Intégration sur un intervalle quelconque

Intégrabilité

Exercice 1 [02349] [Correction]
Étudier l'existence des intégrales suivantes :

(a) $\int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

(b) $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}}\,\mathrm{d}t$

(c) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t-1}$

(d) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t$

(e) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\arctan t}\,\mathrm{d}t$

(f) $\int_0^{+\infty} t+2-\sqrt{t^2+4t+1}\,\mathrm{d}t$

Exercice 2 [03385] [Correction]

(a) Étudier l'intégrabilité sur $]1\,;+\infty[$ de

$$f(x)=\frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}.$$

(b) Montrer

$$\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{\ln 3}{2}.$$

Exercice 3 [03221] [Correction]
Étudier l'existence de

$$\int_0^{+\infty} \ln(\operatorname{th} t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4 [00661] [Correction]
Montrer que les fonctions $t\mapsto \sin t$ et $t\mapsto \frac{\sin t}{t}$ ne sont pas intégrables sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 5 [03206] [Correction]
Soit $f\colon [1\,;+\infty[\,\to\mathbb{R}$ continue vérifiant

$$\forall x,a\ge 1, 0\le f(x)\le \frac{a}{x^2}+\frac{1}{a^2}.$$

La fonction f est-elle intégrable sur $[1\,;+\infty[$?

Exercice 6 [03441] [Correction]
Soit $f\colon [0\,;+\infty[\,\to\mathbb{R}$ une fonction continue, positive et décroissante.
On pose $g\colon [0\,;+\infty[\,\to\mathbb{R}$ donnée par

$$g(x)=f(x)\sin x.$$

Montrer que les intégrabilités de f et de g sont équivalentes.

Exercice 7 [03627] [Correction]
Soit $f\colon [0\,;+\infty[\,\to\mathbb{R}$ continue et positive. On suppose

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell\in[0\,;1[.$$

Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 8 [03442] [Correction]
Soit $f\colon [0\,;1]\to\mathbb{R}$ donnée par

$$f(x)=x^2\cos\bigl(1/x^2\bigr) \text{ si } x\in\,]0\,;1] \text{ et } f(0)=0.$$

Montrer que f est dérivable sur $[0\,;1]$ mais que sa dérivée f' n'est pas intégrable sur $]0\,;1]$.

Exercice 9 [01770] [Correction]
Soit g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

où f est continue, de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

(a) Étudier le prolongement par continuité de g en 0.

(b) Exprimer $g'(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $g(x)$ pour $x>0$.

(c) Pour $0<a<b$, montrer que

$$\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + ag^2(a)-bg^2(b)$$

puis montrer que

$$\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t} \le \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t}+\sqrt{ag^2(a)+\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t}.$$

(d) Étudier la nature de

$$\int_0^{+\infty} g^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Intégrabilité dépendant de paramètres

Exercice 10 [00660] [Correction]
Énoncer une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour l'existence de

$$\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 11 [03705] [Correction]

(a) a désigne un réel strictement supérieur à -1. En posant $x = \tan t$, montrer

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+a\sin^2(t)} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}.$$

(b) Donner en fonction de $\alpha > 0$, la nature de la série

$$\sum \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi)^\alpha \sin^2(t)}.$$

(c) Même question pour

$$\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2(t)}.$$

(d) Donner la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2(t)}.$$

Intégrabilité et comportement asymptotique

Exercice 12 [03440] [Correction]
Soit $f\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
On suppose que f^2 et f'^2 sont intégrables. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 13 [03231] [Correction]
Soit $f\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.
On suppose que f est intégrable. Montrer

$$\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Exercice 14 [00663] [Correction]
Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue, décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

(a) Montrer que f tend vers zéro en $+\infty$.

(b) Montrer que $xf(x)$ tend vers zéro quand $x \to +\infty$

(c) Si on supprime l'hypothèse décroissante, déterminer un exemple de fonction f continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ telle que f ne tend pas vers zéro en $+\infty$.

Exercice 15 [03238] [Correction]
Soit $f\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable.
Montrer qu'il existe une suite (x_n) de réels positifs vérifiant

$$x_n \to +\infty \text{ et } x_n f(x_n) \to 0.$$

Exercice 16 [02829] [Correction]
Donner un exemple de $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ intégrable et non bornée.

Exercice 17 [00572] [Correction]
Soit $f \in \mathcal{C}^2([0\,;+\infty[, \mathbb{R})$. On suppose que f et f'' sont intégrables.

(a) Montrer que $f'(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

(b) Montrer que $f.f'$ est intégrable.

Exercice 18 [00693] [Correction]
Soit $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et intégrable.

(a) Justifier

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \left| \int_0^{+\infty} \left|g(t)\right| \mathrm{d}t - \int_0^M \left|g(t)\right| \mathrm{d}t \right| \le \varepsilon.$$

(b) En déduire que toute primitive de g est uniformément continue.

Exercice 19 [02538] [Correction]
Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0\,;+\infty[$ telle que f'' est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ et telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ soit convergente.

(a) Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

(b) Étudier les séries

$$\sum f(n) \text{ et } \sum f'(n).$$

Calcul d'intégrales

Exercice 20 [00666] [Correction]
Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)}$

(b) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^t+1)(\mathrm{e}^{-t}+1)}$

(c) $\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$

(d) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$

(e) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$

Exercice 21 [02350] [Correction]
Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\mathrm{e}^t+1}}$

(b) $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{sh} t}$

(c) $\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t$

(d) $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{1+t^2}}$

(e) $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$

Exercice 22 [00667] [Correction]
Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$

(b) $\int_0^{\pi/2} \sin x\ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$

(c) $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$

(d) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt[3]{x}}$

(e) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x(1+x)}\,\mathrm{d}x$

(f) $\int_0^{+\infty} \frac{(1+x)^{1/3}-1}{x(1+x)^{2/3}}\,\mathrm{d}x$

(g) $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$

(h) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(x)}{3\cos^2(x)+1}\,\mathrm{d}x$

(i) $\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$

Exercice 23 [00670] [Correction]

(a) Calculer
$$J=\int_0^{+\infty}\frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^4}.$$

(b) Établir
$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}=\int_0^{+\infty}\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{1+t^4}.$$

(c) En factorisant $1+t^4$ déterminer la valeur de I.

Exercice 24 [03237] [Correction]
Justifier et calculer
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+\mathrm{i}t)}.$$

Exercice 25 [00676] [Correction]

(a) Justifier l'existence de
$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Pour $x>0$, on pose
$$I(x)=\int_x^{+\infty}\frac{\sin^3(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

(a) On rappelle $\sin(3a)=3\sin(a)-4\sin^3(a)$. Établir que
$$I(x)=\frac{3}{4}\int_x^{3x}\frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

(b) En déduire la valeur de I.

Exercice 26 [01334] [Correction]
Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a<b$ et $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ admettant une limite finie ℓ en $-\infty$ et telle que $\int_0^{+\infty} f$ existe.
Justifier l'existence, puis calculer :
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\big(f(a+x)-f(b+x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 27 [00677] [Correction]
Existence et valeur de
$$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(2x)-\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 28 [01333] [Correction]
Calculer
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4+x^8}.$$

Exercice 29 [03375] [Correction]

(a) Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x \geq 1+x.$$
En déduire
$$\forall t \in \mathbb{R}, 1-t^2 \leq \mathrm{e}^{-t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir l'existence des intégrales suivantes
$$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t, I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t \text{ et } J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$$
puis établir
$$I_n \leq \frac{I}{\sqrt{n}} \leq J_n.$$

(c) On pose
$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,\mathrm{d}x.$$
Établir
$$I_n = W_{2n+1} \text{ et } J_{n+1} = W_{2n}.$$

(d) Trouver une relation de récurrence entre W_n et W_{n+2}.
En déduire la constance de la suite de terme général
$$u_n = (n+1)W_n W_{n+1}.$$

(e) Donner un équivalent de W_n et en déduire la valeur de I.

Exercice 30 [00525] [Correction]

Justifier l'existence et calculer
$$I = \int_0^{+\infty} t\lfloor 1/t \rfloor\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 31 [03630] [Correction]

Soit $f\colon]0\,;1] \to \mathbb{R}$ continue, décroissante et positive. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$
$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$
Montrer que f est intégrable sur $]0\,;1]$ si, et seulement si, la suite (S_n) est convergente et que si tel est le cas
$$\int_{]0;1]} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

Exercice 32 [05015] [Correction]

Existence et valeur de
$$\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor t \rfloor}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Calcul d'intégrales comportant un paramètre

Exercice 33 [00683] [Correction]

Existence et valeur pour $a > 0$ de
$$I(a) = \int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 34 [00684] [Correction]

Soit $a > 0$. En procédant au changement de variable $u = a/t$, calculer
$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 35 [02826] [Correction]

Calculer
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t$$
où $a > 0$.

Exercice 36 [03628] [Correction]

Pour quelles valeurs de a et b l'intégrale suivante est-elle définie ?
$$\int_0^{+\infty} \left(\sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2}\right)\mathrm{d}t.$$
La calculer lorsque c'est le cas.

Exercice 37 [00681] [Correction]
Pour $a > 0$, calculer
$$I(a) = \int_0^{+\infty} (t - \lfloor t \rfloor) \mathrm{e}^{-at} \,\mathrm{d}t.$$

Exercice 38 [00686] [Correction]
Soit f une fonction continue et croissante sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

(a) Pour $a > 0$, montrer que l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} f(x+a) - f(x) \,\mathrm{d}x$$
est définie et la calculer.

(b) Calculer
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \arctan(x+a) - \arctan(x) \,\mathrm{d}x.$$

Exercice 39 [02827] [Correction]
Trouver une expression simple de
$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 t}{(1 - 2x\cos t + x^2)(1 - 2y\cos t + y^2)} \,\mathrm{d}t$$
où $x, y \in \left]-1\,;1\right[$.

Exercice 40 [02825] [Correction]
Existence et calcul éventuel de
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + (t + \mathrm{i}b)^2} \,\mathrm{d}t.$$

Exercice 41 [03884] [Correction]
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, étudier l'existence et déterminer l'éventuelle valeur de
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + \alpha x + 1}.$$

Exercice 42 [03222] [Correction]
Pour $a, b > 0$, calculer
$$I(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}.$$

Exercice 43 [02968] [Correction]
Soient P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, où Q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et $\deg P \leq \deg Q - 2$.
Exprimer $\int_{\mathbb{R}} P/Q$ à l'aide des coefficients intervenant dans la décomposition en éléments simple de P/Q.

Exercice 44 [04060] [Correction]
Soit $f \colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que l'intégrale suivante converge :
$$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} \,\mathrm{d}t.$$
On se donne deux réels $0 < a < b$.

(a) Établir que pour tout $x > 0$
$$\int_x^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} \,\mathrm{d}t = \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} \,\mathrm{d}t.$$

(b) En déduire convergence et valeur de
$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} \,\mathrm{d}t.$$

Changement de variable

Exercice 45 [03177] [Correction]
En opérant le changement de variable $t = \mathrm{e}^{-x}$, calculer
$$I = \int_0^1 \frac{1 + t^2}{1 + t^4} \,\mathrm{d}t.$$

Exercice 46 [02509] [Correction]

(a) Calculer
$$\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$
en effectuant notamment le changement de variable $x = \mathrm{e}^t$.

(b) En déduire la valeur de
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}.$$

Exercice 47 [00668] [Correction]
Existence et valeur de
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}.$$
On pourra exploiter le changement de variable $u = 1/t$.

Exercice 48 [00669] [Correction]

(a) Établir
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1} = \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x.$$

(b) En déduire la valeur de I.

Exercice 49 [02824] [Correction]
Existence et calcul de
$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

Exercice 50 [02965] [Correction]
Calculer
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} \text{ et } \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,\mathrm{d}x.$$

Intégration par parties

Exercice 51 [00680] [Correction]
Calculer pour $n \in \mathbb{N}$,
$$I_n = \int_0^1 (x\ln x)^n\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 52 [00679] [Correction]
Existence et calcul pour $n \in \mathbb{N}$ de
$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

Exercice 53 [02555] [Correction]
On considère
$$f\colon t \mapsto \frac{\ln t}{(1+t)^2}.$$

(a) Étudier l'intégrabilité de f sur $]0\,;1]$ et $[1\,;+\infty[$.

(b) Calculer
$$\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 54 [00671] [Correction]
Calculer
$$\int_0^1 \frac{\ln\left(1-x^2\right)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 55 [03629] [Correction]
Soit $f\colon [1\,;+\infty] \to \mathbb{R}$ continue et intégrable. Montrer que les fonctions u et v suivantes sont intégrables sur $[1\,;+\infty[$ et que leurs intégrales y sont égales :
$$u(x) = \frac{1}{x^2}\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } v(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

Exercice 56 [03443] [Correction]
Soit $f\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifiant $f(0)=0$. Établir

$$\forall x>0, \int_0^x \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t \le 2\int_0^x \frac{f(t)f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

en justifiant l'existence des intégrales écrites.

Exercice 57 [00665] [Correction]
Soit $u\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left((1+x^2)u(x)^2 + u'(x)^2\right)\mathrm{d}x < +\infty.$$

(a) Déterminer les limites de $x\mapsto xu(x)^2$ en $\pm\infty$.

(b) Établir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u'(x)^2\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} x^2u(x)^2\,\mathrm{d}x \ge \frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)^2\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

Exercice 58 [03990] [Correction]
Existence et calcul de

$$I=\int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{1+t^2}{t^2}\right)\mathrm{d}t.$$

Exercice 59 [04190] [Correction]
En réalisant une intégration par parties, calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 60 [04962] [Correction]
Pour $n\in\mathbb{N}$, calculer

$$I_n=\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$$

Suites d'intégrales

Exercice 61 [03584] [Correction]
On pose

$$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} \text{ pour } n\in\mathbb{N}, n\ge 2.$$

(a) Déterminer une suite de fonctions (f_n) telle que

$$I_n=\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

(b) Déterminer deux réels a et b tels que

$$I_n = a+\frac{b}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \text{ quand } n\to+\infty.$$

Exercice 62 [00682] [Correction]
On pose

$$J_n=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^{n+1}}.$$

(a) Calculer J_0.

(b) Former une relation de récurrence engageant J_n et J_{n+1}.

(c) Établir qu'il existe $A>0$ tel que

$$J_n\sim\frac{A}{\sqrt[3]{n}}.$$

Exercice 63 [00157] [Correction]
Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n=\int_0^{+\infty}\frac{t-\lfloor t\rfloor}{t(t+n)}\,\mathrm{d}t$$

où $\lfloor t\rfloor$ représente la partie entière de t.

(a) Justifier la bonne définition de la suite $(u_n)_{n\ge 1}$.

(b) Montrer que pour tout $A>0$

$$\int_0^A \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t(t+n)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\left(\int_0^n \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}\,\mathrm{d}t - \int_A^{A+n}\frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}\,\mathrm{d}t\right).$$

En déduire une nouvelle expression intégrale de u_n.

(c) On pose
$$v_n = nu_n.$$
Montrer la convergence de la série de terme général
$$v_n - v_{n-1} - \frac{1}{2n}.$$

(d) En déduire un équivalent de u_n.

