$$

Par conséquent, l'application φ_b est strictement croissante.
De plus, f étant k lipschitzienne

$$\left|f(t) - f(0)\right| \le k\,|t|$$

donc

$$\left|f(t)\right| \le k\,|t| + \left|f(0)\right|$$

puis

$$\left|f(b - f(y))\right| \le k\left|b - f(y)\right| + \left|f(0)\right| \le k^2\,|y| + \ell$$

par suite

$$\varphi_b(y) \ge (1 - k^2)y - \ell \xrightarrow[y \to +\infty]{} +\infty$$

et

$$\varphi_b(y) \le (1 - k^2)y + \ell \xrightarrow[y \to -\infty]{} -\infty.$$

L'application φ_b réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et alors

$$\varphi(x,y) = (a,b) \iff \begin{cases} y = \varphi_b^{-1}(a) \\ x = b - \varphi_b^{-1}(a). \end{cases}$$

Finalement, l'application φ est bijective de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$.
Rappelons que l'application φ est classe $\mathcal{C}^1$. De plus

$$\operatorname{Jac}\varphi_{(x,y)} = \begin{pmatrix} f'(x) & 1 \\ 1 & f'(y) \end{pmatrix}$$

et donc le jacobine de φ ne s'annule pas en vertu du calcul suivant

$$\det(\operatorname{Jac}\varphi_{(x,y)}) = f'(x)f'(y) - 1 \neq 0$$

et car $\left|f'(x)f'(y)\right| \leq k^2 < 1$.
Par le théorème d'inversion globale, on peut alors affirmer que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Exercice 9 : [énoncé]

(a) Par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, N est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ puisque

$$N(x) = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \text{ avec } x_1^2 + \cdots + x_n^2 \neq 0.$$

Sachant

$$\frac{\partial N}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{N(x)}$$

la différentielle de N en $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et

$$\mathrm{d}N(x) \colon h \mapsto \frac{1}{\|x\|}\sum_{i=1}^{b} \frac{\partial N}{\partial x_i}(x)h_i = \frac{(x\,|\,h)}{\|x\|}.$$

(b) Pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
Quand $h \to 0$

$$F(x+h) = f\big(\|x+h\|\big)(x+h).$$

Or

$$f\big(\|x+h\|\big) = f\left(\|x\| + \frac{(x\,|\,h)}{\|x\|} + \mathrm{o}\big(\|h\|\big)\right) = f\big(\|x\|\big) + f'\big(\|x\|\big)\frac{(x\,|\,h)}{\|x\|} + \mathrm{o}\big(\|h\|\big)$$

puis

$$F(x+h) = F(x) + f'\big(\|x\|\big)\frac{(x\,|\,h)}{\|x\|}x + f\big(\|x\|\big)h + \mathrm{o}\big(\|h\|\big).$$

On en déduit que F est différentielle en $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et

$$\mathrm{d}F(x) \colon h \mapsto f'\big(\|x\|\big)\frac{(x\,|\,h)}{\|x\|}x + f\big(\|x\|\big)h.$$

Pour $x = 0$

$$F(h) = f\big(\|h\|\big)h = \big(f(0) + \|h\|\,f'(0) + \mathrm{o}\big(\|h\|\big)\big)h = h + \mathrm{o}\big(\|h\|\big)$$

donc F est différentiable en 0 et

$$\mathrm{d}F(0) \colon h \mapsto h.$$

On peut alors calculer les dérivées partielles de F dans la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$:

$$\mathrm{d}_i F(x) = \begin{cases} f'\big(\|x\|\big)\frac{x_i}{\|x\|} + f\big(\|x\|\big)e_i & \text{si } x \neq 0 \\ e_i & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Par la continuité de f' en 0 avec $f'(0) = 0$, on observe la continuité des dérivées partielles $\mathrm{d}_i F$ sur $\mathbb{R}^n$ et on peut affirmer que F est de classe $\mathcal{C}^1$.

(c) Pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$(\mathrm{d}F(x)(h)\,|\,h) = f'\big(\|x\|\big)\frac{(x\,|\,h)^2}{\|x\|} + f\big(\|x\|\big)\,\|h\|^2 \geq f\big(\|x\|\big)\,\|h\|^2$$

car $f' \geq 0$ puisque f est supposée croissante.
Pour $x = 0$, l'inégalité est vraie puisqu'il y a même égalité.