Exercice 64 [02446] [Correction]

(a) Soit $f \in \mathcal{C}^1([a\,;b],\mathbb{R})$. Déterminer les limites des suites
$$\left(\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \left(\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

(b) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t$$
(on procédera par récurrence)

(c) En déduire
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

(d) Étudier la limite puis un équivalent de
$$\left(\int_0^{\pi/2} \ln(2\sin(t/2))\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Intégrales seulement convergentes

Exercice 65 [02346] [Correction]

(Intégrale de Dirichlet) Justifier la convergence de l'intégrale suivante
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$
On peut montrer que celle-ci est égale à $\pi/2$ mais c'est une autre histoire...

Exercice 66 [03178] [Correction]

Soit $f\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, décroissante et de limite nulle. Montrer la convergence de l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 67 [03334] [Correction]

La fonction $x \mapsto \int_0^x \sin(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t$ admet-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 68 [02421] [Correction]

Convergence de
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 69 [03414] [Correction]

Trouver un équivalent en $+\infty$ de
$$f(\lambda) = \int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 70 [00691] [Correction]

Pour $x > 0$, on pose
$$f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer
$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}-1}{2\mathrm{i}x} + \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}-1}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$
En déduire que f admet une limite notée λ en $+\infty$.

(b) On pose $g(x) = \lambda - f(x)$. Montrer que pour $x > 0$
$$g(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}}{2\mathrm{i}x}.$$

(c) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$
$$g(x) = -\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}}{2\mathrm{i}x} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Exercice 71 [00695] [Correction]
Soit $f\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ continue. On suppose que l'intégrale suivante converge :
$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Calculer
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 72 [03631] [Correction]
Soit $f\colon [1\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ continue. Montrer
$$\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \implies \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

Exercice 73 [02378] [Correction]
Soit $f\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ continue et $\alpha > 0$. Montrer
$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \implies \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

Exercice 74 [03900] [Correction]
Soit $f\colon [a\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ avec f de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante et de limite nulle en $+\infty$.
Soit $g\colon [a\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ vérifiant
$$\forall x \in [a\,;+\infty[, \left|\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right| \le M.$$
Montrer la convergence de l'intégrale suivante
$$\int_a^{+\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Étude d'intégrales dépendant d'un paramètre

Exercice 75 [00688] [Correction]
On pose pour
$$f(a) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a+1}.$$
(a) Pour quelles valeurs de a, l'intégrale définissant $f(a)$ existe-t-elle ?
(b) Montrer que la fonction est décroissante et de limite nulle en $+\infty$.

Exercice 76 [00687] [Correction]
(Fonction Γ d'Euler) Pour $x > 0$ on note
$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$
(a) Montrer que cette dernière intégrale est bien définie pour tout $x > 0$.
(b) Justifier
$$\forall x > 1, \Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$$
et calculer $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 77 [00689] [Correction]
(a) Pour quelles valeurs de x, l'intégrale
$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$
est-elle définie ?
(b) Étudier la monotonie de f.
(c) Calculer
$$f(x) + f(x+1) \text{ pour } x > 0.$$
(d) Déterminer la limite de f en $+\infty$ ainsi qu'un équivalent.
(e) Déterminer la limite de f en 0^+ ainsi qu'un équivalent.

Exercice 78 [00692] [Correction]
Soit $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable.

(a) Soit $A > 0$. Montrer

$$\int_0^A \varphi(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

(b) Montrer

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Intégrales fonctions des bornes

Exercice 79 [00690] [Correction]
Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que $F(x)$ est bien définie pour tout $x > 0$.

(b) Établir que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $F'(x)$.

(c) Montrer

$$\lim_{x\to+\infty} xF(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} xF(x) = 0.$$

(d) Sans exprimer $F(x)$, justifier l'existence et calculer

$$\int_0^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 80 [02879] [Correction]

(a) Donner la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

On pose pour tout réel x

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée.

(c) Calculer

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 81 [00281] [Correction]
Pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, on pose

$$F(x) = \int_1^x \frac{t}{\sqrt{t^3-1}}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que F est bien définie, continue sur $[1\,;+\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1\,;+\infty[$. Exprimer $F'(x)$.

(b) Étudier la dérivabilité de F en 1. Préciser la tangente au graphe de F en 1.

(c) Étudier la limite de F en $+\infty$.

(d) Justifier que F réalise une bijection de $[1\,;+\infty[$ sur un intervalle à préciser et que F^{-1} est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et solution de l'équation différentielle

$$yy' = \sqrt{y^3-1}.$$

(e) Étudier la dérivabilité de F^{-1} en 0.

Exercice 82 [02348] [Correction]

(a) Justifier que

$$G(x,y) = \int_0^y \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t(t+x)}\,\mathrm{d}t$$

où $\lfloor t\rfloor$ représente la partie entière de t, est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

(b) Montrer que $G(x,y)$ tend vers une limite $G(x)$ quand y tend vers $+\infty$.

(c) Montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, G(n,y) = \frac{1}{n}\left(\int_0^n \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}\,\mathrm{d}t - \int_y^{y+n} \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}\,\mathrm{d}t\right).$$

(d) On note $H(n) = nG(n)$; montrer que la série de terme général

$$H(n) - H(n-1) - \frac{1}{2n}$$

converge et en déduire un équivalent de $G(n)$.

Intégration des relations de comparaison

Exercice 83 [03893] [Correction]
Déterminer un équivalent quand $x \to +\infty$ du terme

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 84 [03894] [Correction]
Déterminer un développement asymptotique à trois termes quand $x \to +\infty$ de l'expression

$$\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 85 [04059] [Correction]
Soit $f\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $0 < a < b$, déterminer

$$\lim_{x\to 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 86 [04075] [Correction]
Soit $f\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^1$ et non intégrable. On suppose $f'(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\big(f(x)\big)$.
Montrer

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Applications

Exercice 87 [05031] [Correction]
Soit $f\colon]0\,;1[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux, monotone et intégrable sur $]0\,;1[$.

(a) Étudier

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right).$$

(b) *Application:* Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{2n}\right)\times\cdots\times\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)}.$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
On notera f la fonction intégrée et I l'intervalle d'étude, à chaque fois f s'avère continue par morceaux sur I.

(a) $I = [0\,;+\infty[$, $t^2 f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc f est intégrable et $\int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

(b) $I =]0\,;1[$, $\sqrt{t}f(t) \xrightarrow[t\to0+]{} 0$ et $\frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}} \underset{t=1-u}{=} \frac{\ln(1-u)}{u^{3/2}} \sim -\frac{1}{\sqrt{u}}$ donc f est intégrable et $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}}\,\mathrm{d}t$ converge

(c) $I =]0\,;+\infty[$, $\frac{1}{\mathrm{e}^t-1} \underset{t\to0+}{\sim} \frac{1}{t}$ donc f n'est pas intégrable au voisinage de 0.
Puisque de plus cette fonction est positive, on peut affirmer que l'intégrale diverge.

(d) $I =]0\,;+\infty[$, $f(t) \xrightarrow[t\to0+]{} 0$ et $t^2 f(t) = \mathrm{e}^{2\ln t-(\ln t)^2} = \mathrm{e}^{\ln t(2-\ln t)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc f est intégrable et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

(e) $I = [0\,;+\infty[$, $t^2 f(t) = \mathrm{e}^{2\ln t - t\arctan t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc f est intégrable et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\arctan t}\,\mathrm{d}t$ converge.

(f) $I = [0\,;+\infty[$.
Quand $t\to+\infty$,

$$f(t) = t+2-t\sqrt{1+\frac{4}{t}+\frac{1}{t^2}} = t+2-t(1+\frac{2}{t}+\frac{1}{2t^2}-\frac{2}{t^2}+\mathrm{O}(1/t^3)) \sim \frac{3}{2t}$$

f n'est pas intégrable en $+\infty$. Puisque de plus cette fonction est positive, on peut affirmer que l'intégrale diverge.

Exercice 2 : [énoncé]

(a) La fonction f est définie et continue par morceaux sur $]1\,;+\infty[$.
Quand $x\to1^+$,

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{(x-1)}}{(x-1)} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

et quand $x\to+\infty$

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{\ln x}}{x^{3/2}} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^{1,0001}}\right)$$

donc f est intégrable sur $]1\,;+\infty[$.

(b) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_2^3 \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \le \left(\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}\right)^{1/2}\left(\int_2^3 \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

En calculant les intégrales introduites

$$\int_2^3 \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \le \left(1-\frac{1}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2}\left((\ln 3)^2-(\ln 2)^2\right)\right)^{1/2} \le \frac{\ln 3}{2}.$$

Exercice 3 : [énoncé]
La fonction $f\colon t\mapsto \ln(\operatorname{th} t)$ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$.
Quand $t\to0^+$, $\operatorname{th} t\sim t\to0\neq1$ donc $\ln(\operatorname{th} t)\sim\ln t$ puis $\sqrt{t}\ln(\operatorname{th} t)\sim\sqrt{t}\ln t\to0$.
Quand $t\to+\infty$, $\operatorname{th} t = 1-\frac{2}{\mathrm{e}^{2t}+1}$ donc $\ln(\operatorname{th} t)\sim-2\mathrm{e}^{-2t}$ puis $t^2\ln(\operatorname{th} t)\to0$.
On en déduit que f est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 4 : [énoncé]
On a

$$\int_0^{n\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t = n\int_0^\pi \sin(t)\,\mathrm{d}t = 2n \to +\infty$$

et donc $t\mapsto\sin t$ n'est pas intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
La fonction $t\mapsto\frac{\sin t}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 et c'est ce prolongement qu'on considère pour étudier son intégrabilité sur $[0\,;+\infty[$.

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Or pour $k>1$,

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t \ge \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{k\pi}\,\mathrm{d}t \ge \frac{2}{k\pi}$$

donc

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t \ge \sum_{k=1}^n \frac{2}{k\pi} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \to +\infty.$$

Exercice 5 : [énoncé]
Pour $a = x^\alpha$ avec $\alpha > 0$ on obtient

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^{2-\alpha}} + \frac{1}{x^{2\alpha}}.$$

En prenant $\alpha = 2/3$,

$$0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x^{4/3}}$$

et donc, par comparaison de fonctions positives, f est intégrable sur $[1\,;+\infty[$.

Exercice 6 : [énoncé]
Puisque $|g| \leq |f|$, l'intégrabilité de f entraîne celle de g.
Inversement, supposons g intégrable.
On a

$$\int_0^{n\pi} \left|f(t)\right| \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$$

avec par décroissance de f

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \pi f(k\pi).$$

Parallèlement

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left|f(t)\right|\left|\sin(t)\right| \mathrm{d}t \geq f(k\pi) \int_0^\pi \sin(t)\,\mathrm{d}t = 2f(k\pi)$$

donc

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{\pi}{2} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(t)\left|\sin(t)\right| \mathrm{d}t.$$

Ainsi

$$\int_0^{n\pi} \left|f(t)\right| \mathrm{d}t \leq \int_0^\pi f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{(n-1)\pi} f(t)\left|\sin(t)\right| \mathrm{d}t$$

et donc

$$\int_0^{n\pi} \left|f(t)\right| \mathrm{d}t \leq \int_0^\pi f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \left|g(t)\right| \mathrm{d}t.$$

On peut alors affirmer que les intégrales de $|f|$ sur les segments inclus dans $[0\,;+\infty[$ sont majorées ce qui signifie que la fonction f est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 7 : [énoncé]
Soit $q \in \,]\ell\,;1[$. Il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \geq A, \frac{f(x+1)}{f(x)} \leq q$$

et donc

$$\forall x \geq A, f(x+1) \leq qf(x).$$

On a alors

$$\int_A^{A+n} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_A^{A+1} f(t+k)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_A^{A+1} q^k f(t)\,\mathrm{d}t = \int_A^{A+1} f(t) \sum_{k=0}^{n-1} q^k\,\mathrm{d}t$$

et donc

$$\int_A^{A+n} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{1-q} \int_A^{A+1} f(t)\,\mathrm{d}t = M.$$

On en déduit que les intégrales sur $[A\,;A+n]$ de la fonction positive f sont majorées et donc f est intégrable sur $[A\,;A+\infty[$ puis sur $[0\,;+\infty[$.
L'intégrale étudiée est donc convergente.

Exercice 8 : [énoncé]
f est évidement dérivable sur $]0\,;1]$ avec

$$f'(x) = 2x\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{2}{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

et puisque

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = x\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$

f est aussi dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.
La fonction $x \mapsto x\cos(1/x^2)$ est intégrable sur $]0\,;1]$ car bornée.
En revanche, la fonction $g\colon x \mapsto \sin(1/x^2)/x$ n'est pas intégrable sur $]0\,;1]$. En effet, par le changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif $t = 1/x^2$, l' intégrabilité de g sur $]0\,;1]$ équivaut à l'intégrabilité sur $[1\,;+\infty[$ de
$t \mapsto \sin(t)/t$ et cette dernière est connue comme étant fausse.
On en déduit que f' n'est pas intégrable sur $]0\,;1]$.

Exercice 9 : [énoncé]

(a) Soit F une primitive de la fonction continue f. On a

$$g(x) = \frac{1}{x}\big(F(x) - F(0)\big) \xrightarrow[x\to 0^+]{} F'(0) = f(0).$$

Ainsi on peut prolonger g par continuité en 0 en posant $g(0) = f(0)$.

(b) Soit F une primitive de f (il en existe car f est continue).
On a

$$g(x) = \frac{1}{x}\big(F(x) - F(0)\big).$$

On en déduit que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}\big(F(x) - F(0)\big) + \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - g(x)}{x}.$$

(c) Par intégration par parties

$$\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t = \Big[tg^2(t)\Big]_a^b - 2\int_a^b tg'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t = \Big[tg^2(t)\Big]_a^b - 2\int_a^b \big(f(t) - g(t)\big)g(t)\,\mathrm{d}t$$

puis la relation proposée.
On en déduit par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t \le 2\sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t} + ag^2(a)$$

puis

$$\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t - 2\sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t} \le ag^2(a)$$

en ajoutant un même terme de part et d'autre

$$\left(\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t} - \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\right)^2 \le ag^2(a) + \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t$$

puis par la croissance de la fonction racine carrée

$$\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t} - \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t} \le \left|\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t} - \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\right| \le \sqrt{ag^2(a) + \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

et enfin

$$\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t} \le \sqrt{\int_0^b f^2(t)\,\mathrm{d}t} + \sqrt{ag^2(a) + \int_0^b f^2(t)\,\mathrm{d}t} \le \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t} + \sqrt{ag^2(a) + \int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t}.$$

(d) En faisant tendre a vers 0, on obtient

$$\sqrt{\int_0^b g^2(t)\,\mathrm{d}t} \le 2\sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

et on en déduit que la fonction g^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car les intégrales de g^2 sur les segments inclus dans $\mathbb{R}_+$ sont majorées.

Exercice 10 : [énoncé]

$f\colon t\mapsto \frac{t-\sin t}{t^\alpha}$ est définie et continue sur $]0\,;+\infty[$.
Quand $t\to 0$, $f(t)\sim \frac{1}{6t^{\alpha-3}}$ donc $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie si, et seulement si, $\alpha - 3 < 1$ *i.e.* $\alpha < 4$.
Quand $t\to+\infty$, $f(t)\sim\frac{1}{t^{\alpha-1}}$ donc $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie si, et seulement si, $\alpha - 1 > 1$ *i.e.* $\alpha > 2$.
Finalement $\int_0^{+\infty}\frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est définie si, et seulement si, $\alpha\in\,]2\,;4[$.

Exercice 11 : [énoncé]

(a) L'intégrale étudiée est bien définie pour $a > -1$ en tant qu'intégrale d'une fonction définie et continue sur le segment $[0\,;\pi/2]$. Par le changement de variable proposé, qui est $\mathcal{C}^1$ strictement monotone, on obtient

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{1 + a\sin^2(t)} = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1 + (1+a)x^2}.$$

En considérant $u = x\sqrt{1+a}$, on détermine une primitive de la fonction intégrée

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1 + (1+a)x^2} = \left[\frac{1}{\sqrt{1+a}}\arctan\big(\sqrt{1+a}\,x\big)\right]_0^{+\infty}.$$

Finalement

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{1 + a\sin^2(t)} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}.$$

(b) Par la symétrie du graphe de fonction sinus en $\pi/2$, on peut directement affirmer

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi)^\alpha \sin^2(t)} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi)^\alpha \sin^2(t)}.$$

Le calcul qui précède donne alors

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi)^\alpha \sin^2(t)} = \frac{\pi}{\sqrt{1+(n\pi)^\alpha}} \sim \frac{\pi^{1-\alpha/2}}{n^{\alpha/2}}.$$

Par équivalence de séries à termes positifs, la série étudiée converge si, et seulement si, $\alpha > 2$.

(c) Pour $t \in [n\pi\,;(n+1)\pi]$, on a

$$1+(n\pi)^\alpha \sin^2(t) \le 1+t^\alpha \sin^2(t) \le 1+((n+1)\pi)^\alpha \sin^2(t).$$

Puis en passant à l'inverse et en intégrant, on obtient l'encadrement

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+((n+1)\pi)^\alpha \sin^2(t)} \le \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2(t)} \le \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi)^\alpha \sin^2(t)}.$$

Par comparaison de séries à termes positifs, la convergence de la série étudiée équivaut à la convergence de la série précédente. La condition attendue est donc encore $\alpha > 2$.

(d) Les sommes partielles de la série étudiée ci-dessus correspondent aux intégrales suivantes

$$\int_0^{n\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2(t)}.$$

La fonction intégrée étant positive et la suite de segments $[0\,;n\pi]$ étant croissante et de réunion $\mathbb{R}_+$, la convergence de l'intégrale proposée entraîne la convergence de la série et inversement. On conclut que l'intégrale étudiée converge si, et seulement si, $\alpha > 2$.

Exercice 12 : [énoncé]

Par l'inégalité

$$ab \le \frac{1}{2}(a^2+b^2)$$

on peut affirmer

$$|ff'| \le \frac{1}{2}\left(f^2+f'^2\right)$$

et assurer que la fonction ff' est intégrable sur $[0\,;+\infty[$. Or

$$\int_0^x ff'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(f(x)\right)^2$$

donc f^2 converge quand $x \to +\infty$. Puisque la fonction f^2 est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ et converge en $+\infty$, sa limite est nécessairement nulle et donc $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$.

Exercice 13 : [énoncé]

Par la relation de Chasles

$$\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

donc, quand $x \to +\infty$,

$$\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t \to \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Exercice 14 : [énoncé]

(a) Pour $x \ge 1$, la décroissance de f donne

$$\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t \le f(x) \le \int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

et puisque l'intégrale de f sur $[0\,;+\infty[$ converge

$$\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Aussi

$$\int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

et donc par encadrement

$$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

(b) La fonction f est positive car décroît vers 0 en $+\infty$ et

$$0 \leq \frac{x}{2} f(x) \leq \int_{x/2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

ce qui permet d'affirmer

$$x f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

(c) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in [0\,;2[, f(x) = 0$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \forall t \in [0\,;1[, f(t+n) = \begin{cases} n^2 t & \text{si } t \in [0\,;1/n^2] \\ n^2(2/n^2 - t) & \text{si } t \in [1/n^2\,;2/n^2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n-1} \leq 1.$$

Puisque la suite $([0\,;n])_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de segments de réunion $\mathbb{R}_+$ et que f est positive on peut affirmer que f est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 15 : [énoncé]
Montrons pour commencer

$$\forall \varepsilon > 0, \forall A \in \mathbb{R}_+, \exists x \geq A, \left|x f(x)\right| \leq \varepsilon.$$

Par l'absurde, supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $A \in \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\forall x \geq A, \left|x f(x)\right| \geq \varepsilon$$

on a alors au voisinage de $+\infty$

$$\left|f(x)\right| \geq \frac{\varepsilon}{x}$$

ce qui est contradictoire avec l'intégrabilité de f.
Sachant

$$\forall \varepsilon > 0, \forall A \in \mathbb{R}_+, \exists x \geq A, \left|x f(x)\right| \leq \varepsilon$$

on peut construire une suite (x_n) solution en prenant $\varepsilon = 1/(n+1) > 0$, $A = n$ et en choisissant x_n vérifiant

$$x_n \geq n \text{ et } \left|x_n f(x_n)\right| \leq 1/(n+1).$$

Exercice 16 : [énoncé]
On peut prendre f nulle sur $[0\,;1]$, puis pour chaque intervalle $[n\,;n+1]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f affine par morceaux définie par les nœuds $f(n) = 0$, $f(n + \frac{1}{n^3}) = n$, $f(n + \frac{2}{n^3}) = 0$ et $f(n+1) = 0$ ce qui définit une fonction f positive continue vérifiant $\int_n^{n+1} f = \frac{1}{n^2}$ et donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$ bien que non bornée.

Exercice 17 : [énoncé]

(a) On a

$$f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t)\,\mathrm{d}t$$

donc $f'(x)$ admet une limite finie ℓ quand $x \to +\infty$.
Si $\ell > 0$ alors pour x assez grand $f'(x) \geq \ell/2$ puis $f(x) \geq \ell x/2 + m$ ce qui empêche la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.
Si $\ell < 0$ on obtient aussi une absurdité. Il reste donc $\ell = 0$.

(b) Puisque la fonction f' est continue et converge en $+\infty$, cette fonction est bornée et donc $t \mapsto f(t)f'(t)$ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 18 : [énoncé]

(a) Par convergence, $\lim_{M \to +\infty} \int_0^M \left|g(t)\right|\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \left|g(t)\right|\,\mathrm{d}t$ d'où le résultat.

(b) Soit f une primitive de g. On peut écrire $f(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t + C$.
Pour tout $x \leq y \in \mathbb{R}$ on a alors : $\left|f(y) - f(x)\right| \leq \int_x^y \left|g(t)\right|\,\mathrm{d}t$.
Soient $\varepsilon > 0$ et M tel qu'introduit ci-dessus.
Si $x \geq M$ alors

$$\left|f(y) - f(x)\right| \leq \int_M^{+\infty} \left|g(t)\right|\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon.$$

De plus, la fonction $t \mapsto \left|g(t)\right|$ étant continue sur le segment $[0\,;M+1]$, elle y est bornée par un certain A et on a donc $\left|f(y) - f(x)\right| \leq A|y - x|$ pour tout $x \leq y \in [0\,;M+1]$
Par suite, pour $\alpha = \min(1, \varepsilon/A) > 0$, on a pour tout $x \leq y \in \mathbb{R}$,

$$|y - x| \leq \alpha \implies \left|f(y) - f(x)\right| \leq \varepsilon.$$

La fonction f est donc uniformément continue.

Exercice 19 : [énoncé]

(a) Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$, on peut écrire
$$f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t)\,\mathrm{d}t.$$
Par intégrabilité de f'', la fonction f' admet une limite finie ℓ quand $x \to +\infty$.
Si $\ell > 0$ alors, pour x assez grand $f'(x) \geq \ell/2$. Notons $A \geq 0$ tel que ce qui précède soit vrai pour $x \geq A$. On a alors
$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t \geq f(0) + \int_0^A f'(t)\,\mathrm{d}t + \int_A^x \frac{\ell}{2}\,\mathrm{d}t$$
et donc $f(x) \geq \ell x/2 + C^{te}$ ce qui empêche la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.
Si $\ell < 0$ on obtient aussi une absurdité. Il reste donc $\ell = 0$.
Posons
$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Par l'égalité de Taylor avec reste intégrale
$$F(x+1) = F(x) + f(x) + \int_x^{x+1} (x+1-t) f'(t)\,\mathrm{d}t.$$
Quand $x \to +\infty$,
$$F(x), F(x+1) \to \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Aussi $f'(x) \to 0$ et
$$\left|\int_x^{x+1} (x+1-t) f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \max_{t\in[x;x+1]} \left|f'(t)\right| \to 0$$
donc par opération $f(x) \to 0$.

(b) Par l'égalité de Taylor avec reste intégrale
$$f(n+1) = f(n) + f'(n) + \int_n^{n+1} ((n+1)-t) f''(t)\,\mathrm{d}t$$
donc
$$f'(n) = f(n+1) - f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t) f''(t)\,\mathrm{d}t.$$
La série de terme général $f(n+1) - f(n)$ est convergente car de même nature que la suite $(f(n))$ qui converge en $+\infty$. La série de terme général $\int_n^{n+1} (n+1-t) f''(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente car
$$\left|\int_n^{n+1} (n+1-t) f''(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_n^{n+1} \left|f''(t)\right|\mathrm{d}t$$
et le terme majorant est sommable par intégrabilité de f''.
Par conséquent, la série $\sum f'(n)$ est convergente.
Aussi
$$F(n+1) = F(n) + f(n) + \frac{1}{2} f'(n) + \int_n^{n+1} \frac{(n+1-t)^2}{2} f''(t)\,\mathrm{d}t.$$
On peut alors mener le même raisonnement et conclure que $\sum f(n)$ converge.

Exercice 20 : [énoncé]
On notera f la fonction intégrée et I l'intervalle d'étude, à chaque fois f s'avère continue par morceaux sur I.

(a) $I = [0\,;+\infty[$, $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$, donc f est intégrable et l'intégrale étudiée converge.
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}\,\mathrm{d}t = \left[\ln \frac{t+1}{t+2}\right]_0^{+\infty} = \ln 2.$$

(b) $I = [0\,;+\infty[$, $t^2 f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, donc f est intégrable et l'intégrale étudiée converge.
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^t+1)(\mathrm{e}^{-t}+1)} \underset{u=\mathrm{e}^t}{=} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(u+1)^2} = \frac{1}{2}.$$

(c) $I =]0\,;+\infty[$, $\sqrt{t} f(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ et $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ donc f est intégrable et l'intégrale étudiée converge.
$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t \underset{IPP}{=} \left[t \ln\left(1 + 1/t^2\right)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \pi.$$
L'intégration par parties est justifiée par deux convergences.

(d) $I = [0\,;+\infty[$, $t^2 f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, donc f est intégrable et l'intégrale étudiée converge.
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \underset{u=\sqrt{t}}{=} \int_0^{+\infty} 2u\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u \underset{IPP}{=} \left[-2u\mathrm{e}^{-u}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = 2.$$
L'intégration par parties est justifiée par deux convergences.

(e) $I =]0\,;+\infty[$, $\sqrt{t} f(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ et $t^{3/2} f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc f est intégrable et l'intégrale étudiée converge.
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \underset{u=1/t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\ln 1/u}{u^2(1+1/u)^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{-\ln u}{(u+1)^2}\,\mathrm{d}u$$

donc
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Exercice 21 : [énoncé]
On notera f la fonction intégrée et I l'intervalle d'étude, à chaque fois f s'avère continue par morceaux sur I.

(a) $I = [0\,;+\infty[$, $t^2 f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, donc f est intégrable et $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\mathrm{e}^t+1}}$ converge.
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\mathrm{e}^t+1}} \underset{u=\sqrt{\mathrm{e}^t+1}}{=} \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}u}{u^2-1} = \left[\ln\frac{u-1}{u+1}\right]_{\sqrt{2}}^{+\infty} = \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 2\ln(1+\sqrt{2}).$$

(b) $I = [1\,;+\infty[$, $t^2 f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, donc f est intégrable et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{sh} t}$ converge.
$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{sh} t} = \int_1^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}} \underset{u=\mathrm{e}^t}{=} \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}u}{u^2-1} = \left(\ln\frac{u-1}{u+1}\right)_e^{+\infty} = \ln\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-1}.$$

(c) $I =]0\,;+\infty[$, $f(t) \xrightarrow[t\to0]{} 0$ et $t^2 f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc f est intégrable et $\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t$ converge.
$$\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t \underset{u=1/t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\ln 1/u}{u^3(1+1/u^2)^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{-u\ln u}{(u^2+1)^2}\,\mathrm{d}u$$
donc
$$\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = 0.$$

(d) $I = [1\,;+\infty[$, $t^2 f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, donc f est intégrable et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{1+t^2}}$ converge.
$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{1+t^2}} \underset{t=\operatorname{sh} x}{=} \int_{\operatorname{argsh} 1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh}^2 x} = \int_{\operatorname{argsh} 1}^{+\infty} \frac{4\,\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2} \underset{u=\mathrm{e}^x}{=} \int_{1+\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{4\,\mathrm{d}u}{u(u-1/u)^2}$$
donc
$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{1+t^2}} = \int_{1+\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{4u\,\mathrm{d}u}{(u^2-1)^2} = \left[2\frac{1}{1-u^2}\right]_{1+\sqrt{2}}^{+\infty} = 2\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2-1} = \sqrt{2}-1.$$

(e) $I =]0\,;1]$, $t^{2/3} f(t) \xrightarrow[t\to0+]{} 0$ donc f est intégrable et $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge.
$$\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \underset{u=\sqrt{t}}{=} \int_0^1 4\ln u\,\mathrm{d}u = \Big[4u\ln u - 4u\Big]_0^1 = -4.$$

Exercice 22 : [énoncé]

(a) $f\colon t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$ est définie et continue sur $]0\,;+\infty[$, $f(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ et $t^2 f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc f est intégrable et l'intégrale étudiée converge.
Via le changement de variable $u = \sqrt{t}$
$$I = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = 2.$$

(b) $f\colon x \mapsto \sin x \ln(\sin x)$ est définie et continue sur $]0\,;\pi/2]$ et $f(x) \xrightarrow[x\to0]{} 0$ donc f est intégrable et l'intégrale étudiée converge.
Via le changement de variable $t = \cos x$
$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1-x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1-x) + \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = \ln 2 - 1.$$

(c) $f\colon t \mapsto \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}$ est définie et continue sur $]0\,;1[$, $\sqrt{t} f(t) \xrightarrow[t\to0]{} 0$ et $f(t) \xrightarrow[t\to1]{} 0$ donc f est intégrable et l'intégrale étudiée converge.
Via le changement de variable $u = \sqrt{1-t}$
$$I = -\int_1^0 2\ln(1-u^2)\,\mathrm{d}u = \int_0^1 2\ln(1-u^2)\,\mathrm{d}u.$$
Or $\int_0^1 \ln(1-u^2)\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \ln(1-u)\,\mathrm{d}u + \int_0^1 \ln(1+u)\,\mathrm{d}u = 2\ln 2 - 2$, donc
$$I = 4\ln 2 - 4.$$

(d) $f\colon x \mapsto \frac{1}{(x+1)\sqrt[3]{x}}$ est définie et continue sur $]0\,;+\infty[$, $f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{1}{x^{1/3}}$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{4/3}}$ donc f est intégrable et l'intégrale étudiée converge.
Via le changement de variable $t = \sqrt[3]{x}, x = t^3, \mathrm{d}x = 3t^2\,\mathrm{d}t$.
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt[3]{x}} = \int_0^{+\infty} \frac{3t^2\,\mathrm{d}t}{(t^3+1)t} = 3\int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^3+1}$$
puis
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt[3]{x}} = \left[\ln\frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+1}} + \sqrt{3}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right]_0^{+\infty} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

(e) $f\colon x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}-1}{x(1+x)}$ est définie et continue sur $]0\,;+\infty[$, $f(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} \frac{1}{2}$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{3/2}}$ donc f est intégrable et l'intégrale étudiée converge.