(d) En tout point $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(\mathrm{d}F(x)(h)\,|\,h) \geq f(0)\,\|h\|^2 \geq \|h\|^2.$$

On en déduit

$$\mathrm{d}F(x)(h) = 0 \implies h = 0.$$

Ainsi $\mathrm{d}F(x)$ est inversible et donc le jacobien de F ne s'annule pas.
Montrons que F est injective.
Si $F(x) = F(x')$ alors $f(\|x\|)x = f(\|x'\|)x'$ et donc les vecteurs x et x' sont positivement liés. En passant en norme, on a $f\big(\|x\|\big)\,\|x\| = f\big(\|x'\|\big)\,\|x'\|$. Or l'application $t \mapsto tf(t)$ est strictement croissante car

$$\big(tf(t)\big)' = f(t) + tf'(t) \geq f(0) \geq 1.$$

On en déduit $\|x\| = \|x'\|$ puis $x = x'$.
Montrons que F est surjective.
Soit $y \in \mathbb{R}^n$. Considérons l'application $\varphi \colon [0\,;1] \to \big\|F(t.y)\big\|$.
φ est continue, $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = f\big(\|y\|\big)\,\|y\| \geq \|y\|$.
Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t \in [0\,;1]$ tel que $\varphi(t) = \|y\|$ et alors $F(t.y) = y$ car $F(t.y) = \alpha y$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $\big\|F(t.y)\big\| = \|y\|$.
Ainsi l'application F est surjective.
Finalement F est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même dont le jacobien ne s'annule pas, c'est donc un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vers lui-même.

Exercice 10 : [énoncé]
En considérons un triangle direct, on peut écrire

$$M(a\cos u, b\sin u) \text{ et } N(a\cos v, b\sin v)$$

avec $0 \leq u \leq v \leq 2\pi$ et l'aire du triangle (SMN) est alors

$$\frac{1}{2}\det(\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SN}) = \frac{ab}{2}\big(\sin v - \sin u + \sin(u-v)\big).$$

Le problème revient alors à maximiser la fonction

$$f\colon (u,v) \mapsto \sin v - \sin u + \sin(u-v)$$

sur le compact $D = \big\{(u,v) \,\big|\, 0 \leq u \leq v \leq 2\pi\big\}$.
Puisque la fonction f est continue ce maximum existe et puisqu'il n'est évidemment pas sur le bord de D (qui correspond aux triangles plats) c'est un point critique de la fonction f.
On résout alors le système

$$\begin{cases} -\cos u + \cos(u-v) = 0 \\ \cos v - \cos(u-v) = 0 \end{cases}$$

qui entraîne $\cos u = \cos v$ donc $v = 2\pi - u$ puis $\cos u = \cos(2\pi - 2u)$ donne $u = 2\pi/3$ et $v = 4\pi/3$.
Ceci détermine les points M et N cherchés.

Exercice 11 : [énoncé]
On définit la fonction
```
f:=(x, y)->x*exp(y)+y*exp(x);
```
On recherche les points critiques :
```
solve(D[1](f)(x, y)=0, D[2](f)(x, y)=0, x, y);
```
La réponse fournie par Maple, s'exprime à l'aide de `RootOf`. On concrétise celle-ci par
```
allvalues(%);
```
On obtient un seul point critique $(-1,-1)$.
On peut confirmer le résultat précédent en introduisant
```
g:=t->t*exp(1/t)+exp(t);
```
Cette fonction est strictement positive sur $]0\,;+\infty[$ et sa dérivée obtenue par
```
diff(g(t), t);
```
assure que g est strictement croissante sur $]-\infty\,;0[$.
Cela permet d'affirmer que le `RootOf` précédent ne conduit qu'à la valeur -1.
On étudie le point critique en posant
```
r:=D[1, 1](f)(-1, -1);
s:=D[1, 2](f)(-1, -1);
t:=D[2, 2](f)(-1, -1);
```
et en calculant
```
r*t-s^2;
```
La valeur obtenue est strictement négative, il n'y a pas d'extremum en $(-1,-1)$.
On peut confirmer ce résultat en par la représentation
```
plot3d(f(x, y), x=-2..0, y=-2..0);
```

Exercice 12 : [énoncé]

(a) On commence par rechercher les points critiques car l'on sait que les extrema locaux sont des points critiques. Dans le cas $n=2$, on peut introduire les notations de Monge et étudier le signe de $rt - s^2$. Dans le cas général, il n'y a rien à connaître qui soit au programme mais ici il semble que l'examinateur s'attend à ce que l'on parle de matrice hessienne... sinon à quoi servirait l'hypothèse $\mathcal{C}^2$? Qu'importe, ce n'est pas au programme !