Via le changement de variable $t = \sqrt{1+x}, x = t^2 - 1, \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x(1+x)}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{t-1}{(t^2-1)t^2} 2t\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{t(t+1)} = 2\ln 2.$$

(f) $f\colon x \mapsto \frac{(1+x)^{1/3}-1}{x(1+x)^{2/3}}$ est définie et continue sur $]0\,;+\infty[$, $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{1}{3}$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{4/3}}$ donc f est intégrable et l'intégrale étudiée converge.
Via le changement de variable $t = (1+x)^{1/3}, x = t^3 - 1, \mathrm{d}x = 3t^2\,\mathrm{d}t$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1+x)^{1/3}-1}{x(1+x)^{2/3}}\,\mathrm{d}x = 3\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}$$

or

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1+x)^{1/3}-1}{x(1+x)^{2/3}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

(g) Par 2π périodicité,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}.$$

Sur $]-\pi\,;\pi[$, on peut réaliser le changement de variable $t = \tan x/2$.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)(2+\frac{1-t^2}{1+t^2})} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{3+t^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

(h) Sur $[0\,;\pi/2[,]\pi/2\,;3\pi/2[$ ou $]3\pi/2\,;2\pi]$ on a

$$\int \frac{\sin^2 x}{3\cos^2 x + 1}\,\mathrm{d}x \underset{t=\tan x}{=} \int \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)(4+t^2)} = -\frac{x}{3} + \frac{2}{3}\arctan\frac{\tan x}{2} + C^{te}.$$

Par recollement, on détermine une primitive sur $[0\,;2\pi]$ et on conclut

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(x)}{3\cos^2(x)+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{3}.$$

(i) $f\colon x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x-x^2}}$ est définie et continue sur $]0\,;1[$, $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ et $f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ donc f est intégrable et l'intégrale étudiée converge

On écrit

$$x - x^2 = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

On pose alors $x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sin t$ et on a $\sqrt{x-x^2} = \frac{1}{2}\cos t$.
Par changement de variable

$$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin t + 1}{2\cos t}\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 23 : [énoncé]

(a) $f\colon t \mapsto \frac{t}{1+t^4}$ est définie et continue sur $[0\,;+\infty[$, $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^3}$ donc f est intégrable et l'intégrale J converge.

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^4} = \left[\frac{1}{2}\arctan t^2\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

(b) $\frac{1}{1+t^4} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^4}$ et $\frac{t^2}{1+t^4} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ donc les deux intégrales introduites convergent.
Le changement de variable $x = 1/t$ transforme l'une en l'autre.

(c) On a la factorisation

$$t^4 + 1 = (t^2+1)^2 - 2t^2 = (t^2 + \sqrt{2}t + 1)(t^2 - \sqrt{2}t + 1)$$

donc

$$I - \sqrt{2}J + I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(t + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}} = \left[\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}t+1)\right]_0^{+\infty}$$

puis

$$I = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Exercice 24 : [énoncé]

La fonction intégrée est définie et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et est dominée par $1/t^3$ quand $|t| \to +\infty$, donc elle est intégrable et l'intégrale étudiée existe.
Par découpage et changement de variable

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+\mathrm{i}t)} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+\mathrm{i}t)} + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1-\mathrm{i}t)}$$

donc
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+\mathrm{i}t)}=\int_0^{+\infty}\frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}.$$
Or
$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)}-\int_0^{+\infty}\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}.$$
Une intégration par parties justifiée par deux convergences donne
$$\int_0^{+\infty}\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}=\left[-\frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2}\right]_0^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$
et donc
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+\mathrm{i}t)}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 25 : [énoncé]

(a) $f\colon t\mapsto\frac{\sin^3(t)}{t^2}$ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$.
Quand $t\to0$, $f(t)\to0$ et quand $t\to+\infty$, $f(t)=\mathrm{O}(1/t^2)$.
On en déduit que f est intégrable sur I ce qui assure l'existence de I.

(b) On a $\sin(3t)=3\sin(t)-4\sin^3(t)$ donc
$$4I(x)=\int_x^{+\infty}\frac{3\sin(t)-\sin(3t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$
Par convergence des intégrales écrites, on a
$$4I(x)=3\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t-\int_x^{+\infty}\frac{\sin(3t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$
Or
$$\int_x^{+\infty}\frac{\sin(3t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\underset{u=3t}{=}3\int_{3x}^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u$$
donc
$$I(x)=\frac{3}{4}\int_x^{3x}\frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

(c) $I=\lim_{x\to0}I(x)$. Or $\sin(t)=t+t^2\varepsilon(t)$ avec $\varepsilon\underset{0}{\to}0$ donc
$$\int_x^{3x}\frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t=\ln(3)+\int_x^{3x}\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t.$$
Puisque $\int_x^{3x}\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t\xrightarrow[x\to0]{}0$, on obtient
$$I=\frac{3}{4}\ln(3).$$

Exercice 26 : [énoncé]

Puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty}f$ converge, il en est de même de
$$\int_0^{+\infty}f(a+x)\,\mathrm{d}x\text{ et }\int_0^{+\infty}f(b+x)\,\mathrm{d}x$$
avec
$$\int_0^{+\infty}f(a+x)\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\text{ et }\int_0^{+\infty}f(b+x)\,\mathrm{d}x=\int_b^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x.$$
On en déduit la convergence de l'intégrale suivante et sa valeur
$$\int_0^{+\infty}\bigl(f(a+x)-f(b+x)\bigr)\,\mathrm{d}x=\int_a^bf(x)\,\mathrm{d}x.$$
D'autre part, on a par découpage et pour tout $A\geq0$
$$\int_{-A}^0\bigl(f(a+x)-f(b+x)\bigr)\,\mathrm{d}x=\int_{-A+a}^{-A+b}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^bf(x)\,\mathrm{d}x.$$
Or
$$(b-a)\min_{[-A+a;-A+b]}f\leq\int_{-A+a}^{-A+b}f(x)\,\mathrm{d}x\leq(b-a)\max_{[-A+a;-A+b]}f$$
avec
$$\min_{[-A+a;-A+b]}f\xrightarrow[A\to+\infty]{}\ell\text{ et }\max_{[-A+a;-A+b]}f\xrightarrow[A\to+\infty]{}\ell$$
car f converge vers ℓ en $-\infty$.
On en déduit la convergence et la valeur de l'intégrale suivante
$$\int_{-\infty}^0\bigl(f(a+x)-f(b+x)\bigr)\,\mathrm{d}x=(b-a)\ell-\int_a^bf(x)\,\mathrm{d}x$$
et finalement on obtient la convergence et la valeur de l'intégrale suivante
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\bigl(f(a+x)-f(b+x)\bigr)\,\mathrm{d}x=(b-a)\ell.$$

Exercice 27 : [énoncé]
La fonction $f\colon x \mapsto \frac{\arctan(2x)-\arctan x}{x}$ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$.
Quand $x \to 0^+$,

$$f(x) = \frac{2x - x + \mathrm{o}(x)}{x} \to 1.$$

Quand $x \to +\infty$,

$$f(x) = \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{2x} - \frac{\pi}{2} + \arctan\frac{1}{x}}{x} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Ainsi f est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
Pour $A \geq 0$,

$$\int_0^A \frac{\arctan(2x) - \arctan x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^A \frac{\arctan(2x)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^A \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x$$

avec convergence des deux nouvelles intégrale.
Par changement de variable $u = 2x$ sur la première,

$$\int_0^A \frac{\arctan(2x) - \arctan x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{2A} \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^A \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_A^{2A} \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Par la croissance de la fonction arctan,

$$\arctan(A)\int_A^{2A} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq \int_A^{2A} \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x \leq \arctan(2A)\int_A^{2A} \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

À la limite quand $A \to +\infty$, on conclut

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(2x) - \arctan x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ln 2.$$

Exercice 28 : [énoncé]
On a

$$\frac{1}{1+X^4+X^8} = \frac{1-X^4}{1-X^{12}}.$$

Les pôles de cette fraction rationnelle sont les éléments de $U_{12} \setminus U_4$ et ils sont simples.
On peut donc écrire en combinant les parties polaires conjuguées

$$\frac{1}{1+X^4+X^8} = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha_1}{X-\omega_1}\right) + 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha_2}{X-\omega_2}\right) + 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha_4}{X-\omega_4}\right) + 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha_5}{X-\omega_5}\right)$$

avec $\omega_k = \exp(2ik\pi/12)$, les $\omega_1, \omega_2, \omega_4$ et ω_5 de parties imaginaires strictement positives.

$$\alpha_k = \left.\frac{1-X^4}{(1-X^{12})'}\right|_{X=\omega_k} = \frac{1}{12}\left(\omega_k^5 - \omega_k\right).$$

Soit $\omega = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$. On a

$$\int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{d}t}{t-\omega} = \int_{-A}^{A} \frac{(t-a)+ib}{(t-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\ln\bigl((t-a)^2+b^2\bigr) + \mathrm{i}\arctan\frac{t-a}{b}\right]_{-A}^{A} \xrightarrow[A\to+\infty]{} \mathrm{i}\pi$$

la limite de l'arc tangente étant obtenue sachant $b > 0$.
Soit de plus $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\lim_{A\to+\infty}\left(\int_{-A}^{A} 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha}{t-\omega}\right)\mathrm{d}t\right) = 2\,\mathrm{Re}\left(\lim_{A\to+\infty} \alpha\int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{d}t}{t-\omega}\right) = -2\pi\,\mathrm{Im}\,\alpha.$$

Puisque la convergence de l'intégrale que nous étudions est assurée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4+x^8} = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4+x^8}$$

et on en déduit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4+x^8} = -2\pi\,\mathrm{Im}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5)$$

ce qui donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4+x^8} = \frac{\pi}{6}\,\mathrm{Im}\bigl(\omega^2 - \omega^{10} + \omega^4 - \omega^8\bigr).$$

Or

$$\omega^2 - \omega^{10} = 2\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3} = \mathrm{i}\sqrt{3} \text{ et } \omega^4 - \omega^8 = 2\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3} = i\sqrt{3}$$

et finalement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4+x^8} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Exercice 29 : [énoncé]
(a) Il suffit d'étudier la variation de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x - (1+x)$ pour obtenir cette inégalité de convexité classique. On en déduit

$$1 - t^2 \leq \mathrm{e}^{-t^2} = \frac{1}{\mathrm{e}^{t^2}} \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

(b) La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est définie et continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$.
Puisque $t^2e^{-t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, cette fonction est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ ce qui assure l'existence de I.
La fonction $t \mapsto (1-t^2)^n$ est définie et continue par morceaux sur le segment $[0\,;1]$, donc l'intégrale définissant I_n existe.
La fonction $t \mapsto 1/(1+t^2)^n$ est définie et continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$.
Puisque $1/(1+t^2)^n \underset{t\to+\infty}{\sim} 1/t^{2n}$ avec $2n > 1$, cette fonction est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ ce qui assure l'existence de J_n.
On a
$$(1-t^2)^n \le e^{-nt^2} \le \frac{1}{(1+t^2)^n}$$
donc
$$I_n \le \int_0^1 e^{-nt^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-y^2}\,dy \le \frac{I}{\sqrt{n}}$$
et
$$\frac{I}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\,dx \le J_n.$$

(c) Le changement de variable $t = \sin x$ donne $I_n = W_{2n+1}$.
Le changement de variable $t = \tan x$ donne $J_{n+1} = W_{2n}$.

(d) Par intégration par parties
$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n.$$
On en déduit $u_{n+1} = u_n$ donc la suite (u_n) est constante égale à
$$u_1 = \pi/2.$$

(e) Puisque
$$\forall x \in [0\,;\pi/2], (\cos x)^{n+1} \le (\cos x)^n \le (\cos x)^{n-1}$$
on obtient en intégrant
$$W_{n+1} \le W_n \le W_{n-1}.$$
Or
$$W_{n+1} = \frac{n}{n+1}W_{n-1} \sim W_{n-1}$$
donc par encadrement
$$W_{n+1} \sim W_n.$$
On en déduit
$$u_n \sim nW_n^2$$
puis
$$W_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}.$$
Par suite
$$I_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} \text{ et } J_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}.$$
L'encadrement du b) donne alors
$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 30 : [énoncé]
La fonction $f : t \mapsto t\lfloor 1/t\rfloor$ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$.
Pour $t > 1$, $\lfloor 1/t\rfloor = 0$ et donc $f(t) = 0$. Ainsi f est intégrable sur $[1\,;+\infty[$.
Pour $t > 0$, $1/t - 1 \le \lfloor 1/t\rfloor \le 1/t$ et donc $f(t) \xrightarrow[t\to0^+]{} 1$. Ainsi f est intégrable sur $]0\,;1]$.
On a
$$I = \lim_{n\to+\infty}\int_{1/n}^1 f(t)\,dt.$$
Or
$$\int_{1/n}^1 f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n-1}\int_{1/(k+1)}^{1/k} t\lfloor 1/t\rfloor\,dt = \sum_{k=1}^{n-1}\int_{1/(k+1)}^{1/k} kt\,dt$$
puis
$$\int_{1/n}^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k+1}{k(k+1)^2}.$$
Par décomposition en éléments simples
$$\int_{1/n}^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2}\right)$$
et après réorganisation
$$\int_{1/n}^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}.$$
On en déduit
$$I = \frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 31 : [énoncé]
Supposons f intégrable sur $]0\,;1]$.
Par la décroissance de f, on remarque

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En sommant pour k allant de 1 à $n-1$, on obtient

$$\int_{1/n}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq S_n - \frac{1}{n} f(1) \leq \int_{0}^{1-1/n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par théorème d'encadrement, on obtient

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Inversement, supposons la suite (S_n) convergente.
Par la décroissance de f, on a

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f\left(\frac{k}{n}\right).$$

En sommant pour k allant de 1 à $n-1$, on obtient

$$\int_{1/n}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq S_n - \frac{1}{n} f(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

On en déduit que la suite des intégrales précédente est majorée et puisque la fonction f est positive, cela suffit pour conclure que l'intégrale de f converge.

Exercice 32 : [énoncé]

On commence par étudier l'intégrale partielle sur $[1\,;n]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ que l'on découpe afin de concrétiser la valeur de $\lfloor t \rfloor$ sur l'intervalle d'intégration.

Par la relation de Chasles

$$\int_1^n \frac{(-1)^{\lfloor t \rfloor}}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{(-1)^k}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

Par application du critère spécial des séries alternées, on peut affirmer la convergence de la série $\sum (-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$. Notons S sa somme. On a donc

$$\int_1^n \frac{(-1)^{\lfloor t \rfloor}}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} S.$$

Ceci suffit pas pour autant pour affirmer la convergence de l'intégrale. En effet, on a

$$\int_0^{2n\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \sin(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{diverge.}$$

On étudie alors l'intégrale sur $[1\,;x]$ en introduisant $n_x = \lfloor x \rfloor$ de sorte que $n_x \leq x < n_x + 1$. On peut alors écrire

$$\int_1^x \frac{(-1)^{\lfloor t \rfloor}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{n_x} \frac{(-1)^{\lfloor t \rfloor}}{t}\,\mathrm{d}t + (-1)^n \int_{n_x}^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

avec

$$\int_{n_x}^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln\left(\frac{x}{n_x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad \text{car} \quad n_x \underset{x\to+\infty}{\sim} x.$$

On en déduit

$$\int_1^x \frac{(-1)^{\lfloor t \rfloor}}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} S.$$

Ainsi, l'intégrale étudiée converge et

$$\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor t \rfloor}}{t} = S.$$

Le calcul de S est réalisé dans le sujet 1058. On obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor t \rfloor}}{t} = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right).$$

Exercice 33 : [énoncé]
Comme $a > 0$, $t^2 \sin t \mathrm{e}^{-at} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, la fonction continue par morceaux $t \mapsto \sin(t)\mathrm{e}^{-at}$ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ et $I(a) = \int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge.

$$I(a) = \operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t - at}\,\mathrm{d}t\right) = \operatorname{Im}\left(\left[\frac{1}{\mathrm{i}-a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t-at}\right]_0^{+\infty}\right) = \frac{1}{a^2+1}.$$

Exercice 34 : [énoncé]
La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{a^2+t^2}$ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$.
Cette fonction est intégrable car

$$\sqrt{t}\frac{\ln t}{a^2+t^2} \xrightarrow[t\to0+]{} 0 \text{ et } t^{3/2}\frac{\ln t}{a^2+t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

L'intégrale définissant $I(a)$ est donc bien définie.
Par le changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif proposé

$$I(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t\underset{u=a/t}{=}\int_0^{+\infty}\frac{\ln a-\ln u}{a(u^2+1)}\,\mathrm{d}u=\frac{\ln a}{a}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}-\frac{1}{a}I(1).$$

Pour $a=1$, on obtient $I(1)=0$ et donc

$$I(a)=\frac{\ln a}{a}\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 35 : [énoncé]
L'intégrabilité est entendue.
Par le changement de variable $u=a^2/t$ on obtient

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{2\ln a-\ln u}{a^2+u^2}\,\mathrm{d}u$$

donc

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2a}\ln a.$$

Exercice 36 : [énoncé]
La fonction $f\colon t\mapsto\sqrt{t}+a\sqrt{t+1}+b\sqrt{t+2}$ est définie et continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$.
Par développements limités

$$f(t)=(1+a+b)\sqrt{t}+\frac{a+2b}{2}\frac{1}{\sqrt{t}}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)\text{ quand }t\to+\infty.$$

Si $1+a+b\neq 0$ alors $f(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}+\infty$ ou $-\infty$ et l'intégrale n'est assurément pas convergente.
Si $1+a+b=0$ et $a+2b\neq 0$ alors $f(t)\sim\frac{\lambda}{t^{1/2}}$ avec $\lambda\neq 0$. Par équivalence de fonction de signe constant au voisinage de $+\infty$, on peut affirmer que l'intégrale diverge.
Si $1+a+b=0$ et $a+2b=0$ *i.e.* $(a,b)=(-2,1)$ alors $f(t)=\mathrm{O}\big(1/t^{3/2}\big)$ et donc f est intégrable.
Finalement, l'intégrale étudiée converge si, et seulement si, $(a,b)=(-2,1)$.
Supposons que tel soit le cas.

$$\int_0^x\big(\sqrt{t}-2\sqrt{t+1}+\sqrt{t+2}\big)\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\left[t^{3/2}-2(t+1)^{3/2}+(t+2)^{3/2}\right]_0^x.$$

Par développements limités

$$x^{3/2}-2(x+1)^{3/2}+(x+2)^{3/2}\sim\frac{3}{4\sqrt{x}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

et donc

$$\int_0^{+\infty}\big(\sqrt{t}+a\sqrt{t+1}+b\sqrt{t+2}\big)\,\mathrm{d}t=\frac{4}{3}\big(1-\sqrt{2}\big).$$

Exercice 37 : [énoncé]
La fonction $f\colon t\mapsto(t-\lfloor t\rfloor)\mathrm{e}^{-at}$ est définie et continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$.
Quand $t\to+\infty$, $t^2f(t)\to 0$ donc f est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.

$$\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}f(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 t\mathrm{e}^{-a(t+k)}\,\mathrm{d}t=\frac{1-\mathrm{e}^{-na}}{1-\mathrm{e}^{-a}}\frac{1-(a+1)\mathrm{e}^{-a}}{a^2}.$$

Quand $n\to+\infty$,

$$\int_0^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1-(a+1)\mathrm{e}^{-a}}{a^2(1-\mathrm{e}^{-a})}.$$

Exercice 38 : [énoncé]
(a) $x\mapsto f(x+a)-f(x)$ est continue et positive (car f est croissante).

$$\int_0^A f(x+a)-f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^{A+a}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x=\int_A^{A+a}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Or $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\ell$ donc

$$\forall\varepsilon>0,\exists M\in\mathbb{R},x\geq M\implies\big|f(x)-\ell\big|\leq\varepsilon$$

et alors

$$\forall A\geq M,\left|\int_A^{A+a}f(x)\,\mathrm{d}x-a\ell\right|\leq\int_A^{A+a}\big|f(x)-\ell\big|\,\mathrm{d}x\leq a\varepsilon$$

donc

$$\int_A^{A+a}f(x)\,\mathrm{d}x\xrightarrow[A\to+\infty]{}a\ell$$

puis

$$\int_0^A f(x+a)-f(x)\,\mathrm{d}x\xrightarrow[A\to+\infty]{}a\ell-\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On peut conclure que $\int_0^{+\infty} f(x+a)-f(x)\,\mathrm{d}x$ est définie et

$$\int_0^{+\infty} f(x+a)-f(x)\,\mathrm{d}x = a\ell - \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) Comme ci-dessus, mais en faisant $A\to-\infty$, on établie

$$\int_0^{-\infty} f(x+a)-f(x)\,\mathrm{d}x = a\ell' - \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

avec $\ell' = \lim_{x\to-\infty} f(x)$. Par conséquent $\int_{-\infty}^{+\infty} \arctan(x+a)-\arctan(x)\,\mathrm{d}x$ est définie par application du théorème de Chasles et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \arctan(x+a)-\arctan(x)\,\mathrm{d}x = \pi a.$$

Exercice 39 : [énoncé]
Par le changement de variable $u=\tan\frac{t}{2}$ on parvient à l'intégrale

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{8u^2\,\mathrm{d}u}{(1+u^2)((1-x)^2+(1+x)^2u^2)((1-y)^2+(1+y)^2u^2)}.$$

On peut réaliser une décomposition en éléments simples réelles de la fraction rationnelle intégrée qui pour des raisons de parité sera de la forme

$$\frac{a}{1+u^2}+\frac{b}{(1-x)^2+(1+x)^2u^2}+\frac{c}{(1-y)^2+(1+y)^2u^2}$$

avec

$$a=-\frac{1}{2xy}, b=-\frac{(1-x)^2(1+x)^2}{2x(x-y)(1-xy)} \text{ et } c=-\frac{(1-y)^2(1+y)^2}{2y(y-x)(1-xy)}$$

sous réserve que $x\neq y$ et $xy\neq 0$.
Puisque

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{\alpha^2+\beta^2u^2}=\frac{1}{\alpha\beta}\frac{\pi}{2}$$

on parvient à

$$I=\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2xy}-\frac{1-x^2}{2x(x-y)(1-xy)}+\frac{1-y^2}{2y(x-y)(1-xy)}\right)=\frac{\pi}{2(1-xy)}.$$

Les cas exclus $x\neq y$ et $xy\neq 0$ peuvent être récupérés par continuité.
Il m'a peut-être échappé une démarche plus simple...

Exercice 40 : [énoncé]
On peut écrire

$$1+(t+\mathrm{i}b)^2=(t+\mathrm{i}(b+1))(t+\mathrm{i}(b-1)).$$

Si $b=\pm1$ la fonction n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$ à cause d'une singularité en 0.
Si $b\neq\pm1$ alors la fonction $f\colon t\mapsto\frac{1}{1+(t+\mathrm{i}b)^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $f(t)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ quand $t\to\pm\infty$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}$.
En procédant à une décomposition en éléments simples :

$$\int_{-A}^{A}\frac{\mathrm{d}t}{1+(t+\mathrm{i}b)^2}=\frac{\mathrm{i}}{2}\left[\frac{1}{2}\ln(t^2+(b+1)^2)+\arctan\left(\frac{t}{b+1}\right)\right]_{-A}^{A}-\frac{\mathrm{i}}{2}\left[\frac{1}{2}\ln(t^2+(b-1)^2)+\right.$$

Si $|b|>1$ alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+(t+\mathrm{i}b)^2}=0.$$

Si $|b|<1$ alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+(t+\mathrm{i}b)^2}=\pi.$$

Exercice 41 : [énoncé]
Le discriminant du trinôme $x^2+\alpha x+1$ vaut $\Delta=\alpha^2-4$.
Cas $|\alpha|<2$
On a $\Delta<0$, le trinôme ne s'annule pas et la fonction $x\mapsto 1/(x^2+\alpha x+1)$ est définie et continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$. La fonction est intégrable car équivalente à $1/x^2$ en $+\infty$.
Cas $\alpha\geq 2$, le trinôme ne s'annule pas sur $[0\,;+\infty[$ car il est somme de termes positifs. À nouveau la fonction $x\mapsto 1/(x^2+\alpha x+1)$ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
Cas $\alpha\leq 2$, le trinôme $x^2+\alpha x+1$ présente deux racines positives et la fonction $x\mapsto 1/(x^2+\alpha x+1)$ n'est pas définie sur l'intégralité de l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
Même en découpant l'intégrale aux points singuliers, on peut observer que les intégrales introduites ne sont pas définies. On ne parvient donc pas à donner un sens à l'intégrale étudiée dans ce cas.
Reste à calculer l'intégrale.
Cas $|\alpha|<2$
Le trinôme $x^2+\alpha x+1$ s'écrit peut se réécrire

$$\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2+a^2 \text{ avec } a=\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{4}}.$$

On a alors
$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+\alpha x+1}=\left[\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{2x+\alpha}{a}\right)\right]_0^{+\infty}$$
puis
$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+\alpha x+1}=\frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{\alpha}{a}\right)\right).$$
Cas $\alpha=2$
$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+1}=\left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^{+\infty}=1.$$
Cas $\alpha>2$
Le trinôme $x^2+\alpha x+1$ à deux racines x_0,x_1 distinctes strictement négatives.
$$x_0=\frac{-\alpha-\sqrt{\Delta}}{2}\text{ et }x_1=\frac{-\alpha+\sqrt{\Delta}}{2}.$$
Par décomposition en éléments
$$\frac{1}{x^2+\alpha x+1}=\frac{a}{x-x_0}+\frac{b}{x-x_1}$$
avec
$$a=\frac{1}{x_1-x_0}=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\text{ et }b=\frac{1}{x_0-x_1}=-a.$$
On a alors
$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+\alpha x+1}=\frac{1}{x_1-x_0}\left[\ln\left(\frac{x-x_0}{x-x_1}\right)\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\ln\frac{\alpha+\sqrt{\Delta}}{\alpha-\sqrt{\Delta}}.$$

Exercice 42 : [énoncé]
La fonction $t\mapsto\frac{1}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}$ est définie et continue par morceaux sur $]-\infty\,;+\infty[$.
Quand $t\to+\infty$, $f(t)\sim\frac{1}{t^4}$ donc f est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
Quand $t\to-\infty$, $f(t)\sim\frac{1}{t^4}$ donc f est intégrable sur $]-\infty\,;0]$
On remarque
$$\frac{1}{t^2+a^2}-\frac{1}{t^2+b^2}=\frac{b^2-a^2}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}.$$
Pour $a\neq b$
$$I(a,b)=\frac{1}{b^2-a^2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2}-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+b^2}\right)$$
avec convergence des deux intégrales introduites.

Ainsi
$$I(a,b)=\frac{\pi}{ab(a+b)}.$$
Pour $a=b$,
$$I(a,a)=\frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(t^2+a^2-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^2}=\frac{1}{a^2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)}-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^2}{(t^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}t\right).$$
Par intégration par parties (avec deux convergences)
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t\times t}{(t^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+a^2}\right]_{-\infty}^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2}=\frac{\pi}{2a}$$
donc
$$I(a,a)=\frac{\pi}{2a^3}.$$

Exercice 43 : [énoncé]
La fonction $t\mapsto P(t)/Q(t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Pour $|t|\to+\infty$, $P(t)/Q(t)=\mathrm{O}\big(1/t^2\big)$ car $\deg(P/Q)\le-2$.
Par suite l'intégrale $\int_{\mathbb{R}}\frac{P}{Q}$ converge.
Les pôles de la fraction P/Q sont complexes conjugués non réels et les parties polaires correspondantes sont deux à deux conjuguées. On en déduit que $P/Q=2\,\mathrm{Re}(F)$ où F est la fraction rationnelle obtenue en sommant les parties polaires relatives aux pôles de partie imaginaire strictement positive.
Considérons un pôle $a=\alpha+\mathrm{i}\beta$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\beta>0$.
Pour les éléments simples de la forme $\frac{1}{(X-a)^m}$ avec $m>1$, on a
$\int_{\mathbb{R}}\frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^m}=\left[-\frac{1}{m-1}\frac{1}{(t-a)^{m-1}}\right]_{-\infty}^{+\infty}=0.$
Pour les éléments simples de la forme $\frac{1}{X-a}$ on a
$\int_{-A}^{A}\frac{\mathrm{d}t}{t-a}=\int_{-A}^{A}\frac{t-\alpha+\mathrm{i}\beta}{(t-\alpha)^2+\beta^2}=\left[\ln|t-a|+\mathrm{i}\arctan\left(\frac{t-\alpha}{\beta}\right)\right]_{-A}^{A}$. Quand $A\to+\infty$, on obtient $\int_{-A}^{A}\frac{\mathrm{d}t}{t-a}\to\mathrm{i}\pi$.
Puisque $\int_{\mathbb{R}}\frac{P}{Q}=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\frac{P(t)}{Q(t)}\,\mathrm{d}t$, on obtient $\int_{\mathbb{R}}\frac{P}{Q}=2\,\mathrm{Re}(\sigma)\pi$ avec σ la somme des coefficients facteurs des éléments simples $\frac{1}{X-a}$ avec a de parties imaginaires strictement positive.

Exercice 44 : [énoncé]

(a) L'intégrale en premier membre existe et définit une fonction dérivable de x avec

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_x^{+\infty}\frac{f(at)-f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t\right)=-\frac{f(ax)-f(bx)}{x}.$$

L'intégrale en second membre définit aussi une fonction dérivable de x avec

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{ax}^{bx}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u\right)=b\frac{f(bx)}{bx}-a\frac{f(ax)}{ax}=\frac{f(bx)-f(ax)}{x}.$$

On en déduit que les deux membres de l'égalité voulue sont égaux à une constante près.
Or ces deux fonctions de x sont de limite nulle quand $x\to+\infty$ et la constante précédente est alors nulle.