(b) L'annulation des dérivées partielles conduit à $\operatorname{Vect}(3,-5,1)$ droite de points critiques.
Pour $x \in \mathbb{R}$, étudions le point critique $(3x,-5x,x)$. Pour $t \neq 0$, on a

$$f((3x,-5x+x)+(t,0,0)) = 2t^2 > 0 \text{ et } f\big((3x,-5x,-x)+(0,0,t)\big) = -2t^2 < 0$$

et donc $(3x,-5x,x)$ n'est pas extremum local.

(c) La fonction f est une forme quadratique, en introduisant la matrice représentative

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & 3/2 \\ 3/2 & 1 & 1/2 \\ 3/2 & 1/2 & -2 \end{pmatrix}$$

on peut écrire

$$f(x,y,z) = {}^tXMX \text{ avec } X = {}^t\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}.$$

La matrice M est symétrique réelle. Pour calculer son polynôme caractéristique, je n'ai pas trouvé plus simple que d'appliquer Sarrus... On obtient les valeurs propres $-5/2, 0$ et $7/2$.
En exploitant une base orthonormée de diagonalisation, on obtient

$$-\frac{5}{2}{}^tXX \leq f(x) = {}^tXMX \leq \frac{7}{2}{}^tXX.$$

Les valeurs extrêmes de la fonction f dans la boule unité fermée sont donc $-5/2$ et $7/2$ et celles-ci sont prises sur les vecteurs propres unitaires associés.

(d) On peut introduire $a, b \in E$ tels que

$$f(x) = (a\,|\,x) \text{ et } g(x) = (b\,|\,x).$$

En introduisant une base orthonormée et en introduisant des colonnes de coordonnées aux notations entendues

$$f(x) = {}^tAX = {}^tXA \text{ et } g(x) = {}^tBX.$$

La forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique $q = fg$ est donnée par

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}\big(f(x)g(y) + f(y)g(x)\big)$$

ce qui donne matriciellement

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}\big({}^tXA{}^tBY + {}^tXB{}^tAY\big).$$

La matrice symétrique représentant la forme quadratique est alors

$$M = \frac{1}{2}\big(A{}^tB + B{}^tA\big).$$

Nous allons en déterminer les valeurs propres...
Les matrices $A{}^tB$ et $B{}^tA$ sont de rangs au plus 1, la matrice M est donc de rang au plus 2. Le scalaire 0 en est alors valeur propre de multiplicité au moins $n - 2$ ce qui ne laisse plus la place qu'à deux autres valeurs propres λ et μ.
Puisque $\operatorname{tr}(M) = \lambda + \mu$, on obtient l'équation

$$\lambda + \mu = (a\,|\,b).$$

Puisque $\operatorname{tr}(M^2) = \lambda^2 + \mu^2$, on obtient, après calcul

$$\lambda^2 + \mu^2 = \frac{1}{2}\big((a\,|\,b)^2 + \|a\|^2\,\|b\|^2\big).$$

En exploitant $(\lambda + \mu)^2 = \lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu$, on obtient

$$\lambda\mu = \frac{1}{4}\big((a\,|\,b)^2 - \|a\|^2\,\|b\|^2\big)$$

et la résolution du système somme-produit qu'on en déduit donne

$$\lambda, \mu = \frac{(a\,|\,b) \pm \|a\|\,\|b\|}{2}.$$

À l'instar de la question c), ce sont là les deux valeurs extrémales de la forme quadratique $q = fg$.

Exercice 13 : [énoncé]
Points critiques $(0, 1)$ et $(0, \mathrm{e}^{-2})$.
En $(0, 1)$:

$$f(0, 1) = 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, \forall y > 0, f(x, y) \geq 0.$$

C'est un minimum global.
En $(0, \mathrm{e}^{-2})$:

$$rt - s^2 = -4 < 0.$$

Ce n'est pas un extremum local.

Exercice 14 : [énoncé]
Points critiques $(0, 1)$ et $(0, \mathrm{e}^{-2})$.
En $(0, 1)$: $f(0, 1) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y > 0, f(x, y) \geq 0.$$

Il s'agit d'un minimum global.
En $(0, \mathrm{e}^{-2})$: $rt - s^2 = -4 < 0$. Pas d'extremum local en ce point.

Exercice 15 : [énoncé]
f est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.
Points critiques $(0, 1)$ et $(0, \mathrm{e}^{-2})$.
En $(0, 1)$: $f(0, 1) = 0$.
Puisque

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y > 0, f(x, y) \geq 0$$

$(0, 1)$ est un minimum global.
En $(0, \mathrm{e}^{-2})$: $rt - s^2 = -4$.
Ce n'est pas un extremum local.

Exercice 16 : [énoncé]

(a) Après étude du système différentiel

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x + y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x - y \end{cases}$$

on vérifie aisément que

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2$$

est une primitive de la forme différentielle ω.

(b) Soit y une solution sur I de l'équation différentielle étudiée.
Pour tout $x \in I$, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(f\big(x, y(x)\big)\Big) = 0$$

donc $x \mapsto f(x, y(x))$ est une fonction constante. En posant λ la valeur de cette constante, on obtient

$$\forall x \in I, y^2 - 2xy - x^2 + 2\lambda = 0$$

puis

$$\forall x \in I, x^2 - \lambda \geq 0 \text{ et } y(x) = x + \varepsilon(x)\sqrt{2x^2 - 2\lambda} \text{ avec } \varepsilon(x) = \pm 1.$$

Pour $\lambda < 0$, la quantité $x^2 - \lambda$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Puisque la fonction

$$\varepsilon \colon x \mapsto \varepsilon(x) = \frac{y(x) - x}{\sqrt{2x^2 - 2\lambda}}$$

est continue et ne prend que les valeurs 1 ou -1, elle est constante et donc

$$\forall x \in I, y(x) = x + \sqrt{2x^2 - 2\lambda} \text{ ou } \forall x \in I, y(x) = x - \sqrt{2x^2 - 2\lambda}.$$

Pour $\lambda > 0$, quand la quantité $x^2 - \lambda$ s'annule, elle change de signe et ce ne peut donc qu'être en une extrémité de l'intervalle I. Par un argument de continuité semblable au précédent, on obtient encore

$$\forall x \in I, y(x) = x + \sqrt{2x^2 - 2\lambda} \text{ ou } \forall x \in I, y(x) = x - \sqrt{2x^2 - 2\lambda}$$

et puisque la fonction y est dérivable sur I, on a nécessairement $x^2 - \lambda > 0$ sur I.
Pour $\lambda = 0$.
Si $I \subset \mathbb{R}_+$ ou $I \subset \mathbb{R}_-$ alors comme pour ce qui précède on obtient

$$\forall x \in I, y(x) = (1 + \sqrt{2})x \text{ ou } \forall x \in I, y(x) = (1 - \sqrt{2})x.$$

Sinon, par dérivabilité d'un raccord en 0 d'une solution sur $I \cap \mathbb{R}_+$ et sur $I \cap \mathbb{R}_-$, on obtient encore

$$\forall x \in I, y(x) = (1 + \sqrt{2})x \text{ ou } \forall x \in I, y(x) = (1 - \sqrt{2})x.$$

Inversement, les fonctions proposées sont bien solutions en vertu des calculs qui précèdent.
Pour résumer, les solutions maximales de l'équation différentielle étudiée sont
- $x \mapsto (1 + \sqrt{2})x$ et $x \mapsto (1 - \sqrt{2})x$ sur $\mathbb{R}$;
- $x \mapsto x + \sqrt{2x^2 + 2\lambda}$ et $x \mapsto x + \sqrt{2x^2 - 2\lambda}$ sur $\mathbb{R}$ pour $\lambda < 0$;
- $x \mapsto x + \sqrt{2x^2 + 2\lambda}$ et $x \mapsto x + \sqrt{2x^2 - 2\lambda}$ sur $]-\infty\,; -\sqrt{\lambda}[$ et $]\sqrt{\lambda}\,; +\infty[$ pour $\lambda > 0$.