(b) Par continuité de f en 0, on peut écrire

$$f(t)=f(0)+\varphi(t) \text{ avec } \varphi \text{ de limite nulle en } 0.$$

On a alors

$$\int_{ax}^{bx}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t=f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)+\int_{ax}^{bx}\frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\left|\int_{ax}^{bx}\frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right|\leq\max_{t\in[ax;bx]}\left|\varphi(t)\right|\int_{ax}^{bx}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln\left(\frac{b}{a}\right)\max_{t\in[ax;bx]}\left|\varphi(t)\right|\xrightarrow[x\to0^+]{}0.$$

On conclut à la convergence de l'intégrale et à la valeur

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(at)-f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t=f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Exercice 45 : [énoncé]
L'intégrale étudiée est évidemment convergente car il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue sur le segment $[0;1]$. La fonction $x\mapsto\mathrm{e}^{-x}$ réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0;+\infty[$ vers $]0;1]$. Quitte à considérer l'intégrale initiale comme portant sur l'intervalle $]0;1]$, on peut opérer le changement de variable $t=\mathrm{e}^{-x}$

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{1+\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-4x}}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}}\,\mathrm{d}x \text{ car } \mathrm{d}t=-\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Par le théorème de changement de variable, l'intégrale introduite est assurément convergente. On peut aussi exprimer l'intégrale à l'aide des fonctions de trigonométrie hyperbolique

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}(2x)}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{ch}x}{1+2\operatorname{sh}^2x}\,\mathrm{d}x.$$

Par le changement de variable $u=\operatorname{sh}x$ (la fonction $x\mapsto\operatorname{sh}x$ induit une bijection $\mathcal{C}^1$)

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+2u^2}\,\mathrm{d}u \text{ car } \mathrm{d}u=\operatorname{ch}x\,\mathrm{d}x.$$

Enfin, par la formule d'intégration

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right)$$

avec $a=1/\sqrt{2}$, on peut achever le calcul

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arctan(\sqrt{2}u)\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Exercice 46 : [énoncé]

(a) L'intégrale de départ est bien définie. En effet, la fonction $f\colon x\mapsto(1+x^2)/(1+x^4)$ est définie et continue par morceaux sur $[0;+\infty[$ et on vérifie $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}1/x^2$ ce qui donne un argument d'intégrabilité.
Par le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant $x=\mathrm{e}^t$,

$$\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2t}+1}{\mathrm{e}^{4t}+1}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{ch}t}{\operatorname{ch}2t}\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\operatorname{ch}2t=2\operatorname{ch}^2t-1=1+2\operatorname{sh}^2t.$$

Par le nouveau changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant $u=\operatorname{sh}t$

$$\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+2u^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arctan(\sqrt{2}u)\right]_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

(b) Par le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement monotone $x=1/t$, on obtient

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\int_0^{+\infty}\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^4}$$

et donc

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Exercice 47 : [énoncé]
$f\colon t\mapsto \frac{1}{(1+t^2)^2}$ est définie et continue sur $[0\,;+\infty[$ et $f(t)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{t^4}$ donc I existe.
Via le changement de variable $u=1/t$:

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{u^2\,\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2}$$

d'où

$$2I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}$$

puis $I=\frac{\pi}{4}$.

Exercice 48 : [énoncé]

(a) Les deux intégrales convergent. Le changement de variable $u=1/x$ transforme l'une en l'autre.

(b)

$$2I=\int_0^{+\infty}\frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{x^3+1}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]_0^{+\infty}=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

donc

$$I=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Exercice 49 : [énoncé]
On a

$$\sqrt{\tan\theta}\underset{\theta=\pi/2-h}{=}\sqrt{\frac{\sin(\pi/2-h)}{\cos(\pi/2-h)}}=\sqrt{\frac{\cos h}{\sin h}}\sim\frac{1}{\sqrt{h}}$$

donc l'intégrale est bien définie.

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan\theta}\,\mathrm{d}\theta\underset{u=\sqrt{\tan\theta}}{=}\int_0^{+\infty}\frac{2u^2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

après calculs...

Exercice 50 : [énoncé]
On procède au changement de variable

$$x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin t$$

avec $t\in[-\pi/2\,;\pi/2]$.
On obtient

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}=\pi$$

(avec convergence de l'intégrale) et

$$\int_0^1\sqrt{x(1-x)}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}.$$

Exercice 51 : [énoncé]
La fonction $x\mapsto x^n(\ln x)^n$ est définie et continue sur $]0\,;1]$ et y est intégrable car on peut la prolonger par continuité en 0 sachant $x\ln x\xrightarrow[x\to 0^+]{}0$. L'intégrale définissant I_n est donc convergente.
Soit $\varepsilon\in]0\,;1]$. Par intégration par parties

$$\int_\varepsilon^1 x^n(\ln x)^n\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x)^n\right]_\varepsilon^1-\frac{n}{n+1}\int_\varepsilon^1 x^n(\ln x)^{n-1}\,\mathrm{d}x.$$

Quand $\varepsilon\to 0$, on obtient

$$I_n=-\frac{n}{n+1}\int_0^1 x^n(\ln x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$$

la nouvelle intégrale étant convergente par le même argument qu'au dessus.
En répétant l'opération, on obtient

$$I_n=(-1)^n\frac{n!}{(n+1)^n}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x=(-1)^n\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

On peut aussi procéder au calcul par le changement de variable $u=-\ln(x^{n+1})$ $\mathcal{C}^1$ strictement monotone

$$I_n=\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}\int_0^{+\infty}u^n\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u=\frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

Exercice 52 : [énoncé]
$f\colon x\mapsto \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc f est intégrable et $I_n=\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ existe.
Pour $n\in\mathbb{N}^*$:

$$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}}=\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x=I_{n-1}-\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Or

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x\underset{\text{ipp}}{=}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{n}\frac{x}{(1+x^2)^n}\right]_0^{+\infty}+\frac{1}{2n}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}=\frac{1}{2n}I_{n-1}.$$

L'intégration par parties est justifiée par deux convergences.
On obtient ainsi

$$I_n=\frac{2n-1}{2n}I_{n-1}.$$

Puisque $I_0=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$,

$$I_n=\frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{(2n)(2n-2)\dots 2}I_0=\frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi.$$

Exercice 53 : [énoncé]

(a) La fonction f est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$.
Quand $t\to0^+$, $\sqrt{t}f(t)\to0$ et quand $t\to+\infty$, $t^{3/2}f(t)\to0$ donc f est intégrable sur $]0\,;1]$ et $[1\,;+\infty[$.

(b) Par une intégration par parties où l'on choisit judicieusement une primitive s'annulant en 0

$$\int_0^1\frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t=\left[\ln t\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t=-\ln 2.$$

Par le changement de variable $u=1/t$

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t=-\int_0^1\frac{\ln u}{(u+1)^2}\,\mathrm{d}u=\ln 2.$$

Exercice 54 : [énoncé]
Sous réserve de convergence, nous calculons l'intégrale en procédant par intégration par parties en intégrant $\frac{1}{x^2}$ en $\frac{x-1}{x}$ qui s'annule en 1.

$$\int_0^1\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x=\left[\ln(1-x^2)\frac{x-1}{x}\right]_0^1+\int_0^1\frac{2x}{(1-x^2)}\frac{x-1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

L'intégration par parties est licite car le crochet converge. L'intégrale en second membre est faussement généralisée car se résume à

$$\int_0^1-\frac{\mathrm{d}x}{1+x}.$$

On en déduit que l'intégrale initiale converge et

$$\int_0^1\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x=-\int_0^1\frac{2}{(1+x)}\,\mathrm{d}x=-2\ln 2.$$

Exercice 55 : [énoncé]
Les fonctions u et v sont définies et continues par morceaux sur $[1\,;+\infty[$.
Puisque l'intégrale de f sur $[1\,;+\infty[$ converge, on a

$$u(x)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)\text{ quand }x\to+\infty$$

et donc u est intégrable sur $[1\,;+\infty[$.
Puisque $1/x\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$, on a

$$v(x)=\mathrm{o}\big(f(x)\big)\text{ quand }x\to+\infty$$

et donc v aussi est intégrable sur $[1\,;+\infty[$.
Par intégration par parties

$$\int_1^A u(x)\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]_1^A+\int_1^A v(x)\,\mathrm{d}x$$

et donc $A\to+\infty$ on obtient

$$\int_1^{+\infty}u(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 56 : [énoncé]
Quand $t \to 0^+$,

$$\frac{f(t)}{t} = \frac{f(t)-f(0)}{t} \to f'(0).$$

La fonction $t \mapsto f(t)/t$ peut donc se prolonger par continuité en 0 ce qui permet d'assurer l'existence des intégrales écrites.
Par intégration par parties

$$\int_\varepsilon^x \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t = \left[-\frac{(f(t))^2}{t}\right]_\varepsilon^x + 2\int_\varepsilon^x \frac{f(t)f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Quand $\varepsilon \to 0^+$, on obtient

$$\int_0^x \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t = -\frac{(f(x))^2}{x} + 2\int_0^x \frac{f(t)f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

et l'inégalité affirmée est désormais évidente.

Exercice 57 : [énoncé]

(a) $x \mapsto u'(x)$, $x \mapsto u(x)$ et $x \mapsto xu(x)$ sont de carrés intégrables donc $x \mapsto (xu(x)^2)' = u(x)^2 + xu'(x)u(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Par suite $x \mapsto xu(x)^2$ admet des limites finies quand $x \to \pm\infty$. Or cette fonction est elle-même intégrable sur $\mathbb{R}$ donc ses limites en $\pm\infty$ ne peuvent qu'être nulles.

(b) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u'(x)^2\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} x^2u(x)^2\,\mathrm{d}x \geq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} xu'(x)u(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

Or par intégration par parties

$$\int_{-n}^{n} xu'(x)u(x)\,\mathrm{d}x = \left[xu^2(x)\right]_{-n}^{n} - \int_{-n}^{n} u(x)(u(x)+xu'(x))\,\mathrm{d}x \text{ donc.}$$

Ainsi

$$\int_{-n}^{n} xu'(x)u(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[xu^2(x)\right]_{-n}^{n} - \frac{1}{2}\int_{-n}^{n} u^2(x)\,\mathrm{d}x$$

puis à la limite

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xu'(x)u(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x)\,\mathrm{d}x$$

et enfin l'inégalité voulue.

Exercice 58 : [énoncé]
La fonction $f\colon t \mapsto \ln\big(1+t^2/t^2\big)$ est définie et continue sur $I = \left]0\,;+\infty\right[$.
On a

$$\sqrt{t}f(t) \xrightarrow[t\to0^+]{} 0 \text{ et } f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

donc f est intégrable et l'intégrale étudiée converge.
Par intégration par parties justifiée par la convergence des deux intégrales écrites

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \left[t\ln\big(1+1/t^2\big)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \pi.$$

Exercice 59 : [énoncé]
On réalise l'intégration par parties avec

$$u(t) = \ln t \text{ et } v(t) = \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}.$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et le produit uv converge aux bornes d'intégration 0 et $+\infty$:

$$u(t)v(t) \underset{t\to0^+}{\sim} t\ln(t) \xrightarrow[t\to0^+]{} 0 \text{ et } u(t)v(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \ln(t)\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

Sous réserve d'existence, la formule d'intégration par parties donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \ln(t)\big(\mathrm{e}^{-t}-2\mathrm{e}^{-2t}\big)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction $t \mapsto \ln(t)\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $\left]0\,;+\infty\right[$ car négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$ et devant $1/\sqrt{t}$ en 0. De même, la fonction $t \mapsto \ln(t)\mathrm{e}^{-2t}$ est intégrable. On peut donc écrire la séparation

$$\int_0^{+\infty} \ln(t)\big(\mathrm{e}^{-t}-2\mathrm{e}^{-2t}\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t - 2\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t.$$

Cette identité justifie l'existence de l'intégrale en premier membre et donc aussi (en vertu du théorème d'intégration par parties) l'existence de l'intégrale initiale.
Par le changement de variable $u = 2t$

$$\begin{aligned} 2\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \ln(u/2)\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{+\infty} \ln(u)\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u - \ln 2\underbrace{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u}_{=1}. \end{aligned}$$

On en déduit par simplification

$$\int_0^{+\infty} \ln(t)\left(\mathrm{e}^{-t} - 2\mathrm{e}^{-2t}\right) \mathrm{d}t = \ln 2.$$

Exercice 60 : [énoncé]
La fonction $f_n \colon t \mapsto \frac{t^n}{\sqrt{1-t}}$ est définie et continue par morceaux sur $[0\,;1[$. Elle y est aussi intégrable car

$$f_n(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient par intégration par parties généralisée

$$I_n = \underbrace{\left[-2t^n\sqrt{1-t}\right]_0^1}_{=0} + \int_0^1 2nt^{n-1}\sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t$$

En écrivant

$$\sqrt{1-t} = \frac{1}{\sqrt{1-t}} - \frac{t}{\sqrt{1-t}}$$

il vient la relation de récurrence

$$I_n = 2n(I_{n-1} - I_n) \quad \text{donc} \quad I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$$

Un calcul direct donne $I_0 = 2$ et donc

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \cdots \times \frac{2}{3} I_0 = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Exercice 61 : [énoncé]
Notons que l'intégrale I_n est bien définie.

(a) On découpe l'intégrale en deux

$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}.$$

On réalise le changement de variable $x = 1/t$ sur la deuxième intégrale

$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} + \int_1^0 -\frac{t^{n-2}\,\mathrm{d}t}{1+t^n}$$

puis on combine les deux intégrales pour obtenir

$$I_n = \int_0^1 \frac{1+t^{n-2}}{1+t^n}\,\mathrm{d}t.$$

(b) On peut écrire

$$I_n = 1 + \int_0^1 \frac{t^{n-2} - t^n}{(1+t^n)}\,\mathrm{d}t.$$

D'une part

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^1 t\frac{nt^{n-1}}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$$

ce qui donne par intégration par parties

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\ln 2 - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$$

avec

$$0 \le \int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t \le \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

D'une part

$$\int_0^1 \frac{t^{n-2}}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_{]0;1]} \frac{1}{t}\frac{nt^{n-1}}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$$

avec par intégration par parties

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{t}\frac{nt^{n-1}}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\ln(1+t^n)}{t}\right]_\varepsilon^1 + \int_\varepsilon^1 \frac{\ln(1+t^n)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Quand $\varepsilon \to 0^+$, on obtient

$$\int_{]0;1]} \frac{1}{t}\frac{nt^{n-1}}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = \ln 2 + \int_{]0;1]} \frac{\ln(1+t^n)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

où, sachant $\ln(1+u) \le u$,

$$0 \le \int_{]0;1]} \frac{\ln(1+t^n)}{t^2}\,\mathrm{d}t \le \int_0^1 t^{n-2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n-1} \to 0.$$

On en déduit

$$I_n = 1 + \mathrm{o}(1/n).$$

Exercice 62 : [énoncé]
La fonction $f \colon x \mapsto \frac{1}{(1+x^3)^{n+1}}$ est définie et continue sur $[0\,;+\infty[$.
Puisque $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{3n+3}}$, la fonction f est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ et l'intégrale définissant J_n converge.

(a) Via une décomposition en éléments simples, on obtient
$$J_0=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$
(b) On écrit
$$J_n-J_{n+1}=\int_0^{+\infty}x\times\frac{x^2}{(1+x^3)^{n+2}}\,\mathrm{d}x.$$
On opère une intégration par parties avec convergence du crocher pour obtenir
$$J_{n+1}=\frac{3n+2}{3n+3}J_n.$$
(c) On pose $v_n=\sqrt[3]{n}J_n$.
$$\ln v_{n+1}-\ln v_n=\ln\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+\ln\left(1-\frac{1}{3n+3}\right)\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
donc la série de terme général $\ln v_{n+1}-\ln v_n$ converge et donc la suite de terme général $\ln v_n$ converge vers une certain réel ℓ. En posant $A=\mathrm{e}^\ell>0$, on obtient $v_n\to A$ donc $J_n\sim\frac{A}{\sqrt[3]{n}}$.