Exercice 17 : [énoncé]

(a) Posons

$$P(x, y) = xy - y^2 + 1 \text{ et } Q(x, y) = x^2 - xy - 1.$$

Puisque

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}$$

la forme différentielle ω n'est pas fermée.

(b) La forme différentielle

$$\theta(x, y) = \omega(x, y)f(xy)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert étoilé $\mathbb{R}^2$, elle est donc exacte si, et seulement si, elle est fermée. Cela équivaut à la satisfaction pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de l'équation

$$(2x - y)f(xy) + y(x^2 - xy - 1)f'(xy) = (2y - x)f(xy) + x(xy - y^2 + 1)f'(xy).$$

Après simplification, on obtient

$$(x + y)\big(f(xy) - f'(xy)\big) = 0.$$

Par suite f est solution du problème posé si, et seulement si, f est solution de l'équation différentielle

$$y'(t) = y(t).$$

Après résolution de cette équation différentielle linéaire d'ordre 1, on obtient la solution générale

$$f(t) = \lambda \mathrm{e}^t \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

On obtient alors une primitive U de la fonction forme différentielle étudiée en résolvant le système

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = \lambda \mathrm{e}^{xy}(xy - y^2 + 1) \\ \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = \lambda \mathrm{e}^{xy}(x^2 - xy - 1). \end{cases}$$

Au terme des calculs, on obtient

$$U(x, y) = \lambda(x - y)\mathrm{e}^{xy} + C.$$

Exercice 18 : [énoncé]
ω n'est pas fermée et *a fortiori* ni exacte.
Considérons le cercle Γ obtenu par le paramétrage

$$\begin{cases} x = a + R\cos t \\ y = b + R\sin t \end{cases} \text{ avec } t \in [0\,; 2\pi].$$

On a

$$\int_\Gamma \omega = \int_0^{2\pi} (a+R\cos t)^2 R\cos t-(b+R\sin t)^2 R\sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 2aR^2\cos^2 t+2bR^2\sin^2 t\,\mathrm{d}t$$

car

$$\int_0^{2\pi}\cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\cos^3 t\,\mathrm{d}t = 0.$$

Ainsi

$$\int_\Gamma \omega = 2\pi(a+b)R^2.$$

Les cercles recherchés sont ceux centrés sur la droite d'équation $x+y=0$.

Exercice 19 : [énoncé]

(a) ω est exacte et ses primitives sont de la forme : $f(x,y)=xy+C$.

(b) ω est exacte et ses primitives sont de la forme : $f(x,y)=\frac{y}{x-y}+C$.

(c) ω est exacte et ses primitives sont de la forme :
$f(x,y)=\ln(x^2+y^2)-\frac{1}{2}y^2+C$.

Exercice 20 : [énoncé]

(a) Oui, on vérifie par le calcul

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

(b) On paramètre le cercle Γ par $x=\cos t$, $y=\sin t$, $t\in[0\,;2\pi]$. On obtient

$$\int_\Gamma \omega = \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = 2\pi.$$

(c) Non car si ω était exacte on aurait

$$\int_\Gamma \omega = 0.$$

Exercice 21 : [énoncé]

(a) Par calculs (pénibles).

(b) C peut être inclus dans un ouvert étoilé où ω est exacte et alors $\oint_C \omega = 0$.

(c) On peut décomposer

$$\oint_\Gamma \omega = \int_{1/n}^{n}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{C_n}\omega - \int_n^{1/n}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{C_{1/n}}\omega$$

avec C_n et $C_{1/n}$ les demi-cercles de rayon n et $1/n$.

$$\int_{1/n}^{n}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x - \int_n^{1/n}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = 2\int_{1/n}^{n}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \to 2\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

La convergence de cette dernière intégrale est considérée comme bien connue.
Étudions

$$\int_{C_n}\omega = \int_0^\pi \mathrm{e}^{-n\sin\theta}\cos(n\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

Puisque $\left|\mathrm{e}^{-n\sin\theta}\cos(n\cos\theta)\right|\le 1$ et $\mathrm{e}^{-n\sin\theta}\cos(n\cos\theta)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ pour tout $\theta\in\,]0\,;\pi[$, par convergence dominée on obtient

$$\int_{C_n}\omega \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Étudions

$$\int_{C_{1/n}}\omega = \int_0^\pi \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\sin\theta}\cos\left(\frac{1}{n}\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta.$$

Puisque $\left|\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\sin\theta}\cos\left(\frac{1}{n}\cos\theta\right)\right|\le 1$ et $\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\sin\theta}\cos(\frac{1}{n}\cos\theta)\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$ pour tout $\theta\in[0\,;\pi]$, par convergence dominée on obtient

$$\int_{C_{1/n}}\omega \xrightarrow[n\to+\infty]{}\pi.$$

Finalement

$$2\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \pi$$

puis

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 22 : [énoncé]

(a) On intègre ici une forme différentielle complexe

$$\oint_{\Gamma_r} \mathrm{e}^{-(x+\mathrm{i}y)^2}(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y) = \oint_{\Gamma_r} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

avec $P(x,y) = \mathrm{i}Q(x,y) = \mathrm{e}^{-(x+\mathrm{i}y)^2}$. Or

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -2\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)\mathrm{e}^{-(x+\mathrm{i}y)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

donc

$$\oint_{\Gamma_r} \mathrm{e}^{-(x+\mathrm{i}y)^2}(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y) = 0$$

car la forme différentielle est fermée donc exacte sur l'ouvert étoilée $\mathbb{C}$.

(b) En paramétrant l'arc $\mathcal{C}_r$ car

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \text{ avec } t \in [0\,;\pi/4]$$

on obtient

$$J_r = \int_{\mathcal{C}_r} \mathrm{e}^{-(x+\mathrm{i}y)^2}(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y) = \int_0^{\pi/4} r\mathrm{e}^{-r^2(\cos t + \mathrm{i}\sin t)^2}(\sin t - \mathrm{i}\cos t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme une exponentielle imaginaire est de module 1, on obtient

$$|J_r| \leq \int_0^{\pi/4} r\mathrm{e}^{-r^2\cos 2t}\,\mathrm{d}t.$$

Par le changement de variable $t = \pi/4 - y$

$$\int_0^{\pi/4} r\mathrm{e}^{-r^2\cos 2t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/4} r\mathrm{e}^{-r^2\sin 2u}\,\mathrm{d}u.$$

Par l'inégalité de convexité $\sin x \geq 2x/\pi$ valable pour $x \in [0\,;\pi/2]$

$$\int_0^{\pi/4} r\mathrm{e}^{-r^2\sin 2u}\,\mathrm{d}u \leq \int_0^{\pi/4} r\mathrm{e}^{-\frac{4}{\pi}ur^2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{4}{\pi r}\mathrm{e}^{-\frac{4}{\pi}ur^2}\right]_0^{\pi/4} \to 0.$$

On peut donc affirmer que J_r tend vers 0 quand r tend vers $+\infty$.

(c) Par paramétrage de segments

$$\int_{[O;A]} \mathrm{e}^{-(x+\mathrm{i}y)^2}(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y) = \int_0^r \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

et

$$\int_{[B;O]} \mathrm{e}^{-(x+\mathrm{i}y)^2}(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y) = -\int_0^r \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t^2}\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}t.$$

Sachant

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

on obtient

$$\lim_{r\to+\infty} \int_0^r \cos(t^2) + \sin(t^2)\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi/2}$$

et

$$\lim_{r\to+\infty} \int_0^r \cos(t^2) - \sin(t^2)\,\mathrm{d}t = 0.$$

On peut alors conclure

$$\lim_{r\to+\infty} \int_0^{+\infty} \cos t^2\,\mathrm{d}t = \lim_{r\to+\infty} \int_0^{+\infty} \sin t^2\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Exercice 23 : [énoncé]

$$I = \int_0^2 2t^2 + t^2\,\mathrm{d}t = 8.$$

Exercice 24 : [énoncé]

En introduisant le paramétrage

$$\begin{cases} x(t) = a + R\cos t \\ y(t) = b + R\sin t \end{cases} \text{ avec } t \in [0\,;2\pi]$$

on obtient

$$I = \int_0^{2\pi} \bigl((a+R\cos t)^2 R\cos t - (b+R\sin t)^2 R\sin t\bigr)\,\mathrm{d}t = 2\pi(a-b)R^2.$$

Exercice 25 : [énoncé]

$$I = \int_0^1 0\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (1-t)^2 - t^2\,\mathrm{d}t + \int_0^1 0\,\mathrm{d}y = 0.$$