Exercice 63 : [énoncé]

(a) La fonction
$$f\colon t\mapsto\frac{t-\lfloor t\rfloor}{t(t+n)}$$
est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$.
Quand $t\to0^+$,
$$f(t)=\frac{t}{t(t+n)}=\frac{1}{t+n}\to\frac{1}{n}.$$
Quand $t\to+\infty$,
$$f(t)=\frac{\mathrm{O}(1)}{t(t+n)}=\mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$
On en déduit que f est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

(b) On remarque que
$$\frac{1}{t(t+n)}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+n}\right)$$
et on en déduit
$$\int_0^A\frac{t-\lfloor t\rfloor}{t(t+n)}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\int_0^A\frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}-\frac{t-\lfloor t\rfloor}{t+n}\,\mathrm{d}t.$$
Par linéarité de l'intégrale et changement de variable, on obtient
$$\int_0^A\frac{t-\lfloor t\rfloor}{t(t+n)}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\left(\int_0^A\frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}\,\mathrm{d}t-\int_n^{A+n}\frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}\,\mathrm{d}t\right).$$
Enfin par la relation de Chasles
$$\int_0^A\frac{t-\lfloor t\rfloor}{t(t+n)}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\left(\int_0^n\frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}\,\mathrm{d}t-\int_A^{A+n}\frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}\,\mathrm{d}t\right).$$
Puisque
$$0\le\int_A^{A+n}\frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}\,\mathrm{d}t\le\frac{1}{A}\int_A^{A+n}t-\lfloor t\rfloor\,\mathrm{d}t\le\frac{n}{A}$$
on obtient quand $A\to+\infty$
$$u_n=\frac{1}{n}\int_0^n\frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}\,\mathrm{d}t.$$
(c)
$$v_n=\int_0^n\frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}\,\mathrm{d}t.$$
Par suite
$$v_n-v_{n-1}=\int_{n-1}^n\frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{u}{u+(n-1)}\,\mathrm{d}u$$
puis
$$v_n-v_{n-1}=1-(n-1)\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right).$$
Par développement limité, on obtient
$$v_n-v_{n-1}=\frac{1}{2(n-1)}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
On en déduit que la série de terme général
$$v_n-v_{n-1}-\frac{1}{2n}=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
(d) Posons
$$S=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(H(n)-H(n-1)-\frac{1}{2n}\right).$$

On a
$$\sum_{k=1}^{n}\left(v_k - v_{k-1} - \frac{1}{2k}\right) = S + \mathrm{o}(1)$$
donc
$$v_n - v_1 - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} = S + \mathrm{o}(1).$$
Sachant
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$$
on obtient
$$v_n \sim \frac{\ln n}{2}$$
puis
$$u_n \sim \frac{\ln n}{2n}.$$

Exercice 64 : [énoncé]

(a) 0, cf. lemme de Lebesgue.

(b) Posons
$$I_n = \int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2nt)\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t.$$
Cette intégrale existe car un prolongement par continuité est possible en 0.
On observe
$$\sin(2(n+1)t) - \sin(2nt) = 2\sin t\cos(2n+1)t$$
et donc
$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} 2\cos((2n+1)t)\cos t\,\mathrm{d}t = 0.$$
La suite (I_n) est constante égale à
$$I_1 = \int_0^{\pi/2} 2\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

(c) On a
$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2nt)\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2nt)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}\sin(2nt)f(t)\,\mathrm{d}t$$
avec
$$f(t) = \cot t - \frac{1}{t}$$
qui se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;\pi/2]$.
Ainsi
$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2nt)}{t}\,\mathrm{d}t \to \frac{\pi}{2}.$$
Or
$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2nt)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{n\pi}\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$$
donc la convergence de l'intégrale de Dirichlet étant supposée connue, on obtient
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

(d) On a
$$\int_0^{\pi/2}\ln(2\sin(t/2))\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}\ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2}\ln(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t.$$
Par intégration par parties,
$$\int_0^{\pi/2}\ln(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{\ln(\pi/2)\sin(n\pi/2)}{n} - \frac{1}{n}\int_0^{n\pi/2}\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u.$$
La fonction $t \mapsto \ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0\,;\pi/2]$.
Par intégration par parties,
$$\int_0^{\pi/2}\ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right)\sin(n\pi/2) - \frac{1}{n}\int_0^{\pi/2}\left(\ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)\right)'\sin($$
La fonction $t \mapsto \left(\ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)\right)'$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;\pi/2]$, on a
$$\frac{1}{n}\int_0^{\pi/2}\left(\ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)\right)'\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$
et donc
$$\int_0^{\pi/2}\ln(2\sin(t/2))\cos(nt)\,\mathrm{d}t \sim \frac{(\ln 2)\sin(n\pi/2) - \pi}{2n}.$$

Exercice 65 : [énoncé]
La fonction intégrée est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$.
Elle se prolonge par continuité par la valeur 1 en 0 et est donc intégrable sur $]0\,;1]$.
Par une intégration par parties

$$\int_1^A \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^A - \int_1^A \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Or il y a convergence des deux termes en second membre quand $A \to +\infty$ et donc il y a convergence de

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Finalement, l'intégrale étudiée converge.

Exercice 66 : [énoncé]
Commençons par étudier la convergence de la suite (S_n) de terme général

$$S_n = \int_0^{n\pi} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par la relation de Chasles, on peut découper l'intégrale

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par translation de la variable

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} f(t+k\pi)\sin(t+k\pi)\,\mathrm{d}t = (-1)^k v_k$$

avec

$$v_k = \int_0^{\pi} f(t+k\pi)\sin(t)\,\mathrm{d}t.$$

Puisque f est positive, la suite (v_k) est à termes positifs.
Puisque f est décroissante, la suite (v_k) est décroissante.
Enfin, puisque f tend vers 0 en $+\infty$ et puisque

$$0 \le v_k \le f(k\pi)\pi$$

la suite (v_n) tend vers 0.
Par le critère spécial des séries alternées, on obtient que la série de terme général $(-1)^k v_k$ converge, autrement dit, que la suite (S_n) converge. Notons S sa limite.

Soit $X \ge 0$. En notant n_X la partie entière de X/π, on peut écrire

$$\int_0^X f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t = S_{n_X} + \int_{n_X\pi}^X f(t)\,\mathrm{d}t$$

avec

$$0 \le \int_{n_X\pi}^X f(t)\,\mathrm{d}t \le \int_{n_X\pi}^X f(n_X\pi)\,\mathrm{d}t = f(n_X\pi)(X - n_X\pi) \le f(n_X\pi)\pi.$$

Quand $X \to +\infty$, on a $n_X \to +\infty$, $S_{n_X} \to S$ et par l'encadrement qui précède

$$\int_{n_X\pi}^X f(t)\,\mathrm{d}t \to 0.$$

On en déduit

$$\int_0^X f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t \to S.$$

Exercice 67 : [énoncé]
Par intégration par parties

$$\int_0^x \sin(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{e}^t\sin(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \Big[-\cos(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^x - \int_0^x \cos(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

D'une part

$$\cos(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

et d'autre part $t \mapsto \cos(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0\,;+\infty]$ car

$$t^2\cos(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

donc l'intégrale $\int_0^{+\infty}\sin(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 68 : [énoncé]
Par un argument de parité, il suffit d'établir la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2t}{2t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Formellement

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t}{2t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}-1}{2\mathrm{i}t}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}-1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

où la primitive de $2t\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}$ a été choisie de sorte de s'annuler en 0.
Puisque les deux termes en second membre sont convergents, le théorème d'intégration par parties s'applique et assure la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 69 : [énoncé]
Procédons au changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$, $t = \sqrt{\lambda}x$

$$f(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^{\sqrt{\lambda}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Or par le changement de variable $u = t^2$

$$\int_0^A \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{A^2} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

puis par intégration par parties

$$\int_0^A \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}-1}{\mathrm{i}\sqrt{u}}\right]_0^A + \frac{1}{2}\int_0^{A^2} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}-1}{\mathrm{i}u^{3/2}}\,\mathrm{d}u\right)$$

et donc

$$\int_0^A \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{i}}{4}\int_0^{A^2} \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{u^{3/2}}\,\mathrm{d}u.$$

L'intégrale en second membre converge donc

$$\int_0^A \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[A\to+\infty]{} C.$$

De plus, la partie imaginaire de C est strictement positive en vertu de l'expression intégrale précédente, donc

$$f(\lambda) \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \frac{C}{\sqrt{\lambda}}.$$

Le calcul explicite de C est difficile, cf. intégrale de Fresnel.

Exercice 70 : [énoncé]

(a) Pour $x > a > 0$

$$\int_a^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t = \int_a^x \frac{2\mathrm{i}t}{2\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}-1}{2\mathrm{i}t}\right]_a^x + \int_a^x \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}-1}{2\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t.$$

À la limite quand $a \to 0$,

$$\int_a^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t \to \int_0^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t,\ \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a^2}-1}{2\mathrm{i}a} \sim \frac{a}{2} \to 0$$

et

$$\int_a^x \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}-1}{2\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t \to \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}-1}{2\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t$$

car cette dernière intégrale converge.
Ainsi

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}-1}{2\mathrm{i}x} + \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}-1}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Puisque

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}-1}{2\mathrm{i}x}\right| \le \frac{1}{x} \to 0 \text{ et } \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}-1}{2\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t \to \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}-1}{2\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t$$

car cette dernière intégrale converge.
Par suite

$$f(x) \to \lambda = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}-1}{2\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t.$$

(b)

$$g(x) = \lambda - f(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}-1}{t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}-1}{2\mathrm{i}x}$$

donc

$$g(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}-1}{2\mathrm{i}x}$$

car ces deux dernières intégrales sont bien définies. Par suite

$$g(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}}{2\mathrm{i}x}.$$

(c) Par intégration par parties généralisée

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t}{t^2} = \int_x^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t}{t^3} = \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}}{2\mathrm{i}t^3}\right]_x^{+\infty} + \frac{3}{2\mathrm{i}}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t}{t^4}.$$

Par suite

$$\left|\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t}{t^2}\right| = \left|-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}}{2\mathrm{i}x^3}+\frac{3}{2\mathrm{i}}\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t}{t^4}\right| \le \frac{1}{2x^3}+\frac{3}{2}\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^4}=\frac{1}{x^3}.$$

Donc

$$\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t}{t^2}=\mathrm{O}\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Exercice 71 : [énoncé]

Soit F la primitive de f s'annulant en 0. Par hypothèse

$$F(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\ell=\int_0^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par intégration par parties, on peut écrire

$$\frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = F(x)-\frac{1}{x}\int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t-\ell\right|\le\frac{1}{x}\int_0^x\left|F(t)-\ell\right|\mathrm{d}t.$$

Soit $\varepsilon>0$. Il existe $A\in\mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall t\ge A,\left|F(t)-\ell\right|\le\varepsilon.$$

Par continuité sur $[0\,;A]$, $\left|F(t)-\ell\right|$ est majorée par un certain $M>0$.
Pour $x\ge\max(A,AM/\varepsilon)$ on a

$$\frac{1}{x}\int_0^x\left|F(t)-\ell\right|\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^A\left|F(t)-\ell\right|\mathrm{d}t+\frac{1}{x}\int_A^x\left|F(t)-\ell\right|\mathrm{d}t\le 2\varepsilon.$$

Par conséquent

$$\frac{1}{x}\int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t\xrightarrow[x\to+\infty]{}\ell$$

puis

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t=0.$$

Notons que sans l'hypothèse d'intégrabilité de f, on ne peut pas exploiter le théorème de convergence dominée.

Exercice 72 : [énoncé]

Supposons la convergence de l'intégrale de f sur $[1\,;+\infty[$.
Puisque f est continue, on peut introduire une primitive F de f et celle-ci admet donc une limite finie en $+\infty$. Par intégration par parties

$$\int_1^A\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{F(t)}{t}\right]_1^A+\int_1^A\frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Or $F(A)/A\xrightarrow[A\to+\infty]{}0$ et $t\mapsto F(t)/t^2$ est intégrable sur $[1\,;+\infty[$ car F est bornée au voisinage de $+\infty$.
On en déduit donc par opérations la convergence de l'intégrale de $t\mapsto f(t)/t$ sur $[1\,;+\infty[$.

Exercice 73 : [énoncé]

Soit F une primitive de la fonction continue f sur $[0\,;+\infty[$. Formellement

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t^\alpha+1}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{F(t)}{t^\alpha+1}\right]_0^{+\infty}+\alpha\int_0^{+\infty}\frac{F(t)t^{\alpha-1}}{(t^\alpha+1)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Supposons la convergence de $\int_0^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t$. La primitive F est alors convergente en $+\infty$ et donc dans l'intégration par parties précédente, le crochet est convergent en $+\infty$.
De plus, la fonction F est bornée car continue sur $[0\,;+\infty[$ et convergente en $+\infty$.
Par suite, quand $t\to+\infty$,

$$\frac{F(t)t^{\alpha-1}}{(t^\alpha+1)^2}=\mathrm{O}\left(\frac{1}{t^{\alpha+1}}\right)$$

et puisque $\alpha>0$, on a la convergence de la deuxième intégrale dans la formule d'intégration par parties précédente.
Par le théorème d'intégration par parties, on peut affirmer que $\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 74 : [énoncé]

Posons

$$G(x)=\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par intégration par parties

$$\int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t=\Big[f(t)G(t)\Big]_a^x-\int_a^x f'(t)G(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'une part
$$\Big[f(t)G(t)\Big]_a^x = f(x)G(x) - f(a)G(a) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$
car G est bornée et f de limite nulle en $+\infty$.
D'autre part, il y a convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f'(t)G(t)\,\mathrm{d}t$. En effet
$$\int_a^x \left|f'(t)G(t)\right|\mathrm{d}t = \int_a^x -f'(t)\left|G(t)\right|\mathrm{d}t \le \int_a^x -f'(t)M\,\mathrm{d}t = \big(f(a)-f(x)\big)M.$$
Ainsi
$$\int_a^x \left|f'(t)G(t)\right|\mathrm{d}t \le f(a)M.$$
Ses intégrales partielles étant majorées, il y a convergence de $\int_a^{+\infty}\left|f'(t)G(t)\right|\mathrm{d}t$.
Ainsi $f'G$ est intégrable sur $[a\,;+\infty[$. On peut alors conclure
$$\int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_a^{+\infty} f'(t)G(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 75 : [énoncé]

(a) Pour $a\le 0$, l'intégrale n'est pas définie. Pour $a>0$, $\frac{1}{t^a+1}\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{1}{t^a}$, par suite $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^a+1}$ n'est définie que pour $a>1$. Finalement f est définie sur $]1\,;+\infty[$.

(b) Si $1<a\le b$ alors
$$\forall t\ge 1, \frac{1}{t^b+1}\le\frac{1}{t^a+1}$$
donc $f(b)\le f(a)$. Ainsi f est décroissante.
$$0\le f(a)\le\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^a} = \frac{1}{1-a}\left[\frac{1}{t^{a-1}}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{a-1}\xrightarrow[a\to+\infty]{} 0.$$

Exercice 76 : [énoncé]

(a) $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\underset{t\to0^+}{\sim} t^{x-1}$ et $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{O}_{+\infty}(1/t^2)$ la fonction $t\mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ et par suite $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est bien définie pour $x>0$.

(b) Pour $x>1$, les deux intégrales étant définies :
$$\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \Big[-t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^{+\infty} + (x-1)\int_0^{+\infty}t^{x-2}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$
Ainsi
$$\forall x>1, \Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1).$$
Sachant
$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \big(-\mathrm{e}^{-t}\big) = 1.$$
on obtient par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$
$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Exercice 77 : [énoncé]

(a) La fonction $t\mapsto\frac{t^{x-1}}{1+t}$ est définie et continue sur $]0\,;1]$ et $\frac{t^{x-1}}{1+t}\underset{t\to0}{\sim}\frac{1}{t^{1-x}}$.
Par équivalence de fonctions positives, l'intégrale définissant $f(x)$ existe si, et seulement si, $x>0$.

(b) Pour $x\le y$, on a
$$\forall t\in\,]0\,;1], \frac{t^{x-1}}{1+t}\ge\frac{t^{y-1}}{1+t}$$
puis en intégrant $f(x)\ge f(y)$.
La fonction f est donc décroissante.

(c) On a
$$f(x)+f(x+1) = \int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}.$$

(d) Puisque f est décroissante et positive, f converge en $+\infty$. Posons ℓ sa limite.
En passant à la limite la relation obtenue ci-dessus, on obtient $2\ell=0$ donc $\ell=0$.
Par décroissance
$$f(x)+f(x+1)\le 2f(x)\le f(x-1)+f(x)$$
donc
$$\frac{1}{x}\le 2f(x)\le\frac{1}{x-1}.$$
On en déduit
$$f(x)\sim\frac{1}{2x}.$$

(e) c) Quand $x\to0^+$,
$$0\le f(x+1) = \int_0^1\frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t\le\int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+1}\le 1$$

donc
$$f(x+1) \underset{x\to 0^+}{=} \mathrm{O}(1) = \mathrm{o}(1/x)$$
et par suite
$$f(x) = 1/x - f(x+1) \underset{x\to 0^+}{\sim} 1/x \to +\infty.$$

Exercice 78 : [énoncé]

(a) Par intégration par parties,
$$\left|\int_0^A \varphi(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t\right| \le \frac{|\varphi(0)| + |\varphi(A)|}{x} + \frac{1}{x}\int_0^A \left|\varphi'(t)\right|\mathrm{d}t$$
qui permet de conclure.

(b) Pour $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que
$$\int_A^{+\infty} \left|\varphi(t)\right|\mathrm{d}t \le \varepsilon$$
car φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. De plus, pour x assez grand,
$$\left|\int_0^A \varphi(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t\right| \le \varepsilon$$
donc
$$\left|\int_0^{+\infty} \varphi(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t\right| \le 2\varepsilon$$
ce qui permet de conclure.

Exercice 79 : [énoncé]

(a) Quand $t \to +\infty$, $\mathrm{e}^{-t}/t = \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-t})$ donc $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}/t$ est intégrable sur tout $[x\,;+\infty[\subset]0\,;+\infty[$.

(b)
$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = F(1) - \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$
est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $F'(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.

(c) Quand $x \to +\infty$
$$0 \le xF(x) = \int_x^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \le \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t - \int_1^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \to 0.$$
Quand $x \to 0^+$
$$xF(x) = x\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = x\left(\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + \int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\right)$$
donc
$$0 \le xF(x) \le x(F(1) + \int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t) \le xF(1) + x\ln x \to 0.$$

(d) Par intégration par parties formelle
$$\int_0^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x = \Big[xF(x)\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$
L'intégration par parties est justifiée par deux convergences et finalement
$$\int_0^{+\infty} F(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Exercice 80 : [énoncé]

(a) La fonction $t \mapsto \sin(t)/t$ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$. On peut la prolonger par continuité en 0 en y posant la valeur 1. Par intégration par parties où l'on intègre l'expression $\sin t$ en $1-\cos t$
$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^x + \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$
Quand $x \to +\infty$, on a
$$\frac{1-\cos x}{x} \to 0$$
et
$$\int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t \to \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
cette dernière intégrale étant convergente car la fonction peut être prolongée par continuité en 0 et est dominée par la fonction intégrable $t \mapsto 1/t^2$ en $+\infty$.

(b) Soit F la primitive s'annulant en 0 du prolongement par continuité de $t \mapsto \sin(t)/t$. On a

$$f(x) = \lim_{+\infty} F - F(x).$$

Puisque la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction f est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = -F'(x) = -\frac{\sin x}{x}.$$

(c) Par intégration par parties,

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[tf(t)\Big]_0^x - \int_0^x tf'(t)\,\mathrm{d}t = xf(x) + \int_0^x \sin t\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$xf(x) = \cos x - x\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

puis

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1 - x\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Mais par intégration par parties on établit encore

$$\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin t}{t^2}\right]_x^{+\infty} - 2\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^3}\,\mathrm{d}t$$

avec

$$\left|\int_x^{+\infty} 2\frac{\sin t}{t^3}\,\mathrm{d}t\right| \le \int_x^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^3} = \frac{1}{x^2}$$

ce qui permet d'affirmer

$$x\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Finalement $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Exercice 81 : [énoncé]

(a)

$$f\colon t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^3-1}} = \frac{t}{\sqrt{(t-1)(t^2+t+1)}}$$

est définie et continue sur $]1\,;x]$ et

$$f(t) \underset{1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{t-1}}$$

donc $F(x)$ existe.
F est primitive de la fonction continue f sur $]1\,;+\infty[$ donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ et $F'(x) = f(x)$.
Comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, F est finalement de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sur $]1\,;+\infty[$

$$F'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3-1}}.$$

(b) F est continue en 1 et $F'(x) \xrightarrow[x\to1]{} +\infty$. Tangente verticale en 1.

(c) $\sqrt{t^3-1} \le t^{3/2}$ donc

$$F(x) \ge \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{x} - 2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

donc $F(x) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$.

(d) F est continue et strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$ donc F réalise une bijection de $[1\,;+\infty[$ sur $[0\,;+\infty[$.
F réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $]1\,;+\infty[$ sur $]0\,;+\infty[$ avec $F'(x) \ne 0$ donc F^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$.

$$(F^{-1})' = \frac{1}{F' \circ F^{-1}} = \frac{\sqrt{(F^{-1})^3 - 1}}{F^{-1}}$$

donc F^{-1} est solution de l'équation différentielle considérée.

(e) F^{-1} est continue en 0 et $F^{-1}(0) = 1$. En vertu de la relation

$$(F^{-1})' = \frac{\sqrt{(F^{-1})^3 - 1}}{F^{-1}}$$

on obtient

$$(F^{-1})'(x) \xrightarrow[x\to0]{} 0$$

F^{-1} est donc dérivable en 0 et $(F^{-1})'(0) = 0$

Exercice 82 : [énoncé]

(a) Soient $x, y > 0$.
La fonction
$$f : t \mapsto \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t(t+x)}$$
est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[\, \supset\,]0\,;y]$ et quand $t \to 0$,
$$f(t) = \frac{t}{t(t+x)} = \frac{1}{t+x} \to \frac{1}{x}$$
donc f est prolongeable par continuité en 0.
Par suite l'intégrale définissant $G(x,y)$ existe bien.

(b) Quand $t \to +\infty$,
$$f(t) = \frac{\mathrm{O}(1)}{t(t+x)} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$
donc f est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
Par suite $G(x,y)$ converge quand $y \to +\infty$ vers
$$G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t(t+x)}\,\mathrm{d}t.$$

(c) On remarque que
$$\frac{1}{t(t+n)} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+n}\right)$$
et on en déduit
$$G(n,y) = \frac{1}{n}\int_0^y \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t} - \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t+n}\,\mathrm{d}t.$$
Par linéarité de l'intégrale et changement de variable, on obtient
$$G(n,y) = \frac{1}{n}\left(\int_0^y \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t}\,\mathrm{d}t - \int_n^{y+n} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t}\,\mathrm{d}t\right).$$
Enfin par la relation de Chasles
$$G(n,y) = \frac{1}{n}\left(\int_0^n \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t}\,\mathrm{d}t - \int_y^{y+n} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t}\,\mathrm{d}t\right).$$

(d) Puisque
$$0 \le \int_y^{y+n} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t}\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{y}\int_y^{y+n} t - \lfloor t \rfloor\,\mathrm{d}t \le \frac{n}{y}$$
on obtient quand $y \to +\infty$
$$G(n) = \frac{1}{n}\int_0^n \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t}\,\mathrm{d}t$$
et on a alors
$$H(n) = \int_0^n \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t}\,\mathrm{d}t.$$
Par suite
$$H(n) - H(n-1) = \int_{n-1}^n \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{u}{u + (n-1)}\,\mathrm{d}u$$
puis
$$H(n) - H(n-1) = 1 - (n-1)\ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right).$$
Par développement limité, on obtient
$$H(n) - H(n-1) = \frac{1}{2(n-1)} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
On en déduit que la série de terme général
$$H(n) - H(n-1) - \frac{1}{2n} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
Posons
$$S = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(H(n) - H(n-1) - \frac{1}{2n}\right).$$
On a
$$\sum_{k=1}^{n}\left(H(k) - H(k-1) - \frac{1}{2k}\right) = S + \mathrm{o}(1)$$
donc
$$H(n) - H(1) - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} = S + \mathrm{o}(1).$$
Sachant
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$$
on obtient
$$H(n) \sim \frac{1}{2}\ln n$$
puis
$$G(n) \sim \frac{\ln n}{2n}.$$

Exercice 83 : [énoncé]
L'intégrale étudiée est convergente puisque $t^2\mathrm{e}^{-t}/t \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.
Procédons à une intégration par parties avec $u(t) = -\mathrm{e}^{-t}$ et $v(t) = 1/t$.
Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et le produit uv converge en $+\infty$. On a donc

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\right)$$

donc, par intégration de relation de comparaison

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{o}\left(\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\right)$$

et donc

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}.$$

Exercice 84 : [énoncé]
Par intégration par parties

$$\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

et en répétant celle-ci

$$\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^t}{t} + \frac{\mathrm{e}^t}{t^2}\right]_1^x + \int_1^x 2\frac{\mathrm{e}^t}{t^3}\,\mathrm{d}t.$$

Or, toujours par intégration par parties

$$\int_1^x 2\frac{\mathrm{e}^t}{t^3}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2\mathrm{e}^t}{t^3}\right]_1^x + \int_1^x \frac{6\mathrm{e}^t}{t^4}\,\mathrm{d}t.$$

Mais

$$\frac{\mathrm{e}^t}{t^4} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{\mathrm{e}^t}{t^3}\right) \text{ et } t \mapsto \frac{\mathrm{e}^t}{t} \text{ est positive non intégrable sur } [1\,;+\infty[$$

donc, par intégration de relation de comparaison

$$\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^4}\,\mathrm{d}t = \mathrm{o}\left(\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^3}\right).$$

Ceci donne

$$\int_1^x 2\frac{\mathrm{e}^t}{t^3}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} \frac{2\mathrm{e}^x}{x^3} - 2\mathrm{e} + \mathrm{o}\left(\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^3}\,\mathrm{d}t\right) \sim \frac{2\mathrm{e}^x}{x^3}$$

puis, dans le calcul initial

$$\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\mathrm{e}^x}{x} + \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} + \frac{2\mathrm{e}^x}{x^3} + \mathrm{o}\left(\frac{2\mathrm{e}^x}{x^3}\right)$$

en ayant intégré le terme constant dans le terme négligeable.

Exercice 85 : [énoncé]
Puisque f est continue en 0, on peut écrire

$$f(x) = f(0) + \varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon \xrightarrow[0]{} 0.$$

On a alors

$$\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{ax}^{bx} \frac{f(0)}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{ax}^{bx} \frac{\varepsilon(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

D'une part

$$\int_{ax}^{bx} \frac{f(0)}{t}\,\mathrm{d}t = f(0)\ln\frac{b}{a}$$

et d'autre part

$$\left|\int_{ax}^{bx} \frac{\varepsilon(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right| \le \max_{t\in[ax;bx]} \left|\varepsilon(t)\right| \ln\frac{b}{a} \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

On peut conclure

$$\lim_{x\to 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

Exercice 86 : [énoncé]
Puisque f est positive et non intégrable, on sait

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A \ge 0$ tel que

$$\forall x \ge A, \left|f'(x)\right| \le \varepsilon\left|f(x)\right|$$

et alors

$$\forall x \ge A, f(x) = f(A) + \int_A^x f'(t)\,\mathrm{d}t \le f(A) + \varepsilon\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Puisque $f(A)$ est une constante et $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, il existe $A' \geq 0$ tel que

$$\forall x \geq A', f(A) \leq \varepsilon \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour $x \geq \max(A, A')$, on obtient

$$0 \leq f(x) \leq 2\varepsilon \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

et on peut alors conclure.

Exercice 87 : [énoncé]

(a) *Par la monotonie de f, on encadre $f(k/n)$ à l'aide d'intégrales dont k/n est une borne.*

Cas: f est croissante. Pour tout $k \in [\![1\,;n-1]\!]$, on a $f(k/n) \leq f(t)$ pour tout t d'un intervalle d'extrémités[1] k/n et $(k+1)/n$. En intégrant en bon ordre, on obtient

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{k/n}^{(k+1)/n} f\left(\frac{k}{n}\right) \mathrm{d}t \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

De façon semblable, on a aussi

$$\int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

En sommant ces comparaisons pour k allant de 1 à n, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Enfin, par la relation de Chasles,

$$\int_0^{1-1/n} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{1/n}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. L'extrémité k/n est fermée et l'extrémité $(k+1)/n$ aussi sauf lorsque $k = n-1$ auquel cas l'intégrale qui suit est généralisée en sa borne supérieure.

À l'aide de la convergence de l'intégrale de f sur $]0\,;1[$, on peut affirmer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{1-1/n} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_{1/n}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

et l'on conclut par le théorème de convergence par encadrement

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cas: f est décroissante. L'étude est analogue[2] à la précédente sauf que les inégalités sont renversées. La conclusion est identique.

(b) *On passe au logarithme pour retrouver la forme de la question précédente.*

On a

$$\ln\left(\sqrt[n]{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{2n}\right)\times\cdots\times\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)$$

ce qui invite à introduire la fonction $f\colon]0\,;1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \ln\left(\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right).$$

Celle-ci est continue, croissante et intégrable sur $]0\,;1]$ car négligeable devant $t \mapsto t^{-1/2}$ en 0^+ :

$$\sqrt{t}\ln\left(\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right) = \underbrace{\sqrt{t}\ln(t)}_{\to 0} + \underbrace{\sqrt{t}}_{\to 0}\ \underbrace{\ln\left(\frac{1}{t}\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)}_{\to \ln(\pi/2)} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0.$$

On en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\sqrt[n]{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{2n}\right)\times\cdots\times\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)}\right) = \int_0^1 \ln\left(\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)\mathrm{d}t.$$

Enfin, par le changement de variable $t = \frac{\pi x}{2}$, on transforme cette intégrale en celle calculée dans le sujet 673 et l'on peut conclure

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{2n}\right)\times\cdots\times\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)} = \mathrm{e}^{-\ln(2)} = \frac{1}{2}.$$

2. On peut aussi considérer $-f$ au lieu de f pour se ramener à la situation du dessus.